

Spis treści

Wprowadzenie.....	4
Zadania sprawdzające wymagania z podstawy programowej – poziom podstawowy ...	7
I. Liczby rzeczywiste.....	7
II. Wyrażenia algebraiczne	13
III. Równania i nierówności.....	19
IV. Układy równań	27
V. Funkcje	33
VI. Ciągi.....	43
VII. Trygonometria.....	51
VIII. Planimetria.....	57
IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej	65
X. Stereometria	73
XI. Kombinatoryka	79
XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka	83
XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy	87
Zasady oceniania	91
I. Liczby rzeczywiste.....	92
II. Wyrażenia algebraiczne	97
III. Równania i nierówności.....	100
IV. Układy równań	106
V. Funkcje	112
VI. Ciągi.....	118
VII. Trygonometria.....	126
VIII. Planimetria.....	130
IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej	139
X. Stereometria	151
XI. Kombinatoryka	154
XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka	156
XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy	158

Wprowadzenie

Matematyka jest nauką, która stanowi istotne wsparcie dla innych dziedzin, zwłaszcza dla nauk przyrodniczych i informatycznych. Nauczanie matematyki w szkole opiera się na czterech fundamentach: nauce rozumowania matematycznego, analizie i interpretacji informacji, kształceniu sprawności rachunkowej oraz przekazywaniu wiedzy o własnościach obiektów matematycznych.

Sprawność rachunkowa

Sprawność rachunkowa jest niezwykle ważnym elementem nauczania matematyki nawet obecnie, kiedy wiele rachunków wykonuje się za pomocą sprzętu elektronicznego. Ważnym celem ćwiczenia sprawności rachunkowej jest kształtowanie wyobrażenia o wielkościach liczb, a w konsekwencji doskonalenie umiejętności precyzyjnego szacowania wyników. Takie wyobrażenie ułatwia codzienne życie, na przykład planowanie budżetu domowego. Na wyższym poziomie, przy działaniach na wyrażeniach algebraicznych, sprawność rachunkowa pozwala doskonalić umiejętność operowania obiektami matematycznymi.

Wykorzystanie i tworzenie informacji

Istotnym elementem edukacji matematycznej jest umiejętność analizy i interpretacji tekstu matematycznego przedstawionego w różnej formie, np. relacji, wykresów, tabel, diagramów oraz interpretacji uzyskanego wyniku, sensowności otrzymanego rozwiązania.

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji

Wiedza o właściwościach obiektów matematycznych pozwala na swobodne operowanie nimi i stosowanie obiektów matematycznych do opisu bądź modelowania zjawisk obserwowanych w rzeczywistości. Właściwości matematyczne modeli przekładają się często na konkretne własności obiektów rzeczywistych.

Rozumowanie matematyczne

Rozumowanie matematyczne to umiejętność poszukiwania rozwiązania danego zagadnienia. Dobrze kształcona rozwija zdolność myślenia konstruktywnego, premiuje postępowanie nieschematyczne i twórcze. Ponadto rozumowanie matematyczne narzuca pewien rygor ścisłości: dowód matematyczny musi być poprawny. Dobrze opanowanie umiejętności rozumowania matematycznego ułatwia w życiu codziennym odróżnianie prawdy od fałszu.

Powyższe umiejętności zostały ujęte w podstawie programowej jako cele kształcenia – wymagania ogólne.

Cele kształcenia – wymagania ogólne

- I. Sprawność rachunkowa.
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.
- II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.
 2. Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych.
- III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.
 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.
 4. Wskazywanie konieczności lub możliwości modyfikacji modelu matematycznego w przypadkach wymagających specjalnych zastrzeżeń, dodatkowych założeń, rozważenia szczególnych uwarunkowań.
- IV. Rozumowanie i argumentacja.
 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.
 2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.
 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.
 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

Zadania sprawdzające wymagania z podstawy programowej – poziom podstawowy

I. Liczby rzeczywiste

Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru I

Uczeń:

- 1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
- 2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż:
 - a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych,
 - b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2;
- 3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;
- 4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;
- 5) stosuje własności monotoniczności potęgowania, w szczególności własności: jeśli $x < y$ oraz $a > 1$, to $a^x < a^y$, zaś gdy $x < y$ i $0 < a < 1$, to $a^x > a^y$;
- 6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;
- 7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $|x + 4| = 5$, $|x - 2| < 3$, $|x + 3| \geq 4$;
- 8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów;
- 9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Komentarz

W tym dziale sprawdzana jest sprawność wykonywania działań na liczbach z uwzględnieniem ich własności i związków między nimi (potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie). Sprawdzana jest również umiejętność posługiwania się przedziałami liczbowymi. Wybrane zadania weryfikują sprawność przeprowadzenia rozumowania matematycznego, polegającego na wykazaniu podzielności liczb.

Pojęcia

- działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie)
- proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia
- własności pierwiastków
- związek pierwiastkowania z potęgowaniem
- własności monotoniczności potęgowania
- przedziały liczbowe
- interpretacja geometryczna i algebraiczna wartości bezwzględnej

Zadanie 7. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $\log k + \log \frac{1}{100} k^2 - \log \frac{1}{10} k^3$, gdzie $k > 0$, jest równa

- A. 0 B. 1 C. (-1) D. k

Brudnopis																			

Zadanie 8. (0–2)

Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają następujące warunki:

$$x, y, z > 0 \quad \text{oraz} \quad x, y, z \neq 1 \quad \text{oraz} \quad y^z = x$$

Dokończ zdanie. Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

Z podanych warunków wynika, że prawdziwe są równości

- A. $\log_x y = z$ B. $y^{-\log_y x} = \frac{1}{x}$
C. $\log_x z = y$ D. $y^{\log_x y} = x$
E. $\log_y x = z$ F. $z^{-\log_x z} = \frac{1}{y}$

Brudnopis																			

II. Wyrażenia algebraiczne

Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru II

Uczeń:

- 1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$;
- 2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
- 3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej;
- 4) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$;
- 5) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;
- 6) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$;
- 7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;
- 8) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}, \quad \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}.$$

Komentarz

W dziale tym sprawdzana jest głównie umiejętność posługiwania się wyrażeniami reprezentującymi liczby przy użyciu zmiennych. Zadania sprawdzają m. in. sprawność posługiwania się wzorami skróconego mnożenia, jak również działania na wielomianach oraz wyrażeniach wymiernych.

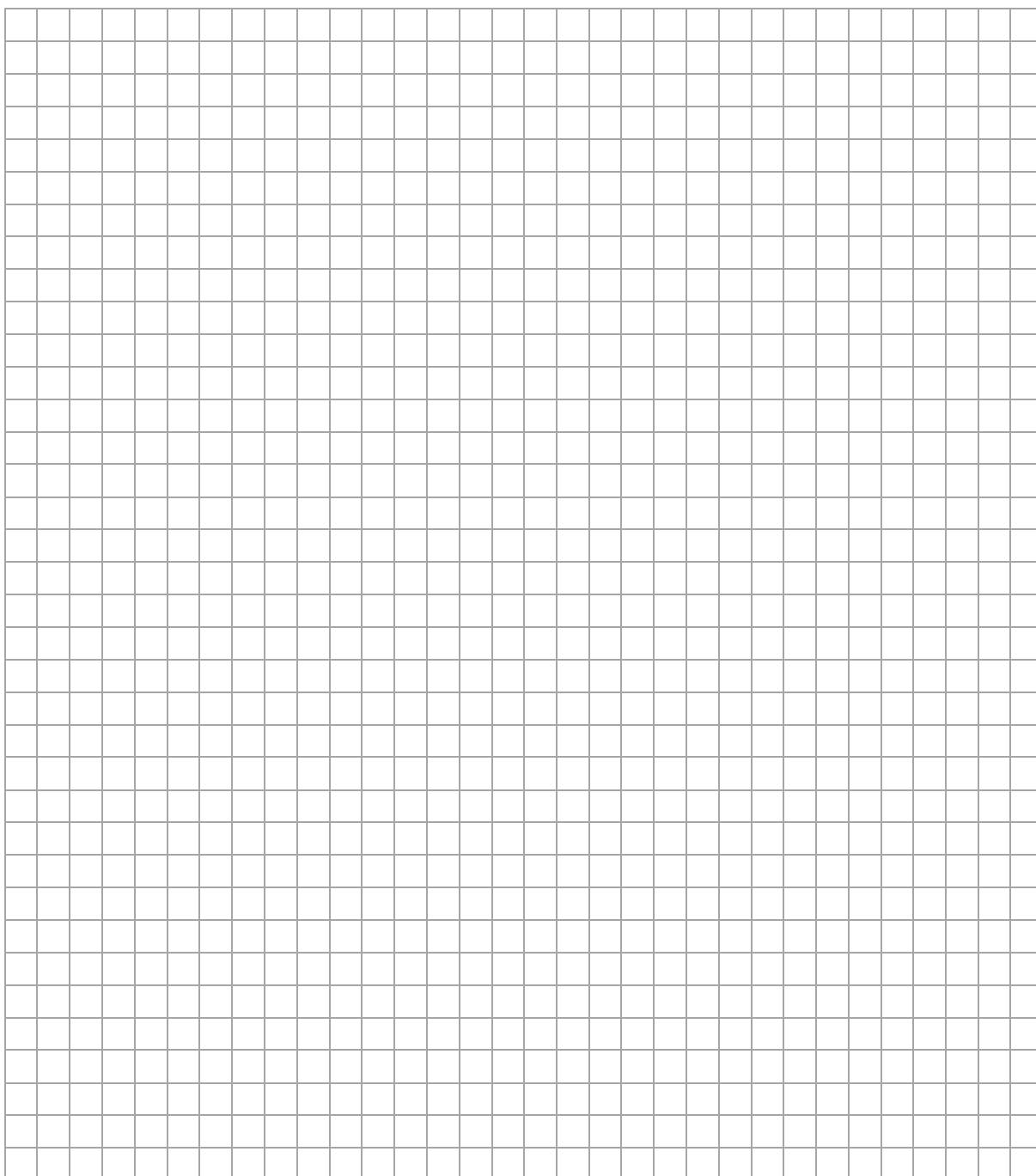
Pojęcia

- wzory skróconego mnożenia
- wielomian
- suma algebraiczna
- rozkład wielomianu na czynniki
- pierwiastki całkowite wielomianu
- dzielenie wielomianu przez dwumian $x - a$
- wyrażenia wymierne

Zadanie 11. (0–3)

Dane jest wyrażenie

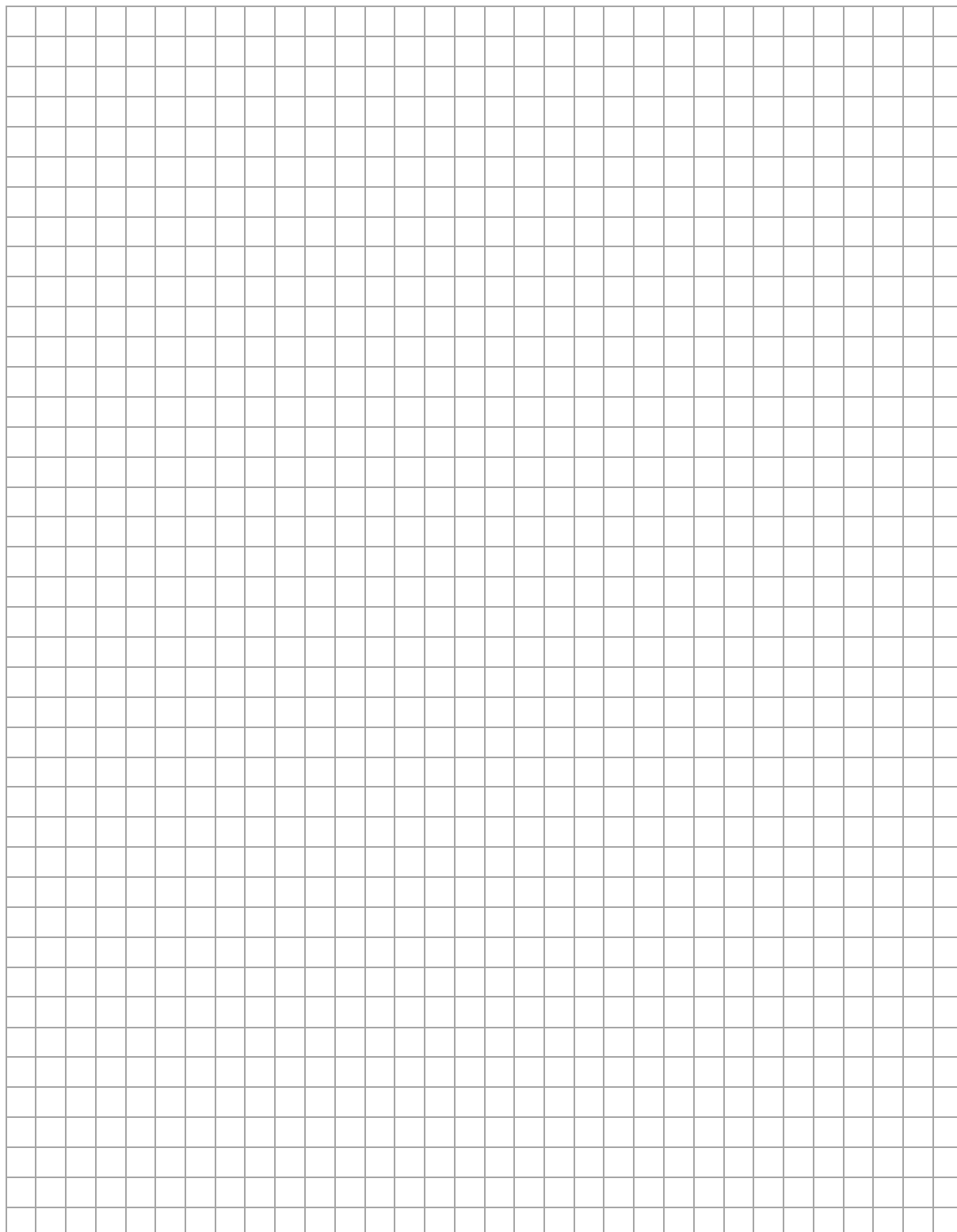
$$\left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2-b^2} \right) : \left(\frac{a-b}{a^2-b^2} \right)$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, $a \neq -b$.**Przekształć dane wyrażenie do najprostszej postaci i oblicz jego wartość****dla $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ oraz $b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Zapisz obliczenia.**

Zadanie 12. (0–2)

Wyrażenie wymierne $\frac{2}{x-3} + 5$ można przekształcić równoważnie do wyrażenia $\frac{ax+b}{cx+d}$,
gdzie a, b, c, d są pewnymi współczynnikami rzeczywistymi.

Wyznacz wartości liczbowe współczynników a, b, c, d . Zapisz obliczenia.



III. Równania i nierówności

Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru III

Uczeń:

- 1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;
- 2) interpretuje równania i nierówności sprzeczne oraz tożsamościowe;
- 3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą;
- 4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe;
- 5) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;
- 6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;
- 7) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Komentarz

Dział ten skupia zadania weryfikujące sprawność przekształcania równań i nierówności w sposób równoważny, jak również interpretowania równań i nierówności sprzecznych oraz tożsamościowych. Sprawdzana jest między innymi umiejętność rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych oraz równań wielomianowych i wymiernych.

Pojęcia

- równania i nierówności liniowe
- równania i nierówności kwadratowe
- równania wielomianowe
- równania wymierne

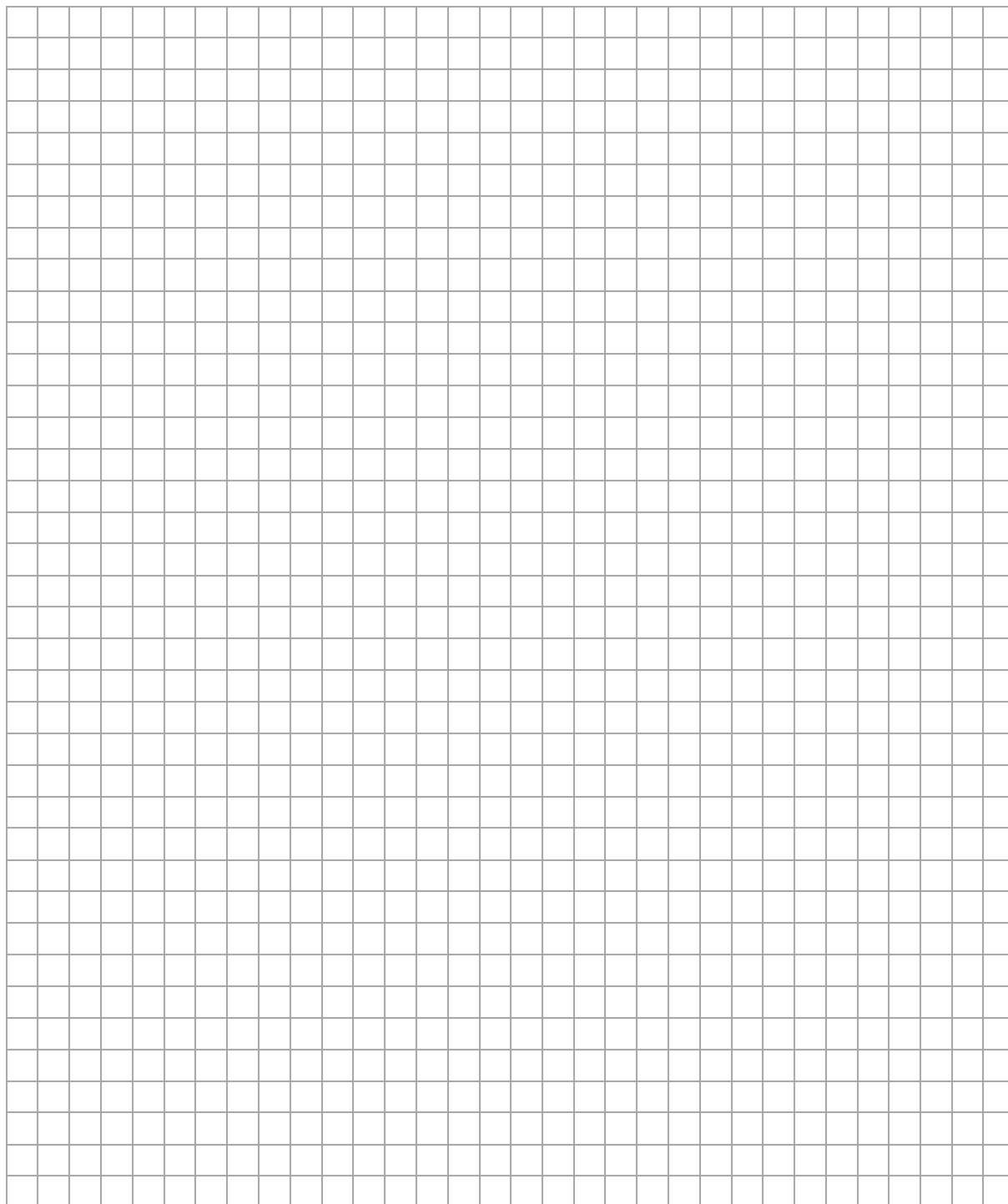
Zadania sprawdzające wymagania z obszaru III

Zadanie 14. (0–2)

Rozwiąż nierówność. Podaj największą liczbę całkowitą spełniającą tę nierówność.

$$2x \geq \sqrt{5} \cdot x + 3\sqrt{5} - 6$$

Zapisz obliczenia.

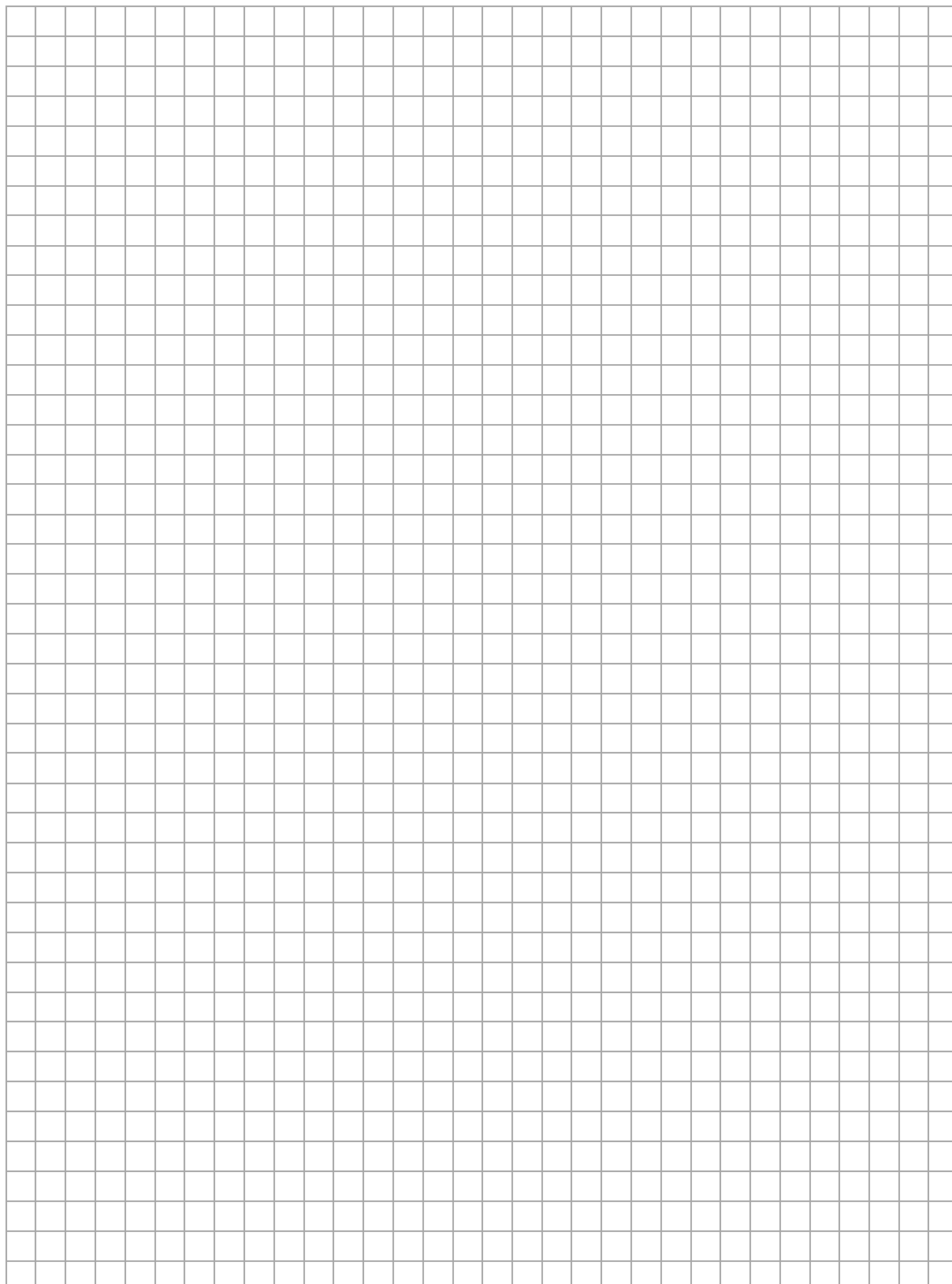
A large grid for writing calculations, consisting of 30 columns and 30 rows of small squares.

Zadanie 15. (0–2)

Rozwiąż równanie

$$-2x^3 + x^2 + 18x - 9 = 0$$

Zapisz obliczenia.

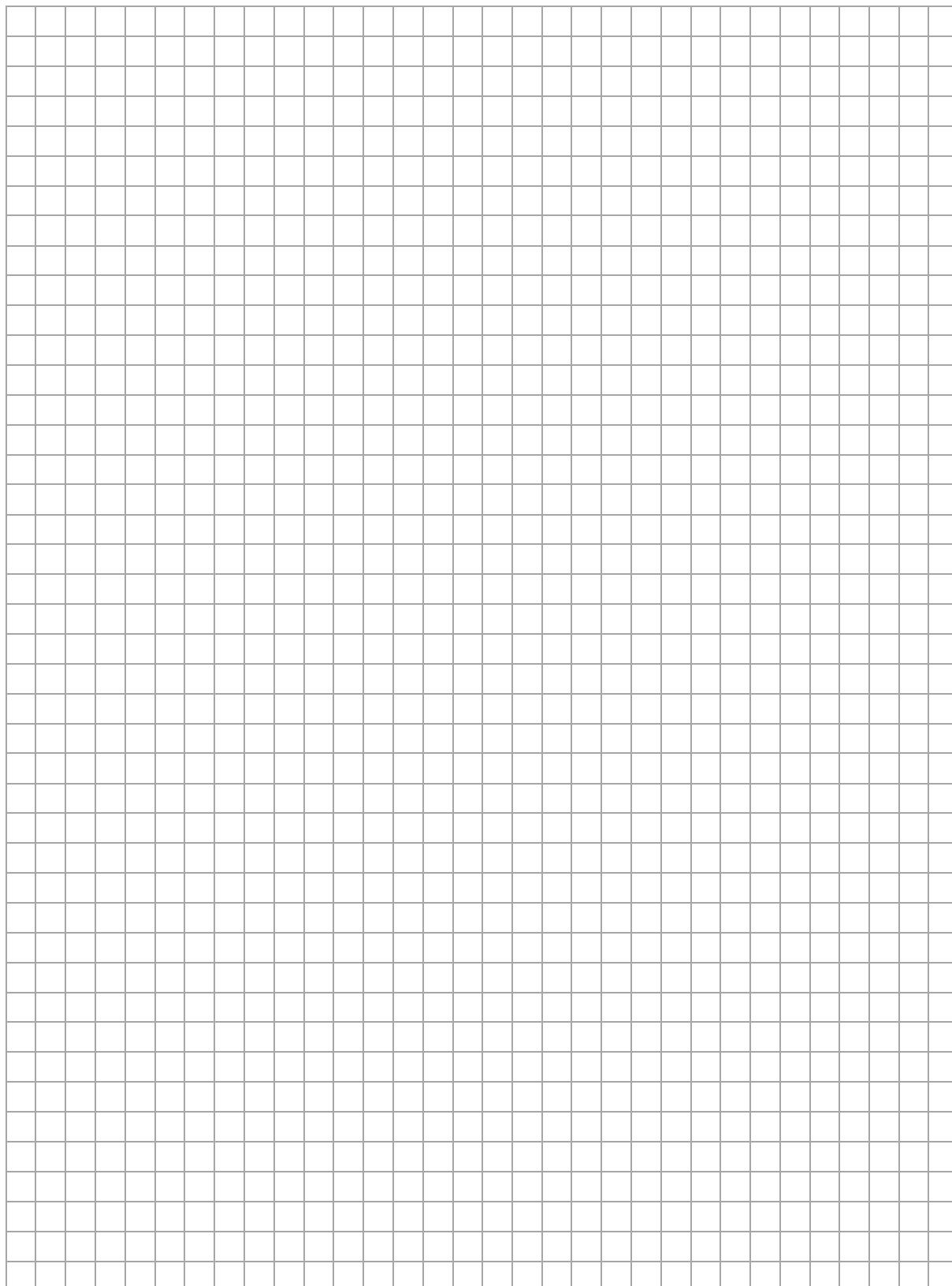
A large grid of small squares, intended for students to write their calculations for solving the equation.

Zadanie 16. (0–3)

Rozwiąż równanie

$$-x^3 + 13x - 12 = 0$$

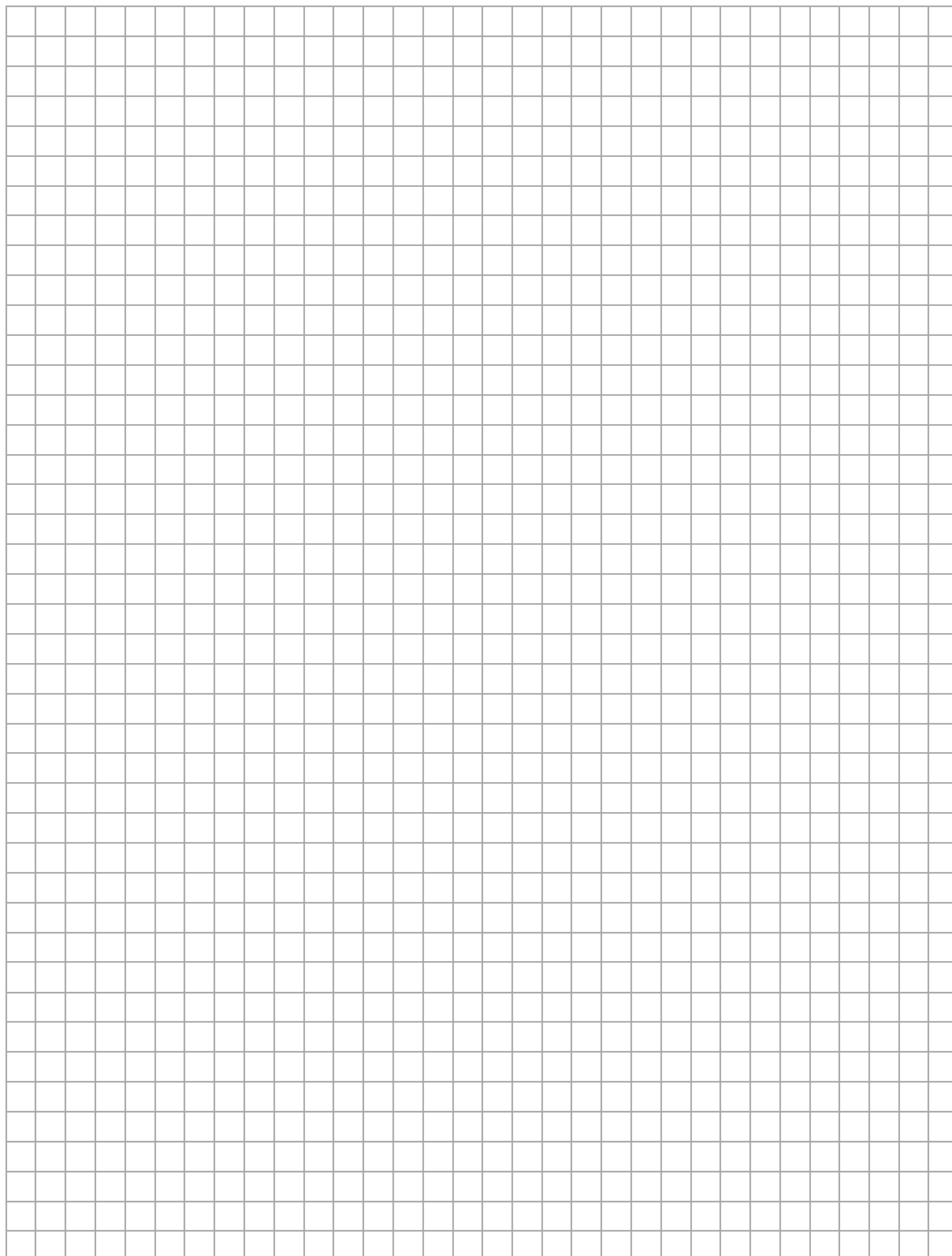
Zapisz obliczenia.



Zadanie 19. (0–2)

Niech $\frac{m}{n}$ będzie ułamkiem nieskracalnym. Jeśli do licznika dodamy 6, a do mianownika dodamy 15, jego wartość nie zmieni się.

Oblicz liczby m i n . Zapisz obliczenia.



IV. Układy równań

Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru IV

Uczeń:

- 1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;
- 2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych;
- 3) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, postaci $\begin{cases} ax + by = e \\ x^2 + y^2 + cx + dy = f \end{cases}$ lub $\begin{cases} ax + by = e \\ y = cx^2 + dx + f \end{cases}$

Komentarz

Podstawową umiejętnością sprawdzaną w tym dziale jest rozwiązywanie układów równań z dwiema niewiadomymi z uwzględnieniem interpretacji geometrycznej układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych. Weryfikowana jest umiejętność samodzielnego budowania układów równań przy rozwiązywaniu zadań tekstowych.

Pojęcia

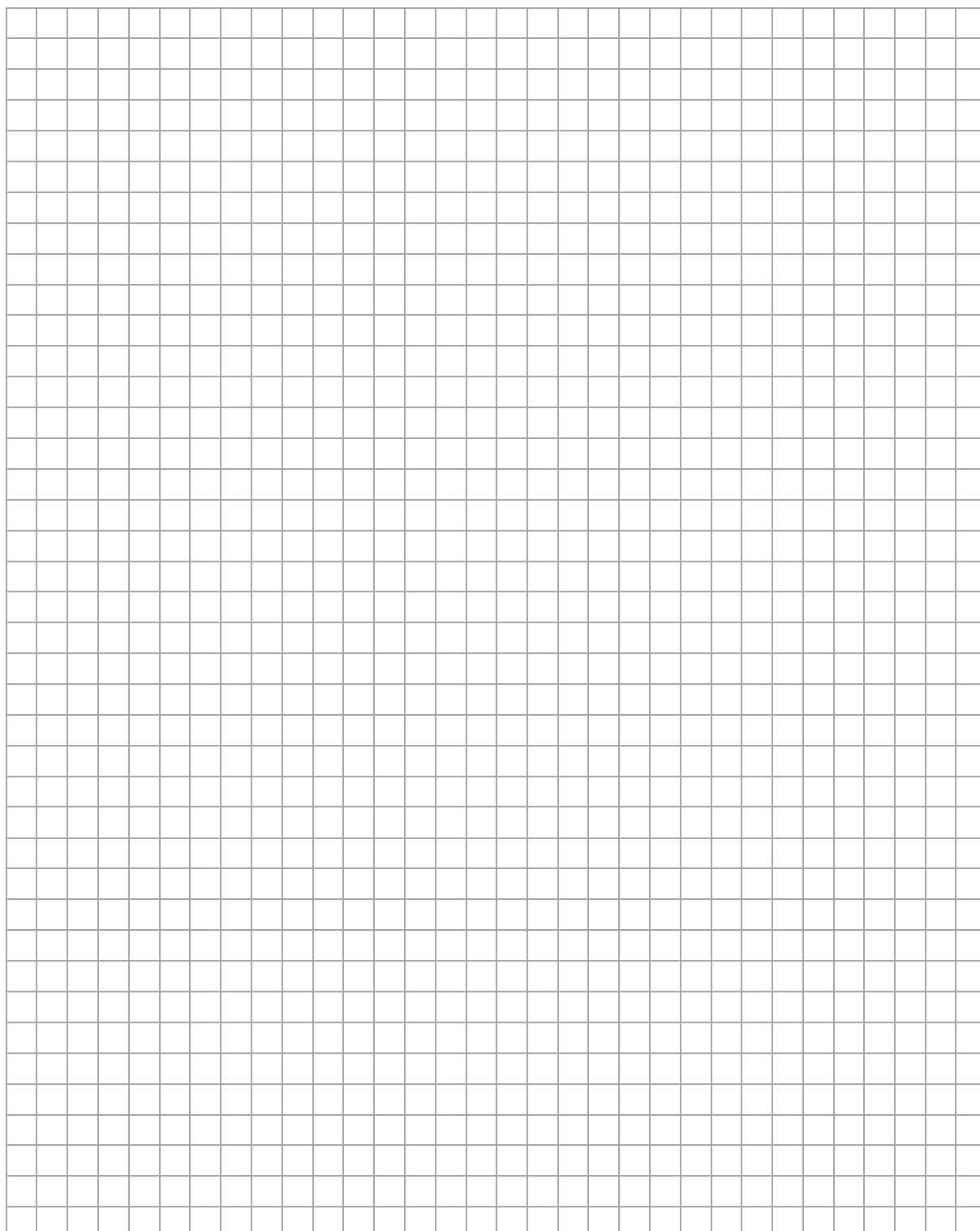
- układy równań z dwiema niewiadomymi
- interpretacja geometryczna
- zadania tekstowe

Zadania sprawdzające wymagania z obszaru IV

Zadanie 20. (0–2)

Dana jest liczba dwucyfrowa a , w której suma cyfr jest równa 14. Jeżeli zamienimy miejscami jej cyfry, otrzymamy liczbę o 18 mniejszą od liczby sprzed tej zamiany cyfr.

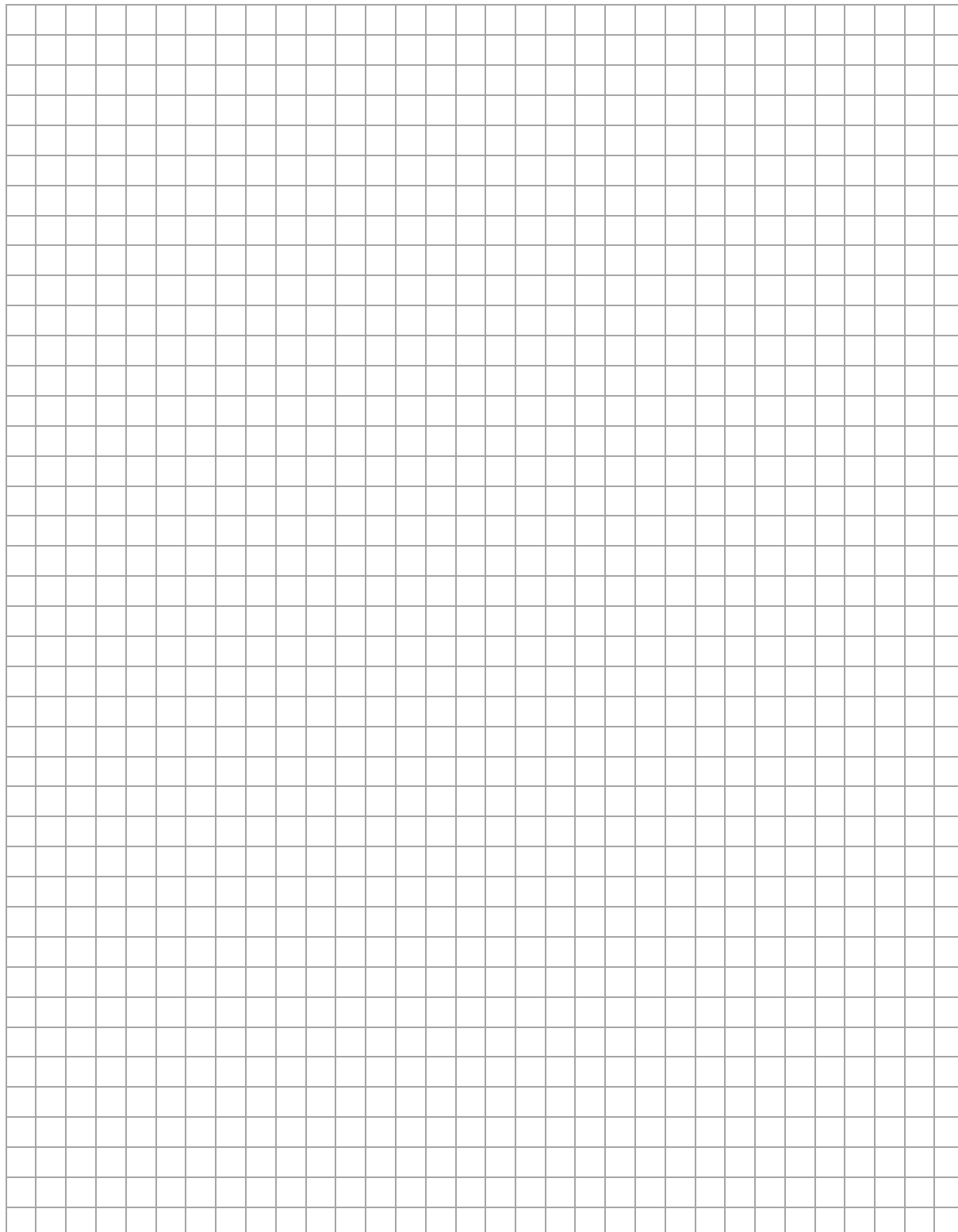
Oblicz liczbę a . Zapisz obliczenia.



Zadanie 21. (0–3)

Pies goni lisa. Początkowa odległość między zwierzętami równa była 30 m. Długość każdego skoku psa jest równa 2 m, długość każdego skoku lisa jest równa 1 m. W czasie, w którym lis wykonuje trzy skoki, pies skacze dwa razy.

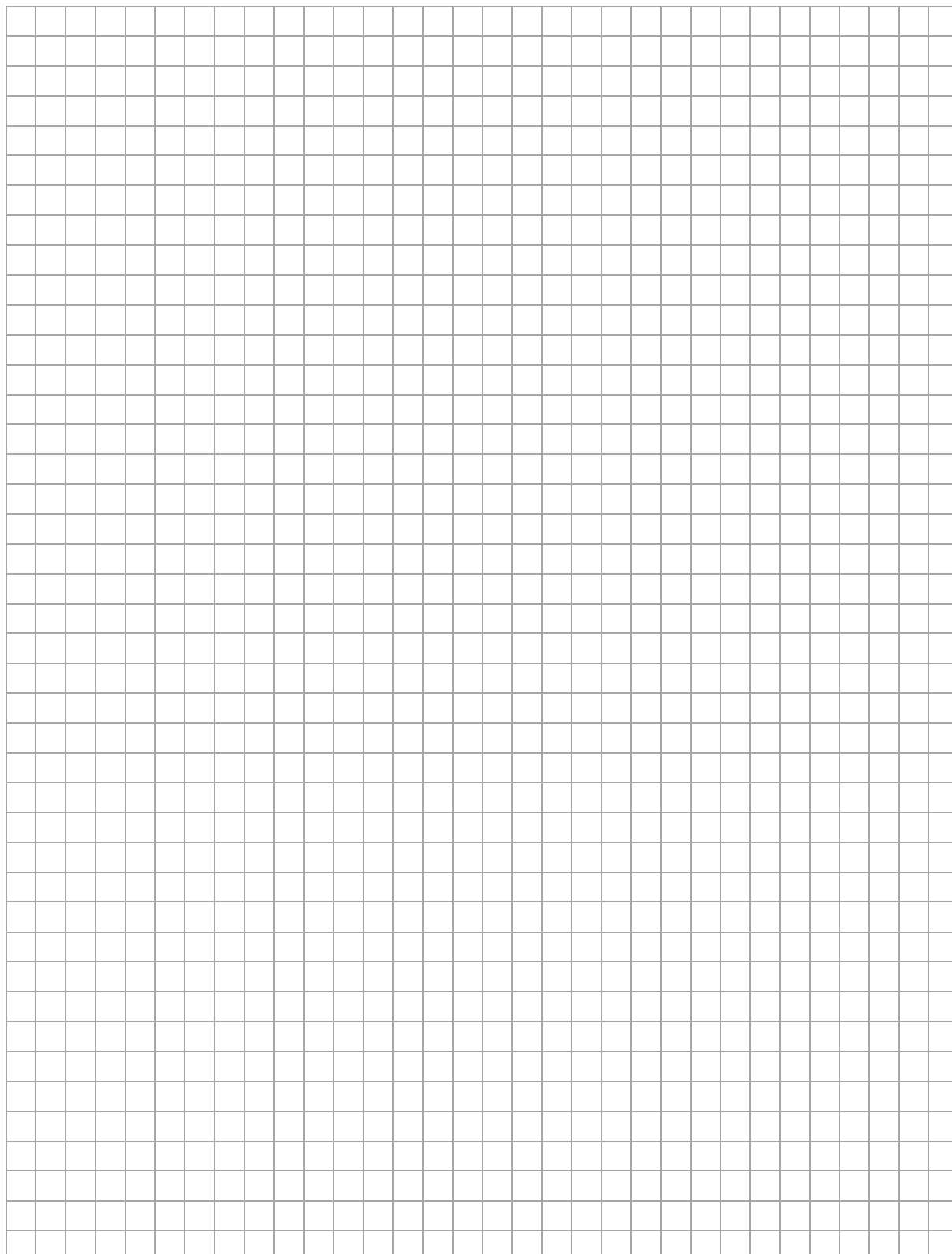
Oblicz dystans, po przebiegnięciu którego pies dogoni lisa. Zapisz obliczenia.

A large grid for writing calculations, consisting of 30 columns and 30 rows of small squares.

Zadanie 22. (0–2)

Suma liczb rzeczywistych a i b równa jest 527. Wiemy, że 8% liczby a jest równe 7,5% liczby b .

Oblicz liczby a i b . Zapisz obliczenia.

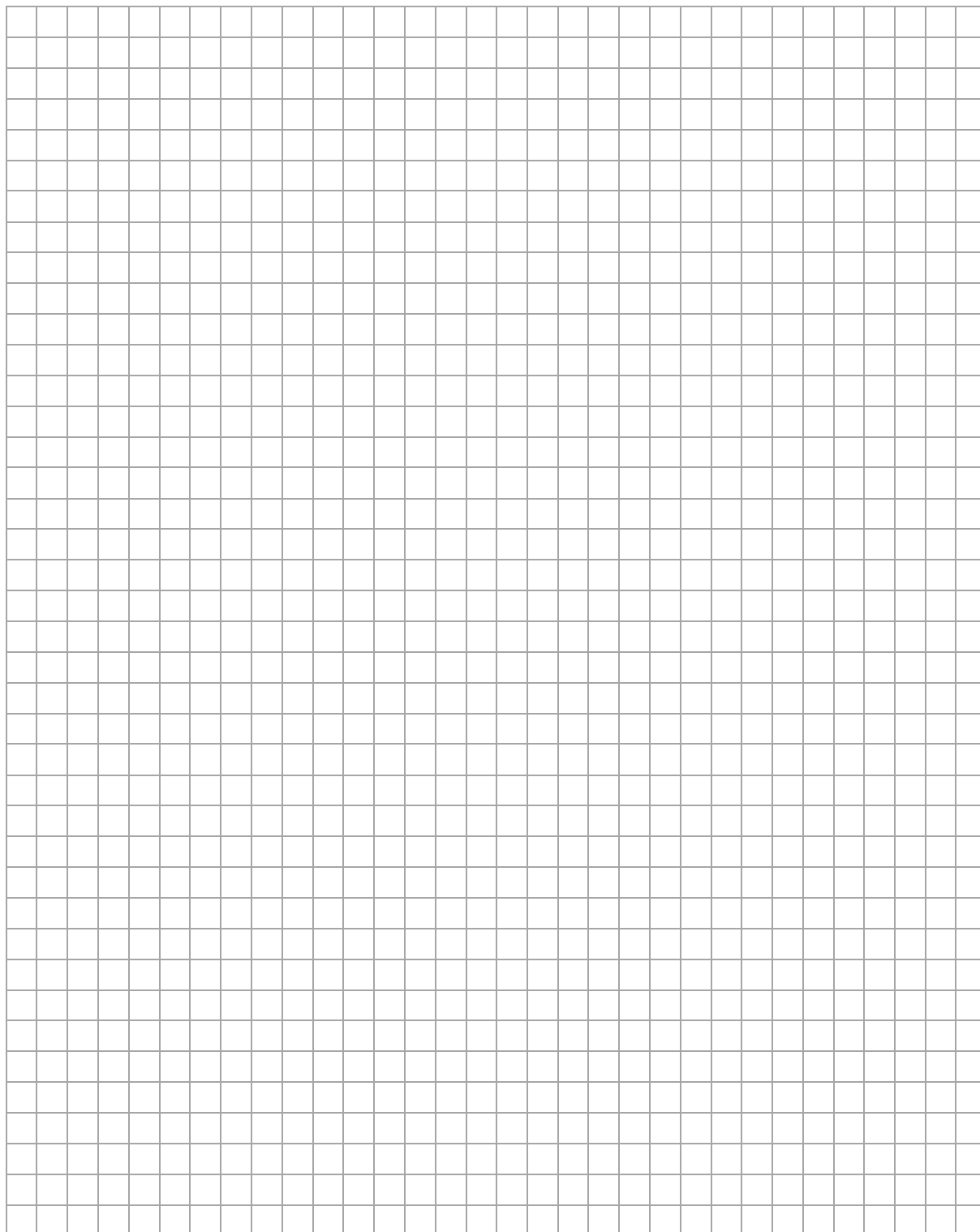


Zadanie 23. (0–4)

PP

Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Zapisz obliczenia.



PP

Zadanie sprawdza wymaganie IV.3 podstawy programowej z matematyki, które nie będzie obowiązywało na egzaminie maturalnym w roku 2023 i 2024.

V. Funkcje

Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru V

Uczeń:

- 1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);
- 2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;
- 3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
- 4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;
- 5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
- 6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach;
- 7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem;
- 8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);
- 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;
- 10) wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
- 11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym;
- 12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$
- 13) posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych;
- 14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Komentarz

Funkcje to dział, w którym weryfikowana jest sprawność odczytywania i interpretowania danych przedstawionych w różnych postaciach: wzoru, wykresu, tabeli, opisu słownego. Sprawdzana jest umiejętność wyznaczania wzoru funkcji liniowej i kwadratowej na podstawie zebranych danych, wskazywania wartości najmniejszej i największej oraz szkicowanie wykresów. Wybrane zadania testują biegłość posługiwania się funkcją wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

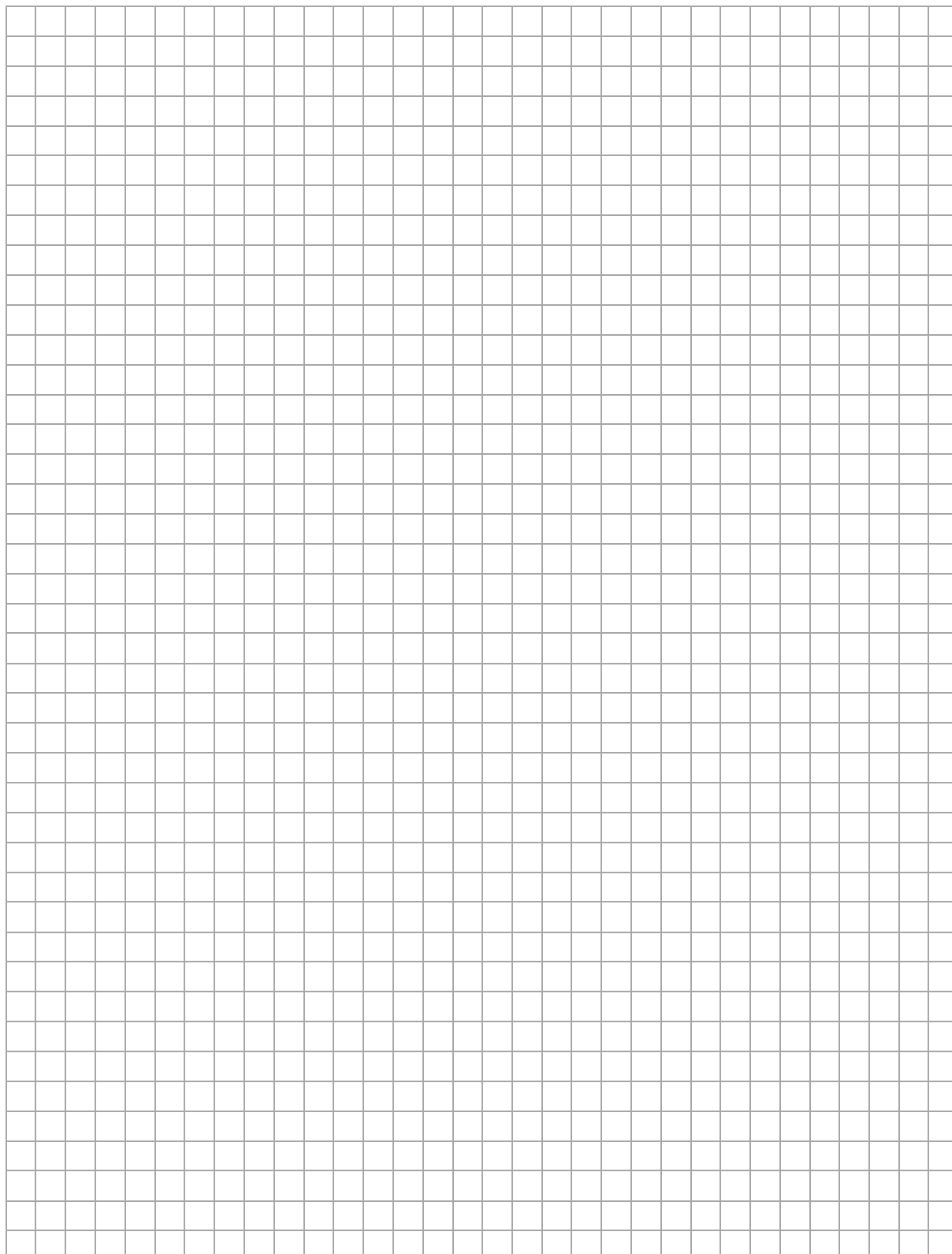
Pojęcia

- przyporządkowanie
- dziedzina funkcji
- zbiór wartości funkcji
- miejsca zerowe
- przedziały monotoniczności
- wartości najmniejsze i największe
- funkcja liniowa
- funkcja kwadratowa
- funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$
- funkcja wykładnicza
- funkcja logarytmiczna
- przekształcenia wykresów funkcji

Zadanie 26.2. (0–2)

Niech $f(x) = ax + b$ będzie funkcją opisującą zależność temperatury powietrza od wysokości x n.p.m. w dowolnym punkcie nad Zakopanem.

Oblicz wartość współczynnika a i wartość współczynnika b . Zapisz obliczenia.



Zadanie 27. (0–1)

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = -2x^2 + bx + c$ i przyjmuje wartości dodatnie tylko dla $x \in (-4, 2)$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Oś symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji jest prosta $x = 1$.	P	F
Postać iloczynowa funkcji f wyraża się wzorem $f(x) = -2(x + 4)(x - 2)$.	P	F

Zadanie 28. (0–2)

Dana jest funkcja kwadratowa f . Do wykresu tej funkcji należy punkt o współrzędnych $(0, 8)$, a osią symetrii jej wykresu jest prosta o równaniu $x = 4$. Jednym z miejsc zerowych funkcji f jest $x_1 = 2$.

Wyznacz i zapisz wzór funkcji $y = f(x)$ w postaci iloczynowej.

VI. Ciągi

Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru VI

Uczeń:

- 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach:
 - a)
$$\begin{cases} a_1 = 0,001 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n(1 - a_n) \end{cases}$$
 - b)
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$
- 3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący;
- 4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
- 5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- 6) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
- 7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Komentarz

Wybrane zadania z tego działu testują umiejętność sprawdzania, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny, czy ciąg jest rosnący czy malejący. Sprawdzana jest znajomość następujących zagadnień związanych z ciągiem arytmetycznym oraz ciągiem geometrycznym: n -ty wyraz ciągu, suma n początkowych wyrazów ciągu. Weryfikowana jest umiejętność wykorzystywania własności ciągów do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym.

Pojęcia

- wyraz ogólny
- ciąg rosnący, ciąg malejący
- ciąg arytmetyczny
- ciąg geometryczny
- n -ty wyraz ciągu
- suma n początkowych wyrazów ciągu

Zadania sprawdzające wymagania z obszaru VI

Zadanie 30. (0–1)

Dane są liczby: $a = 2\sqrt{2}$, $b = 4$, $c = 4\sqrt{2}$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

Liczby a , b oraz c tworzą w podanej kolejności

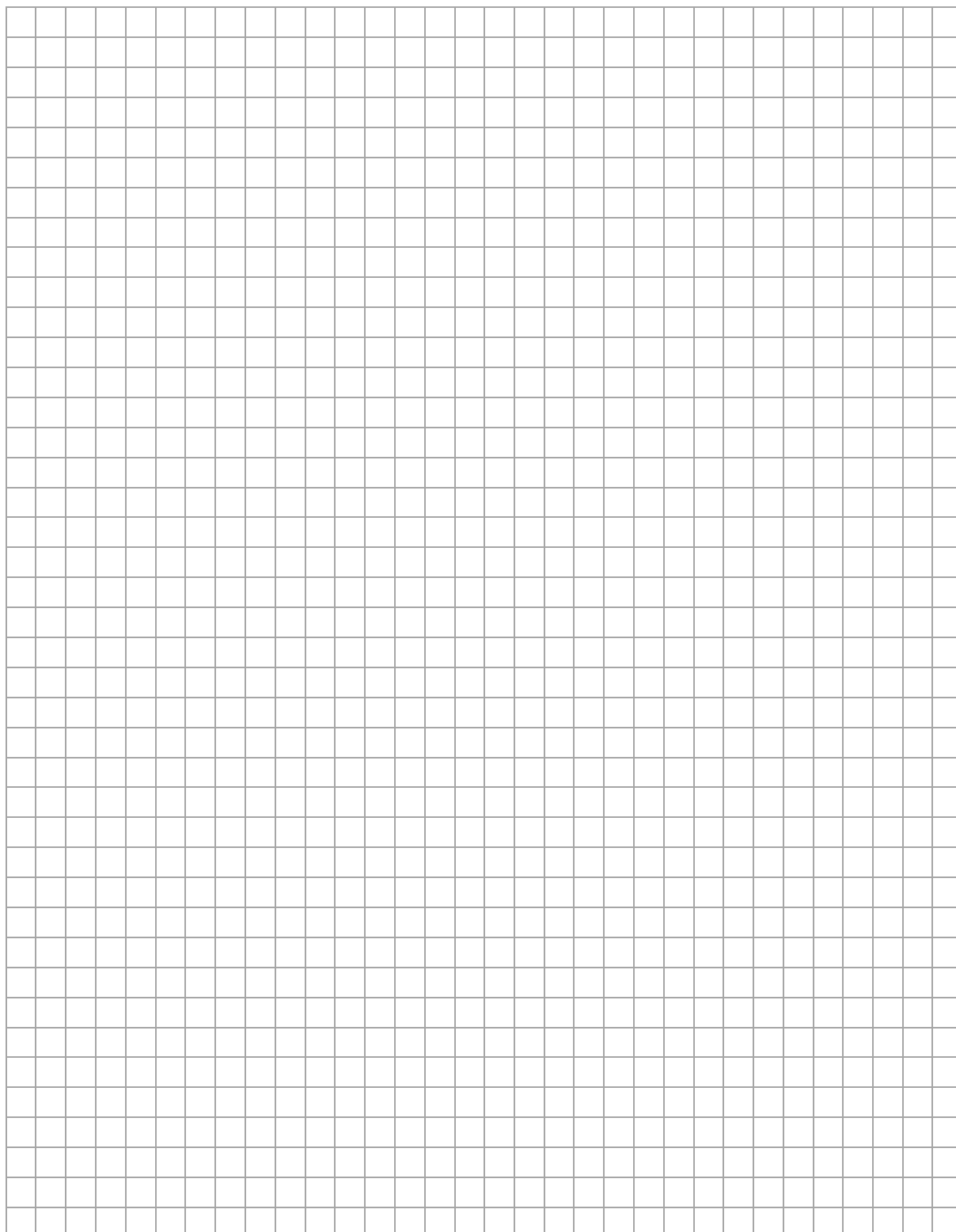
A.	ciąg arytmetyczny,	ponieważ	1.	$b = \frac{a + c}{2}$
			2.	$b = \frac{(c - a)^2}{2}$
B.	ciąg geometryczny,		3.	$b^2 = a \cdot c$

Brudnopis

Zadanie 31. (0–2)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Jego różnica jest równa 4, a suma jego pierwszych pięciu wyrazów jest trzy razy mniejsza od sumy następujących pięciu wyrazów.

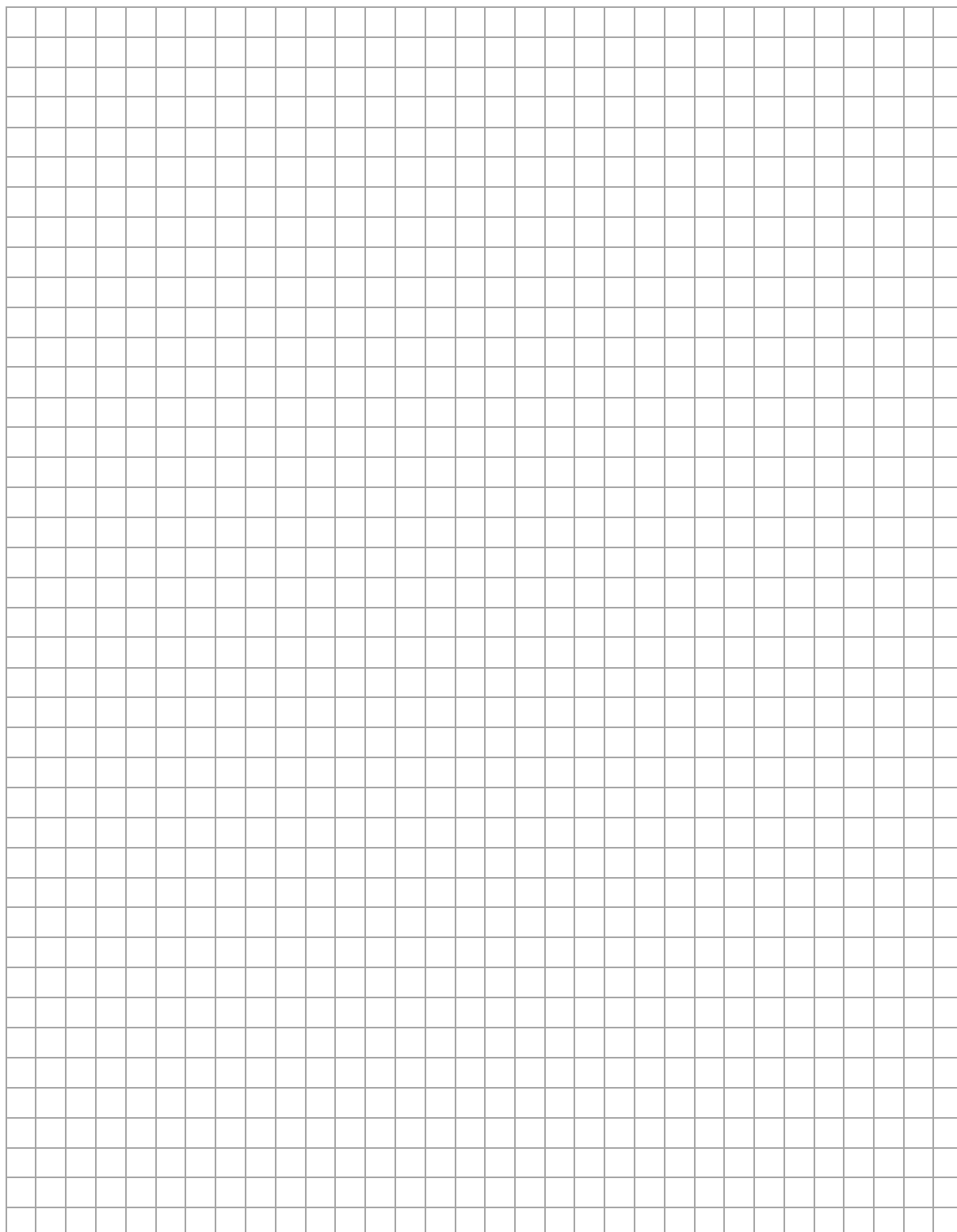
Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu. Zapisz obliczenia.



Zadanie 32. (0–3)

Iloraz skończonego ciągu geometrycznego jest równy $\frac{1}{3}$, trzeci wyraz tego ciągu jest równy $\frac{1}{9}$, a suma wszystkich wyrazów to $\frac{364}{243}$.

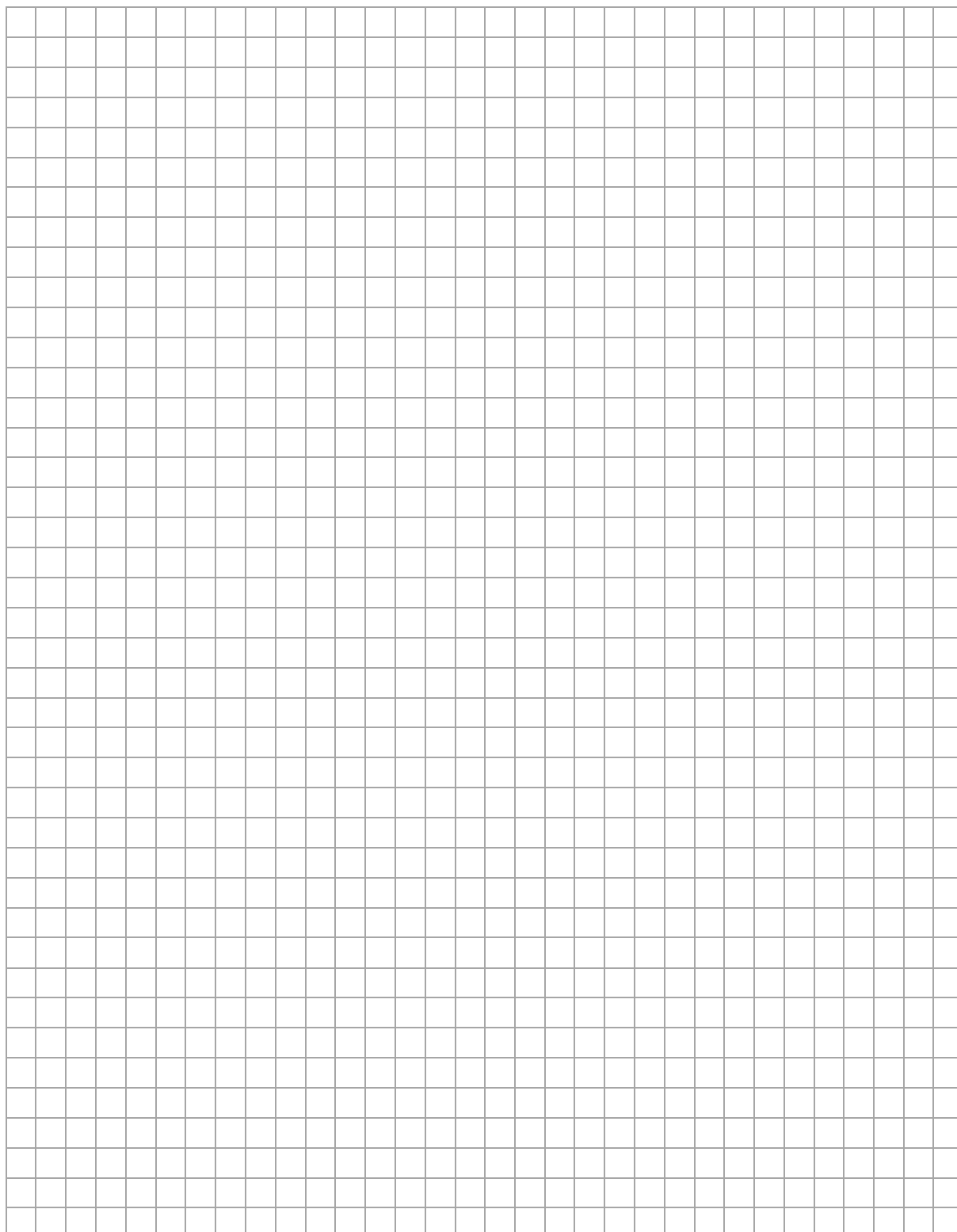
Oblicz, z ilu wyrazów składa się ten ciąg. Zapisz obliczenia.



Zadanie 33. (0–4)

Liczby x, y, z , których suma jest równa 114, tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Liczby te są również wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) , gdzie $n \geq 1$, w którym $x = a_1$, $y = a_4$ i $z = a_{25}$.

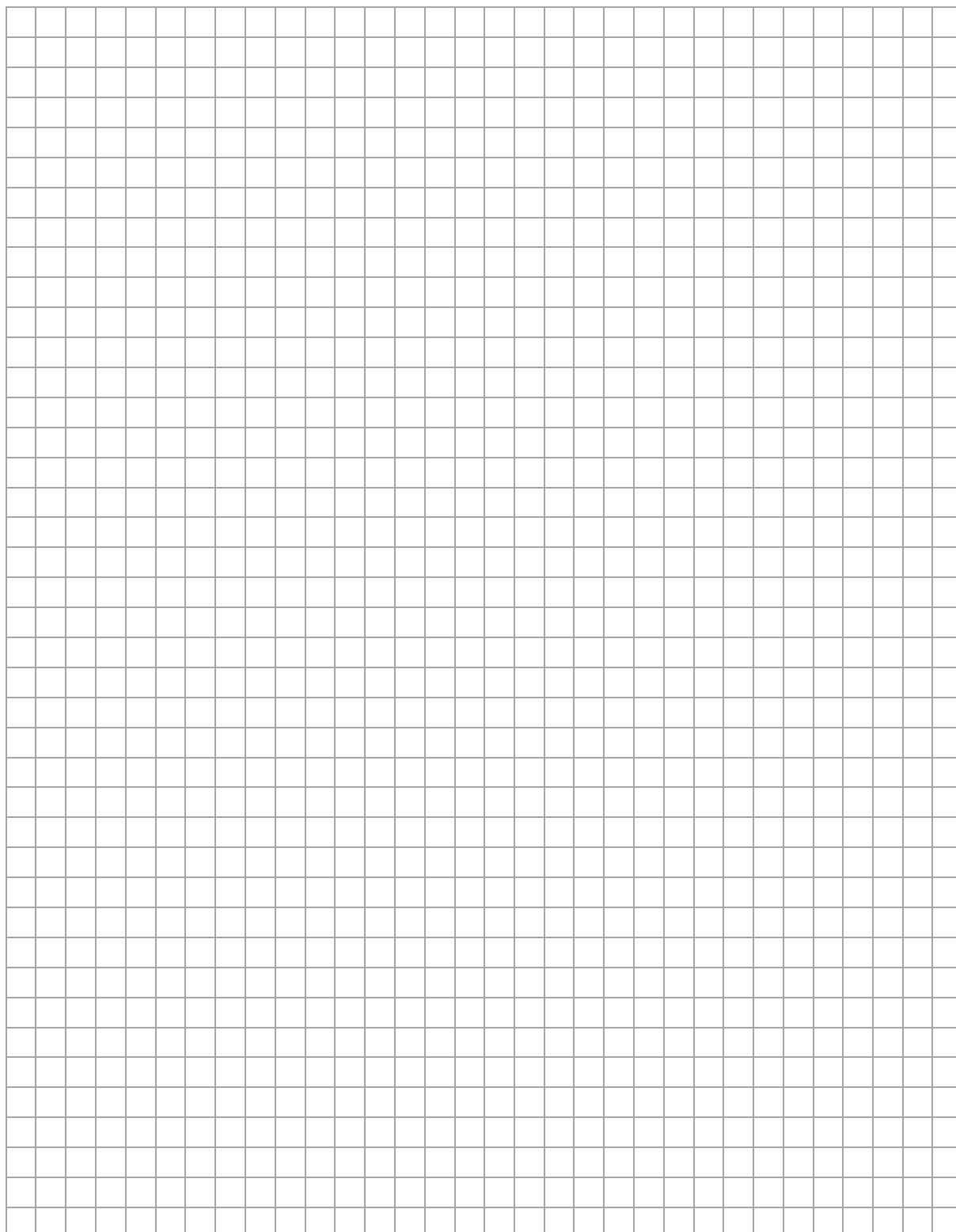
Oblicz liczby x, y, z . Zapisz obliczenia.



Zadanie 34. (0–4)

Trzy liczby, których suma jest równa 24, tworzą ciąg arytmetyczny. Po zwiększeniu ich odpowiednio o 4, 10 i 40 będą w tej samej kolejności tworzyły ciąg geometryczny.

Oblicz te trzy liczby tworzące ciąg arytmetyczny. Zapisz obliczenia.



VII. Trygonometria

Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru VII

Uczeń:

- 1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° ;
- 2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;
- 3) znajduje za pomocą tablic lub kalkulatora przybliżoną wartość kąta, jeśli dana jest wartość funkcji trygonometrycznej;
- 4) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$;
- 5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta;
- 6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

Komentarz

W zadaniach tego działu sprawdzana jest znajomość definicji funkcji sinus, cosinus oraz tangens dla kątów o mierze od 0° do 180° . Testowana jest umiejętność wykorzystania dokładnych wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30° , 45° , 60° oraz przybliżonych wartości innych kątów odczytanych z tablic lub obliczonych na kalkulatorze. Kolejną umiejętnością weryfikowaną przez zadania z tego działu jest sprawność posługiwania się wzorami trygonometrycznymi oraz umiejętność wykorzystania twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów. Funkcje trygonometryczne wykorzystywane są między innymi do obliczania kątów trójkąta i długości jego boków.

Pojęcia

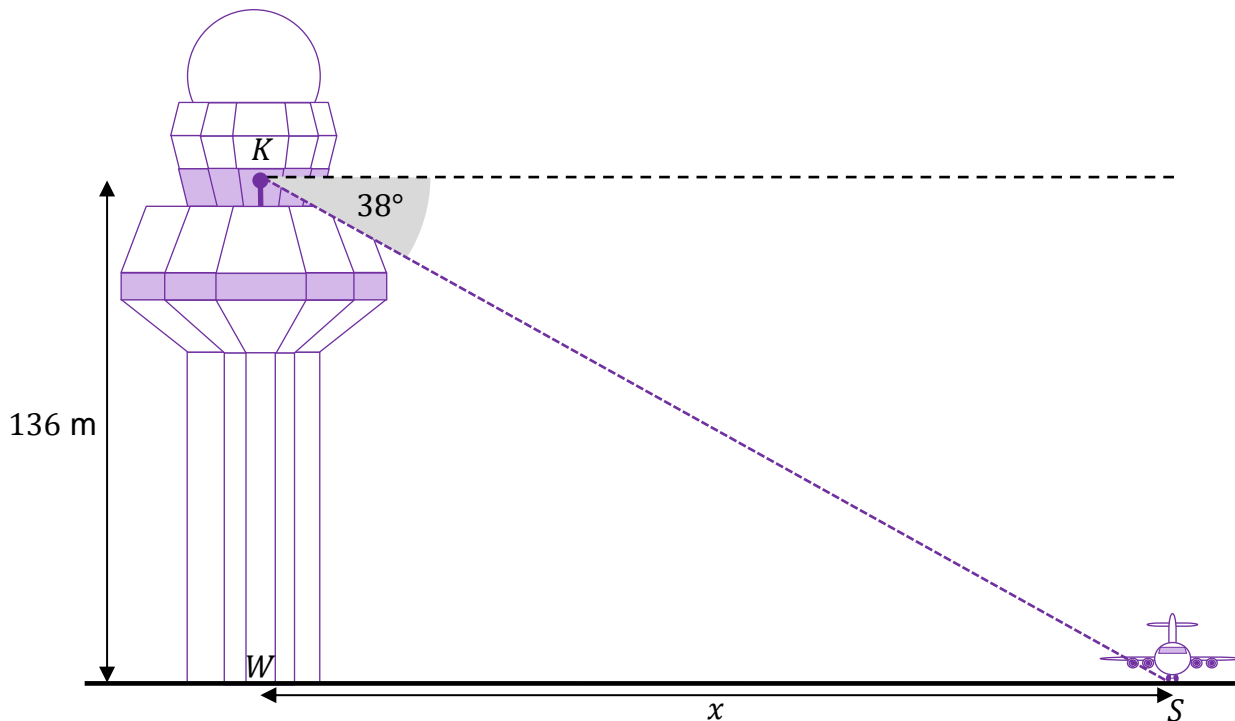
- sinus, cosinus, tangens dla kątów od 0° do 180°
- dokładne wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30° , 45° , 60°
- przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych z tablic lub kalkulatora
- twierdzenie sinusów
- twierdzenie cosinusów

Zadania sprawdzające wymagania z obszaru VII

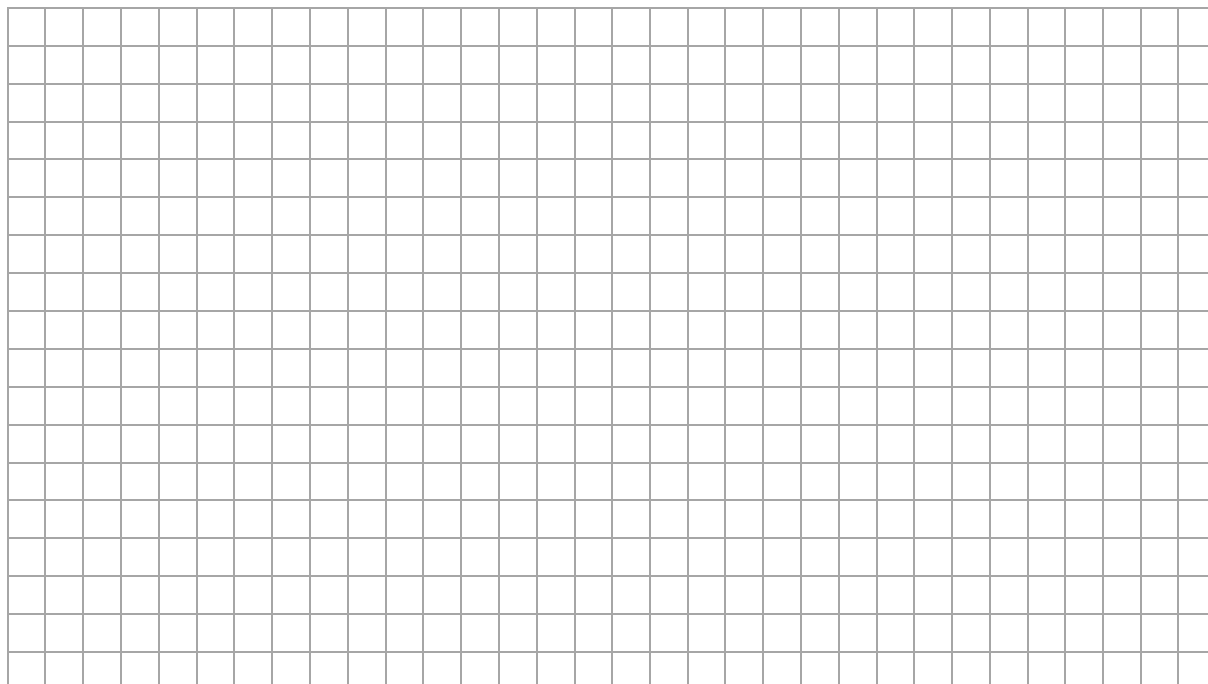
Zadanie 36. (0–3)

PP

Z okna wieży kontroli lotów widać startujący samolot S pod kątem 38° do poziomu. Kontroler K znajduje się na wysokości 136 m od płyty lotniska (zobacz rysunek).

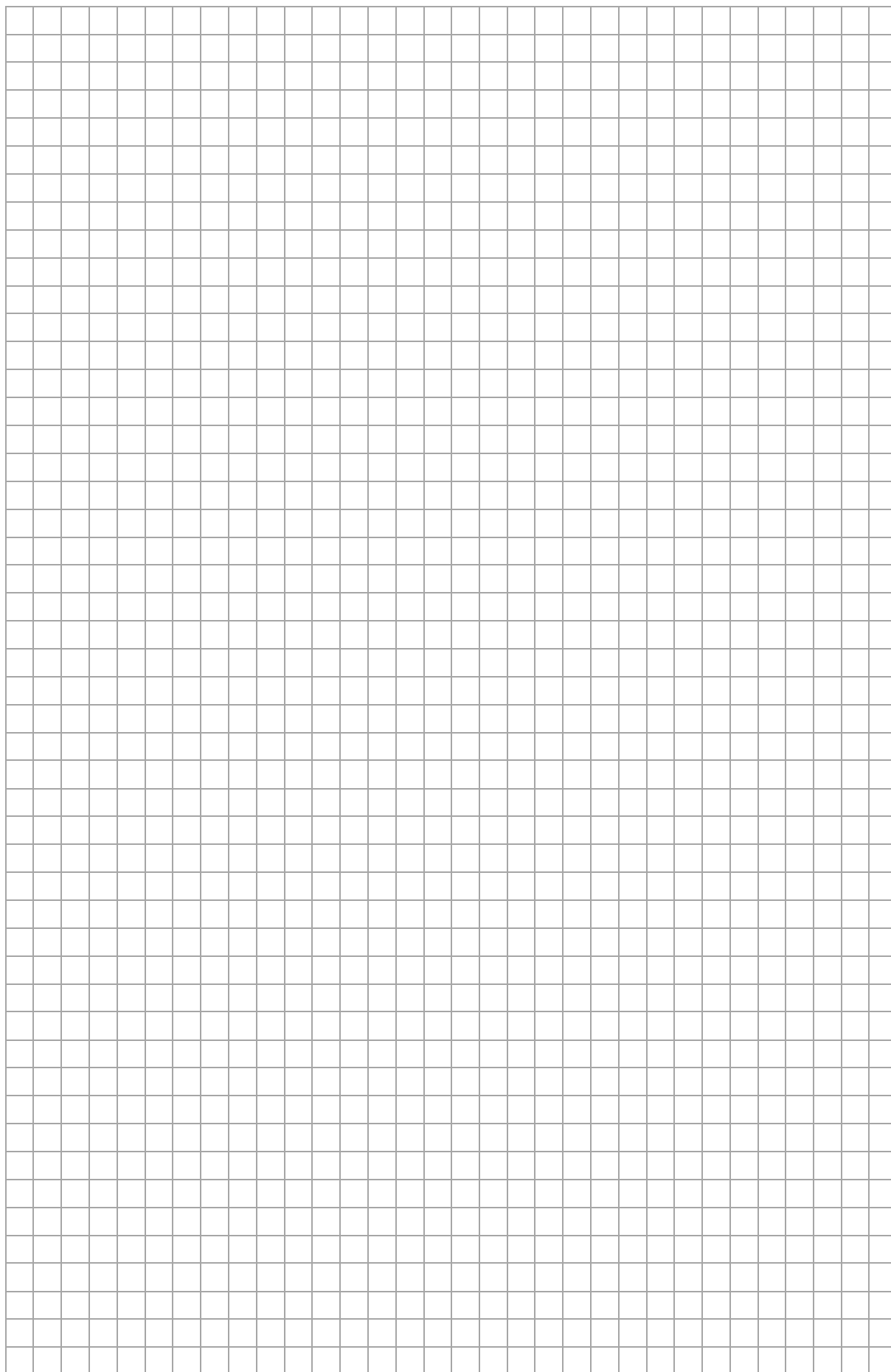


Oblicz odległość x samolotu S od podstawy W tej wieży. Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych metrów. Zapisz obliczenia.



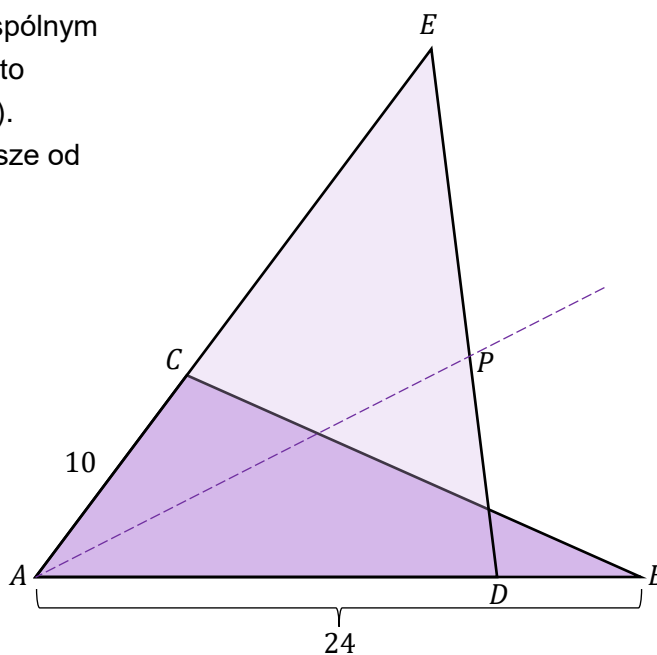
PP

Zadanie sprawdza wymaganie VII.2 podstawy programowej z matematyki, które nie będzie obowiązywało na egzaminie maturalnym w roku 2023 i 2024.



Zadanie 37.

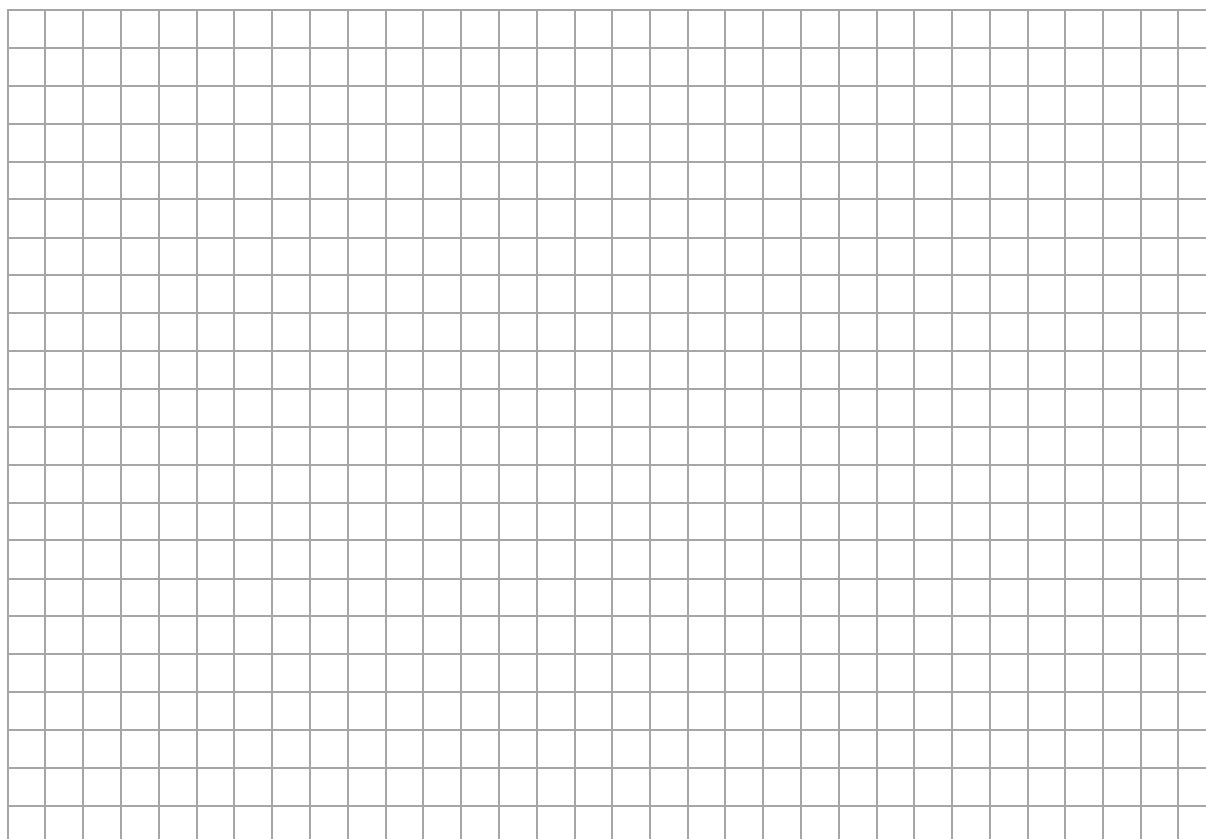
Dane są dwa trójkąty ABC i ADE o wspólnym kącie ostrym przy wierzchołku A . Ponadto $|AB| = 24$, $|AC| = 10$ (zobacz rysunek). Pole trójkąta ADE jest dwukrotnie większe od pola trójkąta ABC .

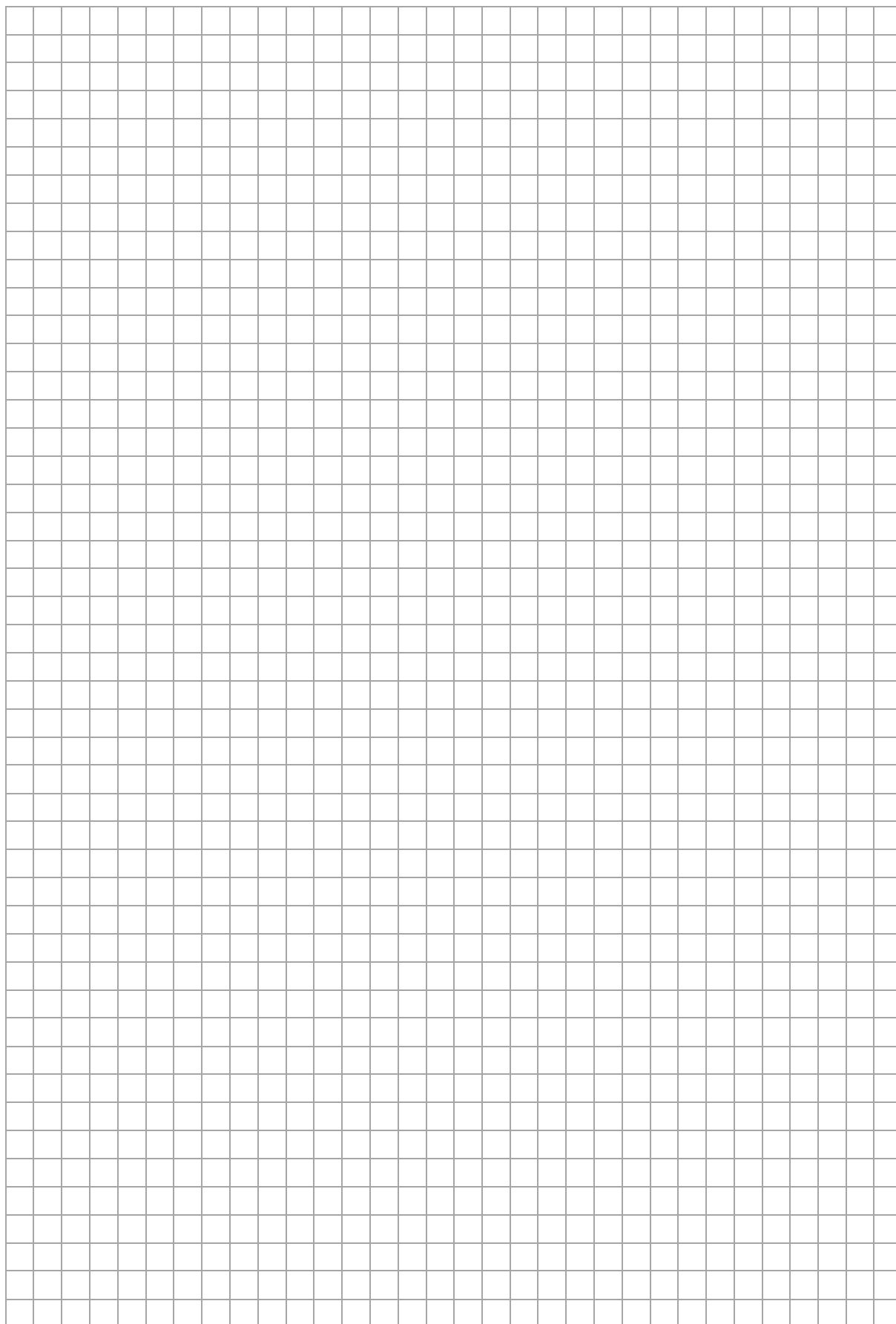


Zadanie 37.1. (0–2)

Dwusieczna kąta BAC przecina odcinek DE w punkcie P , takim że $\frac{|DP|}{|PE|} = \frac{3}{4}$.

Oblicz długości boków AD i AE trójkąta ADE . Zapisz obliczenia.

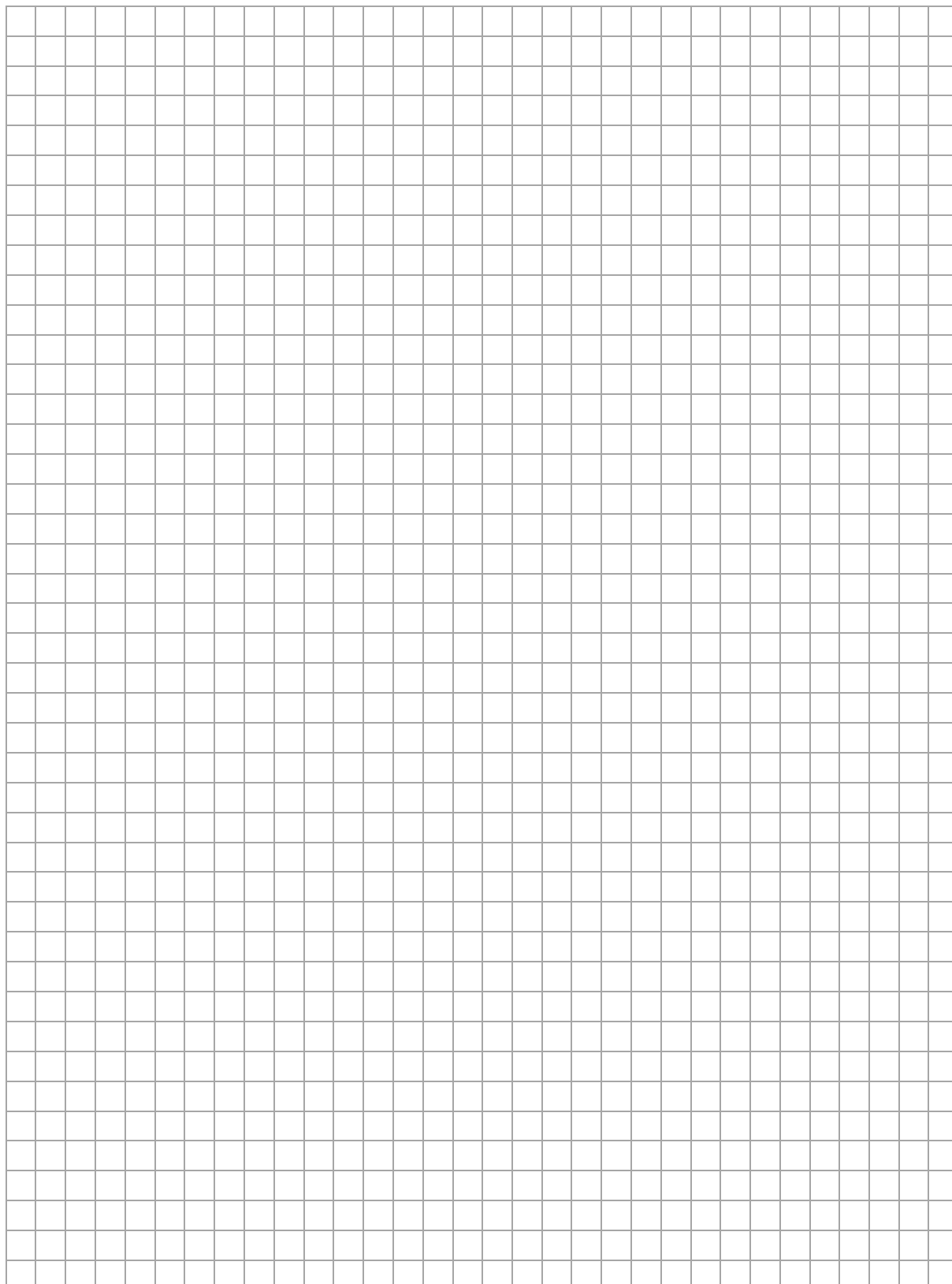




Zadanie 37.2. (0–3)

Pole trójkąta ABC jest równe 72.

Oblicz długość boku BC trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.



VIII. Planimetria

Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru VIII

Uczeń:

- 1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
- 2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;
- 3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;
- 4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;
- 5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;
- 6) stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu;
- 7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;
- 8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
- 9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;
- 10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;
- 11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;
- 12) przeprowadza dowody geometryczne.

Komentarz

Zadania w tym dziale sprawdzają sprawność wyznaczania odcinków i kątów w okręgu, rozpoznawania rodzajów trójkątów i wielokątów oraz korzystania z ich własności, korzystania z twierdzenia Talesa, twierdzenia o dwusiecznej kąta oraz twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą. Sprawdzana jest również umiejętność przeprowadzania dowodów geometrycznych.

Pojęcia

- odcinki i proste w okręgu
- kąt wpisany i kąt środkowy
- trójkąty, czworokąty
- wielokąty foremne
- twierdzenie Talesa
- twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa
- twierdzenie o dwusiecznej kąta
- twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą;
- cechy podobieństwa trójkątów
- figury podobne
- dowody geometryczne

Zadania sprawdzające wymagania z obszaru VIII

Zadanie 38. (0–2)

Dany jest trójkąt równoramienny, który nie jest równoboczny. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt H jest jego ortocentrum.

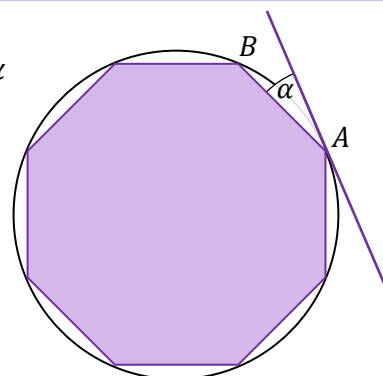
Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

- A. Punkt O jest równo oddalony tylko od dwóch wierzchołków tego trójkąta.
- B. Punkt O jest równo oddalony od trzech wierzchołków tego trójkąta.
- C. Punkt O jest równo oddalony od trzech boków tego trójkąta.
- D. Punkt H jest równo oddalony tylko od dwóch wierzchołków tego trójkąta.
- E. Punkt H jest równo oddalony od trzech wierzchołków tego trójkąta.
- F. Punkt H jest równo oddalony od trzech boków tego trójkąta.

Brudnopis																			

Zadanie 39. (0–1)

Dany jest ośmiokąt foremny wpisany w okrąg K . Punkty A oraz B są sąsiednimi wierzchołkami tego ośmiokąta oraz α jest kątem między styczną do okręgu K w punkcie A i bokiem AB wielokąta (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

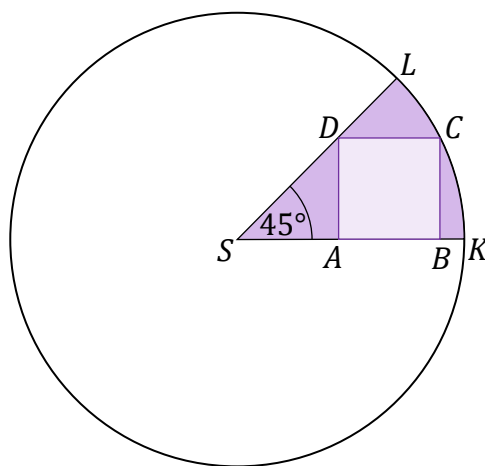
Miara kąta α jest równa

- A. 45°
- B. 30°
- C. $22,5^\circ$
- D. 15°

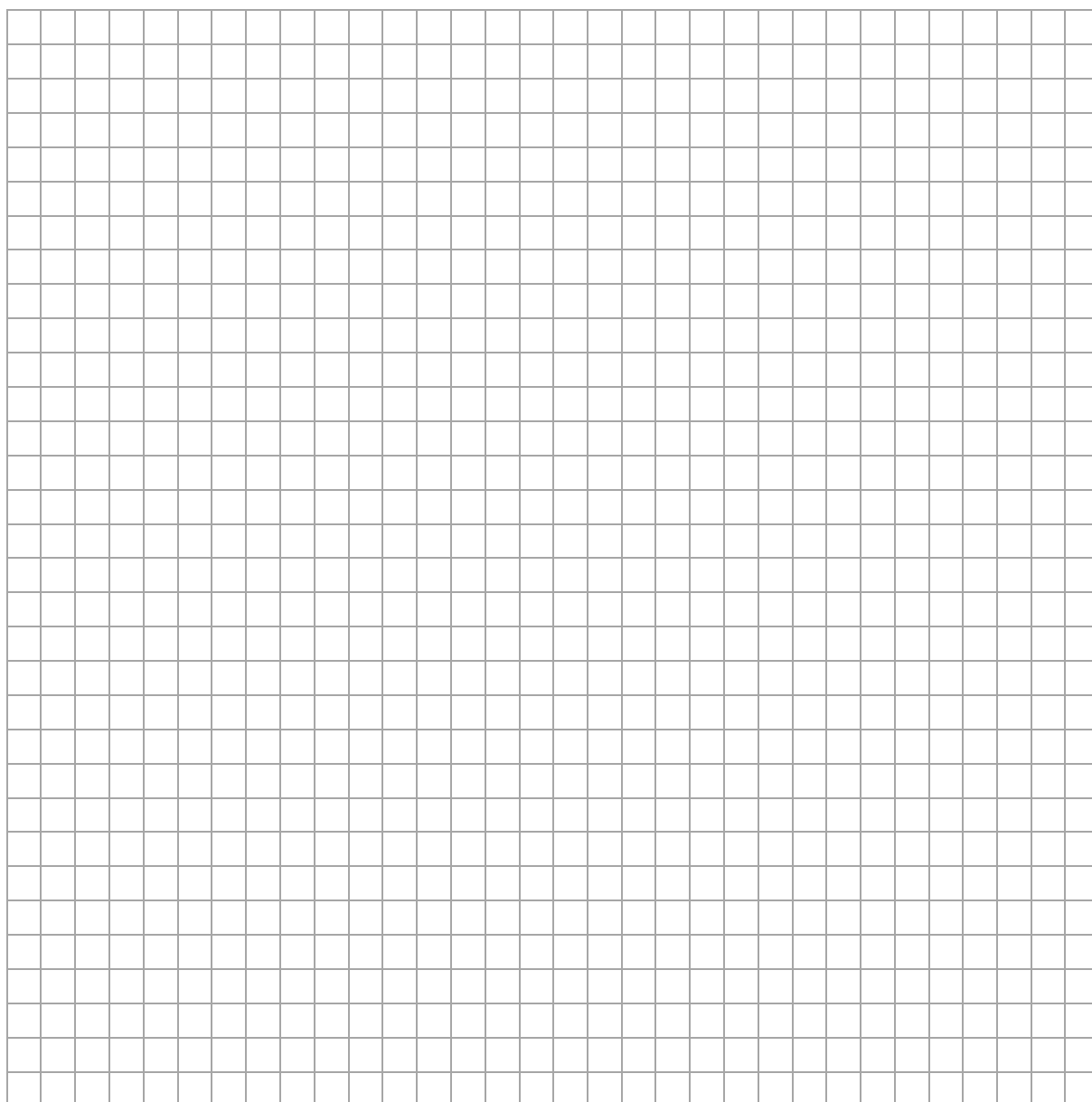
Brudnopis																			

Zadanie 42. (0–3)

W wycinek koła wyznaczony przez kąt środkowy KSL o mierze 45° wpisano kwadrat $ABCD$ w taki sposób, że wierzchołki A oraz B leżą na promieniu SK , wierzchołek D leży na promieniu SL , a wierzchołek C leży na łuku \widehat{KL} (zobacz rysunek).

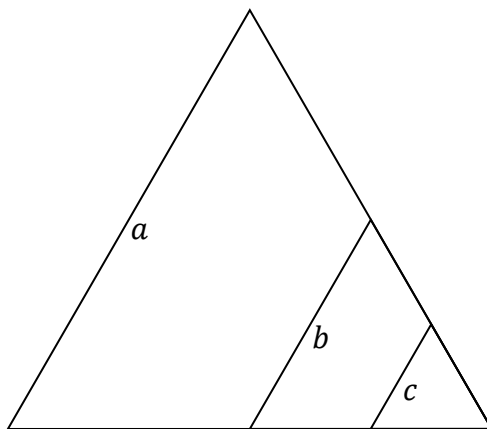


Oblicz stosunek pola kwadratu $ABCD$ do pola wycinka kołowego KSL . Zapisz obliczenia.

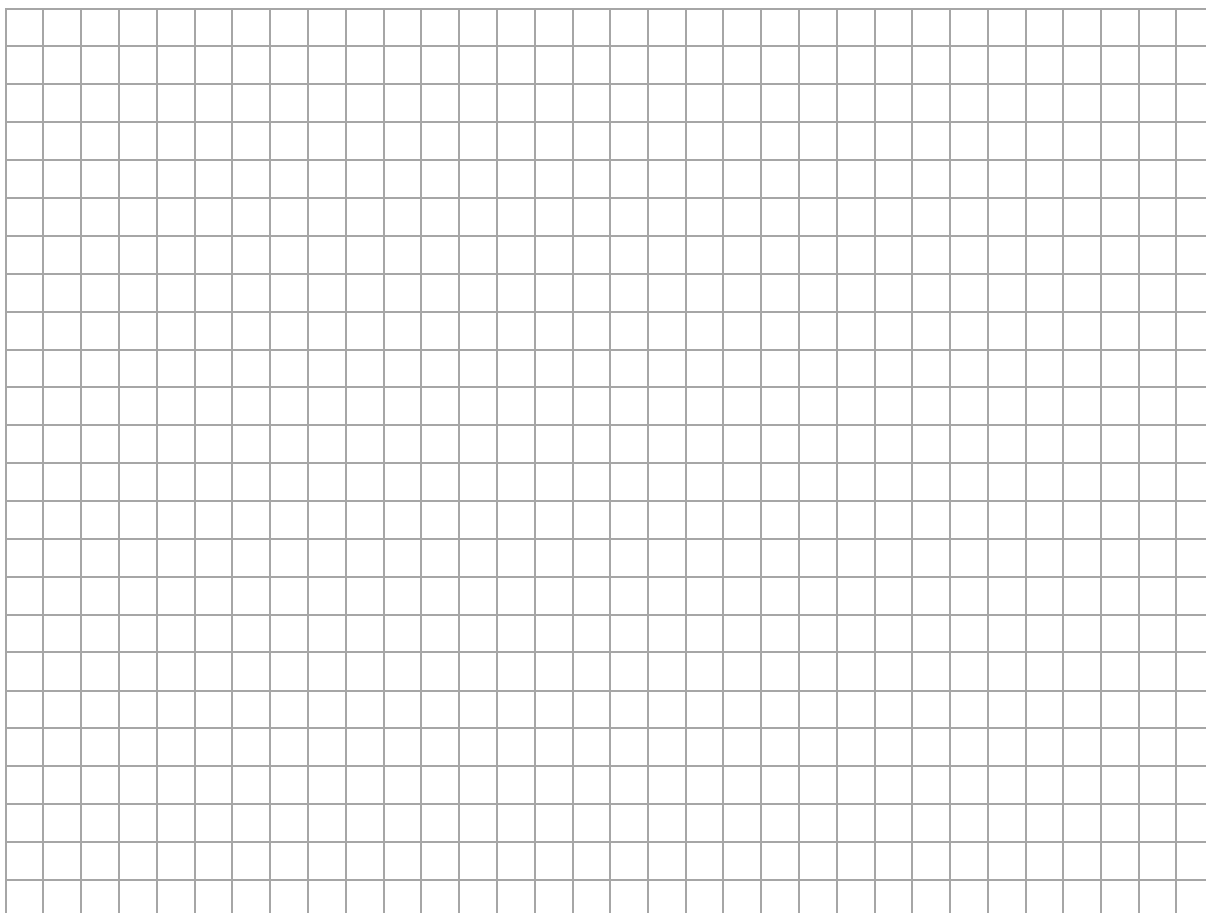


Zadanie 44. (0–2)**PP**

W trójkącie równobocznym o boku długości a poprowadzono dwa odcinki równoległe do jednego z jego boków. Długości tych odcinków są równe b i c , przy czym $c < b < a$ (zobacz rysunek). Odcinki podzieliły trójkąt równoboczny na trzy figury: dwa trapezy i trójkąt.



Wykaż, że stosunek pola trapezu o podstawach b i c do pola trapezu o podstawach a i b jest równy $\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}$.

**PP**

Zadanie sprawdza wymaganie VIII.12 podstawy programowej z matematyki, które nie będzie obowiązywało na egzaminie maturalnym w roku 2023 i 2024.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej

Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru IX

Uczeń:

- 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;
- 2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);
- 3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;
- 4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$;
- 5) oblicza odległość punktu od prostej;
- 6) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej;
- 7) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

Komentarz

Podstawową kompetencją sprawdzaną w tym dziale jest sprawność poruszania się w kartezjańskim układzie współrzędnych oraz operowanie obiektami matematycznymi w nim osadzonymi: punktami, prostymi, okręgami. Zadania sprawdzają m.in. umiejętność badania równoległości oraz prostopadłości prostych; szukania punktów wspólnych dwóch prostych, prostej i okręgu, prostej i paraboli; wyznaczania obrazu figur w symetrii osiowej lub środkowej.

Pojęcia

- proste prostopadłe
- proste równoległe
- postać ogólna prostej
- postać kierunkowa prostej
- długość odcinka
- odległość punktu od prostej
- punkty wspólne dwóch prostych, prostej i okręgu, prostej i paraboli
- równanie okręgu
- symetria osiowa
- symetria środkowa

Zadania sprawdzające wymagania z obszaru IX

Zadanie 45. (0–1)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , rozważamy dwie proste o równaniach

$$y = a + b \cdot x \text{ oraz } y = -\frac{1}{a} - \frac{2}{3}b^2 \cdot x,$$

gdzie $a \neq 0, b \neq 0$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

Dla $a = 2$ i $b = -\frac{3}{2}$ rozważane proste są

A.	prostokątne,	ponieważ	1.	$a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) = -1$
	równoległe,		2.	$(a + b) \left(-\frac{1}{a} - \frac{2}{3}b^2\right) = -1$
B.			3.	$b = -\frac{2}{3}b^2$

Zadanie 46.

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dany jest trójkąt ABC . Wierzchołki tego trójkąta mają współrzędne: $A = (-15, -8), B = (-6, 4), C = (-19, -5)$.

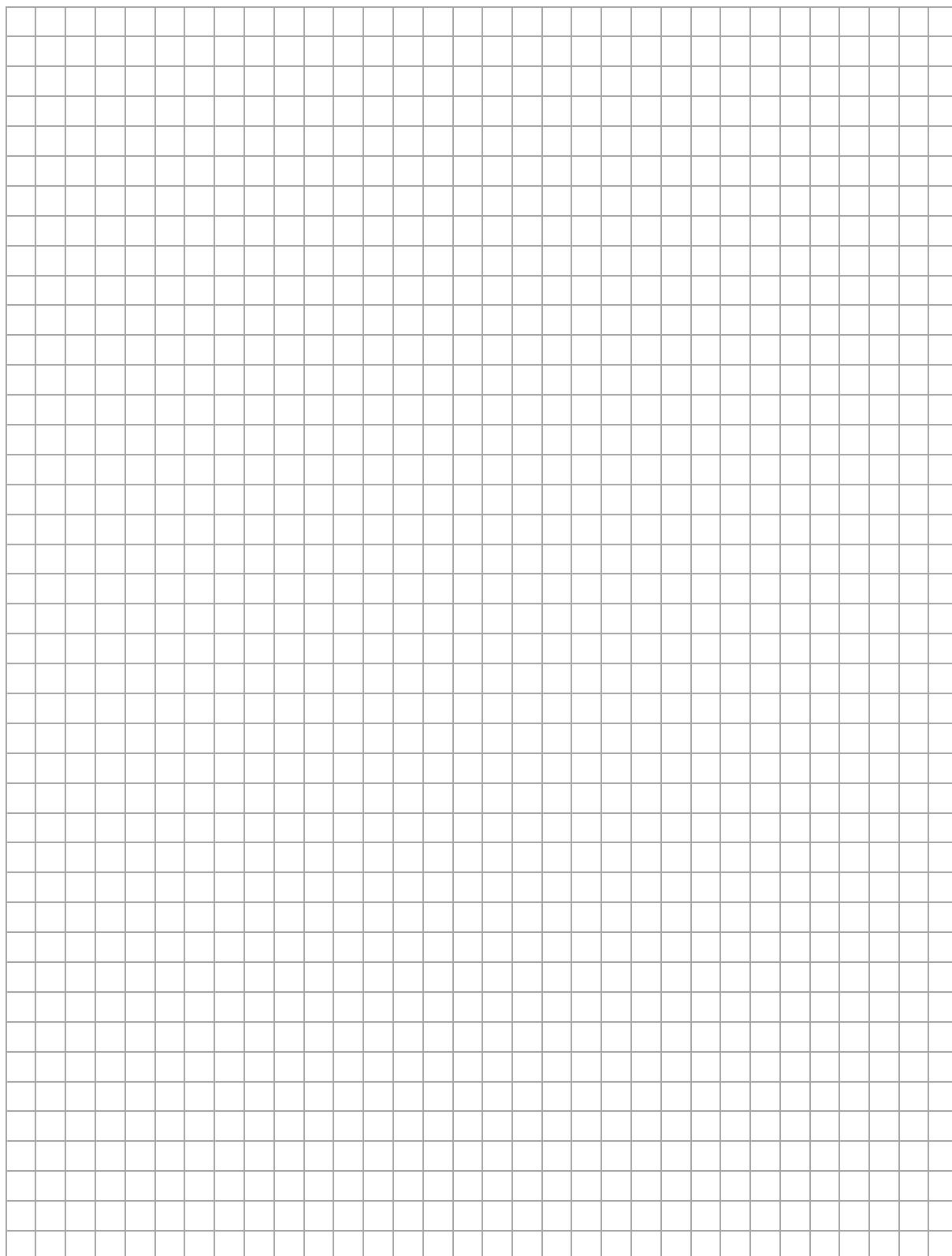
Zadanie 46.1. (0–2)

Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny. Zapisz obliczenia.

Zadanie 46.2. (0–3)

Wierzchołki trójkąta ABC są trzema wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Odcinek AC jest przekątną tego równoległoboku.

Oblicz współrzędne wierzchołka D . Zapisz obliczenia.



Zadanie 46.3. (0–1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednie liczby w wyznaczonych miejscach, aby zdanie było prawdziwe.

Punkt S przecięcia środkowych trójkąta ABC ma współrzędne: $S = (\dots\dots\dots, \dots\dots\dots)$.

Zadanie 47. (0–1)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest okrąg O o równaniu $x^2 + y^2 = 2$ oraz prosta k o równaniu $y = m$, gdzie $m \in \mathbb{R}$.

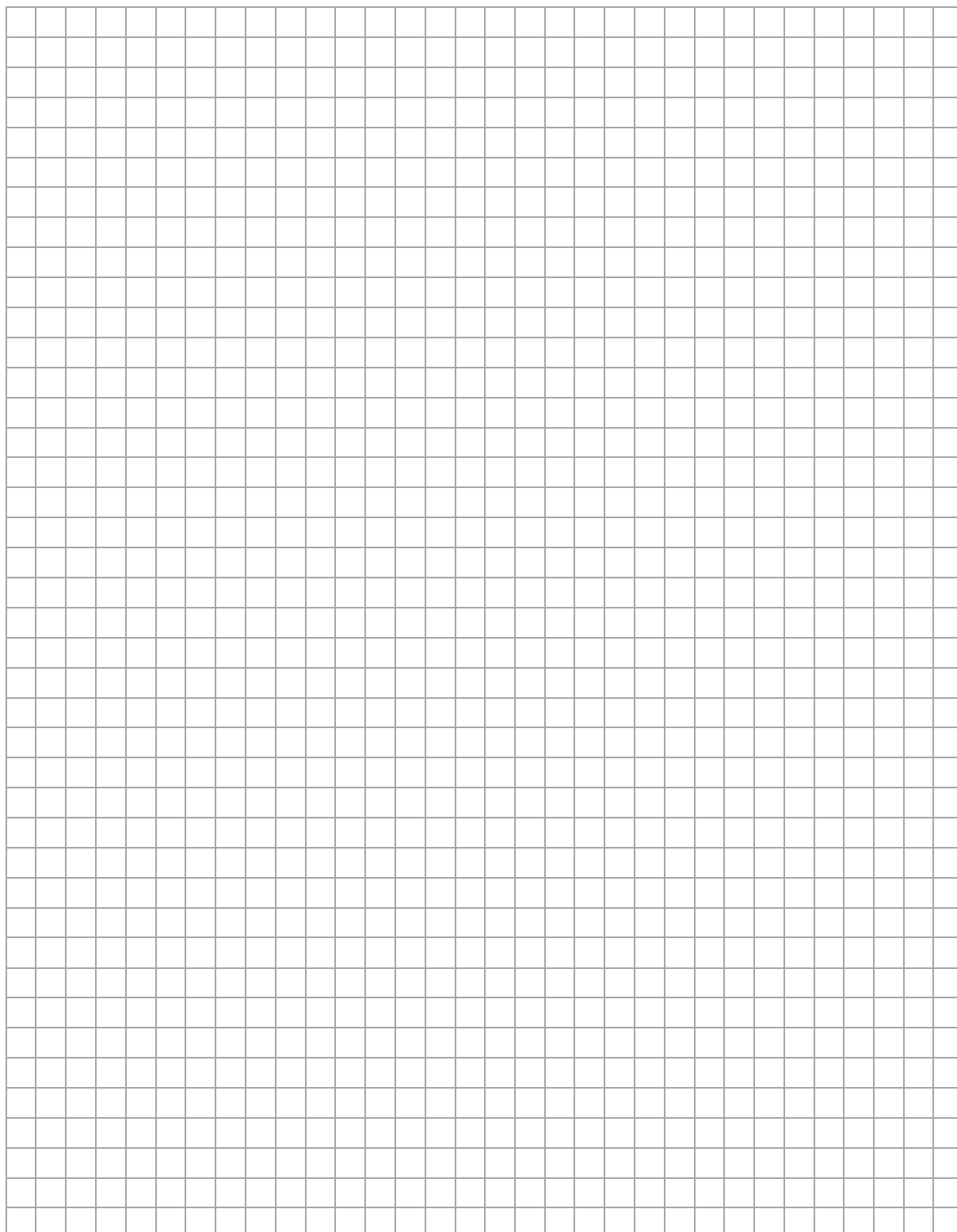
Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiedni przedział w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Okrąg O i prosta k mają dwa punkty wspólne tylko wtedy, gdy $m \in \dots\dots\dots$.

Zadanie 48. (0–4)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dany jest trójkąt ABC . Podstawa AB tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $y = -3x + 6$. Wierzchołki A i B leżą – odpowiednio – na osi Oy oraz Ox . Wierzchołek C ma współrzędne $(3, 7)$.

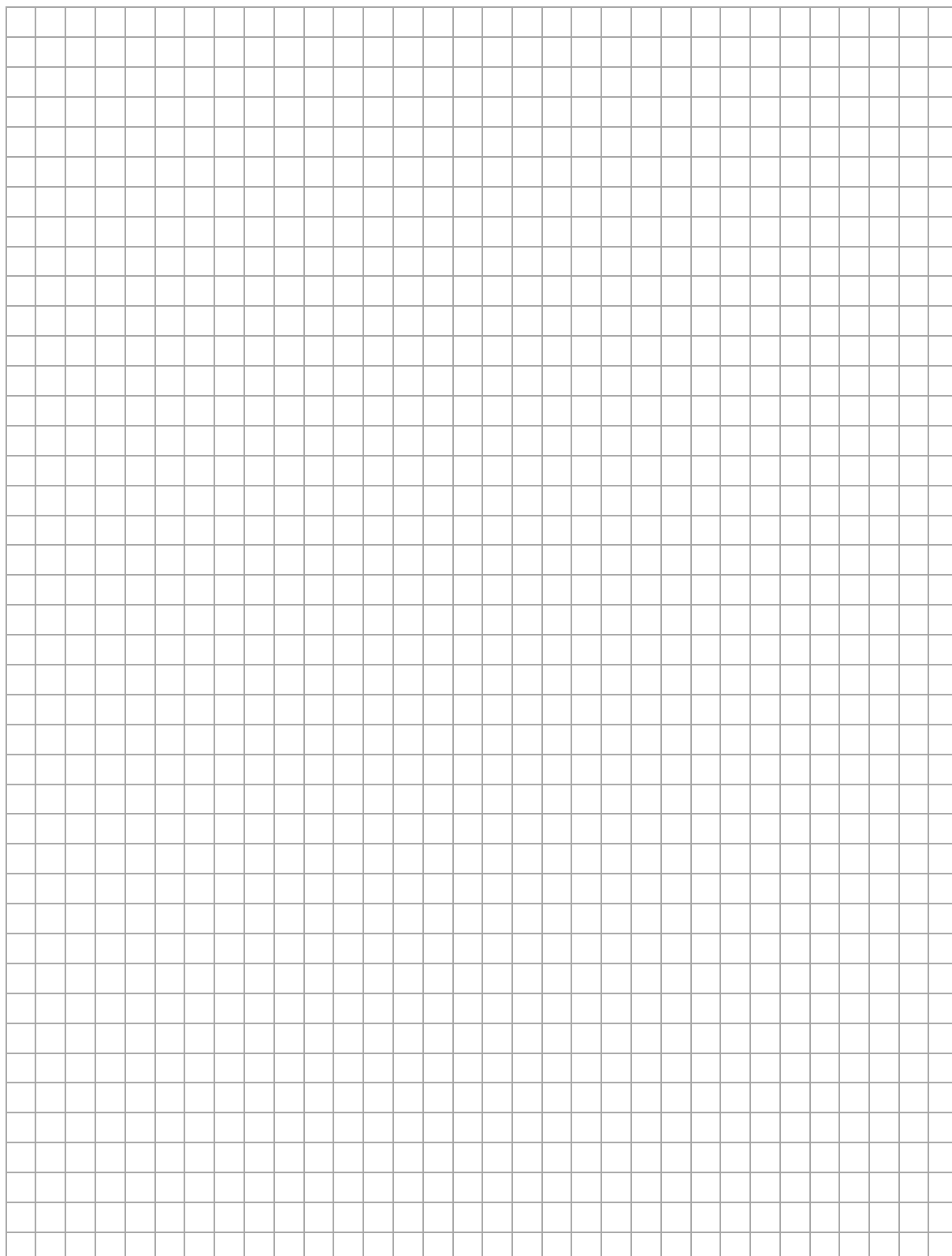
Oblicz pole trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.

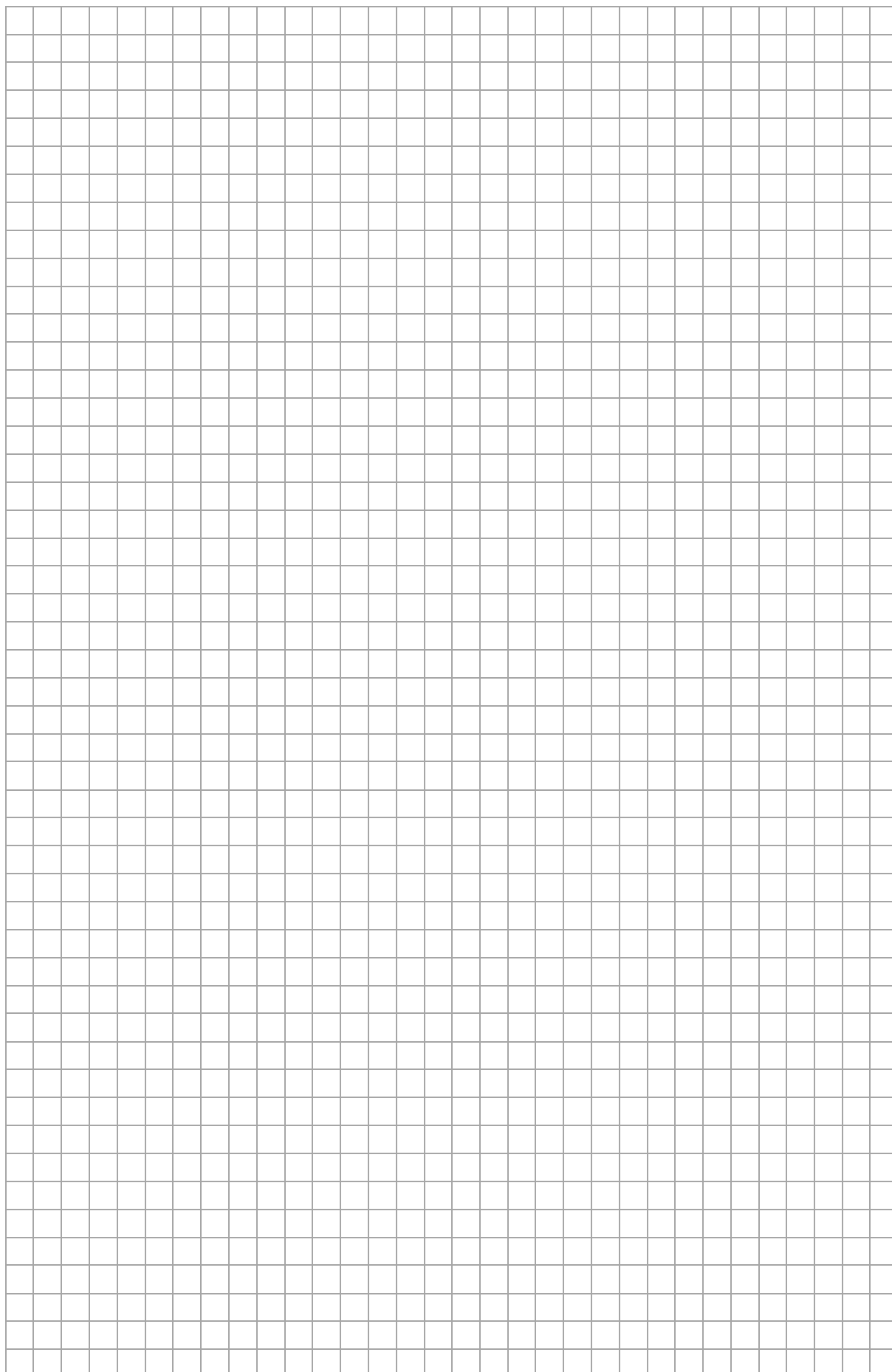


Zadanie 49. (0–4)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (-8, 12)$ i $B = (-2, 4)$ są końcami cięciwy okręgu \mathcal{O} . Środek tego okręgu leży na prostej k o równaniu $y = 4x + 2$.

Wyznacz współrzędne środka okręgu \mathcal{O} i promień tego okręgu. Zapisz obliczenia.



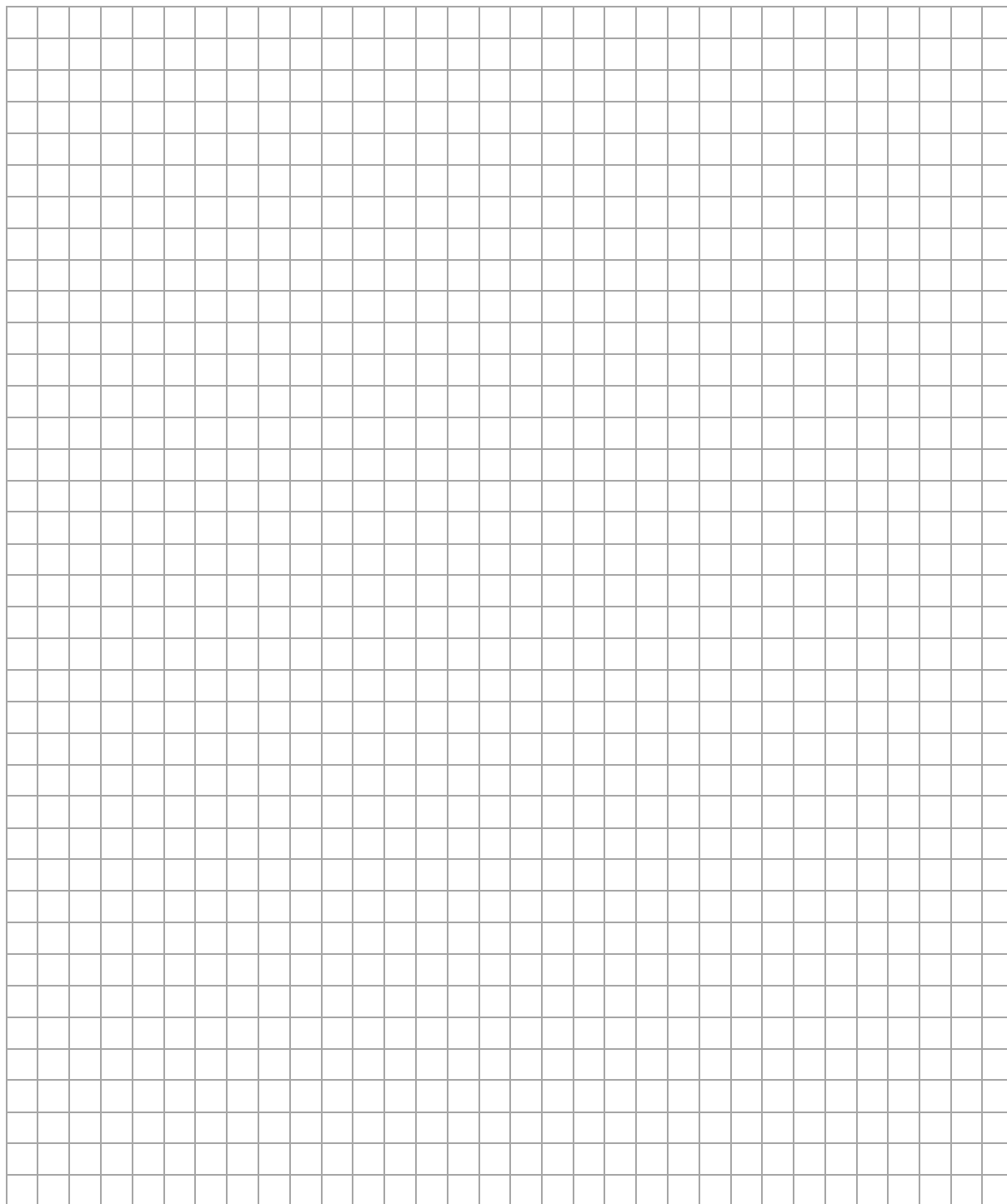


Zadanie 50. (0–3)

PP

Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Funkcja liniowa g określona jest wzorem $g(x) = -x + 5$.

Oblicz współrzędne punktów, w których przecinają się wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz funkcji $y = g(x)$. Zapisz obliczenia.



PP

Zadanie sprawdza wymaganie IX.6 podstawy programowej z matematyki, które nie będzie obowiązywało na egzaminie maturalnym w roku 2023 i 2024.

X. Stereometria

Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru X

Uczeń:

- 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;
- 2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;
- 3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;
- 4) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;
- 5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;
- 6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;
- 7) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych.

Komentarz

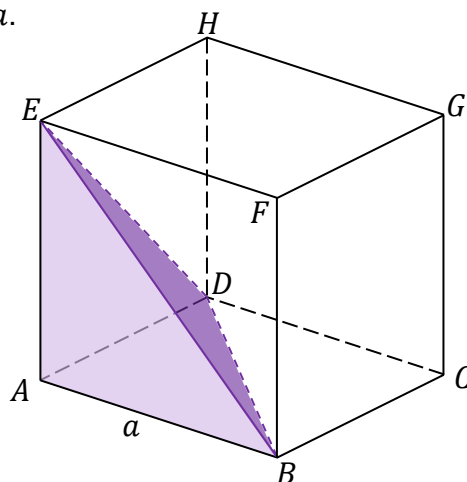
Do rozwiązywania zadań z tego działu niezbędna jest wyobraźnia przestrzenna. Zadania sprawdzają m.in. umiejętność posługiwania się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną, kąta dwuściennego oraz przekroju i rozpoznawania ich w wybranych bryłach. Sprawdzana jest umiejętność obliczania pola powierzchni i objętości wybranych figur przestrzennych oraz wykorzystania zależności między objętościami brył podobnych.

Pojęcia

- wzajemne położenie prostych w przestrzeni
- kąt między prostą a płaszczyzną
- kąt dwuścienny między półpłaszczyznami
- graniastosłupy
- ostrosłupy
- walec
- stożek
- kula
- pole powierzchni
- objętość

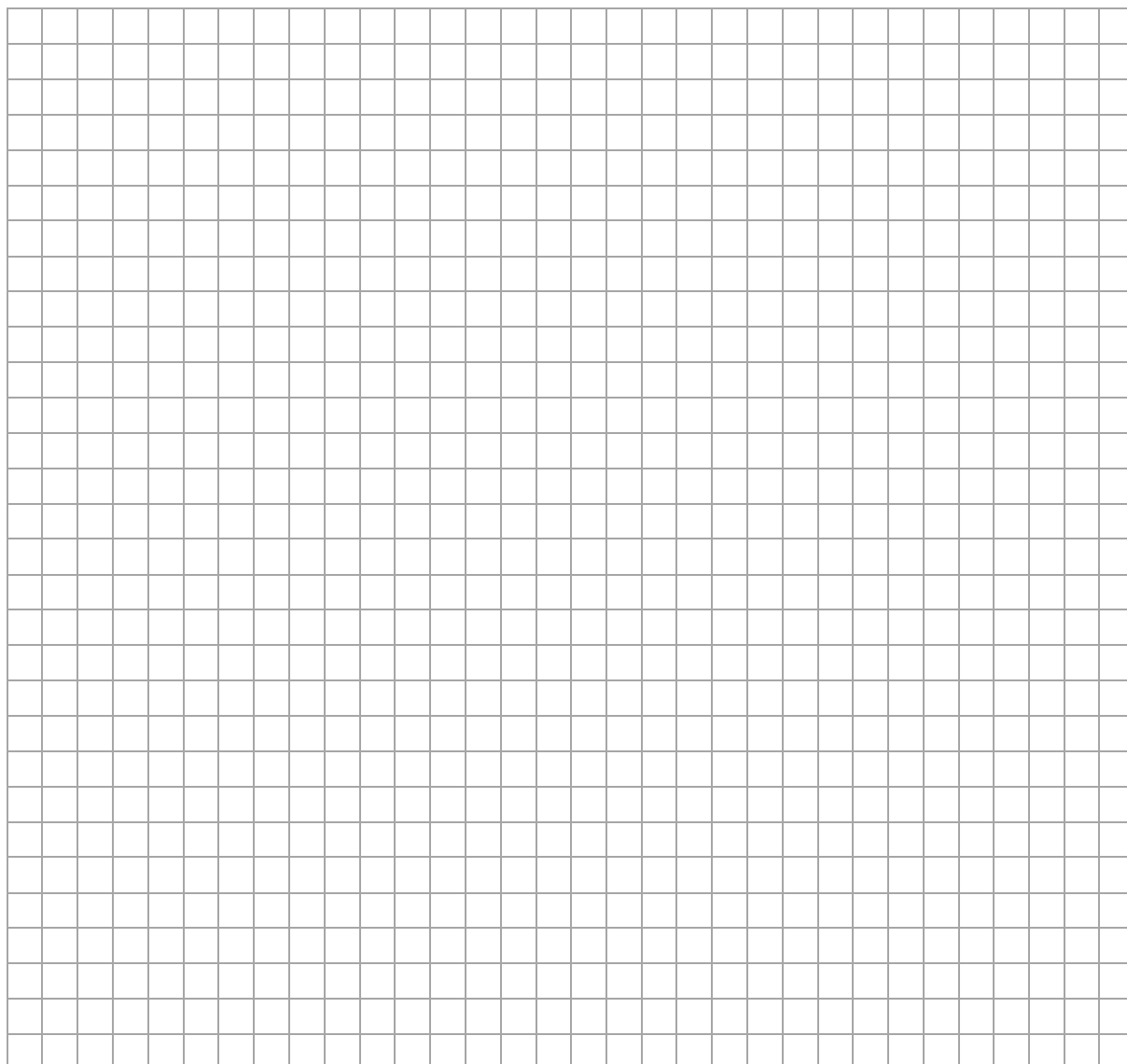
Zadanie 52. (0–2)**PP**

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości a .
Punkty A, B, D i E są wierzchołkami ostrosłupa
(zobacz rysunek).



Oblicz pole powierzchni ostrosłupa $ABDE$.

Zapisz obliczenia.

**PP**

Zadanie sprawdza wymaganie X.5 podstawy programowej z matematyki, które nie będzie obowiązywało na egzaminie maturalnym w roku 2023 i 2024.

XI. Kombinatoryka

Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru XI

Uczeń:

- 1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
- 2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż:
 - a) obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2,
 - b) obliczenie, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 1.

Komentarz

W zadaniach zgromadzonych w tym dziale weryfikowana będzie głównie umiejętność zliczania obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych, przy zastosowaniu między innymi reguły mnożenia i dodawania.

Pojęcia

- zliczanie obiektów
- reguła mnożenia
- reguła dodawania

Zadanie 58. (0–1)

Na dwóch półkach ustawiano 9 książek: 4 biograficzne i 5 fantasy. Ustawiono je w taki sposób, aby na każdej półce znalazły się książki wyłącznie jednego rodzaju.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wszystkich sposobów ustawienia książek przy zadanym warunku jest:

A. $4! \cdot 5! \cdot 2$

B. $4! \cdot 5!$

C. $4 \cdot 5$

D. $4 \cdot 5 \cdot 2$

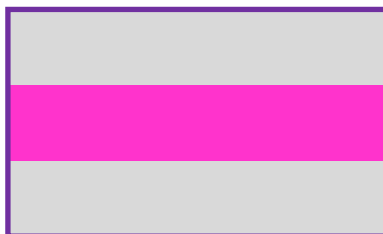
Brudnopis																			

Zadanie 59. (0–1)

Firma krawiecka produkuje prostokątne dwukolorowe obrusy w jednakowym rozmiarze. Każdy obrus jest zszyty z trzech pasów materiału tej samej szerokości (zobacz rysunek). Zewnętrzne pasy są w tym samym kolorze. Cały obrus jest obszyty lamówką w jednym kolorze.

W firmowym magazynie materiały są dostępne w 5 kolorach, a lamówka – w 3 kolorach.

Obrusy uznajemy za **różne**, gdy różnią się kolorem lamówki lub kolorem pasów zewnętrznych, lub kolorem pasa wewnętrznego.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba wszystkich różnych obrusów, które firma może produkować, jest równa

A. $5 \cdot 4 \cdot 3$

B. $5 \cdot 5 \cdot 3$

C. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3$

D. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3$

Brudnopis																			

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru XII

Uczeń:

- 1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym;
- 2) stosuje skalę centylową;
- 3) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę;
- 4) oblicza odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje ten parametr dla danych empirycznych;
- 5) oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

Komentarz

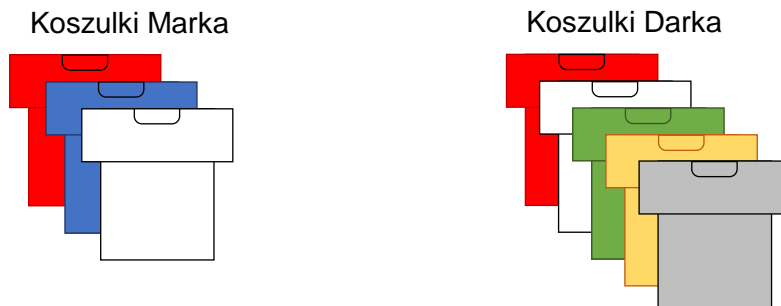
Zadania z tego działu sprawdzają m.in. umiejętność obliczania prawdopodobieństwa w modelu klasycznym, wyznaczania średniej arytmetycznej, średniej ważonej, mediany i dominanty. Sprawdzana jest również umiejętność obliczania odchylenia standardowego zestawu danych oraz wartości oczekiwanej doświadczenia losowego.

Pojęcia

- prawdopodobieństwo w modelu klasycznym
- skala centylowa
- średnia arytmetyczna
- średnia ważona
- mediana
- dominanta
- odchylenie standardowe
- wartość oczekiwana

Zadanie 63. (0–1)

Marek ma 3 koszulki w kolorach czerwonym, niebieskim i białym. Darek ma 5 koszulek w kolorach czerwonym, białym, zielonym, żółtym i szarym. Chłopcy umówili się, że następnego dnia każdy z nich założy wybraną w sposób losowy jedną ze swoich koszulek.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że następnego dnia chłopcy założą koszulki w tym samym kolorze, jest równe

A. $\frac{2}{15}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{4}{15}$

Brudnopis																			

Zadanie 64. (0–1)

Dany jest pięciokąt foremny $ABCDE$. Losujemy jednocześnie dwa różne wierzchołki tego pięciokąta.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowane wierzchołki będą końcami przekątnej pięciokąta $ABCDE$, jest równe

A. $\frac{3}{10}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{1}{2}$

Brudnopis																			

Zadanie 65. (0–1)

Ze zbioru pięciu liczb $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie parzysta, jest równe $\frac{8}{25}$.	P	F
Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie liczby będą parzyste, jest równe $\frac{2}{25}$.	P	F

Brudnopis

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy

Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru XIII

Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Komentarz

W dziale tym zadania sprawdzają umiejętność rozwiązywania zadań optymalizacyjnych w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Optymalizacja to szukanie najlepszego rozwiązania (wartości najmniejszej lub największej) spełniającego warunki zadania.

Pojęcia

- optymalizacja
- funkcja kwadratowa

Zadania sprawdzające wymagania z obszaru XIII

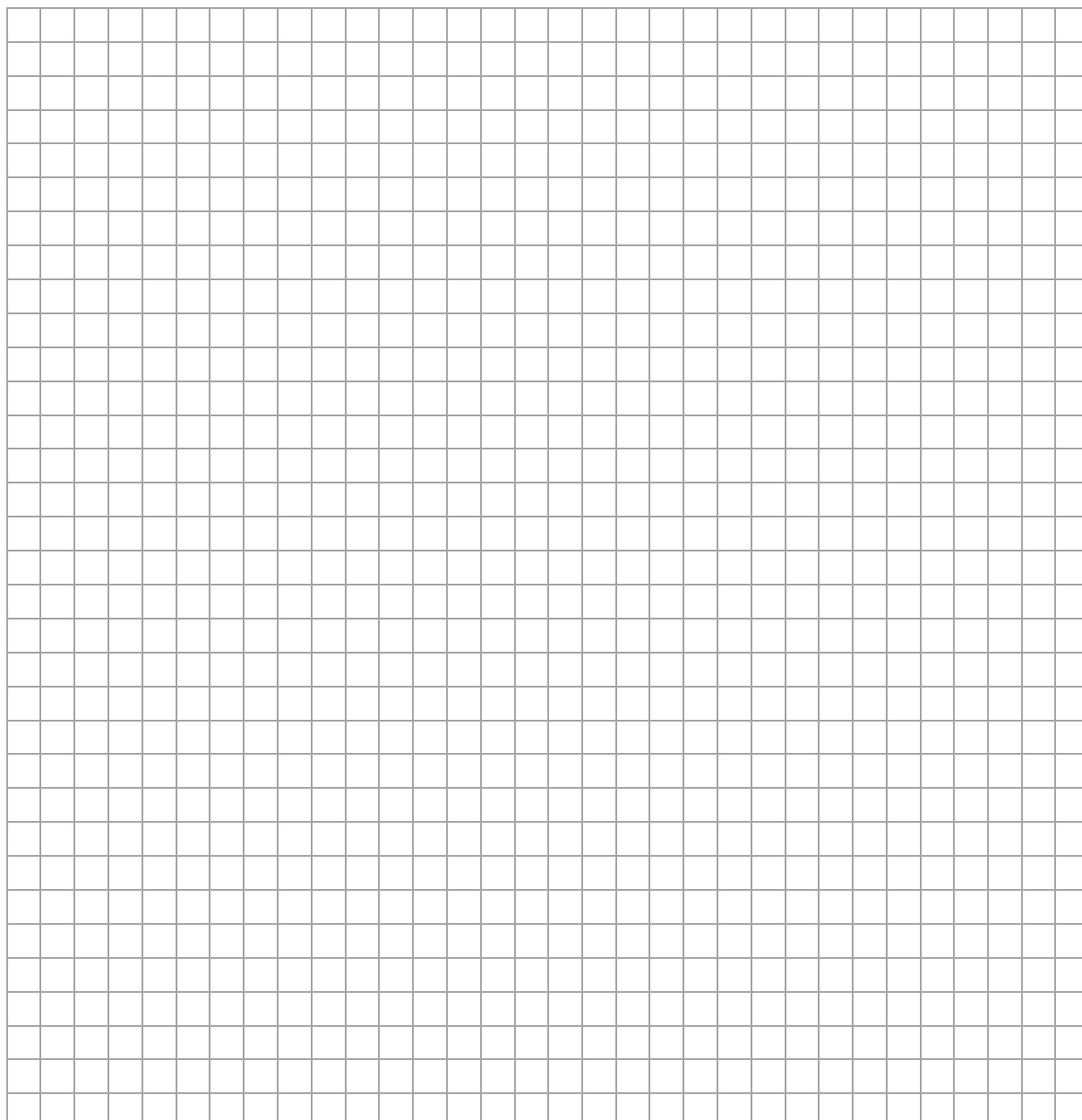
Zadanie 66. (0–3)

Firma handlowa ustaliła, że liczba sprzedanych przez nią egzemplarzy gry komputerowej w ciągu każdego tygodnia zależy od jej ceny. Liczbę sprzedanych egzemplarzy opisuje funkcja $f(x) = 2400 - 15x$, gdzie x oznacza cenę jednostkową gry.

Jaka powinna być cena jednostkowa, aby tygodniowy przychód P ze sprzedaży gry był największy? Oblicz ten największy przychód.

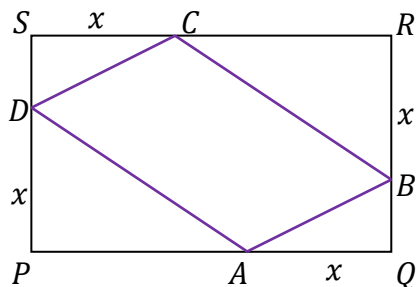
Zapisz obliczenia.

Wskazówka: przyjmij, że przychód jest iloczynem liczby sprzedanych gier oraz ceny jednostkowej tej gry.

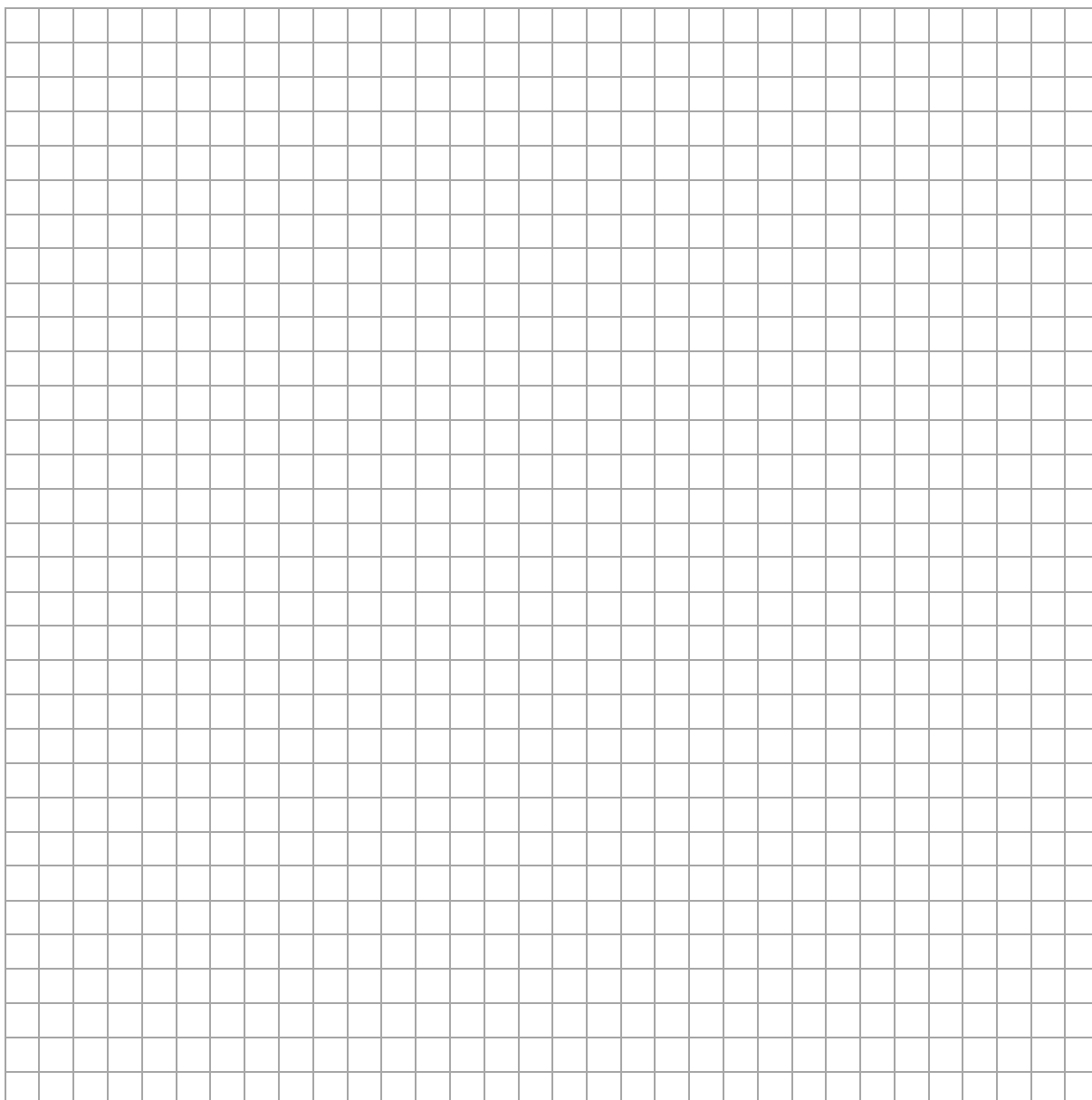


Zadanie 67. (0–4)

Dany jest prostokąt $PQRS$ o bokach długości $|PQ| = |SR| = 10$ oraz $|PS| = |QR| = 6$. Na bokach PQ, QR, RS, SP obrano odpowiednio punkty A, B, C, D takie, że $|AQ| = |BR| = |CS| = |DP| = x$ oraz $x \geq 3$ (zobacz rysunek).



Wyznacz długość odcinka x , dla którego pole czworokąta $ABCD$ jest najmniejsze. Wyznacz to pole. Zapisz obliczenia.



Zasady oceniania

I. Liczby rzeczywiste

Zadanie 1. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadniania poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów gwarantujących poprawność rozumowania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Uczeń: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż: a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych.

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

1 pkt – zapisanie sumy trzech kolejnych liczb jako $3n$ lub $3(n + 1)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Oznaczmy trzy kolejne liczby jako $n - 1, n, n + 1$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$.

Wówczas ich suma to

$$(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$$

Ponieważ n jest liczbą całkowitą, to liczba $3n$ jest podzielna przez 3.

Sposób II

Oznaczmy trzy kolejne liczby jako $n, n + 1, n + 2$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$.

Wówczas ich suma to

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

Ponieważ n jest liczbą całkowitą, to liczba $3(n + 1)$ jest podzielna przez 3.

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Uczeń: I.3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych; II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$ [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

$x = 9$

$y = 2$

Zadanie 3. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Uczeń: I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Zasady oceniania

3 pkt – zapisanie wartości wyrażenia:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

2 pkt – zapisanie wartości wyrażenia z niewymiernością w mianowniku:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

1 pkt – zapisanie zależności między a i b :

$$a = -\frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \text{lub} \quad b = -\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{lub} \quad \frac{b}{a} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{lub} \quad \frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Z warunków zadania mamy

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 0$$

Wynika stąd, że

$$a\sqrt{2} = -b\sqrt{3}$$

Mamy zatem zależność

$$\frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \text{oraz} \quad \frac{b}{a} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Podstawiając te wartości do wyrażenia $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ mamy:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} = -\frac{2\sqrt{6}}{6} - \frac{3\sqrt{6}}{6} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Zadanie 4. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Uczeń: I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Zasady oceniania

2 pkt – doprowadzenie wyrażenia do postaci 1 i stwierdzenie, że 1 jest liczbą całkowitą.

1 pkt – zapisanie wyrażenia w postaci

$$a = \frac{\sqrt{2} - 1}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} + \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{(\sqrt{3} + \sqrt{4})(\sqrt{4} - \sqrt{3})}$$

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozszerzając każdy z ułamków przez odpowiednią różnicę pierwiastków, a następnie stosując wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażen do każdego z mianowników, otrzymamy ułamki, których mianowniki redukują się do 1:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} = \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} + \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{(\sqrt{3} + \sqrt{4})(\sqrt{4} - \sqrt{3})} = \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) = \sqrt{4} - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Liczba 1 jest liczbą całkowitą.

Zadanie 5. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw matematycznych przy przekształcaniu wyrażen algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Uczeń: I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Komentarz

Stosując związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach otrzymujemy:

$$\sqrt{\sqrt{144} + \sqrt{16}} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4 = 2^2 = 2^{\frac{4}{2}}$$

Zadanie 6. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Uczeń: I.8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów.

Zasady oceniania

2 pkt – obliczenie stosunku okresów:

$$\frac{T_K}{T_Z} = \sqrt{6,056} \approx 2,46$$

1 pkt – zapisanie stosunku okresu drgań wahadła zegara na Księżycu do okresu drgań tego samego wahadła na Ziemi:

$$\frac{T_K}{T_Z} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{1,62}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{9,81}}}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy stosunek $\frac{T_K}{T_Z}$ i stosujemy twierdzenie o dzieleniu pierwiastków tego samego stopnia

$$\frac{T_K}{T_Z} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{1,62}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{9,81}}} = \sqrt{\frac{\frac{l}{1,62}}{\frac{l}{9,81}}} = \sqrt{\frac{l}{1,62} \cdot \frac{9,81}{l}} = \sqrt{\frac{9,81}{1,62}} \approx \sqrt{6,056} \approx 2,46$$

Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Uczeń: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Komentarz

Stosując wzór na logarytm iloczynu oraz logarytm potęgi, otrzymujemy przekształcanie:

$$\begin{aligned} \log k + \log \frac{1}{100} k^2 - \log \frac{1}{10} k^3 &= \log k + \log \frac{1}{100} + \log k^2 - (\log \frac{1}{10} + \log k^3) = \\ &= \log k - 2 + 2 \log k + 1 - 3 \log k = -1 \end{aligned}$$

Zadanie 8. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych.	Uczeń I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zasady oceniania

2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi: B i E.

1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna: B albo E.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

BE

II. Wyrażenia algebraiczne

Zadanie 9. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: II.1). stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$.

Zasady oceniania

1 pkt – poprawne wskazanie dwóch odpowiedzi.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

FP

Zadanie 10. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: II.5) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 11. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Uczeń: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$ [...]; 7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; 8) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż: $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$.

Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie wartości wyrażenia $-\frac{ab}{a-b}$ dla $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ oraz $b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$: $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

2 pkt – poprawne przekształcenie wyrażenia $\left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2-b^2}\right) : \left(\frac{a-b}{a^2-b^2}\right)$ do postaci $-\frac{ab}{a-b}$

1 pkt – poprawne przekształcenie wyrażenia $\left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2-b^2}\right) : \left(\frac{a-b}{a^2-b^2}\right)$ do postaci

$$-\frac{ab}{(a-b)(a+b)} : \frac{a-b}{a^2-b^2}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy wyrażenie do prostszej postaci, stosując wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2-b^2}\right) : \left(\frac{a-b}{a^2-b^2}\right) &= \left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{(a+b)(a-b)}\right) : \left(\frac{a-b}{a^2-b^2}\right) = \\ &= \left(\frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)} - \frac{a^2}{(a+b)(a-b)}\right) : \left(\frac{a-b}{a^2-b^2}\right) = \\ &= \left(\frac{a^2-ab-a^2}{(a+b)(a-b)}\right) : \left(\frac{a-b}{a^2-b^2}\right) = \frac{-ab}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a-b} = -\frac{ab}{a-b} \end{aligned}$$

Obliczamy wartość wyrażenia $-\frac{ab}{a-b}$, podstawiając za a oraz b odpowiednie wartości liczbowe:

$$-\frac{ab}{a-b} = -\frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{2}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = -\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{3}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Zadanie 12. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$ [...]; II.7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; II.8) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż: $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$.

Zasady oceniania

2 pkt – zapisanie współczynników: $a = 5$, $b = -13$, $c = 1$, $d = -3$

1 pkt – doprowadzenie wyrażenia do postaci $\frac{5x-13}{x-3}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy podane wyrażenie:

$$\frac{2}{x-3} + 5 = \frac{2}{x-3} + \frac{5(x-3)}{x-3} = \frac{2+5x-15}{x-3} = \frac{5x-13}{x-3}$$

Doprowadziliśmy wyrażenie do postaci

$$\frac{ax+b}{cx+d}$$

zatem

$$a = 5, b = -13, c = 1, d = -3$$

Zadanie 13. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: II.5) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A1

III. Równania i nierówności

Zadanie 14. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Uczeń: III.1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny; III.3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody rozwiązania nierówności, podanie poprawnego zbioru wszystkich rozwiązań nierówności i podanie największej liczby całkowitej x_{max} , która spełnia podaną nierówność: $(-\infty, -3]$ i $x_{max} = -3$

1 pkt – poprawne przekształcenie nierówności do postaci $x \leq \frac{3\sqrt{5}-6}{2-\sqrt{5}}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Nierówność $2x \geq \sqrt{5} \cdot x + 3\sqrt{5} - 6$ przekształcamy równoważnie:

$$2x \geq \sqrt{5} \cdot x + 3\sqrt{5} - 6$$

$$2x - \sqrt{5} \cdot x \geq 3\sqrt{5} - 6$$

$$(2 - \sqrt{5}) \cdot x \geq 3\sqrt{5} - 6$$

Dzielimy obie strony nierówności przez $(2 - \sqrt{5})$. Ponieważ liczba ta jest ujemna, więc należy pamiętać o odpowiedniej zmianie zwrotu nierówności.

$$x \leq \frac{3\sqrt{5} - 6}{2 - \sqrt{5}}$$

Upraszczamy ułamek $\frac{3\sqrt{5}-6}{2-\sqrt{5}}$:

$$x \leq \frac{-3(2 - \sqrt{5})}{2 - \sqrt{5}}$$

$$x \leq -3$$

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $2x \geq \sqrt{5} \cdot x + 3\sqrt{5} - 6$ jest $(-\infty, -3]$.
Największą liczbą całkowitą, która spełnia tę nierówność jest (-3) .

Uwaga

Ułamek $\frac{3\sqrt{5}-6}{2-\sqrt{5}}$ możemy uprościć, usuwając niewymierność z mianownika:

$$\frac{3\sqrt{5}-6}{2-\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}-6}{2-\sqrt{5}} \cdot \frac{2+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}+15-12-6\sqrt{5}}{2^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{3}{-1} = -3$$

Zadanie 15. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: III.6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda rozwiązania równania i wyznaczenie wszystkich rozwiązań

$$\text{równania: } x = -3 \text{ lub } x = 3 \text{ lub } x = \frac{1}{2}$$

1 pkt – zapisanie wielomianu $-2x^3 + x^2 + 18x - 9$ w postaci iloczynowej:

$$(x-3)(x+3)(2x-1)$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Zapisujemy lewą stronę równania w postaci iloczynowej, stosując metodę grupowania wyrazów

$$-x^2(2x-1) + 9(2x-1) = 0 \text{ lub } 2x(-x^2+9) - 1(-x^2+9) = 0$$

Stąd

$$(-x^2+9)(2x-1) = 0$$

$$(3-x)(3+x)(2x-1) = 0$$

Zatem rozwiązaniami równania $-2x^3 + x^2 + 18x - 9 = 0$ są: $x = -3$ lub $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 3$.

Sposób II

Korzystamy z definicji podzielności wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x - a)$. Obliczamy $W(3) = 0$ i stwierdzamy, że liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = -2x^3 + x^2 + 18x - 9$. Po podzieleniu wielomianu W przez dwumian $(x - 3)$ otrzymujemy iloraz $(-2x^2 - 5x + 3)$. Zapisujemy dane równanie w postaci

$$(x - 3)(-2x^2 - 5x + 3) = 0$$

Stąd

$$x - 3 = 0, \text{ lub } -2x^2 - 5x + 3 = 0$$

Rozwiązując równanie kwadratowe, otrzymamy:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 25 + 24 = 49$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{49}}{2 \cdot (-2)} = \frac{5 - 7}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \text{ oraz } x_2 = \frac{5 + \sqrt{49}}{2 \cdot (-2)} = \frac{5 + 7}{-4} = \frac{12}{-4} = -3$$

Rozwiązując równanie $x - 3 = 0$, otrzymujemy: $x = 3$.

Rozwiązania równania $-2x^3 + x^2 + 18x - 9 = 0$ to: $x = \frac{1}{2}$ lub $x = -3$ lub $x = 3$.

Zadanie 16. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymaganie szczegółowe
<p>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</p> <p>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.</p> <p>I. Sprawność rachunkowa.</p> <p>Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.</p>	<p>Uczeń:</p> <p>III.6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.</p>

Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie i zapisanie rozwiązań równania: (-4) , 1 , 3

2 pkt – zapisanie alternatywy równań: $x - 1 = 0$ lub $-x^2 - x + 12 = 0$

1 pkt – poprawne przekształcenie równania do postaci $(x - 1)(-x^2 - x + 12) = 0$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Przekształcamy lewą stronę równania $-x^3 + 13x - 12 = 0$ w sposób równoważny tak, aby otrzymać postać iloczynową wielomianu $-x^3 + 13x - 12$:

$$\begin{aligned} -x^3 + 13x - 12 &= 0 \\ -x^3 + x + 12x - 12 &= 0 \\ -x(x^2 - 1) + 12(x - 1) &= 0 \\ -x(x - 1)(x + 1) + 12(x - 1) &= 0 \\ (x - 1)[-x(x + 1) + 12] &= 0 \\ (x - 1)(-x^2 - x + 12) &= 0 \end{aligned}$$

Korzystamy z własności iloczynu i zapisujemy równanie $(x - 1)(-x^2 - x + 12) = 0$ jako alternatywę równań:

$$x - 1 = 0 \quad \text{lub} \quad -x^2 - x + 12 = 0$$

Rozwiązując równanie $x - 1 = 0$, otrzymujemy: $x = 1$

Rozwiązując równanie kwadratowe, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12 = 49 \\ x &= \frac{1 + 7}{-2} = -4 \quad \text{lub} \quad x = \frac{1 - 7}{-2} = 3 \end{aligned}$$

Zatem rozwiązaniami równania $-x^3 + 13x - 12 = 0$ są liczby: (-4) , 1 oraz 3 .

Sposób II

Korzystamy z definicji podzielności wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x - a)$. Obliczamy $W(1) = 0$ i stwierdzamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu

$$W(x) = -x^3 + 13x - 12 = 0$$

Po podzieleniu wielomianu W przez dwumian $(x - 1)$ otrzymujemy iloraz $(-x^2 - x + 12)$.

Zapisujemy dane równanie w postaci

$$(x - 1)(-x^2 - x + 12) = 0$$

Stąd

$$x - 1 = 0 \quad \text{lub} \quad -x^2 - x + 12 = 0$$

Rozwiązując równanie kwadratowe, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12 = 49 \\ x &= \frac{1 + 7}{-2} = -4 \quad \text{lub} \quad x = \frac{1 - 7}{-2} = 3 \end{aligned}$$

Rozwiązując równanie $x - 1 = 0$, otrzymujemy: $x = 1$

Rozwiązania równania $-x^3 + 13x - 12 = 0$ to: $x = -4$ lub $x = 1$ lub $x = 3$.

Zadanie 17. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Uczeń: III.4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe. V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje).

Zasady oceniania

4 pkt – rozwiązanie równania i podanie prawidłowego wyniku: $m = 90$

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą: $\frac{1}{2}m^2 - 5m - 3600 = 0$
 lub $2n^2 + 10n - 3600 = 0$

2 pkt – zapisanie równania uwzględniającego warunki zadania: $(m - 10) \cdot (n + 5) = 3600$
 lub $mn + 5m - 10n - 50 = 3600$ oraz wyznaczenie wielkości m lub n :
 $n = \frac{1}{2}m - 5$ lub $m = 2n + 10$

1 pkt – zapisanie, że do rozwiązania pozostało 3600 zadań i zapisanie równania
 $m \cdot n = 3600$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech m będzie liczbą dni potrzebnych na rozwiązanie pozostałych zadań.

Szymonowi pozostało do rozwiązania $3697 - 97 = 3600$ zadań, zatem

$$m \cdot n = 3600$$

Przy zwiększonej dziennej liczbie rozwiązanych zadań otrzymujemy równanie:

$$(m - 10) \cdot (n + 5) = 3600$$

$$mn + 5m - 10n - 50 = 3600$$

Podstawiamy $mn = 3600$ i wyznaczamy wielkość n :

$$3600 + 5m - 10n - 50 = 3600$$

$$n = \frac{1}{2}m - 5$$

Podstawiając $n = \frac{1}{2}m - 5$, do równania kwadratowego otrzymujemy:

$$(m - 10) \cdot \left(\frac{1}{2}m - 5 + 5\right) = 3600$$

Opuszczając nawiasy i przekształcając równanie, otrzymujemy:

$$m^2 - 10m - 7200 = 0$$

Wyróżnikiem tego równania kwadratowego jest $\Delta = 28900$, zaś jego rozwiązania to $m_1 = -80$ oraz $m_2 = 90$. Z warunków zadania wynika, że jedynym rozwiązaniem zadania jest liczba 90.

Dla $m = 90$ mamy $n = \frac{3600}{90} = 40$.

Szymon zamierza rozwiązywać codziennie 40 zadań. Zajmie mu to 90 dni.

Zadanie 18. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: III.7) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$, i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Komentarz

Stosując wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$ [...], otrzymujemy:

$$\frac{3x(x - 2)(x - 3)(x + 3)}{(x - 2)(x - 3)^2} = 0$$

Stąd

$$3x = 0 \text{ lub } x - 2 = 0 \text{ lub } x - 3 = 0 \text{ lub } x + 3 = 0$$

$$\text{Zatem } x = 0 \text{ lub } x = 2 \text{ lub } x = 3 \text{ lub } x = -3.$$

Ponieważ równanie ma sens, gdy $x \neq 2$ lub $x \neq 3$, więc jego rozwiązaniami są liczby $x = 0$, $x = -3$.

Zadanie 19. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych.	Uczeń: III.1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny. II.7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda rozwiązania zadania i prawidłowe podanie liczb m i n :

$$m = 2, n = 5.$$

1 pkt – zapisanie równania wynikającego z warunków zadania: $\frac{m+6}{n+15} = \frac{m}{n}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisując warunki zadania, mamy

$$\frac{m + 6}{n + 15} = \frac{m}{n}$$

Przekształcając to równanie, otrzymujemy kolejno:

$$m(n + 15) = n(m + 6)$$

$$15m = 6n$$

$$\frac{m}{n} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Ponieważ $\frac{2}{5}$ jest ułamkiem nieskracalnym, to szukanymi liczbami są odpowiednio:

$$m = 2 \text{ oraz } n = 5.$$

IV. Układy równań

Zadanie 20. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Uczeń: IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych; IV.2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Zasady oceniania

2 pkt – zapisanie dwóch równań wynikających z warunków zadania (np. $x + y = 14$ i $y \cdot 10 + x \cdot 1 + 18 = x \cdot 10 + y \cdot 1$) oraz poprawne rozwiązanie tego układu równań, oraz podanie poprawnej odpowiedzi: 86.

1 pkt – zapisanie, że szukana liczba ma postać $x \cdot 10 + y \cdot 1$ oraz zapisanie, że liczba o zamienionych miejscami cyfrach ma postać $y \cdot 10 + x \cdot 1$, oraz zapisanie jednego z równań wynikających z warunków zadania, np. $x + y = 14$ lub $y \cdot 10 + x \cdot 1 + 18 = x \cdot 10 + y \cdot 1$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

x – cyfra dziesiątek szukanej liczby a ,

y – cyfra jedności szukanej liczby a ,

gdzie $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Jeżeli x jest cyfrą dziesiątek, a y cyfrą jedności liczby dwucyfrowej a , to ta liczba jest równa $a = x \cdot 10 + y \cdot 1$.

Jeżeli w tej liczbie przestawimy/zamienimy miejscami cyfry, to liczba o przestawionych/zamienionych miejscami cyfrach jest równa $y \cdot 10 + x \cdot 1$.

Liczba o zamienionych miejscami cyfrach jest o 18 mniejsza od liczby, w której dokonujemy zamiany, więc

$$y \cdot 10 + x \cdot 1 + 18 = x \cdot 10 + y \cdot 1$$

Suma cyfr w liczbie jest równa 14, więc $x + y = 14$.

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} y \cdot 10 + x \cdot 1 + 18 = x \cdot 10 + y \cdot 1 \\ x + y = 14 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 10y + x + 18 = 10x + y \\ x + y = 14 \end{cases} \\ & \begin{cases} 10y - y + x - 10x = -18 \\ x + y = 14 \end{cases} \\ & \begin{cases} 9y - 9x = -18 \quad /: 9 \\ x + y = 14 \end{cases} \\ & + \begin{cases} y - x = -2 \\ x + y = 14 \end{cases} \\ & y - x + x + y = -2 + 14 \\ & 2y = 12 \\ & y = 6 \end{aligned}$$

Korzystamy z równania $x + y = 14$ i obliczamy x :

$$x + 6 = 14$$

$$x = 8$$

Liczba, a jest równa 86.

Zadanie 21. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych.	Uczeń: IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych; IV.2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie dystansu, jaki pokona pies: 120 m.

2 pkt – ustalenie, że musi się odbyć 30 cykli,

ALBO

zapisanie równania $\frac{(x-30)t}{3} = \frac{xt}{4}$

1 pkt – ustalenie, że w jednym cyklu różnica odległości między zwierzętami zmniejsza się o 1 m,

ALBO

wyznaczenie prędkości obu zwierząt $v_p = \frac{4}{t}$ oraz $v_l = \frac{3}{t}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

W czasie, gdy pies pokonuje dystans 4 m, wykonując dwa skoki, lis pokonuje 3 m. Zatem po każdym cyklu dystans między zwierzętami zmniejsza się o 1 m. Wynika z tego, że dystans 30 m zostanie zniwelowany po 30 cyklach. W tym czasie lis przebiegnie $30 \cdot 3 = 90$ metrów, a pies $30 \cdot 4 = 120$ metrów.

Sposób II

Niech t oznacza czas, w którym pies skacze dwa razy, więc przebywa drogę długości 4 m. W tym czasie lis przebywa drogę długości 3 m. Niech v_p oznacza prędkość psa, a v_l – prędkość lisa.

Zachodzą więc równości

$$v_p = \frac{4}{t} \text{ oraz } v_l = \frac{3}{t}$$

Jeśli przez T oznaczymy czas, po jakim pies dogoni lisa, zaś przez x dystans, który przebiegnie pies, mamy zależności czasu dla obu zwierząt.

Dla lisa:

$$T = \frac{x - 30}{v_l} = \frac{x - 30}{\frac{3}{t}} = \frac{(x - 30)t}{3}$$

Dla psa:

$$T = \frac{x}{v_p} = \frac{x}{\frac{4}{t}} = \frac{xt}{4}$$

Przyrównując obie wielkości, otrzymujemy równanie:

$$\frac{(x - 30)t}{3} = \frac{xt}{4}$$

Z warunków zadania wynika, że $t \neq 0$, zatem możemy przekształcić to równanie do postaci

$$4(x - 30) = 3x$$

Rozwiązaniem tego równania jest $x = 120$.

Pies przebiegnie dystans 120 metrów.

Zadanie 22. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych.	Uczeń: IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych; IV.2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Zasady oceniania

2 pkt – rozwiązanie układu równań i podanie prawidłowego wyniku: $a = 255$, $b = 272$

1 pkt – zapisanie układu równań $\begin{cases} a + b = 527 \\ 0,08 a = 0,075 b \end{cases}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zgodnie z warunkami zadania możemy zapisać dwa równania:

$$\begin{cases} a + b = 527 \\ 0,08 a = 0,075 b \end{cases}$$

Wyznamy z pierwszego równania $b = 527 - a$ i podstawmy do równania drugiego:

$$0,08 a = 0,075(527 - a)$$

Rozwiązaniem tego równania jest $a = 255$.

Zatem $b = 527 - 255 = 272$

Zadanie 23. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych	Uczeń: IV.3) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, postaci $\begin{cases} ax + by = e \\ x^2 + y^2 + cx + dy = f \end{cases}$ lub $\begin{cases} ax + by = e \\ y = cx^2 + dx + f \end{cases}$

Zasady oceniania

4 pkt – obliczenie obu niewiadomych x i y i zapisanie obu rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}$$

3 pkt – rozwiązanie równania kwadratowego: $x = -2$ lub $x = 2$

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą x lub y , np.:

$$x^2 + (2x - 1)^2 - 4x + 4(2x - 1) - 17 = 0$$

$$\text{lub } \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 4\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right) + 4y - 17 = 0$$

1 pkt – wyznaczenie podstawienia za jedną z niewiadomych x lub y , np: $y = 2x - 1$ lub

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Z równania liniowego wyznaczamy podstawienie za jedną z niewiadomych, np. y .

$$y = 2x - 1$$

Podstawiamy $y = 2x - 1$ do drugiego równania stopnia drugiego i otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą x .

$$x^2 + (2x - 1)^2 - 4x + 4(2x - 1) - 17 = 0$$

$$5x^2 - 20 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

Rozwiązaniami równania kwadratowego są: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

Obliczamy drugą niewiadomą i zapisujemy rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -4 - 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 - 1 \end{cases}$$

Rozwiązaniami układu równań są dwie pary liczb $\begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

V. Funkcje

Zadanie 24. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje).

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne dokończenia dwóch zdań.

1 pkt – poprawne dokończenie jednego zdania.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

1.B

2.H

Komentarz

Zapisujemy wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej: $y = f(x) = (x - p)^2 + q$,
gdzie

$$p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Obliczamy wyróżnik funkcji kwadratowej $y = f(x) = x^2 + 5x + 6$:

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

a następnie obliczamy wartości p oraz q :

$$p = -\frac{5}{2}, \quad q = -\frac{1}{4}$$

Zatem postać kanoniczna tej funkcji jest równa: $y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

Zapisujemy wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej: $y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y = f(x) = x^2 + 5x + 6$: $\Delta = 25 - 24 = 1$

$$x_1 = \frac{-5 - 1}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{-5 + 1}{2} = -2$$

Zatem postać iloczynowa tej funkcji jest równa: $y = (x + 3)(x + 2)$.

Zadanie 25.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 25.2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 25.3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

$x \in (1, 6)$ lub $(1, 6)$

Zadanie 26.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Uczeń: V.2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

Zasady oceniania

1 pkt – poprawne wskazanie dwóch odpowiedzi.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PF

Komentarz

Różnica wysokości między Rysami i Zakopanem to $2499 \text{ m} - 1000 \text{ m} = 1499 \text{ m}$.

Przy takiej różnicy temperatura spadnie o $14,99 \cdot 0,6 \text{ }^\circ\text{C} = 8,994 \text{ }^\circ\text{C}$.

Różnica wysokości między Zakopanem i Białką Tatrzańską to $1000 \text{ m} - 650 \text{ m} = 350 \text{ m}$

Przy takiej różnicy temperatura wzrośnie o $3,5 \cdot 0,6 \text{ }^\circ\text{C} = 2,1 \text{ }^\circ\text{C}$.

Zadanie 26.2. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: V.11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – rozwiązanie układu równań i obliczenie współczynników: $a = -0,006$, $b = 19$

1 pkt – obliczenie temperatury dla wysokości różnej od 1000 metrów, np. 1500 metrów

$$\text{i zapisanie układu równań: } \begin{cases} 13 = 1000 a + b \\ 10 = 1500 a + b \end{cases}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Do rozwiązania układu równań z dwiema niewiadomymi potrzebujemy dwóch równań. Pierwsze równanie uzyskamy, podstawiając dane dla Zakopanego: $13 = 1000 a + b$. W celu otrzymania drugiego równania obliczamy temperaturę dla wysokości różnej od 1000 m, np. dla 1500 m otrzymujemy $10 = 1500 a + b$.

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} 13 = 1000 a + b \\ 10 = 1500 a + b \end{cases}$$

Jego rozwiązaniem jest para: $\begin{cases} a = -0,006 \\ b = 19 \end{cases}$

Zadanie 27. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje); III.4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Zasady oceniania

1 pkt – poprawne wskazanie dwóch odpowiedzi.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

FP

Zadanie 28. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje); V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

2 pkt – obliczenie współczynnika a i zapisanie funkcji w postaci iloczynowej:

$$f(x) = \frac{2}{3}(x - 2)(x - 6)$$

1 pkt – obliczenie drugiego miejsca zerowego: $x_2 = 6$

ALBO

$$\text{zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć } a \text{ i } q: \begin{cases} 0 = a(2 - 4)^2 + q \\ 8 = a(0 - 4)^2 + q \end{cases}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Punkt przecięcia osi symetrii funkcji kwadratowej z osią Ox jest środkiem odcinka łączącego jej miejsca zerowe, zatem

$$4 = \frac{2 + x_2}{2}$$

Stąd $x_2 = 6$.

Obliczamy współczynnik a funkcji, zapisując postać iloczynową funkcji z podstawionymi wartościami x_1, x_2 oraz współrzędnymi punktu $(0, 8)$:

$$8 = a(0 - 2)(0 - 6)$$

$$\text{Stąd } a = \frac{2}{3}$$

Postać iloczynowa szukanej funkcji to $f(x) = \frac{2}{3}(x - 2)(x - 6)$.

Sposób II

Ponieważ osią symetrii szukanej funkcji kwadratowej jest prosta $x = 4$, możemy stwierdzić, że pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej jej wykresem to $p = 4$. Postać kanoniczna tej funkcji to

$$y = a(x - 4)^2 + q$$

Do wykresu funkcji należą dwa punkty: $(0, 8)$ oraz $(2, 0)$. Podstawiając ich współrzędne do powyższego wzoru, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 0 = a(2 - 4)^2 + q \\ 8 = a(0 - 4)^2 + q \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu są liczby $a = \frac{2}{3}$ oraz $q = -\frac{8}{3}$

Możemy zapisać postać kanoniczną szukanej funkcji: $y = \frac{2}{3}(x - 4)^2 - \frac{8}{3}$

$$y = \frac{2}{3}(x - 4)^2 - \frac{8}{3} = \frac{2}{3}[(x - 4)^2 - 4] = \frac{2}{3}(x - 4 + 2)(x - 4 - 2) = \frac{2}{3}(x - 2)(x - 6)$$

Zadanie 29. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Uczeń: V.13) postępuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych.

Zasady oceniania

1 pkt – poprawne wskazanie dwóch odpowiedzi.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PP

Komentarz

Cała praca zajmie $3 \cdot 8 = 24$ roboczogodziny. Rozdzielając ją na dwa ciągniki, uzyskujemy wynik 12 roboczogodzin dla każdego z nich.

Przy zwiększeniu prędkości o połowę (1,5 prędkości początkowej) czas potrzebny na zaoranie pola będzie równy $24 : 1,5 = 16$ roboczogodzin. Rozdzielając je między cztery ciągniki, otrzymujemy 4 godziny pracy dla każdego z nich.

VI. Ciągi

Zadanie 30. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Uczeń: VI.4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B3

Komentarz

Nie istnieje ciąg arytmetyczny, którego wyrazami są liczby $a = 2\sqrt{2}$, $b = 4$, $c = 4\sqrt{2}$.

Gdyby taki ciąg istniał, miałby on stałą różnicę $r \in R$ oraz istniałyby liczby całkowite k i l , dla których

$$c - b = k \cdot r \quad \text{oraz} \quad b - a = l \cdot r$$

Iloraz $\frac{k}{l}$ musiałby być wówczas liczbą wymierną.

$$\frac{k}{l} = \frac{\frac{c-b}{r}}{\frac{b-a}{r}} = \frac{c-b}{r} \cdot \frac{r}{b-a} = \frac{c-b}{b-a}$$

Podstawiając wartości liczbowe, mamy

$$\frac{c-b}{b-a} = \frac{4\sqrt{2}-4}{4-\sqrt{2}} = \frac{(4\sqrt{2}-4) \cdot (4+\sqrt{2})}{(4-\sqrt{2}) \cdot (4+\sqrt{2})} = \sqrt{2} - \frac{2}{3}$$

Widać więc, że iloraz $\frac{k}{l}$ nie należy do zbioru liczb wymiernych, zatem nie występuje taki ciąg arytmetyczny, dla którego zadane liczby mogłyby być jego wyrazami.

Zadanie 31. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych.	Uczeń: VI.5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą a_1 i jego rozwiązanie oraz podanie prawidłowego wyniku: $a_1 = 2$

1 pkt – zapisanie równania zawierającego tylko dwie zmienne: a_1, r , np.

$$5a_1 + 35r = 3 \cdot (5a_1 + 10r)$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisując warunki zadania, mamy:

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 3 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

Korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego, otrzymamy zależność:

$$5a_1 + 35r = 3 \cdot (5a_1 + 10r)$$

Po podstawieniu wartości $r = 4$, mamy równanie

$$5a_1 + 140 = 3 \cdot (5a_1 + 40)$$

$$5a_1 + 140 = 15a_1 + 120$$

Dzieląc obie strony równania przez 5, otrzymujemy równanie

$$a_1 + 28 = 3a_1 + 24$$

Przekształcając je, otrzymujemy kolejno

$$a_1 - 3a_1 = 24 - 28$$

$$-2a_1 = -4$$

$$a_1 = 2$$

Pierwszym wyrazem danego ciągu jest liczba 2.

Zadanie 32. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych.	Uczeń: VI.6) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania

3 pkt – rozwiązanie równania i obliczenie liczby wyrazów ciągu: $n = 6$

2 pkt – zapisanie równania

$$\frac{364}{243} = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$$

1 pkt – obliczenie wartości pierwszego wyrazu ciągu: $a_1 = 1$

ALBO

zapisanie równania

$$\frac{364}{243} = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech n oznacza liczbę wszystkich wyrazów skończonego ciągu geometrycznego.

Korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego, mamy

$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$\frac{1}{9} = a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Obliczamy stąd $a_1 = 1$.

Następnie stosujemy wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, otrzymując równanie

$$\frac{364}{243} = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$$

Rozwiązując to równanie, mamy kolejno

$$\frac{364}{243} = \frac{3^n - 1}{3^n} \cdot \frac{3}{2}$$

$$728 \cdot 3^n = 729 \cdot (3^n - 1)$$

$$3^n = 729$$

$$n = 6$$

Ten ciąg geometryczny składa się z 6 wyrazów.

Zadanie 33. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych.	Uczeń: VI.7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

4 pkt – zapisanie dwóch rozwiązań: $x = 38, y = 38, z = 38$ oraz $x = 2, y = 14, z = 98$

3 pkt – obliczenie dwóch ilorazów ciągu geometrycznego: $q = 1$ lub $q = 7$

ALBO

obliczenie dwóch różnic ciągu arytmetycznego: $r = 0$ lub $r = 4$

2 pkt – zapisanie sumy ciągu geometrycznego $a_1 + (a_1 + 3r) + (a_1 + 24r) = 114$ oraz warunku ciągu geometrycznego $(a_1 + 3r)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 24r)$

ALBO

zapisanie równania pozwalającego obliczyć iloraz ciągu geometrycznego:

$$q^2 - 8q + 7 = 0$$

1 pkt – zapisanie sumy ciągu geometrycznego $a_1 + (a_1 + 3r) + (a_1 + 24r) = 114$ albo warunku ciągu geometrycznego $(a_1 + 3r)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 24r)$

ALBO

zapisanie warunków na różnice między wyrazami ciągu arytmetycznego:

$$bq - b = 3r \text{ oraz } bq^2 - bq = 21r$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Niech r będzie różnicą ciągu arytmetycznego (a_n) . Z warunków zadania wynika, że liczby a_1, a_4, a_{25} tworzą ciąg geometryczny. Zapisując informację o sumie ciągu geometrycznego, otrzymujemy równanie

$$a_1 + a_4 + a_{25} = 114$$

Stosujemy wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i podstawiamy do otrzymanego równania:

$$a_1 + (a_1 + 3r) + (a_1 + 24r) = 114$$

Drugie równanie otrzymujemy korzystając z własności ciągu geometrycznego:

$$a_4^2 = a_1 \cdot a_{25}$$

Stosujemy ponownie wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$(a_1 + 3r)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 24r)$$

Następnie należy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 3a_1 + 27r = 114 \\ a_1^2 + 6a_1r + 9r^2 = a_1^2 + 24a_1r \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3a_1 = 114 - 27r \\ 18a_1r - 9r^2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 = 38 - 9r \\ 18(38 - 9r)r - 9r^2 = 0 \end{cases}$$

Przekształcając drugie równanie, mamy

$$684r - 171r^2 = 0$$

$$4r - r^2 = 0$$

Rozwiązaniami są $r = 0$ oraz $r = 4$.

Jeśli $r = 0$, mamy do czynienia z ciągiem stałym, w którym każdy wyraz ciągu jest równy 38. Szukanymi liczbami są wtedy $x = 38$, $y = 38$, $z = 38$.

Dla $r = 4$ mamy $x = a_1 = 2$, $y = a_4 = 2 + 3 \cdot 4 = 14$, $z = a_{25} = 2 + 24 \cdot 4 = 98$.

Sposób II

Oznaczmy wyrazy ciągu geometrycznego przez $x = b$, $y = bq$ oraz $z = bq^2$, gdzie q jest ilorazem tego ciągu.

Z warunków zadania wynika, że są one pierwszym, czwartym i dwudziestym piątym wyrazem ciągu arytmetycznego (a_n) , zatem $x = a_1$, $y = a_4$, $z = a_{25}$. Jeśli za r przyjmiemy różnicę tego ciągu, możemy zapisać różnice pomiędzy tymi wyrazami jako:

$$y - x = bq - b = 3r \quad \text{oraz} \quad z - y = bq^2 - bq = 21r$$

Zauważmy, że

$$bq^2 - bq = 21r = 7 \cdot 3r = 7 \cdot (bq - b)$$

Otrzymujemy zatem równanie

$$bq^2 - bq = 7bq - 7b$$

Z warunków zadania wiemy, że $b \neq 0$, więc możemy to równanie doprowadzić do postaci

$$q^2 - 8q + 7 = 0$$

Pierwiastkami tego równania są liczby 1 oraz 7.

Zapisując warunek na sumę ciągu geometrycznego, mamy

$$b + bq + bq^2 = 114$$

Dla $q = 1$ mamy

$$3b = 114$$

Zatem $b = 38$, czyli $x = 38$, $y = 38$, $z = 38$. Szukany ciąg to $(38, 38, 38)$.

Dla $q = 7$ mamy

$$b + 7b + 49b = 114$$

$$57b = 114$$

Rozwiązaniem tego równania jest $b = 2$. W tym przypadku $x = 2$, $y = 14$, $z = 98$.

Szukany ciąg ma postać $(2, 14, 98)$.

Zadanie 34. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych.	Uczeń: VI.7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

4 pkt – zapisanie dwóch ciągów: $(50, 8, -34)$ oraz $(2, 8, 14)$

3 pkt – rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} r = -42 \\ a_1 = 50 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} r = 6 \\ a_1 = 2 \end{cases}$

ALBO

zapisanie jednego z dwóch ciągów: $(50, 8, -34)$ albo $(2, 8, 14)$

2 pkt – obliczenie środkowego wyrazu ciągu arytmetycznego: $b = 8$

ALBO

zapisanie warunków na sumę ciągu arytmetycznego i warunku ciągu geometrycznego: $a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) = 24$ oraz $(a_1 + r + 10)^2 = (a_1 + 4) \cdot (a_1 + 2r + 40)$

1 pkt – zapisanie warunku na sumę ciągu arytmetycznego:

$$(b - r) + b + (b + r) = 24 \text{ lub } a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) = 24$$

ALBO

zapisanie warunku ciągu geometrycznego:

$$(a_1 + r + 10)^2 = (a_1 + 4) \cdot (a_1 + 2r + 40)$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Trzy liczby, tworzące ciąg arytmetyczny o różnicy r , oznaczmy przez $b - r$, b , $b + r$.

Zapisując warunek na sumę tego ciągu, możemy zauważyć, że

$$(b - r) + b + (b + r) = 24$$

$$3b = 24$$

$$b = 8$$

Zatem ciąg arytmetyczny ma postać: $(8 - r, 8, 8 + r)$.

Po dodaniu kolejno do jego wyrazów liczb 4, 10, 40, otrzymujemy ciąg geometryczny:

$$(12 - r, 18, 48 + r)$$

Korzystając z własności ciągu geometrycznego, zapisujemy równanie:

$$18^2 = (12 - r) \cdot (48 + r)$$

Po uproszczeniu otrzymujemy równanie kwadratowe

$$r^2 + 36r - 252 = 0$$

Posiada ono dwa rozwiązania: (-42) oraz 6 .

Gdy $r = -42$, wówczas szukany ciąg arytmetyczny jest $(50, 8, -34)$.

W przypadku, gdy $r = 6$, mamy ciąg arytmetyczny $(2, 8, 14)$.

Sposób II

Niech (a_n) będzie ciągiem arytmetycznym o różnicy r . Wtedy sumę tego ciągu możemy zapisać jako

$$a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) = 24$$

Mamy stąd zależność

$$a_1 = 8 - r$$

Z warunków zadania mamy, że liczby $a_1 + 4$, $a_1 + r + 10$, $a_1 + 2r + 40$ tworzą ciąg geometryczny. Korzystając z jego własności, otrzymujemy kolejną zależność:

$$(a_1 + r + 10)^2 = (a_1 + 4) \cdot (a_1 + 2r + 40)$$

Po podstawieniu $a_1 = 8 - r$ otrzymujemy

$$18^2 = (12 - r) \cdot (48 + r)$$

Po uproszczeniu otrzymujemy równanie kwadratowe

$$r^2 + 36r - 252 = 0$$

Posiada ono dwa rozwiązania: (-42) oraz 6 .

Gdy $r = -42$, wówczas $a_1 = 50$, zaś kolejne liczby tego ciągu to 8 i (-34) .

W przypadku, gdy $r = 6$, mamy $a_1 = 2$, a kolejne wyrazy ciągu to 8 i 14 .

Szukanymi ciągami arytmetycznymi są: $(50, 8, -34)$ oraz $(2, 8, 14)$.

Zadanie 35.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: VI.5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania1 pkt – poprawne obliczenie wyrazu $a_{25} = 900$ zł

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że comiesięczne wpłaty są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 300$ i $r = 25$. Stosujemy wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego i obliczamy wyraz a_{25} :

$$a_{25} = 300 + 24 \cdot 25 = 900 \text{ zł}$$

Zadanie 35.2. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: VI.5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania2 pkt – obliczenie różnicy ciągu: $r = 32$ zł

1 pkt – zapisanie równania:

$$\frac{2 \cdot 300 + 60r}{2} \cdot 61 = 76\,860$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że comiesięczne wpłaty są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 300$. Stosujemy wzór na sumę kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy równanie prowadzące do obliczenia różnicy r ciągu

$$\frac{2 \cdot 300 + 60r}{2} \cdot 61 = 76\,860$$

Rozwiązaniem równania jest $r = 32$.

Pani Joanna powinna okładać każdego miesiąca kwotę o 32 złote większą niż w miesiącu poprzednim.

VII. Trygonometria

Zadanie 36. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: VII.2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora; VII.6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

Zasady oceniania

3 pkt – rozwiązanie równania z niewiadomą x : $x = 174,06$ (po zaokrągleniu do pełnych metrów: $x = 174$ m)

2 pkt – zauważenie, że kąt WSK jest równy kątowi depresji jako kąty naprzemianległe i zapisanie miary kąta WSK : $|\sphericalangle WSK| = 38^\circ$

ORAZ

$$\text{zapisanie równania } \frac{136}{x} = \text{tg } 38^\circ$$

ORAZ

$$\text{odczytanie z tablic i zapisanie: } \text{tg } 38^\circ = 0,7813$$

1 pkt – zauważenie, że kąt WSK jest równy kątowi depresji jako kąty naprzemianległe i zapisanie miary kąta WSK : $|\sphericalangle WSK| = 38^\circ$

ALBO

$$\text{odczytanie z tablic i zapisanie: } \text{tg } 38^\circ = 0,7813$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że kąt WSK jest równy kątowi depresji jako kąty naprzemianległe.

$$|\sphericalangle WSK| = 38^\circ$$

Zatem

$$\frac{136}{x} = \text{tg } 38^\circ$$

Z tablic wartości funkcji trygonometrycznych odczytujemy wartość tangensa kąta 38° i zapisujemy równanie

$$\text{tg } 38^\circ = 0,7813$$

$$\frac{136}{x} = 0,7813$$

Rozwiązaniem równania jest: $x = 174,06$

Po zaokrągleniu do pełnych metrów: $x = 174$ m

Samolot znajduje się w odległości 174 metrów od wieży.

Zadanie 37.1. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1) Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. 2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: VII.4) korzysta ze wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ [...]; VII. 5) stosuje [...] wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$; VIII.2) [...] stosuje [...] twierdzenie cosinusów; VIII.7) stosuje twierdzenia: [...] o dwusiecznej kąta.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia długości boków AD , AE oraz podanie

$$\text{wyników: } |AE| = 8\sqrt{10}, |AD| = 6\sqrt{10}$$

1 pkt – wyznaczenie i zapisanie zależności pomiędzy długościami dwóch boków trójkąta

$$ADE : |AD| \cdot |AE| = 480$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech $\alpha = |\sphericalangle BAC|$. Ponieważ $P_{\triangle ADE} = 2 \cdot P_{\triangle ABC}$ oraz $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha$

i $P_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} |AD| \cdot |AE| \cdot \sin \alpha$, zatem mamy

$$\frac{1}{2} |AD| \cdot |AE| \cdot \sin \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha$$

Stąd

$$|AD| \cdot |AE| = 2 \cdot |AB| \cdot |AC|$$

Po wstawieniu długości boków $|AB| = 24$, $|AC| = 10$ mamy

$$|AD| \cdot |AE| = 2 \cdot 24 \cdot 10$$

$$|AD| \cdot |AE| = 480$$

Stosując twierdzenie o dwusiecznej dla trójkąta ADE , otrzymujemy:

$$\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|DP|}{|PE|} = \frac{3}{4}$$

$$|AD| = \frac{3}{4} |AE|$$

Uwzględniając obie te zależności, otrzymujemy:

$$\frac{3}{4} |AE| \cdot |AE| = 480$$

$$|AE|^2 = 640$$

Zatem

$$|AE| = 8\sqrt{10}$$

oraz

$$|AD| = \frac{3}{4}|AE| = \frac{3}{4} \cdot 8\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$$

Zadanie 37.2. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1) Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. 2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: VII.4) korzysta ze wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ [...] VII.5) stosuje [...] wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia długości boku BC i podanie prawidłowego wyniku: $|BC| = 2\sqrt{73}$

2 pkt – obliczenie wartości cosinusa kąta przy wierzchołku A : $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ i zastosowanie jej w twierdzeniu cosinusów do obliczenia długości boku BC

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \alpha$$

ALBO

obliczenie długości odcinka FB i zapisanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AFC .

1 pkt – obliczenie wartości sinusa kąta przy wierzchołku A : $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

ALBO

obliczenie wysokości trójkąta ABC : $h = 6$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Niech $\alpha = |\sphericalangle BAC|$. Wiemy, że $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha = 72$

Stąd

$$\sin \alpha = \frac{72 \cdot 2}{|AB| \cdot |AC|} = \frac{144}{10 \cdot 24} = \frac{3}{5}$$

Ponieważ cosinus kąta ostrego jest dodatni, korzystając z jedynej trygonometrycznej, obliczamy

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

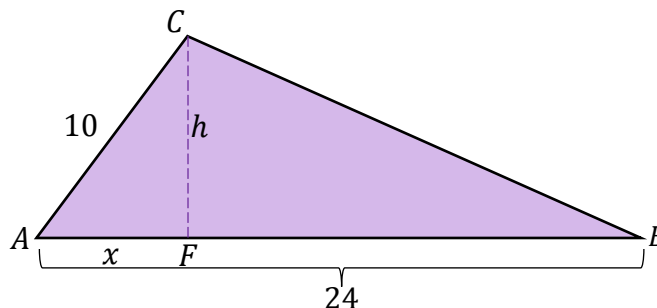
Z twierdzenia cosinusów mamy

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \alpha = 10^2 + 24^2 - 2 \cdot 10 \cdot 24 \cdot \frac{4}{5} = 292$$

Zatem długość odcinka BC jest równa $2\sqrt{73}$.

Sposób II

Niech h będzie wysokością trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C , punkt F – jej spodkiem, a x – długością odcinka AF (zobacz rysunek).



Ze wzoru na pole trójkąta ABC otrzymujemy równanie:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CF| = 72$$

$$\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot h = 72$$

Stąd $h = 6$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AFC , mamy:

$$|AF|^2 + |FC|^2 = |AC|^2$$

$$x^2 + 6^2 = 10^2$$

$$x^2 = 64$$

Zatem długość odcinka AF jest równa 8.

Obliczamy długość odcinka FB :

$$|FB| = 24 - 8 = 16$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BFC , mamy:

$$|BF|^2 + |FC|^2 = |BC|^2$$

$$16^2 + 6^2 = |BC|^2$$

$$|BC|^2 = 292$$

Zatem długość odcinka BC jest równa $2\sqrt{73}$.

VIII. Planimetria

Zadanie 38. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1) Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. 3) Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Uczeń: VIII.10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności.

Zasady oceniania

2 pkt – zaznaczenie dwóch poprawnych odpowiedzi.

1 pkt – zaznaczenie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna: B albo D.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

BD

Komentarz

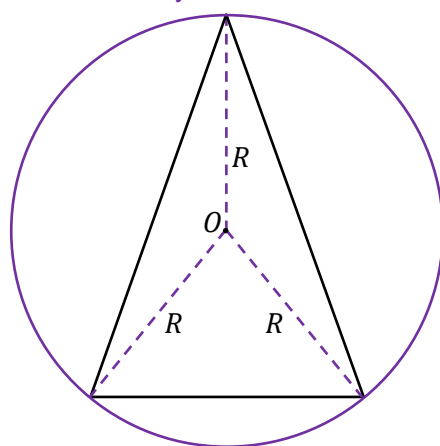
Okrąg opisany na trójkącie to okrąg, na którym leżą wszystkie wierzchołki tego trójkąta. Zatem odległość środka O okręgu od każdego z wierzchołków trójkąta jest równa promieniowi R tego okręgu. Tym samym punkt O jest równo oddalony od wszystkich wierzchołków trójkąta (zobacz rysunek 1. poniżej).

Ortocentrum, czyli punkt przecięcia wszystkich wysokości trójkąta, jest równo oddalony od wszystkich wierzchołków tego trójkąta tylko wtedy, gdy trójkąt jest równoboczny.

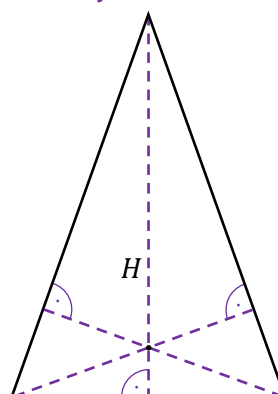
Podobnie, ortocentrum jest równo oddalone od wszystkich boków tego trójkąta tylko wtedy, gdy trójkąt jest równoboczny.

Ponieważ trójkąt równoramienny ma jedną oś symetrii, jego ortocentrum jest równo odległe tylko od ramion trójkąta (zobacz rysunek 2. poniżej).

Rysunek 1.



Rysunek 2.



Zadanie 39. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: VIII.3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności; VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych; VIII.7) stosuje twierdzenia: [...] o kącie między styczną a cięciwą.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna, albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Komentarz

Bok ośmiokąta foremnego jest jedną z cięciw okręgu opisanego na tym ośmiokącie. Kąt α jest kątem między styczną do okręgu w punkcie A , a cięciwą AB wychodzącą z punktu styczności. Z twierdzenia o mierze kąta między styczną a cięciwą wynika, że miara kąta α jest równa mierze kąta wpisanego opartego na boku AB rozważanego ośmiokąta foremnego. Ponieważ ten kąt wpisany ma miarę równą połowie miary kąta środkowego opartego na boku AB ośmiokąta foremnego, więc miara kąta α jest równa $\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{8} = 22,5^\circ$.

Zadanie 40. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1) Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 3) Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Uczeń: VIII.2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach [...]. VIII.3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności. VII.6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

Zasady oceniania

1 pkt – poprawne wskazanie dwóch odpowiedzi.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PP

Komentarz

Ponieważ $BC \parallel DG$, to kąty odpowiadające AGD i ACB mają równe miary. Zatem $|\sphericalangle AGD| = |\sphericalangle ACB| = 45^\circ$.

Ponieważ kwadrat $DEFG$ ma pole równe 1, więc każdy z jego boków ma długość 1.

Ponieważ trójkąt GFC jest prostokątny, równoramienny, o przyprostokątnych długości 1, to $|GC| = \sqrt{2}$.

Niech $|EB| = x$. Wówczas $|BC| = 2 + x$. Ponieważ $|AC| = |BC|$, to $|AG| = |AC| - |GC| = 2 + x - \sqrt{2}$. Stąd $|AG| - |EB| = 2 - \sqrt{2}$.

Zadanie 41. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: VIII.1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa; VIII.2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne [...]; VIII.7) stosuje twierdzenia: Talesa [...].

Zasady oceniania

Dla rozwiązania sposobem I:

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia długości odcinka TU oraz podanie

poprawnego wyniku: $|TU| = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

1 pkt – zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do trójkąta STR , np. $1^2 + |TR|^2 = 4^2$
 ALBO

zastosowanie twierdzenia Talesa do odcinków TU, TR, SQ, SR , np. $\frac{|TU|}{|TR|} = \frac{1}{4}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Dla rozwiązania sposobem II:

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia długości odcinka TU oraz podanie

poprawnego wyniku: $|TU| = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

1 pkt – zastosowanie twierdzenia o stycznej i siecznej, np. $5 \cdot 3 = |TR|^2$
 ALBO

zapisanie równania wynikającego z proporcjonalności długości boków TR, SR, UR, QR trójkątów podobnych TSR i UQR , np. $\frac{|TR|}{|SR|} = \frac{|UR|}{|QR|}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Z warunku $\frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{2}{3}$ wynika, że $|QR| = 3$, więc $|SR| = |SQ| + |QR| = 1 + 3 = 4$.

Stosując teraz twierdzenie Pitagorasa do trójkąta STR , otrzymujemy kolejno

$$|ST|^2 + |TR|^2 = |SR|^2$$

$$1^2 + |TR|^2 = 4^2$$

$$|TR|^2 = 15$$

$$|TR| = \sqrt{15}$$

Ponieważ $ST \parallel QU$, więc stosujemy twierdzenie Talesa i obliczamy $|TU|$:

$$\frac{|TU|}{|TR|} = \frac{|SQ|}{|SR|}$$

$$\frac{|TU|}{\sqrt{15}} = \frac{1}{4}$$

$$|TU| = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Sposób II

Ponieważ $\frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{2}{3}$ i promień okręgu jest równy 1, więc: $|PQ| = 2$, $|QR| = 3$, $|PR| = 5$, $|SR| = 4$. Stosujemy twierdzenie o stycznej i siecznej i obliczamy $|TR|$:

$$|PR| \cdot |QR| = |TR|^2$$

$$5 \cdot 3 = |TR|^2$$

$$|TR| = \sqrt{15}$$

Trójkąt TSR jest podobny do trójkąta UQR , ponieważ odcinki TS i UQ są równoległe, a kąt przy wierzchołku R jest wspólny. Z podobieństwa tych trójkątów wynika proporcjonalność długości odpowiednich boków tych trójkątów:

$$\frac{|TR|}{|SR|} = \frac{|UR|}{|QR|}$$

$$\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{|UR|}{3}$$

$$|UR| = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

Zatem

$$|TU| = |TR| - |UR| = \sqrt{15} - \frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Zadanie 42. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: VIII.1) wyznacza promień i średnice okręgów, długości cięwiw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa; VIII.2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne [...]; VIII.6) stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu.

Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie stosunku pola kwadratu do pola wycinka kołowego: $\frac{8}{5\pi}$

2 pkt – wyznaczenie zależności między promieniem okręgu r i długością boku kwadratu $ABCD$, np. $r = x\sqrt{5}$

1 pkt – wyznaczenie długości odcinka AS lub długości odcinka BS w zależności od długości x boku kwadratu $ABCD$: $|AS| = x$ (lub $|BS| = 2x$)

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech r oznacza promień koła i oznaczmy przez x długość boku kwadratu.

Ponieważ trójkąt SAD jest prostokątny i równoramienny, więc $|AS| = |AD| = x$. Stąd

$$|BS| = |AB| + |AS| = 2x$$

Prowadzimy promień SC i otrzymujemy trójkąt prostokątny SBC , do którego stosujemy twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy:

$$|BC|^2 + |BS|^2 = |CS|^2$$

$$x^2 + (2x)^2 = r^2$$

$$5x^2 = r^2$$

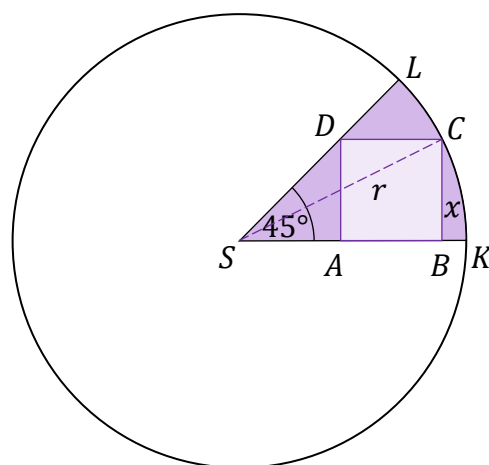
$$r = x\sqrt{5}$$

Wyznaczamy pole P_{KSL} wycinka kołowego KSL w zależności od x :

$$P_{KSL} = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{8} \pi r^2 = \frac{1}{8} \pi (x\sqrt{5})^2 = \frac{5}{8} \pi x^2$$

Obliczamy stosunek pola kwadratu do pola wycinka kołowego KSL :

$$\frac{x^2}{\frac{5}{8} \pi x^2} = \frac{8}{5\pi}$$



Zadanie 43. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Uczeń: VII.6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych [...]. VIII.4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombów i trapezów. VIII.9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia pola trapezu $DCFG$ i zapisanie

$$\text{poprawnego wyniku: } P = \frac{27}{4} \sqrt{3}$$

3 pkt – obliczenie długości podstawy FG trapezu $DCFG$: $|FG| = 3$ oraz jego wysokości

$$h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ALBO

$$\text{obliczenie skali podobieństwa trapezów: } k = \frac{1}{2}$$

2 pkt – obliczenie skali podobieństwa trapezów: $k = \frac{1}{2}$

ALBO

$$\text{obliczenie pola trapezu } ABCD: 27\sqrt{3}$$

1 pkt – obliczenie długości podstaw trapezu $ABCD$: $|AB| = 12$, $|CD| = 6$ oraz jego wysokości $H = 3\sqrt{3}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

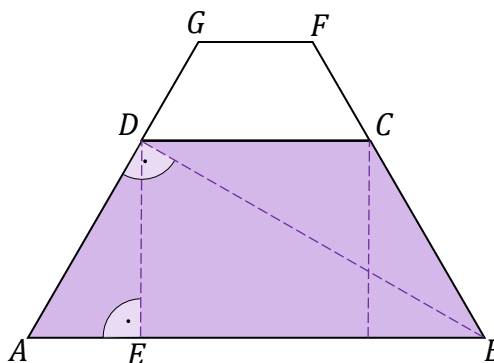
Przykładowe pełne rozwiązanie*Sposób I*

Opuszczamy z wierzchołka D wysokość DE trapezu $ABCD$. Korzystamy z własności trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° i otrzymujemy: $|AB| = 12$, $|BD| = 6\sqrt{3}$.

Korzystamy z własności trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° i otrzymujemy: $|AE| = 3$, $|DE| = 3\sqrt{3}$.

Obliczamy długość górnej podstawy trapezu $ABCD$:

$$|CD| = |AB| - 2 \cdot |AE| = 12 - 2 \cdot 3 = 6$$



Trapezy $CDFG$ i $ABCD$ są podobne, więc skala k podobieństwa jest równa stosunkowi długości dolnych podstaw tych trapezów:

$$k = \frac{|DC|}{|AB|} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Korzystając z podobieństwa obu trapezów, obliczamy długość górnej podstawy trapezu $DCFG$ oraz wysokość h tego trapezu:

$$|GF| = \frac{1}{2} \cdot |DC| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Obliczamy pole P_{DCFG} trapezu $DCFG$:

$$P = \frac{1}{2} \cdot (6 + 3) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

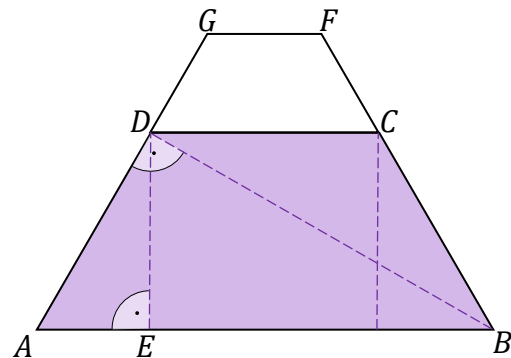
Sposób II

Opuszczamy z wierzchołka D wysokość DE trapezu $ABCD$. Korzystamy z własności trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° i otrzymujemy $|AB| = 12$.

Korzystamy z własności trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° i otrzymujemy: $|AE| = 3$, $|DE| = 3\sqrt{3}$.

Obliczamy długość górnej podstawy trapezu $ABCD$:

$$|CD| = |AB| - 2 \cdot |AE| = 12 - 2 \cdot 3 = 6$$



Trapezy $CDFG$ i $ABCD$ są podobne, więc skala k podobieństwa jest równa stosunkowi długości dolnych podstaw tych trapezów:

$$k = \frac{|DC|}{|AB|} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Obliczamy pole P_{ABCD} trapezu $ABCD$:

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} (|AB| + |DC|) \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot (12 + 6) \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$$

Korzystamy z twierdzenia o polach figur podobnych i obliczamy pole P_{DCFG} trapezu $DCFG$:

$$\frac{P_{DCFG}}{P_{ABCD}} = k^2$$

$$\frac{P_{DCFG}}{27\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$P_{DCFG} = \frac{27}{4}\sqrt{3}$$

Zadanie 44. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Uczeń: VIII.12) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania

2 pkt – spełnienie kryterium za 1 pkt zasad oceniania oraz wyznaczenie poprawnego

$$\text{stosunku pól trapezów: } \frac{P_2}{P_1} = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}$$

1 pkt – wyznaczenie pola P_1 trapezu o podstawach a i b (lub pola P_2 trapezu

$$\text{o podstawach } b \text{ i } c): P_1 = \frac{\sqrt{3}(a^2 - b^2)}{4} \text{ (lub } P_2 = \frac{\sqrt{3}(b^2 - c^2)}{4} \text{)}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Oznaczmy pole trapezu o podstawach a i b jako P_1 oraz pole trapezu o podstawach b i c jako P_2 (zobacz rysunki obok).

Pole P_1 możemy zinterpretować jako różnicę pól trójkątów równobocznych o bokach a i b :

$$P_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(a^2 - b^2)\sqrt{3}}{4}$$

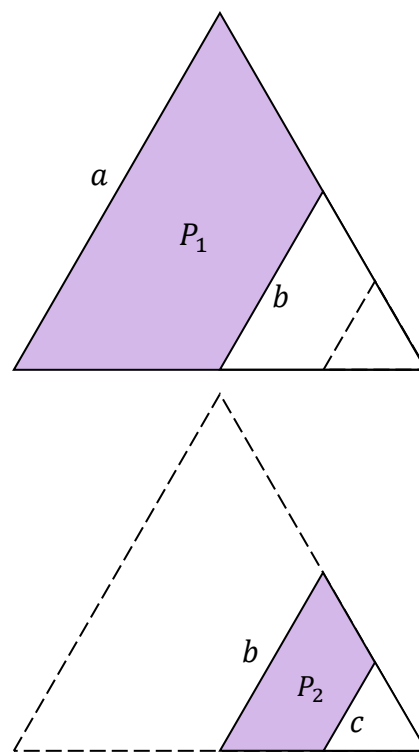
Analogicznie pole P_2 możemy zinterpretować jako różnicę pól trójkątów równobocznych o bokach b i c :

$$P_2 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} - \frac{c^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(b^2 - c^2)\sqrt{3}}{4}$$

Zatem stosunek pól będzie równy

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{(b^2 - c^2)\sqrt{3}}{4}}{\frac{(a^2 - b^2)\sqrt{3}}{4}} = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}$$

To należało pokazać.



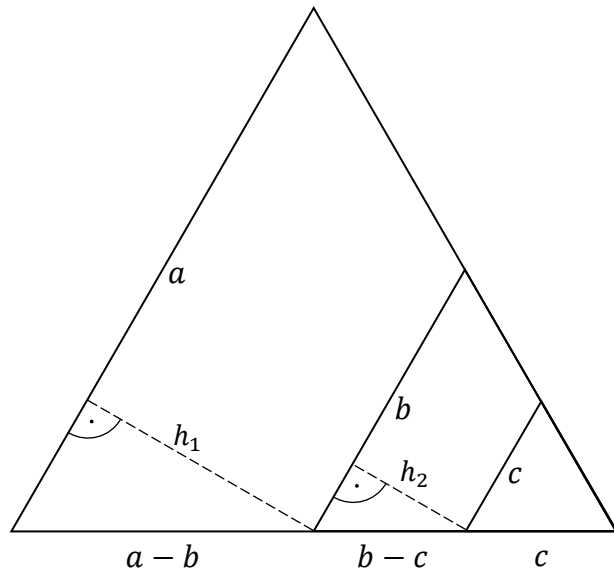
Sposób II

Dwie proste równoległe do jednego z boków trójkąta wyznaczają trójkąt równoboczny o boku długości b oraz trójkąt równoboczny o boku długości c .

Możemy zatem stwierdzić, że ramiona otrzymanych trapezów mają długości odpowiednio $(a - b)$ oraz $(b - c)$.

Prowadzimy wysokość h_1 w trapezie o podstawach a i b oraz wysokość h_2 w trapezie o podstawach b i c .

Korzystając z własności trójkąta o kątach 30° , 60° , 90° , wyznaczamy wysokości obu trapezów:



$$h_1 = \frac{(a - b)\sqrt{3}}{2}$$

$$h_2 = \frac{(b - c)\sqrt{3}}{2}$$

Niech P_1 oznacza pole trapezu o podstawach a i b , natomiast P_2 – pole trapezu o podstawach b i c . Wówczas

$$P_1 = \frac{1}{2}(a + b) \cdot \frac{(a - b)\sqrt{3}}{2} = \frac{(a^2 - b^2)\sqrt{3}}{4}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(b + c) \cdot \frac{(b - c)\sqrt{3}}{2} = \frac{(b^2 - c^2)\sqrt{3}}{4}$$

Wyznaczamy stosunek pól trapezów:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{(b^2 - c^2)\sqrt{3}}{4}}{\frac{(a^2 - b^2)\sqrt{3}}{4}} = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}$$

To należało pokazać.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej

Zadanie 45. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Uczeń: IX.1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B3

Zadanie 46.1. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Uczeń: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych. VIII.2) [...] stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

Zasady oceniania

2 pkt – obliczenie długości boków trójkąta ABC i sprawdzenie prawdziwości równości

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$$

1 pkt – obliczenie długości boków trójkąta ABC : $|AB| = \sqrt{225}$, $|BC| = \sqrt{250}$, $|AC| = \sqrt{25}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy długości boków trójkąta ABC :

$$|AB| = \sqrt{(-6 - (-15))^2 + (4 - (-8))^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225}$$

$$|BC| = \sqrt{(-19 - (-6))^2 + (-5 - 4)^2} = \sqrt{(-13)^2 + (-9)^2} = \sqrt{169 + 81} = \sqrt{250}$$

$$|AC| = \sqrt{(-19 - (-15))^2 + (-5 - (-8))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25}$$

Zauważamy, że

$$|AB|^2 + |AC|^2 = (\sqrt{225})^2 + (\sqrt{25})^2 = 225 + 25 = 250 = |BC|^2$$

Zatem, na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, trójkąt ABC jest prostokątny. To należało pokazać.

Zadanie 46.2. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: IX.2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, [...], w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach [...].

Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie współrzędnych wierzchołka D : $D = (-28, -17)$

2 pkt – wyznaczenie równania prostej AD (lub DC), np. $y = \frac{9}{13}x + \frac{31}{13}$

$$\left(y = \frac{4}{3}x + \frac{61}{3}\right)$$

ALBO

zapisanie współrzędnych środka S za pomocą współrzędnych wierzchołków B i D :

$$S = \left(\frac{x_D - 6}{2}, \frac{y_D + 4}{2}\right)$$

1 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AB (lub BC): $a_{AB} = \frac{4}{3}$ ($a_{BC} = \frac{9}{13}$)

ALBO

obliczenie współrzędnych środka S przekątnej AC : $S = \left(-17, -\frac{13}{2}\right)$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Wierzchołek D równoległoboku $ABCD$ jest punktem przecięcia prostych AD i CD .

Obliczamy współczynniki kierunkowe prostych AB i BC :

$$a_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - (-8)}{-6 - (-15)} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$a_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-5 - 4}{-19 - (-6)} = \frac{-9}{-13} = \frac{9}{13}$$

Ponieważ $AD \parallel BC$, więc proste AD i BC mają równe wartości współczynników kierunkowych, tj. $a_{AD} = a_{BC} = \frac{9}{13}$. Wyznaczamy równanie prostej AD :

$$y = \frac{9}{13}x + b$$

$$-8 = \frac{9}{13} \cdot (-15) + b$$

$$\frac{31}{13} = b$$

Zatem prosta AD ma równanie $y = \frac{9}{13}x + \frac{31}{13}$.

Ponieważ $DC \parallel AB$, więc proste DC i AB mają równe wartości współczynników kierunkowych, tj. $a_{DC} = a_{AB} = \frac{4}{3}$. Wyznaczamy równanie prostej DC :

$$y = \frac{4}{3}x + b$$

$$-5 = \frac{4}{3} \cdot (-19) + b$$

$$\frac{61}{3} = b$$

Zatem prosta DC ma równanie $y = \frac{4}{3}x + \frac{61}{3}$.

Obliczamy współrzędne punktu przecięcia prostych AD i DC :

$$\begin{cases} y = \frac{9}{13}x + \frac{31}{13} \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{61}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x + \frac{61}{3} = \frac{9}{13}x + \frac{31}{13} \quad / \cdot 39 \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{61}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 52x + 793 = 27x + 93 \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{61}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x = -700 \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{61}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -28 \\ y = \frac{4}{3} \cdot (-28) + \frac{61}{3} = -17 \end{cases}$$

Wierzchołek D ma współrzędne: $D = (-28, -17)$.

Sposób II

W równoległoboku $ABCD$ przekątne dzielą się na połowy, a punkt S przecięcia się przekątnych jest środkiem symetrii tego równoległoboku. Obliczamy współrzędne środka S przekątnej AC :

$$S = \left(\frac{-15 - 19}{2}, \frac{-8 - 5}{2} \right) = \left(\frac{-34}{2}, \frac{-13}{2} \right) = \left(-17, \frac{-13}{2} \right)$$

Ponieważ punkt S jest środkiem symetrii równoległoboku, jest więc środkiem przekątnej BD tego równoległoboku. Obliczymy stąd współrzędne punktu D :

Oznaczmy współrzędne punktu $D = (x_D, y_D)$, wtedy

$$\left(\frac{x_D - 6}{2}, \frac{y_D + 4}{2} \right) = \left(-17, \frac{-13}{2} \right)$$

Stąd mamy: $\frac{x_D - 6}{2} = -17$ oraz $\frac{y_D + 4}{2} = \frac{-13}{2}$.

Obliczamy x_D oraz y_D :

$$x_D - 6 = -34, \text{ czyli } x_D = -28$$

$$y_D + 4 = -13, \text{ czyli } y_D = -17$$

Zatem punkt D ma współrzędne: $D = (-28, -17)$.

Zadanie 46.3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: VIII.10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie [...] oraz korzysta z ich własności.

Zasady oceniania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Punkt S przecięcia środkowych trójkąta ABC ma współrzędne: $S = \left(-\frac{40}{3}, -3 \right)$.

Punkt przecięcia środkowych trójkąta to środek ciężkości trójkąta. Korzystamy z *Wybranych wzorów matematycznych* i obliczamy współrzędne środka ciężkości S trójkąta ABC :

$$S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right) = \left(\frac{-15 - 6 - 19}{3}, \frac{-8 + 4 - 5}{3} \right) = \left(-\frac{40}{3}, -3 \right)$$

Zadanie 47. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: IX.4) posługuje się równaniem okręgu [...].

Zasady oceniania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Okrąg O i prosta k mają dwa punkty wspólne tylko wtedy, gdy $m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Z równania okręgu odczytujemy współrzędne środka S okręgu i promień r okręgu:

$$S = (0, 0), r = \sqrt{2}.$$

Prosta o równaniu $y = m$ jest równoległa do osi Ox układu współrzędnych i przecina oś Oy w punkcie $(0, m)$. Prosta k ma dwa punkty wspólne z okręgiem tylko wówczas, gdy $m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Zadanie 48. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych; IX.5) oblicza odległość punktu od prostej.

Zasady oceniania

4 pkt – obliczenie pola P trójkąta: $P = 10$

3 pkt – obliczenie długości odcinka AB : $|AB| = 2\sqrt{10}$ oraz obliczenie odległości

wierzchołka C od prostej AB : $d = \sqrt{10}$

ALBO

zapisanie pola trójkąta z wykorzystaniem wzoru z *Wybranych wzorów*

$$\text{matematycznych: } P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(2 - 0)(7 - 6) - (0 - 6)(3 - 0)|$$

2 pkt – obliczenie długości odcinka AB : $|AB| = 2\sqrt{10}$

ALBO

obliczenie odległości d wierzchołka C od prostej AB i obliczenie współrzędnych wierzchołków A i B : $d = \sqrt{10}$, $A = (0, 6)$, $B = (2, 0)$

ALBO

obliczenie współrzędnych wierzchołków A i B : $A = (0, 6)$, $B = (2, 0)$ oraz zapisanie wzoru na pole trójkąta z *Wybranych wzorów matematycznych*:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)((x_C - x_A))|$$

1 pkt – obliczenie współrzędnych punktów A i B : $A = (0, 6)$, $B = (2, 0)$

ALBO

obliczenie odległości d punktu C od prostej AB : $d = \sqrt{10}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Wierzchołek A leży na osi Oy , więc jego pierwsza współrzędna jest równa 0.

Obliczamy drugą współrzędną wierzchołka A :

$$y = -3x + 6 \text{ i } x = 0$$

$$y = -3 \cdot 0 + 6$$

czyli $A = (0, 6)$.

Wierzchołek B leży na osi Ox , więc jego druga współrzędna jest równa 0.

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka B :

$$y = -3x + 6 \text{ i } y = 0$$

$$0 = -3x + 6$$

$$x = 2$$

Zatem $B = (2, 0)$.

Obliczamy długość odcinka AB :

$$|AB| = \sqrt{(2 - 0)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Przekształcamy równanie prostej AB do postaci ogólnej: $3x + y - 6 = 0$.

Obliczamy odległość wierzchołka $C = (3, 7)$ od prostej AB :

$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 1 \cdot 7 - 6|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Obliczona odległość d jest wysokością trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C na podstawę AB .

Obliczamy pole trójkąta ABC :

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 10$$

Sposób II

Wierzchołek A leży na osi Oy , więc jego pierwsza współrzędna jest równa 0 .

Obliczamy drugą współrzędną wierzchołka A :

$$y = -3x + 6 \text{ i } x = 0$$

$$y = -3 \cdot 0 + 6$$

czyli $A = (0, 6)$.

Wierzchołek B leży na osi Ox , więc jego druga współrzędna jest równa 0 .

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka B :

$$y = -3x + 6 \text{ i } y = 0$$

$$0 = -3x + 6$$

$$x = 2$$

Zatem $B = (2, 0)$.

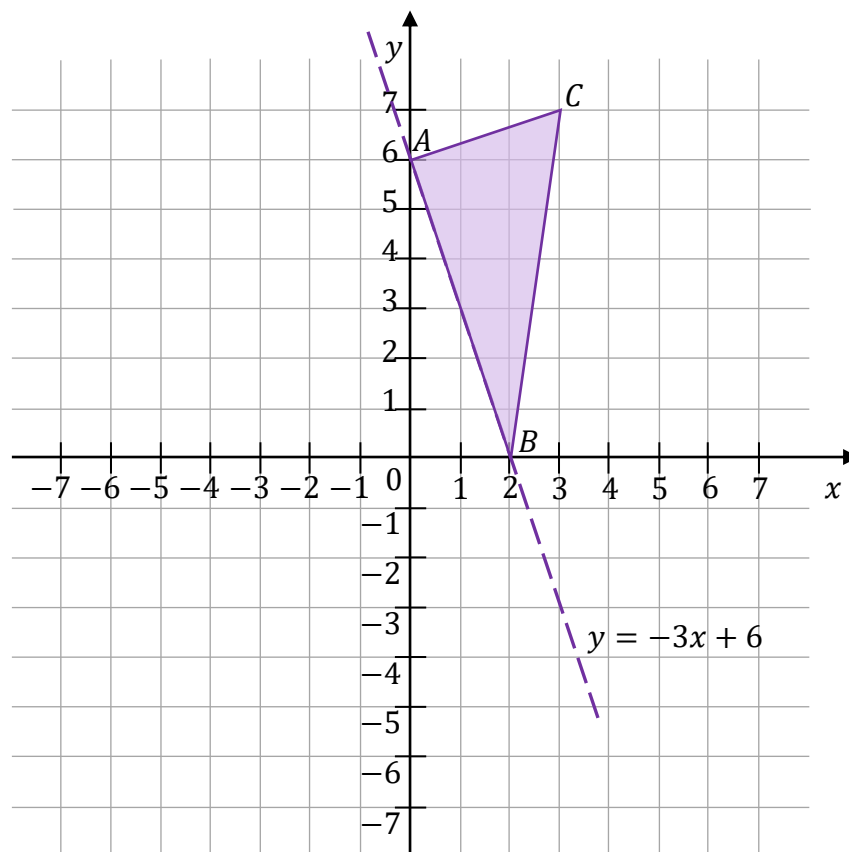
Pole trójkąta ABC obliczymy korzystając z wzoru z *Wybranych wzorów matematycznych*:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)((x_C - x_A))|$$

Obliczamy pole trójkąta ABC :

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(2 - 0)(7 - 6) - (0 - 6)(3 - 0)| = \frac{1}{2} |2 - (-18)| = 10.$$

Rysunek ilustracyjny do zadania.



Zadanie 49. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Uczeń: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych; IX.4) posługuje się równaniem okręgu [...].

Zasady oceniania

4 pkt – obliczenie promienia r okręgu: $r = 5\sqrt{5}$.

3 pkt – obliczenie współrzędnych środka S okręgu: $S = (3, 14)$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą wynikającego z równości długości odcinków AS oraz BS , np.

$$\sqrt{(x_S - (-8))^2 + (4x_S + 2 - 12)^2} = \sqrt{(x_S - (-2))^2 + (4x_S + 2 - 4)^2}$$

ALBO

obliczenie współrzędnych środka D cięciwy AB oraz obliczenie współczynnika

kierunkowego a_2 prostej prostopadłej do AB : $D = (-5, 8)$, $a_2 = \frac{3}{4}$

1 pkt – zapisanie współrzędnych środka S okręgu w zależności od jednej zmiennej, np.

$$S = (x_S, 4x_S + 2)$$

ALBO

obliczenie współrzędnych środka D cięciwy AB : $D = (-5, 8)$,

ALBO

obliczenie współczynnika kierunkowego a_1 prostej przechodzącej przez punkty A i B :

$$a_1 = -\frac{4}{3}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania*Sposób I*

Niech x_S będzie pierwszą współrzędną środka S okręgu \mathcal{O} .

Ponieważ S leży na prostej k , więc $S = (x_S, 4x_S + 2)$.

Punkty A oraz B leżą na okręgu, więc $|AS| = |BS|$. Stąd otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt{(x_S - (-8))^2 + (4x_S + 2 - 12)^2} = \sqrt{(x_S - (-2))^2 + (4x_S + 2 - 4)^2}$$

$$\sqrt{(x_S + 8)^2 + (4x_S - 10)^2} = \sqrt{(x_S + 2)^2 + (4x_S - 2)^2} \quad /(\)^2$$

$$(x_S + 8)^2 + (4x_S - 10)^2 = (x_S + 2)^2 + (4x_S - 2)^2$$

$$x_S^2 + 16x_S + 64 + 16x_S^2 - 80x_S + 100 = x_S^2 + 4x_S + 4 + 16x_S^2 - 16x_S + 4$$

$$-52x_S = -156$$

$$x_S = 3$$

Zatem $4x_S + 2 = 4 \cdot 3 + 2 = 14$ i $S = (3, 14)$.

Promień r okręgu \mathcal{O} jest równy odległości punktu A od środka S okręgu, więc

$$r = |AS| = \sqrt{(3 - (-8))^2 + (14 - 12)^2} = \sqrt{11^2 + 2^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

Sposób II

Środek S okręgu \mathcal{O} jest punktem przecięcia prostej k z symetralną cięciwy AB .

W celu wyznaczenia równania symetralnej cięciwy AB należy:

- obliczyć współrzędne środka D cięciwy AB
- obliczyć współczynnik kierunkowy prostej zawierającej AB
- obliczyć współczynnik kierunkowy prostej, która jest prostopadła do AB
- wyznaczyć równanie prostej prostopadłej do AB i przechodzącej przez punkt D .

Obliczamy współrzędne środka D cięciwy AB :

$$D = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{-8 - 2}{2}, \frac{12 + 4}{2} \right) = (-5, 8)$$

Obliczamy współczynnik kierunkowy a_1 prostej zawierającej cięciwę AB :

$$a_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 12}{-2 - (-8)} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

Obliczamy współczynnik kierunkowy a_2 prostej prostopadłej do AB :

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

$$-\frac{4}{3} \cdot a_2 = -1 \quad / \cdot \left(-\frac{4}{3} \right)$$

$$a_2 = \frac{3}{4}$$

Wyznaczamy równanie symetralnej cięciwy AB (tj. prostej, która przechodzi przez środek cięciwy AB i jest prostopadła do AB):

$$y = a_2 x + b$$

$$8 = \frac{3}{4} \cdot (-5) + b$$

$$\frac{47}{4} = b$$

Zatem symetralna cięciwy AB ma równanie $y = \frac{3}{4}x + \frac{47}{4}$.

Obliczamy współrzędne punktu przecięcia prostych o równaniach $y = \frac{3}{4}x + \frac{47}{4}$

i $y = 4x + 2$:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + \frac{47}{4} \\ y = 4x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 2 = \frac{3}{4}x + \frac{47}{4} \quad / \cdot 4 \\ y = 4x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x + 8 = 3x + 47 \\ y = 4x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \cdot 3 + 2 \end{cases}$$

Środek S okręgu \mathcal{O} ma współrzędne $S = (3, 14)$.

Promień r okręgu \mathcal{O} jest równy odległości punktu A od środka S okręgu, więc

$$r = |AS| = \sqrt{(3 - (-8))^2 + (14 - 12)^2} = \sqrt{11^2 + 2^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

Zadanie 50. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: IX.6) znajduje punkty wspólne [...] prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej.

Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktów przecięcia wykresów funkcji f oraz g : $(1, 4)$ oraz $(2, 3)$

ALBO

narysowanie wykresów funkcji f oraz g , odczytanie i zapisanie współrzędnych punktów przecięcia wykresów tych funkcji oraz sprawdzenie rachunkiem, że punkty o odczytanych współrzędnych należą jednocześnie do wykresów każdej z funkcji.

2 pkt – rozwiązanie równania kwadratowego $-x + 5 = -x^2 + 2x + 3$: $x_1 = 1$ oraz $x_2 = 2$

ALBO

narysowanie wykresów funkcji f oraz g oraz odczytanie i zapisanie współrzędnych punktów przecięcia wykresów tych funkcji.

1 pkt – zapisanie równania kwadratowego $-x + 5 = -x^2 + 2x + 3$

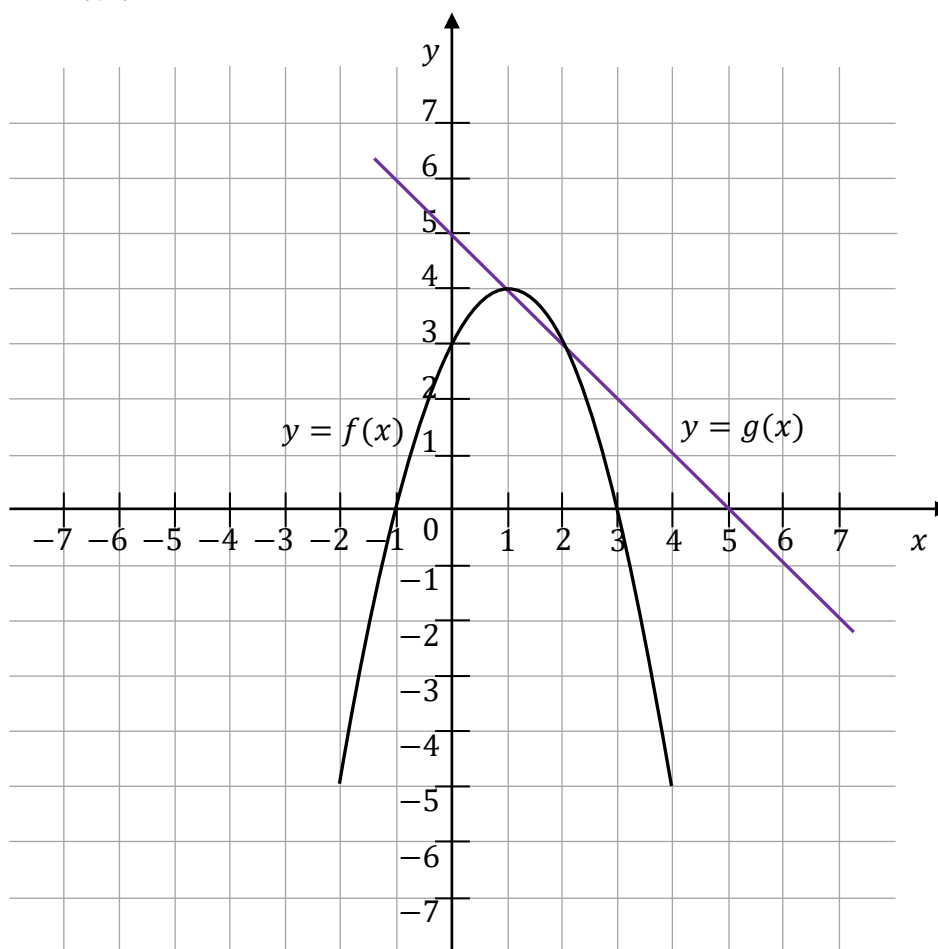
ALBO

narysowanie wykresu funkcji kwadratowej f lub wykresu funkcji liniowej g .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Rysunek ilustracyjny od zadania.



Sposób I

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = -x + 5 \end{cases}$$

Po podstawieniu do pierwszego z powyższych równań w miejsce y wyrażenia $-x + 5$ otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą:

$$-x + 5 = -x^2 + 2x + 3$$

Przekształcamy to równanie równoważnie do postaci $ax^2 + bx + c = 0$ i rozwiązujemy:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

$$x_1 = 1 \quad \text{lub} \quad x_2 = 2$$

Obliczamy wartości drugich współrzędnych punktów wspólnych paraboli i prostej.

Dla $x_1 = 1$ otrzymujemy $y_1 = -1 + 5 = 4$.

Dla $x_2 = 2$ otrzymujemy $y_2 = -2 + 5 = 3$.

Wykresy funkcji przecinają się w punktach (1, 4) oraz (2, 3).

Sposób II

Przekształcamy wzór funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ do postaci kanonicznej:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3 = -x^2 + 2x - 1 + 4 = -(x^2 - 2x + 1) + 4 = -(x - 1)^2 + 4$$

Odczytujemy współrzędne wierzchołka W paraboli, która jest wykresem funkcji f :

$W = (1, 4)$. Rysujemy wykres funkcji f .

Ponieważ współczynnik przy x^2 we wzorze funkcji f jest ujemny ($a < 0$), więc parabola ma ramiona skierowane ku dołowi.

Rysujemy prostą, która jest wykresem funkcji g oraz parabolę, która jest wykresem funkcji f .

Na podstawie sporządzonych wykresów funkcji odczytujemy współrzędne punktów przecięcia: $(1, 4)$ oraz $(2, 3)$.

Sprawdzamy rachunkowo, czy punkty o odczytanych współrzędnych należą do wykresów obu funkcji:

$$f(1) = -(1 - 1)^2 + 4 = 4$$

$$g(1) = -1 + 5 = 4$$

Punkt $(1, 4)$ należy do wykresów funkcji f i g .

$$f(2) = -(2 - 1)^2 + 4 = 3$$

$$g(2) = -2 + 5 = 3$$

Punkt $(2, 3)$ należy do wykresów funkcji f i g .

Wykresy funkcji przecinają się w punktach $(1, 4)$ oraz $(2, 3)$.

X. Stereometria

Zadanie 51. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: X.5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną.

Zasady oceniania

2 pkt – obliczenie pola trójkąta DES : $P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{11}}{16}$

1 pkt – wyznaczenie boków trójkąta DES : $\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}$

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna, albo brak odpowiedzi.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Trójkąt ECD jest równoboczny, ponieważ jest równoramienny i kąt przy wierzchołku C ma miarę 60° . Zatem $|DE| = \frac{1}{2}a$.

Odcinki SE i SD są wysokościami ścian bocznych, zatem $|SE| = |SD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trójkąt DES ma wówczas boki długości: $\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do obliczenia jego pola potrzebujemy wielkości p – połowy jego obwodu:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{a(1 + 2\sqrt{3})}{4}$$

$$P_{\Delta} = \sqrt{\frac{a(1 + 2\sqrt{3})}{4} \left(\frac{a(1 + 2\sqrt{3})}{4} - \frac{a}{2} \right) \left(\frac{a(1 + 2\sqrt{3})}{4} - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2}$$

$$P_{\Delta} = \sqrt{\frac{a(1 + 2\sqrt{3})}{4} \cdot \frac{a(2\sqrt{3} - 1)}{4} \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2}$$

$$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{11}}{16}$$

Zadanie 52. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: X.5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną; VIII.4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombch i trapezach.

Zasady oceniania

2 pkt – obliczenie pola powierzchni ostrosłupa $ABDE$: $P = \frac{a^2(3+\sqrt{3})}{2}$

1 pkt – zapisanie, że pole powierzchni ostrosłupa $ABDE$ jest równe sumie pól trzech trójkątów prostokątnych oraz pola trójkąta równobocznego.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Pole ostrosłupa $ABDE$ jest równe sumie pól trzech przystających trójkątów równoramiennych prostokątnych (ABD , ABE i ADE) oraz trójkąta równobocznego BDE

Trójkąt prostokątny stanowi połowę ściany sześcianu, zatem jego pole to $\frac{1}{2}a^2$. Bok trójkąta równobocznego jest przekątną ściany bocznej sześcianu, zatem ma długość $a\sqrt{2}$. Jego pole to $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Obliczamy pole powierzchni ostrosłupa $ABDE$, dodając pola trzech trójkątów prostokątnych i pole trójkąta równobocznego:

$$P = 3 \cdot \frac{1}{2}a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2(3 + \sqrt{3})}{2}$$

Zadanie 53. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: X.6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów [...] również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń; VIII.4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombch i trapezach.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne wskazanie trzech odpowiedzi.

1 pkt – poprawne wskazanie dwóch odpowiedzi.

0 pkt – poprawne wskazanie jednej odpowiedzi lub odpowiedzi niepoprawna, albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

1.P

2.F

3.P

Zadanie 54. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń X.6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów [...] również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń; X.7) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 55. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń X.6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów [...] również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zasady oceniania

1 pkt – poprawne wskazanie dwóch odpowiedzi.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna, albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

FP

XI. Kombinatoryka

Zadanie 56. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 57. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 58. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 59. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania [...].

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 60. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych; XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania [...].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne uzupełnienie wszystkich komórek tabeli.

1 pkt – poprawne uzupełnienie dwóch komórek tabeli.

0 pkt – poprawne uzupełnienie jednej komórki tabeli lub odpowiedź niepoprawna, albo brak odpowiedzi.

Pełne rozwiązanie

Cechy kul i pojemników	Liczba wszystkich różnych rozmieszczeń kul w pojemnikach
Kule rozróżnialne, pojemniki rozróżnialne	E
Kule rozróżnialne, pojemniki nierozróżnialne	C
Kule nierozróżnialne, pojemniki rozróżnialne	A
Kule nierozróżnialne, pojemniki nierozróżnialne	D

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Zadanie 61. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Uczeń: XII.3) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna, albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 62. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: XII.3) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 63. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna, albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

A

Zadanie 64. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna, albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

D

Zadanie 65. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Uczeń: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

1 pkt – poprawne wskazanie dwóch odpowiedzi.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

FF

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy

Zadanie 66. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	XIII. Optymalizacja. Uczeń: rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania

- 3 pkt – poprawna metoda obliczenia ceny gry x , przy której przychód ze sprzedaży gry jest największy oraz podanie prawidłowych wyników: $x = 80$ oraz $P(80) = 96\,000$ zł.
- 2 pkt – poprawne zapisanie wzoru funkcji P przychodu w zależności od ceny x , oraz prawidłowe obliczenie argumentu x , dla którego funkcja przychodu P osiąga wartość największą: $P(x) = -15x^2 + 2\,400x$, $x = 80$.
- 1 pkt – zapisanie poprawnego wzoru funkcji P przychodu w zależności od ceny x :
 $P(x) = -15x^2 + 2\,400x$.
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Tygodniowy przychód ze sprzedaży jest iloczynem ceny x gry oraz popytu $f(x)$ na tę grę przy danej cenie:

$$P(x) = x \cdot f(x)$$

Zatem funkcja przychodu P ma wzór

$$P(x) = x \cdot (2\,400 - 15x) = -15x^2 + 2\,400x$$

Warto zauważyć, że wykresem funkcji $P(x)$ jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu dla $x \in (0, +\infty)$. Z własności funkcji kwadratowej wynika, że funkcja P osiąga wartość największą w punkcie odpowiadającym wierzchołkowi paraboli.

Obliczamy pierwszą współrzędną x wierzchołka paraboli:

$$x = \left(-\frac{2\,400}{2 \cdot (-15)} \right) = 80$$

Funkcja przychodu $P(x)$ osiąga wartość największą dla argumentu $x = 80$.

Obliczamy największy tygodniowy przychód:

$$P(80) = -15 \cdot 80^2 + 2\,400 \cdot 80 = 96\,000 \text{ zł}$$

Zadanie 67. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	XIII. Optymalizacja. Uczeń: rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania

- 4 pkt – poprawna metoda obliczenia długości odcinka x , dla którego pole czworokąta jest największe oraz podanie prawidłowych wyników: $x = 4$ oraz $P(4) = 28$
- 3 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole P czworokąta w zależności od jednej zmiennej, wyznaczenie dziedziny D tej funkcji oraz prawidłowe obliczenie argumentu x , dla którego funkcja pola osiąga wartość największą: $P(x) = 2x^2 - 16x + 60$, $D = [3, 6)$, $x = 4$
- 2 pkt – zapisanie poprawnego wzoru funkcji P pola w zależności od zmiennej x :
 $P(x) = 2x^2 - 16x + 60$
- 1 pkt – wyznaczenie funkcji P pola czworokąta $ABCD$ jako różnicy pola prostokąta $PQRS$ i sumy pól trójkątów prostokątnych APD , AQB , BRC , CSD
$$P(x) = 10 \cdot 6 - \left[\frac{1}{2}x(6-x) + \frac{1}{2}x(10-x) + \frac{1}{2}x(6-x) + \frac{1}{2}x(10-x) \right]$$
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że $|AQ| = |BR| = |CS| = |DP| = x$ oraz $|PQ| = |SR| = 10$ i $|PS| = |QR| = 6$.
Wtedy $|AP| = |CR| = 10 - x$ oraz $|BQ| = |DS| = 6 - x$.

Wyznamy pole czworokąta $ABCD$ jako funkcję zmiennej x .

Pole czworokąta $ABCD$ jest równe różnicy pola prostokąta $PQRS$ i sumy pól trójkątów prostokątnych AQB , BRC , CSD i DPA .

$$P(x) = 10 \cdot 6 - \left[\frac{1}{2}x(6-x) + \frac{1}{2}x(10-x) + \frac{1}{2}x(6-x) + \frac{1}{2}x(10-x) \right]$$

Przekształcając dalej wzór funkcji, otrzymujemy

$$P(x) = 2x^2 - 16x + 60$$

Wyznamy dziedzinę D funkcji P , zapisując warunki

$$x \geq 3 \quad \text{i} \quad x < 6 \quad \text{i} \quad x < 10$$

Zatem $D = [3, 6)$.

Wykresem funkcji $P(x)$ jest fragment paraboli skierowanej ramionami ku górze. Z własności funkcji kwadratowej wynika, że funkcja P może osiągnąć wartość najmniejszą w punkcie odpowiadającym wierzchołkowi paraboli. Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli.

Ponieważ $x = \left(-\frac{(-16)}{2 \cdot 2}\right) = 4$ należy do dziedziny funkcji, funkcja P osiąga wartość najmniejszą dla argumentu $x = 4$.

Obliczamy najmniejsze pole

$$P(4) = 2 \cdot 4^2 - 16 \cdot 4 + 60 = 28$$

Zadanie 68. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	XIII. Optymalizacja. Uczeń: rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania

4 pkt – obliczenie wymiarów prostokąta oraz największego możliwego pola prostokąta:

$$x = \frac{3}{2}, y = 2, P = 3$$

3 pkt – wyznaczenie argumentu, dla którego funkcji $P(x)$ osiąga wartość największą:

$$x = \frac{3}{2}$$

2 pkt – zapisanie poprawnego wzoru funkcji P pola w zależności od zmiennej x :

$$P(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 4x$$

1 pkt – wyznaczenie zależności między bokami prostokąta, np.

$$\frac{3-x}{y} = \frac{3}{4}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy za x długość boku prostokąta zawartego w krótszej przyprostokątnej trójkąta, a za y długość boku prostokąta zawartego w dłuższej przyprostokątnej trójkąta (zobacz rysunek).

Boki prostokąta wyznaczają dwa dodatkowe trójkąty prostokątne o przyprostokątnych $3-x$ i y oraz x i $4-y$.

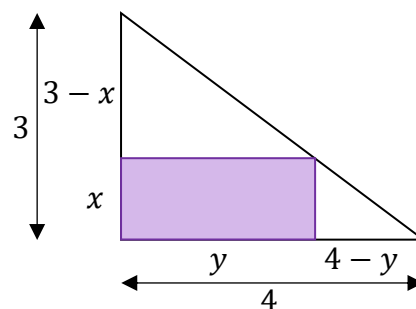
Wszystkie trzy trójkąty są podobne, ponieważ ich odpowiednie kąty są równe.

Korzystając z ich podobieństwa, możemy zapisać proporcję:

$$\frac{3-x}{y} = \frac{3}{4}$$

Wynika stąd, że

$$y = 4 - \frac{4}{3}x$$



Pole prostokąta możemy zapisać jako $P = x \cdot y$, a wykorzystując powyższe podstawienie, otrzymujemy:

$$P(x) = x \cdot \left(4 - \frac{4}{3}x\right) = -\frac{4}{3}x^2 + 4x$$

Dziedziną funkcji $P(x)$ jest przedział $(0, 3)$.

Wykresem funkcji $P(x)$ jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu. Z własności funkcji kwadratowej wynika, że funkcja P może osiągnąć wartość największą w punkcie odpowiadającym wierzchołkowi paraboli. Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli

$$p = -\frac{4}{2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{3}{2}$$

Argument ten należy do dziedziny funkcji $P(x)$.

$$\text{Dla } x = \frac{3}{2} \text{ mamy } y = 4 - \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2$$

Zatem największe pole ma prostokąt o wymiarach $\frac{3}{2}$ i 2 jest ono równe

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$