Wiesława J. Kaczor
Maria T. Nowak

ZADANIA Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Liczby rzeczywiste, ciągi i szeregi liczbowe

1

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 2005

Projekt okładki i stron tytułowych MAŁGORZATA PODZIOMEK

Redaktor inicjujący AGNIESZKA GRABARCZYK

Zbiór zadań wydany po raz pierwszy w 1996 roku przez Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie.

Politechnika Warszawska
W. 6268/2
Biblioteka Wydziału Elektroniki

Copyright © by Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Warszawa 2005

ISBN 83-01-14453-X t. 1
ISBN 83-01-14452-1 t. 1–3

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
00-251 Warszawa, ul. Miodowa 10
tel. (0 22) 69 54 321
faks (0 22) 69 54 031
e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.pl

SPIS TREŚCI

Wstęp VII
Oznaczenia IX

ZADANIA

1. Liczby rzeczywiste 3
1.1. Kresy zbiorów liczb rzeczywistych. Ułamki łańcuchowe 3
1.2. Pewne elementarne nierówności 7

2. Ciągi liczb rzeczywistych 15
2.1. Ciągi monotoniczne 15
2.2. Granica ciągu. Własności ciągów zbieżnych 21
2.3. Przekształcenie Toeplitza, twierdzenie Stolza i ich zastosowania 27
2.4. Punkty skupienia. Granica górna i dolna ciągu 30
2.5. Zadania różne 35

3. Szeregi liczbowe 46
3.1. Obliczanie sum szeregów 46
3.2. Szeregi o wyrazach nieujemnych 51
3.3. Kryterium całkowe zbieżności szeregów 62
3.4. Szeregi o wyrazach dowolnych – zbieżność, zbieżność bezwzględna. Twierdzenie Leibniza 65
3.5. Kryteria Dirichleta i Abela 70
3.6. Iloczyn Cauchy'ego szeregów 72
3.7. Zmiana porządku sumowania. Szeregi podwójne 75
3.8. Iloczyny nieskończone 80

ROZWIĄZANIA

1. Liczby rzeczywiste 89
1.1. Kresy zbiorów liczb rzeczywistych. Ułamki łańcuchowe 89
1.2. Pewne elementarne nierówności 98

2. Ciągi liczb rzeczywistych 111
2.1. Ciągi monotoniczne 111
2.2. Granica ciągu. Własności ciągów zbieżnych 120
2.3. Przekształcenie Toeplitza, twierdzenie Stolza i ich zastosowania 135
2.4. Punkty skupienia. Granica górna i dolna ciągu 142
2.5. Zadania różne 158

3. Szeregi liczbowe 188
3.1. Obliczanie sum szeregów 188
3.2. Szeregi o wyrazach nieujemnych 207
3.3. Kryterium całkowe zbieżności szeregów 235
3.4. Szeregi o wyrazach dowolnych – zbieżność, zbieżność bezwzględna. Twierdzenie Leibniza 240
3.5. Kryteria Dirichleta i Abela 253
3.6. Iloczyn Cauchy'ego szeregów 261
3.7. Zmiana porządku sumowania. Szeregi podwójne 267
3.8. Iloczyny nieskończone 281

Literatura 297

Skorowidz 299

WSTĘP

Niniejsza książka jest rozszerzoną i poprawioną wersją jej poprzednich wydań. Po raz pierwszy książka ta została wydana w 1996 roku przez Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie. W 2000 roku ukazała się jej angielska wersja wydana przez American Mathematical Society w serii Student Mathematical Library, Vol. 4. Jest to pierwszy tom z serii zbiorów zadań poświęconych różnym działom analizy matematycznej. Zamierzeniem naszym było wypełnienie, choćby częściowe, luki na rynku wydawniczym pomiędzy zbiorami dość łatwych zadań, a zbiorami zadań bardzo trudnych, na ogół bez wskazówek i rozwiązań. Dotychczas zostały wydane przez American Mathematical Society dwa następne tomy poświęcone rachunkowi różniczkowemu i całkowemu funkcji jednej zmiennej.

Naszym celem jest zachęcenie studentów do systematycznej i samodzielnej pracy, dlatego książka ta zawiera rozwiązania każdego z podanych zadań. Mamy nadzieję, że zbiór ten zainteresuje nie tylko studentów, ale również młodszych pracowników nauki prowadzących ćwiczenia z analizy matematycznej i nauczycieli szkół średnich pracujących z uczniami klas o profilu matematyczno-fizycznym.

W przedstawionym tomie zajmujemy się tylko liczbami rzeczywistymi, ciągami i szeregami liczbowymi. Tom ten zawiera, naszym zdaniem, ciekawe zadania, obrazujące problemy występujące w tych działach analizy matematycznej. Kolejność zadań i ich dobór są pomyślane w ten sposób, by stymulować zainteresowanie Czytelnika, a więc przeanalizowanie jednego rozwiązania jest często wskazówką do rozwiązania następnego zadania. Przedstawiamy tylko jedną z możliwych rozwiązań każdego zadania. W tym miejscu chcemy zaznaczyć, że podajemy elementarne rozwiązania niektórych problemów, które często są rozstrzygane za pomocą bardziej zaawansowanych metod. Przykładem jest twierdzenie Toeplitza o tzw. regularnym przekształceniu ciągu, które w wielu podręcznikach dowodzone jest metodami analizy funkcjonalnej. W naszym zbiorze podajemy elementarny dowód tego twierdzenia pochodzący od O. Toeplitza. W rozwiązaniach niektórych zadań (jest ich niewiele) korzystamy wprawdzie z pochodnych i całek, ale definicje

i twierdzenia, które stosujemy znane są już uczniom szkół średnich. Ze względów praktycznych dodałyśmy rozdział dotyczący kryterium całkowego zbieżności szeregów.

Mamy nadzieję, że takie przedstawienie omawianego działu analizy matematycznej rozszerzy krąg czytelników naszego zbioru.

Wszystkie oznaczenia i definicje występujące w tym tomie są standardowe i powszechnie stosowane. Można je znaleźć na przykład w podręcznikach [8], [15] i [22]. Tam też Czytelnik znajdzie wiadomości teoretyczne niezbędne do rozwiązywania podanych zadań. W przypadku wątpliwości potrzebne oznaczenia, definicje i twierdzenia podane są na początku rozdziału.

Większość zadań została zaczerpnięta z różnych podręczników, zbiorów zadań i czasopism matematycznych, a w szczególności z American Mathematical Monthly, Matematika Sevodnja i Delty. Ustalenie oryginalnego źródła często przekraczałoby nasze możliwości. Dołączamy kompletną listę książek, z których korzystałyśmy w trakcie pisania tego zbioru zadań. Ponadto przy rozwiązaniach niektórych trudniejszych zadań, które są właściwie twierdzeniami, podajemy stosowne odnośniki do literatury.

Uważamy za swój miły obowiązek podziękować tym wszystkim pracownikom Instytutu Matematyki UMCS, którzy wspierali nas w czasie pisania tego podręcznika, a w szczególności Doktor M. Koter-Mórgowskiej oraz Profesorom Tadeuszowi Kuczumowowi oraz Adamowi Stachurze. Dyskusje z nimi, ich propozycje zadań oraz rozwiązań wzbogaciły znacznie zawartość tego tomu. Profesorowi Stanisławowi Prusowi składamy serdeczne podziękowania za stałą pomoc w pokonywaniu problemów TEX-owych i komputerowych.

W. J. Kaczor, M. T. Nowak

Lublin, listopad 2004 r.

OZNACZENIA

- $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych
- $\mathbb{R}_+$ – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – zbiór liczb naturalnych
- $\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych
- $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych
- (a, b) – przedział otwarty w $\mathbb{R}$, tzn. zbiór $\{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$
- $[a, b]$ – przedział domknięty w $\mathbb{R}$, tzn. zbiór $\{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$
- $\sup \mathbf{A} (\inf \mathbf{A})$ – kres górny (dolny) niepustego zbioru $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$. Jeśli $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ nie jest zbiorem ograniczonym z góry (z dołu), to przyjmujemy $\sup \mathbf{A} = +\infty$ ($\inf \mathbf{A} = -\infty$).
- $[x]$ – część całkowita liczby rzeczywistej x, tzn. największa liczba całkowita mniejsza bądź równa x
- $$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x > 0, \\ -1 & \text{dla} \quad x < 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$
- Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to
  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$,
  $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2)(2n)$,
  $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)(2n-1)$.

Zadania

1 LICZBY RZECZYWISTE

1.1 KRESY ZBIORÓW LICZB RZECZYWISTYCH UŁAMKI ŁAŃCUCHOWE

1.1.1. Wykazać, że

$$\sup\{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \wedge x^2 < 2\} = \sqrt{2}.$$

1.1.2. Niech $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem niepustym. Określmy zbiór $-\mathbf{A} = \{x : -x \in \mathbf{A}\}$. Pokazać, że

$$\sup(-\mathbf{A}) = -\inf \mathbf{A},$$

$$\inf(-\mathbf{A}) = -\sup \mathbf{A}.$$

1.1.3. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbb{R}$ będą zbiorami niepustymi. Określmy zbiory

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \{z = x + y : x \in \mathbf{A} \wedge y \in \mathbf{B}\},$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \{z = x - y : x \in \mathbf{A} \wedge y \in \mathbf{B}\}.$$

Pokazać, że

$$\sup(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} + \sup \mathbf{B},$$

$$\sup(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} - \inf \mathbf{B}.$$

Podać i uzasadnić analogiczne wzory dla $\inf(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ oraz $\inf(\mathbf{A} - \mathbf{B})$.

1.1.4. Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ będą niepustymi zbiorami liczb rzeczywistych dodatnich. Określmy zbiory

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \{z = x \cdot y : x \in \mathbf{A} \wedge y \in \mathbf{B}\},$$

$$\frac{1}{\mathbf{A}} = \left\{z = \frac{1}{x} : x \in \mathbf{A}\right\}.$$

Wykazać, że

$$\sup(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} \cdot \sup \mathbf{B}.$$

Wykazać, że jeśli $\inf \mathbf{A} > 0$, to

$$\sup\left(\frac{1}{\mathbf{A}}\right) = \frac{1}{\inf \mathbf{A}}$$

i jeśli $\inf \mathbf{A} = 0$, to $\sup\left(\frac{1}{\mathbf{A}}\right) = +\infty$. Udowodnić ponadto, że jeśli $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ są ograniczonymi zbiorami liczb rzeczywistych, to

$$\sup(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \max\{\sup\mathbf{A}\cdot\sup\mathbf{B},\ \sup\mathbf{A}\cdot\inf\mathbf{B},\ \inf\mathbf{A}\cdot\sup\mathbf{B},\ \inf\mathbf{A}\cdot\inf\mathbf{B}\}.$$

1.1.5. Niech $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ będą zbiorami niepustymi. Wykazać, że

$$\sup(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}) = \max\{\sup\mathbf{A}, \sup\mathbf{B}\}$$

oraz

$$\inf(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}) = \min\{\inf\mathbf{A}, \inf\mathbf{B}\}.$$

1.1.6. Znaleźć kresy zbiorów $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ określonych następująco:

$$\mathbf{A}_1 = \left\{2(-1)^{n+1} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(2+\frac{3}{n}\right) :\ n\in\mathbb{N}\right\},$$

$$\mathbf{A}_2 = \left\{\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3} :\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

1.1.7. Wyznaczyć kresy zbiorów $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, gdzie $\mathbf{A} = \{0,2; 0,22; 0,222; \dots\}$, a $\mathbf{B}$ jest zbiorem ułamków dziesiętnych pomiędzy 0 i 1, które w swoim rozwinięciu mają tylko zera i jedynki.

1.1.8. Znaleźć kresy zbioru liczb postaci $\frac{(n+1)^2}{2^n}$, gdzie $n\in\mathbb{N}$.

1.1.9. Znaleźć kresy zbioru liczb postaci $\frac{(n+m)^2}{2^{nm}}$, gdzie $n, m\in\mathbb{N}$.

1.1.10. Znaleźć kresy następujących zbiorów:

(a) $\mathbf{A} = \left\{\frac{m}{n} :\ m,n\in\mathbb{N},\ m<2n\right\}$, (b) $\mathbf{B} = \{\sqrt{n} - [\sqrt{n}\,] :\ n\in\mathbb{N}\}$.

1.1.11. Wyznaczyć

(a) $\sup\{x\in\mathbb{R} : x^2+x+1>0\}$, (b) $\inf\{z = x + x^{-1} : x>0\}$,

(c) $\inf\{z = 2^x + 2^{\frac{1}{x}} : x>0\}$.

1.1.12. Wyznaczyć kresy następujących zbiorów:

(a) $\mathbf{A} = \left\{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} :\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$, (b) $\mathbf{B} = \left\{\frac{mn}{4m^2+n^2} :\ m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\right\}$,

(c) $\mathbf{C} = \left\{\frac{m}{m+n} :\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$, (d) $\mathbf{D} = \left\{\frac{m}{|m|+n} :\ m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\right\}$,

(e) $\mathbf{E} = \left\{\frac{mn}{1+m+n} :\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$.

1.1.13. Rozpatrzmy wszystkie możliwe układy liczb rzeczywistych dodatnich $(a_1,\dots,a_n)$, $n\geq 3$. Wyznaczyć kres górny i dolny zbioru liczb o postaci

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_k+a_{k+1}+a_{k+2}}$$

po wszystkich takich układach, przyjmując: $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$.

1.1.14. Udowodnić, że dla dowolnej liczby niewymiernej α i dowolnego n naturalnego istnieją takie liczby naturalna q_n oraz całkowita p_n, że

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{nq_n}.$$

Udowodnić również, że $\{p_n\}$ oraz $\{q_n\}$ mogą być tak dobrane, aby spełniona była nierówność

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

1.1.15. Niech α będzie dowolną liczbą niewymierną. Pokazać, że zbiór $\mathbf{A} = \{m+n\alpha :\ m,n\in\mathbb{Z}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$, tzn. w każdym przedziale otwartym znajduje się co najmniej jeden element zbioru $\mathbf{A}$.

1.1.16. Wykazać, że zbiór $\{\cos n :\ n\in\mathbb{N}\}$ jest gęsty w $[-1,1]$.

1.1.17. Niech $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Określmy ciąg $\{x_n\}$ w następujący sposób:

$$x = [x] + \frac{1}{x_1},\quad x_1 = [x_1] + \frac{1}{x_2},\dots,\quad x_{n-1} = [x_{n-1}] + \frac{1}{x_n}.$$

Wówczas

$$x = [x] + \cfrac{1}{[x_1] + \cfrac{1}{[x_2] + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{[x_{n-1}] + \cfrac{1}{x_n}}}}}.$$

Pokazać, że x jest liczbą wymierną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $n\in\mathbb{N}$, dla którego w powyższej równości x_n jest liczbą naturalną.

Uwaga. Określone w zadaniu przedstawienie liczby x nazywamy **ułamkiem łańcuchowym skończonym**. Wyrażenie

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

bywa też zapisywane w dogodniejszej postaci

$$a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \dots + \frac{1|}{|a_n}.$$

1.1.18. Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ będą dowolnymi liczbami dodatnimi i niech

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & q_0 &= 1,\\ p_1 &= a_0a_1 + 1, & q_1 &= a_1,\\ p_k &= p_{k-1}a_k + p_{k-2}, & q_k &= q_{k-1}a_k + q_{k-2} \quad \text{dla} \quad k = 2,3,\dots,n. \end{aligned}$$

Niech ponadto

$$R_0 = a_0, \quad R_k = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

będzie tzw. **k-tym reduktem ułamka łańcuchowego**

$$a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_n}.$$

Udowodnić, że

$$R_k = \frac{p_k}{q_k} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

1.1.19. Niech p_k, q_k będą określone tak, jak w poprzednim zadaniu. Udowodnić, że następująca równość jest prawdziwa:

$$p_{k-1}q_k - q_{k-1}p_k = (-1)^k \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

i wywnioskować z niej, że przy dodatkowym założeniu, że $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są liczbami całkowitymi, liczby p_k, q_k dla $k = 1, 2, \ldots, n$ są względem siebie pierwsze.

1.1.20. Niech x będzie liczbą niewymierną. Określmy ciąg $\{x_n\}$ w następujący sposób:

$$x_1 = \frac{1}{x - [x]}, \quad x_2 = \frac{1}{x_1 - [x_1]}, \ldots, \quad x_n = \frac{1}{x_{n-1} - [x_{n-1}]}, \ldots$$

Niech ponadto $a_0 = [x]$, $a_n = [x_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ oraz

$$R_n = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_n}.$$

Pokazać, że

$$x - R_n = \frac{(-1)^n}{(q_n x_{n+1} + q_{n-1})q_n},$$

gdzie p_n, q_n są liczbami określonymi w zadaniu 1.1.18. Wywnioskować stąd, że liczba x jest zawarta między dwoma swoimi kolejnymi reduktami.

1.1.21. Wykazać, że zbiór $\{\sin n : n \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $[-1, 1]$.

1.1.22. Korzystając z zadania 1.1.20, udowodnić, że dla każdej liczby niewymiernej x istnieje ciąg liczb wymiernych $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ taki, że

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$$

oraz, że wszystkie liczby q_n są liczbami nieparzystymi. (Porównaj zadanie 1.1.14).

1.1.23. Wyprowadzić wzór na różnicę dwóch kolejnych reduktów

$$R_{n+1} - R_n = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}.$$

1.1.24. Niech x będzie dowolną liczbą niewymierną i niech R_n oznacza n-ty reduktu rozwinięcia tej liczby na ułamek łańcuchowy określony w zadaniu 1.1.20. Udowodnić, że każdy następny redukt daje lepsze przybliżenie liczby x niż poprzedni, to znaczy wykazać następującą nierówność

$$|x - R_{n+1}| < |x - R_n|, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

1.1.25. Udowodnić następujące **prawo najlepszego przybliżenia**:

Jeżeli liczba wymierna $\frac{r}{s}$, $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$, jest lepszym przybliżeniem liczby x niż jej redukt R_n, to mianownik s tej liczby jest większy od mianownika reduktu R_n.

1.1.26. Znaleźć rozwinięcia na ułamki łańcuchowe liczb $\sqrt{2}$, $(\sqrt{5} - 1)/2$.

1.1.27. Niech k będzie liczbą naturalną. Znaleźć rozwinięcie na ułamek łańcuchowy liczby $\sqrt{k^2 + k}$.

1.1.28. Znaleźć wszystkie liczby $x \in (0, 1)$, których rozwinięcia na ułamki łańcuchowe mają pierwsze mianowniki a_1 (patrz zadanie 1.1.20) równe danej liczbie naturalnej n.

1.2 PEWNE ELEMENTARNE NIERÓWNOŚCI

1.2.1. Wykazać, że jeśli liczby $a_k > -1$, $k = 1, \ldots, n$, mają ten sam znak, to

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Uwaga. Zauważmy, że jeśli $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$, to otrzymujemy znaną **nierówność Bernoulliego:**

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \quad \text{dla} \quad a > -1.$$

1.2.2. Udowodnić metodą indukcji matematycznej następujące twierdzenie:

Jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są liczbami rzeczywistymi dodatnimi takimi, że $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, to $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$.

1.2.3. Niech A_n oznacza średnią arytmetyczną, G_n – średnią geometryczną i H_n – średnią harmoniczną n liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tzn.

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Wykazać, że $A_n \geq G_n \geq H_n$.

1.2.4. Korzystając z zależności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną ($G_n \le A_n$), wykazać nierówność Bernoulliego

$$(1+x)^n \ge 1+nx \qquad \text{dla} \qquad x>0.$$

1.2.5. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności:

(a) $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{2}{3}$,

(b) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$,

(c) $\frac{1}{2}<\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\ldots+\frac{1}{5n}+\frac{1}{5n+1}<\frac{2}{3}$,

(d) $n(\sqrt[n]{n+1}-1)<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}<n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}+\frac{1}{n+1}\right)$, $n>1$.

1.2.6. Wykazać, że dla $x>0$ i $n\in\mathbb{N}$ mamy

$$\frac{x^n}{1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{2n}}\le\frac{1}{2n+1}.$$

1.2.7. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem arytmetycznym o wyrazach dodatnich. Wykazać nierówność

$$\sqrt{a_1a_n}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\le\frac{a_1+a_n}{2}.$$

1.2.8. Udowodnić nierówność

$$\sqrt{n}\le\sqrt[n]{n!}\le\frac{n+1}{2},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

1.2.9. Udowodnić, że jeśli liczby dodatnie a_k, $k=1,2,\ldots,n$, spełniają warunek $\sum_{k=1}^n a_k\le 1$, to

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k}\ge n^2.$$

1.2.10. Załóżmy, że $a_k>0$, $k=1,2,\ldots,n$, oraz $n>1$. Wykazać, że jeśli $s=\sum_{k=1}^n a_k$, to

(a) $n\left(\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{s-a_k}\right)^{-1}\le n-1\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{s-a_k}{a_k}$,

(b) $\sum_{k=1}^n\frac{s}{s-a_k}\ge\frac{n^2}{n-1}$,

(c) $n\left(\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{s+a_k}\right)^{-1}\ge n+1$.

1.2.11. Pokazać, że jeśli $a_k>0$, $k=1,\ldots,n$, oraz $a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1$, to

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)\ge 2^n.$$

1.2.12. Udowodnić następującą **nierówność Cauchy'ego**:
Dla dowolnych liczb rzeczywistych a_k, b_k, $k=1,2,\ldots,n$, prawdziwa jest nierówność

$$\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2\le\sum_{k=1}^n a_k^2\sum_{k=1}^n b_k^2.$$

1.2.13. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a_k, b_k, $k=1,2,\ldots,n$, mamy

$$\left(\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^n b_k\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\sum_{k=1}^n(a_k^2+b_k^2)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2.14. Niech a_k, b_k, $k=1,2,\ldots,n$, będą liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $\sum_{k=1}^n a_k^2=\sum_{k=1}^n b_k^2=1$. Wykazać, że wtedy

$$\left|\sum_{k=1}^n a_kb_k\right|\le 1.$$

1.2.15. Udowodnić, że jeśli $a_k>0$, $k=1,2,\ldots,n$, to

(a) $\sum_{k=1}^n a_k\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k}\ge n^2$,

(b) $\sum_{k=1}^n a_k\sum_{k=1}^n\frac{1-a_k}{a_k}\ge n\sum_{k=1}^n(1-a_k)$,

(c) $(\log_a a_1)^2+(\log_a a_2)^2+\ldots+(\log_a a_n)^2\ge\frac{1}{n}$,
przy założeniu, że $a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n=a\ne 1$.

1.2.16. Niech a_k, $b_k\in\mathbb{R}$, $k=1,2,\ldots,n$, i niech $\alpha>0$. Pokazać, że

$$\left|\sum_{k=1}^n a_kb_k\right|\le\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^n a_k^2+\frac{\alpha}{4}\sum_{k=1}^n b_k^2.$$

1.2.17. Niech $a_k\in\mathbb{R}$, $k=1,2,\ldots,n$. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^n|a_k|\le\sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{n}\sum_{k=1}^n|a_k|.$$

1.2.18. Niech a_k, b_k, $k=1,2,\ldots,n$, będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Udowodnić, że

(a) $\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2\le\sum_{k=1}^n ka_k^2\sum_{k=1}^n\frac{b_k^2}{k}$,

(b) $\left(\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{k}\right)^2\le\sum_{k=1}^n k^3a_k^2\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^5}$.

1.2.19. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych p, q oraz dowolnych liczb dodatnich a_k, $k=1,2,\ldots,n$, spełniona jest nierówność

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^2\le\sum_{k=1}^n a_k^{p+q}\sum_{k=1}^n a_k^{p-q}.$$

1.2.20. Niech a_k, $k=1,2,\ldots,n$, będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $\sum_{k=1}^n a_k=1$. Znaleźć najmniejszą wartość wyrażenia $\sum_{k=1}^n a_k^2$.

1.2.21. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_n$ będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Znaleźć najmniejszą wartość wyrażenia $\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^2$ przy warunku, że $\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$.

1.2.22. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, prawdziwa jest nierówność

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leq (n-1)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2a_1a_2\right).$$

1.2.23. Niech $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Udowodnić, że

(a) $\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

(b) $\left|\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|$.

1.2.24. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_n$ będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Znaleźć najmniejszą wartość wyrażenia

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \quad \text{przy warunku, że} \quad \sum_{k=1}^{n} p_k a_k = 1.$$

1.2.25. Załóżmy, że $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ lub $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ i $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$. Wykazać, że prawdziwa jest **nierówność Czebyszewa**

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k \leq n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

1.2.26. Niech $a_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, i $p \in \mathbb{N}$. Wykazać nierówność

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^p.$$

1.2.27. Wykazać, że jeśli $c > 0$, to dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b spełniona jest nierówność

$$(a+b)^2 \leq (1+c)a^2 + \left(1 + \frac{1}{c}\right)b^2.$$

1.2.28. Wykazać, że dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest nierówność

$$\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| \leq |b-c|.$$

1.2.29. Wykazać, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c spełnione są następujące nierówności:

(a) $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq (a+b+c)$,

(b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}$,

(c) $\frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} + \frac{2}{a+b} \geq \frac{9}{a+b+c}$,

(d) $\frac{b^2-a^2}{c+a} + \frac{c^2-b^2}{a+b} + \frac{a^2-c^2}{b+c} \geq 0$,

(e) $\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}$ dla $b \leq a$.

1.2.30. Niech $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, i niech

$$m = \min\left\{\frac{a_k}{b_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\} \quad \text{oraz} \quad M = \max\left\{\frac{a_k}{b_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Pokazać, że

$$m \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leq M.$$

1.2.31. Załóżmy, że $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}, n > 1$. Wykazać, że

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n} < \operatorname{tg}\alpha_n.$$

1.2.32. Niech $c_1, c_2, \ldots, c_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ dowolnymi liczbami naturalnymi i niech

$$S = \max\{\sqrt[k_1]{c_1}, \sqrt[k_2]{c_2}, \ldots, \sqrt[k_n]{c_n}\},$$
$$s = \min\{\sqrt[k_1]{c_1}, \sqrt[k_2]{c_2}, \ldots, \sqrt[k_n]{c_n}\}.$$

Udowodnić, że

$$s \leq (a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{k_1+k_2+\ldots+k_n}} \leq S.$$

1.2.33. Niech $a_k > 0$, $b_k > 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$ i niech $M = \max\left\{\frac{a_k}{b_k} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$. Pokazać, że

$$\frac{a_1 + a_2^2 + \ldots + a_n^n}{b_1 + Mb_2^2 + \ldots + M^{n-1}b_n^n} \leq M.$$

1.2.34. Udowodnić, że jeśli x jest liczbą większą od każdej z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, to

$$\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \ldots + \frac{1}{x-a_n} \geq \frac{n}{x - \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}}.$$

1.2.35. Niech $c_k = \binom{n}{k}$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Wykazać, że

$$\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2} + \ldots + \sqrt{c_n} \leq \sqrt{n(2^n - 1)}.$$

1.2.36. Wykazać, że dla $n \geq 2$ prawdziwa jest nierówność

$$\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leq \left(\frac{2^n - 2}{n-1}\right)^{n-1}.$$

1.2.37. Niech a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi i niech A_n oznacza średnią arytmetyczną tych liczb. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $p > 1$ prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^p \leq \frac{p}{p-1} \sum_{k=1}^{n} A_k^{p-1} a_k.$$

1.2.38. Załóżmy, że a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, są liczbami dodatnimi i przyjmijmy $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1} \leq \frac{a^2}{4}.$$

1.2.39. Udowodnić, że jeśli $b_1, b_2, \ldots, b_n$ jest układem liczb powstałym przez dowolne przestawienie danych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$, to

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

1.2.40. Załóżmy, że $0 < a_k < 1$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$ oraz $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$. Udowodnić, że **nierówności Weierstrassa**:

(a) $$1 + \sum_{k=1}^{n} a_k < \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) < \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{n} a_k},$$

(b) $$1 - \sum_{k=1}^{n} a_k < \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) < \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} a_k}$$

są prawdziwe.

1.2.41. Załóżmy, że $0 < a_k < 1$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$ oraz $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a$. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_k} \geq \frac{na}{n - a}.$$

1.2.42. Załóżmy, że $0 < a_k \leq 1$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$. Udowodnić, że następująca nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + a_k} \leq \frac{n \sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k + n \prod_{k=1}^{n} a_k}$$

jest prawdziwa.

1.2.43. Załóżmy, że a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, są takimi liczbami nieujemnymi, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Wykazać, że

(a) $$\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \geq (n+1)^n \prod_{k=1}^{n} a_k, \qquad \text{(b)} \quad \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) \geq (n-1)^n \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

1.2.44. Wykazać, że jeśli a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, są liczbami dodatnimi spełniającymi warunek

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + a_k} = n - 1,$$

to

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geq (n-1)^n.$$

1.2.45. Wykazać, że przy założeniach zadania 1.2.43 prawdziwa jest nierówność

$$\frac{\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)}{(n+1)^n} \geq \frac{\prod_{k=1}^{n} (1 - a_k)}{(n-1)^n}, \quad n > 1.$$

1.2.46. Udowodnić następujące nierówności:

(a) Jeśli $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, to

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{n}{2}.$$

(b) Jeśli a_1, a_2, a_3 są dowolnymi liczbami dodatnimi, to

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_1} + \frac{a_3}{a_1 + a_2} \geq \frac{3}{2}.$$

(c) Jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dowolnymi liczbami dodatnimi, to

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{n}{4}.$$

1.2.47. Udowodnić, że jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{|a_k - t|}}{2^k} \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{|a_k - a_1|}}{2^k}$$

jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej t.

1.2.48. Udowodnić, że jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ są dowolnymi liczbami dodatnimi, to prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdot \ldots \cdot (a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_n}.$$

1.2.49. Udowodnić, że jeśli $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ oraz liczby nieujemne $p_1, p_2, \ldots, p_n$ spełniają warunek $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, to

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{1}{a_k}\right) \leq \frac{A^2}{G^2},$$

gdzie $A = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)$ i $G = \sqrt{a_1 a_n}$.

1.2.50. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną i niech $\sigma(n)$ oznacza sumę jej dodatnich dzielników oraz $\tau(n)$ liczbę tych dzielników. Pokazać, że $\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \geq \sqrt{n}$.

1.2.51. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$, gdzie $n > 1$, prawdziwa jest nierówność

$$\min\{(a_k - a_i)^2,\ k \neq i,\ k, i = 1, 2, \ldots, n\} \leq \frac{12}{n(n^2-1)}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2).$$

1.2.52. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z takich, że $x+y+z = 1$, prawdziwa jest nierówność

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

2 CIĄGI LICZB RZECZYWISTYCH

2.1 CIĄGI MONOTONICZNE

DEFINICJA 1. *Ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}$ nazywamy rosnącym, jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}$*

$$a_{n+1} \geq a_n.$$

Jeśli natomiast dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$a_{n+1} > a_n,$$

to mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest ściśle rosnący.
Podobnie definiujemy *ciąg malejący* i *ściśle malejący.*
Ciągi rosnące i malejące obejmujemy wspólną nazwą *ciągów monotonicznych.*

2.1.1. Wykazać, że
(a) jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem rosnącym, to $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$,
(b) jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem malejącym, to $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

2.1.2. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_p$ będą dowolnie ustalonymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi i rozważmy ciągi o wyrazach

$$s_n = \frac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_p^n}{p} \quad \text{oraz} \quad x_n = \sqrt[n]{s_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Udowodnić, że $\{x_n\}$ jest ciągiem rosnącym.

Wskazówka. Wykazać najpierw monotoniczność ciągu o wyrazach $\frac{s_n}{s_{n-1}}$, $n \geq 2$.

2.1.3. Wykazać, że ciąg o wyrazach $a_n = \frac{n}{2^n}$, $n > 1$, jest ściśle malejący i obliczyć jego granicę.

2.1.4. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem ograniczonym i takim, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$a_{n+1} \geq a_n - \frac{1}{2^n}.$$

Udowodnić zbieżność ciągu $\{a_n\}$.

Wskazówka. Rozpatrzyć ciąg o wyrazach $a_n - \frac{1}{2^{n-1}}$.

2.1.5. Wykazać zbieżność ciągu o wyrazach

(a) $a_n = -2\sqrt{n} + \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

(b) $b_n = -2\sqrt{n+1} + \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Wskazówka. Udowodnić najpierw, że nierówność

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

jest prawdziwa.

2.1.6. Wykazać, że ciąg $\{a_n\}$ określony rekurencyjnie

$$a_1 = \frac{3}{2}, \qquad a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2}, \qquad n \geq 2,$$

jest zbieżny i obliczyć jego granicę.

2.1.7. Niech c będzie ustaloną liczbą rzeczywistą większą niż 2 oraz niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym w sposób rekurencyjny

$$a_1 = c^2, \qquad a_{n+1} = (a_n - c)^2, \qquad n \geq 1.$$

Wykazać, że ciąg $\{a_n\}$ jest ściśle rosnący.

2.1.8. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem spełniającym warunek

$$0 < a_n < 1 \quad \text{i} \quad a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Udowodnić zbieżność takiego ciągu i znaleźć jego granicę.

2.1.9. Wykazać zbieżność ciągu określonego w następujący sposób:

$$a_1 = 0, \; a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \qquad n \geq 1$$

i obliczyć jego granicę.

2.1.10. Wykazać zbieżność ciągu zdefiniowanego w następujący sposób:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + a_n + a_{n-1}^3), \qquad n > 1$$

i obliczyć jego granicę.

2.1.11. Zbadać monotoniczność ciągu o wyrazach

$$a_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}, \qquad n \geq 1$$

i obliczyć jego granicę.

2.1.12. Zbadać zbieżność ciągu o wyrazach

$$a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \qquad n \geq 1.$$

2.1.13. Udowodnić zbieżność ciągu $\{a_n\}$, gdzie

(a) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$,

(b) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n}, \quad n \in \mathbb{N}$.

2.1.14. Wykazać zbieżność ciągu $\{a_n\}$, gdzie

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)2n}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2.1.15. Niech $p \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $a_1 > 0$ będą ustalone. Określmy ciąg $\{a_n\}$ następująco:

$$a_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)a_n + \frac{a}{a_n^{p-1}}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Obliczyć granicę tak zdefiniowanego ciągu.

2.1.16. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym rekurencyjnie

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}}, \qquad n \geq 1.$$

Wykazać zbieżność tego ciągu i obliczyć jego granicę.

2.1.17. Ciąg $\{a_n\}$ definiujemy jak następuje

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{2(2a_n + 1)}{a_n + 3}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Wykazać zbieżność tak określonego ciągu i obliczyć jego granicę.

2.1.18. Niech $c > 0$ będzie dowolnie ustalone. Zbadać monotoniczność ciągu określonego rekurencyjnie

$$a_1 = \frac{c}{2}, \qquad 2a_{n+1} = c + a_n^2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Przedyskutować zbieżność tego ciągu w zależności od parametru c i w przypadku zbieżności wyznaczyć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.1.19. Dla dowolnie ustalonego $a > 0$ określmy ciąg $\{a_n\}$ wzorem

$$a_{n+1} = a_n \frac{a_n^2 + 3a}{3a_n^2 + a}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dla jakich $a_1 > 0$ ciąg ten jest zbieżny? W przypadku zbieżności obliczyć granicę tego ciągu.

2.1.20. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym indukcyjnie

$$a_{n+1} = \frac{1}{4 - 3a_n}, \qquad n \geq 1.$$

Przedyskutować zbieżność tego ciągu w zależności od wyrazu a_1 i w przypadku zbieżności obliczyć jego granicę.

Politechnika Warszawska
W. 6268/2
Biblioteka
Wydziału Elektroniki

2.1.21. Niech a będzie dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą i niech wyrazy ciągu $\{a_n\}$ spełniają warunek

$$a_{n+1} = a_n^2 + (1-2a)a_n + a^2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dla jakich a_1 ciąg ten jest określony i zbieżny? W przypadku zbieżności obliczyć jego granicę.

2.1.22. Niech $c > 0$, $b > a > 0$ będą dowolnie ustalone. Ciąg $\{a_n\}$ określamy w następujący sposób:

$$a_1 = c, \qquad (a+b)a_{n+1} = a_n^2 + ab, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zbadać zbieżność tego ciągu i obliczyć jego granicę w zależności od stałych a, b, c.

2.1.23. Wykazać zbieżność ciągu $\{a_n\}$ określonego indukcyjnie

$$a_1 > 0, \qquad a_{n+1} = 6\frac{1+a_n}{7+a_n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

i obliczyć jego granicę.

2.1.24. Niech $c \geq 0$ będzie dowolnie ustalone. Określmy ciąg $\{a_n\}$ następująco:

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zbadać zbieżność tego ciągu i obliczyć jego granicę.

2.1.25. Zbadać zbieżność ciągu określonego w następujący sposób:

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

i obliczyć jego granicę.

2.1.26. Niech $k \in \mathbb{N}$ będzie dowolnie ustalone. Określmy ciąg $\{a_n\}$ następująco:

$$a_1 = \sqrt[k]{5}, \qquad a_{n+1} = \sqrt[k]{5a_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zbadać zbieżność tego ciągu i obliczyć jego granicę.

2.1.27. Zbadać zbieżność ciągu $\{a_n\}$ określonego rekurencyjnie

$$1 \leq a_1 \leq 2, \qquad a_{n+1}^2 = 3a_n - 2, \qquad n \in \mathbb{N}$$

i obliczyć jego granicę.

2.1.28. Niech $c > 1$ będzie dowolnie obrane. Określmy ciągi $\{a_n\}$ oraz $\{b_n\}$ następująco:

(a) $a_1 = \sqrt{c(c-1)}$, $\quad a_{n+1} = \sqrt{c(c-1) + a_n}$, $n \geq 1$,

(b) $b_1 = \sqrt{c}$, $\quad b_{n+1} = \sqrt{cb_n}$, $n \geq 1$.

Udowodnić, że ciągi te są zbieżne i mają wspólną granicę równą c.

2.1.29. Niech $a > 0$, $b > 0$ będą dowolnie ustalone oraz niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym następująco:

$$0 < a_1 < b, \qquad a_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + a_n^2}{a+1}}, \qquad n \geq 1.$$

Udowodnić zbieżność tak zdefiniowanego ciągu i obliczyć jego granicę.

2.1.30. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym rekurencyjnie

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{a_n}}, \qquad n \geq 1.$$

Udowodnić zbieżność tak określonego ciągu i obliczyć jego granicę.

2.1.31. Ciąg $\{a_n\}$ jest określony rekurencyjnie

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}, \qquad n \geq 2.$$

Wykazać, że ciąg ten jest ściśle rosnący i ograniczony, oraz obliczyć jego granicę.

2.1.32. Ciąg $\{a_n\}$ jest określony indukcyjnie

$$a_1 = 9, \qquad a_2 = 6, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}, \qquad n \geq 2.$$

Wykazać, że ciąg ten jest ściśle malejący i ograniczony, oraz obliczyć jego granicę.

2.1.33. Określmy ciągi $\{a_n\}$ oraz $\{b_n\}$ następująco:

$$0 < b_1 < a_1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Wykazać, że oba ciągi są zbieżne do tej samej granicy. (Granicę tę nazywamy **średnią arytmetyczno-geometryczną liczb** a_1 i b_1).

2.1.34. Określmy ciągi $\{a_n\}$ oraz $\{b_n\}$ w następujący sposób:

$$0 < b_1 < a_1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Wykazać, że oba te ciągi są monotoniczne i mają wspólną granicę.

2.1.35. Określmy ciągi $\{a_n\}$ oraz $\{b_n\}$ rekurencyjnie

$$0 < b_1 < a_1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Udowodnić monotoniczność tych ciągów i wykazać, że mają one wspólną granicę równą średniej geometrycznej liczb a_1 i b_1.

2.1.36. Wykazać zbieżność ciągu $\{a_n\}$ o wyrazach

$$a_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^n}{n}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

i obliczyć jego granicę.

2.1.37. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem ograniczonym takim, że

$$a_{n+2} \le \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n \qquad \text{dla} \qquad n \ge 1.$$

Udowodnić zbieżność ciągu $\{a_n\}$.

2.1.38. Niech $\{a_n\}$ oraz $\{b_n\}$ będą ciągami określonymi w następujący sposób:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Korzystając z zależności między średnią arytmetyczną, średnią geometryczną i średnią harmoniczną, wykazać, że

(a) ciąg $\{a_n\}$ jest ściśle rosnący, **(b)** ciąg $\{b_n\}$ jest ściśle malejący,

(c) $a_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Wykazać, że ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne do tej samej granicy. (Granicę tę oznaczamy symbolem e).

2.1.39.

(a) Wykazać, że dla $x > 0$ ciąg o wyrazach

$$a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \qquad n \ge 1,$$

jest ściśle rosnący i ograniczony.

(b) Wykazać, że ciąg o wyrazach

$$a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \qquad n \ge 1, \qquad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

jest ograniczony, a począwszy od $n > -x$ ściśle rosnący. (Jego granicę oznaczamy symbolem e^x).

2.1.40. Wykazać, że dla $x > 0$, $l \in \mathbb{N}$ i $l > x$ ciąg o wyrazach

$$b_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{l+n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

jest ściśle malejący.

2.1.41. Niech $\ln a = \log_{\mathrm{e}} a$, $a > 0$. Wykazać monotoniczność ciągów $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ określonych w następujący sposób:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln n, \qquad n \in \mathbb{N}\backslash\{1\},$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

oraz udowodnić, że są one zbieżne do tej samej granicy. (Granicę tę nazywamy **stałą Eulera** i oznaczamy symbolem γ).

Wskazówka. Skorzystać z następującej nierówności (będącej wnioskiem z zadania 2.1.38): $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

2.1.42. Wykazać, że dla dowolnie ustalonej liczby rzeczywistej dodatniej x, ciąg o wyrazach

$$a_n = x^{\frac{1}{2^n}}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

jest monotoniczny (ściśle rosnący dla $x < 1$, ściśle malejący dla $x > 1$) i ograniczony. Następnie przyjmując

$$c_n = 2^n(a_n - 1), \qquad d_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{a_n}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

udowodnić, że dla $x > 1$ ciąg $\{c_n\}$ jest ściśle malejący, a ciąg $\{d_n\}$ ściśle rosnący i oba te ciągi mają tę samą granicę.

2.2 GRANICA CIĄGU WŁASNOŚCI CIĄGÓW ZBIEŻNYCH

2.2.1. Obliczyć

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}$, **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n + \sin n^2}{n + \cos n}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (-2n)}{\sqrt{n^2+1}}$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \cdot \ldots \cdot (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^{\sqrt{n}}}$, **(f)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$,

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$,

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}\right)$,

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^3+1} + \frac{2n}{n^3+2} + \ldots + \frac{nn}{n^3+n}\right)$.

2.2.2. Niech s, p będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{(1+p)^n} = 0.$$

2.2.3. Niech α będzie dowolnie ustaloną liczbą z przedziału $(0,1)$. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} ((n+1)^\alpha - n^\alpha)$.

2.2.4. Dla dowolnie obranej liczby wymiernej α obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n!\alpha\pi)$.

2.2.5. Pokazać, że nie istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$.

2.2.6. Niech α będzie dowolnie ustaloną liczbą niewymierną. Pokazać, że nie istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\alpha\pi$.

2.2.7. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\left(a+\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right),\qquad \text{gdzie } a\in\mathbb{R}.$$

2.2.8. Załóżmy, że $\{a_n\}$ jest ciągiem o wyrazach różnych od 1 zbieżnym do 1. Ustalmy dowolnie liczbę naturalną k. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+a_n^2+\ldots+a_n^k-k}{a_n-1}.$$

2.2.9. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)(n+2)}\right).$$

2.2.10. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}.$$

2.2.11. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{n^3}.$$

2.2.12. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{2\cdot3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right).$$

2.2.13. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}.$$

2.2.14. Niech x będzie dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą różną od -1 i 1. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}.$$

2.2.15. Zbadać, dla jakich $x\in\mathbb{R}$ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k})$$

i obliczyć ją dla wszystkich tych wartości x.

2.2.16. Zbadać, dla jakich $x\in\mathbb{R}$ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{2}{x^{2^k}+x^{-2^k}}\right)$$

i obliczyć ją.

2.2.17. Zbadać, dla jakich $x\in\mathbb{R}$ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+x^{3^k}+x^{2\cdot3^k})$$

i obliczyć ją.

2.2.18. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot1!+2\cdot2!+\ldots+n\cdot n!}{(n+1)!}.$$

2.2.19. Zbadać, dla jakich $x\in\mathbb{R}$ prawdziwa jest równość

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1995}}{n^x-(n-1)^x}=\frac{1}{1996}.$$

2.2.20. Niech a, b będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a\geq b>0$ i niech ciąg $\{a_n\}$ będzie określony rekurencyjnie w następujący sposób:

$$a_1=a+b,\qquad a_n=a_1-\frac{ab}{a_{n-1}},\qquad n\geq2.$$

Znaleźć i udowodnić indukcyjnie wzór na n-ty wyraz ciągu, a następnie obliczyć $\lim_{n\to\infty}a_n$.

2.2.21. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym rekurencyjnie w następujący sposób:

$$a_1=0,\qquad a_2=1,\qquad a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}=2,\qquad n\geq2.$$

Znaleźć i udowodnić indukcyjnie wzór na n-ty wyraz ciągu, a następnie obliczyć $\lim_{n\to\infty}a_n$.

2.2.22. Niech a, b będą dowolnie ustalonymi liczbami dodatnimi i niech ciąg $\{a_n\}$ będzie określony rekurencyjnie w następujący sposób:

$$a_1=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},$$
$$a_n=\frac{aa_{n-1}}{\sqrt{a^2+a_{n-1}^2}},\qquad n\geq2.$$

Znaleźć i udowodnić indukcyjnie wzór na n-ty wyraz ciągu, a następnie obliczyć $\lim_{n\to\infty}a_n$.

2.2.23. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym rekurencyjnie w następujący sposób:

$$a_1=0,\qquad a_n=\frac{a_{n-1}+3}{4},\qquad n\geq2.$$

Znaleźć i udowodnić indukcyjnie wzór na n-ty wyraz ciągu, a następnie obliczyć $\lim_{n\to\infty}a_n$.

2.2.24. Zbadać, dla jakich a, $b\in\mathbb{R}$ zbieżny jest ciąg określony następująco:

$$a_1=a,\qquad a_n=1+ba_{n-1},\qquad n\geq2$$

i obliczyć jego granicę.

2.2.25. Ciąg Fibonacciego $\{a_n\}$ określamy następująco:

$$a_1=a_2=1,\qquad a_{n+2}=a_n+a_{n+1},\qquad n\geq1.$$

Wykazać, że $a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$, gdzie α, β są pierwiastkami równania $x^2=x+1$. Obliczyć $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

2.2.26. Ciągi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ określamy w następujący sposób:

$$a_1 = a, \qquad b_1 = b,$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_n}{2}.$$

Pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

2.2.27. Załóżmy, że $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a + aa + \ldots + \overbrace{aa\ldots a}^{n \text{ cyfr}}}{10^n}.$$

2.2.28. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$.

2.2.29. Niech $\{a_n\}$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do zera. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n$.

2.2.30. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_k$, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1 a_1^{n+1} + p_2 a_2^{n+1} + \ldots + p_k a_k^{n+1}}{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + \ldots + p_k a_k^n}.$$

2.2.31. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$. Udowodnić, że jeśli

(a) $q < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, **(b)** $q > 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

2.2.32. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$. Udowodnić, że jeśli

(a) $q < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, **(b)** $q > 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

2.2.33. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} n^k x^n$, gdzie $0 < x < 1$, $k \in \mathbb{R}$.

2.2.34. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!} x^n, \qquad \text{gdzie } m \in \mathbb{N} \text{ i } |x| < 1.$$

2.2.35. Załóżmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ i ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony. Udowodnić, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

2.2.36. Załóżmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\}.$$

2.2.37. Załóżmy, że $a_n \geq -1$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{1 + a_n}, \qquad \text{gdzie} \qquad p \in \mathbb{N}.$$

2.2.38. Załóżmy, że $\{a_n\}$ jest ciągiem o wyrazach dodatnich zbieżnym do zera. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[p]{1 + a_n} - 1}{a_n}, \qquad p \in \mathbb{N}.$$

2.2.39. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_p$ będą dowolnie ustalonymi liczbami dodatnimi. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[p]{(n + a_1)(n + a_2)\cdot\ldots\cdot(n + a_p)} - n \right).$$

2.2.40. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \right).$$

2.2.41. Niech $p \in \mathbb{N}$ i niech $a_1, a_2, \ldots, a_p$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_p^n}{p}}.$$

2.2.42. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\sin^2 \frac{n^{1996}}{n+1} + \cos^2 \frac{n^{1996}}{n+1}}.$$

2.2.43. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} (n + 1 + n\cos n)^{\frac{1}{2n + n\sin n}}.$$

2.2.44. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right).$$

2.2.45. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{k^2}{n^3}} - 1 \right).$$

2.2.46. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \sqrt[n]{a_k} \right)^p, \qquad \text{gdzie } a_k > 0 \text{ dla } k = 1, 2, \ldots, p.$$

2.2.47. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha + \frac{1}{n} \right)^k, \qquad \text{gdzie} \qquad 0 < \alpha < 1.$$

2.2.48. Niech $k \geq 1$ będzie dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} (2\sqrt[n]{k} - 1)^n = k^2.$$

2.2.49. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2\sqrt[n]{n} - 1)^n}{n^2} = 1.$$

2.2.50. Korzystając z warunku Cauchy'ego, zbadać zbieżność następujących ciągów:

(a) $a_n = \frac{\operatorname{arctg} 1}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2^2} + \ldots + \frac{\operatorname{arctg} n}{2^n}$,

(b) $a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{2^2}{4^2} + \ldots + \frac{n^2}{4^n}$,

(c) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$,

(d) $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}$,

(e) $a_n = \alpha_1 q^1 + \alpha_2 q^2 + \ldots + \alpha_n q^n$, gdzie $|q| < 1$, $|\alpha_k| \leq M$ dla $k \in \mathbb{N}$,

(f) $a_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^2}$.

2.2.51. Załóżmy, że $\{a_n\}$ jest takim ciągiem, że istnieje taka $\lambda \in (0,1)$, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$|a_{n+1} - a_{n+2}| < \lambda |a_n - a_{n+1}|.$$

Udowodnić, że ciąg ten jest zbieżny.

2.2.52. Niech $\{a_n\}$ będzie takim ciągiem liczb naturalnych, że ciąg o wyrazach

$$S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$$

jest zbieżny. Udowodnić, że zbieżny jest również ciąg $\{\ln \sigma_n\}$, gdzie

$$\sigma_n = \left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{a_n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2.2.53. Pokazać, że ciąg reduktów $\{R_n\}$ liczby niewymiernej x określony w zadaniu 1.1.20 spełnia warunek Cauchy'ego.

2.2.54. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem arytmetycznym o wyrazach różnych od zera. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n a_{n+1}}\right).$$

2.2.55. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem arytmetycznym o wyrazach dodatnich. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\right).$$

2.2.56. Obliczyć

(a) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e} - 1)$, (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \ldots + e^{\frac{n}{n}}}{n}$.

2.2.57. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym następująco:

$$a_1 = a, \qquad a_2 = b, \qquad a_{n+1} = pa_{n-1} + (1-p)a_n, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Zbadać jego zbieżność w zależności od stałych a, b, p.

2.2.58. Niech $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ będą ciągami określonymi w następujący sposób:

$$a_1 = 3, \qquad b_1 = 2, \qquad a_{n+1} = a_n + 2b_n, \qquad b_{n+1} = a_n + b_n.$$

Niech ponadto

$$c_n = \frac{a_n}{b_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Pokazać, że $|c_{n+1} - \sqrt{2}| < \frac{1}{2}|c_n - \sqrt{2}|$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Obliczyć $\lim_{n\to\infty} c_n$.

2.3. PRZEKSZTAŁCENIE TOEPLITZA, TWIERDZENIE STOLZA I ICH ZASTOSOWANIA

2.3.1. Udowodnić następujące twierdzenie zwane **twierdzeniem Toeplitza o regularnym przekształceniu ciągu**:

Niech $\{c_{n,k} : 1 \leq k \leq n,\ n \geq 1\}$ będzie układem liczb rzeczywistych spełniających następujące warunki:

(i) $c_{n,k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *dla każdego k naturalnego,*

(ii) $\sum_{k=1}^{n} c_{n,k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$,

(iii) *istnieje takie $C > 0$, że dla wszystkich n naturalnych*

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{n,k}| \leq C.$$

Wtedy dla dowolnego zbieżnego ciągu $\{a_n\}$, ciąg $\{b_n\}$ określony wzorem $b_n = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k}a_k$, $n \geq 1$, jest zbieżny oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

2.3.2. Wykazać, że jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a.$$

2.3.3.

(a) Wykazać, że w twierdzeniu Toeplitza (zadanie 2.3.1) można opuścić założenie (iii), jeśli wszystkie liczby $c_{n,k}$ są dodatnie.

(b) Niech ciąg $\{b_n\}$ będzie określony tak, jak w twierdzeniu Toeplitza, gdzie $c_{n,k} > 0$, $1 \leq k \leq n$, $n \geq 1$. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

2.3.4. Wykazać, że jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = +\infty.$$

2.3.5. Udowodnić, że jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 1\cdot a_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

2.3.6. Udowodnić, że jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem o wyrazach dodatnich zbieżnym do a, to $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} = a$.

2.3.7. Udowodnić, że jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem o wyrazach dodatnich oraz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = a,$$

to

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = a.$$

2.3.8. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1}{n} = ab.$$

2.3.9. Niech $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ będą takimi ciągami, że

(i) $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = +\infty$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g$.

Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = g.$$

2.3.10. Niech $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ będą takimi ciągami, że

(i) $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = +\infty$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = a.$$

2.3.11. Korzystając z poprzedniego zadania, udowodnić następujące twierdzenie zwane **twierdzeniem Stolza**:

Niech $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ będą takimi ciągami, że

(i) $y_n < y_{n+1}$ *dla* $n \geq 1$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = g$.

Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = g.$$

2.3.12. Obliczyć

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^{n+1}}\left(a + \frac{a^2}{2} + \ldots + \frac{a^n}{n}\right)$, $a > 1$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}}\left(k! + \frac{(k+1)!}{1!} + \ldots + \frac{(k+n)!}{n!}\right)$, $k \in \mathbb{N}$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$,

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + 1\cdot a + 2\cdot a^2 + \ldots + n\cdot a^n}{n\cdot a^{n+1}}$, $a > 1$,

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^k}(1^k + 2^k + \ldots + n^k) - \frac{n}{k+1}\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

2.3.13. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} + \frac{a_3}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{n}}\right).$$

2.3.14. Wykazać, że jeśli $\{a_n\}$ jest takim ciągiem, że

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a,$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = a.$$

2.3.15. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1} + \frac{a_{n-1}}{2} + \ldots + \frac{a_1}{2^{n-1}}\right).$$

2.3.16. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Obliczyć

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1\cdot 2} + \frac{a_{n-1}}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{a_1}{n\cdot(n+1)}\right)$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1} - \frac{a_{n-1}}{2^1} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{a_1}{2^{n-1}}\right)$.

2.3.17. Niech k będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną większą niż 1. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{nk}{n}}.$$

2.3.18. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem arytmetycznym o wyrazach dodatnich. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}}}{a_1 + \ldots + a_n}.$$

2.3.19. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem takim, że ciąg o wyrazach $b_n = 2a_n + a_{n-1}$, $n \geq 2$, jest zbieżny i jego granicą jest b. Udowodnić, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny i znaleźć jego granicę.

2.3.20. Niech $\{a_n\}$ będzie takim ciągiem, że dla pewnego rzeczywistego x spełniona jest równość $\lim\limits_{n\to\infty} n^x a_n = a$. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} n^x(a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}} = ae^x.$$

2.3.21. Obliczyć

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}}{\ln n}$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}}{\ln n}$.

2.3.22. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem zbieżnym do a. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\left(\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n}\right) = a.$$

2.3.23. Obliczyć

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n e^{-n}}\right)^{\frac{1}{n}}$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n!)^3}{n^{3n}e^{-n}}\right)^{\frac{1}{n}}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n!)^2}{n^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}}$, (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^{3n}}{(n!)^3}\right)^{\frac{1}{n}}$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[k]{n}}{\sqrt[n]{n!}}$, $k\in\mathbb{N}$.

2.3.24. Niech $\{A_n\}$ będzie ciągiem średnich arytmetycznych ciągu $\{a_n\}$. Wykazać, że jeśli

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n} = A,$$

to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}}{\ln n} = A.$$

2.3.25. Udowodnić **twierdzenie odwrotne do twierdzenia Toeplitza** (zadanie 2.3.1):

Niech $\{c_{n,k} : 1\le k\le n,\ n\ge 1\}$ *będzie układem liczb rzeczywistych. Jeśli dla każdego zbieżnego ciągu* $\{a_n\}$, *ciąg* $\{b_n\}$ *określony wzorem*

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k}a_k, \qquad n\ge 1,$$

jest zbieżny oraz

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

to liczby $c_{n,k}$ *spełniają następujące warunki:*

(i) $c_{n,k}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *dla każdego* k *naturalnego,*

(ii) $\sum_{k=1}^{n} c_{n,k}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$,

(iii) *istnieje takie* $C>0$, *że dla wszystkich* n *naturalnych*

$$\sum_{k=1}^{n}|c_{n,k}|\le C.$$

2.4 PUNKTY SKUPIENIA GRANICA GÓRNA I DOLNA CIĄGU

Niech $\{a_n\}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych.

DEFINICJA 1. *Liczbę rzeczywistą* c *nazywamy punktem skupienia ciągu* $\{a_n\}$, *jeśli istnieje podciąg* $\{a_{n_k}\}$ *tego ciągu zbieżny do* c.

Niech teraz S oznacza zbiór wszystkich punktów skupienia ciągu $\{a_n\}$. *Granicę górną* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ oraz *granicę dolną* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ określamy w następujący sposób:

DEFINICJA 2.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \begin{cases} +\infty, & gdy\ \{a_n\}\ jest\ nieograniczony\ z\ góry,\\ -\infty, & gdy\ \{a_n\}\ jest\ ograniczony\ z\ góry\ i\ zbiór\ S\ jest\ pusty,\\ \sup S, & gdy\ \{a_n\}\ jest\ ograniczony\ z\ góry\ i\ zbiór\ S\ jest\ niepusty,\end{cases}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \begin{cases} -\infty, & gdy\ \{a_n\}\ jest\ nieograniczony\ z\ dołu,\\ +\infty, & gdy\ \{a_n\}\ jest\ ograniczony\ z\ dołu\ i\ zbiór\ S\ jest\ pusty,\\ \inf S, & gdy\ \{a_n\}\ jest\ ograniczony\ z\ dołu\ i\ zbiór\ S\ jest\ niepusty.\end{cases}$$

2.4.1. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem, którego każdy z podciągów $\{a_{2k}\}$, $\{a_{2k+1}\}$, $\{a_{3k}\}$ jest zbieżny.

(a) Pokazać, że ciąg $\{a_n\}$ jest również zbieżny.

(b) Czy ze zbieżności jakichkolwiek dwóch z tych podciągów wynika zbieżność ciągu $\{a_n\}$?

2.4.2. Czy ze zbieżności wszystkich podciągów ciągu $\{a_n\}$ postaci $\{a_{s\cdot n}\}$, $s>1$, wynika zbieżność ciągu $\{a_n\}$?

2.4.3. Niech $\{a_{p_n}\}$, $\{a_{q_n}\},\dots,\{a_{s_n}\}$ będą takimi podciągami ciągu $\{a_n\}$, że ciągi $\{p_n\}$, $\{q_n\},\dots,\{s_n\}$ są parami rozłączne i w sumie dają ciąg $\{n\}$. Udowodnić, że jeśli S, S_p, $S_q,\dots,S_s$ są zbiorami punktów skupienia odpowiednio ciągów $\{a_n\}$, $\{a_{p_n}\}$, $\{a_{q_n}\},\dots,\{a_{s_n}\}$, to

$$S = S_p\cup S_q\cup\dots\cup S_s.$$

Wywnioskować stąd, że jeśli wszystkie podciągi $\{a_{p_n}\}$, $\{a_{q_n}\},\dots,\{a_{s_n}\}$ są zbieżne do a, to również ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do a.

2.4.4. Czy powyższe twierdzenie (zadanie 2.4.3) jest prawdziwe w przypadku nieskończonej liczby podciągów?

2.4.5. Udowodnić, że jeśli każdy podciąg $\{a_{n_k}\}$ ciągu $\{a_n\}$ zawiera podciąg $\{a_{n_{k_l}}\}$ zbieżny do a, to ciąg $\{a_n\}$ jest również zbieżny do a.

2.4.6. Znaleźć zbiór punktów skupienia ciągu $\{a_n\}$ o wyrazach

(a) $a_n = \sqrt[n]{4^{(-1)^n}+2}$,

(b) $a_n = \frac{1}{2}\left(n-2-3\left[\frac{n-1}{3}\right]\right)\left(n-3-3\left[\frac{n-1}{3}\right]\right)$,

(c) $a_n = \frac{(1-(-1)^n)\,2^n+1}{2^n+3}$, (d) $a_n = \frac{(1+\cos n\pi)\ln 3n+\ln n}{\ln 2n}$,

(e) $a_n = \left(\cos\frac{n\pi}{3}\right)^n$, (f) $a_n = \frac{2n^2}{7}-\left[\frac{2n^2}{7}\right]$.

2.4.7. Znaleźć zbiór punktów skupienia ciągu $\{a_n\}$ o wyrazach

(a) $a_n = n\alpha-[n\alpha]$, $\alpha\in\mathbb{Q}$, (b) $a_n = n\alpha-[n\alpha]$, $\alpha\notin\mathbb{Q}$,

(c) $a_n = \sin\pi n\alpha$, $\alpha\in\mathbb{Q}$, (d) $a_n = \sin\pi n\alpha$, $\alpha\notin\mathbb{Q}$.

2.4.8. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem powstałym z elementów zbioru liczb postaci $\{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ ułożonych w dowolnej kolejności. Pokazać, że każda liczba rzeczywista jest punktem skupienia tego ciągu.

2.4.9. Udowodnić, że jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem ograniczonym, to zbiór jego punktów skupienia jest zbiorem domkniętym i ograniczonym.

2.4.10. Znaleźć granicę górną i dolną ciągów o wyrazach

(a) $a_n = \frac{2n^2}{7} - \left[\frac{2n^2}{7}\right]$,
(b) $a_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$,
(c) $a_n = (-1)^n n$,
(d) $a_n = n^{(-1)^n n}$,
(e) $a_n = 1 + n\sin\frac{n\pi}{2}$,
(f) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4}$,
(g) $a_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$,
(h) $a_n = \left(2\cos\frac{2n\pi}{3}\right)^n$,
(i) $a_n = \frac{\ln n - (1+\cos n\pi)n}{\ln 2n}$.

2.4.11. Znaleźć granicę górną i dolną ciągów o wyrazach

(a) $a_n = n\alpha - [n\alpha]$, $\alpha \in \mathbb{Q}$,
(b) $a_n = n\alpha - [n\alpha]$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$,
(c) $a_n = \sin \pi n\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Q}$,
(d) $a_n = \sin \pi n\alpha$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

2.4.12. Niech $\{a_n\}$ będzie dowolnym ciągiem. Udowodnić, że

(a) jeśli istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że dla każdego n większego niż k spełniona jest nierówność $a_n \leq A$, to $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq A$,

(b) jeśli dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje takie n_k większe niż k, że $a_{n_k} \leq A$, to $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq A$,

(c) jeśli istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że dla każdego n większego niż k spełniona jest nierówność $a_n \geq a$, to $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \geq a$,

(d) jeśli dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje takie n_k większe niż k, że $a_{n_k} \geq a$, to $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \geq a$.

2.4.13. Załóżmy, że ciąg $\{a_n\}$ ma skończoną granicę górną i dolną. Udowodnić, że

(a) $L = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:
(i) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $a_n < L + \varepsilon$ dla wszystkich $n > k$,
(ii) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ oraz dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje takie $n' > k$, że $L - \varepsilon < a_{n'}$.

(b) $l = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:
(i) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $l - \varepsilon < a_n$ dla wszystkich $n > k$,

(ii) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ oraz dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje takie $n' > k$, że $a_{n'} < l + \varepsilon$.

Podać odpowiednie warunki w przypadku nieskończonych granic górnej i dolnej.

2.4.14. Załóżmy, że nierówność $a_n \leq b_n$ jest spełniona począwszy od pewnego wskaźnika n_0. Udowodnić, że

(a) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$,
(b) $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

2.4.15. Udowodnić, że (wyłączając niejednoznaczności typu $+\infty - \infty$, $-\infty + \infty$) prawdziwe są następujące nierówności:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$
$$\leq \overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n.$$

Podać przykłady wskazujące na to, że powyższe nierówności mogą być ostre.

2.4.16. Czy nierówności

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n + b_n),$$
$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

można uogólnić na przypadek nieskończonej ilości ciągów?

2.4.17. Niech $\{a_n\}$ oraz $\{b_n\}$ będą ciągami o wyrazach nieujemnych. Udowodnić, że (wyłączając niejednoznaczności typu $0\cdot(+\infty)$, $(+\infty)\cdot 0$) prawdziwe są następujące nierówności:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$
$$\leq \overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n.$$

Podać przykłady wskazujące na to, że powyższe nierówności mogą być ostre.

2.4.18. Wykazać, że warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności ciągu $\{a_n\}$ jest istnienie skończonych granic górnej i dolnej oraz równość

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n.$$

Udowodnić, że twierdzenie powyższe jest prawdziwe również w przypadku granic nieskończonych.

2.4.19. Pokazać, że jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, to

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n,$$
$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n.$$

2.4.20. Pokazać, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, i począwszy od pewnego wskaźnika spełniona jest nierówność $b_n \geq 0$, to

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n \cdot b_n) = a \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n \cdot b_n) = a \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n.$$

2.4.21. Udowodnić, że

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(-a_n) = -\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(-a_n) = -\,\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

2.4.22. Udowodnić, że dla dowolnego ciągu $\{a_n\}$ o wyrazach dodatnich prawdziwe są równości

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n}.$$

(Przyjmujemy, że $\frac{1}{+\infty} = 0$, $\frac{1}{0^+} = +\infty$).

2.4.23. Udowodnić, że jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem o wyrazach dodatnich takim, że

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{a_n} = 1,$$

to $\{a_n\}$ jest zbieżny.

2.4.24. Wykazać, że jeśli $\{a_n\}$ jest takim ciągiem, że dla dowolnego ciągu $\{b_n\}$ spełniona jest równość

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n + b_n) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n$$

lub

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n + b_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n,$$

to $\{a_n\}$ jest zbieżny.

2.4.25. Wykazać, że jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem o wyrazach dodatnich takim, że dla dowolnego ciągu $\{b_n\}$ o wyrazach dodatnich spełniona jest równość

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n \cdot b_n) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n$$

lub

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n \cdot b_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n,$$

to $\{a_n\}$ jest zbieżny.

2.4.26. Udowodnić, że dla dowolnego ciągu $\{a_n\}$ o wyrazach dodatnich spełnione są nierówności

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

2.4.27. Niech $\{a_n\}$ będzie dowolnym ciągiem i niech $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

2.4.28. Wykazać, że

(a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(\max\{a_n, b_n\}) = \max\left\{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n\right\}$,

(b) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(\min\{a_n, b_n\}) = \min\left\{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n, \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n\right\}$.

Czy prawdziwe są również równości

(c) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(\min\{a_n, b_n\}) = \min\left\{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n\right\}$,

(d) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(\max\{a_n, b_n\}) = \max\left\{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n, \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n\right\}$?

2.4.29. Udowodnić, że każdy ciąg liczb rzeczywistych zawiera podciąg monotoniczny.

2.4.30. Korzystając z poprzedniego zadania, udowodnić następujące **twierdzenie Bolzano–Weierstrassa**:
Każdy ograniczony ciąg liczb rzeczywistych zawiera podciąg zbieżny.

2.4.31. Udowodnić, że dla dowolnego ciągu $\{a_n\}$ o wyrazach dodatnich spełniona jest nierówność

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{a_n} \geq 4.$$

Pokazać, że w powyższej nierówności 4 jest najlepszym z możliwych ograniczeń.

2.5 ZADANIA RÓŻNE

2.5.1. Pokazać, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, to

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \mathrm{e}.$$

2.5.2. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

2.5.3. Wykazać, że dla $x > 0$ prawdziwe są nierówności

$$\frac{x}{x+2} < \ln(x+1) < x.$$

Pokazać również (korzystając z rachunku różniczkowego), że lewą nierówność można wzmocnić, tzn. udowodnić, że

$$\frac{x}{x+1} < \frac{2x}{x+2} < \ln(x+1), \qquad x > 0.$$

2.5.4. Udowodnić, że

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$, $a > 0$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{n} - 1) = +\infty$.

2.5.5. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem liczb dodatnich różnych od 1 i takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Udowodnić następującą równość

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{a_n - 1} = 1.$$

2.5.6. Niech

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e} \qquad \text{oraz} \qquad 0 < \mathrm{e} - a_n < \frac{1}{nn!}.$$

2.5.7. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) = \mathrm{e}^x.$$

2.5.8. Udowodnić, że

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}\right) = \ln 2$.

2.5.9. Obliczyć granicę ciągu o wyrazach

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{n}{n^2}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2.5.10. Dany jest ciąg określony rekurencyjnie

$$a_1 = 1, \qquad a_n = n(a_{n-1} + 1) \qquad \text{dla} \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right).$$

2.5.11. Wykazać, że ciąg o wyrazach

$$a_n = n!\mathrm{e} - [n!\mathrm{e}], \qquad n \in \mathbb{N},$$

jest zbieżny do zera.

2.5.12. Niech a, b będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{ab}.$$

2.5.13. Niech $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ będą ciągami liczb dodatnich takimi, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n^n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n^n = b \qquad \text{oraz} \qquad a, b > 0.$$

Niech p, $q > 0$ będą liczbami spełniającymi warunek $p + q = 1$. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} (pa_n + qb_n)^n = a^p b^q.$$

2.5.14. Niech a, b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Ciąg $\{a_n\}$ określamy rekurencyjnie w następujący sposób:

$$a_1 = a, \qquad a_2 = b, \qquad a_{n+1} = \frac{n-1}{n} a_n + \frac{1}{n} a_{n-1}, \qquad n \geq 2.$$

Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.5.15. Dany jest ciąg określony rekurencyjnie

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1}), \qquad n \geq 2.$$

Wyznaczyć wyraz ogólny tego ciągu.

2.5.16. Niech a, b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Ciąg $\{a_n\}$ określamy rekurencyjnie w następujący sposób

$$a_1 = a, \qquad a_2 = b, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2n} a_{n-1} + \frac{2n-1}{2n} a_n, \qquad n \geq 2.$$

Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.5.17. Niech

$$a_n = 3 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+1)!}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$.

(b) Udowodnić, że $0 < a_n - \mathrm{e} < \frac{1}{(n+1)(n+1)!}$.

2.5.18. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin(2\pi n!\mathrm{e})$.

2.5.19. Niech $\{a_n\}$ będzie takim ciągiem, że $a_n < n$, $n = 1, 2, \ldots$, oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Zbadać zbieżność ciągu o wyrazach

$$\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

2.5.20. Niech $\{b_n\}$ będzie takim ciągiem, że $b_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Zbadać zbieżność ciągu o wyrazach

$$\left(1 + \frac{b_n}{n}\right)^n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

2.5.21. Dany jest ciąg określony w następujący sposób:

$$0 < a_1 < 1, \qquad a_{n+1} = a_n(1 - a_n), \qquad n \geq 1.$$

Wykazać, że

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 1$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(1 - na_n)}{\ln n} = 1$.

2.5.22. Dany jest ciąg określony rekurencyjnie

$$0 < a_1 < \pi, \qquad a_{n+1} = \sin a_n, \qquad n \geq 1.$$

Pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}a_n = \sqrt{3}$.

2.5.23. Niech $a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}, \qquad n \geq 1.$

Pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2\ln n}} = 1$.

2.5.24. Niech ciąg $\{a_n\}$ będzie określony następująco:

$$a_1 > 0, \qquad a_{n+1} = \operatorname{arctg} a_n, \qquad n \geq 1.$$

Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.5.25. Pokazać, że ciąg określony rekurencyjnie

$$0 < a_1 < 1, \qquad a_{n+1} = \cos a_n, \qquad n \geq 1,$$

jest zbieżny do jedynego rozwiązania równania $x = \cos x$.

2.5.26. Niech

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = 1 - \sin(a_n - 1), \qquad n \geq 1.$$

Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

2.5.27. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem, którego wyrazami są kolejne rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = x$, $x > 0$. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n)$.

2.5.28. Załóżmy, że $|a| \leq \frac{\pi}{2}$. Rozpatrzmy ciąg określony rekurencyjnie

$$a_{n+1} = a \sin a_n, \qquad n \geq 1,$$

przy czym a_1 jest dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą. Zbadać jego zbieżność w zależności od parametru a.

2.5.29. Niech a_1 będzie dowolnie ustaloną liczbą dodatnią i niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym wzorem

$$a_{n+1} = \ln(1 + a_n), \qquad n \geq 1.$$

Udowodnić, że

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 2$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(na_n - 2)}{\ln n} = \frac{2}{3}$.

2.5.30. Ciąg $\{a_n\}$ określamy następująco:

$$a_1 = 0 \qquad \text{oraz} \qquad a_{n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{a_n}, \qquad n \geq 1.$$

Zbadać zbieżność tego ciągu i obliczyć jego granicę.

2.5.31. Załóżmy, że

$$a_1 > 0 \qquad \text{oraz} \qquad a_{n+1} = 2^{1-a_n}, \qquad n \geq 1.$$

Zbadać zbieżność tak określonego ciągu $\{a_n\}$ i obliczyć jego granicę.

2.5.32. Znaleźć granicę ciągu określonego rekurencyjnie w następujący sposób:

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = 2^{\frac{a_n}{2}}, \qquad n \geq 1.$$

2.5.33. Udowodnić, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a_{n-2}) = 0$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n} = 0.$$

2.5.34. Wykazać, że jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem o wyrazach dodatnich oraz istnieje skończona lub nieskończona granica $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$, to istnieje również $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n}$.

2.5.35. Niech a_1, b_1 będą dowolnie ustalonymi liczbami z przedziału $(0, 1)$. Ciągi $\{a_n\}$ oraz $\{b_n\}$ określamy w następujący sposób:

$$a_{n+1} = a_1(1 - a_n - b_n) + a_n, \qquad b_{n+1} = b_1(1 - a_n - b_n) + b_n, \qquad n \geq 1.$$

Udowodnić zbieżność tych ciągów i obliczyć ich granice.

2.5.36. Niech a, a_1 będą dowolnie ustalonymi liczbami dodatnimi i niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym wzorem

$$a_{n+1} = a_n(2 - aa_n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Zbadać zbieżność tego ciągu w zależności od parametrów a i a_1.

2.5.37. Wykazać, że jeśli a_1, a_2 są dowolnymi liczbami dodatnimi oraz

$$a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

to $\{a_n\}$ jest ciągiem zbieżnym. Obliczyć jego granicę.

2.5.38. Załóżmy, że $f : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+$ jest funkcją rosnącą względem każdej ze zmiennych. Załóżmy ponadto, że istnieje takie $a > 0$, że

$$f(x, x, \ldots, x) > x \qquad \text{dla} \qquad 0 < x < a,$$
$$f(x, x, \ldots, x) < x \qquad \text{dla} \qquad x > a.$$

Niech $a_1, a_2, \ldots, a_k$ będą dowolnymi liczbami dodatnimi i niech

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}) \qquad \text{dla} \qquad n > k.$$

Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2.5.39. Zbadać zbieżność ciągu $\{a_n\}$ określonego rekurencyjnie:

$$a_1,\ a_2 \text{ są dowolnymi liczbami dodatnimi,}$$
$$a_{n+1} = a_n e^{a_n - a_{n-1}} \qquad \text{dla} \qquad n > 1.$$

2.5.40. Załóżmy, że $a > 1$ i $x > 0$. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym następująco: $a_1 = a^x$, $a_{n+1} = a^{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Zbadać jego zbieżność.

2.5.41. Udowodnić, że

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ pierwiastków}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}},$$

i wykorzystując tę zależność, obliczyć granicę ciągu określonego rekurencyjnie

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, \qquad n \geq 1.$$

2.5.42. Niech $\{\varepsilon_n\}$ będzie ciągiem, którego wyrazami są liczby -1, 0 i 1. Udowodnić, że równość

$$\varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\ldots+\varepsilon_n\sqrt{2}}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdot\ldots\cdot\varepsilon_k}{2^{k-1}}\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

jest prawdziwa, oraz wykazać, że ciąg o wyrazach

$$a_n = \varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\ldots+\varepsilon_n\sqrt{2}}}$$

jest zbieżny.

2.5.43. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 2^2}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}\right).$$

2.5.44. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+n}).$$

2.5.45. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym rekurencyjnie

$$a_1 = \sqrt{2},\ a_2 = \sqrt{2+\sqrt{3}},\ a_{n+2} = \sqrt{2+\sqrt{3+a_n}} \qquad \text{dla} \qquad n \geq 1.$$

Zbadać zbieżność tak określonego ciągu.

2.5.46. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}} = 3.$$

2.5.47. Niech a będzie dowolnie ustaloną liczbą dodatnią i niech ciąg $\{a_n\}$ będzie określony rekurencyjnie

$$a_1 < 0, \qquad a_{n+1} = \frac{a}{a_n} - 1 \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Udowodnić, że ciąg ten jest zbieżny do ujemnego pierwiastka równania $x^2 + x = a$.

2.5.48. Niech a będzie dowolnie ustaloną liczbą dodatnią i niech ciąg $\{a_n\}$ będzie określony wzorem

$$a_1 > 0, \qquad a_{n+1} = \frac{a}{a_n + 1} \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Udowodnić, że ciąg ten jest zbieżny do dodatniego pierwiastka równania $x^2 + x = a$.

2.5.49. Określmy ciąg $\{a_n\}$ w następujący sposób:

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{2+a_n}{1+a_n} \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Korzystając z warunku Cauchy'ego, udowodnić zbieżność tego ciągu, a następnie obliczyć jego granicę.

2.5.50. Korzystając z warunku Cauchy'ego, udowodnić zbieżność ciągu określonego w następujący sposób:

$$a_1 > 0, \qquad a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Obliczyć również jego granicę.

2.5.51. Niech a będzie dowolnie ustaloną liczbą dodatnią. Zbadać zbieżność ciągu $\{a_n\}$ określonego w następujący sposób:

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = \frac{a}{2+a_n} \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2.5.52. Załóżmy, że

$$a_1 \in \mathbb{R} \qquad \text{oraz} \qquad a_{n+1} = |a_n - 2^{1-n}| \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zbadać zbieżność tak określonego ciągu i obliczyć jego granicę.

2.5.53. Pokazać, że

(a) jeśli $0 < a < 1$, to $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{ja^j}{n-j} = 0$,

(b) jeśli $0 < a < 1$, to $\lim_{n\to\infty} na^n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ja^j} = \frac{1}{1-a}$,

(c) jeśli $b > 1$, to $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{b^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b^{j-1}}{j} = \frac{1}{b-1}$.

2.5.54. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n+1}+\sin\frac{\pi}{n+2}+\ldots+\sin\frac{\pi}{2n}\right).$$

2.5.55. Obliczyć

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{cn^3}\right)$, gdzie $c>0$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^2}{cn^3}\right)$, gdzie $c>1$.

2.5.56. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!}\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n\sqrt{n}}.$$

2.5.57. Określmy ciąg $\{a_n\}$ wzorem

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{-1},\qquad n\geq 1.$$

Pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

2.5.58. Zbadać zbieżność ciągu o wyrazach

$$a_n=\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\right)\left(1-\left(\frac{2}{n}\right)^{\alpha}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\alpha}\right),\qquad n\geq 2,$$

w zależności od parametru α.

2.5.59. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{3})^n\}$, gdzie

$$\{x\}=x-[x]\qquad\text{dla}\qquad x\in\mathbb{R}.$$

2.5.60. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem o wyrazach dodatnich i niech $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, $n\geq 1$. Załóżmy, że

$$a_{n+1}\leq\frac{1}{S_{n+1}}\left((S_n-1)a_n+a_{n-1}\right),\qquad n>1.$$

Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

2.5.61. Niech $\{a_n\}$ będzie takim ciągiem o wyrazach dodatnich, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0,\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}<\infty.$$

Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n^2}.$$

2.5.62. Załóżmy, że $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są ciągami o wyrazach dodatnich spełniającymi warunki

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=0.$$

Określmy ciąg $\{c_n\}$ jak następuje

$$c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Udowodnić, że ciąg $\{c_n\}$ również spełnia warunek

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_1+c_2+\ldots+c_n}=0.$$

2.5.63. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\mathrm{e}^{-n}.$$

2.5.64. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem ograniczonym z góry i spełniającym warunek

$$a_{n+1}-a_n>-\frac{1}{n^2},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Udowodnić zbieżność ciągu $\{a_n\}$.

2.5.65. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem ograniczonym, którego wyrazy spełniają nierówność

$$a_{n+1}\sqrt[2^n]{2}\geq a_n,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Udowodnić zbieżność ciągu $\{a_n\}$.

2.5.66. Niech l i L oznaczają, odpowiednio, granicę dolną i górną ciągu $\{a_n\}$. Udowodnić, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$, to każdy punkt przedziału otwartego (l,L) jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$.

2.5.67. Niech l i L oznaczają, odpowiednio, granicę dolną i górną ciągu $\{a_n\}$. Załóżmy, że dla każdego n spełniona jest nierówność $a_{n+1}-a_n>-\alpha_n$, gdzie $\alpha_n>0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. Udowodnić, że każdy punkt przedziału otwartego (l,L) jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$.

2.5.68. Niech $\{a_n\}$ będzie rosnącym ciągiem liczb dodatnich. Wykazać, że zbiór punktów skupienia ciągu o wyrazach

$$\frac{a_n}{n+a_n},\qquad n\in\mathbb{N},$$

jest przedziałem (o długości zero, jeśli granica istnieje).

2.5.69. Niech a_1 będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Ciąg $\{a_n\}$ określamy wzorem

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2} & \text{dla } n \text{ parzystych},\\[2ex] \dfrac{1+a_n}{2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych}.\end{cases}$$

Ile punktów skupienia ma ten ciąg?

2.5.70. Zbadać, czy zero jest punktem skupienia ciągu o wyrazach

$$a_n=\sqrt{n}\sin n,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

2.5.71. Wykazać, że dla dowolnego ciągu $\{a_n\}$ liczb dodatnich prawdziwa jest nierówność

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n\geq\mathrm{e}.$$

2.5.72. Niech p będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną. Wykazać, że dla dowolnego ciągu $\{a_n\}$ liczb dodatnich prawdziwa jest nierówność

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{a_1+a_{n+p}}{a_n}\right)^n\geq\mathrm{e}^p.$$

2.5.73. Udowodnić, że dla dowolnego ciągu $\{a_n\}$ liczb dodatnich prawdziwa jest nierówność

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geq 1.$$

Podać przykład ciągu, dla którego w powyższej nierówności jest osiągnięta równość.

2.5.74. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym wzorem

$$a_n=\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}_{n \text{ pierwiastków}}.$$

Obliczyć $\lim_{n\to\infty} a_n$.

2.5.75. Niech $\{a_n\}$ będzie takim ciągiem o wyrazach większych niż 1, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\ln a_n)}{n}=\alpha.$$

Określmy ciąg $\{b_n\}$ w następujący sposób:

$$b_n=\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\ldots+\sqrt{a_n}}},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Wykazać, że jeśli $\alpha<\ln 2$, to ciąg $\{b_n\}$ jest zbieżny, a jeśli $\alpha>\ln 2$, to jest on rozbieżny.

2.5.76. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem spełniającym warunek

$$0\leq a_{n+m}\leq a_n+a_m \qquad \text{dla} \qquad n,m\in\mathbb{N}.$$

Udowodnić, że istnieje granica $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$.

2.5.77. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem spełniającym warunek

$$0\leq a_{n+m}\leq a_n\cdot a_m \qquad \text{dla} \qquad n,m\in\mathbb{N}.$$

Udowodnić, że istnieje granica $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

2.5.78. Niech $\{a_n\}$ będzie takim ciągiem, że $|a_n|\leq 1$ oraz

$$a_n+a_m-1\leq a_{n+m}\leq a_n+a_m+1 \qquad \text{dla} \qquad n,m\in\mathbb{N}.$$

(a) Udowodnić, że istnieje granica $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$.

(b) Pokazać, że jeśli $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=g$, to

$$ng-1\leq a_n\leq ng+1 \qquad \text{dla} \qquad n\in\mathbb{N}.$$

2.5.79. Niech $\{a_n\}$ będzie rosnącym ciągiem o wyrazach dodatnich. Załóżmy ponadto, że dla dowolnych liczb naturalnych m, n spełniona jest nierówność

$$a_{n\cdot m}\geq n a_m.$$

Pokazać, że jeśli $\sup\left\{\frac{a_n}{n}\,:\,n\in\mathbb{N}\right\}<+\infty$, to ciąg $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ jest zbieżny.

2.5.80. Udowodnić zbieżność ciągu $\{a_n\}$ określonego rekurencyjnie w następujący sposób:

$$a_1,\ a_2 \text{ są dowolnie wybranymi liczbami dodatnimi,}$$

$$a_{n+2}=\frac{2}{a_{n+1}+a_n} \qquad \text{dla} \qquad n\in\mathbb{N}.$$

2.5.81. Niech $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ będą ciągami określonymi jak następuje:

$$b_1\geq a_1>0 \text{ są dowolnie wybranymi liczbami,}$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\qquad b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n} \qquad \text{dla} \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Udowodnić zbieżność tak określonych ciągów oraz pokazać, że mają one wspólną granicę.

2.5.82. Niech $a_{k,n}$, $b_{k,n}$, $n\in\mathbb{N}$, $k=1,2,\ldots,n$, będą takimi układami liczb rzeczywistych, że wszystkie $b_{k,n}$ są dodatnie oraz dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje takie $n_0\in\mathbb{N}$, że dla wszystkich $n>n_0$ i $k=1,2,\ldots,n$ spełniony jest warunek

$$\left|\frac{a_{k,n}}{b_{k,n}}-1\right|<\varepsilon.$$

$\left(\text{Mówimy wtedy, że } \frac{a_{k,n}}{b_{k,n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1 \text{ jednostajnie względem } k\right)$.

Załóżmy ponadto, że istnieje granica $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_{k,n}$. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{k,n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_{k,n}.$$

2.5.83. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)a}{n^2},\qquad \text{gdzie} \qquad a\neq 0.$$

2.5.84. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right),\qquad \text{gdzie} \qquad a>0.$$

2.5.85. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

2.5.86. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{k^{q-1}}{n^q}\right)^{\frac{1}{p}}-1\right),\qquad \text{gdzie} \qquad p\neq 0,\ q>0.$$

2.5.87. Załóżmy, że $b>a>0$ oraz $d>0$. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(a+d)\cdot\ldots\cdot(a+nd)}{b(b+d)\cdot\ldots\cdot(b+nd)}.$$

3 SZEREGI LICZBOWE

3.1 OBLICZANIE SUM SZEREGÓW

3.1.1. Znaleźć szereg oraz jego sumę, wiedząc, że ciąg sum częściowych $\{S_n\}$ ma postać

(a) $S_n = \frac{n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$,

(b) $S_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$,

(c) $S_n = \operatorname{arctg} n$, $n \in \mathbb{N}$,

(d) $S_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

3.1.2. Obliczyć

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}$.

3.1.3. Obliczyć

(a) $\ln \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(n+1)(3n+1)}{n(3n+4)}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(2n+1)n}{(n+1)(2n-1)}$.

3.1.4. Obliczyć

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+m)}$, $m \in \mathbb{N}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$, $m \in \mathbb{N}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$.

3.1.5. Obliczyć

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n!\pi}{720}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{\ln n}{n - \ln n}\right]$.

3.1.6. Obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^{n+1}} \cos \frac{3}{2^{n+1}}$.

3.1.7. Obliczyć $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n^4+n^2+1)}$.

3.1.8. Pokazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)} = \frac{1}{2}$.

3.1.9. Niech $\{a_n\}$ będzie takim ciągiem, że

$$\lim_{n\to\infty} ((a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1)) = g, \qquad 0 < g \leq +\infty.$$

Udowodnić, że równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1)} = 1 - \frac{1}{g}$$

jest prawdziwa, przy czym przyjąć, że $\frac{1}{\infty} = 0$.

3.1.10. Korzystając z poprzedniego zadania, obliczyć sumy następujących szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}$,

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$.

3.1.11. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym w następujący sposób:

$$a_1 > 2, \qquad a_{n+1} = a_n^2 - 2 \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Pokazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdot\ldots\cdot a_n} = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2-4}}{2}$.

3.1.12. Wykazać, że dla $b > 2$ prawdziwa jest równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{b(b+1)\cdot\ldots\cdot(b+n-1)} = \frac{1}{b-2}.$$

3.1.13. Udowodnić, że dla $a > 0$, $b > a+1$ prawdziwa jest równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)}{b(b+1)\cdot\ldots\cdot(b+n-1)} = \frac{a}{b-a-1}.$$

3.1.14. Pokazać, że dla $a > 0$, $b > a+2$ prawdziwa jest równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)}{b(b+1)\cdot\ldots\cdot(b+n-1)} = \frac{a(b-1)}{(b-a-1)(b-a-2)}.$$

3.1.15. Niech $\{a_n\}$ będzie takim ciągiem o wyrazach dodatnich, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ jest rozbieżny. Niech ponadto $b>0$ będzie dowolnie ustalone. Obliczyć sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}{(a_2+b)(a_3+b)\cdot\ldots\cdot(a_{n+1}+b)}.$$

3.1.16. Obliczyć $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos^3 3^n x}{3^n}$.

3.1.17. Niech f, g będą funkcjami spełniającymi równanie $f(x)=af(bx)+cg(x)$ dla pewnych niezerowych stałych a,b,c.

(a) Pokazać, że jeśli istnieje granica $\lim_{n\to\infty}a^nf(b^nx)=L(x)$, to

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^ng(b^nx)=\frac{f(x)-L(x)}{c}.$$

(b) Pokazać, że jeśli istnieje granica $\lim_{n\to\infty}a^{-n}f(b^{-n}x)=M(x)$, to

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^{-n}g(b^{-n}x)=\frac{M(x)-af(bx)}{c}.$$

3.1.18. Korzystając z równości $\sin x=3\sin\frac{x}{3}-4\sin^3\frac{x}{3}$, udowodnić, że

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}3^n\sin^3\frac{x}{3^{n+1}}=\frac{x-\sin x}{4}$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\sin^3\frac{x}{3^{-n+1}}=\frac{3}{4}\sin\frac{x}{3}$.

3.1.19. Korzystając z równości $\operatorname{ctg}x=2\operatorname{ctg}(2x)+\operatorname{tg}x$ dla $x\neq k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, udowodnić, że

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{x}-2\operatorname{ctg}(2x).$$

3.1.20. Korzystając z równości $\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}(bx)+\operatorname{arctg}\frac{(1-b)x}{1+bx^2}$, udowodnić, że

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{(1-b)b^nx}{1+b^{2n+1}x^2}=\operatorname{arctg}x$ dla $0<b<1$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{(b-1)b^nx}{1+b^{2n+1}x^2}=\operatorname{arcctg}x$ dla $x>0$ i $b>1$.

3.1.21. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem Fibonacciego określonym następująco:

$$a_0=a_1=1,\qquad a_{n+1}=a_n+a_{n-1},\qquad n\geq 1,$$

oraz niech $S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k^2$. Obliczyć $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{S_n}$.

3.1.22. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem Fibonacciego określonym tak jak w poprzednim zadaniu. Obliczyć

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a_na_{n+2}}.$$

3.1.23. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem Fibonacciego określonym tak jak w zadaniu 3.1.21. Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{a_{2n}}.$$

3.1.24. Obliczyć

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2}{n^2}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{8n}{n^4-2n^2+5}$.

3.1.25. Niech $\{a_n\}$ będzie dowolnym ciągiem liczb dodatnich rozbieżnym do nieskończoności. Udowodnić, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{a_{n+1}-a_n}{1+a_na_{n+1}}=\operatorname{arctg}\frac{1}{a_1}.$$

3.1.26. Udowodnić, że suma szeregu o wyrazach dodatnich nie zmienia się przy dowolnej zmianie porządku wyrazów.

3.1.27. Udowodnić, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

3.1.28. Pokazać, że

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.

3.1.29. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym rekurencyjnie

$$a_1=2,\qquad a_{n+1}=a_n^2-a_n+1\qquad\text{dla}\qquad n\geq 1.$$

Obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$.

3.1.30. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym następująco:

$$a_1>0,\qquad a_{n+1}=\ln\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\qquad\text{dla}\qquad n\geq 1,$$

i niech $b_n=a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n$. Obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

3.1.31. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym następująco:

$$a_1=1,\qquad a_{n+1}=\frac{1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}-\sqrt{2}\qquad\text{dla}\qquad n\geq 1.$$

Obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

3.1.32. Znaleźć sumy następujących szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+2n-1}+\frac{1}{x+2n}-\frac{1}{x+n}\right)$, $x\neq -1,-2,\ldots$

3.1.33. Obliczyć $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

3.1.34. Znaleźć $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$.

3.1.35. Znaleźć $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

3.1.36. Załóżmy, że f jest funkcją różniczkowalną w przedziale $(0,\infty)$ oraz że jej pochodna f' jest funkcją monotoniczną w pewnym przedziale $(a,+\infty)$. Załóżmy ponadto, że $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$. Pokazać, że istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n)-\int_1^n f(x)dx\right).$$

Rozpatrzyć przypadki funkcji określonych wzorami $f(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=\ln x$.

3.1.37. Znaleźć $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

3.1.38. Znaleźć $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)$.

3.1.39. Niech $k\geq 2$ będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną. Udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)k+1}+\frac{1}{(n-1)k+2}+\ldots+\frac{1}{nk-1}-\frac{x}{nk}\right)$$

jest zbieżny tylko dla jednej wartości x. Znaleźć tę wartość oraz odpowiadającą jej sumę szeregu.

3.1.40. Niech ciąg $\{a_n\}$ będzie określony w następujący sposób:

$$a_0=2,\qquad a_{n+1}=a_n+\frac{3+(-1)^n}{2}.$$

Obliczyć

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\frac{1}{a_n^2-1}.$$

3.1.41. Udowodnić, że suma szeregu

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}$

jest liczbą niewymierną.

3.1.42. Niech $\{\varepsilon_n\}$ będzie ciągiem o wyrazach równych 1 lub -1. Pokazać, że suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{n!}$ jest liczbą niewymierną.

3.1.43. Pokazać, że suma szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^k},\qquad \text{gdzie } k \text{ jest liczbą naturalną,}$$

jest liczbą niewymierną.

3.1.44. Wykazać, że jeśli $\{n_k\}$ jest ciągiem rosnącym liczb naturalnych takim, że

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n_k}{n_1n_2\cdot\ldots\cdot n_{k-1}}=+\infty,$$

to suma szeregu $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i}$ jest liczbą niewymierną.

3.1.45. Wykazać, że jeśli $\{n_k\}$ jest ciągiem liczb naturalnych takim, że

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{n_k}{n_1n_2\cdot\ldots\cdot n_{k-1}}=+\infty,\qquad \underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{n_k}{n_{k-1}}>1,$$

to suma szeregu $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i}$ jest liczbą niewymierną.

3.1.46. Niech $\{n_k\}$ będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych takim, że

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{n_k}=\infty.$$

Udowodnić, że suma szeregu $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i}$ jest liczbą niewymierną.

3.1.47. Niech $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}$, $p_n,q_n\in\mathbb{N}$, będzie szeregiem zbieżnym. Niech ponadto

$$\frac{p_n}{q_n-1}-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}-1}\geq\frac{p_n}{q_n}.$$

Oznaczmy przez $\mathbf{A}$ zbiór tych n, dla których nierówność powyższa jest ostra. Udowodnić, że suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}$ jest liczbą niewymierną wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\mathbf{A}$ jest nieskończony.

3.1.48. Udowodnić, że jeśli $\{n_k\}$ jest ciągiem ściśle rosnącym liczb naturalnych, to suma szeregu $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{n_k}}{n_k!}$ jest liczbą niewymierną.

3.2 SZEREGI O WYRAZACH NIEUJEMNYCH

3.2.1. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+1}\right)$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$,

(c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)$, $a>1$.

3.2.2. Zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, (b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$, (d) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$,

(e) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$.

3.2.3. Niech $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ będą takimi szeregami o wyrazach dodatnich, że

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}\quad\text{dla}\quad n\ge n_0.$$

Udowodnić, że ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

3.2.4. Zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-2}}{\mathrm{e}^n n!}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\mathrm{e}^n n!}$.

3.2.5. Zbadać, dla jakich wartości parametru α zbieżne są szeregi

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)^{\alpha}$, $a>1$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^{\alpha}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\mathrm{e}\right)^{\alpha}$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$.

3.2.6. Wykazać, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to zbieżny jest również szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a^{a_n}-1),\quad\text{gdzie}\quad a>1.$$

3.2.7. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}-\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$, $a,b>0$.

3.2.8. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach nieujemnych jest zbieżny. Udowodnić, że zbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$. Pokazać, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Udowodnić ponadto, że jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest malejący, to twierdzenie odwrotne jest prawdziwe.

3.2.9. Załóżmy, że szereg o wyrazach dodatnich $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest rozbieżny. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}$.

3.2.10. Załóżmy, że szereg o wyrazach dodatnich $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest rozbieżny. Niech ponadto $\{S_n\}$ będzie ciągiem jego sum częściowych. Wykazać, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$$

jest rozbieżny, natomiast szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$$

jest zbieżny.

3.2.11. Pokazać, że przy założeniach poprzedniego zadania szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\beta}}$$

jest zbieżny dla każdej $\beta>0$.

3.2.12. Udowodnić, że przy założeniach zadania 3.2.10 szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$$

jest zbieżny dla $\alpha>1$ i rozbieżny dla $\alpha\le 1$.

3.2.13. Wykazać, że jeśli szereg o wyrazach dodatnich $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, a $r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$, $n\in\mathbb{N}$, jest ciągiem jego reszt, to

(a) szereg $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{r_{n-1}}$ jest rozbieżny, (b) szereg $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}}$ jest zbieżny.

3.2.14. Udowodnić, że przy założeniach poprzedniego zadania szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}}$$

jest zbieżny dla $\alpha<1$ i rozbieżny dla $\alpha\ge 1$.

3.2.15. Pokazać, że przy założeniach zadania 3.2.13 szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}\ln^2 r_n$$

jest zbieżny.

3.2.16. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem o wyrazach dodatnich. Załóżmy, że

$$\lim_{n\to\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = g.$$

Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeśli $g > 1$, oraz rozbieżny, jeśli $g < 1$ (g może być również równe $+\infty$ lub $-\infty$). Podać przykłady wskazujące na to, że w przypadku $g = 1$ kryterium to nie rozstrzyga zbieżności szeregu.

3.2.17. Zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$, $a > 0$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln(\ln n)}}$, $a > 0$.

3.2.18. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}, \quad \text{gdzie} \quad a > 0.$$

3.2.19. Wykorzystując kryterium zbieżności szeregów podane w zadaniu 3.2.16, udowodnić następujące **kryterium Raabego** (w postaci granicznej):
Jeśli $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *oraz*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny dla* $r > 1$ *i rozbieżny dla* $r < 1$.

3.2.20. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym rekurencyjnie w następujący sposób:

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^2} a_{n-1} \qquad \text{dla} \qquad n \geq 2.$$

Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.

3.2.21. Niech a_1, α będą liczbami dodatnimi. Ciąg $\{a_n\}$ określamy następująco:

$$a_{n+1} = a_n \mathrm{e}^{-a_n^{\alpha}} \qquad \text{dla} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\beta}$ w zależności od parametrów α oraz β.

3.2.22. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n)}$$

w zależności od parametru $a > 0$.

3.2.23. Niech a będzie dowolnie ustaloną liczbą dodatnią i niech $\{b_n\}$ będzie ciągiem o wyrazach dodatnich zbieżnym do b. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! a^n}{(a+b_1)(2a+b_2)\cdot\ldots\cdot(na+b_n)}.$$

3.2.24. Udowodnić, że jeśli ciąg $\{a_n\}$ liczb dodatnich spełnia warunek

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\gamma_n}{n \ln n},$$

gdzie $\gamma_n \geq \gamma > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Jeśli natomiast

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\gamma_n}{n \ln n},$$

gdzie $\gamma_n \leq \gamma < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny. (Powyższe twierdzenie nosi nazwę **kryterium Bertranda**).

3.2.25. Korzystając z kryterium Raabego i z poprzedniego zadania, wyprowadzić następujące **kryterium Gaussa**:
Załóżmy, że $\{a_n\}$ *jest ciągiem o wyrazach dodatnich, spełniającym warunek*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} - \frac{\vartheta_n}{n^{\lambda}},$$

gdzie $\lambda > 1$ *i* $\{\vartheta_n\}$ *jest ciągiem ograniczonym. Wtedy szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, jeśli* $\alpha > 1$, *i rozbieżny, jeśli* $\alpha \leq 1$.

3.2.26. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)}{n!} \frac{\beta(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot\ldots\cdot(\gamma+n-1)},$$

gdzie α, β, γ są stałymi dodatnimi.

3.2.27. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$ w zależności od parametru p.

3.2.28. Kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu.
Niech $\{a_n\}$ *będzie malejącym ciągiem liczb nieujemnych. Wtedy szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ *są jednocześnie zbieżne bądź jednocześnie rozbieżne.*

3.2.29. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$, (b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln(\ln n)}$.

3.2.30. Udowodnić następujące **twierdzenie Schlömilcha** (będące uogólnieniem twierdzenia Cauchy'ego o zagęszczaniu):
Niech $\{g_k\}$ *będzie takim ciągiem ściśle rosnącym liczb naturalnych, że dla pewnej stałej* $c > 0$ *i wszystkich* $k \in \mathbb{N}$ *spełniona jest nierówność* $g_{k+1} - g_k \leq c(g_k - g_{k-1})$. *Niech ponadto* $\{a_n\}$ *będzie malejącym ciągiem o wyrazach dodatnich. Wtedy szeregi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \textit{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (g_{k+1} - g_k) a_{g_k}$$

są albo obydwa zbieżne, albo obydwa rozbieżne.

3.2.31. Niech $\{a_n\}$ będzie malejącym ciągiem o wyrazach dodatnich. Pokazać, że zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest równoważna zbieżności szeregów

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n a_{3^n}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_{n^2}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_{n^3}$.

(d) Zastosować powyższe kryteria do zbadania zbieżności szeregów podanych w zadaniu 3.2.17.

3.2.32. Udowodnić, że jeśli

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (a_n)^{\frac{1}{\ln n}} < \frac{1}{\mathrm{e}},$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych jest zbieżny.

3.2.33. Udowodnić, że jeśli

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (na_n)^{\frac{1}{\ln(\ln n)}} < \frac{1}{\mathrm{e}},$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych jest zbieżny.

3.2.34. Niech $\{a_n\}$ będzie malejącym ciągiem liczb dodatnich takim, że

$$\frac{2^n a_{2^n}}{a_n} \le g < 1.$$

Pokazać, że wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

3.2.35. Niech $\{a_n\}$ będzie malejącym ciągiem liczb nieujemnych. Udowodnić, że warunkiem koniecznym zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. Podać przykład wskazujący na to, że nie jest to warunek dostateczny.

3.2.36. Podać przykład szeregu o wyrazach dodatnich, który jest zbieżny, ale nie spełnia warunku $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

3.2.37. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Podać warunek konieczny i dostateczny na to, by istniał taki ciąg $\{b_n\}$ o wyrazach dodatnich, żeby szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

były jednocześnie zbieżne.

3.2.38. Zbadać, czy istnieje ciąg $\{a_n\}$ o wyrazach dodatnich taki, aby szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 a_n}$$

były zbieżne.

3.2.39. Wykazać, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1+a_{n+1}}{a_n}$$

jest rozbieżny dla dowolnego ciągu $\{a_n\}$ o wyrazach dodatnich.

3.2.40. Niech $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ będą takimi malejącymi ciągami liczb nieujemnych, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są rozbieżne. Co można powiedzieć o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, gdzie $c_n = \min\{a_n, b_n\}$?

3.2.41. Niech $\{a_n\}$ będzie takim malejącym ciągiem o wyrazach nieujemnych, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ jest rozbieżny. Niech ponadto

$$b_n = \min\left\{a_n, \frac{1}{\ln n}\right\}, \qquad n > 1.$$

Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ jest również rozbieżny.

3.2.42. Niech $\{a_n\}$ będzie rosnącym i ograniczonym ciągiem o wyrazach dodatnich. Udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \qquad \text{jest zbieżny.}$$

3.2.43. Niech $\{a_n\}$ będzie rosnącym ciągiem o wyrazach dodatnich, rozbieżnym do nieskończoności. Udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \qquad \text{jest rozbieżny.}$$

3.2.44. Niech $\{a_n\}$ będzie rosnącym ciągiem o wyrazach dodatnich. Udowodnić, że dla dowolnego $\alpha > 0$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} a_n^{\alpha}} \qquad \text{jest zbieżny.}$$

3.2.45. Pokazać, że dla dowolnego rozbieżnego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich istnieje taki malejący ciąg $\{c_n\}$ zbieżny do zera, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ jest również rozbieżny.

3.2.46. Pokazać, że dla dowolnego zbieżnego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich istnieje taki rosnący ciąg $\{c_n\}$ rozbieżny do nieskończoności, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ jest również zbieżny.

3.2.47. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych jest zbieżny. Niech $\{r_n\}$ będzie ciągiem reszt tego szeregu. Załóżmy ponadto, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ jest również zbieżny. Udowodnić, że $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

3.2.48. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem o wyrazach dodatnich rozbieżnym do $+\infty$. Co można powiedzieć o zbieżności szeregów

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^n}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{\ln n}}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{\ln(\ln n)}}$?

3.2.49. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \cos a_n \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3.2.50. Niech p będzie dowolnie ustaloną liczbą nieujemną. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = n^{-p} \sin a_n \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3.2.51. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem dodatnich pierwiastków równania $\operatorname{tg} x = x$ ponumerowanych w kolejności wzrastania. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2}$.

3.2.52. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem dodatnich pierwiastków równania $\operatorname{tg} \sqrt{x} = x$ ponumerowanych w kolejności wzrastania. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.

3.2.53. Niech a_1 będzie dowolną liczbą dodatnią i niech $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$ dla $n \geq 1$. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.2.54. Załóżmy, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżnym szeregiem o wyrazach dodatnich, tworzących ciąg malejący. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}}{a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}} = 1.$$

3.2.55. Niech $S_k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}$ i niech k_n oznacza najmniejszą spośród liczb naturalnych k, dla których $S_k \geq n$. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n}.$$

3.2.56. Niech $\mathbf{A}$ będzie zbiorem wszystkich tych liczb naturalnych, które w swoim zapisie dziesiętnym nie mają cyfry 0.

(a) Wykazać, że szereg $\sum_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n}$ jest zbieżny.

(b) Wyznaczyć wszystkie α, dla których szereg $\sum_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny.

3.2.57. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem o wyrazach dodatnich i niech

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = g.$$

Pokazać, że jeśli $g > 1$, to szereg jest zbieżny, a jeśli $g < 1$, to szereg jest rozbieżny (g może być równe $+\infty$ lub $-\infty$). Podać przykłady wskazujące na to, że w przypadku $g = 1$ kryterium to nie rozstrzyga zbieżności szeregu.

3.2.58. Pokazać, że kryterium Raabego (zadanie 3.2.19) i kryterium podane w zadaniu 3.2.16 są równoważne. Pokazać również, że kryterium z poprzedniego zadania jest mocniejsze od każdego z nich.

3.2.59. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach określonych wzorem

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_n = \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{(n-1) \text{ pierwiastków}}}, \qquad n \geq 2.$$

3.2.60. Niech $\{a_n\}$ będzie malejącym ciągiem zbieżnym do zera. Pokazać, że jeśli ciąg o wyrazach

$$(a_1 - a_n) + (a_2 - a_n) + \ldots + (a_{n-1} - a_n)$$

jest ograniczony, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

3.2.61. Znaleźć szereg o wyrazach a_n spełniających następujące warunki:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots \qquad \text{dla} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

3.2.62. Załóżmy, że wyrazy szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, którego sumą jest S, spełniają następujące nierówności:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots, \qquad 0 < a_n \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Udowodnić, że każdą liczbę s z przedziału $(0, S]$ można przedstawić jako sumę skończonej liczby wyrazów szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ lub jako sumę szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$, gdzie $\{a_{n_k}\}$ jest podciągiem ciągu $\{a_n\}$.

3.2.63. Załóżmy, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich tworzących ciąg malejący. Wykazać, że jeśli każdą liczbę z przedziału $(0, S)$, gdzie S oznacza sumę tego szeregu, można przedstawić w postaci sumy skończonej liczby wyrazów ciągu $\{a_n\}$ lub w postaci szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$, gdzie $\{a_{n_k}\}$ jest podciągiem ciągu $\{a_n\}$, to spełniona jest nierówność

$$a_n \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots \qquad \text{dla każdego} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3.2.64. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem rozbieżnym o wyrazach dodatnich. Niech ponadto $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{S_n} = 0$, gdzie $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 S_1^{-1} + a_2 S_2^{-1} + \ldots + a_n S_n^{-1}}{\ln S_n} = 1.$$

3.2.65. Korzystając z poprzedniego zadania, pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$$

3.2.66. Załóżmy, że szereg o wyrazach dodatnich $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Co można powiedzieć o zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}?$$

3.2.67. Udowodnić, że jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem o wyrazach dodatnich takim, że $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$ dla $n = 1, 2, \ldots$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 2ea_1$.

3.2.68. Udowodnić następującą **nierówność Carlemana**:
Jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem liczb dodatnich, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} < \mathrm{e} \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

3.2.69. Udowodnić, że jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem liczb dodatnich, to dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n+k}{n}\right)^n.$$

3.2.70. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem liczb dodatnich. Pokazać, że ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ wynika zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 a_n \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{-2}\right).$$

3.2.71. Niech $\{a_n\}$ będzie takim rosnącym ciągiem liczb dodatnich, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ jest rozbieżny. Pokazać, że szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{na_n - (n-1)a_{n-1}}$$

jest również rozbieżny.

3.2.72. Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$.

3.2.73. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np_n - (n-1)p_{n-1}},$$

gdzie p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą.

3.2.74. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}}}{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^n}}.$$

3.2.75. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem, którego wyrazy spełniają następujące warunki

$$0 \leq a_n \leq 1 \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{oraz} \quad a_1 \neq 0.$$

Niech ponadto

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n, \qquad T_n = S_1 + \ldots + S_n.$$

Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{T_n^{\alpha}}$$

w zależności od parametru $\alpha > 0$.

3.2.76. Niech k będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną. Niech ponadto $\{a_n\}$ będzie takim rosnącym ciągiem liczb dodatnich, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ jest zbieżny. Udowodnić, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k a_n}{a_n} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k n}{a_n}$$

są jednocześnie zbieżne bądź jednocześnie rozbieżne.

3.2.77. Załóżmy, że $f : \mathbb{N} \to (0, \infty)$ jest funkcją malejącą, natomiast $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest funkcją rosnącą spełniającą warunek $\varphi(n) > n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić następujące nierówności:

(1) $$\sum_{k=1}^{\varphi(n)-1} f(k) < \sum_{k=1}^{\varphi(1)-1} f(k) + \sum_{k=1}^{n-1} f(\varphi(k))(\varphi(k+1) - \varphi(k)),$$

(2) $$\sum_{k=\varphi(1)+1}^{\varphi(n)} f(k) > \sum_{k=2}^{n} f(\varphi(k))(\varphi(k) - \varphi(k-1)).$$

3.2.78. Udowodnić, że przy założeniach poprzedniego zadania, jeśli istnieje takie q, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest nierówność

$$\frac{f(\varphi(n))(\varphi(n+1) - \varphi(n))}{f(n)} \leq q < 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny. Jeśli natomiast

$$\frac{f(\varphi(n))(\varphi(n) - \varphi(n-1))}{f(n)} \geq 1, \qquad n \in \mathbb{N},$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest rozbieżny.

3.2.79. Wyprowadzić z poprzedniego zadania następujące **kryterium zbieżności szeregów**:
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, którego wyrazy tworzą ciąg dodatni i malejący, jest zbieżny, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = g < \frac{1}{2},$$

a rozbieżny, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} > \frac{1}{2}.$$

3.2.80. Wyprowadzić z zadania 3.2.78 następujące **kryterium zbieżności szeregów** (porównać z zadaniem 3.2.34):
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, którego wyrazy tworzą ciąg dodatni i malejący, jest zbieżny, jeśli

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{2^n a_{2^n}}{a_n} = g < 1,$$

a rozbieżny, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n a_{2^n}}{a_n} > 2.$$

3.2.81. Korzystając z zadania 3.2.77, udowodnić twierdzenie podane w zadaniu 3.2.31.

3.2.82. Udowodnić następujące **kryterium Kummera**:
Niech $\{a_n\}$ będzie dowolnym ciągiem o wyrazach dodatnich.
(1) *Jeśli istnieje ciąg $\{b_n\}$ o wyrazach dodatnich oraz dodatnia stała c takie, że*

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq c \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N},$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

(2) *Jeśli istnieje ciąg* $\{b_n\}$ *o wyrazach dodatnich taki, że szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$ *jest rozbieżny oraz*

$$b_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\le 0 \qquad dla \qquad n\in\mathbb{N},$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *jest rozbieżny.*

3.2.83. Pokazać, że kryteria d'Alemberta, Raabego i Bertranda są szczególnymi przypadkami kryterium Kummera.

3.2.84. Udowodnić **twierdzenie odwrotne do kryterium Kummera**:
Niech $\{a_n\}$ *będzie dowolnym ciągiem o wyrazach dodatnich.*

(1) *Jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *jest zbieżny, to istnieje ciąg* $\{b_n\}$ *o wyrazach dodatnich oraz stała dodatnia* c *takie, że*

$$b_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\ge c.$$

(2) *Jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *jest rozbieżny, to istnieje ciąg* $\{b_n\}$ *o wyrazach dodatnich taki, że szereg* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$ *jest rozbieżny oraz spełniona jest nierówność*

$$b_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\le 0.$$

3.2.85. Niech $\{a_n\}$ i $\{\varphi_n\}$ będą ciągami liczb dodatnich i niech $\varphi_n=O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$. Udowodnić, że ze zbieżności szeregu $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty}a_n^{1-\varphi_n}$.

3.3 KRYTERIUM CAŁKOWE ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW

3.3.1. Udowodnić następujące **kryterium całkowe**:
Niech f *będzie funkcją dodatnią i malejącą w przedziale* $[1,\infty)$. *Wtedy zbieżność szeregu*

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

jest równoważna ograniczoności ciągu o wyrazach

$$I_n=\int_1^n f(x)dx.$$

3.3.2. Niech f będzie funkcją dodatnią i różniczkowalną na przedziale $(0,\infty)$. Niech ponadto pochodna f' będzie funkcją malejącą do zera. Pokazać, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty}f'(n) \qquad \text{i} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(n)}{f(n)}$$

są albo jednocześnie zbieżne, albo jednocześnie rozbieżne.

3.3.3. Niech f będzie funkcją dodatnią i malejącą w przedziale $[1,\infty)$. Niech

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}f(n) \qquad \text{oraz niech} \qquad I_N=\int_1^N f(x)dx.$$

Pokazać, że $\{S_N-I_N\}$ jest ciągiem malejącym zbieżnym do liczby z przedziału $[0,f(1)]$.

3.3.4. Wykazać, że ciągi o wyrazach

(a) $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$, **(b)** $1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}-\int_1^n\frac{1}{x^\alpha}dx$, $0<\alpha<1$

są zbieżne do granic leżących w przedziale $(0,1)$.

3.3.5. Zastosować kryterium całkowe do zbadania zbieżności szeregów z zadania 3.2.29.

3.3.6. Niech $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ będzie rozbieżnym szeregiem o wyrazach dodatnich i niech $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n>1$, $n\ge 1$. Pokazać, że

(a) szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_n\ln S_n}$$

jest rozbieżny,

(b) szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n\ln^2 S_n}$$

jest zbieżny.

3.3.7. Niech f będzie funkcją dodatnią i malejącą na przedziale $[1,\infty)$ i niech φ będzie ściśle rosnącą i różniczkowalną funkcją taką, że $\varphi(x)>x$ dla $x>1$. Wtedy, jeśli istnieje takie q, że dla $x>x_0\ge 1$ spełniona jest nierówność

$$\frac{\varphi'(x)f(\varphi(x))}{f(x)}\le q<1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ jest zbieżny, a jeśli

$$\frac{\varphi'(x)f(\varphi(x))}{f(x)}\ge 1,$$

to szereg ten jest rozbieżny.

3.3.8. Niech f, g będą dodatnimi funkcjami klasy C^1 na przedziale $(0,\infty)$. Załóżmy ponadto, że f jest funkcją malejącą.

(a) Udowodnić, że jeśli

$$\lim_{x\to\infty}\left(-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}-g'(x)\right)>0,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ jest zbieżny.

(b) Udowodnić, że jeśli ciąg o wyrazach $\int_1^n\frac{1}{g(x)}dx$ jest ciągiem nieograniczonym oraz

$$-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) \le 0 \qquad \text{dla dostatecznie dużych } x,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest rozbieżny.

3.3.9. Niech f będzie funkcją dodatnią, malejącą, klasy C^1 na przedziale $(0,\infty)$. Udowodnić, że

(a) jeśli

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{xf'(x)}{f(x)}\right) > 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny,

(b) jeśli

$$-\frac{xf'(x)}{f(x)} \le 1 \qquad \text{dla dostatecznie dużych } x,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest rozbieżny.

3.3.10. Niech f będzie funkcją dodatnią, malejącą, klasy C^1 na przedziale $(0,\infty)$. Udowodnić, że

(a) jeśli

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x}\right) x\ln x > 1,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny,

(b) jeśli

$$\left(-\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x}\right) x\ln x \le 1 \qquad \text{dla dostatecznie dużych } x,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest rozbieżny.

3.3.11. Udowodnić następujące twierdzenie, będące twierdzeniem odwrotnym do twierdzenia podanego w zadaniu 3.3.8.

Załóżmy, że f jest funkcją dodatnią, malejącą, klasy C^1 na przedziale $(0,\infty)$.

(a) Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny, to istnieje taka dodatnia funkcja g klasy C^1 na $(0,\infty)$, że

$$\lim_{x\to\infty}\left(-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x)\right) > 0.$$

(b) Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest rozbieżny, to istnieje taka dodatnia funkcja g klasy C^1 na $(0,\infty)$, że ciąg całek

$$\int_1^n \frac{1}{g(x)}dx, \qquad n = 1,2,\ldots,$$

jest nieograniczony oraz

$$-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) \le 0 \qquad \text{dla dostatecznie dużych } x.$$

3.3.12. Niech $\gamma \ge 0$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{(\ln n)^{\gamma}}}.$$

3.3.13. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\ln(\ln n)}}\ln n}.$$

3.3.14. Niech $\{\lambda_n\}$ będzie rosnącym ciągiem liczb dodatnich. Niech f będzie taką rosnącą funkcją dodatnią, że

$$\int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{1}{tf(t)}dt < \infty.$$

Udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\frac{1}{f(\lambda_n)} \qquad \text{jest zbieżny.}$$

3.3.15. Udowodnić następujące **uogólnienie kryterium całkowego**:

Niech $\{\lambda_n\}$ będzie ściśle rosnącym ciągiem rozbieżnym do nieskończoności. Niech f będzie funkcją dodatnią i malejącą na przedziale $[\lambda_1,\infty)$.

(a) *Jeśli istnieje $M > 0$ takie, że $\lambda_{n+1} - \lambda_n \ge M$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i jeśli całka niewłaściwa $\int_{\lambda_1}^{\infty} f(t)dt$ jest zbieżna, to zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)$.*

(b) *Jeśli istnieje $M > 0$ takie, że $\lambda_{n+1} - \lambda_n \le M$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i jeśli całka niewłaściwa $\int_{\lambda_1}^{\infty} f(t)dt$ jest rozbieżna, to rozbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)$.*

3.3.16. Załóżmy, że $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest funkcją dodatnią o dodatniej pochodnej. Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$.

3.3.17 Niech $\ln_1 x = \ln x$ i $\ln_k x = \ln(\ln_{k-1} x)$ dla $k > 1$ oraz dla dostatecznie dużych x. Niech ponadto $\varphi(n)$ oznacza jedyną liczbę naturalną taką, że $1 \le \ln_{\varphi(n)} n < \mathrm{e}$. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln_1 n)(\ln_2 n)\cdot\ldots\cdot(\ln_{\varphi(n)} n)}.$$

3.4 SZEREGI O WYRAZACH DOWOLNYCH – ZBIEŻNOŚĆ, ZBIEŻNOŚĆ BEZWZGLĘDNA TWIERDZENIE LEIBNIZA

3.4.1. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną następujących szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}$,

(b) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(\ln n)^a}{n}$, $a \in \mathbb{R}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{a}{n}$, $a \in \mathbb{R}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{-8, 2\}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$, $a \neq 0$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^a}$, $a > 0$,

w zależności od parametru a.

3.4.2. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=n_a}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1} + \ln n}, \qquad a \in \mathbb{R},$$

gdzie n_a jest wskaźnikiem zależnym od a tak dobranym, że $na^{n-1} + \ln n \neq 0$ dla $n \geq n_a$.

3.4.3. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach różnych od zera jest zbieżny. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin a_n}{a_n}\right).$$

3.4.4. Czy z warunku $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ wynika, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są jednocześnie zbieżne bądź rozbieżne?

3.4.5. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie. Niech $p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}$ i $q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$. Wykazać, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ są rozbieżne.

3.4.6. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie. Niech $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$ oznaczają odpowiednio ciągi sum częściowych szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ określonych w poprzednim zadaniu. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = 1.$$

3.4.7. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\frac{n}{3}]}}{n}.$$

3.4.8. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^a}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

3.4.9. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}.$$

3.4.10. Niech

$$\varepsilon_n = \begin{cases} +1 & \text{dla} \quad 2^{2k} \leq n < 2^{2k+1}, \\ -1 & \text{dla} \quad 2^{2k+1} \leq n < 2^{2k+2}, \end{cases}$$

gdzie $k = 0, 1, 2, \ldots$ Zbadać zbieżność szeregów

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$, (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n \ln n}$.

3.4.11. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n + \sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

3.4.12. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną następujących szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{n} - 1)^n$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{a} - 1)$, $a > 1$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{n} - 1)$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \mathrm{e}\right)$.

3.4.13. Zbadać zbieżność następujących szeregów w zależności od parametrów $a, b > 0$

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^a}{n^b}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^b}$.

3.4.14. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ będzie szeregiem spełniającym założenia twierdzenia Leibniza, tzn. $0 < a_{n+1} \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Niech $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ oznacza n-tą resztę tego szeregu. Udowodnić, że r_n ma taki sam znak jak pierwszy wyraz tej reszty i że $|r_n| < a_{n+1}$.

3.4.15. Załóżmy, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do zera. Pokazać, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$$

są jednocześnie zbieżne bądź jednocześnie rozbieżne.

3.4.16. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem zbieżnym do zera oraz niech a, b, c będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a + b + c \neq 0$. Pokazać, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (aa_n + ba_{n+1} + ca_{n+2})$$

są jednocześnie zbieżne bądź jednocześnie rozbieżne.

3.4.17. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem o wyrazach różnych od zera i takim, że $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$. Udowodnić, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$$

są jednocześnie zbieżne bezwzględnie bądź nie są jednocześnie zbieżne bezwzględnie.

3.4.18. Wykazać, że jeżeli ciąg $\{na_n\}$ oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ są zbieżne, to zbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.4.19. Załóżmy, że $\{a_n\}$ jest ciągiem malejącym zbieżnym do zera. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

3.4.20. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n!\sin a \sin\frac{a}{2}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{a}{n}$$

w zależności od rzeczywistego parametru a.

3.4.21. Niech a, b, c będą danymi liczbami dodatnimi. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a}-\frac{\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{2}\right).$$

3.4.22. Zbadać zbieżność szeregów

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos n)^n$, **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin n)^n$.

3.4.23. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem o wyrazach dodatnich. Udowodnić, że

(a) jeśli $\underline{\lim}_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) > 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny,

(b) jeśli $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \leq 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ jest rozbieżny (w szczególności, jeśli $\overline{\lim}_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) < 0$, to szereg ten jest rozbieżny).

3.4.24. Załóżmy, że $\{a_n\}$ jest ciągiem o wyrazach dodatnich. Załóżmy ponadto, że istnieją takie $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$ oraz ograniczony ciąg $\{\beta_n\}$, że

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta_n}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny, jeśli $\alpha > 0$, a rozbieżny, jeśli $\alpha \leq 0$.

3.4.25. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!e^n}{n^{n+p}}, \qquad p \in \mathbb{R}.$$

3.4.26. Niech $\{p_n\}$ będzie ciągiem liczb dodatnich, rosnącym monotonicznie do $+\infty$ i niech szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie zbieżny. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1p_1+a_2p_2+\ldots+a_np_n}{p_n} = 0.$$

3.4.27. Udowodnić, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ jest zbieżny, przy czym $\{a_n\}$ jest ciągiem liczb dodatnich malejącym do zera, to

$$\lim_{n\to\infty} a_n(b_1+b_2+\ldots+b_n) = 0.$$

3.4.28. Niech α będzie dowolnie ustaloną liczbą dodatnią. Załóżmy, że szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}$ jest zbieżny. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n^\alpha} = 0.$$

3.4.29. Niech $\{k_n\}$ będzie ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Wtedy szereg o postaci $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ nazywamy **podszeregiem** lub **szeregiem wyrwanym** szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Udowodnić, że jeśli wszystkie podszeregi szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są zbieżne, to szereg ten jest zbieżny bezwzględnie.

3.4.30. Załóżmy, że każdy z szeregów o postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k+(n-1)l}, \qquad \text{gdzie} \qquad k, l \in \mathbb{N}$$

jest zbieżny. Czy wynika stąd zbieżność bezwzględna szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

3.4.31. Podać przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ jest rozbieżny.

3.4.32. Czy istnieje taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, że dla każdego naturalnego $k \geq 2$ szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k$ są rozbieżne?

3.4.33. Niech $\{a_n\}$ będzie malejącym ciągiem o wyrazach dodatnich takim, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny. Załóżmy, że $\{\varepsilon_n\}$ jest ciągiem o wyrazach równych 1 lub -1 takim, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n a_n$ jest zbieżny. Udowodnić, że

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n}{n} \leq 0 \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n}{n}.$$

3.4.34. Niech $\{a_n\}$ będzie malejącym ciągiem o wyrazach dodatnich i niech $\{\varepsilon_n\}$ będzie ciągiem o wyrazach równych 1 lub -1 takim, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n a_n$ jest zbieżny. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n)a_n = 0.$$

(Patrz także zadanie 3.2.35).

3.4.35. Wykazać, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny oraz $\{p_n\}$ jest ciągiem rosnącym rozbieżnym do $+\infty$ takim, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ jest rozbieżny, to

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{p_1b_1 + p_2b_2 + \ldots + p_nb_n}{n} \leq 0 \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{p_1b_1 + p_2b_2 + \ldots + p_nb_n}{n}.$$

3.4.36. Z szeregu harmonicznego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ tworzymy nowy szereg, pozostawiając przy p kolejnych wyrazach znak „+", a przy q następnych stawiając znak „−", przy kolejnych p wyrazach znowu znak „+" itd. Udowodnić, że tak utworzony szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $p = q$.

3.4.37. Udowodnić następującą **ogólniejszą wersję twierdzenia Toeplitza** (patrz zadania 2.3.1 oraz 2.3.25):
Dla dowolnego zbieżnego ciągu $\{a_n\}$ *ciąg* $\{b_n\}$ *określony wzorem*

$$b_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k}a_k, \quad n \geq 1,$$

jest zbieżny oraz

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:
(i) $c_{n,k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *dla każdego* k *naturalnego,*
(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = 1$,
(iii) *istnieje takie* $C > 0$, *że dla wszystkich* n *naturalnych*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| \leq C.$$

3.5 KRYTERIA DIRICHLETA I ABELA

KRYTERIUM ABELA. *Jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, a ciąg* $\{b_n\}$ *jest monotoniczny i ograniczony, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ *jest zbieżny.*

KRYTERIUM DIRICHLETA. *Jeśli ciąg sum częściowych szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest ograniczony, a* $\{b_n\}$ *jest ciągiem monotonicznym zbieżnym do zera, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ *jest zbieżny.*
Ponadto w rozwiązaniach niektórych zadań przydatne będą łatwe do udowodnienia (np. za pomocą indukcji matematycznej) wzory

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin ka = \frac{\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}} \quad \text{dla} \quad a \neq 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z},$$

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos ka = \frac{\sin\frac{na}{2}\cos\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}} \quad \text{dla} \quad a \neq 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

3.5.1. Korzystając z kryteriów Dirichleta i Abela, zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$,

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos\left(\pi \frac{n^2}{n+1}\right)$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a + \sin\frac{n\pi}{4}}$, $a > 0$.

3.5.2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln\ln n}$.

3.5.3. Niech a będzie dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą. Zbadać zbieżność szeregów

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)\sin(n^2a)}{n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)\cos(n^2a)}{n}$.

3.5.4. Wykazać, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \sin(na)}{n}$$

jest zbieżny dla każdego $a \in \mathbb{R}$.

3.5.5. Zbadać zbieżność bezwzględną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n}$, $a \in \mathbb{R}$.

3.5.6. Pokazać, że dla każdego $a \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest nierówność

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(ak)}{k}\right| < 2\sqrt{\pi}.$$

3.5.7. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}.$$

3.5.8. Niech $x > 1$ będzie dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{\ln x}}{n}.$$

3.5.9. Udowodnić następujący **lemat Kroneckera**:
Niech szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *będzie zbieżny i niech* $\{b_n\}$ *będzie takim ciągiem rosnącym, że* $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. *Wtedy*

(a) $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} = o\left(\frac{1}{b_n}\right)$, (b) $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = o(b_n)$,

gdzie $o(b_n)$ *oznacza, że* $\lim_{n\to\infty} \frac{o(b_n)}{b_n} = 0$.

3.5.10. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n$ jest zbieżny. Pokazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ szereg $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{n+k}$ jest również zbieżny. Udowodnić także, że jeśli $t_n = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{n+k}$, to $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.

3.5.11. Udowodnić, że jeśli sumy częściowe szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są ograniczone i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$ jest zbieżny oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, to dla każdego naturalnego k zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^k$.

3.5.12. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ jest zbieżny bezwzględnie oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Wykazać, że wtedy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

3.5.13. Korzystając z kryterium Abela, pokazać, że ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ dla $|x| < 1$.

3.5.14. Niech $\{a_n\}$ będzie dowolnym ciągiem liczbowym. Pokazać, że jeśli **szereg Dirichleta**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

jest zbieżny dla pewnej wartości $x = x_0$, to jest on zbieżny dla wszystkich $x > x_0$.

3.5.15. Niech $\{a_n\}$ będzie dowolnym ciągiem liczbowym. Pokazać, że ze zbieżności szeregu Dirichleta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ wynika zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! a_n}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}, \qquad x \neq 0, -1, -2, \ldots$$

3.5.16. Niech $\{a_n\}$ będzie dowolnym ciągiem liczbowym. Wykazać, że jeśli $|x| < 1$, to ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

3.5.17. Załóżmy, że każdy z szeregów postaci $\sum_{n=1}^{\infty} a_{kl^n}$, gdzie $k \geq 1$, $l \geq 2$, jest zbieżny. Czy wynika stąd zbieżność bezwzględna szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

3.6 ILOCZYN CAUCHY'EGO SZEREGÓW

3.6.1. Udowodnić następujące **twierdzenie Mertensa**:
Jeśli szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *są zbieżne, przy czym co najmniej jeden z nich jest zbieżny bezwzględnie, to iloczyn Cauchy'ego tych szeregów (tzn. szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, *gdzie* $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$*) jest zbieżny. Ponadto suma tego szeregu jest równa iloczynowi sum szeregów* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

3.6.2. Znaleźć sumę szeregu

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $|x| < 1$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, gdzie $c_n = \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}$, $|x| < 1$, $|y| < 1$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, gdzie $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(n-k+1)!}$.

3.6.3. Znaleźć iloczyn Cauchy'ego następujących szeregów:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n$.

Obliczyć sumy otrzymanych szeregów.

3.6.4. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i niech A_n będzie n-tą sumą częściową tego szeregu. Wykazać, że dla $|x| < 1$ zbieżny jest szereg $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ i równość

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

jest prawdziwa.

3.6.5. Znaleźć iloczyn Cauchy'ego szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

przez siebie.

Wskazówka. Skorzystać z równości $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

3.6.6. Pokazać, że dla dowolnego $a > 0$ oraz takiego dowolnego x rzeczywistego, że $|x| < 1$ równość

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\frac{x}{a+2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^2}{a+4} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\frac{x^n}{a+2n} + \ldots\right)$$
$$\cdot\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}x^n + \ldots\right)$$
$$= \frac{1}{a}\left(1 + \frac{a+1}{a+2}x + \frac{(a+1)(a+3)}{(a+2)(a+4)}x^2 + \ldots + \frac{(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+2n-1)}{(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+2n)}x^n + \ldots\right)$$

jest prawdziwa.

3.6.7. Udowodnić następujące **twierdzenie Abela**:
Jeżeli szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *oraz* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, *gdzie* $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$, *są zbieżne i ich sumy wynoszą odpowiednio* A, B, C, *to* $C = AB$.

3.6.8. Wykazać, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$$

jest iloczynem Cauchy'ego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ przez siebie i znaleźć jego sumę.

3.6.9. Zbadać zbieżność iloczynu Cauchy'ego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ przez siebie.

3.6.10. Udowodnić, że iloczyn Cauchy'ego dwóch szeregów o wyrazach dodatnich, z których co najmniej jeden jest rozbieżny, jest zawsze szeregiem rozbieżnym.

3.6.11. Podać przykład dwóch szeregów rozbieżnych, których iloczyn Cauchy'ego jest szeregiem zbieżnym.

3.6.12. Wykazać, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby ze zbieżności szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ wynikała zbieżność ich iloczynu Cauchy'ego jest, by

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k(b_n + b_{n-1} + \ldots + b_{n-k+1})\right) = 0.$$

3.6.13. Niech $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ będą ciągami o wyrazach dodatnich monotonicznie zbieżnymi do zera. Pokazać, że iloczyn Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} a_n(b_0 + b_1 + \ldots + b_n) = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} b_n(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) = 0.$$

3.6.14. Wykazać, że iloczyn Cauchy'ego szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\beta}}, \qquad \alpha,\ \beta > 0,$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha + \beta > 1$.

3.6.15. Załóżmy, że $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są dodatnimi ciągami monotonicznie zbieżnymi do zera. Udowodnić, że warunkiem dostatecznym zbieżności iloczynu Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ jest zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_nb_n$, natomiast warunkiem koniecznym zbieżności tego iloczynu Cauchy'ego jest zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}(a_nb_n)^{1+\alpha}$ dla każdego $\alpha > 0$.

3.7 ZMIANA PORZĄDKU SUMOWANIA SZEREGI PODWÓJNE

3.7.1. Niech $\{m_k\}$ będzie ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Niech ponadto

$$b_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{m_1}, \qquad b_2 = a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + \ldots + a_{m_2}, \ldots$$

Mówimy wtedy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ powstał z szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ poprzez grupowanie wyrazów. Pokazać, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg otrzymany poprzez grupowanie jego wyrazów jest też zbieżny i ma tę samą sumę.

3.7.2. Szereg

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \ldots$$

powstaje z szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ przez przestawienie jego wyrazów w ten sposób, że po każdym dodatnim wyrazie następują dwa kolejne wyrazy ujemne. Znaleźć sumę tak otrzymanego szeregu.

3.7.3. Obliczyć sumę szeregu otrzymanego z szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ przez przestawienie jego wyrazów tak, że po α wyrazach dodatnich następuje β kolejnych wyrazów ujemnych, tzn. szeregu o postaci

$$1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2\alpha-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\alpha+1} + \frac{1}{2\alpha+3} + \ldots + \frac{1}{4\alpha-1} - \frac{1}{2\beta+2} - \frac{1}{2\beta+4} - \ldots - \frac{1}{4\beta} + \ldots$$

3.7.4. Pokazać, że

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \ldots = 0.$$

3.7.5. Pokazać, że wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ można przestawić tak, aby jego suma podwoiła się.

3.7.6. Wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ przestawić tak, aby otrzymać szereg rozbieżny.

3.7.7. Zbadać zbieżność szeregu

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

powstałego z szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ przez przestawienie jego wyrazów w ten sposób, że po dwóch kolejnych wyrazach dodatnich bierzemy kolejno jeden wyraz ujemny.

3.7.8. Udowodnić, że dowolne przestawienie wyrazów szeregu zbieżnego bezwzględnie nie zmienia jego sumy.

3.7.9. Załóżmy, że f jest taką dodatnią funkcją malejącą do zera w przedziale $(0,+\infty)$, że $\{nf(n)\}$ jest ciągiem rosnącym rozbieżnym do $+\infty$. Niech S będzie sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(n)$. Znaleźć takie przestawienie wyrazów tego szeregu, aby jego suma była równa $S+l$, gdzie l jest dowolnie zadaną liczbą rzeczywistą.

3.7.10. Załóżmy, że f jest taką dodatnią funkcją malejącą do zera w przedziale $(0,+\infty)$, że $\lim\limits_{n\to\infty} nf(n) = g$, $g \in (0,+\infty)$. Niech S będzie sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(n)$. Znaleźć takie przestawienie wyrazów tego szeregu, aby jego suma była równa $S+l$, gdzie l jest dowolnie zadaną liczbą rzeczywistą.

3.7.11. Wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$, $p \in (0,1)$, przestawić tak, aby jego suma powiększyła się o l.

3.7.12. Korzystając z zadania 3.7.10, należy przestawić wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ tak, aby otrzymać szereg o sumie $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\alpha$, $\alpha > 0$.

3.7.13. Czy możliwe jest przyspieszenie rozbieżności szeregu rozbieżnego o wyrazach dodatnich tworzących ciąg malejący, tzn. czy można tak poprzestawiać jego wyrazy, aby sumy częściowe nowego szeregu były większe od odpowiednich sum częściowych szeregu wyjściowego?

3.7.14. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest rozbieżny oraz że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Udowodnić, że przez przestawienie jego wyrazów można dowolnie spowolnić jego rozbieżność, tzn. dla dowolnie zadanego ciągu $\{Q_n\}$ spełniającego warunki

$$0 < Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_n < \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} Q_n = +\infty$$

istnieje takie przestawienie $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$, że

$$a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_m} \le Q_m \qquad \text{dla} \qquad m \in \mathbb{N}.$$

3.7.15. Załóżmy, że $\{r_n\}$ i $\{s_n\}$ są dwoma ściśle rosnącymi ciągami liczb naturalnych, niemającymi wspólnych wyrazów. Załóżmy ponadto, że każda liczba naturalna występuje w jednym z tych ciągów. Wtedy szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{r_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{s_n}$ nazywamy **uzupełniającymi się podszeregami** szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Mówimy, że przestawienie szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ przesuwa uzupełniające się podszeregi, jeśli po przestawieniu wyraz a_{r_m} poprzedza a_{r_n} oraz a_{s_m} poprzedza a_{s_n} dla wszystkich liczb naturalnych m, n takich, że $m < n$. Wykazać, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny warunkowo, to każda liczba rzeczywista może być sumą szeregu otrzymanego jedynie przez przesuwanie dwóch jego podszeregów utworzonych odpowiednio ze wszystkich wyrazów nieujemnych oraz wszystkich wyrazów ujemnych.

3.7.16. Niech $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ będzie szeregiem powstałym przez przestawienie wyrazów warunkowo zbieżnego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Udowodnić, że jeśli $\{n_k - k\}$ jest

ciągiem ograniczonym, to $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Co można powiedzieć w przypadku nieograniczonego ciągu $\{n_k - k\}$?

3.7.17. Niech $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ będzie szeregiem powstałym przez przestawienie wyrazów warunkowo zbieżnego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Udowodnić, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest istnienie takiej liczby naturalnej N, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ zbiór $\{n_k : 1 \le k \le m\}$ jest sumą nie więcej niż N rozłącznych bloków kolejnych liczb naturalnych.

3.7.18. Niech będzie dany nieskończony ciąg liczb $\{a_{i,k}\}$, gdzie $i = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$ Utwórzmy nowy ciąg o wyrazach

$$S_{m,n} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.$$

Tak określony ciąg dwuwskaźnikowy nazywamy **szeregiem podwójnym** o wyrazach $a_{i,k}$. Mówimy, że szereg ten jest zbieżny do sumy $S \in \mathbb{R}$, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $m, n > n_0$ mamy

$$|S_{m,n} - S| < \varepsilon.$$

Wtedy piszemy

$$S = \lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k}.$$

Mówimy, że szereg podwójny $\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k}$ jest zbieżny bezwzględnie, jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{i,k}|$. Zauważmy, że elementy macierzy nieskończonej $(a_{i,k})_{i,k=1,2,\ldots}$ można na wiele sposobów uporządkować w zwykły ciąg $\{c_n\}$ i utworzyć szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Udowodnić, że jeżeli jeden z takich szeregów jest zbieżny bezwzględnie, to zbieżny (bezwzględnie) jest szereg podwójny i ma tę samą sumę.

3.7.19. Udowodnić, że jeśli szereg podwójny $\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k}$ jest zbieżny bezwzględnie, to zbieżny bezwzględnie jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, gdzie $\{c_n\}$ jest ciągiem powstałym przez dowolne uporządkowanie elementów macierzy nieskończonej $(a_{i,k})_{i,k=1,2,\ldots}$. Udowodnić ponadto, że

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

3.7.20. Pokazać, że ze zbieżności bezwzględnej szeregu $\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k}$ wynika jego zbieżność.

3.7.21. Mówimy, że szeregi **iterowane**

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\right) \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,k}\right)$$

są zbieżne bezwzględnie, jeśli zbieżne są odpowiednio szeregi

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{i,k}|\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{i,k}|\right).$$

Udowodnić, że ze zbieżności bezwzględnej szeregu iterowanego wynika jego zbieżność.

3.7.22. Udowodnić, że jeśli szereg podwójny $\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k}$ jest zbieżny bezwzględnie, to szeregi iterowane

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{i,k}\right) \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{i,k}\right)$$

są zbieżne bezwzględnie i równości

$$\sum_{i,k=1}^{\infty}a_{i,k}=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{i,k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{i,k}\right)$$

są prawdziwe.

3.7.23. Udowodnić, że jeśli jeden z czterech szeregów

$$\sum_{i,k=1}^{\infty}|a_{i,k}|, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{i,k}|\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{i,k}|\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_{n,1}|+|a_{n-1,2}|+|a_{n-2,3}|+\ldots+|a_{1,n}|)$$

jest zbieżny, to zbieżne są szeregi

$$\sum_{i,k=1}^{\infty}a_{i,k}, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{i,k}\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{i,k}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n,1}+a_{n-1,2}+a_{n-2,3}+\ldots+a_{1,n})$$

i mają tę samą sumę.

3.7.24. Obliczyć

$$\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{1}{n!k!(n+k+1)}.$$

3.7.25. Obliczyć

$$\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{1}{nk(n+k+2)}.$$

3.7.26. Pokazać, że

$$\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{n!k!}{(n+k+2)!}=\frac{\pi^2}{6}.$$

3.7.27. Niech $0<x<1$ będzie dowolnie ustalone. Rozpatrzmy szereg podwójny, którego wyrazami są elementy macierzy nieskończonej

$$\begin{pmatrix} x & -x^2 & x^2 & -x^3 & x^3 & \ldots \\ x(1-x) & -x^2(1-x^2) & x^2(1-x^2) & -x^3(1-x^3) & x^3(1-x^3) & \ldots \\ x(1-x)^2 & -x^2(1-x^2)^2 & x^2(1-x^2)^2 & -x^3(1-x^3)^2 & x^3(1-x^3)^2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Udowodnić, że tylko jeden z szeregów iterowanych jest zbieżny, natomiast żaden z szeregów iterowanych nie jest zbieżny bezwzględnie.

3.7.28. Zbadać zbieżność następujących szeregów podwójnych:

(a) $\sum_{i,k=0}^{\infty}x^iy^k$, gdzie $|x|,|y|<1$, (b) $\sum_{i,k=1}^{\infty}\frac{1}{i^\alpha k^\beta}$, gdzie $\alpha,\beta>0$,

(c) $\sum_{i,k=1}^{\infty}\frac{1}{(i+k)^p}$, gdzie $p>0$.

3.7.29. Znaleźć sumy następujących szeregów podwójnych:

(a) $\sum_{i,k=2}^{\infty}\frac{1}{(p+i)^k}$, gdzie $p>-1$,

(b) $\sum_{i=2,k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^i}$, (c) $\sum_{i,k=1}^{\infty}\frac{1}{(4i-1)^{2k}}$.

3.7.30. Niech dany będzie dowolny ciąg podwójny $(b_{i,k})_{i,k=1,2,\ldots}$. Udowodnić, że istnieje dokładnie jeden taki szereg podwójny $\sum_{i,k=1}^{\infty}a_{i,k}$, że

$$S_{m,n}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}=b_{m,n}, \qquad m,n=1,2,\ldots$$

3.7.31. Przyjmując w poprzednim zadaniu

$$b_{i,k}=(-1)^{i+k}\left(\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2^k}\right), \qquad i,k=1,2,\ldots,$$

zbadać zbieżność otrzymanego szeregu podwójnego oraz zbieżność szeregów iterowanych.

3.7.32. Wykazać, że jeśli $|x|<1$, to szereg podwójny

$$\sum_{i,k=1}^{\infty}x^{ik}$$

jest zbieżny bezwzględnie i korzystając z tego faktu, udowodnić, że równości

$$\sum_{i,k=1}^{\infty}x^{ik}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\sum_{n=1}^{\infty}\theta(n)x^n=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{1-x^n}+\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2},$$

gdzie $\theta(n)$ oznacza liczbę dzielników naturalnych liczby n, są prawdziwe.

3.7.33. Udowodnić, że jeśli $|x|<1$, to szereg podwójny

$$\sum_{i,k=1}^{\infty}ix^{ik}$$

jest zbieżny bezwzględnie. Wykazać ponadto, że

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} ix^{ik} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)x^n,$$

gdzie $\sigma(n)$ oznacza sumę dzielników naturalnych liczby n.

3.7.34. Niech $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, gdzie $p > 1$, będzie funkcją dzeta Riemanna. Niech ponadto

$$S_p = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \zeta(p) - 1, \qquad p > 1.$$

Wykazać, że

(a) $\sum_{p=2}^{\infty} S_p = 1$, (b) $\sum_{p=2}^{\infty} (-1)^p S_p = \frac{1}{2}$.

3.7.35. Niech $\mathbf{A} = \{k^m : m, k = 2, 3, \dots\}$. Obliczyć

$$\sum_{n \in \mathbf{A}} \frac{1}{n-1}.$$

3.7.36. Niech ζ będzie funkcją dzeta Riemanna określoną w zadaniu 3.7.34. Udowodnić, że dla każdego naturalnego $n \geq 2$ mamy

$$\zeta(2)\zeta(2n-2) + \zeta(4)\zeta(2n-4) + \dots + \zeta(2n-2)\zeta(2) = (n + \tfrac{1}{2})\zeta(2n).$$

3.7.37. Korzystając z poprzedniego zadania, znaleźć sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}.$$

3.8 ILOCZYNY NIESKOŃCZONE

DEFINICJA 1. *Iloczynem nieskończonym*

(1) $$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

nazywamy ciąg $\{P_n\}$ *iloczynów częściowych o postaci*

$$P_n = a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n, \qquad n = 1, 2, \dots$$

DEFINICJA 2. *Mówimy, że iloczyn nieskończony* (1) *jest zbieżny, jeśli istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takie, że dla wszystkich* $n \geq n_0$ *mamy* $a_n \neq 0$, *a ponadto ciąg* $\{a_{n_0} a_{n_0+1} \cdot \ldots \cdot a_{n_0+n}\}$ *ma przy* $n \to \infty$ *granicę* P_0 *skończoną i różną od zera. Liczbę* $P = a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n_0-1} P_0$ *nazywamy wartością iloczynu nieskończonego* (1).

3.8.1. Znaleźć wartość następujących iloczynów nieskończonych:

(a) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, (b) $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$,

(c) $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n}$, $x \neq 2^m(\frac{\pi}{2} + k\pi)$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$,

(d) $\prod_{n=1}^{\infty} \cosh \frac{x}{2^n}$, $x \in \mathbb{R}$, (e) $\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^n}\right)$, $|x| < 1$,

(f) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$, (g) $\prod_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(-1)^n}{n}}$, $a > 0$,

(h) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}}$, (i) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1}$.

3.8.2. Zbadać zbieżność następujących iloczynów nieskończonych:

(a) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$, (b) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, (c) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

3.8.3. Udowodnić, że jeśli $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, to iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.8.4. Udowodnić, że jeśli $a_n \geq 0$, $a_n \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$, to iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - a_n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.8.5. Niech

$$a_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}, \qquad a_{2n} = -\frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Pokazać, że iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ jest zbieżny, chociaż szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

3.8.6. Zbadać zbieżność iloczynów:

(a) $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$, (b) $\prod_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$, (c) $\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)$,

(d) $\prod_{n=1}^{\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, (e) $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$, (f) $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}$.

3.8.7. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Udowodnić, że iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Pokazać ponadto, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny, to iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ jest rozbieżny do zera.

3.8.8. Załóżmy, że $\{a_n\}$ jest malejącym ciągiem zbieżnym do zera. Udowodnić, że iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + (-1)^n a_n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

3.8.9. Pokazać, że iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ jest rozbieżny, chociaż szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny.

3.8.10. Udowodnić, że iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ jest zbieżny, gdy zbieżne są szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{1}{2}a_n^2\right) \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^3.$$

3.8.11. Rozpatrując iloczyn

$$\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^{2\alpha}}\right)\left(1-\frac{1}{3^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{3^{2\alpha}}\right)\cdot\ldots,$$

gdzie $\frac{1}{3}<\alpha\leq\frac{1}{2}$, pokazać, że iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ może być zbieżny, nawet jeśli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ są rozbieżne.

3.8.12. Jak można uogólnić twierdzenie z zadania 3.8.10?

3.8.13. Udowodnić, że ze zbieżności iloczynu nieskończonego $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ oraz szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

3.8.14. Pokazać, że ze zbieżności iloczynów $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ i $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ wynika zbieżność szeregów $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$.

3.8.15. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem malejącym, zbieżnym do 1. Czy wówczas iloczyn

$$a_1\cdot\frac{1}{a_2}\cdot a_3\cdot\frac{1}{a_4}\cdot a_5\cdot\ldots$$

jest zawsze zbieżny?

3.8.16. Niech $\{a_n\}$ oraz $\{b_n\}$ będą ciągami o wyrazach dodatnich. Czy ze zbieżności iloczynów $\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ i $\prod_{n=1}^{\infty}b_n$ wynika zbieżność iloczynów

(a) $\prod_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, (b) $\prod_{n=1}^{\infty}a_n^2$, (c) $\prod_{n=1}^{\infty}a_nb_n$, (d) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$?

3.8.17. Udowodnić, że jeśli $x_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ dla $n\in\mathbb{N}$, to iloczyny nieskończone

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n \quad \text{i} \quad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}$$

są zbieżne wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$.

3.8.18. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny i S_n oznacza jego n-tą sumę częściową. Pokazać, że

$$a_1\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{a_n}{S_{n-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

3.8.19. Pokazać, że ze zbieżności iloczynu nieskończonego $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ wynika zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)}.$$

Pokazać ponadto, że jeśli P oraz S oznaczają odpowiednio wartość iloczynu nieskończonego i sumę rozpatrywanego szeregu, to równość $S=1-\frac{1}{P}$ jest prawdziwa.

3.8.20. Załóżmy, że iloczyn

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n), \qquad \text{gdzie} \qquad a_n>0,\ n\in\mathbb{N},$$

jest rozbieżny. Udowodnić, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)}=1.$$

3.8.21. Pokazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^n)}=1 \qquad \text{dla} \qquad x>1.$$

3.8.22. Niech $\{a_n\}$ będzie dowolnym ciągiem liczb różnych od zera. Wykazać, że iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba naturalna n_0, że dla wszystkich liczb naturalnych k mamy

$$|a_na_{n+1}\cdot\ldots\cdot a_{n+k}-1|<\varepsilon.$$

(Warunek ten nazywamy **warunkiem Cauchy'ego zbieżności iloczynu nieskończonego**).

3.8.23. Udowodnić, że dla $|x|<1$ prawdziwa jest równość

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)=\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n-1})}.$$

3.8.24. Mówimy, że iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ jest zbieżny bezwzględnie, jeśli zbieżny jest iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$.
Udowodnić, że iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ jest zbieżny bezwzględnie wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny bezwzględnie.

3.8.25. Udowodnić, że ze zbieżności bezwzględnej iloczynu $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ wynika jego zbieżność.

3.8.26. Wykazać, że jeśli iloczyn nieskończony jest zbieżny bezwzględnie, to równość

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{\substack{n_1,n_2=1\\ n_1<n_2}}^{\infty}a_{n_1}a_{n_2}+\ldots+$$

$$+\sum_{\substack{n_1,n_2,\ldots,n_k=1\\ n_1<n_2<\ldots<n_k}}^{\infty}a_{n_1}a_{n_2}\cdot\ldots\cdot a_{n_k}+\ldots$$

jest prawdziwa.

3.8.27. Załóżmy, że iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ jest zbieżny bezwzględnie. Wykazać, że dla dowolnego $x\in\mathbb{R}$ zbieżny jest iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_nx)$ i równość

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_nx)=1+\sum_{k=1}^{\infty}A_kx^k,$$

gdzie

$$A_k=\sum_{\substack{n_1,n_2,\ldots,n_k=1\\ n_1<n_2<\ldots<n_k}}^{\infty}a_{n_1}a_{n_2}\cdot\ldots\cdot a_{n_k},$$

jest prawdziwa.

3.8.28. Udowodnić, że dla dowolnego rzeczywistego x prawdziwa jest równość

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^nx)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdot\ldots\cdot(1-q^n)}x^n,\quad |q|<1.$$

3.8.29. Udowodnić, że dla dowolnego rzeczywistego x prawdziwa jest równość

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\cdot\ldots\cdot(1-q^{2n})}x^n,\quad |q|<1.$$

3.8.30. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny bezwzględnie. Udowodnić, że jeśli $x\neq 0$, to

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_nx)\left(1+\frac{a_n}{x}\right)=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right),$$

gdzie $B_n=A_n+A_1A_{n+1}+A_2A_{n+2}+\ldots$, $n=0,1,2,\ldots$, przy czym

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_nx)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_kx^k,\qquad\text{(patrz zadanie 3.8.27).}$$

3.8.31. Udowodnić, że jeśli $|q|<1$ oraz $x\neq 0$, to prawdziwa jest równość

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}x)\left(1+\frac{q^{2n-1}}{x}\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right).$$

3.8.32. Korzystając z poprzedniego zadania, udowodnić, że dla $|q|<1$ prawdziwe są następujące równości:

(a) $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^2=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nq^{n^2}$,

(b) $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^2=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}$,

(c) $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^2=1+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2+n}$.

3.8.33. Niech dla $x>0$ będzie określony ciąg

$$a_1=\frac{1}{1+x},\qquad a_n=\frac{n}{x+n}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{x-k}{x+k},\qquad n>1.$$

Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny oraz obliczyć jego sumę.

3.8.34. Udowodnić, że jeśli iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{\infty}(1+ca_n)$ jest zbieżny dla dwóch różnych wartości $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, to jest on zbieżny dla każdej liczby rzeczywistej c.

3.8.35. Udowodnić, że jeśli szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\prod_{k=0}^{n}(x^2-k^2)$$

jest zbieżny dla pewnego $x=x_0$ nienależącego do zbioru liczb całkowitych, to jest on zbieżny dla dowolnego rzeczywistego x.

3.8.36. Niech $\{p_n\}$ będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych większych niż 1.

(a) Udowodnić **wzór Eulera**

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\qquad\text{dla}\qquad x>1.$$

(b) Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ jest rozbieżny (porównaj zadanie 3.2.72).

3.8.37. Wykorzystując wzór Moivre'a, udowodnić, że dla dowolnego rzeczywistego x prawdziwe są równości

(a) $\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$, (b) $\cos x=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)$.

3.8.38. Korzystając z poprzedniego zadania, wyprowadzić **wzór Wallisa**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}.$$

3.8.39. Zbadać zbieżność następujących iloczynów nieskończonych:

(a) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$, $x>-1$, (b) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}$, $x>-1$.

3.8.40. Udowodnić, że iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ jest zbieżny bezwzględnie (patrz zadanie 3.8.24) wtedy i tylko wtedy, gdy dowolne przestawienie czynników nie zmienia jego wartości.

3.8.41. Obliczyć wartość iloczynu nieskończonego powstałego z iloczynu $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ przez przestawienie jego czynników w ten sposób, że po α wyrazach większych od 1 następuje β kolejnych czynników mniejszych od 1, tzn. znaleźć wartość iloczynu nieskończonego o postaci

$$\left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\tfrac{1}{2\alpha}\right)\left(1-\tfrac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2\beta+1}\right)\left(1+\frac{1}{2\alpha+2}\right)\ldots$$

3.8.42. Wykazać, że jeśli iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, $a_n>-1$, jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie, to można zmienić porządek jego czynników tak, żeby jego wartością była dowolnie ustalona liczba dodatnia bądź żeby był to iloczyn rozbieżny do zera lub nieskończoności. (Porównaj z zadaniem 3.7.15).

ROZWIĄZANIA

1 LICZBY RZECZYWISTE

1.1 KRESY ZBIORÓW LICZB RZECZYWISTYCH UŁAMKI ŁAŃCUCHOWE

1.1.1. Przyjmijmy $\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \wedge x^2 < 2\}$ i niech $s = \sup \mathbf{A}$. Możemy założyć, że $s > 1$. Wykażemy, że dla dowolnej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność

$$\left(s - \frac{1}{n}\right)^2 \leq 2 \leq \left(s + \frac{1}{n}\right)^2. \tag{1}$$

Ponieważ $s - \frac{1}{n} < s$, więc istnieje takie $x^\star \in \mathbf{A}$, że $s - \frac{1}{n} < x^\star$. Stąd

$$\left(s - \frac{1}{n}\right)^2 < (x^\star)^2 < 2.$$

Przypuśćmy, że $\left(s + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$. Jeśli s byłoby liczbą wymierną, to $s + \frac{1}{n} \in \mathbf{A}$ oraz $s + \frac{1}{n} > s$. Jest to sprzeczne z faktem, że $s = \sup \mathbf{A}$. Jeśli s nie jest liczbą wymierną, to $w = \frac{[(n+1)s]}{n+1} + \frac{1}{n+1}$ jest taką liczbą wymierną, że $s < w < s + \frac{1}{n}$, co implikuje $w^2 < \left(s + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$ i $w \in \mathbf{A}$. Sprzeczność. Zatem $\left(s + \frac{1}{n}\right)^2 \geq 2$. Biorąc pod uwagę lewą stronę nierówności (1), mamy $s^2 - \frac{2s}{n} < s^2 - \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 2$, co daje $\frac{s^2 - 2}{2s} < \frac{1}{n}$. Przechodząc z n do nieskończoności, otrzymujemy $s^2 - 2 \leq 0$. Analogicznie, wykorzystując prawą stronę (1), otrzymujemy $\frac{s^2 - 2}{3s} \geq -\frac{1}{n}$, co implikuje $s^2 - 2 \geq 0$. Zatem $s^2 = 2$.

1.1.2. Niech $\mathbf{A}$ będzie zbiorem ograniczonym z dołu i niech $a = \inf \mathbf{A}$. Oznacza to, że liczba a spełnia dwa następujące warunki:

(1) $x \geq a$ dla wszystkich $x \in \mathbf{A}$,

(2) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $x^\star \in \mathbf{A}$, że $x^\star < a + \varepsilon$.

Mnożąc nierówności występujące w (1) i (2) przez -1, otrzymujemy układ warunków równoważnych, który z kolei możemy zapisać w postaci:
(1′) $x \le -a$ dla wszystkich $x \in (-\mathbf{A})$,
(2′) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $x^\star \in (-\mathbf{A})$, że $x^\star > -a - \varepsilon$,
a to oznacza, że $-a = \sup(-\mathbf{A})$. Jeśli $\mathbf{A}$ nie jest ograniczony z dołu, to $-\mathbf{A}$ nie jest ograniczony z góry i dlatego $+\infty = \sup(-\mathbf{A}) = -\inf(\mathbf{A}) = -(-\infty)$. W podobny sposób można wykazać drugą równość.

1.1.3. Niech $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ będą zbiorami ograniczonymi z góry. Niech $a = \sup \mathbf{A}$ i $b = \sup \mathbf{B}$. Wtedy $x \le a$ dla $x \in \mathbf{A}$ i $y \le b$ dla $y \in \mathbf{B}$, co implikuje $z \le a + b$ dla $z \in (\mathbf{A} + \mathbf{B})$. Ponadto dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją takie $x^\star \in \mathbf{A}$ i $y^\star \in \mathbf{B}$, że $x^\star > a - \frac{\varepsilon}{2}$ i $y^\star > b - \frac{\varepsilon}{2}$, co daje $x^\star + y^\star > a + b - \varepsilon$. Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $z^\star = x^\star + y^\star \in \mathbf{A} + \mathbf{B}$, że $z^\star > a + b - \varepsilon$, co oznacza, że $a + b = \sup(\mathbf{A} + \mathbf{B})$. Jeśli $\mathbf{A}$ lub $\mathbf{B}$ jest nieograniczony z góry, to również $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ jest nieograniczony z góry i dowodzona równość jest oczywista.
Druga równość wynika z pierwszej i z poprzedniego zadania, gdyż

$$\sup(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \sup(\mathbf{A} + (-\mathbf{B})) = \sup \mathbf{A} + \sup(-\mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} - \inf \mathbf{B}.$$

W analogiczny sposób dowodzimy równości dotyczących kresu dolnego

$$\inf(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \inf \mathbf{A} + \inf \mathbf{B}$$
$$\inf(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \inf \mathbf{A} - \sup \mathbf{B}.$$

1.1.4. Załóżmy najpierw, że $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są zbiorami ograniczonymi z góry. Niech $a = \sup \mathbf{A}$ i $b = \sup \mathbf{B}$. Ponieważ elementami zbiorów $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są liczby dodatnie, więc $xy \le ab$ dla dowolnego $x \in \mathbf{A}$ i $y \in \mathbf{B}$.
Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustalone i takie, że $a, b > \varepsilon$. Istnieją takie $x^\star \in \mathbf{A}$ i $y^\star \in \mathbf{B}$, że $x^\star > a - \varepsilon$ i $y^\star > b - \varepsilon$, co implikuje $x^\star y^\star > ab - \varepsilon(a + b - \varepsilon)$. Ponieważ wyrażenie $\varepsilon(a + b - \varepsilon)$ może być dowolnie małe, jeśli ε jest dostatecznie małe, więc $ab = \sup(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$. Jeśli $\mathbf{A}$ lub $\mathbf{B}$ nie jest ograniczony z góry, to również $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ nie jest ograniczony z góry. Zatem $\sup(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} \cdot \sup \mathbf{B} = +\infty$.
Wykażemy teraz, że $\sup\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{A}}\right) = \frac{1}{\inf \mathbf{A}}$. Niech $a' = \inf \mathbf{A}$. Załóżmy najpierw, że $a' \neq 0$. Wtedy, dla każdego $x \in \mathbf{A}$, nierówność $x \ge a'$ jest równoważna nierówności $\frac{1}{x} \le \frac{1}{a'}$. Zatem $x \le \frac{1}{a'}$ dla każdego $x \in \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{A}}$. Ponadto dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $x^\star \in \mathbf{A}$, że $x^\star < a' + \varepsilon$, co jest równoważne warunkowi

$$\frac{1}{x^\star} > \frac{1}{a' + \varepsilon} = \frac{1}{a'} - \frac{\varepsilon}{a'(a' + \varepsilon)}.$$

Ponieważ wyrażenie $\frac{\varepsilon}{a'(a' + \varepsilon)}$ może być dowolnie małe, przy dostatecznie małym ε, więc $\sup \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{A}} = \frac{1}{a'}$. Jeśli $a' = 0$, to zbiór $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{A}}$ jest nieograniczony (ponieważ dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $x^\star \in \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{A}}$, że $x^\star > \frac{1}{\varepsilon}$) i możemy przyjąć $\sup \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{A}} = +\infty$.

Załóżmy teraz, że $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ są ograniczonymi zbiorami liczb rzeczywistych (niekoniecznie dodatnich) i przyjmijmy $a = \sup \mathbf{A}$ i $b = \sup \mathbf{B}$ oraz $a' = \inf \mathbf{A}$ i $b' = \inf \mathbf{B}$. Jeśli a', b' są liczbami nieujemnymi, to dowód ostatniej równości jest powtórzeniem dowodu z pierwszej części zadania.
Przyjmijmy teraz, że $a' < 0$ i że $a, b' > 0$. Wtedy, podobnie jak powyżej, $xy \le ab$ dla dowolnego $x \in \mathbf{A}$ i $y \in \mathbf{B}$. Niech więc $\varepsilon > 0$ będzie tak małe, że $a - \varepsilon > 0$. Istnieje wtedy liczba dodatnia $x^\star$ należąca do zbioru $\mathbf{A}$ i taka, że $x^\star > a - \varepsilon$. Ponadto istnieje $y^\star \in \mathbf{B}$ takie, że $y^\star > b - \varepsilon$. Zatem

$$x^\star y^\star > x^\star(b - \varepsilon) > (a - \varepsilon)(b - \varepsilon) = ab - \varepsilon(a + b - \varepsilon).$$

Stąd już wynika, że w tym przypadku $\sup(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = ab$.
Zajmijmy się teraz przypadkiem, gdy a', $b' < 0$ oraz a, $b > 0$. Wtedy dla dowolnego $x \in \mathbf{A}$ i $y \in \mathbf{B}$ mamy

$$xy \le \max\{ab,\ a'b'\}.$$

Niech np. $\max\{ab,\ a'b'\} = a'b'$. Wtedy z definicji infimum wynika, że dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ istnieją takie $x^\star \in \mathbf{A}$ i $y^\star \in \mathbf{B}$, że $x^\star < a' + \varepsilon < 0$ i $y^\star < b' + \varepsilon < 0$. Stąd otrzymujemy

$$x^\star y^\star > x^\star(b' + \varepsilon) > (a' + \varepsilon)(b' + \varepsilon) = a'b' + \varepsilon(a' + b' + \varepsilon).$$

Zauważmy teraz, że liczba $a' + b' + \varepsilon$ jest ujemna. Stąd i z dowolności ε wynika, że $\sup(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = a'b'$. Gdy $\max\{ab,\ a'b'\} = ab$, rozumowania są analogiczne i otrzymujemy $\sup(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = ab$.
Wszystkie pozostałe przypadki dowodzimy analogicznie.

1.1.5. Załóżmy najpierw, że $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są zbiorami ograniczonymi z góry i połóżmy $a = \sup \mathbf{A}$, $b = \sup \mathbf{B}$. Możemy założyć, że np. $a \le b$. Wtedy dla każdego $x \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ mamy $x \le b$. Ponadto dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $x^\star \in \mathbf{B}$, że $x^\star > b - \varepsilon$. Oczywiście $x^\star$ należy do $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, co kończy dowód. Jeśli co najmniej jeden ze zbiorów jest nieograniczony z góry, to ich suma jest również zbiorem nieograniczonym z góry. Zatem $\sup(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = +\infty$.
Dowód dotyczący kresu dolnego sumy zbiorów jest podobny.

1.1.6. Zauważmy, że

$$\mathbf{A}_1 = \left\{-3, -\tfrac{11}{2}, 5\right\} \cup \left\{\tfrac{3}{4k}, -\tfrac{3}{4k+1}, -4 - \tfrac{3}{4k+2}, 4 + \tfrac{3}{4k+3};\ k \in \mathbb{N}\right\},$$

$$\mathbf{A}_2 = \left\{\tfrac{3k-1}{3k+1}, -\tfrac{3k-2}{6k}, -\tfrac{3k-3}{2(3k-1)};\ k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Zatem $\inf \mathbf{A}_1 = -\frac{11}{2}$, $\sup \mathbf{A}_1 = 5$ oraz $\inf \mathbf{A}_2 = -\frac{1}{2}$, $\sup \mathbf{A}_2 = 1$

1.1.7. $\sup \mathbf{A} = \frac{2}{9}$, $\inf \mathbf{A} = 0,2$; $\sup \mathbf{B} = \frac{1}{9}$, $\inf \mathbf{B} = 0$.

1.1.8. Liczby o postaci $\frac{(n+1)^2}{2^n}$ są oczywiście dodatnie. Ponadto dla $n \geq 11$ mamy $2^n > (n+1)^3$. Nierówność tę można wykazać np. metodą indukcji matematycznej. Stąd, dla dowolnego $\varepsilon > 0$, otrzymujemy

$$\frac{(n+1)^2}{2^n} < \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3} = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geq \max\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right], 11\right\}.$$

Zatem 0 jest kresem dolnym tego zbioru.
W celu wyznaczenia kresu górnego zauważmy najpierw, że dla $n \geq 6$ prawdziwa jest nierówność $2^n > (n+1)^2$. Czyli $\frac{(n+1)^2}{2^n} < 1$ dla $n \geq 6$. Elementami tego zbioru większymi niż 1 są : $2, \frac{9}{4}, \frac{25}{16}, \frac{36}{32}$. Kresem górnym jest więc $\frac{9}{4}$.

1.1.9. Z poprzedniego zadania wynika, że kresem dolnym rozpatrywanego zbioru jest zero. Z nierówności wspomnianej w rozwiązaniu poprzedniego zadania wynika, że $2^{mn} > (nm+1)^2$ dla $nm \geq 6$. Ponieważ dla dowolnych liczb naturalnych n, m mamy $nm + 1 \geq n + m$, więc dla $nm \geq 6$ otrzymujemy

$$\frac{(n+m)^2}{2^{nm}} < \frac{(n+m)^2}{(nm+1)^2} \leq \frac{(n+m)^2}{(n+m)^2} = 1.$$

Liczbom naturalnym takim, że $nm < 6$, odpowiadają następujące elementy naszego zbioru: $1, 2, \frac{9}{4}, \frac{25}{16}, \frac{36}{32}$. Kresem górnym jest więc $\frac{9}{4}$.

1.1.10.
(a) W celu znalezienia kresu górnego zbioru $\mathbf{A}$ zauważmy, że $\frac{m}{n} < 2$, jeśli $m < 2n$. Ponadto dla $\varepsilon > 0$ istnieje takie n^*, że $\frac{2(n^*-1)}{n^*} > 2 - \varepsilon$. Istotnie, wystarczy np. przyjąć $n^* > \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$. Kresem górnym jest więc 2.
Kresem dolnym rozpatrywanego zbioru jest 0, gdyż $\frac{m}{n} > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$ oraz dla $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\widehat{n}$, że $\frac{1}{\widehat{n}} < \varepsilon$.
(b) Oczywiście $0 \leq \sqrt{n} - [\sqrt{n}] < 1$. Ponieważ lewa nierówność jest osiągnięta np. dla $n = 1$, więc $\inf \mathbf{B} = 0$. Pokażemy teraz, że $\sup \mathbf{B} = 1$. W tym celu zauważmy najpierw, że dla wszystkich naturalnych n mamy $[\sqrt{n^2+2n}] = n$. Ponadto dla dowolnie ustalonego ε, $0 < \varepsilon < 1$, nierówność

$$\sqrt{n^2+2n} - [\sqrt{n^2+2n}\,] = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} > 1 - \varepsilon$$

jest spełniona przez wszystkie liczby naturalne $n > \frac{(1-\varepsilon)^2}{2\varepsilon}$.

1.1.11.
(a) $+\infty$. **(b)** 2.
(c) Korzystając z nierówności $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ dla $a, b > 0$, otrzymujemy

$$\frac{2^x + 2^{\frac{1}{x}}}{2} \geq \sqrt{2^{\frac{1}{x}+x}} \geq \sqrt{2^2} = 2,$$

przy czym równość jest osiągnięta dla $x = 1$. Zatem 4 jest kresem dolnym.

1.1.12.
(a) Korzystając z nierówności $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ dla $a, b > 0$, otrzymujemy

$$\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \geq 4,$$

przy czym równość jest osiągnięta jeśli $m = 2n$. Zatem $\inf \mathbf{A} = 4$. Biorąc $m = 1$, widzimy, że zbiór $\mathbf{A}$ jest nieograniczony z góry, czyli $\sup \mathbf{A} = +\infty$.
(b) Podobnie jak w części (a) wykazujemy, że

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{mn}{4m^2+n^2} \leq \frac{1}{4},$$

z równościami dla $m = -2n$ oraz $m = 2n$. Zatem $\inf \mathbf{B} = -\frac{1}{4}$ i $\sup \mathbf{B} = \frac{1}{4}$.
(c) Mamy $\inf \mathbf{C} = 0$ i $\sup \mathbf{C} = 1$. Istotnie $0 < \frac{m}{m+n} < 1$ i dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją takie liczby naturalne n_1 i m_1, że $\frac{1}{n_1+1} < \varepsilon$ i $\frac{m_1}{m_1+1} > 1 - \varepsilon$.
(d) $\inf \mathbf{D} = -1$, $\sup \mathbf{D} = 1$.
(e) Kładąc $m = n$, widzimy, że zbiór $\mathbf{E}$ jest nieograniczony z góry. Zatem $\sup \mathbf{E} = +\infty$. Zauważmy ponadto, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest nierówność $\frac{mn}{1+m+n} \geq \frac{1}{3}$, przy czym równość jest osiągnięta dla $m = n = 1$. Oznacza to, że $\inf \mathbf{E} = \frac{1}{3}$.

1.1.13. Niech $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Mamy

$$\frac{a_k}{s} \leq \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} \leq 1 - \frac{a_{k+1}}{s} - \frac{a_{k+2}}{s}.$$

Stąd

$$1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} \leq n - 2.$$

Zatem $\inf \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} \geq 1$ i $\sup \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} \leq n - 2$.

W celu wykazania równości przyjmijmy $a_k = t^k$, $t > 0$. Wtedy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} = \frac{t}{t+t^2+t^3} + \ldots + \frac{t^{n-2}}{t^{n-2}+t^{n-1}+t^n} + \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}+t^n+t} + \frac{t^n}{t^n+t+t^2} = (n-2)\frac{1}{1+t+t^2} + \frac{t^{n-2}}{t^{n-1}+t^{n-2}+1} + \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}+t+1}.$$

Biorąc $t \to 0^+$ oraz $t \to +\infty$, otrzymujemy żądane równości.

1.1.14. Niech $n \in \mathbb{N}$. Rozpatrzmy $n+1$ liczb rzeczywistych

$$(*) \qquad 0,\ \alpha - [\alpha],\ 2\alpha - [2\alpha], \ldots,\ n\alpha - [n\alpha].$$

Każda z tych liczb należy do przedziału $[0,1)$. Ponieważ n przedziałów o postaci $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, pokrywa przedział $[0,1)$, więc co najmniej w jednym z nich leżą dwie liczby o postaci $(*)$. Niech będą to liczby: $n_1\alpha - [n_1\alpha]$, $n_2\alpha - [n_2\alpha]$, gdzie $0 \le n_1 < n_2 \le n$. Wtedy

$$|n_2\alpha - [n_2\alpha] - n_1\alpha + [n_1\alpha]| < \frac{1}{n}.$$

Wystarczy teraz przyjąć: $q_n = n_2 - n_1$, $p_n = [n_2\alpha] - [n_1\alpha]$. Z powyższej konstrukcji wynika, że $q_n \le n$, czyli spełniona jest i druga nierówność.

1.1.15. Pokażemy, że w dowolnym przedziale (p,q) znajduje się co najmniej jeden element zbioru $\mathbf{A}$. Niech $0 < \varepsilon = q - p$. Na mocy poprzedniego zadania istnieją liczba całkowita p_n i liczba naturalna q_n, dla których

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{nq_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Stąd

$$|q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n > n_0.$$

Połóżmy teraz $a = |q_n\alpha - p_n|$. Wtedy co najmniej jedna liczba o postaci ma, $m \in \mathbb{Z}$, należy do przedziału (p,q), co oznacza, że $mq_n\alpha - mp_n$ lub $-mq_n\alpha + mp_n$ należy do tego przedziału.

1.1.16. Niech $t \in [-1,1]$. Wtedy istnieje taka liczba rzeczywista x, że $t = \cos x$. Na podstawie poprzedniego zadania istnieją takie ciągi $\{m_n\}$ i $\{k_n\}$ liczb całkowitych, że $x = \lim\limits_{n\to\infty}(k_n 2\pi + m_n)$. Stąd i z ciągłości funkcji cosinus wynika, że

$$t = \cos x = \cos\Big(\lim_{n\to\infty}(k_n 2\pi + m_n)\Big) = \lim_{n\to\infty}\cos m_n = \lim_{n\to\infty}\cos|m_n|.$$

Oznacza to, że każda liczba z przedziału $[-1,1]$ jest punktem skupienia zbioru $\{\cos n : n \in \mathbb{N}\}$, czyli zbiór ten jest gęsty w $[-1,1]$.

1.1.17. Z przedstawienia liczby x w postaci skończonego ułamka łańcuchowego wynika, że jeśli jakieś x_n jest liczbą naturalną, to oczywiście x jest liczbą wymierną. Niech teraz $x = \frac{p}{q}$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$. Wtedy, jeśli $x - [x] \neq 0$, to $\frac{p}{q} - \left[\frac{p}{q}\right] = \frac{l}{q}$, gdzie l jest liczbą naturalną mniejszą niż q. Zatem liczba $x_1 = \frac{q}{l}$ ma mianownik mniejszy od mianownika liczby x. Wynika stąd, że mianowniki liczb $x_1, x_2, \ldots$ stale ściśle maleją, a więc nie mogą tworzyć ciągu nieskończonego.

1.1.18. Dowód przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej. Łatwo sprawdzić, że

$$R_k = \frac{p_k}{q_k} \qquad \text{dla} \qquad k = 0, 1, 2.$$

Załóżmy teraz, że

$$R_m = \frac{p_m}{q_m} = \frac{p_{m-1}a_m + p_{m-2}}{q_{m-1}a_m + q_{m-2}} \qquad \text{dla pewnego } m \ge 2.$$

Ponieważ przy zastąpieniu a_m sumą $a_m + \frac{1}{a_{m+1}}$ redukt R_m przechodzi w R_{m+1}, więc R_{m+1} ma postać

$$\frac{p_{m-1}\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) + p_{m-2}}{q_{m-1}\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) + q_{m-2}} = \frac{(p_{m-1}a_m + p_{m-2})a_{m+1} + p_{m-1}}{(q_{m-1}a_m + q_{m-2})a_{m+1} + q_{m-1}} = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}.$$

1.1.19. Wprowadźmy następujące oznaczenie

$$\Delta_k = p_{k-1}q_k - q_{k-1}p_k \qquad \text{dla} \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Wtedy dla $k > 1$ mamy

$$\Delta_k = p_{k-1}(q_{k-1}a_k + q_{k-2}) - q_{k-1}(p_{k-1}a_k + p_{k-2}) = -(p_{k-2}q_{k-1} - q_{k-2}p_{k-1}) = -\Delta_{k-1}.$$

Ponieważ $\Delta_1 = p_0q_1 - q_0p_1 = a_0a_1 - (a_0a_1 + 1) = -1$, więc $\Delta_k = (-1)^k$. Ze wzoru tego wynika natychmiast, że liczby p_k, q_k są względnie pierwsze.

1.1.20. Tak jak w zadaniu 1.1.18 mamy, dla $n > 1$,

$$R_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}a_n + p_{n-2}}{q_{n-1}a_n + q_{n-2}}.$$

Analogicznie

$$x = \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}} \qquad \text{dla} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Zatem

$$x - R_n = \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n}{(q_n x_{n+1} + q_{n-1})q_n} = \frac{(-1)^n}{(q_n x_{n+1} + q_{n-1})q_n},$$

przy czym ostatnia równość wynika z zadania 1.1.19. Stąd

$$x - R_n \begin{cases} > 0 & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ < 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

Oznacza to już, że x jest zawarta między dwoma kolejnymi reduktami.

1.1.21. Pokażemy najpierw, że jeśli α jest liczbą niewymierną dodatnią, to zbiór liczb o postaci $\{n - m\alpha : n, m \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}_+$. Niech (a, b), $0 < a < b$, będzie dowolnym przedziałem w $\mathbb{R}_+$. Pokażemy, że w przedziale tym jest co najmniej jedna liczba z powyższego zbioru. Przyjmijmy $\varepsilon = b - a > 0$. Na podstawie poprzedniego zadania istnieje taki redukt R_n, że

$$0 < R_n - \alpha < \frac{1}{q_n^2}, \tag{1}$$

gdyż wystarczy przyjąć n nieparzyste i zauważyć, że

$$(q_n x_{n+1} + q_{n-1})q_n > q_n^2.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = +\infty$, więc $\frac{1}{q_n} < \varepsilon$ dla dostatecznie dużych n. Stąd i z (1) mamy $0 < p_n - \alpha q_n < \frac{1}{q_n} < \varepsilon$ dla dostatecznie dużego n. Zatem istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że $n_0(p_n - \alpha q_n) \in (a, b)$. Niech teraz $t \in [-1, 1]$. Wtedy istnieje liczba rzeczywista dodatnia x, dla której $t = \sin x$. Z powyższych rozważań wynika istnienie ciągów liczb naturalnych $\{m_n\}$ i $\{k_n\}$ takich, że $x = \lim\limits_{n\to\infty}(m_n - 2\pi k_n)$.

Stąd i z ciągłości funkcji sinus otrzymujemy

$$t = \sin x = \sin(\lim_{n\to\infty}(m_n - 2\pi k_n)) = \lim_{n\to\infty} \sin m_n.$$

Oznacza to, że każda liczba z przedziału $[-1, 1]$ jest punktem skupienia zbioru $\{\sin n : n \in \mathbb{N}\}$, czyli zbiór ten jest gęsty w $[-1, 1]$.

1.1.22. Wystarczy przyjąć p_n, q_n tak, jak w zadaniu 1.1.20. Ponieważ $x_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+2}} > a_{n+1}$, więc $(q_n x_{n+1} + q_{n-1})q_n > (q_n a_{n+1} + q_{n-1})q_n = q_{n+1}q_n$. Stąd i z zadania 1.1.20 otrzymujemy

$$|x - R_n| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Zauważmy jeszcze, że $q_{n+1} = q_n a_{n+1} + q_{n-1} > q_n a_{n+1} > q_n$, z czego wynika już żądana nierówność. Wykażemy teraz, że ciąg $\{q_n\}$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów nieparzystych. W tym celu wystarczy zauważyć, że liczby q_n, q_{n+1} nie mogą być jednocześnie parzyste, co wynika wprost z zadania 1.1.19.

1.1.23. Skorzystać z zadania 1.1.19.

1.1.24. Zauważmy najpierw, że $\{q_n\}$ jest ciągiem rosnącym i $q_n \geq n$ (dowód indukcyjny). Ponadto na podstawie zadania 1.1.20

$$|x - R_n| = \frac{1}{(q_n x_{n+1} + q_{n-1})q_n}.$$

Stąd i z faktu, że $x_{n+1} < a_{n+1} + 1$ mamy

$$|x - R_n| > \frac{1}{(q_n(a_{n+1} + 1) + q_{n-1})q_n} = \frac{1}{(q_{n+1} + q_n)q_n}.$$

Korzystając ponownie z zadania 1.1.20 i z nierówności $a_{n+2} \geq 1$, otrzymujemy

$$|x - R_{n+1}| < \frac{1}{(q_{n+1}a_{n+2} + q_n)q_{n+1}} < \frac{1}{(q_{n+1} + q_n)q_n},$$

co kończy dowód.

1.1.25. Niech $\left|x - \frac{r}{s}\right| < |x - R_n| < |x - R_{n-1}|$. Ponieważ R_n i R_{n-1} leżą po różnych stronach liczby x (zadanie 1.1.20), więc

$$\left|\frac{r}{s} - R_{n-1}\right| < |R_{n-1} - R_n|.$$

Stąd i z zadania 1.1.23 wynika, że

$$\frac{|rq_{n-1} - sp_{n-1}|}{sq_{n-1}} < \frac{1}{q_{n-1}q_n}.$$

Ponieważ $|rq_{n-1} - sp_{n-1}| \geq 1$, więc $\frac{1}{sq_{n-1}} < \frac{1}{q_{n-1}q_n}$, czyli $s > q_n$.

1.1.26. Zgodnie z algorytmem podanym w zadaniu 1.1.20 mamy

$$a_0 = [\sqrt{2}] = 1, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

Zatem $a_1 = [x_1] = 2$. Podobnie

$$x_2 = \frac{1}{(\sqrt{2} + 1) - 2} = x_1 \quad \text{oraz} \quad a_2 = a_1 = 2.$$

Stąd i z zasady indukcji matematycznej wynika, że

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \dots$$

Podobnie

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \dots$$

1.1.27. Ponieważ $k < \sqrt{k^2 + k} < k + 1$, więc $a_0 = [\sqrt{k^2 + k}] = k$.

Zatem $x_1 = \frac{\sqrt{k^2 + k} + k}{k}$, czyli $2 < x_1 < 2 + \frac{1}{k}$ i $a_1 = 2$.

Ponadto

$$x_2 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{k^2+k}-k} - 2} = k + \sqrt{k^2+k},$$

czyli $2k < x_2 < 2k+1$ i $a_2 = 2k$. Podobnie znajdujemy $a_3 = 2$. Stąd i z zasady indukcji mamy

$$\sqrt{k^2+k} = k + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2k} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2k} + \ldots$$

1.1.28. Ponieważ $0 < x < 1$, więc $a_0 = 0$ i $x_1 = \frac{1}{x}$. Skoro a_1 ma być równe n, to $\left[\frac{1}{x}\right] = n$. Stąd $\frac{1}{x} - 1 < n \leq \frac{1}{x}$, a więc $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$.

1.2 PEWNE ELEMENTARNE NIERÓWNOŚCI

1.2.1. Dowód tej nierówności możemy przeprowadzić metodą indukcji matematycznej. Dla $n = 1$ nierówność jest oczywista. Obierzmy dowolnie liczbę naturalną n i załóżmy, że

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)(1+a_{n+1}) &\geq (1+a_1+a_2+\ldots+a_n)(1+a_{n+1})\\ &= 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + a_{n+1}(a_1+a_2+\ldots+a_n)\\ &\geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}.\end{aligned}$$

Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych.

1.2.2. Dla $n = 1$ twierdzenie to jest oczywiste. Załóżmy, że twierdzenie to jest prawdziwe dla pewnego, dowolnie ustalonego n. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy przyjąć, że liczby $a_1, \ldots, a_{n+1}$ spełniające warunek $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n+1} = 1$ są ponumerowane w ten sposób, że $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1}$. Wtedy $a_1 \leq 1$ oraz $a_{n+1} \geq 1$.
Skoro $a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n(a_{n+1}a_1) = 1$, to na podstawie założenia indukcyjnego $a_2 + a_3 + \ldots + a_n + (a_{n+1}a_1) \geq n$. Stąd

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} &\geq n + a_{n+1} + a_1 - a_{n+1}a_1\\ &= n + a_{n+1}(1-a_1) + a_1 - 1 + 1 = n + 1 + (a_{n+1}-1)(1-a_1) \geq n+1.\end{aligned}$$

1.2.3. Nierówności są wnioskiem z zadania 1.2.2. Istotnie, podstawiając za a_j wyrażenie $\frac{a_j}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}}$, otrzymujemy nierówność $A_n \geq G_n$. Nierówność $G_n \geq H_n$ wynika z udowodnionej nierówności $A_n \geq G_n$. Wystarczy zamiast a_j podstawić odwrotność, tzn. $\frac{1}{a_j}$.

1.2.4. Mamy $\sqrt[n]{(1+nx)\cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \leq 1 + x$, gdzie pod pierwiastkiem występuje n czynników.

1.2.5.
(a) Skorzystać z nierówności $A_n \geq H_n$.
(b) Skorzystać z nierówności $A_n \geq H_n$.
(c) Lewą nierówność pokazujemy podobnie jak w (a) i (b). W celu wykazania prawej nierówności zauważmy, że

$$\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \ldots + \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n+1} < \frac{1}{3n+1} + \frac{2n}{3n+2} < \frac{2}{3}.$$

(d) Z zależności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną otrzymujemy

$$\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots + \frac{n+1}{n} > n\sqrt[n]{n+1}.$$

Stąd

$$1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} + \ldots + 1 + \frac{1}{n} > n\sqrt[n]{n+1}.$$

Zatem

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > n(\sqrt[n]{n+1} - 1).$$

W celu udowodnienia drugiej nierówności ponownie skorzystamy z zależności między średnimi

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} > \frac{n}{\sqrt[n]{n+1}}.$$

Stąd, jak powyżej, otrzymujemy

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} + \frac{1}{n+1}\right).$$

1.2.6. Z nierówności $G_n \leq A_n$ mamy

$$x^n = \sqrt[2n+1]{1 \cdot x \cdot \ldots \cdot x^{2n}} \leq \frac{1 + \ldots + x^{2n}}{2n+1}.$$

1.2.7. Prawa nierówność wynika z faktu, że $G_n \leq A_n$. Lewą nierówność wykażemy indukcyjnie. Dla $n = 1$ jest ona oczywista. Udowodnimy, że nierówność ta jest prawdziwa dla $n+1$ przy założeniu, że jest ona prawdziwa dla n. W tym celu pokażemy, że $(a_1 a_{n+1})^{n+1} \leq (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n a_{n+1})^2$, przy założeniu $(a_1 a_n)^n \leq (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^2$. Mamy

$$(a_1 a_{n+1})^{n+1} \leq a_1 a_n (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^2 \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{n+1}.$$

Aby otrzymać żądaną nierówność, wystarczy wykazać, że

$$a_1 \frac{a_{n+1}^{n+1}}{a_n^n} \leq a_{n+1}^2.$$

Nierówność ta jest równoważna nierówności

$$a_1\left(1+\frac{r}{a_1+(n-1)r}\right)^{n-1}\le a_1+(n-1)r,$$

gdzie $a_n=a_1+(n-1)r$, którą można łatwo udowodnić, stosując również zasadę indukcji matematycznej.

1.2.8. Wniosek z poprzedniego zadania.

1.2.9. Wystarczy skorzystać z zależności między średnią harmoniczną i średnią arytmetyczną.

1.2.10.

(a) Z zależności między średnią arytmetyczną i średnią harmoniczną mamy

$$n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)^{-1}\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k,$$

skąd wynika, że

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\ge\frac{n^2}{s}.$$

Podobnie nierówność

$$n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s-a_k}\right)^{-1}\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(s-a_k)$$

implikuje

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s-a_k}\ge\frac{n^2}{s(n-1)}.$$

Stąd i z faktu, że

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{s-a_k}=s\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s-a_k}-n\quad\text{oraz}\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{s-a_k}{a_k}=s\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-n$$

otrzymujemy żądaną nierówność.

(b) Patrz rozwiązanie części (a).

(c) Wystarczy powtórzyć rozumowania z części (a).

1.2.11. Wskazówka. $\frac{1+a_k}{2}\ge\sqrt{a_k}$.

1.2.12. Mamy

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2=\sum_{k,j=1}^{n}a_k^2b_j^2-\sum_{k,j=1}^{n}a_kb_ka_jb_j$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}(a_kb_j-b_ka_j)^2\ge 0.$$

1.2.13. Rozpatrywana nierówność jest równoważna nierówności

$$\sum_{k,j=1}^{n}(a_ka_j+b_kb_j)\le\sum_{k,j=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)^{\frac{1}{2}}(a_j^2+b_j^2)^{\frac{1}{2}},$$

która wynika z faktu, że $a_ka_j+b_kb_j\le(a_k^2+b_k^2)^{\frac{1}{2}}(a_j^2+b_j^2)^{\frac{1}{2}}$.

1.2.14. Jest to natychmiastowy wniosek z nierówności Cauchy'ego.

1.2.15.

(a) Z nierówności Cauchy'ego otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\ge\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k\frac{1}{a_k}}\right)^2=n^2.$$

(b) Na podstawie (a) otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}\frac{1-a_k}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-n\sum_{k=1}^{n}a_k\ge n^2-n\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

Stąd już wynika żądana nierówność.

(c) Z podanego warunku wynika, że $\log_a a_1+\log_a a_2+\ldots+\log_a a_n=1$. Stąd i z nierówności Cauchy'ego (zadanie 1.2.12) wynika żądana nierówność.

1.2.16. Dana nierówność jest równoważna nierówności

$$0\le-4\alpha\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|+4\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\alpha^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2,$$

która jest spełniona dla każdego α, gdyż na podstawie nierówności Cauchy'ego mamy

$$\Delta=16\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-16\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2\le 0.$$

1.2.17. Stosując nierówność Cauchy'ego, otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|=\sum_{k=1}^{n}1|a_k|\le\sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k|.$$

1.2.18.

(a) Na mocy nierówności Cauchy'ego

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}a_k\frac{b_k}{\sqrt{k}}\right)^2\le\sum_{k=1}^{n}ka_k^2\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{k}.$$

(b) Analogicznie

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{\frac{3}{2}}a_k}{k^{\frac{5}{2}}}\right)^2\le\sum_{k=1}^{n}k^3a_k^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^5}.$$

1.2.19. Stosując nierówność Cauchy'ego, otrzymujemy

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^{\frac{p+q}{2}}a_k^{\frac{p-q}{2}}\right)^2\le\sum_{k=1}^{n}a_k^{p+q}\sum_{k=1}^{n}a_k^{p-q}.$$

1.2.20. Na mocy nierówności Cauchy'ego mamy

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2n=\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}1\ge\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2=1.$$

Stąd $\sum_{k=1}^{n}a_k^2\ge\frac{1}{n}$. Równość jest osiągnięta dla $a_k=\frac{1}{n}$, $k=1,2,\dots,n$. Zatem szukaną wartością najmniejszą jest $\frac{1}{n}$.

1.2.21. Podobnie jak w poprzednim zadaniu mamy

$$1=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{p_k}a_k\frac{1}{\sqrt{p_k}}\right)^2\le\sum_{k=1}^{n}p_ka_k^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}.$$

Zatem

$$\sum_{k=1}^{n}p_ka_k^2\ge\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}}.$$

Szukana wartość najmniejsza wynosi $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}\right)^{-1}$, gdyż równość jest osiągnięta dla $a_k=\frac{1}{p_k}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}\right)^{-1}$.

1.2.22. Wiadomo, że $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\le n\sum_{k=1}^{n}a_k^2$ (patrz rozwiązanie zadania 1.2.20). Zatem

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2=\left((a_1+a_2)+\sum_{k=3}^{n}a_k\right)^2\le(n-1)\left((a_1+a_2)^2+\sum_{k=3}^{n}a_k^2\right)$$
$$=(n-1)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2a_1a_2\right).$$

1.2.23.

(a) Korzystając z nierówności Cauchy'ego, otrzymujemy

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+2a_kb_k+b_k^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) Na mocy (a) mamy

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Stąd i z nierówności z zadania 1.2.17

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\sum_{k=1}^{n}|a_k-b_k|.$$

Podobnie

$$\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\sum_{k=1}^{n}|a_k-b_k|,$$

co kończy dowód tej nierówności.

1.2.24. Z warunku $\sum_{k=1}^{n}p_ka_k=1$ wynika, że dla dowolnego α rzeczywistego mamy $1=\sum_{k=1}^{n}p_ka_k=\sum_{k=1}^{n}(p_k-\alpha)a_k+\alpha\sum_{k=1}^{n}a_k$. Stąd i z nierówności Cauchy'ego otrzymujemy

$$1\le\left(\sum_{k=1}^{n}(p_k-\alpha)^2+\alpha^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\right).$$

Zatem

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\ge\left(\sum_{k=1}^{n}(p_k-\alpha)^2+\alpha^2\right)^{-1}.$$

Kładąc $\alpha=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}p_k$, otrzymujemy najlepsze oszacowanie od dołu. Więc

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\ge\frac{n+1}{(n+1)\sum\limits_{k=1}^{n}p_k^2-\left(\sum\limits_{k=1}^{n}p_k\right)^2}.$$

Równość jest osiągnięta dla

$$a_k = \frac{(n+1)p_k - \sum_{k=1}^{n} p_k}{(n+1)\sum_{k=1}^{n} p_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)^2}.$$

1.2.25. Nierówność tę można udowodnić metodą indukcji matematycznej. Dla $n = 1$ otrzymujemy równość. Przy założeniu, że nierówność ta jest prawdziwa dla n mamy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} a_k \sum_{k=1}^{n+1} b_k - (n+1)\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k &\\ \le a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} b_k + b_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k - n a_{n+1} b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k &\\ = \sum_{k=1}^{n} (b_{n+1} - b_k)(a_k - a_{n+1}) \le 0.&\end{aligned}$$

1.2.26. Dowód przeprowadzimy metodą indukcji względem p. Dla $p = 1$ otrzymujemy równość. Załóżmy, że nierówność ta jest prawdziwa dla pewnego, dowolnie ustalonego p. Możemy założyć, że składniki sumy są ustawione w porządku niemalejącym. Wtedy na podstawie założenia indukcyjnego oraz poprzedniego zadania mamy

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{p+1} \le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} a_k^p \sum_{k=1}^{n} a_k \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^{p+1}.$$

1.2.27. Mamy

$$(1+c)a^2 + \left(1+\frac{1}{c}\right)b^2 = a^2 + b^2 + \left(\sqrt{c}a - \frac{1}{\sqrt{c}}b\right)^2 + 2ab \ge (a+b)^2.$$

1.2.28. Oczywiście $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2} \ge |b| + |c| \ge |b+c|$. Zatem $|b^2 - c^2| \le |b-c|\left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2}\right)$, co jest równoważne dowodzonej nierówności.

1.2.29.

(a) Oczywiście dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c mamy $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$. Stąd $b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 \ge abc(a+b+c)$, co dowodzi nierówności podanej w zadaniu.

(b) Żądana nierówność wynika z nierówności $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$.

(c) Nierówność ta jest wnioskiem z zależności między średnią harmoniczną i średnią arytmetyczną.

(d) Mamy

$$\frac{b^2-a^2}{c+a} = \frac{b+a}{c+a}(b-a) = \frac{b+a}{c+a}\left((b+c) - (c+a)\right).$$

Położmy teraz: $u = a+b$, $v = b+c$, $z = c+a$. Wtedy, ze względu na powyższą równość, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{b^2-a^2}{c+a} + \frac{c^2-b^2}{a+b} + \frac{a^2-c^2}{b+c} &= \frac{u}{z}(v-z) + \frac{v}{u}(z-u) + \frac{z}{v}(u-v)\\ &= \frac{u^2v^2 + v^2z^2 + z^2u^2 - (u^2vz + v^2uz + z^2uv)}{uvz}\\ &= \frac{u^2(v^2+z^2) + v^2(u^2+z^2) + z^2(u^2+v^2) - 2(u^2vz + v^2uz + z^2uv)}{2uvz} \ge 0.\end{aligned}$$

(e) W przypadku $a = b$ nierówność jest oczywista. Załóżmy więc, że $0 < b < a$. Wtedy

$$\frac{a-b}{2\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{2\sqrt{a}} < \sqrt{a} - \sqrt{b} < \frac{a-b}{2\sqrt{b}},$$

czyli

$$\frac{(a-b)^2}{4a} < (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{4b}.$$

1.2.30. Niech $m = \frac{a_k}{b_k}$. Wtedy

$$\begin{aligned}m(b_1 + \ldots + b_n) = \frac{a_k}{b_k}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) &= \frac{a_k}{b_k}b_1 + \frac{a_k}{b_k}b_2 + \ldots + \frac{a_k}{b_k}b_n\\ &\le \frac{a_1}{b_1}b_1 + \frac{a_2}{b_2}b_2 + \ldots + \frac{a_n}{b_n}b_n = a_1 + \ldots + a_n\\ &\le M(b_1 + \ldots + b_n).\end{aligned}$$

1.2.31. Wystarczy skorzystać z poprzedniego zadania i monotoniczności funkcji tangens na przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

1.2.32. Zastosować zadanie 1.2.30, przyjmując $a_i = \ln c_i, b_i = k_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

1.2.33. Ponieważ

$$\frac{a_1}{b_1} \le M, \quad \frac{a_2^2}{Mb_2^2} \le M, \ldots, \quad \frac{a_n^n}{M^{n-1}b_n^n} \le M,$$

więc wystarczy skorzystać z nierówności podanej w zadaniu 1.2.30.

1.2.34. Skorzystamy z zależności między średnią harmoniczną i średnią arytmetyczną (zadanie 1.2.3)

$$\begin{aligned}\frac{n}{\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \ldots + \frac{1}{x-a_n}} &\le \frac{(x-a_1) + (x-a_2) + \ldots + (x-a_n)}{n}\\ &= \frac{nx - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{n}.\end{aligned}$$

Stąd już wynika żądana nierówność.

1.2.35. Zauważmy, że $1+c_1+c_2+\ldots+c_n=(1+1)^n=2^n$. Stąd i z nierówności Cauchy'ego (zadanie 1.2.12), przyjmując $a_k=1$, $b_k=\sqrt{c_k}$ dla $k=1,2,\ldots,n$, otrzymujemy nierówność podaną w zadaniu.

1.2.36. Ponieważ

$$\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\prod_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} \quad \text{oraz} \quad 2^n-2=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k},$$

więc nierówność podana w zadaniu wynika bezpośrednio z zależności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną (zadanie 1.2.3).

1.2.37. Z zależności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną (zadanie 1.2.3) otrzymujemy

$$A_k^{p-1}A_{k-1}\le\frac{(p-1)A_k^p+A_{k-1}^p}{p}, \qquad k=1,2,\ldots,n,$$

przy czym przyjmujemy $A_0=0$. Stąd

$$\begin{aligned}A_k^p-\frac{p}{p-1}A_k^{p-1}a_k&=A_k^p-\frac{p}{p-1}A_k^{p-1}\left(kA_k-(k-1)A_{k-1}\right)\\&=A_k^p\left(1-\frac{kp}{p-1}\right)+A_k^{p-1}A_{k-1}\frac{(k-1)p}{p-1}\\&\le A_k^p\left(1-\frac{kp}{p-1}\right)+\frac{k-1}{p-1}\left((p-1)A_k^p+A_{k-1}^p\right)\\&=\frac{1}{p-1}\left((k-1)A_{k-1}^p-kA_k^p\right).\end{aligned}$$

Teraz wystarczy zsumować otrzymane nierówności stronami.

1.2.38. Niech $a_i=\max\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{k+1}&=\sum_{k=1}^{i-1}a_ka_{k+1}+\sum_{k=i}^{n-1}a_ka_{k+1}\le a_i\sum_{k=1}^{i-1}a_k+a_i\sum_{k=i}^{n-1}a_{k+1}\\&=a_i(a-a_i)=\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-a_i\right)^2\le\frac{a^2}{4}.\end{aligned}$$

1.2.39. Wystarczy skorzystać z zadania 1.2.2.

1.2.40. Nierówności po lewych stronach wynikają z zadania 1.2.1.

(a) Zauważmy, że

$$1+a_k=\frac{1-a_k^2}{1-a_k}<\frac{1}{1-a_k}.$$

Stąd

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)<\left(\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)\right)^{-1}.$$

Ponieważ $a_1+a_2+\ldots+a_n<1$, więc stosując ponownie zadanie 1.2.1, otrzymujemy

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)<\left(1-\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^{-1}.$$

(b) Dowód analogiczny jak w części (a).

1.2.41. Wystarczy zastosować nierówność z zadania 1.2.15(b) do liczb $1-a_k$.

1.2.42. Ponieważ $0<a_k\le 1$ dla $k=1,2,\ldots,n$, więc dla $n\ge 2$ prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\ge\prod_{k=1}^{n}a_k\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}. \tag{1}$$

Stosując nierówność z zadania 1.2.15(b) do liczb o postaci $\frac{a_k}{1+a_k}$, $k=1,2,\ldots,n$ otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\left(n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}\right)\ge n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}.$$

Wystarczy teraz pomnożyć obie strony tej nierówności przez $\prod_{k=1}^{n}a_k$ i skorzystać z (1).

1.2.43.

(a) Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną (zadanie 1.2.3), otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)}{(n+1)^n}&=\frac{2a_1+a_2+\ldots+a_n}{n+1}\cdot\frac{a_1+2a_2+a_3+\ldots+a_n}{n+1}\\&\quad\cdot\ldots\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+2a_n}{n+1}\ge\prod_{k=1}^{n}a_k.\end{aligned}$$

(b) Wystarczy przeprowadzić rozumowanie analogiczne jak w części (a).

1.2.44. Zauważmy najpierw, że jeśli $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}=n-1$, to $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+a_k}=1$. Stosując nierówność z części (b) poprzedniego zadania do liczb $\frac{a_k}{1+a_k}$, otrzymujemy żądaną nierówność.

1.2.45. [M.S. Klamkin, Amer. Math. Monthly 82(1975), 741–742]. Ponumerujmy liczby $a_1,a_2,\ldots,a_n$ tak, aby a_1 było najmniejszą z nich, a a_2 największą. Niech $A_n=\frac{1}{n}$ oznacza średnią arytmetyczną liczb $a_1,\ldots,a_n$. Utwórzmy teraz nowy

ciąg w następujący sposób: $a'_1 = A_n$, $a'_2 = a_1 + a_2 - A_n$, $a'_i = a_i$ dla $3 \le i \le n$. Wykażemy, że

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1+a_k}{1-a_k} \ge \prod_{k=1}^{n} \frac{1+a'_k}{1-a'_k}. \tag{1}$$

Z określenia ciągu $\{a'_k\}$ wynika, że powyższa nierówność jest równoważna nierówności

$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)}{(1-a_1)(1-a_2)} \ge \frac{(1+A_n)(1+a_1+a_2-A_n)}{(1-A_n)(1-a_1-a_2+A_n)}.$$

Teraz ta z kolei nierówność jest równoważna nierówności

$$(a_2 - a_1)(A_n - a_1)(a_2 - A_n) \ge 0,$$

która oczywiście jest prawdziwa. Mając już ciąg $\{a'_k\}$, utwórzmy ciąg $\{a''_k\}$ w taki sam sposób jak z ciągu $\{a_k\}$ tworzyliśmy ciąg $\{a'_k\}$. W ciągu $\{a''_k\}$ są co najmniej dwa wyrazy równe średniej arytmetycznej A_n. Ponadto spełniona jest nierówność typu (1). Po co najwyżej $n-1$ tego rodzaju operacjach otrzymamy ciąg stały, którego wszystkie wyrazy są równe A_n. Ze względu na nierówność (1) będzie więc

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1+a_k}{1-a_k} \ge \prod_{k=1}^{n} \frac{1+A_n}{1-A_n} = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n.$$

1.2.46.

(a) Ponieważ $0 < a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, więc

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}+a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} \ge \frac{a_1}{2a_3} + \frac{a_2}{2a_4} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{2a_n} + \frac{a_{n-1}}{2a_1} + \frac{a_n}{2a_2} \ge \frac{n}{2},$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z zależności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną. Oczywiście nierówność powyższa jest prawdziwa, gdy $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n > 0$. Zauważmy jeszcze, że jeśli $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, to w dowodzonej nierówności jest równość.

(b) Jest to wniosek z części (a).

(c) Wybierzmy taki wskaźnik k_1, aby $a_{k_1} = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Wyraz a_{k_1} jest licznikiem jednego z ułamków występujących po lewej stronie nierówności. W mianowniku tego ułamka są dwa składniki. Większy z nich oznaczmy przez a_{k_2}. Dalej, niech a_{k_3} będzie większą z dwóch liczb stojących w mianowniku ułamka o liczniku a_{k_2} itd. Przy tych oznaczeniach mamy

$$\frac{a_{k_i}}{a_{k_i+1} + a_{k_i+2}} \ge \frac{a_{k_i}}{2a_{k_{i+1}}}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Z podanej konstrukcji wynika, że istnieje taka liczba l, że $a_{k_{l+1}} = a_{k_1}$. Zauważmy ponadto, że liczby a_{k_i} oraz $a_{k_{i+1}}$ występują w naszej nierówności w licznikach

ułamków sąsiednich bądź też oddzielonych dokładnie jednym ułamkiem (przyjmujemy, że ułamki pierwszy i ostatni są sąsiednie). Ponadto $a_{k_{i+1}}$ występuje na prawo od a_{k_i}. Ponieważ a_{k_i} występuje także w mianownikach dwóch sąsiednich ułamków na lewo od ułamka, którego licznikiem jest a_{k_i}, więc aby przejść od a_{k_1} do $a_{k_{l+1}}$, należy wykonać „pętlę" długości n i l skoków, przy czym $l \ge \frac{n}{2}$. Stąd, z (1) oraz z zależności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną otrzymujemy, że suma występująca po lewej stronie naszej nierówności jest większa lub równa

$$\frac{a_{k_1}}{2a_{k_2}} + \frac{a_{k_2}}{2a_{k_3}} + \ldots + \frac{a_{k_l}}{2a_{k_1}} \ge l\sqrt[l]{\frac{1}{2^l}} \ge \frac{n}{4}.$$

Uwaga. Dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i n dostatecznie dużych nie jest prawdziwa nierówność podana w (a). Jest obszerna literatura na ten temat, np. [R.A. Rankin, Math. Gaz. 42 (1958), 39–40], [B.A. Troesch, Math. Computation 45 (1985), 199–207].

1.2.47. Mamy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{|a_k - t|}}{2^k} \ge \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)\sqrt{|a_1 - t|} + \frac{\sqrt{|a_2 - t|}}{2^2} + \ldots + \frac{\sqrt{|a_n - t|}}{2^n}$$
$$\ge \frac{1}{2^2}\left(\sqrt{|a_1 - t|} + \sqrt{|a_2 - t|}\right) + \frac{1}{2^3}\left(\sqrt{|a_1 - t|} + \sqrt{|a_3 - t|}\right)$$
$$+ \ldots + \frac{1}{2^n}\left(\sqrt{|a_1 - t|} + \sqrt{|a_n - t|}\right) \ge \sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{|a_k - a_1|}}{2^k}.$$

1.2.48. Z zależności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+b_1} \cdot \frac{a_2}{a_2+b_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_n+b_n}} + \sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2+b_2} \cdot \ldots \cdot \frac{b_n}{a_n+b_n}}$$
$$\le \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1+b_1} + \ldots + \frac{a_n}{a_n+b_n} + \frac{b_1}{a_1+b_1} + \ldots + \frac{b_n}{a_n+b_n}\right) = 1.$$

1.2.49. [V. Ptak, Amer. Math. Monthly 102 (1995), 820–821]. Zauważmy, że lewa i prawa strona nierówności podanej w zadaniu nie ulega zmianie, gdy każdą z liczb a_k zastąpimy liczbą ca_k, gdzie $c > 0$. Zatem możemy przyjąć, że $G = 1$. Wtedy $a_n = \frac{1}{a_1}$. Zauważmy teraz, że jeśli $a_1 \le x \le \frac{1}{a_1}$, to $x + \frac{1}{x} \le a_1 + \frac{1}{a_1}$. Zatem

$$\sum_{n=1}^{n} p_k a_k + \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{1}{a_k} \le a_1 + \frac{1}{a_1} = 2A.$$

Stąd i z zależności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną otrzymujemy żądaną nierówność.

1.2.50. Ustawmy te dzielniki w pary (k,l) tak, że $kl=n$. Z zależności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną mamy: $\frac{k+l}{2}\geq\sqrt{kl}$. Sumując tak otrzymane nierówności stronami po wszystkich takich parach, otrzymujemy

$$\frac{\sigma(n)}{2}\geq\frac{\tau(n)}{2}\sqrt{n}.$$

1.2.51. Zauważmy najpierw, że mnożąc każdą z liczb a_i przez dowolną liczbę dodatnią, nie zmieniamy nierówności podanej w zadaniu. Możemy więc przyjąć, że $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1$. Ponadto możemy założyć, że $a=a_1\leq a_2\leq a_3\leq\ldots\leq a_n$. Oznaczmy przez $\alpha^2=\frac{12}{n(n^2-1)}$. Gdyby nierówność podana w zadaniu była fałszywa, to byłoby $a_{i+1}-a_i>\alpha$ dla $i=1,2,\ldots,n-1$. Stąd i z zasady indukcji matematycznej wynikałoby, że $a_i>a+(i-1)\alpha$ dla $i=2,3,\ldots,n$. Zatem byłoby

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2>\sum_{i=0}^{n-1}(a+i\alpha)^2,\quad n>1.$$

Prawa strona tej nierówności jest funkcją kwadratową zmiennej a i osiąga swoje minimum (równe 1) w punkcie $a=-\frac{(n-1)\alpha}{2}$. Sprzeczność.

1.2.52. Mamy

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{x+1}{x}\cdot\frac{y+1}{y}\cdot\frac{z+1}{z}$$
$$=\frac{2x+y+z}{x}\cdot\frac{x+2y+z}{y}\cdot\frac{x+y+2z}{z}$$
$$\geq\frac{4\sqrt[4]{x^2yz}\cdot4\sqrt[4]{xy^2z}\cdot4\sqrt[4]{xyz^2}}{xyz}=64,$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z zależności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną (zobacz zadanie 1.2.3). Zauważmy jeszcze, że równość jest osiągnięta dla $x=y=z=\frac{1}{3}$.

2 CIĄGI LICZB RZECZYWISTYCH

2.1 CIĄGI MONOTONICZNE

2.1.1.

(a) Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem rosnącym i ograniczonym od góry. Wtedy $\sup\{a_n:n\in\mathbb{N}\}=A<\infty$. Z definicji kresu górnego mamy: dla każdego $n\in\mathbb{N}$, $a_n\leq A$ oraz dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje taki wskaźnik n_0, że $a_{n_0}>A-\varepsilon$. Monotoniczność ciągu implikuje, że $A\geq a_n>A-\varepsilon$ dla $n>n_0$. Zatem $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

Załóżmy teraz, że $\{a_n\}$ nie jest ograniczony od góry. Wtedy dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje taki wskaźnik n_0, że $a_{n_0}>M$. Stąd i z monotoniczności ciągu mamy: $a_n>M$ dla $n>n_0$, co oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

(b) Patrz rozwiązanie części (a).

2.1.2. Mamy

$$\frac{s_n}{s_{n-1}}\leq\frac{s_{n+1}}{s_n}\quad\text{dla}\quad n\geq2,$$

gdyż na podstawie zadania 1.2.19 spełniona jest nierówność

(1) $$s_n^2\leq s_{n+1}s_{n-1}.$$

Pokażemy teraz, że ciąg $\{x_n\}$ jest rosnący. Nierówność $x_1\leq x_2$ wynika z nierówności $\left(\sum_{k=1}^{p}a_k\right)^2\leq p\sum_{k=1}^{p}a_k^2$ (patrz rozwiązanie zadania 1.2.20). Załóżmy, że $x_{n-1}\leq x_n$. Oznacza to, że

(2) $$s_{n-1}\leq s_n^{\frac{n-1}{n}}.$$

Wtedy na mocy (1) i (2)

$$x_{n+1}=\sqrt[n+1]{s_{n+1}}\geq\sqrt[n+1]{\frac{s_n^2}{s_{n-1}}}\geq\sqrt[n+1]{\frac{s_n^2}{s_n^{\frac{n-1}{n}}}}=x_n.$$

2.1.3. Mamy $a_{n+1} = \frac{n+1}{2n} a_n < a_n$, $n > 1$. Zatem ciąg $\{a_n\}$ jest ściśle malejący. Ponieważ jest on ograniczony z dołu (np. przez 0), więc istnieje $\lim_{n\to\infty} a_n = g$. Liczba g spełnia równanie $g = \frac{1}{2}g$, więc $g = 0$.

2.1.4. Niech $b_n = a_n - \frac{1}{2^{n-1}}$. Mamy $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n + \frac{1}{2^n} \geq 0$. Stąd już wynika zbieżność ciągu $\{b_n\}$. Oczywiście zbieżność ciągu $\{a_n\}$ jest równoważna zbieżności ciągu $\{b_n\}$.

2.1.5.

(a) Pokażemy, że ciąg $\{a_n\}$ jest malejący i ograniczony z dołu. Istotnie

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2} < 0.$$

Ponadto na podstawie wspomnianej w zadaniu nierówności (dowód indukcyjny) mamy $a_n > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 1) > -2$.

(b) Dowód analogiczny jak w części (a).

2.1.6. Najpierw dowodzimy indukcyjnie, że $\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2$, $n \in \mathbb{N}$, oraz że ciąg $\{a_n\}$ jest ściśle rosnący. Stąd wynika jego zbieżność.
Niech więc $g = \lim_{n\to\infty} a_n$. Wtedy z warunku $a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2}$ otrzymujemy $g = \sqrt{3g - 2}$, czyli $g = 2$.

2.1.7. Zauważmy najpierw, że $a_n > 2c$ (dowód indukcyjny). Jest oczywiście $a_1 < a_2$. Ponadto zakładając, że $a_n > a_{n-1}$, otrzymujemy

$$a_{n+1} = (a_n - c)^2 > (a_{n-1} - c)^2 = a_n.$$

Ostatnia nierówność wynika z monotoniczności funkcji $f(x) = x^2$ w zbiorze $\mathbb{R}_+$.

2.1.8. Z zależności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną oraz z określenia ciągu $\{a_n\}$ mamy

$$\frac{a_n + (1 - a_{n+1})}{2} \geq \sqrt{a_n(1 - a_{n+1})} > \frac{1}{2}.$$

Stąd $a_n - a_{n+1} > 0$. Zatem ciąg $\{a_n\}$ jako malejący i ograniczony jest zbieżny. Niech g oznacza jego granicę. Z warunku $a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4}$ otrzymujemy $g(1 - g) \geq \frac{1}{4}$. Ostatnia nierówność jest równoważna nierówności $(2g - 1)^2 \leq 0$. Zatem $g = \frac{1}{2}$.

2.1.9. Oczywiście $0 \leq a_n < 3$ dla $n \geq 1$. Ponadto $a_{n+1}^2 - a_n^2 = -a_n^2 + a_n + 6 > 0$ dla $0 \leq a_n < 3$. Zatem ciąg jest zbieżny jako rosnący i ograniczony z góry. Z definicji ciągu wynika, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

2.1.10. Oczywiście $0 \leq a_n < 1$ dla $n \geq 1$. Zastosujemy **uogólnioną zasadę indukcji matematycznej**:

Jeśli W jest własnością określoną na zbiorze $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych, taką że
(i) *liczba 1 ma własność W,*
(ii) *dla każdej liczby naturalnej n:*
jeśli wszystkie liczby naturalne $k, 1 \leq k \leq n$, mają własność W,
to liczba $n+1$ ma również własność W,
to każda liczba naturalna ma własność W.

Załóżmy więc, że $a_{n-1} \geq a_{n-2}$ i $a_n \geq a_{n-1}$. Wtedy

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(a_n - a_{n-1} + a_{n-1}^3 - a_{n-2}^3) \geq 0.$$

Zatem ciąg ten jest zbieżny. Niech g oznacza granicę tego ciągu. Liczba ta spełnia równanie $g = \frac{1}{3}(1 + g + g^3)$. Stąd

$$g = 1 \vee g = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee g = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

W celu rozstrzygnięcia, która z ww. liczb jest granicą tego ciągu, zauważmy, że wszystkie wyrazy tego ciągu są mniejsze niż $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Wynika stąd, że $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

2.1.11. Mamy $a_{n+1} = a_n \frac{n+1}{2n+3} < a_n$, $n \geq 1$. Stąd (patrz rozwiązanie zadania 2.1.3) wynika, że $g = 0$.

2.1.12. Mamy $a_{n+1} = a_n \frac{2n+2}{2n+3} < a_n$, $n \geq 1$. Zatem ciąg ten jest zbieżny jako malejący i ograniczony od dołu przez zero.

2.1.13.

(a) Oczywiście $\{a_n\}$ jest ciągiem rosnącym. Wykażemy, że jest on ograniczony z góry. Mamy

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} < 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

(b) Oczywiście $\{a_n\}$ jest ciągiem rosnącym. Ponadto

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Zatem ograniczoność ciągu wynika z części (a).

2.1.14.

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} < 0, \quad n \geq 1.$$

Ciąg jest więc zbieżny jako malejący i ograniczony z dołu.

2.1.15. Z zależności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną otrzymujemy

$$a_{n+1} \geq \sqrt[p]{a_n^{p-1}\frac{a}{a_n^{p-1}}} = \sqrt[p]{a}, \qquad n \geq 1.$$

Wobec tego

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{a_n}{p} + \frac{a}{pa_n^{p-1}} = -\frac{a_n^p - a}{pa_n^{p-1}} \leq 0, \qquad n \geq 2.$$

Ciąg jest więc zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[p]{a}$.

2.1.16. Oczywiście $0 < a_n < 2$ dla $n \geq 1$. Ponadto

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}} > 0, \qquad \text{o ile} \quad a_n > a_{n-1}.$$

Zatem istnieje liczba g będąca granicą tego ciągu. Liczba ta spełnia równanie $g = \sqrt{2+\sqrt{g}}$.

Uwaga. Stosując wzory Cardana na pierwiastek rzeczywisty równania stopnia trzeciego, można pokazać, że

$$g = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}(79 + 3\sqrt{249})} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(79 - 3\sqrt{249})} - 1\right).$$

2.1.17. Ponieważ $a_{n+1} = 2\left(2 - \frac{5}{a_n+3}\right)$, $n \geq 1$, więc na podstawie zasady indukcji matematycznej otrzymujemy $0 < a_n < 2$, $n \geq 1$. Ponadto

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{(a_n+1)(a_n-2)}{a_n+3} \geq 0.$$

Zatem ciąg jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

2.1.18. Ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem ściśle rosnącym (dowód indukcyjny). Gdyby był on ograniczony z góry, to istniałaby taka liczba g, że $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Byłoby również $g^2 - 2g + c = 0$. Równanie to ma rozwiązanie dla $c \leq 1$. Niech więc $0 < c \leq 1$. Wtedy ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry przez $1-\sqrt{1-c}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 - \sqrt{1-c}$. Dla $c > 1$ mamy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

2.1.19. Skoro

$$a_{n+1} = a_n\left(1 - 2\frac{a_n^2 - a}{3a_n^2 + a}\right), \qquad n \geq 1,$$

to

$$a_n > \sqrt{a} \Longrightarrow a_{n+1} < a_n,$$
$$a_n < \sqrt{a} \Longrightarrow a_{n+1} > a_n,$$
$$a_n = \sqrt{a} \Longrightarrow a_{n+1} = \sqrt{a}.$$

Zauważmy teraz, że

$$a_n\frac{a_n^2 + 3a}{3a_n^2 + a} > \sqrt{a} \Longleftrightarrow (a_n - \sqrt{a})^3 > 0 \Longleftrightarrow a_n > \sqrt{a}.$$

Ostatecznie

dla $0 < a_1 < \sqrt{a}$ ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący i ograniczony z góry,
dla $a_1 > \sqrt{a}$ ciąg $\{a_n\}$ jest malejący i ograniczony z dołu,
dla $a_1 = \sqrt{a}$ ciąg $\{a_n\}$ jest stały.
W każdym z tych przypadków granicą ciągu jest $\sqrt{a}$.

2.1.20. Indukcyjnie pokazujemy, że

$$a_n = \frac{(3^{n-1}-1) - (3^{n-1}-3)a_1}{(3^n-1) - (3^n-3)a_1} \qquad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Widzimy więc, że ciąg ten nie jest określony, jeśli $a_1 = \frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}-3}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Ponadto, jeśli $a_1 = 1$, to $a_n = 1$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Dla pozostałych wartości a_1, ciąg jest zbieżny do $1/3$.

2.1.21. Mamy $a_{n+1} = (a_n - a)^2 + a_n \geq a_n$ dla $n \geq 1$. Zatem ciąg jest rosnący. Łatwo widać, że gdyby był on zbieżny, to jego granicą byłaby liczba a. Stąd jeśli $a_1 > a$, to ciąg jest rozbieżny. Jeśli natomiast $a - 1 \leq a_1 \leq a$, to również $a - 1 \leq a_n \leq a$ dla $n > 1$. Zatem dla takich a_1 ciąg jest zbieżny. Gdy $a_1 < a - 1$, wówczas mamy $a_2 > a$. Ciąg jest więc rozbieżny.

2.1.22. Granicą tego ciągu mogą oczywiście być tylko liczby a, b. Rozpatrzmy następujące przypadki:

1° $c > b$
Wtedy $a_2 = \frac{c^2+ab}{a+b} > c = a_1$ oraz na podstawie zasady indukcji matematycznej $a_{n+1} > a_n$. Stąd $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

2° $c = b$
Ciąg jest stały o wyrazach równych b.

3° $a < c < b$
Na podstawie zasady indukcji matematycznej ciąg $\{a_n\}$ jest malejący i ograniczony z dołu przez a oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

4° $c = a$
Ciąg jest stały o wyrazach równych a.

5° $0 < c < a$
Na podstawie zasady indukcji matematycznej ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący i ograniczony z góry przez a oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2.1.23. Mamy $a_{n+1} = 6\left(1 - \frac{6}{a_n+7}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Stąd na podstawie indukcji matematycznej otrzymujemy

$$a_1 < 2 \Longrightarrow a_n < 2, \qquad n \in \mathbb{N} \quad \text{oraz} \quad a_1 > 2 \Longrightarrow a_n > 2, \ n \in \mathbb{N}.$$

Ponadto

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{(a_n+3)(a_n-2)}{a_n+7}.$$

Stąd

1° jeśli $0 < a_1 < 2$, to ciąg jest rosnący, ograniczony z góry przez 2 i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$,

2° jeśli $a_1 > 2$, to ciąg jest malejący, ograniczony z dołu przez 2 i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$,

3° jeśli $a_1 = 2$, to otrzymujemy ciąg stały o wyrazach równych 2.

2.1.24. Ponieważ $0 = a_1 \leq a_2$ i $a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_n - a_{n-1}$, więc łatwo wykazać, stosując zasadę indukcji matematycznej, że $a_{n+1} \geq a_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ciąg jest ograniczony z góry np. przez $\sqrt{1+4c}$. Łatwo pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

2.1.25. Ponieważ $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$ oraz $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2(a_n - a_{n-1})$, więc łatwo wykazać, stosując zasadę indukcji matematycznej, że dla wszystkich naturalnych n mamy $a_{n+1} \geq a_n$. Ciąg jest ograniczony z góry przez 2 i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

2.1.26. Jeśli $k = 1$, to $a_n = 5^n$, $n \in \mathbb{N}$, i ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do nieskończoności. Dla $k > 1$ mamy

$$a_2 = \sqrt[k]{5\sqrt[k]{5}} > \sqrt[k]{5} = a_1 \quad \text{oraz} \quad a_{n+1}^k - a_n^k = 5(a_n - a_{n-1}).$$

Zatem, stosując zasadę indukcji matematycznej, można pokazać, że ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem ściśle rosnącym. Ponadto $a_n < \sqrt[k-1]{5}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Łatwo sprawdzić, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[k-1]{5}$.

2.1.27. Zauważmy najpierw, że $1 \leq a_n \leq 2$, $n \in \mathbb{N}$. (Dowód indukcyjny). Monotoniczność ciągu wynika z zależności $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 3(a_n - a_{n-1})$. Dla $1 < a_1 < 2$ ciąg jest rosnący i jego granica wynosi 2, natomiast dla $a_1 = 1$ lub $a_1 = 2$ otrzymujemy ciągi stałe o wyrazach równych odpowiednio 1 i 2.

2.1.28.

(a) Mamy $a_1 < a_2$ oraz $a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_n - a_{n-1}$. Zatem, stosując zasadę indukcji matematycznej, można pokazać, że ciąg jest rosnący. Ponadto $a_n < c$ dla $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

(b) Ponieważ $b_2 = \sqrt{c\sqrt{c}} > \sqrt{c} = b_1$ oraz $b_{n+1}^2 - b_n^2 = c(b_n - b_{n-1})$, to łatwo wykazać, stosując zasadę indukcji matematycznej, że ciąg jest rosnący. Ciąg ten jest ograniczony z góry przez liczbę c, która jest jego granicą.

2.1.29. Za pomocą indukcji matematycznej można pokazać, że $0 < a_n < b$ i korzystając z tej nierówności łatwo udowodnić, że ciąg jest ściśle rosnący i jego granicą jest liczba b.

2.1.30. Na mocy zasady indukcji matematycznej ciąg ten jest ściśle rosnący. Ponadto jest on ograniczony z góry, np. przez 3. Jego granicą jest liczba $\dfrac{3+\sqrt{15}}{3}$.

2.1.31. Mamy $a_1 < a_2 < a_3$. Ponadto dla dowolnie ustalonego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest następująca implikacja

$$a_n < a_{n+1} < a_{n+2} \Longrightarrow a_{n+2} < a_{n+3}.$$

Zatem, na mocy uogólnionej zasady indukcji matematycznej (patrz rozwiązanie zadania 2.1.10), ciąg $\{a_n\}$ jest ściśle rosnący. Jest on ograniczony z góry przez 4 i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$.

2.1.32. Analogicznie jak w poprzednim zadaniu pokazujemy, że ciąg $\{a_n\}$ jest malejący i ograniczony z dołu przez 4 oraz że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$.

2.1.33. Z zależności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną mamy $a_n \geq b_n, n \in \mathbb{N}$. Stąd

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \leq a_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

czyli ciąg $\{a_n\}$ jest malejący. Ciąg $\{b_n\}$ jest rosnący, gdyż

$$b_{n+1} = \sqrt{b_n a_n} \geq \sqrt{b_n^2} = b_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ ponadto $b_1 < a_n$, $b_n < a_1$, więc oba ciągi są zbieżne.

Niech $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Przechodząc do granicy w równości $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$, otrzymujemy $\alpha = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Stąd $\alpha = \beta$.

2.1.34. Ze względu na oczywistą nierówność $2(a_n^2+b_n^2) \geq (a_n+b_n)^2$ otrzymujemy $a_n \geq b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Stąd

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+b_n^2}{a_n+b_n} \leq \frac{a_n^2+a_nb_n}{a_n+b_n} = a_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

czyli ciąg $\{a_n\}$ jest malejący.

W podobny sposób pokazujemy, że ciąg $\{b_n\}$ jest rosnący. Ponieważ ponadto $b_1 < a_n$, $b_n < a_1$, więc oba ciągi są zbieżne. Niech $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Przechodząc do granicy w równości $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$, otrzymujemy $\beta = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Stąd $\alpha = \beta$.

2.1.35. Ze względu na zależność między średnią arytmetyczną i średnią harmoniczną mamy $a_n \geq b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Stąd

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \leq a_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

czyli ciąg $\{a_n\}$ jest malejący. Natomiast ciąg $\{b_n\}$ jest rosnący, gdyż

$$b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} \geq b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ $b_1 < a_n, b_n < a_1$, więc oba ciągi są zbieżne.

Niech $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Przechodząc do granicy w równości $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, otrzymujemy $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Stąd mamy $\alpha = \beta$. Zauważmy również, że $a_{n+1}b_{n+1} = a_nb_n$, co oznacza, że ciąg $\{a_nb_n\}$ jest ciągiem stałym o wyrazach a_1b_1. Stąd $\alpha = \beta = \sqrt{a_1b_1}$.

2.1.36. Mamy $a_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}(a_n+1), n \in \mathbb{N}$. Stąd

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-na_n + (n+2)}{2(n+1)} < 0, \quad n \geq 4.$$

Ostatnia nierówność wynika z nierówności $na_n > n+2$, dla $n \geq 4$, którą dowodzimy indukcyjnie. Zatem ciąg ten jako malejący i o wyrazach dodatnich jest zbieżny. Niech $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Wtedy z zależności $a_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}(a_n+1)$, po przejściu do granicy, otrzymujemy $\alpha = 1$.

2.1.37. Z nierówności $a_{n+2} \leq \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n$ otrzymujemy $a_{n+2} + \frac{2}{3}a_{n+1} \leq a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n$. Zatem ciąg o wyrazach $b_n = a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n$ jest zbieżny jako malejący i ograniczony. Niech b oznacza granicę tego ciągu. Wykażemy, że ciąg $\{a_n\}$ jest również zbieżny i jego granicą jest $a = \frac{3}{5}b$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustalone. Wtedy istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że $\frac{\varepsilon}{6} > |b_n - b|$ dla $n \geq n_0$. Stąd

$$\frac{\varepsilon}{6} > |a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n - \frac{5}{3}a| \geq |a_{n+1} - a| - \frac{2}{3}|a_n - a| \quad \text{dla} \quad n \geq n_0.$$

A więc $|a_{n+1} - a| < \frac{2}{3}|a_n - a| + \frac{\varepsilon}{6}$. Stosując teraz metodę indukcji, można wykazać, że

$$|a_{n_0+k} - a| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k |a_{n_0} - a| + \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \ldots + \frac{2}{3} + 1\right)\frac{\varepsilon}{6}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^k |a_{n_0} - a| + \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k}{1 - \frac{2}{3}}\frac{\varepsilon}{6} < \left(\frac{2}{3}\right)^k |a_{n_0} - a| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ponieważ $\left(\frac{2}{3}\right)^k |a_{n_0} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla dostatecznie dużych k, więc $|a_n - a| < \varepsilon$ dla dostatecznie dużych n.

2.1.38.

(a) Stosując nierówność $G_{n+1} < A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, (zadanie 1.2.3) dla $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$, otrzymujemy

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Stąd

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Stosując nierówność $H_{n+1} < G_{n+1}$, $n > 1$, (zadanie 1.2.3) dla $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n+1} = 1 + \frac{1}{n-1}$, otrzymujemy

$$1 + \frac{1}{n} < \sqrt[n+1]{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n},$$

co z kolei jest równoważne nierówności $b_n < b_{n-1}, n > 1$.

(c) $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_n > a_n$.

W celu wykazania zbieżności ciągów $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ wystarczy jeszcze zauważyć, że $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1$, $n \in \mathbb{N}$. Ponadto mamy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.1.39.

(a) W celu wykazania monotoniczności wystarczy zastosować nierówność $G_{n+1} < A_{n+1}$ (zadanie 1.2.3), przyjmując: $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n+1} = 1 + \frac{x}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Jeśli $0 < x \leq 1$, to na mocy poprzedniego zadania mamy

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}.$$

Jeśli $x > 1$, to istnieje taka liczba naturalna n_0, że $x \leq n_0$. Wtedy z monotoniczności ciągu o wyrazach $\left(1+\frac{n_0}{n}\right)^n$ oraz z poprzedniego zadania otrzymujemy

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{n_0}{n}\right)^n < \left(1+\frac{n_0}{n_0 n}\right)^{n_0 n} < \mathrm{e}^{n_0}.$$

(b) Wystarczy powtórzyć rozumowania z części (a) i zauważyć, że dla $x \leq 0$ badany ciąg jest ograniczony z góry, np. przez 1.

2.1.40. Skorzystamy z nierówności $G_{n+l+1} > H_{n+l+1}, n \in \mathbb{N}$ (zadanie 1.2.3), przyjmując $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \ldots = a_{n+l+1} = 1 + \frac{x}{n}$. Mamy

$$\sqrt[n+l+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+l}} > 1+\frac{x(n+l)}{n^2+nl+x+n} > 1+\frac{x(n+l)}{(n+1)(n+l)}.$$

Stąd $b_n > b_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

2.1.41. Na mocy nierówności podanej we wskazówce otrzymujemy

$$a_{n+1}-a_n = \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} > 0,$$
$$b_{n+1}-b_n = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n} < 0.$$

Ponieważ $a_2 \le a_n < b_n \le b_1$, $n > 1$, więc oba ciągi są zbieżne (jak łatwo zauważyć do tej samej granicy).

2.1.42. Monotoniczność i ograniczoność ciągu $\{a_n\}$ jest łatwa do sprawdzenia. Z warunku $a_{n+1}^2 = a_n$ wynika, że granicą tego ciągu jest 1. Wykażemy teraz monotoniczność ciągu $\{c_n\}$. Załóżmy najpierw, że $x > 1$. Wtedy

$$c_n = 2^n(a_n-1) = 2^n(a_{n+1}^2-1) = 2^n(a_{n+1}-1)(a_{n+1}+1)$$
$$= 2^{n+1}(a_{n+1}-1)\frac{a_{n+1}+1}{2} > c_{n+1},$$

czyli dla $x > 1$ ciąg $\{c_n\}$ jest ściśle malejący. Podobnie wykazujemy, że dla $0 < x < 1$ ciąg $\{c_n\}$ jest ściśle rosnący. Dla $x = 1$ ciąg ten jest stały. Analogicznie dowodzimy monotoniczności ciągu $\{d_n\}$. Dla $x > 1$ ciąg $\{c_n\}$ jest zbieżny jako malejący i ograniczony z dołu przez zero. Stąd i z równości

$$d_n = \frac{c_n}{a_n}$$

wynika zbieżność obu ciągów do wspólnej granicy.

2.2 GRANICA CIĄGU WŁASNOŚCI CIĄGÓW ZBIEŻNYCH

2.2.1.

(a) 1. **(b)** 1. **(c)** -1.

(d) Mamy

$$0 < (\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdot\ldots\cdot(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}) < (\sqrt{2}-1)^n.$$

Zatem szukaną granicą jest 0.

(e) Pokażemy, że ciąg o wyrazach $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ jest zbieżny do zera. Mamy $a_{n+1} = a_n\frac{1}{2}\frac{(n+1)^2}{n^2} < a_n$ dla $n \ge 3$. Zatem ciąg ten jako malejący i ograniczony od dołu przez zero jest zbieżny. Jego granica g spełnia równanie $g = \frac{1}{2}g$, a więc

$g = 0$. Niech $k_n = [\sqrt{n}]$. Wtedy $k_n \le \sqrt{n} < k_n + 1$. Stąd

$$0 < \frac{n}{2^{\sqrt{n}}} < 2\frac{(k_n+1)^2}{2^{k_n+1}}.$$

Zatem szukaną granicą jest 0.

(f) Niech $a_n = \frac{n!}{2^{n^2}}$. Wtedy, podobnie jak w poprzednim zadaniu, mamy $a_{n+1} = a_n\frac{1}{2}\frac{(n+1)}{2^{2n}} < a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Stąd już łatwo wynika, że $g = 0$.

(g) Niech

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right).$$

Wtedy $a_n = \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2\sqrt{n}}$, co wynika z faktu, że

$$\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}} = \frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{-2}.$$

A więc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(h) Mamy

$$(1+2+\ldots+n)\frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} \le (1+2+\ldots+n)\frac{1}{n^2+1}.$$

Stąd już wynika, że szukaną granicą jest $\frac{1}{2}$.

(i) Stosując podobne oszacowania do podanych w części (h), pokazujemy, że ta granica jest także równa $\frac{1}{2}$.

2.2.2. Niech $a_n = \frac{n^s}{(1+p)^n}$. Wtedy mamy $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^s\frac{1}{p+1}$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^s\frac{1}{p+1} = \frac{1}{p+1}$, więc począwszy od pewnego wyrazu rozpatrywany ciąg jest malejący. Jest on oczywiście ograniczony z dołu przez zero. Jego granica g spełnia warunek $g = \frac{1}{p+1}g$, czyli $g = 0$.

2.2.3. Mamy

$$0 < (n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right) < n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right) = \frac{1}{n^{1-\alpha}}.$$

Zatem szukaną granicą jest zero.

2.2.4. Niech $\alpha = \frac{p}{q}$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$. Dla $n > q$ liczba $n!\alpha\pi$ jest całkowitą wielokrotnością liczby π, co oznacza, że rozpatrywany ciąg jest od pewnego wskaźnika stały o wyrazach równych zero.

2.2.5. Przypuśćmy, że granica ta istnieje. Wtedy

$$0 = \lim_{n\to\infty}(\sin(n+2)-\sin n) = 2\sin 1 \lim_{n\to\infty}\cos(n+1),$$

czyli byłoby $\lim_{n\to\infty}\cos n = 0$. Podobnie

$$0 = \lim_{n\to\infty}(\cos(n+2)-\cos n) = -2\sin 1 \lim_{n\to\infty}\sin(n+1).$$

Otrzymaliśmy więc sprzeczność, gdyż $\sin^2 n+\cos^2 n = 1, n\in\mathbb{N}$. Zatem granica $\lim_{n\to\infty}\sin n$ nie istnieje.

2.2.6. Patrz rozwiązanie poprzedniego zadania.

2.2.7. Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\left(a+\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}a^2+\frac{n(n-1)}{n^2}a+\frac{1+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}\right) = a^2+a+\frac{1}{3}.$$

Ostatnia równość wynika ze wzoru $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2.2.8. Mamy

$$a_n+a_n^2+\ldots+a_n^k-k = (a_n-1)+(a_n^2-1)+\ldots+(a_n^k-1).$$

Ponadto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^l-1}{a_n-1} = l \qquad \text{dla} \qquad l = 1,2,\ldots,k.$$

Zatem szukana granica wynosi $1+2+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$.

2.2.9. Wskazówka. Skorzystać z równości

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+2}, \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Szukana granica wynosi $\frac{1}{4}$.

2.2.10. Ponieważ

$$\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(k-1)((k+1)^2-(k+1)+1)}{(k+1)(k^2-k+1)},$$

więc

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}.$$

2.2.11. $\frac{1}{6}$.

2.2.12. Ponieważ $1-\frac{2}{k(k+1)} = \frac{(k+2)(k-1)}{k(k+1)}$, więc

$$\left(1-\frac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot 4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{2}{(n+1)\cdot(n+2)}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{n+3}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}.$$

2.2.13. Mamy

$$k^3+6k^2+11k+5 = (k+1)(k+2)(k+3)-1.$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+3)!}\right) = \frac{5}{3}.$$

2.2.14. Wskazówka.

$$\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} = \frac{1}{1-x^{2^{k-1}}}-\frac{1}{1-x^{2^k}} \qquad \text{dla} \qquad k = 1,2,\ldots,n.$$

Stąd otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} = \begin{cases}\dfrac{x}{1-x} & \text{dla} \quad |x|<1,\\ \dfrac{1}{1-x} & \text{dla} \quad |x|>1.\end{cases}$$

2.2.15. Ponieważ dla $x\neq 1$ spełniona jest równość

$$\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^{2^n})}{1-x} = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x},$$

więc

$$a_n = \prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k}) = \begin{cases}\dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} & \text{dla} \quad n=0,1,\ldots,\ x\neq 1,\\ 2^{n+1} & \text{dla} \quad n=0,1,\ldots,\ x=1.\end{cases}$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty}a_n = \begin{cases}-\infty & \text{dla} \quad x<-1,\\ 0 & \text{dla} \quad x=-1,\\ \dfrac{1}{1-x} & \text{dla} \quad |x|<1,\\ +\infty & \text{dla} \quad x\geq 1.\end{cases}$$

2.2.16. Dla $x\neq 1$ mamy

$$a_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{2}{x^{2^k}+x^{-2^k}}\right) = \prod_{k=0}^{n}\frac{(x^{2^k}+1)^2}{x^{2^{k+1}}+1}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)(x+1)(x^2+1)\cdot\ldots\cdot(x^{2^n}+1)}{(x-1)(x^{2^{n+1}}+1)}$$

$$= \frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x^{2^{n+1}}-1}{x^{2^{n+1}}+1}.$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -\dfrac{x+1}{x-1} & \text{dla} \quad |x|<1, \\ \dfrac{x+1}{x-1} & \text{dla} \quad |x|>1, \\ 0 & \text{dla} \quad x=-1, \\ +\infty & \text{dla} \quad x=1. \end{cases}$$

2.2.17. Niech x będzie liczbą różną od 1. Wtedy

$$1+x^{3^k}+x^{2\cdot 3^k} = \frac{(1+x^{3^k}+x^{2\cdot 3^k})(x^{3^k}-1)}{x^{3^k}-1} = \frac{x^{3^{k+1}}-1}{x^{3^k}-1}.$$

Stąd

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x^{3^k}+x^{2\cdot 3^k}) = \frac{x^{3^{n+1}}-1}{x^3-1}.$$

Zatem szukana granica g wynosi

$$g = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x^3} & \text{dla} \quad |x|<1, \\ +\infty & \text{dla} \quad |x|>1, \\ 1 & \text{dla} \quad x=-1, \\ +\infty & \text{dla} \quad x=1. \end{cases}$$

2.2.18. Oczywiście $k\cdot k! = (k+1)! - k!$, $k\in\mathbb{N}$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} = 1.$$

2.2.19. Zauważmy najpierw, że zadanie to ma sens dla $x\neq 0$. Na podstawie zadania 2.2.3 mianownik $n^x-(n-1)^x$ dąży do zera dla $0<x<1$. Ponadto dla $x<0$ mianownik ten również dąży do zera, natomiast dla $x=1$ jest on równy 1. We wszystkich tych przypadkach rozpatrywana granica jest równa $+\infty$ lub $-\infty$. Niech więc $x>1$ i $k=[x]$. Wtedy $k\geq 1$ oraz

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k \leq 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^x < 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k+1}.$$

Stąd można wywnioskować, że istnieją takie liczby rzeczywiste α,β, że

$$\alpha < n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^x\right) < \beta,$$

co z kolei implikuje nierówność

$$\alpha n^{x-1} < n^x\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^x\right) < \beta n^{x-1}.$$

Zatem, jeśli $x-1<1995$, to szukana granica jest nieskończona. Jeśli natomiast $x-1>1995$, to granica ta jest równa zero.

Pozostaje więc do zbadania przypadek $x=1996$. Stosując wzór dwumienny Newtona, można łatwo pokazać, że istotnie w tym przypadku

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1995}}{n^x-(n-1)^x} = \frac{1}{1996}.$$

2.2.20. Mamy

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n-b^n} & \text{dla} \quad a>b, \\ \dfrac{n+1}{n}a & \text{dla} \quad a=b. \end{cases}$$

Stąd $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

2.2.21. Łatwo dowieść, że $a_n=(n-1)^2$. Stąd $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

2.2.22. Jest $a_n = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+nb^2}}$. Zatem $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.2.23. Mamy $a_n = 1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$. Więc $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

2.2.24. Łatwo udowodnić, że $a_n = 1+b+\ldots+b^{n-1}+b^n a$. Stąd

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-b}+\left(a-\dfrac{1}{1-b}\right)b^n & \text{dla} \quad b\neq 1, \\ n+a & \text{dla} \quad b=1. \end{cases}$$

Zatem dla $b=1$, $a\in\mathbb{R}$, ciąg jest rozbieżny do $+\infty$. Dla $b\neq 1$, $a=\frac{1}{1-b}$ ciąg jest zbieżny do $\frac{1}{1-b}$. Jeśli natomiast $a\neq\frac{1}{1-b}$ i $|b|<1$, to rozpatrywany ciąg też jest zbieżny do $\frac{1}{1-b}$. W pozostałych przypadkach ciąg jest rozbieżny. Mianowicie, jeśli $b\leq -1$ oraz $a\neq\frac{1}{1-b}$, to ciąg nie ma granicy ani skończonej, ani nieskończonej. Jeśli $b>1$ i $a>\frac{1}{1-b}$, to ciąg jest rozbieżny do $+\infty$. Jeśli natomiast $b>1$ i $a<\frac{1}{1-b}$, to ciąg jest rozbieżny do $-\infty$.

2.2.25. Wzór na wyraz ogólny ciągu można łatwo wykazać indukcyjnie. Ponieważ można przyjąć, że $\alpha>\beta$, więc $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Wtedy

$$\alpha\sqrt[n]{1-\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^n} \leq \sqrt[n]{\alpha^n-\beta^n} \leq \alpha\sqrt[n]{1+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^n}.$$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^n = 0$, więc $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \alpha$.

2.2.26. Zauważmy najpierw, że $b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$. Stąd otrzymujemy

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n - b_n),$$

co oznacza, że ciąg o wyrazach $a_n - b_n$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $\frac{1}{4}$. Zatem ciąg ten jest zbieżny do zera. Wystarczy teraz wykazać, że np. ciąg o wyrazach a_n jest zbieżny. Załóżmy, że $a \leq b$. Wtedy łatwo sprawdzić, że $\{a_n\}$ jest ciągiem rosnącym i $a_n \leq b_n \leq b$. Zatem w tym przypadku ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny.
Z powyższych rozważań wynika, że zbieżny jest również ciąg $\{b_n\}$ oraz, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
W przypadku $a > b$ można zastosować analogiczne rozważania.

2.2.27. Mamy

$$a + aa + \ldots + \overbrace{aa\ldots a}^{n \text{ cyfr}} = a(1 + 11 + \ldots + \overbrace{11\ldots 1}^{n \text{ cyfr}})$$
$$= a(10^{n-1} + 2\cdot 10^{n-2} + \ldots + n\cdot 10^0)$$
$$= a((1 + 10 + \ldots + 10^{n-1}) + (1 + 10 + \ldots + 10^{n-2}) + \ldots + (1 + 10) + 1)$$
$$= a\left(\frac{10^n - 1}{9} + \frac{10^{n-1} - 1}{9} + \ldots + \frac{10^2 - 1}{9} + \frac{10 - 1}{9}\right) = a\frac{10(10^n - 1) - 9n}{81}.$$

Stąd szukaną granicą jest $\frac{10a}{81}$.

2.2.28. Ponieważ ciąg o wyrazach $\sqrt[n]{n}$, $n \geq 3$, jest malejący i jego granicą jest 1, więc

$$(\sqrt[n]{n} - 1)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Stąd $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n = 0$.

2.2.29. Skoro $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to począwszy od pewnego wskaźnika prawdziwa jest nierówność $|a_n|^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Stąd $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = 0$.

2.2.30. Niech $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = a_l$. Dzieląc licznik i mianownik przez a_l^n, otrzymamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1 a_1^{n+1} + p_2 a_2^{n+1} + \ldots + p_k a_k^{n+1}}{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + \ldots + p_k a_k^n} = a_l.$$

Zatem szukaną granicą jest $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

2.2.31.
(a) Niech $\varepsilon > 0$ będzie tak małe, że $q + \varepsilon < 1$. Wtedy istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q + \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geq n_0.$$

Stąd

$$|a_n| < (q + \varepsilon)^{n-n_0}|a_{n_0}|, \quad n \geq n_0.$$

Ponieważ $0 < q + \varepsilon < 1$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, a więc również $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Niech teraz $\varepsilon > 0$ będzie tak małe, że $q - \varepsilon > 1$. Wtedy począwszy od pewnego wskaźnika n_1 mamy $|a_n| > (q - \varepsilon)^{n-n_1}|a_{n_1}|$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} (q - \varepsilon)^{n-n_1} = +\infty$, więc tym bardziej $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

2.2.32.
(a) Niech $\varepsilon > 0$ będzie tak małe, że $q + \varepsilon < 1$. Wtedy istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że $|a_n| < (q + \varepsilon)^n$, $n \geq n_0$. Stąd $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Mamy $|a_n| > (q - \varepsilon)^n$, $n > n_1$. Jeśli $\varepsilon > 0$ jest dostatecznie małe, to $q - \varepsilon > 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} (q - \varepsilon)^n = +\infty$, a więc również $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

2.2.33. Niech $a_n = n^k x^n$. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k x = x, \quad \text{gdzie} \quad 0 < x < 1.$$

Zatem, na mocy zadania 2.2.31, rozpatrywany ciąg jest zbieżny do zera. (Porównaj rozwiązanie zadania 2.2.2).

2.2.34. Oznaczmy wyrazy rozpatrywanego ciągu przez a_n. Otrzymujemy

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{m - n}{n + 1} x\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|.$$

Na mocy zadania 2.2.31 rozpatrywany ciąg jest zbieżny do zera.

2.2.35. Niech $|b_n| < M, n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, więc dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ dla $n > n_0$. Stąd

$$|a_n b_n| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad n > n_0.$$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

2.2.36. Bez zmniejszenia ogólności rozważań można przyjąć, że $a \leq b$. Załóżmy najpierw, że $a < b$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie tak małe, że $a + \varepsilon < b - \varepsilon$. Stąd i z definicji granicy ciągu wynika, że począwszy od pewnego wskaźnika prawdziwe są nierówności $a_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < b_n$. A więc $\max\{a_n, b_n\} = b_n$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \lim_{n\to\infty} b_n = b = \max\{a, b\}.$$

Jeśli natomiast $a = b$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie n_0, że dla $n > n_0$ mamy $|a_n - a| < \varepsilon$ i $|b_n - a| < \varepsilon$, co oznacza , że

$$|\max\{a_n, b_n\} - a| < \varepsilon.$$

Z powyższych rozważań wynika więc, że

$$\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\}.$$

2.2.37. Ponieważ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, więc dla dowolnego $\varepsilon \in (0,1)$ mamy

$$\sqrt[p]{1-\varepsilon} < \sqrt[p]{1+a_n} < \sqrt[p]{1+\varepsilon} \quad \text{dla dostatecznie dużych } n.$$

Stąd $\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{1+a_n} = 1$.

2.2.38. Niech $x_n = \sqrt[p]{1+a_n}$. Wtedy na podstawie poprzedniego zadania $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[p]{1+a_n}-1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - 1}{x_n^p - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - 1}{(x_n - 1)(x_n^{p-1} + \ldots + 1)} = \frac{1}{p}.$$

2.2.39. Na podstawie zadania 1.2.1 mamy

$$n\left(\sqrt[p]{1+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{n}} - 1\right)$$

$$\leq n\left(\sqrt[p]{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)\left(1+\frac{a_2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a_p}{n}\right)} - 1\right)$$

$$= \sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2)\cdot\ldots\cdot(n+a_p)} - n. \tag{1}$$

Ponadto na podstawie zadania 1.2.4 otrzymujemy

$$n\left(\sqrt[p]{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)\left(1+\frac{a_2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a_p}{n}\right)} - 1\right)$$

$$= n\left(\sqrt[p]{1+\frac{a_1+\ldots+a_p}{n} + \frac{\sum_{i<j} a_i a_j}{n^2} + \ldots + \frac{a_1\cdot\ldots\cdot a_p}{n^p}} - 1\right)$$

$$\leq \frac{a_1+\ldots+a_p}{p} + \frac{\sum_{i<j} a_i a_j}{np} + \ldots + \frac{a_1\cdot\ldots\cdot a_p}{pn^{p-1}}. \tag{2}$$

Z nierówności (1) i (2) oraz z poprzedniego zadania wynika, że szukaną granicą jest $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{p}$.

2.2.40. Zauważmy , że

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \leq \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Stąd i z twierdzenia o trzech ciągach wynika więc, że szukaną granicą jest 1.

2.2.41. Niech a będzie największą z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Wtedy

$$\frac{a}{\sqrt[n]{p}} \leq \sqrt[n]{\frac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_p^n}{p}} \leq a.$$

Zatem na podstawie twierdzenia o trzech ciągach

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_p^n}{p}} = a = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}.$$

2.2.42. Ponieważ

$$1 \leq \sqrt[n]{2\sin^2\frac{n^{1996}}{n+1} + \cos^2\frac{n^{1996}}{n+1}} \leq \sqrt[n]{2},$$

więc $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\sin^2\frac{n^{1996}}{n+1} + \cos^2\frac{n^{1996}}{n+1}} = 1$.

2.2.43. W celu obliczenia granicy rozpatrywanego ciągu zastosujemy twierdzenie o trzech ciągach. Mamy

$$1 < (1+n(1+\cos n))^{\frac{1}{2n+n\sin n}} < (1+2n)^{\frac{1}{2n+n\sin n}}.$$

Pokażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} (1+2n)^{\frac{1}{2n+n\sin n}} = 1. \tag{$*$}$$

Istotnie, ponieważ

$$1 < (1+2n)^{\frac{1}{2n+n\sin n}} < (1+2n)^{\frac{1}{n}},$$

więc z twierdzenia o trzech ciągach wynika równość $(*)$. Zatem granicą rozpatrywanego ciągu jest 1.

2.2.44. Na podstawie zależności $H_2 \leq G_2 \leq A_2$ (patrz zadanie 1.2.3) mamy

$$1+\frac{x}{2+x} = \frac{2}{\frac{1}{1+x}+1} \leq \sqrt{(1+x)1} = \sqrt{1+x} \leq \frac{1+x+1}{2} = 1+\frac{x}{2}, \quad x > -1.$$

Stąd, przyjmując $x = \frac{k}{n^2}$, otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}} \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2}. \tag{$*$}$$

Ponadto mamy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2} = \frac{n(n+1)}{4n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4}$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2+k} \geq \frac{1}{2n^2+n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2(2n^2+n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4}.$$

Z powyższych rozważań, z nierówności $(*)$ oraz z twierdzenia o trzech ciągach wynika więc, że

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1 \right) = \frac{1}{4}.$$

2.2.45. Niech $x > -1$. Wtedy na podstawie zależności $H_3 \leq G_3 \leq A_3$ (patrz zadanie 1.2.3) mamy

$$1+\frac{x}{3+2x} = \frac{3}{\frac{1}{1+x}+1+1} \leq \sqrt[3]{(1+x)1\cdot 1} = \sqrt[3]{1+x} \leq \frac{1+x+1+1}{3} = 1+\frac{x}{3}.$$

Stąd, przyjmując $x = \frac{k^2}{n^3}$, otrzymujemy

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k^2}{n^3}}{3+2\frac{k^2}{n^3}} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}} - 1 \right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3n^3}.$$

Ponadto mamy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{18n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{9}$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k^2}{n^3}}{3+2\frac{k^2}{n^3}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3n^3+2k^2} \geq \frac{1}{3n^3+2n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(3n^3+2n^2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{9}.$$

Z powyższych rozważań, z nierówności $(*)$ oraz z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}} - 1 \right) = \frac{1}{9}.$$

2.2.46. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_k} = 1$ dla $k = 1, 2, \ldots, p$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \sqrt[n]{a_k} \right)^p = 1$.

2.2.47. Dla dostatecznie dużego n_0 oraz dla $n > n_0$ mamy $0 < \alpha + \frac{1}{n} < \alpha + \frac{1}{n_0} < 1$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha+\frac{1}{n} \right)^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)^n}{1-\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

2.2.48. Dla $k = 1$ równość jest oczywista. Załóżmy więc, że $k > 1$. W celu obliczenia tej granicy wykorzystamy twierdzenie o trzech ciągach. Mamy

$$0 \leq (\sqrt[n]{k} - 1)^2 = \sqrt[n]{k^2} - 2\sqrt[n]{k} + 1.$$

Stąd

$$(*) \qquad (2\sqrt[n]{k} - 1)^n \leq (\sqrt[n]{k^2})^n = k^2.$$

Ponadto

$$(2\sqrt[n]{k} - 1)^n = k^2 \left(\frac{2}{\sqrt[n]{k}} - \frac{1}{\sqrt[n]{k^2}} \right)^n = k^2 \left(1 + \left(\frac{2}{\sqrt[n]{k}} - \frac{1}{\sqrt[n]{k^2}} - 1 \right) \right)^n.$$

Stąd i z nierówności Bernoulliego otrzymujemy

$$(**) \quad (2\sqrt[n]{k} - 1)^n > k^2 \left(1 + n \left(\frac{2}{\sqrt[n]{k}} - \frac{1}{\sqrt[n]{k^2}} - 1 \right) \right) = k^2 \left(1 - n \frac{(\sqrt[n]{k} - 1)^2}{\sqrt[n]{k^2}} \right).$$

Stosując ponownie nierówność Bernoulliego, otrzymujemy

$$k = (\sqrt[n]{k} - 1 + 1)^n > 1 + n(\sqrt[n]{k} - 1) > n(\sqrt[n]{k} - 1),$$

czyli

$$(\sqrt[n]{k} - 1)^2 < \frac{k^2}{n^2}.$$

Stąd i z nierówności $(**)$ mamy

$$(***) \qquad (2\sqrt[n]{k} - 1)^n > k^2 \left(1 - \frac{k^2}{n\sqrt[n]{k^2}} \right).$$

Zatem z nierówności $(*)$, $(***)$ i z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} (2\sqrt[n]{k} - 1)^n = k^2.$$

2.2.49. Podobnie jak w poprzednim zadaniu dowodzimy, że

$$1 \geq \frac{(2\sqrt[n]{n} - 1)^n}{n^2} \geq 1 - n\frac{(\sqrt[n]{n} - 1)^2}{\sqrt[n]{n^2}}.$$

Wystarczy więc udowodnić równość

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{(\sqrt[n]{n} - 1)^2}{\sqrt[n]{n^2}} = 0.$$

W tym celu zauważmy, że dla $n \geq 3$ mamy

$$n = (\sqrt[n]{n} - 1 + 1)^n > \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(\sqrt[n]{n} - 1)^3.$$

Stąd

$$0 \leq n(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \leq n \left(\frac{3!}{(n-1)(n-2)} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{n} - 1)^2 = 0$.

oraz

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}\geq\frac{1}{2n^2+n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2(2n^2+n)}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{4}.$$

Z powyższych rozważań, z nierówności $(*)$ oraz z twierdzenia o trzech ciągach wynika więc, że

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{4}.$$

2.2.45. Niech $x>-1$. Wtedy na podstawie zależności $H_3\leq G_3\leq A_3$ (patrz zadanie 1.2.3) mamy

$$1+\frac{x}{3+2x}=\frac{3}{\frac{1}{1+x}+1+1}\leq\sqrt[3]{(1+x)1\cdot 1}=\sqrt[3]{1+x}\leq\frac{1+x+1+1}{3}=1+\frac{x}{3}.$$

Stąd, przyjmując $x=\frac{k^2}{n^3}$, otrzymujemy

$$(*)\qquad\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k^2}{n^3}}{3+2\frac{k^2}{n^3}}\leq\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3n^3}.$$

Ponadto mamy

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3n^3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{18n^3}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{9}$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k^2}{n^3}}{3+2\frac{k^2}{n^3}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3n^3+2k^2}\geq\frac{1}{3n^3+2n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(3n^3+2n^2)}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{9}.$$

Z powyższych rozważań, z nierówności $(*)$ oraz z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1\right)=\frac{1}{9}.$$

2.2.46. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_k}=1$ dla $k=1,2,\ldots,p$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\sqrt[n]{a_k}\right)^p=1$.

2.2.47. Dla dostatecznie dużego n_0 oraz dla $n>n_0$ mamy $0<\alpha+\frac{1}{n}<\alpha+\frac{1}{n_0}<1$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)^n}{1-\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{1-\alpha}.$$

2.2.48. Dla $k=1$ równość jest oczywista. Załóżmy więc, że $k>1$. W celu obliczenia tej granicy wykorzystamy twierdzenie o trzech ciągach. Mamy

$$0\leq(\sqrt[n]{k}-1)^2=\sqrt[n]{k^2}-2\sqrt[n]{k}+1.$$

Stąd

$$(*)\qquad(2\sqrt[n]{k}-1)^n\leq(\sqrt[n]{k^2})^n=k^2.$$

Ponadto

$$(2\sqrt[n]{k}-1)^n=k^2\left(\frac{2}{\sqrt[n]{k}}-\frac{1}{\sqrt[n]{k^2}}\right)^n=k^2\left(1+\left(\frac{2}{\sqrt[n]{k}}-\frac{1}{\sqrt[n]{k^2}}-1\right)\right)^n.$$

Stąd i z nierówności Bernoulliego otrzymujemy

$$(**)\qquad(2\sqrt[n]{k}-1)^n>k^2\left(1+n\left(\frac{2}{\sqrt[n]{k}}-\frac{1}{\sqrt[n]{k^2}}-1\right)\right)=k^2\left(1-n\frac{(\sqrt[n]{k}-1)^2}{\sqrt[n]{k^2}}\right).$$

Stosując ponownie nierówność Bernoulliego, otrzymujemy

$$k=(\sqrt[n]{k}-1+1)^n>1+n(\sqrt[n]{k}-1)>n(\sqrt[n]{k}-1),$$

czyli

$$(\sqrt[n]{k}-1)^2<\frac{k^2}{n^2}.$$

Stąd i z nierówności $(**)$ mamy

$$(***)\qquad(2\sqrt[n]{k}-1)^n>k^2\left(1-\frac{k^2}{n\sqrt[n]{k^2}}\right).$$

Zatem z nierówności $(*)$, $(***)$ i z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}(2\sqrt[n]{k}-1)^n=k^2.$$

2.2.49. Podobnie jak w poprzednim zadaniu dowodzimy, że

$$1\geq\frac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2}\geq 1-n\frac{(\sqrt[n]{n}-1)^2}{\sqrt[n]{n^2}}.$$

Wystarczy więc udowodnić równość

$$\lim_{n\to\infty}n\frac{(\sqrt[n]{n}-1)^2}{\sqrt[n]{n^2}}=0.$$

W tym celu zauważmy, że dla $n\geq 3$ mamy

$$n=(\sqrt[n]{n}-1+1)^n>\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(\sqrt[n]{n}-1)^3.$$

Stąd

$$0\leq n(\sqrt[n]{n}-1)^2\leq n\left(\frac{3!}{(n-1)(n-2)}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{n}-1)^2=0$.

2.2.50.

(a) Mamy

$$|a_{n+k}-a_n| = \frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\operatorname{arctg}(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\operatorname{arctg}(n+k)}{2^{n+k}}$$
$$< \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+k}}\right) < \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ niech $n_0 = \left[\log_2 \frac{\pi}{\varepsilon} - 1\right]$. Wtedy $|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i $n > n_0$. Zatem warunek Cauchy'ego jest spełniony, a więc ciąg ten jest zbieżny.

(b) Ponieważ $4^n > n^4$ dla $n \geq 5$, więc

$$|a_{n+k}-a_n| < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+k)^2}.$$

Stąd

$$|a_{n+k}-a_n| < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)}$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ i $n > n_0$, gdzie $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

(c) Zauważmy, że

$$|a_{2n}-a_n| = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \ldots + \frac{1}{n+1} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Oznacza to, że warunek Cauchy'ego nie jest spełniony, a więc ciąg nie jest zbieżny.

(d)

$$|a_{n+k}-a_n| = \left|\frac{(-1)^{n+k-1}}{(n+k)(n+k+1)} + \frac{(-1)^{n+k-2}}{(n+k-1)(n+k)} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}\right|$$
$$\leq \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} + \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} + \ldots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$
$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+k+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ i $n > n_0$, gdzie $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$.

(e)
$$|a_{n+k}-a_n| \leq M(|q|^{n+k} + |q|^{n+k-1} + \ldots + |q|^{n+1})$$
$$= M\left(\frac{|q|^{n+1}(1-|q|^k)}{1-|q|}\right) \leq \frac{M}{1-|q|}|q|^{n+1} < \varepsilon$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ i $n > n_0$, gdzie $n_0 = \left[\frac{\ln\frac{(1-|q|)\varepsilon}{M}}{\ln|q|} - 1\right]$.

(f) $a_{2n} - a_n = \frac{2n}{(2n+1)^2} + \frac{2n-1}{(2n)^2} + \ldots + \frac{n+1}{(n+2)^2} \geq n\frac{2n}{(2n+1)^2} \geq \frac{2n^2}{(3n)^2} = \frac{2}{9}$.

Zatem warunek Cauchy'ego nie jest spełniony, czyli ciąg nie jest zbieżny.

2.2.51. Z warunku podanego w zadaniu otrzymujemy

$$|a_{n+k}-a_n| = |a_{n+k} - a_{n+k-1} + a_{n+k-1} - a_{n+k-2} + \ldots + a_{n+1} - a_n|$$
$$< \lambda(|a_{n+k-1} - a_{n+k-2}| + |a_{n+k-2} - a_{n+k-3}| + \ldots + |a_n - a_{n-1}|)$$
$$< (\lambda^k + \lambda^{k-1} + \ldots + \lambda^2 + \lambda)|a_n - a_{n-1}|$$
$$< (\lambda^k + \lambda^{k-1} + \ldots + \lambda^2 + \lambda)\lambda^{n-2}|a_2 - a_1|$$
$$= \frac{\lambda^{n-1}(1-\lambda^k)}{1-\lambda}|a_2-a_1| < \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda}|a_2-a_1|.$$

Zatem dla dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ i $n > n_0$, gdzie $n_0 = \left[\frac{\ln\frac{\varepsilon(1-\lambda)}{|a_2-a_1|}}{\ln\lambda}\right]$, spełniona jest nierówność $|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$.

2.2.52. Ciąg $\{S_n\}$ jako zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego. Pokażemy, że ciąg o wyrazach $\ln\sigma_n$ spełnia również warunek Cauchy'ego, a więc jest zbieżny. Istotnie mamy

$$\ln\sigma_{n+k} - \ln\sigma_n = \ln\left(1 + \frac{1}{a_{n+k}}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right) < \frac{1}{a_{n+k}} + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}} < \varepsilon$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz dla dostatecznie dużych n.

2.2.53. Na mocy zadania 1.1.23

$$R_{n+k} - R_n = (R_{n+k} - R_{n+k-1}) + (R_{n+k-1} - R_{n+k-2}) + \ldots + (R_{n+1} - R_n)$$
$$= (-1)^n\left(\frac{(-1)^{k-1}}{q_{n+k-1}q_{n+k}} + \frac{(-1)^{k-2}}{q_{n+k-2}q_{n+k-1}} + \ldots - \frac{1}{q_{n+1}q_{n+2}} + \frac{1}{q_nq_{n+1}}\right).$$

Stąd i z monotoniczności ciągu $\{q_n\}$ oraz faktu, że $q_n \geq n$ (patrz rozwiązanie zadania 1.1.24) wynika, że

$$|R_{n+k} - R_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}q_n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

2.2.54. Niech r oznacza różnicę tego ciągu. Załóżmy najpierw, że $r \neq 0$. Wtedy

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)\frac{1}{r}.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+1}}\right) = \frac{1}{a_1 r}.$$

Dla $r = 0$ ciąg arytmetyczny jest ciągiem stałym i dlatego

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+1}}\right) = +\infty.$$

2.2.55. Niech r oznacza różnicę tego ciągu. Załóżmy najpierw, że $r \neq 0$. Ponieważ

$$\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{r},$$

więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Dla $r = 0$ ciąg arytmetyczny jest ciągiem stałym i dlatego rozważana granica jest równa $+\infty$.

2.2.56.

(a) Z zadania 2.1.38 wynika, że

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Stąd

$$(*) \qquad 1 < n(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1) < n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Ponadto, wykorzystując nierówność Bernoulliego (zadanie 1.2.4), można pokazać, że

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n^2}.$$

Zatem

$$n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Stąd i z nierówności $(*)$ oraz z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1) = 1.$$

(b) Dla dowolnie ustalonego n mamy

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \ldots + \mathrm{e}^{\frac{n}{n}}}{n} = \frac{(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1)}.$$

Stąd i z części (a) otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \ldots + \mathrm{e}^{\frac{n}{n}}}{n} = \mathrm{e} - 1.$$

2.2.57. Mamy $a_{n+1} - a_n = -p(a_n - a_{n-1})$. Zatem

$$\begin{aligned} a_n &= a + (b-a) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a + (b-a)(1 - p + p^2 + \ldots + (-1)^n p^{n-2}). \end{aligned}$$

Jeśli $b = a$, to ciąg $\{a_n\}$ jest stały i zbieżny do a. Jeśli natomiast $a \neq b$, to ciąg ten jest zbieżny dla $|p| < 1$ i jego granicą jest $a + \frac{b-a}{1+p}$.

2.2.58. Zauważmy, że

$$c_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{a_n + b_n} = \frac{c_n + 2}{c_n + 1}.$$

Zatem

$$|c_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{\sqrt{2}-1}{c_n+1}|c_n - \sqrt{2}| < (\sqrt{2}-1)|c_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{2}|c_n - \sqrt{2}|.$$

Stąd i z zasady indukcji matematycznej wynika, że

$$|c_{n+1} - \sqrt{2}| < \frac{1}{2^n}|c_1 - \sqrt{2}|,$$

co oznacza, że granicą ciągu $\{c_n\}$ jest $\sqrt{2}$.

2.3 PRZEKSZTAŁCENIE TOEPLITZA, TWIERDZENIE STOLZA I ICH ZASTOSOWANIA

2.3.1. Jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem stałym o wyrazach stale równych a, to na podstawie (ii) mamy $\lim_{n\to\infty} b_n = a \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n c_{n,k} = a$. Zatem wystarczy rozpatrzyć przypadek ciągu zbieżnego do zera. Wtedy dla dowolnego m, $1 < m \leq n$ spełniona jest nierówność

$$(*) \qquad |b_n - 0| = \left|\sum_{k=1}^n c_{n,k}a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{m-1}|c_{n,k}|\cdot|a_k| + \sum_{k=m}^n |c_{n,k}|\cdot|a_k|.$$

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustalone. Ze zbieżności ciągu $\{a_n\}$ do zera wynika istnienie takiej liczby n_1, że

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2C} \quad \text{dla} \quad n \geq n_1.$$

Ponadto istnieje $D > 0$, dla którego $|a_n| \leq D$, $n \geq 1$.

Z kolei z warunku (i) wynika istnienie takiego n_2, że

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} |c_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{2D} \quad \text{dla} \quad n \geq n_2.$$

Następnie przyjmując w nierówności $(*)$ $m = n_1$, otrzymujemy

$$|b_n| \leq D \sum_{k=1}^{n_1-1} |c_{n,k}| + \frac{\varepsilon}{2C} \sum_{k=n_1}^{n} |c_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

dla $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. A więc $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

2.3.2. Wystarczy zastosować twierdzenie Toeplitza, przyjmując $c_{n,k} = \frac{1}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

2.3.3.

(a) Jeśli $c_{n,k}$ są dodatnie, to warunek (iii) wynika z (ii).

(b) Z warunku (ii) zadania 2.3.1 mamy $\sum_{k=1}^{n} c_{n,k} > \frac{1}{2}$ dla $n > n_0$. Niech $M > 0$ będzie dowolnie ustalone. Wtedy z rozbieżności ciągu $\{a_n\}$ do nieskończoności wynika istnienie takiego n_1, że $a_n \geq 2M$ dla $n > n_1$. Bez zmniejszenia ogólności rozważań można przyjąć, że wszystkie a_n są dodatnie. Niech $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Wtedy

$$\sum_{k=1}^{n} c_{n,k}a_k = \sum_{k=1}^{n_2} c_{n,k}a_k + \sum_{k=n_2+1}^{n} c_{n,k}a_k.$$

Z warunku (i) w twierdzeniu Toeplitza wynika, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $n_3 > n_2$, że

$$\sum_{k=1}^{n_2} c_{n,k} < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Zatem dla $n > n_3$ mamy

$$\sum_{k=1}^{n} c_{n,k}a_k > \sum_{k=n_2+1}^{n} c_{n,k}a_k \geq 2M \sum_{k=n_2+1}^{n} c_{n,k} = 2M \left(\sum_{k=1}^{n} c_{n,k} - \sum_{k=1}^{n_2} c_{n,k} \right) > M - \varepsilon,$$

co oznacza rozbieżność ciągu $\{b_n\}$ do nieskończoności.

2.3.4. Wystarczy zastosować poprzednie zadanie, przyjmując $c_{n,k} = \frac{1}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

2.3.5. Zastosować twierdzenie Toeplitza (zadanie 2.3.1) dla $c_{n,k} = \frac{2(n-k+1)}{n^2}$.

2.3.6. Wykorzystać nierówności między średnimi: arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną (zadanie 1.2.3), twierdzenie o trzech ciągach oraz zadanie 2.3.2.

2.3.7. Zastosować poprzednie zadanie do ciągu $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$.

2.3.8. Wystarczy w twierdzeniu Toeplitza przyjąć $c_{n,k} = \frac{b_{n-k+1}}{nb}$, gdy $b \neq 0$. Na podstawie zadania 2.3.2 tak określony ciąg spełnia założenie (ii).

Jeśli teraz $b = 0$, to przyjmując $c_{n,k} = \frac{1 + b_{n-k+1}}{n}$, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1+b_n) + a_2(1+b_{n-1}) + \ldots + a_n(1+b_1)}{n} = a.$$

Stąd i z zadania 2.3.2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1}{n} = 0.$$

2.3.9. Wystarczy zastosować twierdzenie Toeplitza do ciągu $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, przyjmując $c_{n,k} = \frac{b_k}{b_1 + \ldots + b_n}$.

2.3.10. Można zastosować twierdzenie Toeplitza z $c_{n,k} = \frac{b_k}{b_1 + \ldots + b_n}$.

2.3.11. Wystarczy w poprzednim zadaniu podstawić

$$a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, \quad b_n = y_n - y_{n-1} \quad \text{dla} \quad n > 1.$$

2.3.12.

(a) Stosując twierdzenie Stolza dla $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, $y_n = \sqrt{n}$, można łatwo sprawdzić, że szukaną granicą jest 2.

(b) Zastosować twierdzenie Stolza dla

$$x_n = a + \frac{a^2}{2} + \ldots + \frac{a^n}{n}, \quad y_n = \frac{a^{n+1}}{n}.$$

Począwszy od pewnego wskaźnika ciąg $\{y_n\}$ jest rosnący. Na podstawie zadania 2.2.31(b) mamy $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^{n+1}} \left(a + \frac{a^2}{2} + \ldots + \frac{a^n}{n} \right) = \frac{1}{a-1}.$$

(c) Stosując twierdzenie Stolza do ciągów o wyrazach

$$x_n = k! + \frac{(k+1)!}{1!} + \ldots + \frac{(k+n)!}{n!}, \quad y_n = n^{k+1},$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k+1}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{k}{n}\right)}{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k}}=\frac{1}{k+1}.$$

(d) Niech $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}}$, $y_n=\sqrt{n}$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{2n}}+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n-1}}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{n}{2n-1}}-\sqrt{\frac{n}{n-1}}+\sqrt{\frac{n-1}{2n}}+\sqrt{\frac{n-1}{2n-1}}-1\right)=2(\sqrt{2}-1).$$

Stąd i z twierdzenia Stolza szukana granica wynosi $2(\sqrt{2}-1)$.

(e) Zastosujemy twierdzenie Stolza, przyjmując $x_n=1^k+2^k+\ldots+n^k$, $y_n=n^{k+1}$. Mamy

$$\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{k+1}.$$

(f) Stosując twierdzenie Stolza, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+1\cdot a+2\cdot a^2+\ldots+n\cdot a^n}{n\cdot a^{n+1}}=\frac{1}{a-1}.$$

(g) Podobnie jak w poprzednich przykładach zastosujemy twierdzenie Stolza, przyjmując

$$x_n=(k+1)(1^k+2^k+\ldots+n^k)-n^{k+1},\quad y_n=(k+1)n^k.$$

Wtedy

$$\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\frac{(k+1)n^k-n^{k+1}+(n-1)^{k+1}}{(k+1)(n^k-(n-1)^k)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}.$$

2.3.13. Przyjmując w twierdzeniu Stolza

$$x_n=a_1+\frac{a_2}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{a_n}{\sqrt{n}},\qquad y_n=\sqrt{n},$$

po prostych przekształceniach, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(a_1+\frac{a_2}{\sqrt{2}}+\frac{a_3}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)=2a.$$

2.3.14. Wystarczy zastosować twierdzenie Stolza do ciągów określonych następująco: $x_n=a_{n+1}$, $y_n=n$, $n\in\mathbb{N}$.

2.3.15. Stosując przekształcenie Toeplitza do ciągu $\{a_n\}$ z $c_{n,k}=\frac{1}{2^{n-k}}$ otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1}+\frac{a_{n-1}}{2}+\ldots+\frac{a_1}{2^{n-1}}\right)=2a.$$

2.3.16.

(a) Stosując twierdzenie Toeplitza do ciągu $\{a_n\}$ z $c_{n,k}=\frac{1}{(n+1-k)(n+2-k)}$, pokazujemy, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1\cdot2}+\frac{a_{n-1}}{2\cdot3}+\ldots+\frac{a_1}{n(n+1)}\right)=a.$$

(b) Podobnie jak w części (a) stosując twierdzenie Toeplitza do ciągu $\{a_n\}$ z $c_{n,k}=\frac{3}{2}\frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k}}$, wykazujemy, że szukaną granicą jest $\frac{2}{3}a$.

2.3.17. W celu obliczenia tej granicy zastosujemy zadanie 2.3.7. Mamy

$$\frac{\binom{(n+1)k}{n+1}}{\binom{nk}{n}}=\frac{(nk+1)(nk+2)\cdot\ldots\cdot(nk+k)}{(n+1)(nk-n+1)(nk-n+2)\cdot\ldots\cdot(nk-n+k-1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}.$$

Szukaną granicą jest więc $\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}$.

2.3.18. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem arytmetycznym o różnicy $r>0$. Niech

$$c_n=\frac{n^n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)}{(a_1+\ldots+a_n)^n}.$$

Wtedy

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{(n+1)a_{n+1}}{a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}}\left(\frac{\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}}{\frac{a_1+\ldots+a_{n+1}}{n+1}}\right)^n$$

$$=\frac{2a_{n+1}}{a_1+a_{n+1}}\left(\frac{2a_1+(n-1)r}{2a_1+nr}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}2\mathrm{e}^{-1}.$$

Stąd i z zadania 2.3.7 wynika, że dla $r>0$ szukaną granicą jest $2\mathrm{e}^{-1}$. Jeśli $r=0$, to rozpatrywany ciąg jest ciągiem stałym i jego granica wynosi 1.

2.3.19. Z równości $b_n=2a_n+a_{n-1}$ mamy $a_n=\frac{b_n-a_{n-1}}{2}$. Podobnie $a_{n-1}=\frac{b_{n-1}-a_{n-2}}{2}$. Zatem $a_n=\frac{2b_n-b_{n-1}+a_{n-2}}{2^2}$. Stosując powyższą procedurę $n-1$ razy, otrzymujemy

$$a_n=\frac{2^{n-1}b_n-2^{n-2}b_{n-1}+\ldots+(-1)^{n-2}2^1b_2+(-1)^{n-1}a_1}{2^n}.$$

Powyższy wzór można również udowodnić, stosując zasadę indukcji matematycznej. Stąd i z zadania 2.3.16(b) otrzymujemy $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}b$.

2.3.20. Niech $c_n = (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)n^{nx}$. Wtedy

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}(n+1)^x a_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^x a.$$

Stąd i z zadania 2.3.7 mamy $\lim\limits_{n\to\infty} n^x(a_1a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} = a\mathrm{e}^x$.

2.3.21.

(a) Zastosujemy twierdzenie Stolza, przyjmując $x_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$, $y_n = \ln n$. Wtedy

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

gdyż $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1$, co jest prostym wnioskiem z nierówności

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad \text{(patrz zadanie 2.1.41).}$$

(b) Szukana granica wynosi $\frac{1}{2}$ (patrz rozwiązanie części (a)).

2.3.22. Zastosujemy twierdzenie Stolza, przyjmując

$$x_n = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n}, \qquad y_n = \ln n.$$

Mamy

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{a_n}{\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

2.3.23. Wystarczy skorzystać z zadania 2.3.7.

(a) 1. **(b)** e^{-2}. **(c)** e^{-2}. **(d)** e^3.

(e) Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[k]{n}}{\sqrt[n]{n!}} = \begin{cases} \mathrm{e} & \text{dla} \quad k=1, \\ 0 & \text{dla} \quad k>1. \end{cases}$$

2.3.24. Łatwo sprawdzić, że

$$a_1 = A_1, \quad a_2 = 2A_2 - A_1, \quad a_n = nA_n - (n-1)A_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{3}A_2 + \ldots + \frac{1}{n}A_{n-1} + A_n}{\ln n} = A,$$

przy czym ostatnia równość wynika z zadania 2.3.22.

2.3.25. [O. Toeplitz, Prace Matematyczno-Fizyczne, 22 (1911), 113–119]. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem stałym o wyrazach stale równych 1. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ oraz $b_n = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k}a_k = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k}$. Zatem $1 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_{n,k}$, co oznacza, że spełniony jest warunek (ii).

Niech teraz $\{a_n^{(k)}\}$ będzie ciągiem, którego wszystkie wyrazy są równe zeru z wyjątkiem wyrazu k-tego, który jest równy 1. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(k)} = 0$ oraz $0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_{n,k}$, czyli spełniony jest także warunek (i).

W celu dowiedzenia warunku (iii) przypuśćmy, że nie jest on spełniony. Oznacza to, że dla każdego $C > 0$ istnieje takie n_C, że $\sum_{k=1}^{n_C} |c_{n_C,k}| \geq C$. Rzeczywiście, przy ustalonym C takich liczb naturalnych n_C jest nieskończenie wiele. Niech więc n_1 będzie taką najmniejszą liczbą naturalną, że $\sum_{k=1}^{n_1} |c_{n_1,k}| > 10^2$. Pierwsze n_1 wyrazów ciągu $\{a_n\}$ określamy następująco:

$$\operatorname{sgn} c_{n_1,k} = \operatorname{sgn} a_k \quad \text{oraz} \quad |a_k| = \frac{1}{10}.$$

Wtedy

$$b_{n_1} = \sum_{k=1}^{n_1} c_{n_1,k}a_k = \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{10}|c_{n_1,k}| > 10.$$

Ale z warunku (i) wynika, że istnieje takie n_0, że dla $n \geq n_0$ mamy

$$\sum_{k=1}^{n_1} |c_{n,k}| < 1.$$

Tak więc

$$\left|\sum_{k=1}^{n_1} c_{n,k}a_k\right| < \frac{1}{10} \quad \text{dla} \quad n \geq n_0.$$

Niech teraz $n_2 \geq \max\{n_0, n_1\}$ oznacza taką najmniejszą liczbę naturalną, że $\sum_{k=1}^{n_2} |c_{n_2,k}| > 10^4 + 1 + 10$. Określmy teraz dalsze wyrazy ciągu $\{a_n\}$ w następujący sposób:

$$\operatorname{sgn} c_{n_2,k} = \operatorname{sgn} a_k \quad \text{oraz} \quad |a_k| = \frac{1}{10^2} \quad \text{dla} \quad n_1+1 \leq k \leq n_2.$$

Wtedy

$$b_{n_2} = \sum_{k=1}^{n_2} c_{n_2,k}a_k = \sum_{k=1}^{n_1} c_{n_2,k}a_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} c_{n_2,k}a_k = \sum_{k=1}^{n_1} c_{n_2,k}a_k + \frac{1}{10^2}\sum_{k=n_1+1}^{n_2} |c_{n_2,k}|.$$

Zatem $b_{n_2} > -\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\left(10^4 + 1 + 10 - 1\right) = 10^2$. Indukcyjnie konstruujemy ciąg $\{a_n\}$, którego n_k wyrazów będzie równych $+\frac{1}{10^k}$ lub $-\frac{1}{10^k}$ oraz odpowiadający mu ciąg $\{b_n\}$ będzie spełniał warunek

$$b_{n_k} > 10^k \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Ciąg $\{a_n\}$ będzie więc zbieżny do zera, a odpowiadający mu ciąg $\{b_n\}$ nie będzie zbieżny do zera, gdyż zawiera podciąg rozbieżny do $+\infty$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że warunek (iii) jest także spełniony.

2.4 PUNKTY SKUPIENIA GRANICA GÓRNA I DOLNA CIĄGU

2.4.1.

(a) Pokażemy najpierw, że rozpatrywane podciągi mają równe granice. Załóżmy, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = b$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{3k} = c$. Wtedy $\lim\limits_{k\to\infty} a_{6k} = a = c$ oraz $\lim\limits_{k\to\infty} a_{6k+3} = b = c$. Zatem $a = b = c$. Pokażemy teraz, że a jest również granicą ciągu $\{a_n\}$.

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustalone. Wtedy istnieją takie liczby naturalne k_1, k_2, że

$$|a_{2k} - a| < \varepsilon \qquad \text{dla} \qquad k > k_1,$$
$$|a_{2k+1} - a| < \varepsilon \qquad \text{dla} \qquad k > k_2.$$

Stąd

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{dla} \qquad n > n_0 = \max\{2k_1, 2k_2 + 1\}.$$

(b) Nie. Rozpatrzmy najpierw ciąg $\{a_n\}$ określony wzorem $a_n = (-1)^n$. Wtedy $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = -1$. Natomiast $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nie istnieje.

Niech teraz ciąg $\{a_n\}$ będzie określony następująco:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 2^k,\ k = 0, 1, 2, \dots, \\ 1 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wtedy $\lim\limits_{k\to\infty} a_{3k} = 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = 1$, a $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k}$ nie istnieje. Ciąg $\{a_n\}$ jest oczywiście rozbieżny.

Rozpatrzmy teraz trzeci ciąg określony wzorem:

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } n \text{ jest liczbą pierwszą,} \\ 1, & \text{jeśli } n \text{ jest liczbą złożoną.} \end{cases}$$

Wtedy $\lim\limits_{k\to\infty} a_{3k} = 1$ oraz $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = 1$, natomiast $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1}$ nie istnieje, gdyż ciąg ten zawiera podciąg o wskaźnikach będących liczbami pierwszymi i podciąg o wskaźnikach będących liczbami złożonymi. (Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, gdyż gdyby było ich skończenie wiele: $p_1, p_2, \dots, p_n$, to liczba $p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ byłaby liczbą pierwszą różną od $p_1, p_2, \dots, p_n$, co dawałoby sprzeczność).

2.4.2. Nie.

Niech ciąg $\{a_n\}$ będzie określony wzorem

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } n \text{ jest liczbą pierwszą,} \\ 1, & \text{jeśli } n \text{ jest liczbą złożoną.} \end{cases}$$

Wtedy każdy z podciągów $\{a_{s\cdot n}\}$, $s > 1$, począwszy od drugiego wyrazu, jest stały, a więc zbieżny. Ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny (patrz rozwiązanie zadania 2.4.1(b)).

2.4.3. Oczywiście $S_p \cup S_q \cup \dots \cup S_s \subset S$. Pokażemy teraz, że prawdziwa jest również inkluzja przeciwna. Niech $x \notin S_p \cup S_q \cup \dots \cup S_s$. Wtedy istnieją takie liczby dodatnie $\varepsilon_p, \varepsilon_q, \dots, \varepsilon_s$ oraz wskaźniki $n_p, n_q, \dots, n_s$, że

$$|x - a_{p_n}| > \varepsilon_p \quad \text{dla} \quad n > n_p,$$
$$|x - a_{q_n}| > \varepsilon_q \quad \text{dla} \quad n > n_q,$$
$$\dots$$
$$|x - a_{s_n}| > \varepsilon_s \quad \text{dla} \quad n > n_s.$$

Przyjmując $\varepsilon = \min\{\varepsilon_p, \varepsilon_q, \dots, \varepsilon_s\}$, $m = \max\{p_{n_p}, q_{n_q}, \dots, s_{n_s}\}$, otrzymujemy $|x - a_n| > \varepsilon$ dla $n > m$, co oznacza, że x nie jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$. Zatem

$$S \subset S_p \cup S_q \cup \dots \cup S_s.$$

2.4.4. Nie.

Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem określonym wzorem

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 2^k,\ k = 0, 1, 2, \dots, \\ 1 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wtedy każdy z podciągów

$$\{a_{2k-1}\}, \{a_{2(2k-1)}\}, \{a_{2^2(2k-1)}\}, \dots, \{a_{2^m(2k-1)}\}, \dots$$

jest zbieżny do 1, a $\{a_n\}$ jest ciągiem rozbieżnym.

2.4.5. Załóżmy, że ciąg $\{a_n\}$ nie jest zbieżny do a. Wtedy istnieje takie $\varepsilon > 0$, że dla każdego naturalnego k istnieje liczba naturalna $n_k > k$, dla której prawdziwa jest nierówność $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon$. Jeśli n_k jest najmniejszą z takich liczb, to ciąg $\{n_k\}$ jest rosnący. Ponadto $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$. Z tak skonstruowanego ciągu $\{a_{n_k}\}$ nie można wybrać podciągu zbieżnego do a. Otrzymana sprzeczność dowodzi więc zbieżności ciągu $\{a_n\}$ do a.

2.4.6.

(a) Łatwo pokazać, że ciąg ten jest zbieżny do 1, a więc jedynym elementem zbioru jego punktów skupienia jest 1.

(b) Mamy $a_{3k} = 0, a_{3k+1} = 1, a_{3k+2} = 0$. Stąd i z zadania 2.4.3 zbiór S punktów skupienia tego ciągu jest dwuelementowy i $S = \{0, 1\}$.

(c) Mamy

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k} + 3}, \qquad a_{2k+1} = \frac{2^{2k+2} + 1}{2^{2k+1} + 3}.$$

Stąd $S = \{0, 2\}$.

(d) Mamy

$$a_{2k} = \frac{2\ln(6k) + \ln(2k)}{\ln(4k)}, \qquad a_{2k+1} = \frac{\ln(2k+1)}{\ln(2(2k+1))}.$$

Zatem $S = \{1, 3\}$.

(e)

$$a_{6k} = 1, \qquad a_{6k+1} = (0,5)^{6k+1}, \qquad a_{6k+2} = (-0,5)^{6k+2},$$
$$a_{6k+3} = -1, \qquad a_{6k+4} = (-0,5)^{6k+4}, \qquad a_{6k+5} = (0,5)^{6k+5}.$$

Zatem $S = \{-1, 0, 1\}$.

(f) Mamy

$$a_{7k} = 0, \qquad a_{7k+1} = \frac{2}{7}, \qquad a_{7k+2} = \frac{1}{7}, \qquad a_{7k+3} = \frac{4}{7},$$
$$a_{7k+4} = \frac{4}{7}, \qquad a_{7k+5} = \frac{1}{7}, \qquad a_{7k+6} = \frac{2}{7}.$$

Stąd $S = \left\{0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right\}$.

2.4.7.

(a) Niech $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, gdzie p, q są liczbami względnie pierwszymi. Wtedy $a_{kq} = 0$ oraz

$$a_{kq+l} = kp + \frac{lp}{q} - \left[pk + \left[\frac{lp}{q}\right] + r\right] = \frac{lp}{q} - \left[\frac{lp}{q}\right],$$

gdzie $l = 1, 2, \ldots, q-1$ i $r = \frac{lp}{q} - \left[\frac{lp}{q}\right]$.

Zatem $S = \left\{0, \frac{p}{q} - \left[\frac{p}{q}\right], \frac{2p}{q} - \left[\frac{2p}{q}\right], \ldots, \frac{(q-1)p}{q} - \left[\frac{(q-1)p}{q}\right]\right\}$.

(b) Wykażemy, że każda liczba rzeczywista $x \in [0,1]$ jest punktem skupienia ciągu $\{n\alpha - [n\alpha]\}$. Na podstawie zadania 1.1.20 istnieją takie liczby $p_n \in \mathbb{Z}$ oraz $q_n \in \mathbb{N}$, że $0 < \alpha - \frac{p_n}{q_n} < \frac{1}{q_n^2}$. Ponieważ $\lim_{n\to\infty} q_n = +\infty$, więc $0 = \lim_{n\to\infty}(\alpha q_n - p_n)$. Niech $x \in (0,1)$ i niech $\varepsilon > 0$ będzie tak małe, że $0 < x - \varepsilon < x + \varepsilon < 1$. Niech teraz n_1 będzie tak duże, że

$$0 < \alpha q_{n_1} - p_{n_1} < \frac{1}{q_{n_1}} < \varepsilon.$$

Wtedy istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, dla którego

$$n_0(\alpha q_{n_1} - p_{n_1}) \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon). \tag{1}$$

(Patrz np. rozwiązanie zadania 1.1.21).

Z (1) otrzymujemy $[n_0\alpha q_{n_1} - n_0 p_{n_1}] = 0$, czyli $n_0 p_{n_1} = [n_0 \alpha q_{n_1}]$. W ten sposób znaleźliśmy wyraz $n_0\alpha q_{n_1} - [n_0\alpha q_{n_1}]$ naszego ciągu należący do przedziału

$(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Oznacza to, że liczba x jest punktem skupienia tego ciągu. Podobnie pokazujemy, że 0 i 1 są także punktami skupienia.

(c) Załóżmy najpierw, że α jest liczbą wymierną z przedziału $(0,1)$. Niech $\alpha = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, gdzie p, q są liczbami względnie pierwszymi oraz $p < q$. Wtedy $a_{2kq} = a_{2kq+q} = 0$, oraz

$$a_{2kq+l} = \sin\frac{lp\pi}{q}, \qquad l = 1, 2, \ldots, q-1, q+1, \ldots, 2q-1.$$

Stąd łatwo pokazać, że

$$S = \left\{0, \sin\frac{p\pi}{q}, \sin\frac{2p\pi}{q}, \ldots, \sin\frac{(q-1)p\pi}{q}\right\}.$$

Jeśli $\alpha \in \mathbb{Z}$, to otrzymujemy ciąg stały. Jeśli natomiast α jest liczbą wymierną niebędącą liczbą całkowitą, to

$$\alpha = [\alpha] + \alpha - [\alpha] \qquad \text{i} \qquad \alpha - [\alpha] \in (0,1).$$

Wtedy $\sin n\pi\alpha = (-1)^{[\alpha]}\sin(\alpha - [\alpha])n\pi$ i rozważania sprowadzają się do rozpatrywanego już przypadku.

(d) Niech t będzie dowolną liczbą rzeczywistą z przedziału $[-1,1]$. Wtedy istnieje $x \in \mathbb{R}_+$ takie, że $\sin x = -t$. Z nieparzystości funkcji sinus wynika, że wystarczy rozpatrzyć tylko przypadek $\alpha > 0$. Ponieważ α jest liczbą niewymierną, więc istnieją takie ciągi liczb naturalnych $\{p_n\}$, $\{q_n\}$, że

$$\frac{x}{2\pi} = \lim_{n\to\infty}(p_n - q_n\frac{\alpha}{2}).$$

(Patrz rozwiązanie zadania 1.1.21). Stąd $x = \lim_{n\to\infty}(2\pi p_n - \alpha\pi q_n)$. Zatem na podstawie ciągłości i okresowości funkcji sinus otrzymujemy

$$-t = \sin x = \lim_{n\to\infty}\sin(2\pi p_n - \alpha\pi q_n) = -\lim_{n\to\infty}\sin\alpha\pi q_n.$$

Z powyższych rozważań wynika więc, że każda liczba z przedziału $[-1,1]$ jest punktem skupienia rozpatrywanego ciągu.

2.4.8. Wykażemy, że w dowolnym przedziale (a,b) znajduje się co najmniej jeden element rozpatrywanego ciągu.

Ponieważ $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) = 0$, więc istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} < b - a, \qquad n > n_0.$$

Niech m_0 będzie dowolną liczbą naturalną, dla której spełniona jest nierówność $\sqrt[3]{m_0} > \sqrt[3]{n_0} - a$, i niech $A = \{n \in \mathbb{N} : \sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m_0} \le a\}$. Zbiór A jest niepusty (np. $n_0 \in A$) i ograniczony z góry. Niech $n_1 = \max A$ i połóżmy $n_2 = n_1 + 1$. Wtedy $\sqrt[3]{n_2} - \sqrt[3]{m_0} > a$ oraz $\sqrt[3]{n_2} > a + \sqrt[3]{m_0} > \sqrt[3]{n_0}$. Wynika stąd, że $n_2 > n_0$. Zatem $\sqrt[3]{n_2} < \sqrt[3]{n_1} + b - a \le \sqrt[3]{m_0} + a + b - a$, czyli $a < \sqrt[3]{n_2} - \sqrt[3]{m_0} < b$.

2.4.9. Ograniczoność zbioru punktów skupienia ciągu ograniczonego jest oczywista. Niech S oznacza zbiór punktów skupienia ciągu $\{a_n\}$. Jeśli S jest zbiorem skończonym, to jest on domknięty. Załóżmy więc, że S jest zbiorem nieskończonym i s jest jego punktem skupienia. Określmy ciąg $\{s_k\}$ elementów zbioru S w następujący sposób: niech s_1 będzie dowolnym różnym od s elementem zbioru S, następnie niech s_2 będzie elementem zbioru S różnym od s i takim, że $|s_2 - s| < \frac{1}{2}|s_1 - s|$, i indukcyjnie $|s_{k+1} - s| < \frac{1}{2}|s_k - s|$, $s_{k+1} \neq s$. Tak określony ciąg $\{s_k\}$ spełnia warunek

$$|s_k - s| \leq \frac{1}{2^{k-1}}|s_1 - s|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ s_k jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$, więc istnieje takie a_{n_k}, że $|a_{n_k} - s_k| < \frac{1}{2^{k-1}}|s_1 - s|$. Zatem

$$|a_{n_k} - s| \leq |a_{n_k} - s_k| + |s_k - s| < \frac{1}{2^{k-2}}|s_1 - s|,$$

co oznacza, że s jest granicą tak wybranego podciągu $\{a_{n_k}\}$. Więc $s \in S$.

2.4.10. Niech S będzie zbiorem punktów skupienia ciągu $\{a_n\}$.

(a) Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony. Z zadania 2.4.6 wynika, że $S = \left\{0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right\}$. Zatem $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{7}$.

(b) Mamy $S = \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Stąd i z ograniczoności ciągu wynika, że $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 1$.

(c) Ciąg ten jest nieograniczony, a zbiór jego punktów skupienia jest pusty. Zatem

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -\infty, \qquad \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

(d) Rozpatrywany ciąg jest nieograniczony z góry, gdyż jego podciąg o wyrazach $a_{2k} = (2k)^{2k}$ jest rozbieżny do nieskończoności. Natomiast podciąg o wskaźnikach nieparzystych jest zbieżny do zera. Zatem

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

(e) Tak określony ciąg jest nieograniczony, gdyż $a_{4k+1} = 4k + 2 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $a_{4k+3} = -4k - 2 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Stąd $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(f) Ograniczoność ciągu jest oczywista.

Ponadto $S = \left\{-\mathrm{e} - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\mathrm{e} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \mathrm{e} - 1, \mathrm{e}, \mathrm{e} + 1\right\}$. Stąd $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -\mathrm{e} - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e} + 1$.

(g) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 2$.

(h) Ciąg ten jest nieograniczony z góry, gdyż $a_{3k} = 2^{3k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ponadto $S = \{-1, 1\}$. Zatem $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(i) Pokażemy najpierw, że $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} = +\infty$. Istotnie, stosując twierdzenie Stolza (zadanie 2.3.11), otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n - \ln(n-1)}{n - n + 1} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = 0.$$

Stąd

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(2k) - 4k}{\ln 2 + \ln(2k)} = -\infty.$$

Ciąg $\{a_n\}$ jest więc nieograniczony z dołu. Ponadto

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(2k+1)}{\ln 2 + \ln(2k+1)} = 1.$$

Stąd $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 1$.

2.4.11. Patrz zadanie 2.4.7.

(a) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \min S = 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \max S$, gdzie

$$S = \left\{0, \frac{p}{q} - \left[\frac{p}{q}\right], \frac{2p}{q} - \left[\frac{2p}{q}\right], \ldots, \frac{(q-1)p}{q} - \left[\frac{(q-1)p}{q}\right]\right\}.$$

(b) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 1$.

(c) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \min S$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \max S$, gdzie S jest zbiorem punktów skupienia rozpatrywanego ciągu opisanym w zadaniu 2.4.7(c).

(d) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 1$.

2.4.12.

(a) Jeśli zbiór S punktów skupienia ciągu $\{a_n\}$ jest pusty, to $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -\infty \leq A$. Załóżmy teraz, że zbiór S jest niepusty. Ponieważ S jest zbiorem domkniętym (zadanie 2.4.9), więc $\sup S = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = L \in S$. Zatem z definicji punktu skupienia wynika, że istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ zbieżny do L. Więc dla dowolnego $\varepsilon > 0$

istnieje takie $k_0 \in \mathbb{N}$, że

$$L - \varepsilon < a_{n_k} \leq A \quad \text{dla} \quad k > k_0.$$

Stąd i z dowolności ε wynika żądana nierówność.

(b) Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest nieograniczony z dołu, to $\varliminf_{n\to\infty} a_n = -\infty \leq A$. Załóżmy więc, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z dołu, tzn., że istnieje takie $B \in \mathbb{R}$, że

$$a_n \geq B \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ponadto z warunku zadania wynika, że istnieje ciąg wskaźników n_k, $n_k > k$ taki, że $a_{n_k} \leq A$. Stąd na mocy twierdzenia Bolzano–Weirstrassa (zadanie 2.4.30) ciąg $\{a_{n_k}\}$ zawiera podciąg zbieżny. Oznaczmy jego granicę przez g. Wtedy $B \leq g \leq A$. Zatem zbiór S punktów skupienia ciągu $\{a_n\}$ jest niepusty i $\varliminf_{n\to\infty} a_n = \inf S \leq g \leq A$.

(c) Wystarczy przeprowadzić rozumowanie analogiczne do przedstawionego w części (a).

(d) Wystarczy przeprowadzić rozumowanie analogiczne do przedstawionego w części (b).

2.4.13.

(a) Niech $L = \varlimsup_{n\to\infty} a_n$. Przypuśćmy, że nie jest spełniony warunek (i). Wtedy istnieje takie $\varepsilon > 0$, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje takie $n > k$, że $a_n \geq L + \varepsilon$. Stąd i z zadania 2.4.12(d) wynika, że $\varlimsup_{n\to\infty} a_n \geq L + \varepsilon$, co przeczy założeniu. Przypuśćmy teraz, że warunek (ii) nie jest spełniony. Wtedy istnieją $\varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich n większych niż k spełniona jest nierówność $a_n \leq L - \varepsilon$. Stąd i z zadania 2.4.12(a) otrzymujemy $\varlimsup_{n\to\infty} a_n \leq L - \varepsilon$. Otrzymaliśmy więc ponownie sprzeczność z założeniem. Zatem jeśli $L = \varlimsup_{n\to\infty} a_n$, to spełnione są warunki (i) oraz (ii).

Pokażemy teraz, że z warunków (i) oraz (ii) wynika, że $\varlimsup_{n\to\infty} a_n = L$. Z warunku (i) wynika, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry. Natomiast z warunku (ii) wynika, że ciąg ten zawiera podciąg ograniczony z dołu. Na podstawie twierdzenia Bolzano–Weierstrassa (patrz zadanie 2.4.30) rozpatrywany ciąg zawiera co najmniej jeden podciąg zbieżny. Zbiór S punktów skupienia ciągu $\{a_n\}$ jest więc niepusty. Pokażemy, że $L = \sup S$. Istotnie, jeśli s jest dowolnym elementem zbioru S, to z warunku (i) wynika, że $s \leq L + \varepsilon$. Stąd i z dowolności ε mamy $s \leq L$. Ponadto warunek (ii) implikuje, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje podciąg ciągu $\{a_n\}$, którego granica $\tilde{s}$ spełnia nierówność $L - \varepsilon \leq \tilde{s}$. Oczywiście $\tilde{s} \in S$, co kończy dowód drugiej części twierdzenia. W ten sposób rozpatrywana równoważność została udowodniona.

(b) Dowód analogiczny do powyższego.

Granica górna ciągu $\{a_n\}$ jest równa $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg ten jest nieograniczony z góry. Zatem

(1) $\varlimsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $M \in \mathbb{R}$ i dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje $n_k > k$, dla którego spełniona jest nierówność $a_{n_k} > M$.

Granica górna ciągu $\{a_n\}$ jest równa $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg ten jest ograniczony z góry, powiedzmy przez L i zbiór jego punktów skupienia jest pusty. Zatem w każdym właściwym przedziale $[M, L]$ znajduje się skończona liczba wyrazów ciągu $\{a_n\}$. Oznacza to, że począwszy od pewnego wskaźnika musi być $a_n < M$. Stąd

(2) $\varlimsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $M \in \mathbb{R}$ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $n > k$ spełniona jest nierówność $a_n < M$.

Analogicznie otrzymujemy

(3) $\varliminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $M \in \mathbb{R}$ i dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje takie $n_k > k$, że $a_{n_k} < M$

oraz

(4) $\varliminf_{n\to\infty} a_n = +\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $M \in \mathbb{R}$ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że dla $n > k$ mamy $a_n > M$.

2.4.14. Udowodnimy tylko nierówność (a), gdyż dowód drugiej nierówności jest analogiczny. Nierówność (a) jest oczywista wtedy, gdy $\varliminf_{n\to\infty} b_n = +\infty$ lub $\varlimsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Jeśli $\varliminf_{n\to\infty} a_n = +\infty$, to na podstawie warunku (4) podanego w rozwiązaniu zadania 2.4.13 i nierówności $a_n \leq b_n$ otrzymujemy $\varliminf_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Analogicznie, jeśli $\varliminf_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to na podstawie warunku (3) podanego w rozwiązaniu zadania 2.4.13 i nierówności $a_n \leq b_n$ otrzymujemy $\varliminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Załóżmy więc, że obie granice są skończone i niech

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = l_1, \qquad \varliminf_{n\to\infty} b_n = l_2.$$

Należy pokazać, że $l_1 \leq l_2$. Przypuśćmy więc, że tak nie jest, tzn. $l_2 < l_1$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie tak małe, że $l_2 + \varepsilon < l_1 - \varepsilon$. Wtedy istnieje takie c, że $l_2 + \varepsilon < c < l_1 - \varepsilon$. Z warunku (ii) zadania 2.4.13(b) mamy $b_{n_k} < l_2 + \varepsilon < c$. Z warunku (i) natomiast otrzymujemy $c < l_1 - \varepsilon < a_n$ dla $n > k_0$. Stąd, w szczególności $c < a_{n_k}$, co oznacza, że spełniona jest nierówność $b_{n_k} < a_{n_k}$ dla nieskończenie wielu wskaźników n_k. Przeczy to założeniu, że $a_n \leq b_n$ dla prawie wszystkich n.

2.4.15. Połóżmy

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = l_1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n = l_2, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = L_1, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n = L_2.$$

Wykażemy najpierw, że

(1) $$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n + b_n) \geq l_1 + l_2.$$

Załóżmy, że l_1 i l_2 są skończone.Wtedy na podstawie zadania 2.4.13(b) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie k_1, że $a_n > l_1 - \varepsilon$ dla $n > k_1$, i takie k_2, że $b_n > l_2 - \varepsilon$ dla $n > k_2$. Zatem

$$a_n + b_n > l_1 + l_2 - 2\varepsilon \qquad \text{dla} \qquad n > \max\{k_1, k_2\}.$$

Stąd i z zadania 2.4.12(c) otrzymujemy $\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n + b_n) \geq l_1 + l_2 - 2\varepsilon$.

Biorąc $\varepsilon \to 0^+$, otrzymujemy nierówność (1). Jeśli l_1 lub l_2 jest $-\infty$, to nierówność (1) jest oczywiście spełniona. Pokażemy teraz, że jeśli jedna z granic l_1, l_2 wynosi $+\infty$, to również $\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n+b_n) = +\infty$. Przyjmijmy np., że $l_1 = +\infty$. Jest to równoważne warunkowi (4) z rozwiązania zadania 2.4.13, czyli dla każdego $M \in \mathbb{R}$ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że dla $n > k$ mamy $a_n > M$. Ponieważ $l_2 \neq -\infty$, więc ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony z dołu, a więc warunek ten jest spełniony również dla ciągu $\{a_n + b_n\}$, a to z kolei oznacza, że $\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n + b_n) = +\infty$. Zatem nierówność (1) została udowodniona.

Dowody pozostałych nierówności zadania przeprowadzimy w przypadku skończonych granic. Na podstawie zadania 2.4.13 dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taki podciąg $\{a_{n_k}\}$, że $a_{n_k} < l_1 + \varepsilon$, oraz istnieje takie n_0, że $b_n < L_2 + \varepsilon$ dla $n > n_0$. Stąd wynika, że $a_{n_k} + b_{n_k} < l_1 + L_2 + 2\varepsilon$ dla k większych od pewnego k_0. Stąd i z zadania 2.4.12(b) otrzymujemy $\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n + b_n) \leq l_1 + L_2 + 2\varepsilon$. Wobec dowolności ε otrzymujemy

(2) $$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n + b_n) \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n.$$

Podobnie, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taki podciąg $\{b_{n_k}\}$, że $b_{n_k} > L_2 - \varepsilon$ oraz istnieje takie n_0, że $a_n > l_1 - \varepsilon$ dla $n > n_0$. Zatem $a_{n_k} + b_{n_k} > l_1 + L_2 - 2\varepsilon$ dla k większych od pewnego k_0. Stąd i z zadania 2.4.12(c) mamy $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n + b_n) \geq l_1 + L_2 - 2\varepsilon$. Wobec dowolności ε otrzymujemy

(3) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n + b_n) \geq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n.$$

Ponadto dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie k_1, że $a_n < L_1 + \varepsilon$ dla $n > k_1$, i takie k_2, że $b_n < L_2 + \varepsilon$ dla $n > k_2$. Zatem

$$a_n + b_n < L_1 + L_2 + 2\varepsilon \quad \text{dla} \quad n > \max\{k_1, k_2\}.$$

Stąd i z zadania 2.4.12(a) otrzymujemy $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n + b_n) \leq L_1 + L_2 + 2\varepsilon$. Wobec dowolności ε mamy więc

(4) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n + b_n) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n.$$

Podamy teraz przykład takich ciągów $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, dla których nierówności (1)–(4) są ostre. Niech

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n = 4k, \\ 1 & \text{dla} \quad n = 4k+1, \\ 2 & \text{dla} \quad n = 4k+2, \\ 1 & \text{dla} \quad n = 4k+3, \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 2 & \text{dla} \quad n = 4k, \\ 1 & \text{dla} \quad n = 4k+1, \\ 1 & \text{dla} \quad n = 4k+2, \\ 0 & \text{dla} \quad n = 4k+3. \end{cases}$$

Układ nierówności naszego zadania dla tak określonych ciągów ma postać $0 < 1 < 2 < 3 < 4$.

2.4.16. Nie. Rozpatrzmy ciągi $\{a_n^m\}, m = 1, 2, 3, \ldots$, określone wzorem

$$a_n^m = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = m, \\ 0 & \text{dla} \quad n \neq m. \end{cases}$$

Wtedy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n^1 + a_n^2 + \ldots) = 1 > 0 = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n^1 + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n^2 + \ldots$$

Niech teraz

$$a_n^m = \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad n = m, \\ 0 & \text{dla} \quad n \neq m. \end{cases}$$

Wtedy

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n^1 + a_n^2 + \ldots) = -1 < 0 = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n^1 + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n^2 + \ldots$$

2.4.17. Niech

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = l_1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n = l_2, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = L_1, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n = L_2.$$

Wykażemy tylko nierówności

(1) $$l_1 l_2 \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n b_n) \leq l_1 L_2.$$

Dowody pozostałych dwóch nierówności są analogiczne. Załóżmy najpierw, że l_1, l_2 są liczbami dodatnimi. Wtedy na podstawie zadania 2.4.13(b) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taki wskaźnik n_0, że

$$a_n > l_1 - \varepsilon, \quad b_n > l_2 - \varepsilon \quad \text{dla} \quad n > n_0.$$

Z nierówności tej otrzymujemy $a_n b_n > l_1 l_2 - \varepsilon(l_1 + l_2) + \varepsilon^2$ dla ε tak małego, że $l_1 - \varepsilon > 0$ i $l_2 - \varepsilon > 0$. Stąd i z zadania 2.4.12(c) wynika, że $\varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) \geq l_1 l_2 - \varepsilon(l_1 + l_2) + \varepsilon^2$. Biorąc $\varepsilon \to 0^+$, otrzymujemy

(i) $$l_1 l_2 \leq \varliminf_{n\to\infty} (a_n b_n).$$

Jeśli $l_1 = 0$ lub $l_2 = 0$, to nierówność (i) jest oczywiście spełniona. Jeśli $l_1 = +\infty$ i $l_2 = +\infty$, to na podstawie warunku (4) z rozwiązania zadania 2.4.13 dla dowolnej liczby dodatniej M istnieje takie n_0, że

$$a_n > \sqrt{M}, \quad b_n > \sqrt{M} \quad \text{dla} \quad n > n_0.$$

Stąd $a_n b_n > M$, co oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = +\infty$.

Załóżmy teraz, że jedna z granic, np. l_1, jest nieskończona, a druga jest liczbą skończoną dodatnią. Wtedy dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ i dowolnego $M > 0$ istnieje takie n_0, że dla $n > n_0$ spełnione są nierówności

$$b_n > l_2 - \varepsilon > 0, \qquad a_n > \frac{M}{l_2 - \varepsilon}.$$

Stąd $a_n b_n > M$ dla $n > n_0$. Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = +\infty$. W ten sposób udowodniliśmy nierówność (i).
Udowodnimy teraz, że

(ii) $$\varliminf_{n\to\infty} (a_n b_n) \leq l_1 L_2.$$

Jeśli l_1, L_2 są skończone, to na podstawie zadania 2.4.13 istnieje taki podciąg $\{n_k\}$, że $a_{n_k} < l_1 + \varepsilon, b_{n_k} < L_2 + \varepsilon$. Stąd

$$a_{n_k} b_{n_k} < l_1 L_2 + \varepsilon(l_1 + L_2) + \varepsilon^2.$$

Zatem $\varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) \leq l_1 L_2 + \varepsilon(l_1 + L_2) + \varepsilon^2$. Biorąc $\varepsilon \to 0^+$, otrzymujemy nierówność (ii). Jeśli $l_1 = +\infty$ lub $L_2 = +\infty$, to nierówność (ii) jest oczywista. Podamy teraz przykład takich ciągów $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, dla których wszystkie podane w zadaniu nierówności są ostre. Niech

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 4k, \\ 2 & \text{dla} \quad n = 4k+1, \\ 3 & \text{dla} \quad n = 4k+2, \\ 2 & \text{dla} \quad n = 4k+3, \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 3 & \text{dla} \quad n = 4k, \\ 2 & \text{dla} \quad n = 4k+1, \\ 2 & \text{dla} \quad n = 4k+2, \\ 1 & \text{dla} \quad n = 4k+3. \end{cases}$$

Układ nierówności naszego zadania dla tak określonych ciągów ma postać $1 < 2 < 3 < 6 < 9$.

2.4.18. Załóżmy, że $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Wtedy na podstawie zadania 2.4.13 spełnione są warunki

(i) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $k \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $n > k$ mamy $a_n < g + \varepsilon$,

(i') dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $k \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $n > k$ mamy $g - \varepsilon < a_n$.

Warunki te oznaczają, że g jest granicą ciągu $\{a_n\}$.

Jeśli natomiast $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, to warunki (i) oraz (ii) zadania 2.4.13(a) i (b) są spełnione odpowiednio z $L = g$ oraz $l = g$, co oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

Załóżmy teraz, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Wtedy warunki (1) oraz (4) z rozwiązania zadania 2.3.13 są oczywiście spełnione. Jeśli $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, to warunek (4) oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Analogicznie postępujemy w przypadku $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

2.4.19. Z zadania 2.4.15 mamy

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n \leq \varliminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n.$$

Natomiast z poprzedniego zadania otrzymujemy $a = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Zatem $\varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n$. Dowód drugiej równości jest analogiczny.

2.4.20. Wykorzystując nierówności z zadania 2.4.17, można przeprowadzić dowód analogiczny do rozwiązania poprzedniego zadania.

2.4.21. Skorzystamy z zadania 2.4.13. Niech $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Wtedy spełnione są warunki (i) oraz (ii) zadania 2.4.13(a). Mnożąc występujące w nich nierówności przez -1, otrzymujemy

(i) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $n > k$ mamy $-L - \varepsilon < -a_n$,

(ii) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje takie $n_k > k$, że $-a_{n_k} < -L + \varepsilon$.

Warunki te na podstawie 2.4.13(b) oznaczają, że

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(-a_n) = -L = -\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n.$$

Drugą równość dowodzimy analogicznie. Gdy występujące granice mają wartości nieskończone, wystarczy skorzystać z warunków (1)–(4) podanych w rozwiązaniu zadania 2.4.13.

2.4.22. Skorzystamy z zadania 2.4.13. Niech $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n = L > 0$. Wtedy z warunków (i) oraz (ii) zadania 2.4.13(a) mamy

(i) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $n > k$ mamy $a_n < L + \varepsilon L^2$,

(ii) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje takie $n_k > k$, że mamy $L - \varepsilon\frac{L^2}{2} < a_{n_k}$.

Z nierówności (i) otrzymujemy

$$\frac{1}{a_n} > \frac{1}{L+\varepsilon L^2} = \frac{1}{L} - \frac{\varepsilon L^2}{L(L+\varepsilon L^2)} > \frac{1}{L} - \varepsilon.$$

Załóżmy teraz, że $0 < \varepsilon < \frac{1}{L}$. Wtedy z warunku (ii) wynika, że

$$\frac{1}{a_{n_k}} < \frac{1}{L - \frac{\varepsilon L^2}{2}} = \frac{1}{L} + \frac{\varepsilon\frac{L^2}{2}}{L\left(L - \varepsilon\frac{L^2}{2}\right)} < \frac{1}{L} + \varepsilon.$$

Otrzymane powyżej warunki oznaczają (na mocy 2.4.13(b)), że

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{a_n} = \frac{1}{L} = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n}.$$

Załóżmy teraz, że $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n = 0$. Niech $M > 0$ będzie dowolnie ustaloną liczbą. Wtedy z warunku (i) zadania 2.4.13(a) wynika, że istnieje taki wskaźnik k, że $a_n < \frac{1}{M}$ dla $n > k$. Stąd $\frac{1}{a_n} > M$ dla $n > k$, co na podstawie warunku (4) z rozwiązania zadania 2.4.13 oznacza, że $\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{a_n} = +\infty$. Niech teraz $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n = +\infty$. Wtedy (patrz warunek (1) z rozwiązania zadania 2.4.13) dla każdego $\varepsilon > 0$ i dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje takie $n_k > k$, że $a_{n_k} > \frac{1}{\varepsilon}$. Ostatnia nierówność jest równoważna nierówności $\frac{1}{a_{n_k}} < \varepsilon$. Oczywiście $-\varepsilon < \frac{1}{a_n}$. Spełnione są więc oba warunki z zadania 2.4.13(b) dla ciągu $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ z $l = 0$, co oznacza, że $\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{a_n} = 0$.

W ten sposób dowód pierwszej równości zadania został zakończony. Dowód drugiej jest analogiczny.

2.4.23. Z warunku zadania wynika, że $0 < \overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n < +\infty$. Z równości $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{a_n} = 1$ oraz z poprzedniego zadania otrzymujemy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{a_n}} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n.$$

Stąd i z zadania 2.4.18 wynika zbieżność ciągu $\{a_n\}$.

2.4.24. Załóżmy, że spełniona jest pierwsza z wymienionych równości i przyjmijmy $b_n = -a_n$. Wtedy na podstawie zadania 2.4.21 mamy

$$0 = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n + (-a_n)) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(-a_n) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n - \overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n.$$

Stąd i z zadania 2.4.18 wynika zbieżność ciągu $\{a_n\}$.

2.4.25. Załóżmy, że spełniona jest pierwsza z wymienionych równości i przyjmijmy $b_n = \frac{1}{a_n}$. Wtedy na podstawie zadania 2.4.22 otrzymujemy

$$1 = \underline{\lim_{n\to\infty}}\left(a_n \cdot \frac{1}{a_n}\right) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{1}{a_n}\right) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n \cdot \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n}.$$

Wynika stąd, że granice górna i dolna ciągu $\{a_n\}$ są liczbami dodatnimi i $\underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n$. Oznacza to, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny (patrz zadanie 2.4.18).

2.4.26. Oczywiście $\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{a_n}$. Pokażemy teraz, że $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Jeśli $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$, to nierówność ta jest oczywista. Załóżmy więc, że $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{a_{n+1}}{a_n} = L, 0 \le L < \infty$. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie k, że

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \ge k.$$

Stąd

$$\frac{a_n}{a_k} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k} < (L+\varepsilon)^{n-k}.$$

Zatem

$$\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a_k}(L+\varepsilon)^{\frac{-k}{n}}(L+\varepsilon).$$

Ponieważ $\sqrt[n]{a_k}(L+\varepsilon)^{\frac{-k}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, to dla odpowiednio dużych wskaźników mamy

$$\sqrt[n]{a_k}(L+\varepsilon)^{\frac{-k}{n}} < 1 + \varepsilon.$$

Z powyższych rozważań wynika, że dla dostatecznie dużych n prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[n]{a_n} < (1+\varepsilon)(L+\varepsilon) = L + (L+1)\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Stąd i z zadania 2.4.12(a) otrzymujemy $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L + (L+1)\varepsilon + \varepsilon^2$. Wobec dowolności ε mamy więc $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Aby otrzymać $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, wystarczy zastosować udowodnioną już nierówność do ciągu $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ i skorzystać z zadania 2.4.22.

2.4.27. Udowodnimy najpierw nierówność $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$. Załóżmy, że $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = L < +\infty$. (Jeśli $L = +\infty$, to powyższa nierówność jest oczywiście prawdziwa). Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taki wskaźnik k, że $a_n < L+\varepsilon$ dla $n > k$. Stąd

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n}{n} < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{n} - \frac{k(L+\varepsilon)}{n} + L + \varepsilon.$$

Ponieważ $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{n} - \frac{k(L+\varepsilon)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, więc dla dostatecznie dużych n mamy $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{n} - \frac{k(L+\varepsilon)}{n} < \varepsilon$. Z powyższych rozważań wynika więc, że $b_n < \varepsilon + L + \varepsilon$ dla dostatecznie dużych n. Zatem z zadania 2.4.12(a) i z dowolności ε otrzymujemy $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n \leq L = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$. Dowód nierówności $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ jest analogiczny.

2.4.28.

(a) i **(b)** W celu udowodnienia tych równości wystarczy zastosować zadanie 2.4.13.

(c) Równość ta jest nieprawdziwa. Wystarczy rozpatrzyć ciągi

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n = 2k, \\ 1 & \text{dla} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

oraz

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 2k, \\ 0 & \text{dla} \quad n = 2k+1. \end{cases}$$

Wtedy

$$0 = \overline{\lim}_{n\to\infty} \min\{a_n, b_n\} \neq \min\{\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n, \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n\} = 1.$$

(d) Równość ta także nie jest prawdziwa, co łatwo sprawdzić biorąc np. ciągi z części (c).

2.4.29. Załóżmy najpierw, że ciąg $\{a_n\}$ ma następującą własność. Istnieje nieskończenie wiele takich n, że dla dowolnego $k \geq n$ mamy

(1) $$a_k \leq a_n.$$

Niech n_1 będzie pierwszą liczbą naturalną mającą tę własność, n_2 drugą itd. Wtedy ciąg $\{a_{n_k}\}$ jest malejącym podciągiem ciągu $\{a_n\}$. Jeśli ciąg $\{a_n\}$ nie ma tej własności, tzn. istnieje tylko skończona liczba n spełniających (1), to wybieramy takie m_1, że ciąg $\{a_{m_1+n}\}$ nie ma własności (1). Niech m_2 oznacza pierwszy wskaźnik większy niż m_1, dla którego $a_{m_2} > a_{m_1}$. Kontynuując ten proces, otrzymujemy ściśle rosnący podciąg $\{a_{m_n}\}$ ciągu $\{a_n\}$.

2.4.30. Wybrany tak jak w poprzednim zadaniu monotoniczny podciąg jest oczywiście ograniczony, a więc zbieżny.

2.4.31. Załóżmy, że $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$. Wtedy na podstawie zadania 2.4.14(b) również

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{a_n} = +\infty.$$

Niech teraz

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha < +\infty.$$

Wtedy dla dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje takie k, że

(1) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geq k.$$

Nierówność ta jest równoważna nierówności

(2) $$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{1}{\alpha + \varepsilon} \quad \text{dla} \quad n \geq k.$$

Stąd dla dostatecznie dużych n mamy

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{a_k + \ldots + a_n + a_{n+1}}{a_n} \\ &= \frac{a_k}{a_{k+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} \\ &\quad + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} + 1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &\geq \left(\frac{1}{\alpha+\varepsilon}\right)^{n-k} + \left(\frac{1}{\alpha+\varepsilon}\right)^{n-k-1} + \ldots + \frac{1}{\alpha+\varepsilon} + 1 + \frac{a_{n+1}}{a_n}. \end{aligned}$$

Jeśli $0 < \alpha < 1$, to z powyższej nierówności oraz z zadania 2.4.14(b) wynika, że $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Jeśli natomiast $\alpha \geq 1$, to na podstawie zadań 2.4.14(b) oraz 2.4.19 otrzymujemy

(3) $$\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n \geq \alpha + \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{\alpha+\varepsilon}\right)^{n-k+1}}{1 - \frac{1}{\alpha+\varepsilon}} = \alpha + \frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha+\varepsilon-1}.$$

Z powyższej nierówności w przypadku $\alpha = 1$ (wobec dowolności $\varepsilon > 0$) otrzymujemy $\overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = +\infty$. Załóżmy teraz, że $\alpha > 1$. Wtedy z nierówności (3) wynika

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} b_n \geq 1 + \alpha + \frac{1}{\alpha - 1} = 2 + (\alpha - 1) + \frac{1}{\alpha - 1} \geq 4.$$

Łatwo sprawdzić, że dla ciągu o wyrazach $a_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, jest osiągnięta równość.

2.5 ZADANIA RÓŻNE

2.5.1. Załóżmy najpierw, że $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Niech $b_n = [a_n]$. Wtedy $b_n \leq a_n < b_n + 1$. Stąd

$$\left(1 + \frac{1}{b_n + 1}\right)^{b_n} < \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n + 1}.$$

Stąd z zadania 2.1.38 i z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \mathrm{e}.$$

Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \mathrm{e}^{-1}.$$

Istotnie

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{a_n - 1}\right)^{a_n}} = \mathrm{e}^{-1}.$$

Stąd i z powyższych rozważań wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \mathrm{e}, \quad \text{gdy ciąg } \{a_n\} \text{ jest rozbieżny do } -\infty.$$

2.5.2. Wystarczy zastosować poprzednie zadanie, przyjmując $a_n = \frac{n}{x}$, $x \neq 0$.

2.5.3. Z poprzedniego zadania oraz z zadań 2.1.39 i 2.1.40 wynika, że $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \mathrm{e}^x < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{l+n}$ dla $l > x > 0$, $l \in \mathbb{N}$. Stąd dla dowolnego dodatniego x oraz dowolnej liczby naturalnej n otrzymujemy $\frac{x}{n+l} < \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) < \frac{x}{n}$, $l > x$. Biorąc w prawej nierówności $n = 1$, otrzymujemy $\ln(1 + x) < x$, $x > 0$. Przyjmijmy teraz w lewej nierówności $l = [x] + 1$. Wtedy

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) > \frac{\frac{x}{n}}{2 + \frac{x}{n}}.$$

Stąd wynika, że $\ln(1 + x) > \frac{x}{2 + x}$ dla $x > 0$.

Rozpatrzmy teraz funkcję $f(x) = \ln(1 + x) - \frac{2x}{2 + x}$, $x > 0$. Mamy

$$f'(x) = \frac{x^2}{(x + 1)(x + 2)^2} > 0 \quad \text{dla} \quad x > 0.$$

Zatem

$$f(x) = \ln(1 + x) - \frac{2x}{2 + x} > f(0) = 0 \quad \text{dla} \quad x > 0.$$

2.5.4.

(a) Załóżmy najpierw, że $a > 1$. Niech $a_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Wtedy na podstawie nierówności z zadania 2.5.3 otrzymujemy

$$\frac{2a_n}{a_n + 2} < \frac{1}{n} \ln a = \ln(a_n + 1) < a_n.$$

Stąd i z twierdzenia o trzech ciągach mamy $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$ dla $a > 1$. Równość jest oczywista dla $a = 1$. Aby dowieść jej dla $0 < a < 1$, wystarczy zastosować udowodnioną już część do $\frac{1}{a} > 1$.

(b) Niech $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Mamy $(a_n + 1)^n = n$. Stąd i z zadania 2.5.3 wynika, że $\ln n = n \ln(a_n + 1) < n a_n$. Zatem $\lim_{n\to\infty} n a_n = +\infty$.

2.5.5. Korzystając z rachunku różniczkowego, można pokazać, że dla $x > -1$ prawdziwa jest nierówność $\frac{x}{1 + x} \leq \ln(1 + x) \leq x$. Ponieważ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, więc począwszy od pewnego wskaźnika spełniona jest nierówność $a_n > 0$. Zatem $\frac{a_n - 1}{1 + a_n - 1} \leq \ln a_n = \ln(1 + (a_n - 1)) \leq a_n - 1$. Po podzieleniu stronami przez $a_n - 1$ wystarczy zastosować twierdzenie o trzech ciągach.

2.5.6. Na podstawie definicji (patrz zadanie 2.1.38) $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Mamy

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &\quad + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Stąd

(i) $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < a_n, \quad n \geq 2$$

Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ i niech $n > k$. Wtedy

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &> 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ &\quad + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Przechodząc stronami do granicy przy $n \to \infty$, otrzymujemy

(ii) $$\mathrm{e} \geq a_k.$$

Z nierówności (i) oraz (ii) wynika, że granicą tak określonego ciągu $\{a_n\}$ jest liczba e. Ponadto

$$a_{n+m} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+m)!}$$
$$< \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right\} < \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}.$$

Przechodząc stronami do granicy przy $m \to \infty$, otrzymujemy

$$\mathrm{e} - a_n \leq \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}.$$

Stąd oraz z nierówności (ii) $0 < \mathrm{e} - a_n < \frac{1}{nn!}$.

2.5.7. Wiadomo (patrz zadanie 2.5.2), że $\mathrm{e}^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$. Dla dowolnie ustalonego $x \in \mathbb{R}$ niech $a_n = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$. Wtedy

$$\left|a_n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| = \left|\sum_{k=2}^{n}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right)\frac{x^k}{k!}\right|$$
$$\leq \sum_{k=2}^{n}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right)\frac{|x|^k}{k!}.$$

Na podstawie nierówności z zadania 1.2.1 mamy

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geq 1 - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{j}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n} \quad \text{dla} \quad 2 \leq k \leq n.$$

Stąd

$$\left|a_n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| \leq \sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2n}\frac{|x|^k}{k!} = \frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{|x|^k}{(k-2)!}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{|x|^k}{(k-2)!} = 0$ (co można wykazać, stosując np. twierdzenie Stolza – zadanie 2.3.11), więc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$.

2.5.8.

(a) Z zadania 2.1.38 wynika, że prawdziwa jest nierówność $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$. Stąd dla $n > 1$ otrzymujemy

$$\ln\frac{2n+1}{n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} < \ln\frac{2n}{n-1}.$$

Z ciągłości funkcji logarytmicznej i z twierdzenia o trzech ciągach wynika już żądana równość.

(b) Mamy

$$\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Stąd i z części (a) wynika żądana równość.

2.5.9. Podobnie jak w zadaniu 2.5.3 można udowodnić, że

(*) $$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x \quad \text{dla} \quad x > 0.$$

Niech $b_n = \ln a_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$. Na podstawie nierówności (*) otrzymujemy

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} < \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2}.$$

Stąd oraz z równości

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$. Zatem z ciągłości funkcji logarytmicznej otrzymujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\mathrm{e}}$.

2.5.10. Indukcyjnie dowodzimy, że

$$a_n = n + n(n-1) + \ldots + n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2 + n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$$
$$= \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!} + \ldots + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{0!}.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{a_k}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+1}{a_1}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n+1}{a_n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e}.$$

Ostatnia równość wynika z zadania 2.5.6.

2.5.11. Na podstawie zadania 2.5.6 mamy

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{nn!}, \quad \text{gdzie} \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Stąd $0 < n!\mathrm{e} - [n!\mathrm{e}] = \frac{\theta_n}{n} < \frac{1}{n}$, co oznacza, że rozpatrywany ciąg jest zbieżny do zera.

2.5.12. Z zależności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną, z monotoniczności funkcji logarytmicznej oraz z nierówności $\ln(1+x) \le x$, $x > -1$, otrzymujemy

$$\frac{1}{n}\ln\sqrt{ab} \le \ln\frac{1}{2}(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}) = \ln\left(\frac{1}{2}(\sqrt[n]{a}-1)+\frac{1}{2}(\sqrt[n]{b}-1)+1\right)$$
$$< \frac{1}{2}\left((\sqrt[n]{a}-1)+(\sqrt[n]{b}-1)\right).$$

Wystarczy teraz pomnożyć powyższą nierówność przez n i skorzystać z zadania 2.5.4(a).

2.5.13. Korzystając z definicji granicy ciągu, można łatwo pokazać, że jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n^n = a > 0$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Załóżmy teraz, że $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ są ciągami o wyrazach różnych od 1. Wtedy na podstawie zadania 2.5.5 mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\ln a_n}{n(a_n-1)} = 1.$$

Z założenia, że $\lim_{n\to\infty} a_n^n = a > 0$ oraz z ciągłości funkcji logarytmicznej wynika, że $\lim_{n\to\infty} n\ln a_n = \ln a$. Stąd i z powyższych rozważań otrzymujemy $\lim_{n\to\infty} n(a_n-1) = \lim_{n\to\infty} n\ln a_n = \ln a$. Zauważmy teraz, że ostatnia równość jest prawdziwa również, gdy opuścimy założenie $a_n \neq 1$. Ostatecznie

$$\lim_{n\to\infty} n\ln(pa_n+qb_n) = \lim_{n\to\infty} n(p(a_n-1)+q(b_n-1)) = \ln a^p b^q.$$

2.5.14. Mamy $a_{n+1}-a_n = -\frac{1}{n}(a_n-a_{n-1})$. Stąd

$$a_n = a+(b-a)+\ldots+(a_n-a_{n-1})$$
$$= a+(b-a)\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-1)!}\right),$$

czyli na podstawie zadania 2.5.7 $\lim_{n\to\infty} a_n = b-(b-a)\mathrm{e}^{-1}$.

2.5.15. Wskazówka. Rozważyć ciąg o wyrazach $b_n = \frac{a_n}{n!}$ i zastosować metodę z poprzedniego zadania. Otrzymamy $a_n = n!$ dla $n \in \mathbb{N}$.

2.5.16. Podobnie jak w zadaniu 2.5.14 $a_{n+1}-a_n = -\frac{1}{2n}(a_n-a_{n-1})$. Stąd $\lim_{n\to\infty} a_n = 2b-a-2(b-a)\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}}$.

2.5.17.

(a) Mamy

$$a_n = 3-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{(k+1)!} = 3-\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1-k}{k(k+1)!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+1)!}$$
$$= 3-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kk!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}.$$

Zatem na podstawie zadania 2.5.6 $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$.

(b) Z części (a) oraz z zadania 2.5.6 wynika, że

$$0 < a_n - \mathrm{e} < \frac{1}{(n+1)(n+1)!}.$$

Uwaga. Ciąg ten dąży szybciej do e niż ciąg rozpatrywany w zadaniu 2.5.6.

2.5.18. Z zadania 2.5.6 wynika, że $\mathrm{e} = 1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!}+r_n$, gdzie $\lim_{n\to\infty} n!r_n = 0$. Ponadto

$$(*) \qquad \frac{1}{n+1} < n!r_n < \frac{1}{n}.$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!\mathrm{e}) = \lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!r_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n2\pi n!r_n\frac{\sin(2\pi n!r_n)}{2\pi n!r_n} = \lim_{n\to\infty} n2\pi n!r_n = 2\pi.$$

Ostatnia równość wynika z nierówności $(*)$.

2.5.19. Niech $M > 0$ będzie dowolnie wybraną liczbą rzeczywistą. Wtedy dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ jest $a_n > M$. Zatem

$$0 < 1-\frac{a_n}{n} < 1-\frac{M}{n}.$$

Czyli

$$0 < \left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n < \left(1-\frac{M}{n}\right)^n.$$

Stąd na podstawie zadań 2.4.12, 2.4.14 i 2.5.2 mamy

$$0 \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n \le \mathrm{e}^{-M}.$$

Przechodząc teraz z M do nieskończoności, otrzymujemy

$$0 \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n \le 0.$$

Zatem $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n = 0$.

2.5.20. Niech M będzie dowolnie ustaloną liczbą dodatnią. Wtedy dla dostatecznie dużych n spełniona jest nierówność $b_n > M$. Stąd, podobnie jak w poprzednim zadaniu, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b_n}{n}\right)^n \geq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{M}{n}\right)^n = \mathrm{e}^M.$$

Wobec dowolności M mamy $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b_n}{n}\right)^n = +\infty$.

2.5.21. Łatwo zauważyć, że ciąg $\{a_n\}$ jest malejący i zbieżny do zera.

(a) Mamy $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1-a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Stąd i z zadania 2.3.14 otrzymujemy $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n} = 1$.

(b) Na podstawie (a) mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(1-na_n)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\frac{1}{na_n}-1\right)na_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n}-n}{\ln n}.$$

Stąd i z twierdzenia Stolza (zadanie 2.3.11) otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(1-na_n)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}-1\right)}{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\frac{1}{1-a_n}-1\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{1-a_n} = 1.$$

2.5.22. Łatwo pokazać, że rozpatrywany ciąg jest malejący i zbieżny do zera. Ponadto, stosując np. regułę de l'Hospitala, można pokazać, że $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}$. Dlatego

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Stąd, podobnie jak w poprzednim zadaniu, otrzymujemy $\lim_{n\to\infty} na_n^2 = 3$.

2.5.23. Łatwo zauważyć, że ciąg ten jest rosnący. Pokażemy, że jest on rozbieżny do nieskończoności. Istotnie

$$a_{n+1}^2 = \left(a_n + \frac{1}{a_1+\ldots+a_n}\right)^2 > \left(a_n+\frac{1}{na_n}\right)^2 > a_n^2 + \frac{2}{n}.$$

Stąd

$$a_{2n}^2 - a_n^2 > \frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n-2}+\ldots+\frac{2}{n} > \frac{2n}{2n-1} > 1.$$

Oznacza to, że ciąg $\{a_n^2\}$ nie spełnia warunku Cauchy'ego, czyli jako rosnący jest rozbieżny do $+\infty$. Ponadto

$$(*) \qquad 1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1+\frac{1}{na_n}.$$

Na podstawie twierdzenia Stolza

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(a_{n+1}^2-a_n^2)}{2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}(a_{n+1}^2-a_n^2)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}+\frac{1}{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}\right) = 1,$$

gdyż

$$0 < \frac{n}{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2} < \frac{1}{n}$$

oraz na podstawie twierdzenia Stolza

$$(**) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}-na_n}{a_{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n+1-n\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = 1.$$

Istotnie, na podstawie nierówności $(*)$ mamy

$$1 \leq n+1-n\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{1+\frac{n+1}{na_n}}{1+\frac{1}{na_n}}.$$

Stąd oraz z faktu, że $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ wynika ostatnia równość we wzorze $(**)$.

2.5.24. Z nierówności $\operatorname{arctg} x < x$ dla $x > 0$ wynika, że rozpatrywany ciąg jest malejący. Oczywiście jest on ograniczony z dołu przez 0, a więc jest zbieżny. Granica g tego ciągu spełnia równanie $g = \operatorname{arctg} g$. Zatem $g = 0$.

2.5.25. Zauważmy najpierw, że wszystkie wyrazy ciągu $\{a_n\}$ leżą w przedziale $(0,1)$. W przedziale tym równanie $\cos x = x$ ma dokładnie jedno rozwiązanie x_0. Oczywiście jest to jedyne rozwiązanie również w $\mathbb{R}$.
Jeśli $x > x_0$, to $\cos(\cos x) < x$. Istotnie funkcja $f(x) = \cos(\cos x) - x$ jest malejąca, gdyż $f'(x) = \sin x \sin(\cos x) - 1 < 0$, dla $x \in \mathbb{R}$. Zatem $x > x_0 \Longrightarrow \cos(\cos x) - x < f(x_0) = 0$. Podobnie, jeśli $x < x_0$, to $\cos(\cos x) > x$.
Załóżmy najpierw, że $a_1 > x_0$. Wtedy z powyższych rozważań wynika, że $a_3 = \cos(\cos a_1) < a_1$. Ponieważ $y = \cos(\cos x)$ jest funkcją rosnącą w przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$, więc $a_5 < a_3$. Zatem łatwo można dowieść indukcyjnie, że $\{a_{2n-1}\}$ jest ciągiem malejącym. Natomiast $a_2 = \cos a_1 < \cos x_0 = x_0$, co implikuje, że $a_4 = \cos(\cos a_2) > a_2$. Stąd wynika, że ciąg $\{a_{2n}\}$ jest ciągiem rosnącym.

Podobne rozumowanie można przeprowadzić w przypadku $0 < a_1 < x_0$. Jeśli $a_1 = x_0$, to ciąg $\{a_n\}$ jest stały o wyrazach równych x_0. Stąd wynika, że ciągi $\{a_{2n-1}\}$, $\{a_{2n}\}$ są zbieżne do granicy g spełniającej równanie $\cos(\cos g) = g$. Łatwo sprawdzić, że jedynym rozwiązaniem tego równania jest liczba x_0.

2.5.26. Zauważmy, że

$$a_n = 1 - (-1)^{n-1}\underbrace{\sin(\sin(\ldots\sin 1)\ldots)}_{(n-1)\text{ razy}}, \quad n > 1.$$

Zatem

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n - 1 - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \underbrace{\sin(\sin(\ldots\sin 1)\ldots)}_{k\text{ razy}}}{n}.$$

Wykażemy teraz, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \underbrace{\sin(\sin(\ldots\sin 1)\ldots)}_{k\text{ razy}}}{n} = 0.$$

Istotnie, jeśli $n-1$ jest liczbą parzystą, to prawdziwa jest nierówność

$$\frac{-\sin 1 + \underbrace{\sin(\sin(\ldots\sin 1)\ldots)}_{(n-1)\text{ razy}}}{n} < \frac{\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \underbrace{\sin(\sin(\ldots\sin 1)\ldots)}_{k\text{ razy}}}{n} < 0.$$

Podobnie dla $n-1$ nieparzystego. Ostatecznie $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$.

2.5.27. Łatwo zauważyć, że $a_n \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}), n = 1, 2, \ldots$, i $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Ponadto mamy

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - a_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{tg} a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Z powyższych rozważań oraz z ciągłości funkcji $x \to \operatorname{arctg} x$ wynika, że $\lim_{n\to\infty}(\frac{\pi}{2} + n\pi - a_n) = 0$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n - \pi) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - a_n - \left(\frac{\pi}{2} + (n+1)\pi - a_{n+1}\right)\right) = 0.$$

Czyli $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \pi$.

2.5.28. Zauważmy, że bez zmniejszenia ogólności rozważań można przyjąć, że $|a_1| \le \frac{\pi}{2}$. Istotnie, jeśli tak by nie było, to już drugi wyraz spełniałby tę nierówność. Załóżmy najpierw, że $0 < a \le 1$ i $a_1 > 0$. Wtedy $a_{n+1} = a\sin a_n < a_n$. Zatem ciąg $\{a_n\}$ jako malejący i ograniczony z dołu jest zbieżny. Jego granicą jest 0, które jest jedynym rozwiązaniem równania $x = a\sin x, 0 < a \le 1$. Załóżmy teraz, że $1 < a \le \frac{\pi}{2}$ i $a_1 > 0$. Wtedy równanie $x = a\sin x$ ma dwa rozwiązania nieujemne 0 oraz $x_0 > 0$. Jeśli $a_1 < x_0$, to $\{a_n\}$ jest ciągiem rosnącym ograniczonym z góry przez x_0. Istotnie $a_2 = a\sin a_1 > a_1$. Ponadto $a_2 = a\sin a_1 < a\sin x_0 = x_0$. Stąd i z zasady indukcji matematycznej mamy

$$0 < a_1 < x_0 \Longrightarrow a_n < a_{n+1} < x_0.$$

Podobnie

$$a_1 > x_0 \Longrightarrow a_n > a_{n+1} > x_0.$$

Zatem $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ dla $1 < a \le \frac{\pi}{2}$.

Rozpatrzmy teraz przypadek $-\frac{\pi}{2} \le a < 0, a_1 > 0$. Wtedy, rozpatrując ciąg $\{b_n\}$ określony następująco: $b_1 = a_1$, $b_{n+1} = -a\sin b_n$, otrzymamy $b_n = (-1)^{n-1}a_n$. Stąd i z wcześniej przeprowadzonej analizy ciągu otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{dla} \quad |a| \le 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \quad \text{dla} \quad 1 < a \le \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \text{ nie istnieje} \quad \text{dla} \quad -\frac{\pi}{2} \le a < -1.$$

Przypadek $a_1 < 0$ jest już łatwy do rozpatrzenia poprzez rozważenie ciągu $\{b_n\}$ określonego wzorem: $b_1 = -a_1, b_{n+1} = a\sin b_n$ i wykorzystanie udowodnionej części zadania. Natomiast w przypadku $a_1 = 0$ otrzymujemy ciąg stały.

2.5.29.

(a) Mamy $a_n > 0$ oraz $a_{n+1} = \ln(1 + a_n) < a_n, n \ge 1$. Zatem ciąg ten jest zbieżny i jego granica g spełnia równanie $g = \ln(1 + g)$, czyli $g = 0$. Pokażemy teraz, że $\lim_{n\to\infty} na_n = 2$. Można łatwo dowieść, że

$$\frac{2x}{2+x} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \text{dla} \quad x > 0.$$

Stąd

$$(*) \qquad \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n\left(1 - \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}a_n^2\right)} < \frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}.$$

Przyjmijmy

$$b_n = -\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n\left(1 - \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}a_n^2\right)}.$$

Wtedy $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$. Dodając nierówności $(*)$ stronami, otrzymujemy

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} + b_1 + b_2 + \ldots + b_n < \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}$$
$$< \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} + \frac{n}{2}.$$

Z nierówności tej wynika, że

$$\frac{1}{(n+1)a_1}+\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n+1}<\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}<\frac{1}{(n+1)a_1}+\frac{n}{2(n+1)}.$$

Stąd $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)a_{n+1}}=\dfrac{1}{2}$.

(b) Mamy

$$\lim_{n\to\infty}(na_n-2)\frac{n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}na_n\frac{n-\frac{2}{a_n}}{\ln n}. \tag{1}$$

Pokażemy teraz, że granica $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-\frac{2}{a_n}}{\ln n}$ istnieje. W tym celu skorzystamy z twierdzenia Stolza (patrz zadanie 2.3.11). Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{2}{a_n}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{a_{n+1}}+\frac{2}{a_n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$, więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{2}{a_n}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2a_{n+1}-2a_n+a_na_{n+1})}{a_n^2}. \tag{2}$$

Wystarczy teraz pokazać, że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_{n+1}-2a_n+a_na_{n+1}}{a_n^3}$. Aby tego dowieść, skorzystamy z następującej nierówności (można ją udowodnić np. metodami rachunku różniczkowego)

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},\qquad x>0.$$

Z tej nierówności otrzymujemy

$$\frac{1}{6}a_n^3-\frac{1}{6}a_n^4-\frac{1}{4}a_n^5<2a_{n+1}-2a_n+a_na_{n+1}<\frac{1}{6}a_n^3+\frac{1}{3}a_n^4.$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_{n+1}-2a_n+a_na_{n+1}}{a_n^3}=\frac{1}{6}.$$

Stąd z równości (1) i (2) oraz z udowodnionej już części (a) zadania wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(na_n-2)}{\ln n}=\dfrac{2}{3}$.

2.5.30. Niech $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ i niech $F(x)=f(f(x))-x$. Pokażemy, że $F'(x)<0$ dla $x>0$. Mamy

$$F'(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^x+x}\ln^2 4-1.$$

Zatem

$$F'(x)<0\iff\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^x+x}<\frac{1}{\ln^2 4}.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja występująca po lewej stronie ostatniej nierówności osiąga swoje maksimum równe $\frac{1}{\mathrm{e}\ln 4}$ w punkcie $x=\frac{\ln(\ln 4)}{\ln 4}$. Stąd już wynika, że $F'(x)<0$. Zatem F jest funkcją malejącą na $(0,+\infty)$. Ponadto $F\left(\frac{1}{2}\right)=0$. A więc $F(x)>0$ dla $0<x<\frac{1}{2}$ oraz $F(x)<0$ dla $x>\frac{1}{2}$. Oznacza to, że

$$f(f(x))<x\quad\text{dla}\quad x>\frac{1}{2}.$$

Ponieważ $a_2=1>\frac{1}{2}$, więc $a_4=f(f(a_2))<a_2$. Można więc dowieść indukcyjnie, że $\{a_{2n}\}$ jest ciągiem malejącym. Zatem jest on zbieżny i jego granica g_1 spełnia równość $f(f(g_1))=g_1$. Podobnie dowodzimy, że ciąg $\{a_{2n-1}\}$ jest rosnący i zbieżny do takiego g_2, że $f(f(g_2))=g_2$. Oczywiście $g_1=g_2=\frac{1}{2}$.

2.5.31. Zauważmy najpierw, że dla $n\geq 2$ mamy $0<a_n<2$. Ponadto jeśli $a_n>1$, to $a_{n+1}<1$. Niech $f(x)=2^{1-x}$ i niech $F(x)=f(f(x))-x$. Podobnie jak w poprzednim zadaniu można wykazać, że $F'(x)<0$ dla $0<x<2$. Oznacza to, że

$$F(x)<F(1)=0\quad\text{dla}\quad 1<x<2,$$
$$F(x)>F(1)=0\quad\text{dla}\quad 0<x<1.$$

Następnie, również postępując tak jak w poprzednim zadaniu, dowodzimy, że jeśli $a_1<1$, to ciąg $\{a_{2n}\}$ jest malejący a ciąg $\{a_{2n-1}\}$ rosnący i ich wspólną granicą jest 1. Analogiczne rozumowania można przeprowadzić dla $a_1>1$.

2.5.32. Zauważmy najpierw, że wyrazy ciągu leżą w przedziale $(1,2)$. Ponadto funkcja $F(x)=2^{\frac{x}{2}}-x$ jest malejąca w tym przedziale. Zatem $F(x)>F(2)=0$ dla $x\in(1,2)$. Oznacza to, że rozpatrywany ciąg jest rosnący. Granica g tego ciągu spełnia równanie $g=2^{\frac{g}{2}}$, a więc $g=2$.

2.5.33. Na podstawie zadania 2.3.14 zastosowanego do ciągu $\{a_n+a_{n-1}\}$ otrzymujemy $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+a_{n-1}}{n}=0$. Rozpatrzmy teraz ciąg o wyrazach $b_n=(-1)^na_n$. Tak określony ciąg spełnia założenia, tzn. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-b_{n-2})=0$, a więc na

podstawie udowodnionej części zadania mamy

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n + b_{n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n}.$$

2.5.34. Na podstawie twierdzenia Stolza (zadanie 2.3.11) mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{a_{n+1}} - \ln\frac{1}{a_n}}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = -\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Jeśli granica $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = g$ jest skończona, to $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = 0$. Biorąc teraz pod uwagę nierówności

$$n\frac{\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1}{1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1} \le n\ln\left(1 + \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)\right) \le n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right),$$

otrzymujemy tezę naszego zadania w przypadku skończonej granicy g. Jeśli $g = +\infty$, to z prawej strony nierówności wynika, że $\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\infty$, co daje $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n} = +\infty$. Jeśli natomiast $g = -\infty$, to dla dowolnego $M > 0$ istnieje takie n_0, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{M}{n} + 1$. Zatem

$$n\ln\frac{a_{n+1}}{a_n} > \ln\left(1 + \frac{M}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} M.$$

Stąd i z dowolności M, widzimy że $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n} = -\infty$.

2.5.35. Z definicji ciągów otrzymujemy

$$a_{n+1} + b_{n+1} = (a_1 + b_1)(1 - (a_n + b_n)) + (a_n + b_n).$$

Niech $d_n = a_n + b_n$. Wtedy $d_{n+1} = d_1(1 - d_n) + d_n$. Stąd można łatwo dowieść indukcyjnie, że $d_n = 1 - (1 - d_1)^n$. Podobnie dowodzimy, że

$$a_n = \frac{a_1}{d_1}\left(1 - (1 - d_1)^n\right) \quad \text{oraz} \quad b_n = \frac{b_1}{d_1}\left(1 - (1 - d_1)^n\right).$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a_1}{a_1 + b_1}, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{b_1}{a_1 + b_1},$$

gdyż $|1 - d_1| < 1$.

2.5.36. Niech $\{b_n\}$ będzie ciągiem o wyrazach $b_n = aa_n$. Wtedy $b_{n+1} = b_n(2 - b_n) = -(b_n - 1)^2 + 1$. Stąd $b_{n+1} - 1 = -(b_n - 1)^2$. Ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\{b_n - 1\}$ jest zbieżny, a więc gdy $|b_1 - 1| = |aa_1 - 1| \le 1$. Stąd, jeśli $a_1 = \frac{2}{a}$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Natomiast jeśli $0 < aa_1 < 2$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{a}$.

2.5.37. Szczególny przypadek zadania 2.5.38.

2.5.38. Można pokazać, że funkcja f jest ciągła w punkcie $(a, a, \ldots, a)$ oraz że $f(a, a, \ldots, a) = a$. Niech $\{b_n\}$ będzie ciągiem określonym w następujący sposób:

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_k = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_k\},$$

$$b_n = f(b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_{n-k}) \quad \text{dla} \quad n > k.$$

Jeśli $\min\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} < a$, to $\{b_n\}$ jest ciągiem rosnącym i ograniczonym z góry przez a. Jeśli natomiast $\min\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} > a$, to $\{b_n\}$ jest ciągiem malejącym i ograniczonym z dołu przez a. Zatem ciąg $\{b_n\}$ jest zbieżny i jak łatwo sprawdzić $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. Ponadto ze względu na monotoniczność funkcji f względem każdej ze zmiennych mamy $a_n \le b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Określmy teraz ciąg $\{c_n\}$ następująco:

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_k = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\},$$

$$c_n = f(c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_{n-k}) \quad \text{dla} \quad n > k.$$

Podobnie jak w przypadku ciągu $\{b_n\}$ można wykazać, że $\lim_{n\to\infty} c_n = a$ i że $c_n \le a_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Stąd i z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

2.5.39. Mamy $a_3 = a_2 e^{a_2 - a_1}$, $a_4 = a_3 e^{a_3 - a_2} = a_2 e^{a_3 - a_1}$. Indukcyjnie dowodzimy, że $a_{n+1} = a_2 e^{a_n - a_1}$ dla $n \ge 2$. Zatem jeśli g byłoby granicą rozpatrywanego ciągu, to byłoby:

$$(*) \qquad \frac{e^{a_1}}{a_2} g = e^g.$$

Równanie $(*)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie, $g = 1$ dla $\frac{e^{a_1}}{a_2} = e$; dwa rozwiązania dla $\frac{e^{a_1}}{a_2} > e$ i nie ma rozwiązań dla $0 < \frac{e^{a_1}}{a_2} < e$. Rozpatrzmy najpierw przypadek $0 < \frac{e^{a_1}}{a_2} < e$. Wtedy ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny, gdyż gdyby g było jego granicą, to spełniałoby równanie $(*)$, a w tym przypadku równanie to nie ma rozwiązań. Można pokazać, że ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący i rozbieżny do nieskończoności.

Niech teraz $\frac{e^{a_1}}{a_2} = e$. Wtedy $a_2 = e^{a_1 - 1} \ge a_1$. Indukcyjnie pokazujemy, że $a_{n+1} \ge a_n$. Jeśli ponadto $a_1 \le 1$, to można dowieść indukcyjnie, że $a_n \le 1$. Oznacza to, że w tym przypadku $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Jeśli $a_1 > 1$, to $\{a_n\}$ jest ciągiem rosnącym rozbieżnym do nieskończoności.

Niech teraz $\frac{e^{a_1}}{a_2} > e$. Wtedy równanie $(*)$ ma dokładnie dwa rozwiązania g_1, g_2. Załóżmy, że $a_1 < g_1 < g_2$. Wtedy

$$e^{a_1} - \frac{e^{a_1}}{a_2} a_1 > 0,$$

czyli $a_2 > a_1$. Stąd indukcyjnie pokazujemy, że $\{a_n\}$ jest ciągiem rosnącym i ograniczonym z góry przez g_1. Jeśli natomiast $g_1 < a_1 < g_2$, to podobnie można pokazać, że ciąg $\{a_n\}$ jest malejący i ograniczony z dołu przez g_1, która to liczba jest jego granicą. Jeśli $a_1 = g_1$ lub $a_1 = g_2$, to ciąg jest stały. W końcu, jeśli $a_1 > g_2$, to ciąg rośnie do $+\infty$.

2.5.40. (Zadanie to i jego rozwiązanie pochodzi od Eulera. Zobacz [12]). Prawdziwa jest nierówność $\ln x \le \frac{x}{\mathrm{e}}$ dla $x > 0$, co łatwo sprawdzić stosując metody rachunku różniczkowego. Stąd $\frac{a_n}{\mathrm{e}} \ge \ln a_n = a_{n-1} \ln a$, $n > 1$. Zatem $a_n \ge a_{n-1} \ln a^{\mathrm{e}}$. Oznacza to, że ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący, jeśli $\ln a^{\mathrm{e}} > 1$ czyli, jeśli $a > \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$. Wykażemy, że w tym przypadku $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Mamy $a_{n+1} - a_n = a^{a_n} - a_n$. Dla $a > \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ rozpatrzmy więc funkcję określoną wzorem $g(x) = a^x - x$. Funkcja ta osiąga minimum w punkcie $x_0 = -\frac{\ln(\ln a)}{\ln a} < \mathrm{e}$. Zatem $a^x - x > \frac{1 + \ln(\ln a)}{\ln a} > 0$. Oznacza to, że $a_{n+1} - a_n > \frac{1 + \ln(\ln a)}{\ln a} > 0$, czyli ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do nieskończoności.

Rozpatrzmy przypadek $1 < a < \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$. Pokażemy, że wtedy równanie $a^x - x = 0$ ma dwa dodatnie pierwiastki. W tym celu rozpatrzmy ponownie funkcję $g(x) = a^x - x$. Jej pochodna zeruje się w punkcie $x_0 > 0$ takim, że $a^{x_0} = \frac{1}{\ln a}$. Można pokazać, że w punkcie tym funkcja g osiąga minimum. Ponadto

$$g(x_0) = a^{x_0} - x_0 = \frac{1}{\ln a} - x_0 = \frac{1 - x_0 \ln a}{\ln a} < 0,$$

gdyż dla $1 < a < \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ jest $\frac{1}{\ln a} > \mathrm{e}$. Oznacza to, że $a^{x_0} > \mathrm{e}$.

Funkcja g jako ciągła ma własność Darboux , a więc równanie $a^x = x$ ma jeden pierwiastek w przedziale $(0, x_0)$, a drugi w przedziale $(x_0, +\infty)$. Oznaczmy te pierwiastki odpowiednio przez α oraz β. Zauważmy ponadto, że $g(e) = a^{\mathrm{e}} - \mathrm{e} < \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)^{\mathrm{e}} - \mathrm{e} = 0$. Oznacza to, że e leży między pierwiastkami równania.

Niech teraz $x > \beta$. Wtedy $a^x > a^\beta = \beta$ oraz $g(x) > 0$, czyli ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący i ograniczony od dołu przez β. Musi więc być $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Jeśli teraz $\alpha < x < \beta$, to $\alpha < a^x < \beta$ oraz $g(x) < 0$. Wynika stąd, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony i malejący a więc zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

Jeśli $x = \alpha$ lub $x = \beta$, to otrzymujemy ciągi stałe.

Niech teraz $0 < x < \alpha$. Wtedy $1 < a^x < \alpha$ i $g(x) > 0$. Zatem ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący i ograniczony z góry przez α, które jest jego granicą.

Rozpatrzmy teraz przypadek $a = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$. Wtedy, jak łatwo sprawdzić, e jest jedynym pierwiastkiem równania $a^x = x$ oraz funkcja g osiąga w tym punkcie minimum $g(\mathrm{e}) = 0$. Stąd dla $0 < x \le \mathrm{e}$ mamy $0 < a^x \le \mathrm{e}$ oraz $g(x) \ge g(\mathrm{e}) = 0$.

Oznacza to, że w tym przypadku ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$. Podobnie można pokazać, że dla $x > \mathrm{e}$ ciąg ten jest rosnący i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Podsumowując powyższe rozważania, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{dla} \quad a > \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}},\ x > 0, \\ +\infty & \text{dla} \quad 1 < a < \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}},\ x > \beta, \\ \beta & \text{dla} \quad 1 < a < \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}},\ x = \beta, \\ \alpha & \text{dla} \quad 1 < a < \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}},\ 0 < x < \beta, \\ +\infty & \text{dla} \quad a = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}},\ x > \mathrm{e}, \\ \mathrm{e} & \text{dla} \quad a = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}},\ 0 < x \le \mathrm{e}. \end{cases}$$

2.5.41. Dowód równości można przeprowadzić indukcyjnie. Mamy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ (porównaj rozwiązanie zadania 2.1.16).

2.5.42. [19] Zauważmy najpierw, że

$$a_n \le \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ pierwiastków}} < 2.$$

Jeśli $\varepsilon_1 = 0$, to ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem stałym o wyrazach równych zero. Niech $\varepsilon_1 \ne 0$. Dowód równości podanej w zadaniu przeprowadzimy indukcyjnie. Dla $n = 1$ jest ona oczywista. Załóżmy teraz, że

$$a_n = \varepsilon_1 \sqrt{2 + \varepsilon_2 \sqrt{2 + \ldots + \varepsilon_n \sqrt{2}}} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_k}{2^{k-1}}\right).$$

Wtedy, na podstawie założenia indukcyjnego, mamy

$$a_{n+1}^2 - 2 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\varepsilon_2 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_k}{2^{k-2}}\right) = -2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\varepsilon_2 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_k}{2^{k-1}}\right)$$

$$= -2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\varepsilon_1 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_k}{2^{k-1}}\right) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\varepsilon_1 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_k}{2^{k-1}}\right) - 2,$$

co kończy dowód równości. Przechodząc z n do nieskończoności i korzystając z ciągłości funkcji sinus, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_1 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_k}{2^{k-1}}\right).$$

2.5.43. Wskazówka. Udowodnić indukcyjnie, że prawdziwa jest równość

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}.$$

Stąd $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

2.5.44. Mamy

$$\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-\pi n)=\sin^2\frac{\pi}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1.$$

2.5.45. Można wykazać indukcyjnie, że tak określony ciąg jest rosnący i ograniczony z góry, np. przez 3. Jest więc on zbieżny i jego granica g spełnia równanie $g=\sqrt{2+\sqrt{3+g}}$.

2.5.46. [12] Mamy

$$3=\sqrt{1+2\cdot 4}=\sqrt{1+2\sqrt{16}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}}$$
$$=\sqrt{1+2+\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}}.$$

Zatem indukcyjnie pokazujemy, że

$$\text{(1)}\qquad \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}}}}=3.$$

Stąd

$$\text{(2)}\qquad 3\geq\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{n+1}}}}}.$$

Skorzystamy teraz z łatwej do udowodnienia nierówności

$$\text{(3)}\qquad \sqrt{1+x\alpha}\leq\sqrt{\alpha}\sqrt{1+x},\quad x\geq 0,\quad \alpha>1.$$

Przyjmując w (3) $x=n$ oraz $\alpha=n+2$, otrzymujemy

$$\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}<\sqrt{n+2}\sqrt{1+n}.$$

Stąd

$$\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}}<\sqrt{1+\sqrt{n+2}(n-1)\sqrt{1+n}}$$
$$<(n+2)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+(n-1)\sqrt{n+1}},$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z (3), przy czym teraz kładziemy $\alpha=\sqrt{n+2}$. Wobec równości (1), powtarzając powyższą procedurę n razy, otrzymujemy

$$\text{(4)}\qquad 3\leq(n+2)^{2^{-n}}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{n+1}}}}}.$$

Teraz z nierówności (2) i (4) i z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{n+1}}}}}=3.$$

2.5.47. Równanie $x^2+x-a=0$, $a>0$, ma takie dwa pierwiastki rzeczywiste α,β, że $\alpha>0>\beta$. Mamy

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{a}{a_n}-1-\alpha=\frac{a-a_n-\alpha a_n}{a_n}$$
$$=\frac{a-(1+\alpha)(a_n-\alpha)-\alpha(1+\alpha)}{a_n}=\frac{-(1+\alpha)(a_n-\alpha)}{a_n}.$$

Ponieważ $\alpha+\beta=-1$, więc $a_{n+1}-\alpha=\beta\frac{a_n-\alpha}{a_n}$. Podobnie $a_{n+1}-\beta=\alpha\frac{a_n-\beta}{a_n}$. Zatem

$$\frac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}.$$

Stąd indukcyjnie otrzymujemy

$$\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}\frac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}.$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}=0$, gdyż $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{\alpha}{1+\alpha}<1$. Stąd $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\beta$.

2.5.48. Postępując analogicznie jak w poprzednim zadaniu, otrzymujemy

$$\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}\frac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}.$$

Stąd $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$.

2.5.49. Dla dowolnego k naturalnego mamy

$$|a_{n+1+k}-a_{n+1}|=\left|\frac{1}{1+a_{n+k}}-\frac{1}{1+a_n}\right|=\frac{|a_{n+k}-a_n|}{(1+a_{n+k})(1+a_n)}\leq\frac{1}{4}|a_{n+k}-a_n|.$$

Stąd i z zasady indukcji matematycznej otrzymujemy

$$|a_{n+1+k}-a_{n+1}|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n|a_{k+1}-a_1|.$$

Ponadto $|a_{k+1}-a_1| \le |a_{k+1}-a_k|+|a_k-a_{k-1}|+\ldots+|a_2-a_1| \le \frac{1}{1-\frac{1}{4}}|a_2-a_1| = \frac{4}{3}|a_2-a_1|$. Ciąg $\{a_n\}$ spełnia więc warunek Cauchy'ego. Jego granicą jest $\sqrt{2}$.

2.5.50. Tak jak w rozwiązaniu poprzedniego zadania pokazujemy, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 1+\sqrt{2}$.

2.5.51. Niech $f(x) = \frac{a}{2+x}, x > 0$, i niech $F(x) = f(f(x))$. Wtedy $F'(x) > 0$ dla $x > 0$. Łatwo sprawdzić, że $a_1 < a_3$ oraz $a_4 < a_2$. Ponadto, ponieważ F jest funkcją ściśle rosnącą, więc ciąg $\{a_{2n}\}$ jest ściśle malejący, a ciąg $\{a_{2n+1}\}$ jest ściśle rosnący. Oczywiście $\{a_n\}$ jest ciągiem ograniczonym. Zatem oba jego podciągi $\{a_{2n}\}$ i $\{a_{2n+1}\}$ są zbieżne. Można sprawdzić, że ich wspólną granicą jest liczba $\sqrt{1+a}-1$.

2.5.52. Jeśli $a_1 \le 0$, to $a_2 = 1-a_1 > 1$. Stąd $a_3 = a_2 - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ i indukcyjnie pokazujemy, że $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2^{n-1}}$ dla $n \ge 2$. Stąd

$$a_{n+1} = -\left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \ldots + \frac{1}{2}\right) + a_2.$$

Zatem $\lim_{n\to\infty} a_n = -a_1$ dla $a_1 \le 0$. Jeśli teraz $a_1 \in (0,2)$, to $a_2 \in [0,1)$. Indukcyjnie pokazujemy, że $a_{n+1} \in \left[0, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$. Oznacza to, że w tym przypadku $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Jeśli $a_1 \ge 2$, to $a_2 = a_1 - 1 \ge 1$. Indukcyjnie pokazujemy, że $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2^{n-1}}$, i analogicznie jak w pierwszym przypadku otrzymujemy $\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 - 2$.

2.5.53.

(a) Mamy

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{ja^j}{n-j} &= \frac{a}{n-1} + \frac{2a^2}{n-2} + \frac{3a^3}{n-3} + \ldots + \frac{(n-1)a^{n-1}}{1} \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\frac{a}{1} + \frac{2(n-1)a^2}{n-2} + \frac{3(n-1)a^3}{n-3} + \ldots + \frac{(n-1)^2a^{n-1}}{1}\right) \\ &\le \frac{a+2^2a^2+3^2a^3+\ldots+(n-1)^2a^{n-1}}{n-1},\end{aligned}$$

gdyż

$$j\frac{n-1}{n-j} = j\left(\frac{n-j}{n-j} + \frac{j-1}{n-j}\right) = j\left(1+\frac{j-1}{n-j}\right) \le j(1+j-1) = j^2.$$

Ponadto $\lim_{n\to\infty} \frac{a+2^2a^2+3^2a^3+\ldots+(n-1)^2a^{n-1}}{n-1} = 0$ jako granica średniej arytmetycznej ciągu zbieżnego do zera (patrz zadanie 2.3.2).

(b) Zauważmy, że

$$na^n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{ja^j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{n}{j} a^{n-j} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} a^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{ka^k}{n-k}.$$

Wystarczy teraz skorzystać z części (a).

(c) Zastosować część (b) dla $a = \frac{1}{b}$.

2.5.54. Wiadomo, że $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ dla $x > 0$. Stąd

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^3}{6(n+k)^3} < \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi}{n+k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n+k}.$$

Łatwo sprawdzić, że $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^3}{6(n+k)^3} = 0$. Ponadto, na podstawie zadania 2.5.8(a), $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n+k} = \pi \ln 2$. Zatem szukaną granicą jest również $\pi \ln 2$.

2.5.55.

(a) Niech $a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{cn^3}\right)$. Korzystając z nierówności (patrz zadanie 2.5.3) $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ dla $x > 0$, otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{cn^3+k^2} < \ln a_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{cn^3}.$$

Stąd

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(cn^3+n^2)} < \ln a_n < \frac{n(n+1)(2n+1)}{6cn^3}.$$

Zatem $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{3c}}$.

(b) Można pokazać, że nierówność $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ jest prawdziwa także dla $-1 < x < 0$. Postępując więc analogicznie jak w części (a), otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^2}{cn^3}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{3c}}.$$

2.5.56. Stosując nierówności $x-\frac{x^3}{6} < \sin x < x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}$ dla $x > 0$, otrzymujemy

$$\text{(1)} \qquad \frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!}\frac{n!}{(n\sqrt{n})^n}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^2}{6n^3}\right) < \frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!}\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n\sqrt{n}}$$

oraz

$$\text{(2)} \qquad \frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!}\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!}\frac{n!}{(n\sqrt{n})^n}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^2}{6n^3}+\frac{k^4}{5!n^6}\right).$$

Z nierówności (1) oraz z poprzedniego zadania wynika, że szukana granica jest większa niż $\mathrm{e}^{-\frac{1}{18}}$ lub równa $\mathrm{e}^{-\frac{1}{18}}$. Wykażemy teraz, że

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^2}{6n^3}+\frac{k^4}{5!n^6}\right)\le \mathrm{e}^{-\frac{1}{18}}.$$

Mamy

$$\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^2}{6n^3}+\frac{k^4}{5!n^6}\right)<\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k^2}{6n^3}+\frac{k^4}{5!n^6}\right)$$
$$=-\frac{n(n+1)(2n+1)}{36n^3}+\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30\cdot 5!n^6}.$$

Stąd i z nierówności (2) oraz z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!}\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n\sqrt{n}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{18}}.$$

2.5.57. Pokażemy, że $a_n=\frac{n+1}{2n}a_{n-1}+1$, $n\ge 2$. Mamy

$$(1)\quad a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{k!(n-k)!}{n!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(n-1-k)!(n-k)}{(n-1)!n}+1$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\frac{(n-1-k)!k!}{(n-1)!}+1=a_{n-1}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}+1.$$

Ponadto

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-1-k}{n}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}=\frac{n-1}{n}a_{n-1}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}.$$

Stąd

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}=\frac{n-1}{2n}a_{n-1}.$$

Zatem z nierówności (1) mamy $a_n=a_{n-1}-\frac{n-1}{2n}a_{n-1}+1=\frac{n+1}{2n}a_{n-1}+1$. Teraz już można pokazać, że $\lim_{n\to\infty}a_n=2$.

2.5.58. Jeśli $\alpha=0$, to oczywiście $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Jeśli $\alpha>0$, to $0<a_n<1-\frac{(n-1)^\alpha}{n^\alpha}$ i również $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Niech teraz $\alpha<0$. Wtedy

$$a_n=(-1)^{n-1}\left(n^{-\alpha}-1\right)\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{-\alpha}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-\alpha}-1\right).$$

Stąd dla $\alpha=-1$ otrzymujemy $a_n=(-1)^{n-1}$, czyli ciąg ten nie jest zbieżny.

Załóżmy teraz, że $\alpha<-1$. Wtedy

$$\left(\left(\frac{n}{p}\right)^{-\alpha}-1\right)\left(\left(\frac{n}{n-p}\right)^{-\alpha}-1\right)>\left(\frac{n}{p}-1\right)\left(\frac{n}{n-p}-1\right)=1$$

dla $1\le p<n$ oraz $\left(\frac{n}{n/2}\right)^{-\alpha}-1>2-1=1$. Stąd

$$|a_n|\ge(n^{-\alpha}-1)\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-\alpha}-1\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

Jeśli teraz $-1<\alpha<0$, to analogicznie pokazujemy, że

$$|a_n|\le(n^{-\alpha}-1)\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-\alpha}-1\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

2.5.59. Mamy $(2+\sqrt{3})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt{3})^k2^{n-k}$. Grupując wyrazy ze wskaźnikami parzystami i nieparzystymi, otrzymujemy

$$(2+\sqrt{3})^n=A_n+\sqrt{3}B_n\quad\text{oraz}\quad(2-\sqrt{3})^n=A_n-\sqrt{3}B_n.$$

Stąd wynika, że $\lim_{n\to\infty}(A_n+\sqrt{3}B_n)=+\infty$ oraz $\lim_{n\to\infty}(A_n-\sqrt{3}B_n)=0$. Ponadto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}B_n}{A_n}=1.$$

Oczywiście A_n są liczbami całkowitymi oraz $\frac{\sqrt{3}B_n}{A_n}<1$. Zatem, dla dostatecznie dużych n, mamy $[\sqrt{3}B_n]=A_n-1$. Stąd

$$\{\sqrt{3}B_n\}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1,\quad\text{czyli}\quad\{A_n+\sqrt{3}B_n\}=\{\sqrt{3}B_n\}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1.$$

2.5.60. Ciąg $\{S_n\}$ jest rosnący. Gdyby był on ograniczony z góry, to byłby zbieżny i wtedy $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=0$. Niech teraz $\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$. Z założenia mamy $S_{n+1}a_{n+1}+a_n\le S_na_n+a_{n-1}$. Stąd $S_na_n+a_{n-1}\le S_2a_2+a_1$. Czyli

$$a_n\le a_n+\frac{a_{n-1}}{S_n}\le\frac{S_2a_2+a_1}{S_n}.$$

Ostatecznie $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

2.5.61. Na podstawie założenia, dla dowolnie ustalonego $\varepsilon>0$ mamy $a_n<\varepsilon n$ dla $n>n_0$. Stąd

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n^2}=\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{n_0}^2}{n^2}+\frac{a_{n_0+1}^2+\ldots+a_n^2}{n^2}$$
$$\le\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{n_0}^2}{n^2}+\frac{n\varepsilon(a_{n_0+1}+\ldots+a_n)}{n^2}.$$

Zatem na podstawie zadań 2.4.14 i 2.4.19

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n^2}\le\varepsilon\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}.$$

Stąd już łatwo wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n^2}=0$.

2.5.62. Skorzystamy z twierdzenia Toeplitza (zadanie 2.3.1). Wprowadźmy następujące oznaczenia

$A_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, $\quad B_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$, $\quad C_n=c_1+c_2+\ldots+c_n$.

Niech

$$d_{n,k}=\frac{a_{n-k+1}B_k}{a_1B_n+a_2B_{n-1}+\ldots+a_nB_1}.$$

Pokażemy, że tak określone $d_{n,k}$ spełniają założenia twierdzenia Toeplitza. Dla ustalonego k mamy $d_{n,k}\le\dfrac{a_{n-k+1}}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-k+1}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Ponadto $\sum_{k=1}^{n}d_{n,k}=1$. Zauważmy teraz, że

$$\frac{c_n}{C_n}=\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1}{a_1B_n+a_2B_{n-1}+\ldots+a_nB_1}=d_{n,1}\frac{b_1}{B_1}+d_{n,2}\frac{b_2}{B_2}+\ldots+d_{n,n}\frac{b_n}{B_n}.$$

Stąd, na mocy twierdzenia Toeplitza, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{C_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{B_n}=0$.

2.5.63. Wiadomo, że $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$ dla $x>0$. Niech $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\mathrm{e}^{-n}$. Wtedy $-\dfrac{1}{2}\le\ln a_n\le-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3n}$, co oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=-\dfrac{1}{2}$. Szukaną granicą jest więc $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

2.5.64. Mamy $a_{n+1}-a_n>-\dfrac{1}{n^2}>-\dfrac{1}{n(n-1)}=-\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n}$, $n>1$. Niech $b_n=a_n-\dfrac{1}{n-1}$. Wtedy $\{b_n\}$ jest ciągiem rosnącym i ograniczonym z góry, a więc zbieżnym. Zatem $\{a_n\}$ jest również ciągiem zbieżnym.

2.5.65. Z warunku $a_{n+1}\sqrt[2^n]{2}\ge a_n$ otrzymujemy

$$a_{n+1}2^{-\frac{1}{2^n}}\ge a_n2^{-\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Oznacza to, że ciąg o wyrazach $b_n=a_n2^{-\frac{1}{2^{n-1}}}$ jest monotoniczny i ograniczony, a więc zbieżny. Ponadto $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

2.5.66. Niech $a\in(l,L)$. Załóżmy, że a nie jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$. Oznacza to, że istnieje takie otoczenie punktu a, w którym leży tylko skończona liczba wyrazów ciągu $\{a_n\}$. Niech więc $\varepsilon>0$ będzie takie, że

$(*)\quad l<a-\varepsilon<a<a+\varepsilon<L\quad$ oraz $\quad a_n\notin[a-\varepsilon,a+\varepsilon]\quad$ dla $\quad n>n_1$.

Z założenia wiemy, że $|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon$ dla $n>n_2$. Z zadania 2.4.13(b) wynika, że istnieje takie a_{n_k}, że $a_{n_k}<l+\varepsilon<a$, gdzie $n_k>\max\{n_1,n_2\}$. Zatem $a_{n_k+1}\le a_{n_k}+|a_{n_k+1}-a_{n_k}|<a+\varepsilon$. Stąd i z $(*)$ otrzymujemy $a_{n_k+1}<a-\varepsilon$. Zatem na podstawie zadania 2.4.12(a) $L\le a-\varepsilon<L$. Sprzeczność.

2.5.67. Niech $a\in(l,L)$. Załóżmy, że a nie jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$. Oznacza to, że istnieje takie otoczenie punktu a, w którym leży tylko skończona liczba wyrazów ciągu $\{a_n\}$. Niech więc $\varepsilon>0$ będzie takie, że

$(*)\quad l<a-\varepsilon<a<a+\varepsilon<L\quad$ oraz $\quad a_n\notin[a-\varepsilon,a+\varepsilon]\quad$ dla $\quad n>n_1$.

Z założenia mamy

$(**)\qquad a_n-a_{n+1}<\alpha_n<\varepsilon\quad$ dla $\quad n>n_2$.

Z zadania 2.4.13(a) wynika, że istnieje takie a_{n_k}, że $a_{n_k}>L-\varepsilon>a$. Stąd i z $(**)$ otrzymujemy $a_{n_k+1}=a_{n_k}+(a_{n_k+1}-a_{n_k})>a-\varepsilon$. Na podstawie $(*)$ oznacza to, że $a_{n_k+1}>a+\varepsilon$ dla $n_k>\max\{n_1,n_2\}$. Stąd i z zadania 2.4.12(c) wynika, że $l\ge a+\varepsilon>a>l$. Sprzeczność.

2.5.68. Skorzystamy z poprzedniego zadania. Z monotoniczności ciągu $\{a_n\}$ wynika, że

$$\frac{a_{n+1}}{n+1+a_{n+1}}-\frac{a_n}{n+a_n}\ge\frac{-a_n}{(n+1+a_{n+1})(n+a_n)}\ge\frac{-1}{n}.$$

Zatem, na podstawie poprzedniego zadania, zbiór punktów skupienia rozpatrywanego ciągu jest przedziałem $[l,L]$, gdzie $l=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_n}{n+a_n}$, $L=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_n}{n+a_n}$.

2.5.69. Zauważmy, że

$$\left|a_{2n+1}-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{2}\left|a_{2n}-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{1+a_{2n-1}}{2}-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{4}\left|a_{2n-1}-\frac{1}{3}\right|.$$

Ciąg ten ma więc dwa punkty skupienia: $\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}$.

2.5.70. Na podstawie zadania 1.1.14 wiadomo, że dla każdego naturalnego n istnieją takie liczby: naturalna q_n oraz całkowita p_n, że

$$(*)\qquad\left|2\pi-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}.$$

Stąd $|p_n|<(2\pi+1)q_n$. Zatem na podstawie $(*)$ otrzymujemy

$$|\sqrt{|p_n|}\sin p_n|=|\sqrt{|p_n|}\sin(2\pi q_n-p_n)|\le\left|\sqrt{|p_n|}\sin\frac{1}{q_n}\right|\le\frac{\sqrt{2\pi+1}}{\sqrt{q_n}}.$$

Ponieważ ciągi $\{p_n\}$ oraz $\{q_n\}$ są nieograniczone, to ciąg $\{q_n\}$ zawiera podciąg rozbieżny do nieskończoności. Zatem zero jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$.

2.5.71. Wystarczy wykazać, że

$$\left(\frac{n_k(a_1+a_{n_k+1})}{(n_k+1)a_{n_k}}\right)^{n_k}\geq 1 \quad \text{dla pewnego podciągu } \{a_{n_k}\}.$$

Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje takie n_0, że

$$\frac{n(a_1+a_{n+1})}{(n+1)a_n}<1 \quad \text{dla} \quad n\geq n_0.$$

Zatem $\frac{a_1}{n+1}+\frac{a_{n+1}}{n+1}<\frac{a_n}{n}$ dla $n\geq n_0$. Stąd

$$\begin{aligned}
&\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1}<-\frac{a_1}{n},\\
&\frac{a_{n-1}}{n-1}-\frac{a_{n-2}}{n-2}<-\frac{a_1}{n-2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{a_{n_0+1}}{n_0+1}-\frac{a_{n_0}}{n_0}<-\frac{a_1}{n_0+1}.
\end{aligned}$$

Dodając powyższe nierówności stronami, otrzymujemy

$$\frac{a_n}{n}<\frac{a_{n_0}}{n_0}-a_1\left(\frac{1}{n_0+1}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Stąd i z zadania 2.2.50(c) wynikałoby, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=-\infty$, co przeczy założeniu, że $a_n>0$.

2.5.72. Podobnie jak w poprzednim zadaniu wystarczy dowieść, że

$$\left(\frac{n_k(a_1+a_{n_k+p})}{(n_k+p)a_{n_k}}\right)^{n_k}\geq 1 \quad \text{dla pewnego podciągu } \{a_{n_k}\}.$$

2.5.73. Dowód prowadzimy metodą niewprost. Podobnie jak w zadaniu 2.5.71 wystarczy pokazać, że założenie $n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)<1$, $n\geq n_0$ prowadzi do sprzeczności. Łatwo sprawdzić, że warunek ten jest równoważny nierówności $\frac{1}{n+1}<\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n+1}}{n+1}, n\geq n_0$. Natomiast z tej nierówności wynikałoby (patrz rozwiązanie zadania 2.5.71), że

$$\frac{1}{n_0+1}+\ldots+\frac{1}{n}<\frac{a_{n_0}}{n_0}-\frac{a_n}{n}.$$

Zatem byłoby $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=-\infty$, co przeczyłoby założeniu, że $\{a_n\}$ jest ciągiem o wyrazach dodatnich. Ciągiem realizującym równość jest np. ciąg o wyrazach $a_n=n\ln n$. Istotnie, dla tak określonego ciągu mamy

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(n\frac{1+(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n}-n\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(n+1)\ln(n+1)-n\ln n}{\ln n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\ln(n+1)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\ln n}=1.
\end{aligned}$$

2.5.74. Mamy $a_n^2=1+a_{n-1}$ i $a_1=1$. Ciąg ten jest oczywiście rosnący. Wykażemy, że jest on ograniczony z góry przez $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Wynika to z zasady indukcji matematycznej, gdyż jeśli $a_{n-1}<\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, to $a_n^2=1+a_{n-1}<\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Stąd $a_n<\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Zatem ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny i jego granicą jest $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

2.5.75. [19] Ciąg $\{b_n\}$ jest oczywiście ciągiem rosnącym. Załóżmy najpierw, że $\alpha<\ln 2$. Wtedy istnieje takie $n_0\in\mathbb{N}$, że $\ln(\ln a_n)<n\ln 2$ dla $n\geq n_0$, czyli $a_n<\mathrm{e}^{2^n}$ dla $n\geq n_0$. Stąd i z poprzedniego zadania otrzymujemy

$$\begin{aligned}
b_n&=\sqrt{a_1+\ldots+\sqrt{a_{n_0}+\ldots+\sqrt{a_n}}}\\
&\leq\sqrt{a_1+\ldots+\sqrt{a_{n_0-1}+\sqrt{\mathrm{e}^{2^{n_0}}+\ldots+\sqrt{\mathrm{e}^{2^n}}}}}\\
&\leq\sqrt{a_1+\ldots+\sqrt{a_{n_0-1}+\mathrm{e}^{2^{n_0}}\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}\\
&\leq\sqrt{a_1+\ldots+\sqrt{a_{n_0-1}+\mathrm{e}^{2^{n_0}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}.
\end{aligned}$$

Ciąg $\{b_n\}$ jest więc ciągiem ograniczonym, czyli zbieżnym.
Niech teraz $\alpha>\ln 2$. Dla dowolnie ustalonego $\varepsilon>0$ istnieje takie n_0, że $\ln(\ln a_n)>n(\alpha+\varepsilon)$ dla $n\geq n_0$. Stąd, kładąc $\alpha+\varepsilon=\ln\beta$, otrzymujemy $a_n>\mathrm{e}^{\beta^n}$ dla $n\geq n_0$, gdzie $\beta>2$. Zatem

$$\begin{aligned}
b_n&=\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\ldots+\sqrt{a_{n_0}+\ldots+\sqrt{a_n}}}}\\
&>\sqrt{a_1+\ldots+\sqrt{a_{n_0-1}+\mathrm{e}^{\frac{\beta^n}{2^{n-n_0+1}}}}}>\mathrm{e}^{\left(\frac{\beta}{2}\right)^n}.
\end{aligned}$$

Oznacza to, że ciąg $\{b_n\}$ jest w tym przypadku rozbieżny.

Zauważmy na koniec, że gdyby $0 < a_n \leq 1$, to wprawdzie wyrażenie $\ln(\ln a_n)$ nie miałoby sensu, ale ciąg $\{b_n\}$ jako rosnący i ograniczony z góry przez $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ byłby zbieżny.

2.5.76. [19] Z własności ciągu $\{a_n\}$ wynika natychmiast, że $0 \leq a_n \leq na_1$, $n \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że ciąg $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ jest ograniczony. Niech L będzie jego granicą górną. Wtedy istnieje ciąg liczb naturalnych $\{m_k\}$ taki, że $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{m_k}}{m_k} = L$. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Mamy wtedy $m_k = nl_k + r_k$, gdzie $r_k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Stąd i z założenia otrzymujemy $a_{m_k} \leq l_k a_n + a_{r_k}$. Zatem

$$\frac{a_{m_k}}{m_k} \leq \frac{l_k}{nl_k + r_k} a_n + \frac{a_{r_k}}{m_k}.$$

Przechodząc z k do nieskończoności, otrzymujemy

$$(*) \qquad L \leq \frac{a_n}{n}.$$

Stąd wobec dowolności n mamy $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n}$, co oznacza zbieżność ciągu $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$.

2.5.77. Rozwiązanie analogiczne do poprzedniego.

2.5.78. [19] Ciągi $\{a_n + 1\}$ oraz $\{1 - a_n\}$ spełniają założenia zadania 2.5.76. Zatem istnieją skończone granice $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{n}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-a_n}{n}$.

(a) Z powyższej uwagi wynika, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{n} = g$, to również $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = g$.

(b) Nierówności wynikają ze wzoru $(*)$ (patrz rozwiązanie zadania 2.5.76).

2.5.79. Pokażemy, że ciąg $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ jest zbieżny i jego granicą jest $A = \sup\left\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Dla ustalonego naturalnego p mamy

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{pl_n+r_n}}{pl_n + r_n} \geq \frac{a_{p\cdot l_n}}{pl_n + r_n},$$

gdzie $r_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Stąd i z założenia $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \geq \frac{a_p}{p}$, a zatem $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \geq \overline{\lim\limits_{p\to\infty}} \frac{a_p}{p}$. Oznacza to, że ciąg ten jest zbieżny. Zauważmy jeszcze, że z warunku zadania otrzymujemy $\frac{a_{m\cdot n}}{mn} \geq \frac{a_n}{n}$. Zatem

$$A \geq \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \geq \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{a_p}{p} = \inf_p \sup_{l\geq p} \frac{a_l}{l} \geq \inf_p \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{a_{p\cdot m}}{pm} \geq \inf_p \sup_m \frac{a_m}{m} = A.$$

2.5.80. Pokażemy najpierw, że ciąg ten jest ograniczony. Istotnie, jeśli $\frac{1}{a} \leq a_n$, $a_{n+1} \leq a$, to $\frac{1}{a} \leq \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \leq a$. Zatem $\frac{1}{a} \leq a_{n+2} \leq a$, czyli na podstawie uogólnionej zasady indukcji ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony. Niech

$$l = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n, \qquad L = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n.$$

Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją takie $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, że

(i) $a_n < L + \varepsilon$ dla $n > n_1$,

(ii) $a_n > l - \varepsilon$ dla $n > n_2$.

Z (i) wynika więc, że $a_{n+2} = \frac{2}{a_n + a_{n+1}} > \frac{1}{L+\varepsilon}$, $n > n_1$. Stąd wobec dowolności ε otrzymujemy $l \geq \frac{1}{L}$. Analogicznie z (ii) wynika, że $L \leq \frac{1}{l}$. Zatem $l = \frac{1}{L}$. Niech $\{n_k\}$ będzie ciągiem takim, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k+2} = L$. Biorąc ewentualnie podciągi, możemy założyć, że $\{a_{n_k+1}\}$, $\{a_{n_k}\}$, $\{a_{n_k-1}\}$ są ciągami zbieżnymi odpowiednio do l_1, l_2, l_3. Stąd i z definicji ciągu $\{a_n\}$ wynika, że

$$l_1 + l_2 = \frac{2}{L} = 2l \quad \text{oraz} \quad l_2 + l_3 = \frac{2}{l_1}.$$

Ale $l \leq l_1, l_2, l_3 \leq L$, więc $l_1 = l_2 = l$ oraz $l_2 = l_3 = L$. Zatem $l = L$ co oznacza, że $\{a_n\}$ jest ciągiem zbieżnym do 1, gdyż, co pokazaliśmy wyżej, mamy również $l = \frac{1}{L}$.

2.5.81. Skoro $0 < a_1 \leq b_1$, to istnieje $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ takie, że $a_1 = b_1 \cos\varphi$. Teraz już można pokazać indukcyjnie, że dla $\varphi \neq 0$ mamy

$$a_{n+1} = \frac{b_1 \sin\varphi}{2^n \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2^n}} \quad \text{oraz} \quad b_{n+1} = \frac{b_1 \sin\varphi}{2^n \sin\frac{\varphi}{2^n}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Stąd $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{b_1 \sin\varphi}{\varphi}$. Jeśli $\varphi = 0$, tzn. $a_1 = b_1$, to określone w zadaniu ciągi są stałe.

2.5.82. [17] Na podstawie założenia mamy $\frac{a_{k,n}}{b_{k,n}} = 1 + \varepsilon_{k,n}$, gdzie $\varepsilon_{k,n}$ dąży do zera jednostajnie względem k. Zatem

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{k,n} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,n} + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k,n} b_{k,n}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_{k,n}$ istnieje, to $|\sum_{k=1}^{n} b_{k,n}| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. Ponadto dla

dowolnego $\varepsilon > 0$ oraz dla dostatecznie dużych n mamy $|\varepsilon_{k,n}| < \frac{\varepsilon}{M}$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Zatem $|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k,n} b_{k,n}| < \varepsilon$, czyli $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k,n} b_{k,n} = 0$. Stąd i z równości $(*)$ wynika zbieżność ciągu o wyrazach $\sum_{k=1}^{n} b_{k,n}$ i równość

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{k,n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_{k,n}.$$

2.5.83. Mamy

$$\frac{\sin \frac{(2k-1)a}{n^2}}{\frac{(2k-1)a}{n^2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{dla dowolnego } k.$$

Stąd i z poprzedniego zadania wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{(2k-1)a}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)a}{n^2} = a.$$

2.5.84. Na podstawie zadania 2.5.5 mamy $\frac{a^{x_n} - 1}{x_n \ln a} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ dla każdego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do zera. Zatem

$$\frac{\frac{a^{\frac{k}{n^2}} - 1}{\frac{k}{n^2} \ln a}}{} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

jednostajnie względem k. Stąd i z zadania 2.5.82 otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(a^{\frac{k}{n^2}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \ln a \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2} \ln a.$$

2.5.85. Z zadania 2.5.3 wynika, że $\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ o wyrazach dodatnich zbieżnego do zera. Stąd i z zadania 2.5.82 mamy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Zatem $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

2.5.86. Można pokazać, że

$$(*) \qquad \frac{(1+x_n)^{\frac{1}{p}} - 1}{\frac{1}{p} x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

dla każdego ciągu $\{x_n\}$ o wyrazach dodatnich zbieżnego do zera. Niech teraz

$$c_{k,n} = \frac{k^{q-1}}{n^q}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Mamy $c_{k,n} \le \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n^q}\right\}$, czyli $\{c_{k,n}\}$ jest ciągiem zbieżnym do zera jednostajnie względem k. Kładąc $a_{k,n} = (1 + c_{k,n})^{\frac{1}{p}} - 1$ oraz $b_{k,n} = \frac{1}{p} c_{k,n}$ i stosując zadanie 2.5.82, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\left(1 + \frac{k^{q-1}}{n^q}\right)^{\frac{1}{p}} - 1\right) = \frac{1}{p} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{q-1}}{n^q}.$$

Z twierdzenia Stolza (zadanie 2.3.11) wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{q-1}}{n^q} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{q-1}}{n^q - (n-1)^q} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{q-1}}{n^q - n^q\left(1 - \frac{1}{n}\right)^q}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{q-1}}{n^q - n^q\left(1 - q\frac{1}{n} + \frac{q(q-1)}{2}\frac{1}{n^2} - \ldots\right)} = \frac{1}{q}.$$

2.5.87. Niech $a_n = \frac{a(a+d)\cdot\ldots\cdot(a+nd)}{b(b+d)\cdot\ldots\cdot(b+nd)}$. Wtedy

$$a_n = \frac{a}{b} \frac{\left(1 + \frac{d}{a}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 + n\frac{d}{a}\right)}{\left(1 + \frac{d}{a} + \left(\frac{b}{a} - 1\right)\right)\left(1 + 2\frac{d}{a} + \left(\frac{b}{a} - 1\right)\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 + n\frac{d}{a} + \left(\frac{b}{a} - 1\right)\right)}.$$

Wprowadźmy następujące oznaczenie $x = \frac{b}{a} - 1$. Wtedy $x > 0$ oraz

$$a_n = \frac{a}{b} \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{1 + \frac{d}{a}}\right)\left(1 + \frac{x}{1 + 2\frac{d}{a}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 + \frac{x}{1 + n\frac{d}{a}}\right)}.$$

Ponieważ

$$\frac{x}{1 + \frac{d}{a}} + \frac{x}{1 + 2\frac{d}{a}} + \ldots + \frac{x}{1 + n\frac{d}{a}} < \left(1 + \frac{x}{1 + \frac{d}{a}}\right)\left(1 + \frac{x}{1 + 2\frac{d}{a}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 + \frac{x}{1 + n\frac{d}{a}}\right),$$

więc

$$a_n < \frac{a}{bx\left(\frac{1}{1 + \frac{d}{a}} + \frac{1}{1 + 2\frac{d}{a}} + \ldots + \frac{1}{1 + n\frac{d}{a}}\right)}.$$

Stąd wynika, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, gdyż

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{d}{a}} + \frac{1}{1 + 2\frac{d}{a}} + \ldots + \frac{1}{1 + n\frac{d}{a}}\right) = +\infty.$$

3 SZEREGI LICZBOWE

3.1 OBLICZANIE SUM SZEREGÓW

3.1.1.

(a) Mamy $a_1 = S_1 = 2$ oraz $a_n = S_n - S_{n-1} = -\frac{1}{n(n-1)}$ dla $n > 1$. Zatem szukany szereg ma postać $2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$. Jego suma $S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$.

(b) Podobnie jak w części (a) mamy $a_n = \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

(c) Mamy $a_n = \operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg}(n-1)$, czyli $\operatorname{tg} a_n = \frac{1}{n^2-n+1}$. Stąd $a_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2-n+1}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2-n+1} = \frac{\pi}{2}$.

(d) $a_1 = -1$, $a_n = (-1)^n \frac{2n-1}{n(n-1)}$ dla $n > 1$. Ponadto $-1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{n(n-1)} = 0$.

3.1.2.

(a) Mamy $a_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$. Stąd $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ oraz $S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$.

(b) Podobnie $a_n = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$. Stąd $S_n = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$ oraz $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{8}$.

(c) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$. Stąd $S_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ oraz $S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$.

(d) $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$. Stąd $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$.

(e) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Stąd $S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1$.

3.1.3.

(a) $$\begin{aligned} S_n &= \ln 1 - \ln 4 + \ln 2 + \ln 4 - \ln 1 - \ln 7 + \ln 3 + \ln 7 - \ln 2 - \ln 10 \\ &\quad + \ldots + \ln n + \ln(3n-2) - \ln(n-1) - \ln(3n+1) + \ln(n+1) \\ &\quad + \ln(3n+1) - \ln n - \ln(3n+4) \\ &= \ln \frac{n+1}{3n+4}. \end{aligned}$$

Zatem $S = \ln \frac{1}{3}$.

(b) $S = \ln 2$.

3.1.4. Mamy

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+m)} \\ &= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+m)}\right). \end{aligned}$$

Zatem $S_n = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+m)}\right)$. Stąd $S = \frac{1}{mm!}$.

(b) Ponieważ $a_n = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}\right)$, więc $S = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}\right)$.

(c) Mamy

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} &= \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+3)(n+4)} \\ &\quad - \frac{11}{2}\left(\frac{1}{(n+1)(n+3)} - \frac{1}{(n+2)(n+4)}\right) \\ &\quad + \frac{11}{4}\left(\frac{1}{(n+1)(n+4)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right). \end{aligned}$$

Teraz, podobnie jak w części (b), otrzymujemy $S = \frac{5}{36}$.

3.1.5.

(a) Dla $n \geq 5$ mamy

$$S_n = \sin \frac{\pi}{720} + \sin \frac{\pi}{360} + \sin \frac{\pi}{120} + \sin \frac{\pi}{30} + \sin \frac{\pi}{6}.$$

(b) Zauważmy, że $0 \leq \frac{\ln n}{n - \ln n} < 1$, $n \in \mathbb{N}$. Zatem $S = 0$.

3.1.6. Ponieważ $a_n = \sin \frac{1}{2^{n+1}} \cos \frac{3}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\sin \frac{1}{2^{n-1}} - \sin \frac{1}{2^n}\right)$, więc $S = \frac{1}{2} \sin 1$.

3.1.7. Zauważmy, że

$$\frac{1}{n!(n^4+n^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{(n+1)!((n+1)n+1)} - \frac{n-1}{n!(n(n-1)+1)} + \frac{1}{(n+1)!}\right).$$

Stąd

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{(n+1)!((n+1)n+1)} + 1 + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)!}\right),$$

czyli na podstawie zadania 2.5.6 otrzymujemy $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\mathrm{e}$.

3.1.8. Zauważmy, że dla $n > 1$ mamy

$$a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2n+1)-1}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)} - \frac{1}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}\right)$$

oraz $a_1 = \frac{1}{3}$. Z powyższej zależności wynika, że

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}\right).$$

Stąd już wynika równość podana w zadaniu.

3.1.9. Podobnie jak w poprzednim zadaniu, dla $n > 1$ mamy

$$\frac{a_n}{(a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1)} = \frac{a_n+1-1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1)}$$
$$= \frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_{n-1}+1)} - \frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1)}.$$

Stąd $S_n = 1 - \dfrac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1)}$.

3.1.10.

(a) Wystarczy przyjąć $a_n = n-1$. Wtedy $g = +\infty$, a więc suma szeregu wynosi 1.

(b) W tym przypadku przyjmujemy $a_n = 2n-1$ i, podobnie jak w części (a), $g = +\infty$ oraz suma badanego szeregu wynosi 1.

(c) Przyjmijmy $a_n = -\frac{1}{n^2}$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty}((a_2+1)(a_3+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1))$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Stąd i z poprzedniego zadania suma rozpatrywanego szeregu wynosi 1.

3.1.11. Z określenia ciągu $\{a_n\}$ wynika, że jest on rosnący i rozbieżny do nieskończoności. Ponadto mamy $a_n^2 - 4 = a_{n-1}^2(a_{n-1}^2-4)$, skąd indukcyjnie otrzymujemy $a_n^2 - 4 = a_1^2a_2^2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}^2(a_1^2-4)$. Zatem

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}} = \sqrt{a_1^2-4}.$$

Zauważmy teraz, że dla $n > 1$ prawdziwa jest równość

$$\frac{1}{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}} - \frac{a_{n+1}}{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\right).$$

Stąd i z równości (1) wynika, że sumą rozpatrywanego szeregu jest

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2}\frac{a_2}{a_1} - \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2-4} = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2-4}}{2}.$$

3.1.12. Zauważmy, że

$$\frac{1}{b} = \frac{1!}{b-2} - \frac{2!}{(b-2)b},$$
$$\frac{2!}{b(b+1)} = \frac{2!}{(b-2)b} - \frac{3!}{(b-2)b(b+1)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{n!}{b(b+1)\cdot\ldots\cdot(b+n-1)} = \frac{n!}{(b-2)b(b+1)\cdot\ldots\cdot(b+n-2)}$$
$$- \frac{(n+1)!}{(b-2)b(b+1)\cdot\ldots\cdot(b+n-1)}.$$

Sumując powyższe równości stronami, otrzymujemy

$$S_n = \frac{1}{b-2} - \frac{(n+1)!}{(b-2)b(b+1)\cdot\ldots\cdot(b+n-1)}.$$

Stąd i z zadania 2.5.87 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{b-2}$.

3

3.1.13. Niech $a_n = \dfrac{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}{b(b+1)\cdot\ldots\cdot(b+n)}$, $n = 0, 1, \ldots$, oraz $A_n = a_n(a+n+1)$. Wtedy $A_{n-1} - A_n = a_n(b-a-1)$, $n = 0, 1, \ldots$, gdzie dodatkowo przyjmujemy $A_{-1} = a$ i $a_{-1} = 1$. Stąd, po zsumowaniu powyższych równości stronami, otrzymujemy

$$a - A_N = A_{-1} - A_N = (b-a-1)\sum_{n=0}^{N} a_n = (b-a-1)S_{N+1},$$

czyli $a - a_N(a+N+1) = (b-a-1)S_{N+1}$. Stąd

$$a\left(1 - \frac{(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+N+1)}{b(b+1)\cdot\ldots\cdot(b+N)}\right) = (b-a-1)S_{N+1}.$$

Stosując teraz zadanie 2.5.87, otrzymujemy $\lim\limits_{N\to\infty} S_{N+1} = \dfrac{a}{b-a-1}$.

3.1.14. Na podstawie poprzedniego zadania

$$(*) \qquad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)}{b(b+1)\cdot\ldots\cdot(b+n-1)}=1+\frac{a}{b-a-1}=\frac{b-1}{b-a-1}.$$

Zastępując w tej równości a sumą $a+1$, otrzymujemy

$$(**) \qquad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}{b(b+1)\cdot\ldots\cdot(b+n-1)}=\frac{b-1}{b-a-2}.$$

Odejmując stronami od równości $(**)$ równość $(*)$, otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)}{b(b+1)\cdot\ldots\cdot(b+n-1)}=\frac{b-1}{b-a-2}-\frac{b-1}{b-a-1}=\frac{(b-1)}{(b-a-1)(b-a-2)}.$$

3.1.15. Niech $A_n=\dfrac{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}{(a_2+b)(a_3+b)\cdot\ldots\cdot(a_{n+1}+b)}$ i niech $S_n=\sum_{k=1}^{n}A_k$. Wtedy $\dfrac{A_k}{A_{k-1}}=\dfrac{a_k}{a_{k+1}+b}$, czyli $A_ka_{k+1}+A_kb=A_{k-1}a_k$. Sumując te równości stronami od $k=2$ do n, otrzymujemy

$$(*) \qquad A_na_{n+1}+S_nb-A_1b=A_1a_2.$$

Zauważmy teraz, że

$$0<A_na_{n+1}=a_1\frac{a_2a_3\cdot\ldots\cdot a_{n+1}}{(a_2+b)(a_3+b)\cdot\ldots\cdot(a_{n+1}+b)}$$
$$=a_1\frac{1}{\left(1+\frac{b}{a_2}\right)\left(1+\frac{b}{a_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{b}{a_{n+1}}\right)}.$$

Stąd i z zadania 1.2.1

$$0<A_na_{n+1}<\frac{a_1}{b\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{a_k}}.$$

Zatem na podstawie założenia $\lim_{n\to\infty}A_na_{n+1}=0$. Stąd i z równości $(*)$ $\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{A_1(b+a_2)}{b}=\dfrac{a_1}{b}$.

3.1.16. Wiadomo, że $4\cos^3x=\cos3x+3\cos x$, $x\in\mathbb{R}$. Zatem

$$4\cos^3x=\cos3x+3\cos x,$$
$$4\cos^33x=\cos3^2x+3\cos3x,$$
$$4\cos^33^2x=\cos3^3x+3\cos3^2x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$4\cos^33^nx=\cos3^{n+1}x+3\cos3^nx.$$

Mnożąc te równości odpowiednio przez $1,-\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\ldots,(-1)^n\frac{1}{3^n}$, a następnie dodając je stronami, otrzymujemy $4S_n=3\cos x+(-1)^n\frac{1}{3^n}\cos3^{n+1}x$. Stąd $S=\frac{3}{4}\cos x$.

3.1.17.

(a) Na podstawie założenia mamy

$$f(x)=af(bx)+cg(x),$$
$$af(bx)=a^2f(b^2x)+acg(bx),$$
$$a^2f(b^2x)=a^3f(b^3x)+ca^2g(b^2x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^{n-1}f(b^{n-1}x)=a^nf(b^nx)+a^{n-1}cg(b^{n-1}x).$$

Zatem $f(x)=a^nf(b^nx)+c\left(g(x)+ag(bx)+\ldots+a^{n-1}g(b^{n-1}x)\right)$. Ponieważ $\lim_{n\to\infty}a^nf(b^nx)=L(x)$, więc $\sum_{n=0}^{\infty}a^ng(b^nx)=\dfrac{f(x)-L(x)}{c}$.

(b) Podobnie

$$f(x)=af(bx)+cg(x),$$
$$a^{-1}f(b^{-1}x)=f(x)+a^{-1}cg(b^{-1}x),$$
$$a^{-2}f(b^{-2}x)=a^{-1}f(b^{-1}x)+ca^{-2}g(b^{-2}x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^{-n}f(b^{-n}x)=a^{1-n}f(b^{1-n}x)+a^{-n}cg(b^{-n}x).$$

Zatem

$$af(bx)=a^{-n}f(b^{-n}x)-c\left(g(x)+a^{-1}g(b^{-1}x)+\ldots+a^{-n}g(b^{-n}x)\right).$$

Czyli

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^n}g\left(\frac{x}{b^n}\right)=\frac{M(x)-af(bx)}{c}.$$

3.1.18. Wystarczy skorzystać z poprzedniego zadania, przyjmując $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sin^3\frac{x}{3}$, $a=3$, $b=\frac{1}{3}$, $c=-4$. Równości $\lim_{n\to\infty}3^n\sin\frac{x}{3^n}=x=L(x)$ oraz $\lim_{n\to\infty}3^{-n}\sin3^nx=0=M(x)$ kończą dowód obu części zadania.

3.1.19. Wystarczy zastosować zadanie 3.1.17, przyjmując $f(x)=\operatorname{ctg}x$, $g(x)=\operatorname{tg}x$, $a=2$, $b=2$, $c=1$ i wykorzystać równość

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{x}.$$

3.1.20. W zadaniu 3.1.17 przyjmujemy

$$f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad g(x) = \operatorname{arctg} \frac{(1-b)x}{1+bx^2}, \quad a = c = 1$$

i korzystamy z faktu, że

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(b^n x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 < b < 1, \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x & \text{dla} \quad b > 1. \end{cases}$$

3.1.21. Skoro $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, to $a_{n+1}a_n = a_n^2 + a_{n-1}a_n, n \geq 1$. Sumując tak otrzymane równości, otrzymujemy

$$(*) \qquad S_n = a_n a_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Można łatwo dowieść, że

(i) $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right), \quad n \geq 0$

(ii) $a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = (-1)^{n+1}, \quad n \geq 1.$

Zatem na podstawie równości $(*)$ oraz (ii) suma częściowa rozpatrywanego szeregu ma postać

$$\widetilde{S_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{S_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a_k a_{k+1}} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}a_{k+1} - a_k^2}{a_k a_{k+1}}$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_{k-1}}{a_k} - \frac{a_k}{a_{k+1}} \right) = \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Z równości (i) otrzymujemy

(iii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right)} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}.$$

Zatem $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{S_n} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$.

3.1.22. Można łatwo sprawdzić, że

$$(*) \qquad (-1)^{n+1} = a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+3}, \quad n \geq 0.$$

Stąd

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a_k a_{k+2}} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}a_{k+2} - a_k a_{k+3}}{a_k a_{k+2}}$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - \frac{a_{k+3}}{a_{k+2}} \right) = -3 + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}.$$

Na podstawie równości (iii) z rozwiązania poprzedniego zadania otrzymujemy więc $\lim_{n\to\infty} S_n = \sqrt{5} - 2$.

3.1.23. Na mocy zależności $(*)$ z rozwiązania poprzedniego zadania mamy

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{a_{2n+1}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{a_{2n+2}} = \operatorname{arctg} \frac{a_{2n+2} - a_{2n+1}}{a_{2n+1}a_{2n+2} + 1}$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{a_{2n}}{a_{2n}a_{2n+3}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{a_{2n+3}}.$$

Sumując tak otrzymane równości, otrzymujemy

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{a_1} = \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{1}{a_{2k}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{a_{2n+3}}.$$

Stąd $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{a_{2n}} = \frac{\pi}{4}$.

3.1.24.

(a) Zauważmy, że $\operatorname{arctg} \frac{2}{n^2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{n-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1}, \ n > 1.$

Stąd $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2} = \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\pi$, gdyż dla każdego $a > 0$ prawdziwa jest równość $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2}$.

(b) Ponieważ $\operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1}, \ n \geq 1$, więc $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{4}\pi$.

(c) Skoro $\operatorname{arctg} \frac{8n}{n^4-2n^2+5} = \operatorname{arctg} \frac{2}{(n-1)^2} - \operatorname{arctg} \frac{2}{(n+1)^2}, \ n > 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{8n}{n^4-2n^2+5} = \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\pi + \operatorname{arctg} 2$.

3.1.25. Podobnie jak wyżej wystarczy wykorzystać zależność

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}.$$

Zauważmy tu jeszcze, że dobierając odpowiednio ciąg $\{a_n\}$, można otrzymać przykłady z poprzedniego zadania (i wiele innych) jako szczególne przypadki.

3.1.26. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będzie szeregiem powstałym z szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ poprzez dowolne przestawienie jego wyrazów. Niech $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $S'_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ i niech $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Oczywiście $S'_n \leq S$, a więc ciąg $\{S'_n\}$ jest zbieżny oraz jego granica S' spełnia warunek $S' \leq S$. Zupełnie analogicznie dowodzimy, że $S \leq S'$.

3.1.27. Wystarczy skorzystać z równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

3.1.28. [A.M. Yaglom, I.M. Yaglom, Uspehi Matem. Nauk (N.S.) 8 (1953) no. 5(57), 181–187].

(a) Wiadomo, że $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Stąd $\operatorname{ctg}^2 x < \frac{1}{x^2} < 1+\operatorname{ctg}^2 x$. Kładąc $x = \frac{k\pi}{2m+1}$, gdzie $k = 1, 2, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$, i sumując względem k, otrzymujemy

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{m} \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2m+1} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < m + \sum_{k=1}^{m} \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2m+1}.$$

Pokażemy teraz, że

$$(**) \qquad \sum_{k=1}^{m} \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

Niech $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Ze wzoru de Moivre'a otrzymujemy $\cos nt + \mathrm{i}\sin nt = (\cos t + \mathrm{i}\sin t)^n = \sin^n t(\operatorname{ctg} t + \mathrm{i})^n = \sin^n t \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^k \operatorname{ctg}^{n-k} t$. Porównując części urojone i biorąc $n = 2m+1$, otrzymujemy

$$(***) \qquad \sin(2m+1)t = \sin^{2m+1} t W_m(\operatorname{ctg}^2 t),$$

gdzie $W_m(x) = \binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \ldots \pm 1$. Z równości $(***)$ wynika, że dla $t = \frac{k\pi}{2m+1}$, $W_m(\operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2m+1}) = 0$. Stosując wzory Viète'a, otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

Teraz z nierówności $(*)$ i równości $(**)$ otrzymujemy

$$\frac{m(2m-1)}{3} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < m + \frac{m(2m-1)}{3}.$$

Mnożąc stronami przez $\frac{\pi^2}{(2m+1)^2}$ i przechodząc z m do nieskończoności, otrzymujemy żądaną równość.

(b) W celu udowodnienia drugiej równości zauważmy najpierw, że

$$\sum_{i,j=1,\ i\neq j}^{m} x_i x_j = 2\frac{\binom{2m+1}{5}}{\binom{2m+1}{1}},$$

gdzie x_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ są zerami wielomianu $W_m(x)$ określonego w części (a). Z otrzymanej w części (a) równości

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{m(2m-1)}{3}$$

wynika, że

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{ctg}^4 \frac{k\pi}{2m+1} = \left(\frac{m(2m-1)}{3}\right)^2 - 2\frac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{5!}$$
$$= \frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45}.$$

Z nierówności $\operatorname{ctg}^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \operatorname{ctg}^2 x$ (patrz część (a) zadania) wynika, że $\operatorname{ctg}^4 x < \frac{1}{x^4} < 1 + 2\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^4 x$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Zatem

$$\frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45} < \frac{(2m+1)^4}{\pi^4} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^4}$$
$$< m + 2m\frac{2m-1}{3} + \frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45}.$$

Tak więc równość (b) została udowodniona.

Uwaga. Powyższa metoda może być zastosowana do obliczenia każdej z sum $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

(c) Ze wzoru de Moivre'a dla $m = 4n$, $n \in \mathbb{N}$, wynikają równości

$$\cos mt = \cos^m t - \binom{m}{2} \cos^{m-2} t \sin^2 t + \ldots + \sin^m t,$$
$$\sin mt = \binom{m}{1} \cos^{m-1} t \sin t + \ldots - \binom{m}{m-1} \cos t \sin^{m-1} t.$$

Zatem

$$\operatorname{ctg} mt = \frac{\operatorname{ctg}^m t - \binom{m}{2} \operatorname{ctg}^{m-2} t + \ldots - \binom{m}{m-2} \operatorname{ctg}^2 t + 1}{\binom{m}{1} \operatorname{ctg}^{m-1} t - \binom{m}{3} \operatorname{ctg}^{m-3} t + \ldots - \binom{m}{m-1} \operatorname{ctg} t}.$$

Z ostatniej równości wynika, że

$$x_k = \operatorname{ctg} \frac{4k\pi + \pi}{4m}, \qquad k = 0, \ldots, m-1,$$

są pierwiastkami równania

$$x^m - \binom{m}{1} x^{m-1} - \binom{m}{2} x^{m-2} + \ldots + \binom{m}{m-1} x + 1 = 0,$$

co daje

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{4k\pi + \pi}{4m} = m.$$

Ponieważ $m = 4n$, więc

$$\sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{4k\pi+\pi}{4m} = \sum_{k=0}^{2n-1} \operatorname{ctg} \frac{4k\pi+\pi}{4m} + \sum_{k=2n}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{4k\pi+\pi}{4m}$$
$$= \sum_{k=0}^{2n-1} \operatorname{ctg} \frac{4k\pi+\pi}{4m} - \sum_{k=1}^{2n} \operatorname{ctg} \frac{4k\pi-\pi}{4m}.$$

Uwzględniając równość (1), otrzymujemy

(2) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4m} - \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4m} + \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4m} - \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4m} + \ldots + \operatorname{ctg} \frac{(2m-3)\pi}{4m} - \operatorname{ctg} \frac{(2m-1)\pi}{4m} = m.$

Z równości

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}(\beta-\alpha)\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}\right)$$

oraz z równości (2) wynika, że m jest równe

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2m}\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4m}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4m}} + \ldots + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{(2m-3)\pi}{4m}\operatorname{tg}\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\right).$$

Zatem, ze względu na nierówność $\frac{1}{x} > \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ dla $0 < x < \pi/2$ otrzymujemy

(3) $$m < \operatorname{tg}\frac{\pi}{2m}\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{\frac{\pi}{4m}\frac{3\pi}{4m}} + \ldots + \frac{1}{\frac{(2m-3)\pi}{4m}\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\right).$$

Z drugiej strony korzystając z równości

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

i z nierówności $\frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$, w podobny sposób jak powyżej, otrzymujemy

$$m = \sin\frac{\pi}{2m}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4m}\sin\frac{3\pi}{4m}} + \ldots + \frac{1}{\sin\frac{(2m-3)\pi}{4m}\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\right)$$
$$> \sin\frac{\pi}{2m}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{4m}\frac{3\pi}{4m}} + \ldots + \frac{1}{\frac{(2m-3)\pi}{4m}\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\right).$$

Stąd i z nierówności (3) mamy

$$\left(\frac{m}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2m}} - \frac{m}{2}\right)\frac{\pi^2}{16m^2} < \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(2m-3)(2m-1)}$$
$$< \frac{\pi^2}{16m\sin\frac{\pi}{2m}}.$$

Biorąc $m \to \infty$, otrzymujemy

$$\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{2m+1} = \frac{\pi}{8}.$$

3.1.29. Mamy $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$. Stąd $\frac{1}{a_{n+1}-1} = -\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n - 1}$. Zatem

$$\frac{1}{a_2-1} = -\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1-1},$$
$$\frac{1}{a_3-1} = -\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{a_{n+1}-1} = -\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n-1}.$$

Dodając tak otrzymany ciąg równości stronami, otrzymujemy

(*) $$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}-1}.$$

Można łatwo pokazać, że ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący i rozbieżny do nieskończoności. Stąd i z równości (*) wynika więc, że $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n} = 1$.

3.1.30. Z określenia ciągu wynika, że

$$e^{a_1} - 1 = a_1 e^{a_2},$$
$$e^{a_2} - 1 = a_2 e^{a_3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Stąd otrzymujemy

$$e^{a_1} - 1 = a_1 + a_1a_2e^{a_3} = \ldots = a_1 + a_1a_2 + \ldots + a_1\cdot\ldots\cdot a_n + a_1\cdot\ldots\cdot a_{n+1}e^{a_{n+2}}.$$

Z powyższej równości wynika, że $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = e^{a_1} - 1$, gdyż

$$\lim_{n\to\infty}(a_1\cdot\ldots\cdot a_{n+1}e^{a_{n+2}}) = 0.$$

Łatwo bowiem sprawdzić, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z dołu przez 0, malejący i zbieżny do zera.

3.1.31. Mamy $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = S_n + \frac{1}{S_n} - \sqrt{2}$. Rozpatrzmy funkcję $f(x) = x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}$ dla $x > 0$. Gdyby ciąg $\{S_n\}$ był zbieżny do S, to byłoby $f(S) = S$. Jedynym rozwiązaniem dodatnim tego równania jest $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Można pokazać, że dla $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ funkcja $f(f(x)) - x$ jest malejąca, a więc

$$f(f(x)) - x < f\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

Ponieważ f jest funkcją malejącą w przedziale $(0,1)$, więc $f(f(x)) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ dla $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$. Ostatecznie

$$(*) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} < f(f(x)) < x \quad \text{dla} \quad x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right).$$

Z nierówności $(*)$ wynika, że ciąg $\{S_{2n-1}\}$ jest malejący i ograniczony, a więc zbieżny. Jego granica musi być równa $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ponadto $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} f(S_{2n-1}) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Zatem sumą szeregu jest $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.1.32.

(a) Zauważmy, że

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Stąd na podstawie zadania 2.5.8(a) mamy $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \ln 2$. Oczywiście

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(S_{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) = \ln 2.$$

(b) Mamy $\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$. Stąd i z części (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n+1}$$
$$= \ln 2 - (\ln 2 - 1) = 1.$$

(c) Niech S_n oznacza n-tą sumę częściową rozważanego szeregu. Wtedy

$$S_{2n} = \frac{1}{x+2n+1} + \frac{1}{x+2n+2} + \ldots + \frac{1}{x+4n-1} + \frac{1}{x+4n}.$$

Stosując metodę z zadania 2.5.8, łatwo sprawdzić, że $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \ln 2$. Oczywiście mamy również $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \ln 2$.

3.1.33. Mamy

$$S_{2n} = \ln\frac{2}{1} - \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} - \ln\frac{5}{4} + \ldots + \ln\frac{2n}{2n-1} - \ln\frac{2n+1}{2n}$$
$$= \ln\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)} - \ln\frac{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n} = \ln\left(\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\right).$$

Ze wzoru Wallisa, $\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$, wynika, że $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \ln\frac{\pi}{2}$.

3.1.34. Z równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right)$$
$$= -\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

oraz z poprzedniego zadania wynika, że sumą rozpatrywanego szeregu jest $\ln 2 - 2\ln\frac{\pi}{2}$.

3.1.35. Mamy

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - (\ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ldots + \ln(n+1) - \ln n)$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$

Na podstawie zadania 2.1.41 sumą rozpatrywanego szeregu jest stała Eulera γ.

3.1.36. [20] Niech $F(x) = \int_1^x f(t)dt$. Wtedy ze wzoru Taylora dla funkcji F wynika istnienie takich x_k, y_k, że

$$F\left(k + \frac{1}{2}\right) - F(k) = \frac{1}{2}f(k) + \frac{1}{8}f'(x_k), \qquad \text{gdzie} \quad k < x_k < k + \frac{1}{2},$$
$$-F\left(k + \frac{1}{2}\right) + F(k+1) = \frac{1}{2}f(k+1) - \frac{1}{8}f'(y_k), \qquad \text{gdzie} \quad k + \frac{1}{2} < y_k < k + 1.$$

Sumując powyższe równości, otrzymujemy

$$\frac{1}{2}f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) - F(n)$$
$$= \frac{1}{8}\left(f'(y_1) - f'(x_1) + f'(y_2) - f'(x_2) + \ldots + f'(y_{n-1}) - f'(x_{n-1})\right).$$

Szereg $-f'(x_1) + f'(y_1) - f'(x_2) + f'(y_2) - \ldots$ jako naprzemienny jest zbieżny, a to oznacza, że badana granica istnieje.

Przypadek $f(x) = \frac{1}{x}$ oznacza istnienie granicy

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

(Porównaj z zadaniem 2.1.41(a)). Natomiast rozpatrując funkcję $f(x) = \ln x$, dowodzimy istnienia granicy $\ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n + n$, która na podstawie wzoru Stirlinga jest równa $\ln\sqrt{2\pi}$.

3.1.37. W poprzednim zadaniu położymy $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$. Istnieje więc granica

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\ldots+\frac{\ln n}{n}-\frac{(\ln n)^2}{2}\right)=s.$$

Zatem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_{2n} &= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}-\ldots+\frac{\ln 2n}{2n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(-\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\ldots+\frac{\ln 2n}{2n}-\frac{(\ln 2n)^2}{2}\right)\right.\\ &\quad\left.+2\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 4}{4}+\ldots+\frac{\ln 2n}{2n}\right)-\frac{(\ln 2n)^2}{2}\right)\\ &= -s+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\ldots+\frac{\ln n}{n}-\frac{(\ln n)^2}{2}\right)\\ &\quad+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln 2}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\ldots+\frac{\ln 2}{n}-\ln 2\ln n\right)-\frac{(\ln 2)^2}{2}\\ &= \ln 2\left(\gamma-\frac{\ln 2}{2}\right),\end{aligned}$$

gdzie γ jest stałą Eulera.

3.1.38. Na mocy wzoru Stirlinga $n! = \alpha_n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, gdzie $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 1$. Stąd

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2}\ln\frac{(2n+1)^{2n}}{((2n-1)!!)^2\mathrm{e}^{2n}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(2n+1)^{2n}2^{2n}(n!)^2}{((2n)!)^2\mathrm{e}^{2n}}\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{(2n+1)^{2n}2^{2n}\alpha_n^2 2\pi n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{\alpha_{2n}^2 4\pi n\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{4n}\mathrm{e}^{2n}} = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n}\frac{\alpha_n^2}{2\alpha_{2n}^2}\right).\end{aligned}$$

Stąd $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}(1-\ln 2)$.

3.1.39. Załóżmy, że rozpatrywany szereg jest zbieżny dla x i y. Wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{(n-1)k+1}+\frac{1}{(n-1)k+2}+\ldots+\frac{1}{nk-1}-\frac{x}{nk}\right).$$

Wtedy $S_N(x) - S_N(y) = \frac{y-x}{k}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$. Stąd oraz ze zbieżności badanego szeregu dla x i y wynika, że $x = y$. Znajdziemy teraz tę jedyną wartość x, dla której szereg jest zbieżny. Jak wiemy (patrz zadanie 2.1.41) ciąg o wyrazach

$a_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{nk}-\ln(nk)$ jest zbieżny do tzw. stałej Eulera γ. Zatem

$$S_N(k-1) = a_N+\ln(Nk)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{nk}-\sum_{n=1}^{N}\frac{k-1}{nk} = a_N+\ln k+\left(\ln N-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right).$$

Czyli $\lim_{N\to\infty} S_N(k-1) = \gamma+\ln k-\gamma = \ln k$. Stąd $x = k-1$ oraz suma badanego szeregu wynosi $\ln k$.

3.1.40. Można łatwo sprawdzić, stosując zasadę indukcji matematycznej, że

$$a_{2n} = 3n+2 \quad \text{dla} \quad n = 0,1,2,\ldots,$$
$$a_{2n-1} = 3n+1 \quad \text{dla} \quad n = 1,2,\ldots$$

Zatem

$$\begin{aligned}(*)\quad S_{2N} &= \sum_{n=0}^{2N}(-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\frac{1}{a_n^2-1} = \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{a_{2n}^2-1}+\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{a_{2n-1}^2-1}\\ &= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{1}{(3n+1)(3n+3)}+\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{1}{3n(3n+2)}\\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+3}\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\left(\frac{1}{3n}-\frac{1}{3n+2}\right)\\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\left(\frac{1}{3n}-\frac{1}{3n+3}\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}\right)\\ &= \frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\sum_{n=2}^{N}(-1)^n\frac{1}{3n}+\frac{(-1)^{N+1}}{6(N+1)}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}\right).\end{aligned}$$

Z drugiej strony, na mocy zadania 3.1.32, mamy

$$\begin{aligned}-\ln 2 &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{3N}(-1)^n\frac{1}{n}\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{1}{3n}\right)-\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{3}\ln 2-\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right).\end{aligned}$$

Stąd $\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right) = \frac{2}{3}\ln 2$. Ostatecznie na mocy równości $(*)$ otrzymujemy $\lim_{N\to\infty} S_{2N} = \frac{1}{6}-\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Ponadto $\lim_{N\to\infty} S_{2N+1} = \lim_{N\to\infty} S_{2N} + \lim_{N\to\infty} \frac{(-1)^{N+1}}{(3N+4)^2-1} = \lim_{N\to\infty} S_{2N}$. Zatem suma badanego szeregu wynosi $\frac{1}{4}$.

3.1.41.

(a) Przypuśćmy, że suma S tego szeregu jest liczbą wymierną $\frac{p}{q}$. Wtedy $(q-1)!p = q!S = \sum_{n=1}^{q} \frac{q!}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!}$. Wynikałoby stąd, że $\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!}$ jest liczbą całkowitą. Z drugiej strony

$$0 < \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} \le \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)^2} + \ldots = \frac{q+2}{(q+1)^2} \le \frac{3}{4}.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi niewymierności sumy S.

(b) Dowód analogiczny do dowodu części (a).

3.1.42. Podobnie jak w poprzednim zadaniu przypuśćmy, że suma S tego szeregu jest liczbą wymierną $\frac{p}{q}$. Wtedy

$$(q-1)!p = q!S = \sum_{n=1}^{q} \frac{q!\varepsilon_n}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!\varepsilon_n}{n!}.$$

Wynika stąd, że $\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!\varepsilon_n}{n!}$ jest liczbą całkowitą. Z drugiej strony

$$\left| \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!\varepsilon_n}{n!} \right| \le \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} < 1.$$

Wystarczy teraz pokazać, że jest to liczba różna od zera. Mamy

$$\left| \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n q!}{n!} \right| \ge \left| \frac{1}{q+1} - \sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{q!}{n!} \right| > \frac{1}{q+1} - \frac{1}{q(q+1)} \ge 0.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi niewymierności sumy S.

3.1.43. Dowód podobny do powyższego.

3.1.44. Przypuśćmy, że $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Niech $k \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $\frac{n_i}{n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_{i-1}} > 3q$ dla $i \ge k$. Wtedy

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1} q}{n_i} + \sum_{i=k}^{\infty} \frac{n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1} q}{n_i} = p n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1}.$$

Ponadto

$$\sum_{i=k}^{\infty} \frac{n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1} q}{n_i} < \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_k n_{k+1}} + \ldots\right) < 1.$$

Sprzeczność.

3.1.45. Gdyby suma szeregu była liczbą wymierną postaci $\frac{p}{q}$, to dla dowolnego naturalnego k_1 byłoby $\sum_{k=k_1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \frac{p}{q} - \sum_{k=1}^{k_1-1} \frac{1}{n_k}$. A więc suma

$$\sum_{k=k_1}^{\infty} \frac{q n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k_1-1}}{n_k}$$

byłaby liczbą naturalną. Zatem byłoby

$$(*) \qquad \sum_{k=k_1}^{\infty} \frac{1}{n_k} \ge \frac{1}{q n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k_1-1}}.$$

Niech teraz $\lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{n_{k-1}} = l > 1$ i niech $\varepsilon > 0$ będzie tak małe, że $\alpha = l - \varepsilon > 1$. Wtedy istnieje taki wskaźnik k_0, że dla wszystkich $k > k_0$ mamy

$$(**) \qquad \frac{n_k}{n_{k-1}} \ge \alpha > 1.$$

Ponadto z założenia dotyczącego granicy górnej wynika, że istnieje $k_1 > k_0$ takie, że $\frac{n_{k_1}}{n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k_1-1}} > \frac{\alpha q}{\alpha - 1}$. Stąd i z nierówności $(**)$

$$\sum_{k=k_1}^{\infty} \frac{1}{n_k} \le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^j n_{k_1}} = \frac{\alpha}{(\alpha-1) n_{k_1}} < \frac{1}{q n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k_1-1}},$$

co przeczy nierówności $(*)$.

3.1.46. Przypuśćmy, że tak nie jest, tzn. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i} = \frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami naturalnymi i pierwszymi względem siebie. Wtedy

$$n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{n_{k+j}} \ge \frac{1}{q}$$

dla dowolnego $k \ge 2$. (Porównać z rozważaniami przeprowadzonymi w poprzednich zadaniach).

Niech $a_k = \sqrt[2^k]{n_k}$. Ponieważ $\lim_{k\to\infty} a_k = +\infty$, więc istnieje takie r_1, że $a_j \le a_{r_1}$ dla $j = 1, 2, \ldots, r_1 - 1$. Istotnie, jeśli $a_1 \le a_2$, to $r_1 = 2$. W przeciwnym razie przyjmujemy jako r_1 najmniejszą liczbę naturalną większą niż 2 i taką, że $a_1 \le a_{r_1}$. W rzeczywistości istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych r_k mających powyższą własność, tzn. $a_j \le a_{r_k}$ dla $j = 1, 2, \ldots, r_k - 1$. Aby znaleźć r_2, stosujemy powyższą procedurę do ciągu $\{a_k\}_{k \ge r_1}$ itd. Oznaczmy teraz przez r najmniejszy wskaźnik taki, że $a_{r+j} > q+1$ dla $j = 0, 1, 2, \ldots$ oraz $a_j \le a_r$ dla $j = 1, 2, \ldots, r-1$. Zauważmy jeszcze, że ponieważ $n_r \le n_{r+j}$, więc $a_r \le a_{r+j}^{2^j}$

dla $j = 0, 1, 2, \ldots$ Z powyższych rozważań wynika, że

$$\frac{n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_{r-1}}{n_{r+j}} \leq \frac{a_r^{2+2^2+\ldots+2^{r-1}}}{n_{r+j}} \leq \frac{a_{r+j}^{2^j(2^r-2)}}{a_{r+j}^{2^{r+j}}} = a_{r+j}^{-2^{j+1}} < (q+1)^{-(j+1)}.$$

Zatem

$$n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_{r-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{n_{r+j}} < \sum_{j=0}^{\infty} (q+1)^{-(j+1)} = \frac{1}{q},$$

co daje sprzeczność.

3.1.47. Z założenia zbieżności szeregu wynika, że $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n - 1} = 0$. Ponadto z następnych założeń zadania wynika, że $\frac{p_m}{q_m - 1} \geq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$. Jeśli $\mathbf{A}$ jest zbiorem skończonym, to istnieje taki wskaźnik m, że

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n} = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{p_n}{q_n} + \frac{p_m}{q_m - 1}.$$

Zatem S jest liczbą wymierną. Załóżmy teraz, że

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Wtedy

$$r_n = \frac{p}{q} - \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{q_k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{p_k}{q_k} \leq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1} - 1}.$$

Mnożąc teraz stronami przez $b_n = qq_1 \cdot \ldots \cdot q_n$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} b_{n+1} r_{n+1} &= b_n r_n q_{n+1} - qq_1 \cdot \ldots \cdot q_{n+1} \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \\ &\leq b_n r_n q_{n+1} - b_n r_n (q_{n+1} - 1) = b_n r_n. \end{aligned}$$

Malejący ciąg liczb naturalnych $\{b_n r_n\}$ musi być od pewnego miejsca stały. Oznacza to, że w nierówności podanej w zadaniu występuje równość począwszy od tego wskaźnika. A więc zbiór $\mathbf{A}$ musi być skończony.

3.1.48. Oczywiście możemy napisać $n! = 2^{\alpha(n)}\beta(n)$, gdzie $\beta(n)$ jest liczbą nieparzystą. Z twierdzenia Legendra wynika, że $\alpha(n) = n - \nu(n)$, gdzie $\nu(n)$ jest sumą jedynek w dwójkowym rozwinięciu liczby n. Ponadto mamy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{n_k}}{n_k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \frac{2^n}{n!}$, gdzie $\delta_n = 1$, jeśli $n = n_k$, oraz $\delta_n = 0$ w przeciwnym razie. Załóżmy, że teza naszego twierdzenia nie jest prawdziwa, tzn., że $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \frac{2^n}{n!} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Przedstawmy liczbę q w postaci $q = 2^s t$, gdzie t jest liczbą nieparzystą.

Jeśli teraz $N = 2^r > \max\{t, 2^{s+2}\}$, to $\frac{\beta(N)}{t} \in \mathbb{N}$. Dlatego $2^s\beta(N)\frac{p}{q} = \frac{\beta(N)}{t}p \in \mathbb{N}$. Łatwo sprawdzić, że $N! = 2^{N-1}\beta(N)$ (wynika to również bezpośrednio z twierdzenia Legendre'a). Mnożąc obie strony równości

$$\frac{p}{q} = \sum_{n=1}^{N} \delta_n \frac{2^n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \delta_n \frac{2^n}{n!}$$

przez $2^s\beta(N)$, otrzymujemy

$$(*) \qquad 2^s\beta(N)\frac{p}{q} = 2^s\beta(N) \sum_{n=1}^{N} \delta_n \frac{2^n}{n!} + 2^s\beta(N) \sum_{n=N+1}^{\infty} \delta_n \frac{2^n}{n!}.$$

Zauważmy, że

$$2^s\beta(N) \sum_{n=1}^{N} \delta_n \frac{2^n}{n!} = 2^s \sum_{n=1}^{N} \delta_n \frac{\beta(N)2^n}{2^{\alpha(n)}\beta(n)}.$$

Ponieważ $\beta(n)$ jest dzielnikiem liczby $\beta(N)$, więc pierwszy składnik sumy po prawej stronie równości $(*)$ jest liczbą naturalną. W celu otrzymania sprzeczności pokażemy, że $0 < 2^s\beta(N)\sum_{n=N+1}^{\infty} \delta_n \frac{2^n}{n!} < 1$. Istotnie,

$$\begin{aligned} 2^s\beta(N) \sum_{n=N+1}^{\infty} \delta_n \frac{2^n}{n!} &= 2^{s-N+1}N! \sum_{n=N+1}^{\infty} \delta_n \frac{2^n}{n!} = 2^{s+2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \delta_n 2^{n-N-1} \frac{N!}{n!} \\ &< \frac{2^{s+2}}{N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{2}{N+2}\right)^{n-N-1} \\ &= \frac{2^{s+2}}{N+1} \frac{N+2}{N} < \frac{2^{s+3}}{N+1} < 1. \end{aligned}$$

3.2 SZEREGI O WYRAZACH NIEUJEMNYCH

3.2.1.

(a) Mamy

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{n^2+1} + \sqrt[3]{n^3+1})} \frac{3n^4 - 2n^3 + 3n^2}{\left((n^2+1)^2 + (n^2+1)\sqrt[3]{(n^3+1)^2} + (n^3+1)\sqrt[3]{n^3+1}\right)}. \end{aligned}$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2},$$

a więc badany szereg jest rozbieżny.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{n}{n^2+n+1}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}}$, czyli badany szereg jest zbieżny.

(c) Można pokazać indukcyjnie, że

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} > \frac{1}{2n-1} \quad \text{dla} \quad n > 2,$$

co dowodzi rozbieżności rozpatrywanego szeregu.

(d) Szereg jest zbieżny, gdyż $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

(e) $1 - \cos\frac{1}{n} = 2\sin^2\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n^2}$, czyli szereg ten jest zbieżny.

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$, a więc szereg jest zbieżny.

(g) Na mocy zadania 2.5.4(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}} = \ln a,$$

czyli szereg ten jest rozbieżny.

3.2.2.

(a) Szereg ten jest zbieżny, gdyż $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n^2}$.

(b) Podobnie jak w części (a) zbieżność szeregu wynika z nierówności

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1} < \frac{2}{\sqrt{n}(n-1)} \quad \text{dla} \quad n > 1.$$

(c) Korzystając z nierówności $\ln n < n$, otrzymujemy $\frac{1}{n^2-\ln n} < \frac{1}{n(n-1)}$. Zatem rozpatrywany szereg jest zbieżny.

(d) Mamy

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln n)}},$$

a więc badany szereg jest zbieżny.

(e) Stosując metody rachunku różniczkowego, można dowieść, że dla dostatecznie dużych x prawdziwa jest nierówność $(\ln\ln x)^2 < \ln x$. Zatem począwszy od pewnego n_0 prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{(\ln(\ln n))^2}} > \frac{1}{n}.$$

Oznacza to, że rozpatrywany szereg jest rozbieżny.

3.2.3. Niech $c_n = \frac{a_n}{b_n}$. Na podstawie założenia mamy

$$c_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le \frac{a_n}{b_n} = c_n, \quad n \ge n_0.$$

Zatem ciąg $\{c_n\}$ począwszy od pewnego wyrazu jest malejący, a więc jest on ograniczony, tzn. istnieje $C > 0$ takie, że $0 < c_n < C, n \in \mathbb{N}$. Stąd $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n < C\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, co kończy dowód naszego twierdzenia.

3.2.4.

(a) Na podstawie zadania 2.1.38 mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}}{\mathrm{e}} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}.$$

Stąd i z poprzedniego zadania wynika zbieżność rozpatrywanego szeregu.

(b) Podobnie, na podstawie zadania 2.1.38, otrzymujemy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\mathrm{e}} > \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

Gdyby rozpatrywany szereg był zbieżny, to na podstawie zadania 3.2.3 szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ byłby również zbieżny. Zatem badany szereg jest rozbieżny.

3.2.5.

(a) Na podstawie zadania 2.5.4(a) szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)^\alpha$ pod względem zbieżności zachowuje się tak samo jak szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, a więc jest zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny dla $\alpha \le 1$.

(b) Na podstawie zadania 2.5.4(b) (patrz rozwiązanie) prawdziwa jest nierówność $\ln n < n(\sqrt[n]{n}-1)$. Zatem dla $n > 3$ oraz $\alpha > 0$

$$\frac{1}{n^\alpha} < \left(\frac{\ln n}{n}\right)^\alpha < (\sqrt[n]{n}-1)^\alpha.$$

Stąd już wynika, że badany szereg jest rozbieżny dla $0 < \alpha \le 1$.
Zauważmy ponadto, że dla $\alpha \le 0$ nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności. Natomiast dla $\alpha > 1$, na mocy zadania 2.5.5, badany szereg zachowuje się pod względem zbieżności tak jak szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^\alpha$.

Z kolei zbieżność tego ostatniego szeregu wynika z zadania 3.2.3, gdyż dla dostatecznie dużych n prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n\ln(n+1)}{(n+1)\ln n}\right)^\alpha \le 2^\alpha\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha.$$

(c) Na podstawie zadania 2.5.5 badany szereg zachowuje się pod względem zbieżności tak jak szereg o wyrazach

$$\left(\ln\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\mathrm{e}}\right)^\alpha.$$

Z nierówności (patrz zadanie 2.5.3) $\frac{2x}{2+x} < \ln(1+x) < x$ dla $x > 0$, otrzymujemy

$$\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1\right)^{\alpha} < \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{dla} \quad \alpha > 1$$

oraz

$$\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1\right)^{\alpha} > \frac{1}{(2n+1)^{\alpha}} \quad \text{dla} \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Wynika stąd, że rozpatrywany szereg jest zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny dla $0 < \alpha \leq 1$. Zauważmy jeszcze, że dla $\alpha \leq 0$ nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności.

(d) Łatwo sprawdzić, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - n\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{6}.$$

Zatem badany szereg zachowuje się pod względem zbieżności tak jak szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$, czyli jest zbieżny dla $\alpha > \frac{1}{2}$ i rozbieżny dla $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

3.2.6. Na podstawie zadania 2.5.5 mamy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n \ln a}{a^{a_n} - 1} = 1$, a więc badany szereg zachowuje się pod względem zbieżności tak jak szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.2.7.

(a) Łatwo sprawdzić, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{2n^2}} = 1.$$

Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} -\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$ jest zbieżny.

(b) Jeśli $c \neq 0$, to

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}} = \mathrm{e}^{\frac{a}{c}} \neq 0,$$

czyli nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu.
Jeśli $c = 0$ i $\frac{a}{d} \geq 0$, to również nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności.
Jeśli natomiast $c = 0$ i $\frac{a}{d} < 0$, to

$$\mathrm{e}^{\frac{a\ln n+b}{d}} = \mathrm{e}^{\frac{b}{d}}\mathrm{e}^{\frac{a}{d}\ln n} = \mathrm{e}^{\frac{b}{d}} n^{\frac{a}{d}}.$$

Stąd już wynika, że w tym przypadku szereg jest zbieżny, jeśli $\frac{a}{d} < -1$, i rozbieżny, jeśli $\frac{a}{d} \geq -1$.

(c) Mamy

$$\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} = \frac{1}{(n+a)^{b}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n}(n+b)^{a}\left(1+\frac{b}{n}\right)^{n}}.$$

Szereg ten pod względem zbieżności zachowuje się tak jak szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+b}}$.

3.2.8. Zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ wynika wprost z nierówności $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$. Jeśli ponadto ciąg $\{a_n\}$ jest malejący, to prawdziwa jest również nierówność $\sqrt{a_n a_{n+1}} \geq a_{n+1}$, czyli ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$.
Rozpatrzmy teraz następujący ciąg $\{a_n\}$

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ \frac{1}{n^4} & \text{dla } n \text{ parzystych.} \end{cases}$$

Wtedy

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k a_{k+1}} < \sum_{k=1}^{2n} \sqrt{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ jest zbieżny, podczas gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

3.2.9.

(a) Zauważmy najpierw, że jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry, np. przez liczbę M, to

$$\frac{a_n}{1+a_n} \geq \frac{a_n}{1+M},$$

co oznacza, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ jest rozbieżny. Jeśli natomiast ciąg $\{a_n\}$ jest nieograniczony z góry, to istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ rozbieżny do nieskończoności. Wtedy

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}} = 1,$$

czyli nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności.

(b) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ może być zarówno zbieżny, jak i rozbieżny. Rozpatrzmy następujący przykład

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = m^2,\ m = 1, 2, \ldots, \\ \frac{1}{n^2} & \text{dla pozostałych } n. \end{cases}$$

Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny. Niech $b_n = \frac{a_n}{1+na_n}$. Mamy

$$\sum_{k=1}^{n} b_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+k^2} \leq 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2}.$$

Oznacza to, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny. Przykład szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ pokazuje, że oba szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mogą być rozbieżne.

(c) Z nierówności

$$\frac{a_n}{1+n^2a_n} \leq \frac{a_n}{n^2a_n} = \frac{1}{n^2}$$

wynika, że badany szereg jest zawsze zbieżny.

(d) Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry, np. przez M, to

$$\frac{a_n}{1+a_n^2} \geq \frac{a_n}{1+M^2},$$

a więc w tym przypadku rozpatrywany szereg jest rozbieżny. Jeśli natomiast na przykład $a_n = n^2$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ jest zbieżny.

3.2.10. Dla dowolnych liczb naturalnych n, p mamy

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \ldots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} \geq \frac{\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k}{S_{n+p}} = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}}.$$

Ponieważ $\lim_{p\to\infty} \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1$, to ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ nie spełnia warunku Cauchy'ego zbieżności, co oznacza, że szereg ten jest rozbieżny. Natomiast ponieważ

$$\frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{a_n}{S_nS_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_nS_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n},$$

więc

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{S_{k-1}} - \frac{1}{S_k}\right) = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+p}} < \frac{1}{S_n}.$$

Oznacza to, że warunek Cauchy'ego jest spełniony, czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ jest zbieżny.

3.2.11. Mamy

$$\frac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\beta}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_nS_{n-1}^{\beta}}.$$

Niech p będzie liczbą naturalną taką, że $\frac{1}{p} < \beta$. Wtedy dla dostatecznie dużych n prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\beta}} < \frac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\frac{1}{p}}}.$$

Wystarczy zatem dowieść zbieżności szeregu o wyrazach $\frac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\frac{1}{p}}}$. W tym celu wykażemy, że prawdziwa jest nierówność

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{S_nS_{n-1}^{\frac{1}{p}}} \leq p\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{S_n^{\frac{1}{p}}}\right).$$

Nierówność ta jest równoważna nierówności

$$1 - \frac{S_{n-1}}{S_n} \leq p\left(1 - \frac{S_{n-1}^{\frac{1}{p}}}{S_n^{\frac{1}{p}}}\right).$$

A z kolei ta nierówność wynika z łatwej do udowodnienia nierówności $1 - x^p \leq p(1-x)$ dla $0 < x \leq 1$. Istotnie, wystarczy przyjąć $x = \left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)^{\frac{1}{p}}$. Stąd (patrz rozwiązanie poprzedniego zadania) już wynika zbieżność rozpatrywanego szeregu dla każdej $\beta > 0$.

3.2.12. Załóżmy najpierw, że $\alpha > 1$. Wtedy dla $n \geq 2$ mamy

$$\frac{a_n}{S_n^{\alpha}} \leq \frac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\alpha-1}}.$$

Zatem zbieżność tego szeregu wynika z poprzedniego zadania.
Niech teraz $\alpha \leq 1$. Wtedy dla dostatecznie dużych n mamy $\frac{a_n}{S_n^{\alpha}} \geq \frac{a_n}{S_n}$. Stąd i z zadania 3.2.10 wynika rozbieżność badanego szeregu dla $\alpha \leq 1$.

3.2.13.

(a) Przy założeniach naszego zadania ciąg $\{r_n\}$ jest malejący i zbieżny do zera. Ponadto

$$\frac{a_n}{r_{n-1}} = \frac{r_{n-1} - r_n}{r_{n-1}}.$$

Stąd dla dowolnych naturalnych n, p mamy

$$\frac{a_{n+1}}{r_n} + \ldots + \frac{a_{n+p}}{r_{n+p-1}} = \frac{r_n - r_{n+1}}{r_n} + \ldots + \frac{r_{n+p-1} - r_{n+p}}{r_{n+p-1}}$$
$$> \frac{r_n - r_{n+p}}{r_n} = 1 - \frac{r_{n+p}}{r_n}.$$

Ponieważ, przy ustalonym n, $\lim_{p\to\infty}\left(1 - \frac{r_{n+p}}{r_n}\right) = 1$, więc szereg nie spełnia warunku Cauchy'ego, a więc jest rozbieżny.

(b) Mamy

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}} = \frac{r_{n-1} - r_n}{\sqrt{r_{n-1}}} = \frac{(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n})(\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n})}{\sqrt{r_{n-1}}} < 2(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}).$$

Z nierówności tej wynika już, że warunek Cauchy'ego dla ciągu sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}}$ jest spełniony, a więc szereg ten jest zbieżny.

3.2.14. Jeśli $\alpha \geq 1$, to z nierówności

$$\frac{1}{r_{n-1}^{\alpha}} \geq \frac{1}{r_{n-1}},$$

która jest spełniona dla dostatecznie dużych n, oraz z części (a) poprzedniego zadania wynika rozbieżność rozpatrywanego szeregu.
Załóżmy teraz, że $\alpha < 1$. Istnieje wtedy liczba naturalna p taka, że $\alpha < 1 - \frac{1}{p}$. Zatem

$$\frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}} < \frac{a_n}{(r_{n-1})^{1-\frac{1}{p}}} = \frac{r_{n-1} - r_n}{r_{n-1}} r_{n-1}^{\frac{1}{p}}.$$

Korzystając z nierówności $1 - x^p \leq p(1-x)$ dla $0 < x \leq 1$, gdzie $x = \left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^{\frac{1}{p}}$, otrzymujemy

$$\frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}} \leq p\left(r_{n-1}^{\frac{1}{p}} - r_n^{\frac{1}{p}}\right).$$

Stąd już wynika zbieżność rozpatrywanego szeregu.

3.2.15. Dla $0 < \alpha < 1$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} \ln^2 r_n}{\frac{a_{n+1}}{r_n^{\alpha}}} = 0.$$

Stąd i z poprzedniego zadania wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \ln^2 r_n$.

3.2.16. Załóżmy najpierw, że $g > 1$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie tak małe, że $g - \varepsilon > 1$. Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} n(g-\varepsilon) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = g - \varepsilon,$$

więc istnieje takie n_0, że dla $n \geq n_0$

$$n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > n(g-\varepsilon) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

czyli

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^{g-\varepsilon}}}{\frac{1}{n^{g-\varepsilon}}}.$$

Zatem na mocy zadania 3.2.3 szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Podobne rozumowanie może być zastosowane do przypadku $g = +\infty$. Dowód drugiej części jest analogiczny.
Podamy teraz przykłady szeregów (zarówno zbieżnych, jak i rozbieżnych), dla których granica g jest równa 1. Niech np. $a_n = \frac{1}{n}$. Wtedy $g = 1$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny. Niech teraz $a_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$. Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny (patrz zadanie 3.2.29). Można pokazać, że w tym przypadku również $g = 1$. W tym celu zauważmy, że

$$n \ln \frac{\frac{1}{n \ln^2 n}}{\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + 2n \ln \frac{\ln(n+1)}{\ln n}.$$

Ponieważ pierwszy składnik ostatniej sumy dąży do 1, więc wystarczy pokazać, że $\lim_{n\to\infty} 2n \ln \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 0$. Istotnie, mamy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\ln \frac{n+1}{n}}{\ln n}\right)^n = \mathrm{e}^0 = 1.$$

3.2.17.
(a) Jest

$$\lim_{n\to\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \ln 2 = +\infty.$$

Zatem na podstawie poprzedniego zadania badany szereg jest zbieżny.
(b) Podobnie

$$\lim_{n\to\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \ln 2 = \ln 2 < 1.$$

Zatem badany szereg jest rozbieżny.
(c) Analogicznie

$$\lim_{n\to\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \ln 3 > 1,$$

czyli szereg ten jest zbieżny.
(d)

$$\lim_{n\to\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \ln a.$$

Oznacza to, że dla $a > \mathrm{e}$ rozpatrywany szereg jest zbieżny, a dla $a < \mathrm{e}$ szereg ten jest rozbieżny. Jeśli $a = \mathrm{e}$, to oczywiście szereg jest rozbieżny.
(e) Mamy

$$\lim_{n\to\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} n \ln \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \ln a = 0,$$

gdzie ostatnia równość wynika z rozwiązania zadania 3.2.16. A więc na podstawie poprzedniego zadania szereg ten jest rozbieżny dla każdego $a > 0$.

3.2.18. Skoro

$$\lim_{n\to\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} n \ln a^{-\frac{1}{n+1}} = \ln \frac{1}{a},$$

to na podstawie zadania 3.2.16 szereg ten jest zbieżny dla $0 < a < \frac{1}{\mathrm{e}}$ i rozbieżny

dla $a > \frac{1}{\mathrm{e}}$. W przypadku $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$ mamy (patrz zadanie 2.1.41)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\mathrm{e}^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{-\gamma},$$

gdzie γ jest stałą Eulera. Zatem szereg ten zachowuje się pod względem zbieżności tak, jak szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, czyli jest rozbieżny.

3.2.19. Korzystając z nierówności $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$ dla $x > -1$, otrzymujemy

$$\frac{n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)}{1 + \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)} \le n \ln\left(1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \le n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Z nierówności tej wynika, że kryterium Raabego jest równoważne testowi podanemu w zadaniu 3.2.16 w przypadku r skończonego. Z powyższej nierówności wynika również, że jeśli $\lim_{n\to\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = +\infty$, to $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = +\infty$. Pokażemy teraz, że implikacja przeciwna jest również prawdziwa. Istotnie, jeśli $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = +\infty$, to dla dowolnego $A > 0$ istnieje takie n_0, że $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 > \frac{A}{n}$ dla $n > n_0$. Zatem

$$n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \ln\left(1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)^n > \ln\left(1 + \frac{A}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} A.$$

Ponieważ A może być dowolnie duże, więc $\lim_{n\to\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = +\infty$. Podobne rozważania mogą być przeprowadzone w przypadku $r = -\infty$.

3.2.20. Ponieważ ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący, więc

$$0 < n\left(\frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{a_{n+1}}} - 1\right) = \frac{1}{n}\frac{a_{n-1}}{a_n} < \frac{1}{n}.$$

Zatem na podstawie kryterium Raabego szereg ten jest rozbieżny.

3.2.21. Wprost z definicji ciągu wynika, że

$$a_n = a_1 \mathrm{e}^{-\sum_{k=1}^{n-1} a_k^{\alpha}} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Wykażemy najpierw, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}$ jest rozbieżny. Istotnie, gdyby $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha} = S < +\infty$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 \mathrm{e}^{-S} > 0$, skąd wynikałoby, że $\lim_{n\to\infty} a_n^{\alpha} > 0$, a więc

niespełniony byłby warunek konieczny zbieżności. Dlatego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}$ jest rozbieżny i stąd oraz z powyższych rozważań wynika, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Załóżmy teraz, że $\beta > \alpha$. Udowodnimy, że w tym przypadku badany szereg jest zbieżny. W tym celu pokażemy najpierw, że

$$(*) \qquad a_n^{-\alpha} > \alpha(n-1) \quad \text{dla} \quad n \ge 1.$$

Nierówność ta jest oczywista dla $n = 1$. Załóżmy teraz, że jest ona prawdziwa dla dowolnie ustalonego n. Wtedy z określenia ciągu wynika, że

$$a_{n+1}^{-\alpha} = a_n^{-\alpha} \mathrm{e}^{\alpha a_n^{\alpha}} > a_n^{-\alpha}(1 + \alpha a_n^{\alpha}) = a_n^{-\alpha} + \alpha > \alpha n.$$

Stąd i z zasady indukcji matematycznej wynika, że nierówność $(*)$ jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n. Z nierówności tej otrzymujemy

$$a_n^{\beta} < (\alpha(n-1))^{-\frac{\beta}{\alpha}}, \quad n \ne 1.$$

Zatem z kryterium porównawczego wynika zbieżność szeregu w rozpatrywanym przypadku.

Załóżmy teraz, że $\beta \le \alpha$. Ponieważ pokazaliśmy już, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, więc dla dostatecznie dużych n mamy $0 < a_n < 1$. Zatem $a_n^{\alpha} \le a_n^{\beta}$. Stąd i z faktu, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}$ jest rozbieżny wynika rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\beta}$.

3.2.22. Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} a = a.$$

Na podstawie kryterium Raabego rozpatrywany szereg jest więc zbieżny dla $a > 1$ i rozbieżny dla $0 < a < 1$.

Dla $a = 1$ szereg ma postać $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, a więc jest rozbieżny.

3.2.23. Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{nb_{n+1}}{(n+1)a} = \frac{b}{a},$$

więc na podstawie kryterium Raabego szereg jest zbieżny dla $b > a$ i rozbieżny dla $b < a$. W przypadku $b = a$ zbieżność szeregu zależy od sposobu zbieżności ciągu $\{b_n\}$ do b. Istotnie, jeśli $\{b_n\}$ jest ciągiem stałym, to rozpatrywany szereg jest rozbieżny jako szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

Niech teraz $b_n = a + \frac{2a}{\ln(n+1)}$. Wtedy stosując kryterium porównawcze można pokazać, że badany szereg jest zbieżny. Rzeczywiście, wyraz ogólny badanego szeregu ma postać

$$a_n = \frac{n!}{\left(2+\frac{2}{\ln 2}\right)\left(3+\frac{2}{\ln 3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(n+1+\frac{2}{\ln(n+1)}\right)}.$$

Stąd

$$a_n(n-1)\ln(n-1) - a_{n+1}n\ln n$$
$$= a_n\left((n-1)\ln(n-1) - \frac{(n+1)n\ln n}{n+2+\frac{2}{\ln(n+2)}}\right).$$

Można sprawdzić, że

$$\lim_{n\to\infty}\left((n-1)\ln(n-1) - \frac{(n+1)n\ln n}{n+2+\frac{2}{\ln(n+2)}}\right) = 1.$$

Zatem dla dostatecznie dużych n prawdziwa jest nierówność

$$a_n(n-1)\ln(n-1) - a_{n+1}n\ln n \geq (1-\varepsilon)a_n > 0.$$

Wynika stąd, że ciąg o wyrazach dodatnich $a_n(n-1)\ln(n-1)$ jest malejący, a więc zbieżny, co z kolei implikuje zbieżność szeregu o wyrazach $a_n(n-1)\ln(n-1) - a_{n+1}n\ln n$. Z kryterium porównawczego i z ostatniej nierówności wynika również zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.2.24. Na mocy założenia mamy

$$a_n((n-1)\ln n - 1) - a_{n+1}n\ln n = (\gamma_n - 1)a_n.$$

Jeśli więc $\gamma_n \geq \gamma > 1$, to

$$(*) \qquad a_n((n-1)\ln n - 1) - a_{n+1}n\ln n \geq (\gamma-1)a_n.$$

Z nierówności $(n-1)\ln(n-1) > (n-1)\ln n - 1$ oraz z nierówności $(*)$ wynika

$$(**) \qquad a_n(n-1)\ln(n-1) - a_{n+1}n\ln n \geq (\gamma-1)a_n > 0.$$

Oznacza to, że ciąg o wyrazach $a_n(n-1)\ln(n-1)$ jest malejący i zbieżny. Zatem szereg o wyrazach $a_n(n-1)\ln(n-1) - a_{n+1}n\ln n$ jest zbieżny, a więc na mocy $(**)$ szereg o wyrazach a_n jest również zbieżny. Jeśli teraz $\gamma_n \leq \gamma < 1$, to $a_n((n-1)\ln n - 1) - a_{n+1}n\ln n \leq (\gamma-1)a_n$. Stąd

$$a_n(n-1)\ln(n-1) - a_{n+1}n\ln n \leq \left(\gamma + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right)a_n.$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\gamma + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right) = \gamma - 1 < 0,$$

więc ciąg $\{a_{n+1}n\ln n\}$ jest od pewnego miejsca rosnący, a więc istnieje takie $M > 0$, że $a_{n+1}n\ln n > M$. Zatem $a_{n+1} > \frac{M}{n\ln n}$, czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

3.2.25. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha + \frac{\vartheta_n}{n^{\lambda-1}}}{1-\frac{\alpha}{n}-\frac{\vartheta_n}{n^{\lambda}}} = \alpha.$$

Stąd i z kryterium Raabego badany szereg jest zbieżny, jeśli $\alpha > 1$, i rozbieżny, jeśli $\alpha < 1$. Jeśli $\alpha = 1$, to rozbieżność szeregu wynika z poprzedniego zadania, gdyż

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\vartheta_n}{n^{\lambda}} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\gamma_n}{n\ln n},$$

gdzie $\gamma_n = \frac{\vartheta_n \ln n}{n^{\lambda-1}} \leq \gamma < 1$.

3.2.26. Wystarczy zastosować kryterium Gaussa z poprzedniego zadania. Mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}{n^2+(1+\gamma)n+\gamma} = 1 - \frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n} - \frac{\vartheta_n}{n^2}.$$

Zatem rozpatrywany szereg jest zbieżny dla $\alpha+\beta < \gamma$ i rozbieżny dla $\alpha+\beta \geq \gamma$.

3.2.27. Podobnie jak w poprzednim zadaniu wystarczy skorzystać z zadania 3.2.25. Mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\frac{p}{2}}{n} - \frac{\vartheta_n}{n^2}.$$

Zatem badany szereg jest zbieżny dla $p > 2$ i rozbieżny dla $p \leq 2$.

3.2.28. Niech $S_n, \widetilde{S_n}$ oznaczają odpowiednio sumy częściowe szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$. Wówczas dla $n \leq 2^k$ mamy

$$S_n \leq a_1 + (a_2+a_3) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \leq a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k} = \widetilde{S_k},$$

a więc $S_n \leq \widetilde{S_k}$. Dla $n > 2^k$ jest

$$S_n \geq a_1 + a_2 + (a_3+a_4) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k})$$
$$\geq a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1}a_{2^k} = \frac{1}{2}\widetilde{S_k},$$

czyli $2S_n \geq \widetilde{S_k}$.

3.2.29.

(a) Skorzystamy z kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu. Ponieważ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(\ln 2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\ln 2)^\alpha},$$

więc badany szereg jest zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny dla $0 < \alpha \leq 1$. Jeśli $\alpha \leq 0$, to rozbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ wynika wprost z kryterium porównawczego.

(b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \ln 2^n \ln(\ln 2^n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln 2 \ln(n\ln 2)}.$$

Stąd i z części (a) wynika, że rozpatrywany szereg jest rozbieżny.

3.2.30. Dowód tego twierdzenia jest analogiczny do dowodu twierdzenia Cauchy'ego o zagęszczaniu. Dla $n \leq g_k$ mamy

$$\begin{aligned} S_n &\leq S_{g_k} \leq (a_1 + \ldots + a_{g_1-1}) + (a_{g_1} + \ldots + a_{g_2-1}) + \ldots + (a_{g_k} + \ldots + a_{g_{k+1}-1}) \\ &\leq (a_1 + \ldots + a_{g_1-1}) + (g_2 - g_1)a_{g_1} + \ldots + (g_{k+1} - g_k)a_{g_k}. \end{aligned}$$

Natomiast dla $n > g_k$ mamy

$$\begin{aligned} cS_n &\geq cS_{g_k} \geq c(a_{g_1+1} + \ldots + a_{g_2}) + \ldots + c(a_{g_{k-1}+1} + \ldots + a_{g_k}) \\ &\geq c(g_2 - g_1)a_{g_2} + \ldots + c(g_k - g_{k-1})a_{g_k} \\ &\geq (g_3 - g_2)a_{g_2} + \ldots + (g_{k+1} - g_k)a_{g_k}. \end{aligned}$$

Z powyższych nierówności wynika już teza naszego twierdzenia.

3.2.31.

(a) Wystarczy przyjąć $g_n = 3^n$ i zastosować twierdzenie Schlömilcha z poprzedniego zadania.

(b) Podobnie jak w części (a) przyjmując $g_n = n^2$, otrzymujemy, że zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest równoważna zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)a_{n^2}$. Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)a_{n^2}}{na_{n^2}} = 2.$$

Zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)a_{n^2}$ jest więc równoważna zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} na_{n^2}$.

(c) Patrz (b).

(d) Na podstawie (b) zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ jest równoważna zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, który jest zbieżny na podstawie np. kryterium pierwiastkowego Cauchy'ego. Problem zbieżności szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$ rozstrzyga klasyczne kryterium o zagęszczaniu lub kryterium z części (a). Dla $a > 1$ zbieżność szeregu o wyrazach $\frac{1}{a^{\ln\ln n}}$ jest równoważna zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{a^{\ln n}}$. Ponieważ ostatni szereg jest rozbieżny (kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego), więc rozpatrywany szereg jest również rozbieżny. Łatwo zauważyć, że dla $0 < a \leq 1$ nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu.

3.2.32. Z zadania 2.4.13(a) wynika, że istnieje $\varepsilon > 0$, dla którego

$$(a_n)^{\frac{1}{\ln n}} < \mathrm{e}^{-1-\varepsilon}, \quad n > k.$$

Stąd $\frac{1}{\ln n}\ln a_n < -1 - \varepsilon$, czyli $a_n < \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$. Na podstawie kryterium porównawczego szereg o wyrazach a_n jest zbieżny.

3.2.33. Podobnie jak w poprzednim zadaniu można pokazać, że

$$a_n \leq \frac{1}{n(\ln n)^{1+\varepsilon}} \quad \text{dla} \quad n > k \quad \text{i dla pewnego} \quad \varepsilon > 0.$$

Stąd i z zadania 3.2.29(a) wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.2.34.

$$\begin{aligned} S_{2^{n_0+k}-1} - S_{2^{n_0}-1} &= (a_{2^{n_0}} + a_{2^{n_0}+1} + \ldots + a_{2^{n_0+1}-1}) \\ &\quad + (a_{2^{n_0+1}} + \ldots + a_{2^{n_0+2}-1}) + \ldots \\ &\quad + (a_{2^{n_0+k-1}} + \ldots + a_{2^{n_0+k}-1}) \\ &\leq 2^{n_0}a_{2^{n_0}} + 2^{n_0+1}a_{2^{n_0+1}} + \ldots + 2^{n_0+k-1}a_{2^{n_0+k-1}} \\ &\leq g(a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_{n_0+k-1}). \end{aligned}$$

Stąd dla dostatecznie dużych k otrzymujemy

$$(1-g)\sum_{n=2^{n_0}}^{2^{n_0+k}-1} a_n \leq g\left(\sum_{n=n_0}^{2^{n_0}-1} a_n - \sum_{n=n_0+k}^{2^{n_0+k}-1} a_n\right) \leq g\sum_{n=n_0}^{2^{n_0}-1} a_n.$$

Nierówność ta oznacza ograniczoność ciągu sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a tym samym jego zbieżność.

3.2.35. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k = 0.$$

Z monotoniczności ciągu $\{a_n\}$ wynika, że

$$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} a_{2n} = na_{2n} = \frac{1}{2}(2na_{2n})$$

oraz

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1}(2n+1)a_{2n+1}.$$

Z powyższych rozważań wynika więc, że $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

Niech $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n+1)}$. Wtedy szereg o wyrazach a_n jest rozbieżny i

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0.$$

3.2.36. Niech

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{dla } n = k^2,\ k = 1, 2, \ldots, \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{dla pozostałych } n. \end{cases}$$

Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$ nie istnieje.

3.2.37. Warunkiem tym jest zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$. Istotnie, jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ jest zbieżny, to wystarczy przyjąć $b_n = \sqrt{a_n}$.

Załóżmy teraz, że istnieje ciąg $\{b_n\}$ taki, że oba szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ są zbieżne. Wtedy

$$\sqrt{a_n} = \sqrt{b_n \frac{a_n}{b_n}} \leq \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{a_n}{b_n}\right),$$

czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ jest zbieżny.

3.2.38. Załóżmy, że istnieje ciąg $\{a_n\}$ taki, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 a_n}$ są zbieżne. Niech

$$\mathbf{A} = \left\{ n_s \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_s} \leq \frac{1}{n_s^2 a_{n_s}} \right\} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A}' = \mathbb{N}\backslash\mathbf{A}.$$

Ze zbieżności drugiego z szeregów wynika, że $\sum_{n_s\in\mathbf{A}} \frac{1}{n_s} < +\infty$. Zatem $\sum_{n_s\in\mathbf{A}'} \frac{1}{n_s} = +\infty$. (Oczywiście zbiór $\mathbf{A}$ może być pusty).

Zauważmy teraz, że $a_{n_s} > \frac{1}{n_s}$ dla $n_s \in \mathbf{A}'$. Stąd już wynikałaby rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, co byłoby sprzeczne z naszym założeniem.

3.2.39. Mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1+a_{n+1}}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{na_n}.$$

Pokażemy, że ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{na_n}$ wynika rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na_n}$. Na podstawie warunku Cauchy'ego zbieżności istnieje takie $k \in \mathbb{N}$,

że dla każdego naturalnego n prawdziwa jest nierówność $\sum_{i=k+1}^{k+n} \frac{a_{i+1}}{ia_i} < \frac{1}{4}$.

Stąd $\frac{n}{n+k} \sum_{i=k+1}^{k+n} \frac{a_{i+1}}{na_i} < \frac{1}{4}$. Zatem dla $n > k$ otrzymujemy

$$\sum_{i=k+1}^{k+n} \frac{a_{i+1}}{na_i} < \frac{1}{4} \cdot \frac{k+n}{n} < \frac{1}{2}.$$

Stąd i z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\frac{a_{k+n+1}}{a_{k+1}}} < \frac{1}{2}, \quad \text{czyli} \quad a_{k+n+1} < \frac{a_{k+1}}{2^n},$$

a więc

$$\frac{1}{(k+n+1)a_{k+n+1}} > \frac{2^n}{(k+n+1)a_{k+1}}.$$

Z powyższej nierówności wynika rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na_n}$.

3.2.40. Oczywiście szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ może być rozbieżny (np. jeśli $a_n \leq b_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$). Może on być również zbieżny. Rozpatrzmy szeregi o wyrazach

$$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{7^2}, \frac{1}{8^2}, \frac{1}{9^2}, \ldots$$

oraz

$$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{6^2}, \frac{1}{7^2}, \underbrace{\frac{1}{8^2}, \frac{1}{8^2}, \ldots, \frac{1}{8^2}}_{(8^2+1)\text{ razy}}, \ldots$$

Każdy z tych szeregów zawiera bloki wyrazów, których sumy są większe niż 1. W każdym z nich jest nieskończenie wiele takich bloków i występują one naprzemiennie w tych szeregach. Każdy z szeregów jest więc rozbieżny. Natomiast dla tych szeregów $c_n = \frac{1}{n^2}$, czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest zbieżny.

3.2.41. Zastosujemy kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu. Rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ jest równoważna rozbieżności szeregu o wyrazach

$$b_{2^n} = \min\left\{a_{2^n}, \frac{1}{n\ln 2}\right\}.$$

Z kolei rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2^n}$ jest równoważna rozbieżności szeregu o wyrazach

$$2^n b_{2^{2^n}} = \min\left\{2^n a_{2^{2^n}}, \frac{1}{\ln 2}\right\}.$$

Rozbieżność tego szeregu jest już łatwa do udowodnienia. Istotnie, jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{d_n, c\}$, gdzie $c > 0$, jest również rozbieżny.

Gdyby $\min\{d_n, c\} = c$ dla skończenie wielu n, to rozbieżność tego szeregu wynikałaby z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$. W przeciwnym wypadku rozbieżność jest oczywista.

3.2.42. Mamy

$$1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1}.$$

Stąd i ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$ wynika zbieżność rozpatrywanego szeregu.

3.2.43. Jest

$$1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}}.$$

Niech $b_n = a_{n+1} - a_n$ oraz $S_n = b_1 + \ldots + b_n$. Wtedy $\frac{b_n}{S_n + a_1} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}}$. Zatem rozbieżność badanego szeregu wynika z zadania 3.2.10.

3.2.44. Jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest nieograniczony, to zbieżność rozważanego szeregu wynika z zadania 3.2.11. Dowód jest powtórzeniem rozważań z rozwiązania poprzedniego zadania. Załóżmy więc, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony. Wtedy

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} a_n^{\alpha}} \leq \frac{1}{a_2 a_1^{\alpha}}(a_{n+1} - a_n).$$

Stąd i ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$ wynika zbieżność rozpatrywanego szeregu.

3.2.45. Wystarczy przyjąć np. $c_n = \frac{1}{S_n}$, gdzie S_n jest n-tą sumą częściową szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i skorzystać z zadania 3.2.10.

3.2.46. Można przyjąć np. $c_n = \frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}}$, gdzie $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$, a następnie skorzystać z zadania 3.2.13(b).

3.2.47. Ciąg $\{r_n\}$ jest oczywiście malejący. Zatem, na podstawie zadania 3.2.35, $\lim_{n\to\infty} nr_n = 0$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} n(r_{n-1} - r_n) = \lim_{n\to\infty}((n-1)r_{n-1} - nr_n + r_{n-1}) = 0.$$

3.2.48.

(a) Ponieważ $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, więc $a_n > 2$ dla dostatecznie dużych n. Zbieżność badanego szeregu wynika zatem z nierówności $\frac{1}{a_n^n} < \frac{1}{2^n}$ dla $n > n_0$.

(b) Podobnie jak w części (a) mamy $\frac{1}{a_n^{\ln n}} < \frac{1}{3^{\ln n}}$ dla $n > n_0$. Stąd i z zadania 3.2.17(c) wynika zbieżność rozpatrywanego szeregu.

(c) Szereg ten może być zarówno zbieżny, jak i rozbieżny w zależności od ciągu $\{a_n\}$. Jeśli np. $a_n = \ln n, n \geq 2$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{\ln(\ln n)}}$ jest rozbieżny (patrz zadanie 3.2.2(e)). Jeśli natomiast $a_n = n$, to dla $n > e^e$ mamy

$$\frac{1}{a_n^{\ln(\ln n)}} = \frac{1}{e^{\ln(\ln n)\cdot \ln n}} < \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \text{gdzie} \quad \alpha > 1.$$

Dla tak wybranego ciągu $\{a_n\}$ rozpatrywany szereg jest więc zbieżny.

3.2.49. Szereg ten jest rozbieżny, gdyż nie spełnia warunku koniecznego zbieżności (patrz zadanie 2.5.25).

3.2.50. Załóżmy najpierw, że $p = 0$. Wtedy na podstawie zadania 2.5.22 mamy $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} a_n = \sqrt{3}$. Oznacza to, że w tym przypadku badany szereg jest rozbieżny, gdyż zachowuje się pod względem zbieżności tak, jak szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Załóżmy teraz, że $p > 0$. Wtedy łatwo zauważyć, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Zatem $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} \cdot \frac{1}{n^p} = 0$, czyli na podstawie kryterium d'Alemberta badany szereg jest zbieżny.

3.2.51. Zauważmy, że $a_n \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$. Stąd $\frac{1}{a_n^2} < \frac{1}{n^2\pi^2}$, a więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2}$ jest zbieżny.

3.2.52. Niech $b_n = \sqrt{a_n}$. Wtedy $b_n \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$. Zatem, podobnie jak w poprzednim zadaniu, można pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n^2}$ jest zbieżny. Zbieżność badanego szeregu wynika z równości $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n^2}$.

3.2.53. Szereg jest rozbieżny, gdyż $\lim_{n\to\infty} na_n = 2$ (patrz zadanie 2.5.29).

3.2.54. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$L_n = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}, \quad M_n = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}.$$

Z monotoniczności ciągu $\{a_n\}$ wynika, że

$$(*) \qquad L_n \geq M_n \quad \text{oraz} \quad L_n - a_1 \leq M_n.$$

Stąd $2M_n = M_n + M_n \geq M_n + L_n - a_1 = \sum_{k=2}^{n} a_k$. Zatem

$$(**) \qquad \lim_{n\to\infty} M_n = +\infty.$$

Z nierówności $(*)$ i równości $(**)$ otrzymujemy

$$\frac{L_n}{M_n} - 1 = \frac{L_n - M_n}{M_n} \leq \frac{a_1}{M_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3.2.55. Z definicji k_n otrzymujemy następującą nierówność $0 \leq S_{k_n} - n < \frac{1}{k_n}$. Wiadomo, że $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{k_n} - \ln k_n) = \gamma$, gdzie γ jest stałą Eulera (patrz zadanie 2.1.41). Zatem

$$\lim_{n\to\infty}(n - \ln k_n) = \lim_{n\to\infty}(n + 1 - \ln k_{n+1}) = \gamma.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \ln\frac{k_{n+1}}{k_n}\right) = 0, \quad \text{czyli} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{k_{n+1}}{k_n} = \mathrm{e}.$$

3.2.56. [A.J. Kempner, Amer. Math. Monthly 23 (1914), 48–50].

(a) Każdą k-cyfrową liczbę ze zbioru $\mathbf{A}$ można zapisać w postaci

$$10^{k-1}a_1 + 10^{k-2}a_2 + \ldots + a_k, \quad \text{gdzie} \quad 0 < a_i \leq 9,\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Dla ustalonego k naturalnego, w zbiorze $\mathbf{A}$ istnieje 9^k liczb k-cyfrowych, przy czym każda z nich jest większa niż 10^{k-1}. Zatem

$$\sum_{n\in\mathbf{A}}\frac{1}{n} < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{9^k}{10^{k-1}} = 90.$$

(b) Podobnie jak w części (a) mamy

$$\sum_{n\in\mathbf{A}}\frac{1}{n^\alpha} < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{9^k}{10^{\alpha(k-1)}}.$$

Dlatego jeśli $\alpha > \log_{10} 9$, to szereg $\sum_{n\in\mathbf{A}}\frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny. Ponadto, ponieważ

$$\sum_{n\in\mathbf{A}}\frac{1}{n^\alpha} > \sum_{k=1}^{\infty}\frac{9^k}{(10^k-1)^\alpha} > \sum_{k=1}^{\infty}\frac{9^k}{10^{k\alpha}},$$

więc szereg $\sum_{n\in\mathbf{A}}\frac{1}{n^\alpha}$ jest rozbieżny, jeśli $\alpha \leq \log_{10} 9$.

Uwaga. Niech $\mathbf{A_k}$ oznacza podzbiór liczb naturalnych, które w swoim dziesiętnym rozwinięciu nie zawierają cyfry k. W zupełnie podobny sposób możemy pokazać, że szereg $\sum_{n\in\mathbf{A_k}}\frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny, jeśli $\alpha > \log_{10} 9$.

3.2.57. Niech $-\infty < g < 1$ i niech $\varepsilon > 0$ będzie tak małe, że $g + \varepsilon < 1$. Wtedy dla dostatecznie dużych n, $\ln\frac{1}{a_n} < (g+\varepsilon)\ln n$, czyli $a_n > \frac{1}{n^{g+\varepsilon}}$, co oznacza rozbieżność szeregu. Niech teraz $g = -\infty$. Wtedy (dla dostatecznie dużych n) $\ln\frac{1}{a_n} < -1 \cdot \ln n$, czyli $a_n > n$, a więc szereg jest rozbieżny. Przypadek $g > 1$ dowodzimy analogicznie.

Rozpatrzmy teraz np. szeregi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}, \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. Pierwszy z nich jest rozbieżny, drugi jest zbieżny, a w obu przypadkach granica g równa jest 1.

3.2.58. Równoważność kryteriów została udowodniona w rozwiązaniu zadania 3.2.19. Z zadania 2.5.34 wynika, że jeśli kryterium Raabego rozstrzyga problem zbieżności szeregu, to również rozstrzyga go kryterium podane w poprzednim zadaniu. W celu udowodnienia ostatniej części zadania wystarczy rozpatrzyć szereg o wyrazach a_n określonych następująco: $a_{2n-1} = \frac{1}{n^2}, a_{2n} = \frac{1}{4n^2}$.

3.2.59. Niech $b_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ pierwiastków}}$. Wtedy $b_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ (zadanie 2.5.41). Z określenia ciągu $\{a_n\}$ wynika, że $a_n^2 = 2 - b_{n-1}$, czyli $a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2^n}$, co oznacza zbieżność badanego szeregu.

3.2.60. Załóżmy, że K jest taką liczbą dodatnią, że

$$(a_1 - a_n) + (a_2 - a_n) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) \leq K \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Oznacza to, że

$$a_1 + \ldots + a_n - na_n \leq K \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ustalmy teraz dowolnie $m \in \mathbb{N}$. Z monotoniczności ciągu $\{a_n\}$ oraz jego zbieżności do zera wynika, że istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że

$$(*) \qquad a_n \leq \frac{1}{2}a_m \quad \text{dla} \quad n \geq n_0.$$

Mamy $a_1 + \ldots + a_m - ma_n + a_{m+1} + \ldots + a_n - (n-m)a_n \leq K$.

Wobec monotoniczności ciągu $\{a_n\}$

$$a_{m+1} + \ldots + a_n \geq (n-m)a_n \quad \text{oraz} \quad a_1 + \ldots + a_m \geq ma_m.$$

Zatem $m(a_m - a_n) = ma_m - ma_n \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_m - ma_n \leq K$.

Stąd i z nierówności $(*)$ wynika, że $\frac{1}{2}ma_m \leq m(a_m - a_n) \leq K$. Ostatecznie

$$S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m = S_m - ma_m + ma_m \leq K + ma_m \leq 3K.$$

3.2.61. Mamy

$$a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots, \qquad a_{n+1} = a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots$$

Odejmując stronami, otrzymujemy $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$. Teraz już można łatwo sprawdzić indukcyjnie, że $a_n = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

3.2.62. [19] Niech $r_{n,k} = a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ oraz $\lim\limits_{k\to\infty} r_{n,k} = r_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Załóżmy, że $s \in (0, S)$ oraz, że a_{n_1} jest pierwszym wyrazem ciągu $\{a_n\}$ takim, że $a_{n_1} < s$. Wtedy albo istnieje k_1, dla którego $r_{n_1,k_1} < s \leq r_{n_1,k_1+1}$, albo $r_{n_1} \leq s$. W drugim przypadku mamy

$s \le a_{n_1-1} \le r_{n_1} \le s$, czyli $r_{n_1} = s$. W pierwszym przypadku możemy wybrać najmniejszy wskaźnik n_2, $n_2 > n_1 + k_1$, dla którego $r_{n_1,k_1} + a_{n_2} < s$. Wtedy, podobnie jak poprzednio, albo istnieje takie k_2, że

$$r_{n_1,k_1} + r_{n_2,k_2} < s \le r_{n_1,k_1} + r_{n_2,k_2+1},$$

albo $r_{n_1,k_1} + r_{n_2} = s$. Procedurę tę możemy powtarzać i jeśli zawsze otrzymywalibyśmy pierwszy przypadek, to $s = r_{n_1,k_1} + r_{n_2,k_2} + \ldots$

3.2.63. [19] Przypuśćmy, że tak nie jest, to znaczy, że istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $a_k = 2p + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$, gdzie $p > 0$. Wtedy, na mocy założenia, $a_k - p = p + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, gdzie ε_n równa się albo zero albo jeden. Z monotoniczności ciągu $\{a_n\}$ wynika, że $\varepsilon_n = 0$ dla $n \le k$. Zatem $a_k - p = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \le \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_k - 2p$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód twierdzenia.

3.2.64. Stosując twierdzenie Stolza (zadanie 2.3.11), otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 S_1^{-1} + a_2 S_2^{-1} + \ldots + a_n S_n^{-1}}{\ln S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n S_n^{-1}}{-\ln\left(1 - a_n S_n^{-1}\right)} = 1.$$

Ostatnia równość wynika np. z zadania 2.5.5.

3.2.65. Wystarczy w poprzednim zadaniu przyjąć $a_n = 1$ dla każdego n.

3.2.66. Mamy $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} > \frac{a_1}{n}$. Stąd już wynika rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ dla dowolnego ciągu $\{a_n\}$ o wyrazach dodatnich, niezależnie od tego, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, czy rozbieżny.

3.2.67. Z założenia wynika, że

$$a_2 \le a_1, \qquad \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k \le \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_k.$$

Stąd i z zasady indukcji matematycznej otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{2^n} a_k \le 2\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) a_1.$$

Ponadto

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)} \le \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}} < \mathrm{e}.$$

3.2.68. Niech $c_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} = n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$(*) \qquad c_1 \cdot \ldots \cdot c_n = (n+1)^n \quad \text{oraz} \quad c_n < n\mathrm{e}.$$

Stąd i z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną otrzymujemy

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = \frac{1}{n+1} \sqrt[n]{a_1 c_1 \cdot \ldots \cdot a_n c_n} \le \frac{a_1 c_1 + \ldots + a_n c_n}{n(n+1)}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} &\le \sum_{n=1}^{N} \frac{a_1 c_1 + \ldots + a_n c_n}{n(n+1)} \\
&= a_1 c_1 \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{N(N+1)}\right) \\
&\quad + a_2 c_2 \left(\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{N(N+1)}\right) \\
&\quad + \ldots + a_N c_N \frac{1}{N(N+1)} \\
&< a_1 c_1 + a_2 c_2 \frac{1}{2} + a_3 c_3 \frac{1}{3} + \ldots + a_N c_N \frac{1}{N} \\
&\le 2a_1 + \mathrm{e}a_2 + \ldots + \mathrm{e}a_N,
\end{aligned}$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z zależności $(*)$. Biorąc $N \to \infty$, otrzymujemy żądaną nierówność.

3.2.69. Podobnie jak w poprzednim zadaniu przyjmijmy

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{(n+1)^n \cdot \ldots \cdot (n+k-1)^n (n+k)^n}{n^{n-1} \cdot \ldots \cdot (n+k-2)^{n-1} (n+k-1)^{n-1}} \\
&= \left(\frac{n+k}{n}\right)^n n(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1).
\end{aligned}$$

Wtedy $c_1 \cdot \ldots \cdot c_n = (n+1)^n \cdot \ldots \cdot (n+k)^n$. Stąd

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} &\le \sum_{n=1}^{N} \frac{a_1 c_1 + \ldots + a_n c_n}{n(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k)} \\
&= a_1 c_1 \left(\frac{1}{1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot (1+k)} + \ldots + \frac{1}{N(N+1) \cdot \ldots \cdot (N+k)}\right) \\
&\quad + a_2 c_2 \left(\frac{1}{2\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2+k)} + \ldots + \frac{1}{N(N+1) \cdot \ldots \cdot (N+k)}\right) \\
&\quad + \ldots + a_N c_N \frac{1}{N(N+1) \cdot \ldots \cdot (N+k)} \\
&< \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k!} a_1 c_1 + \frac{1}{2\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (1+k)} a_2 c_2 \right. \\
&\quad \left. + \ldots + \frac{1}{N(N+1) \cdot \ldots \cdot (N+k-1)} a_N c_N\right),
\end{aligned}$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z zadania 3.1.4(a). Ponieważ

$$\frac{1}{l(l+1)\cdot\ldots\cdot(l+k-1)}c_l = \left(\frac{l+k}{l}\right)^l,$$

więc biorąc $N \to \infty$, otrzymujemy żądaną nierówność.

3.2.70. Niech $T_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ i niech S_n oznacza n-tą sumę częściową badanego szeregu. Wtedy

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2(T_n - T_{n-1})}{T_n^2} \le \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2(T_n - T_{n-1})}{T_n T_{n-1}} \\ &= \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2}{T_{n-1}} - \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2}{T_n} = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(n+1)^2}{T_n} - \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2}{T_n} \\ &\le \frac{5}{a_1} + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{2n}{T_n} + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{T_n} \le \frac{5}{a_1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2n}{T_n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{T_n}. \end{aligned}$$

Ponadto z nierówności Cauchy'ego (zadanie 1.2.12)

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{T_n}\right)^2 \le \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2 a_n}{T_n^2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n} \le S_N \cdot M,$$

gdzie $M = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$. Stąd

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{T_n} \le \sqrt{S_N} \cdot \sqrt{M}.$$

Z powyższych rozważań wynika więc, że $S_N \le \frac{5}{a_1} + 2\sqrt{S_N}\sqrt{M} + M$, skąd, jak łatwo sprawdzić, otrzymujemy

$$S_N \le \left(\sqrt{M} + \sqrt{2M + \frac{5}{a_1}}\right)^2.$$

3.2.71. Z zależności między średnią arytmetyczną i średnią harmoniczną (zadanie 1.2.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{na_n - (n-1)a_{n-1}}}{2^{k-1}} &\ge \frac{2^{k-1}}{\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} (na_n - (n-1)a_{n-1})} \\ &= \frac{2^{k-1}}{2^k a_{2^k} - 2^{k-1} a_{2^{k-1}}} \ge \frac{1}{2a_{2^k}}. \end{aligned}$$

Stąd

$$\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{na_n - (n-1)a_{n-1}} \ge \frac{2^k}{4a_{2^k}}.$$

Zatem

$$S_{2^k} \ge \sum_{l=1}^{k} \frac{2^l}{4a_{2^l}}.$$

Stąd i z kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu (zadanie 3.2.28) wynika rozbieżność badanego szeregu.

3.2.72. Pokażemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ jest rozbieżny. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy istniałoby takie n, że $\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{p_m} < \frac{1}{2}$.

Niech $a = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$. Wtedy liczba $1 + ka$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, w rozkładzie na czynniki pierwsze nie zawierałaby żadnej z liczb $p_1, \ldots, p_n$. Zatem byłoby

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+ka} < \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{p_m}\right)^l < \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l = 1,$$

co dawałoby sprzeczność, gdyż szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+ka}$ jest rozbieżny.

3.2.73. Wystarczy skorzystać z poprzedniego zadania i zadania 3.2.71.

3.2.74. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}}}{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{2^{n+1}}{4^{n+1}} + \ldots\right)}{\frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{2^n}{3^n} + \frac{2^n}{4^n} + \ldots\right)} = \frac{1}{2},$$

gdyż wyrażenia w nawiasach dążą do 1, gdy n dąży do nieskończoności. Istotnie

$$\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{2^{n+1}}{4^{n+1}} + \ldots = 2^{n+1} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}}.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}} &= \frac{1}{3^{n+1}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)^{n+1}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{n+1}} \\ &\le \frac{1}{3^{n+1}} + 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)^{n+1}} = \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2^n} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}}. \end{aligned}$$

Stąd

$$2^{n+1} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}} \le \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{2^n}}{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)},$$

co już oznacza, że

$$2^{n+1} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

3.2.75. Załóżmy najpierw, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Wtedy zbieżność badanego szeregu wynika z nierówności $\frac{1}{T_n^\alpha} \le \frac{1}{a_1^\alpha}$. Jeśli natomiast szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to można wybrać ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych $\{n_m\}$ taki, że $S_{n_m-1} \le m < S_{n_m}$, $m \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$T_{n_m} = S_1 + \ldots + S_{n_m} \ge S_{n_1} + \ldots + S_{n_m} > \frac{m(m+1)}{2}.$$

Stąd

$$\sum_{n=n_2}^{\infty} \frac{a_n}{T_n^\alpha} = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=n_m}^{m_{m+1}-1} \frac{a_k}{T_k^\alpha} \le \sum_{m=2}^{\infty} \frac{S_{n_{m+1}-1} - S_{n_m-1}}{T_{n_m}^\alpha}$$

$$< \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{T_{n_m}^\alpha} < \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2+m}{2}\right)^\alpha}.$$

Zatem badany szereg jest zbieżny dla $\alpha > \frac{1}{2}$. Ciąg o wyrazach stale równych 1 jest przykładem na to, że badany szereg może być rozbieżny dla $\alpha \le \frac{1}{2}$.

3.2.76. Z zadania 3.2.35 wynika, że $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} = 0$. Zatem dla dowolnie ustalonego K, $0 < K < 1$ istnieje n_0 takie, że $n \le Ka_n$ dla $n \ge n_0$. Stąd

$$\frac{\ln^k a_n}{a_n} \ge \frac{\ln^k\left(\frac{1}{K}\right)}{a_n} + \frac{\ln^k n}{a_n}.$$

Oznacza to, że ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k a_n}{a_n}$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k n}{a_n}$. W celu udowodnienia implikacji odwrotnej rozpatrzmy dwa zbiory wskaźników:

$$\mathbf{I}_1 = \{n \in \mathbb{N} : a_n \le n^{k+2}\} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{I}_2 = \mathbb{N}\backslash\mathbf{I}_1.$$

Wtedy dla $n \in \mathbf{I}_1$ mamy $\ln a_n \le (k+2)\ln n$, a więc zbieżność szeregu $\sum_{n\in\mathbf{I}_1} \frac{\ln^k n}{a_n}$ implikuje zbieżność szeregu $\sum_{n\in\mathbf{I}_1} \frac{\ln^k a_n}{a_n}$. Natomiast dla dostatecznie dużych n ze zbioru $\mathbf{I}_2$ mamy

$$\frac{\ln^k a_n}{a_n} < \frac{a_n^{\frac{k}{k+1}}}{a_n} < \frac{1}{n^{\frac{k+2}{k+1}}}.$$

Ponieważ $\frac{k+2}{k+1} > 1$, więc $\sum_{n\in\mathbf{I}_2} \frac{\ln^k a_n}{a_n} < \infty$.

3.2.77. Mamy

$$\sum_{k=1}^{\varphi(n)-1} f(k) = \sum_{k=1}^{\varphi(1)-1} f(k) + (f(\varphi(1)) + f(\varphi(1)+1) + \ldots + f(\varphi(2)-1))$$

$$+ \ldots + (f(\varphi(n-1)) + f(\varphi(n-1)+1) + \ldots + f(\varphi(n)-1))$$

$$< \sum_{k=1}^{\varphi(1)-1} f(k) + \sum_{k=1}^{n-1} f(\varphi(k))(\varphi(k+1) - \varphi(k)).$$

W ten sposób udowodniliśmy nierówności (1). Nierówność (2) można udowodnić w analogiczny sposób.

3.2.78. Załóżmy najpierw, że

$$\frac{f(\varphi(n))(\varphi(n+1) - \varphi(n))}{f(n)} \le q < 1.$$

Wtedy z nierówności (1) z poprzedniego zadania otrzymujemy

$$S_{\varphi(n)-1} < \sum_{k=1}^{\varphi(1)-1} f(k) + qS_{n-1}.$$

Stąd i z założenia, że $\varphi(n) > n$ otrzymujemy $(1-q)S_{n-1} < \sum_{k=1}^{\varphi(1)-1} f(k)$, co dowodzi zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. W celu udowodnienia drugiej części zadania wystarczy skorzystać z nierówności (2) z poprzedniego zadania.

3.2.79. Wystarczy w poprzednim zadaniu przyjąć $\varphi(n) = 2n$.

3.2.80. W zadaniu 3.2.78 kładziemy $\varphi(n) = 2^n$.

3.2.81. Przyjmujemy odpowiednio

$$\varphi(n) = 3^n, \quad \varphi(n) = n^2, \quad \varphi(n) = n^3.$$

3.2.82.

(1) Mamy $a_nb_n - a_{n+1}b_{n+1} \ge ca_{n+1}$. Oznacza to, że $\{a_nb_n\}$ jest malejącym ciągiem o wyrazach dodatnich, a więc jest zbieżny. Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(a_nb_n - a_{n+1}b_{n+1})$ jest zbieżny. Stąd i z kryterium porównawczego wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(2) Mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{\frac{1}{b_{n+1}}}{\frac{1}{b_n}}.$$

Stąd i z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ oraz z zadania 3.2.3 wynika rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.2.83. W celu wyprowadzenia kryterium d'Alemberta wystarczy przyjąć $b_n = 1$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Przyjmując $b_n = n$ dla $n = 1, 2, \ldots$, otrzymujemy kryterium Raabego. Kładąc $b_n = n \ln n$ dla $n = 2, 3, \ldots$, otrzymujemy kryterium Bertranda.

3.2.84. [J. Tong, Amer. Math. Monthly, 101 (1994), 450–452].
(1) Niech $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Przyjmijmy

$$b_n = \frac{S - \sum_{k=1}^{n} a_k}{a_n} = \frac{r_n}{a_n}.$$

Oczywiście $b_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ponadto

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{r_n}{a_{n+1}} - \frac{r_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1.$$

(2) W tym przypadku przyjmijmy

$$b_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{a_n} = \frac{S_n}{a_n}.$$

Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ jest rozbieżny (patrz zadanie 3.2.10). Ponadto

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{S_n}{a_{n+1}} - \frac{S_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{-a_{n+1}}{a_{n+1}} = -1.$$

3.2.85. Z założeń wynika, że istnieje taka liczba dodatnia K, że

$$\varphi_n \leq K \frac{1}{\ln n}, \quad n \geq 2.$$

Określmy dwa zbiory liczb naturalnych $\mathbb{N}_1$ i $\mathbb{N}_2$ w następujący sposób

$$\mathbb{N}_1 = \{n : a_n \leq \frac{1}{n^2}\} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{N}_2 = \mathbb{N} \backslash \mathbb{N}_1.$$

Dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}_1$ mamy

$$(1) \qquad a_n^{1-\varphi_n} \leq a_n^{1-\frac{K}{\ln n}} = a_n^{\frac{\ln \frac{n}{eK}}{\ln n}} = \left(\frac{eK}{n}\right)^{\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n}} \leq \frac{e^{2K}}{n^2}.$$

Natomiast dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}_2$ jest

$$(2) \qquad \frac{a_n^{1-\varphi_n}}{a_n} \leq a_n^{-\frac{K}{\ln n}} = \left(\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{K}{\ln n}} \leq n^{\frac{2K}{\ln n}} = e^{2K}.$$

Z (1), (2) i ze zbieżności szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ wynika, że

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_1} a_n^{1-\varphi_n} < +\infty \quad \text{oraz} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}_2} a_n^{1-\varphi_n} < +\infty.$$

3.3 KRYTERIUM CAŁKOWE ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW

3.3.1. Dla $k - 1 \leq x \leq k$, $k \geq 2$, mamy $f(x) \geq f(k)$, a dla $k \leq x \leq k + 1$ mamy $f(x) \leq f(k)$. Zatem

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Sumując stronami powyższe nierówności, otrzymujemy

$$\int_2^{n+1} f(x)dx \leq f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \leq \int_1^n f(x)dx,$$

co kończy dowód kryterium całkowego.

3.3.2. Zauważmy, że funkcja $\frac{f'}{f}$ jest funkcją dodatnią i malejącą. Zatem na podstawie kryterium całkowego zbieżność rozpatrywanych szeregów jest równoważna ograniczoności ciągów całek $\left\{\int_1^n f'(x)dx\right\}, \left\{\int_1^n \frac{f'(x)}{f(x)}dx\right\}$. Ponieważ

$$\int_1^n f'(x)dx = f(n) - f(1), \quad \int_1^n \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln f(n) - \ln f(1),$$

więc oba ciągi są jednocześnie ograniczone bądź nieograniczone.

3.3.3. Mamy

$$S_N - I_N - (S_{N+1} - I_{N+1}) = \int_N^{N+1} f(x)dx - f(N+1) \geq 0.$$

Ponadto $f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leq f(n-1), n = 2, 3, \ldots, N$. Sumując te nierówności stronami, otrzymujemy $S_N - f(1) \leq I_N \leq S_N - f(N)$. Stąd $0 < f(N) \leq S_N - I_N \leq f(1)$, co kończy dowód.

3.3.4. Zbieżność rozpatrywanych ciągów wynika z poprzedniego zadania. Należy jeszcze pokazać, że granice tych ciągów leżą w przedziale otwartym $(0, 1)$.
(a) Ponieważ funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ściśle malejąca w przedziale $(0, \infty)$, więc $S_N - I_N < S_2 - I_2 < f(1) = 1$, $N > 2$ oraz

$$f(2)+f(3)+\ldots+f(N-1)+f(N) > f(2)+f(3)+\ldots+f(N-1) > \int_2^N f(x)dx,$$

co oznacza, że $S_N - f(1) > I_N - I_2$. Ostatecznie

$$0 < 1 - I_2 \leq \lim_{N \to \infty} (S_N - I_N) \leq S_2 - I_2 < 1.$$

(Porównaj także zadania 2.1.41(a), 3.1.36).
(b) Dowód analogiczny do dowodu części (a).

3.3.5.

(a) Zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ jest równoważna ograniczoności ciągu całek $\int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}} dx$. Dla $\alpha \neq 1$ mamy

$$\int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}} dx = \frac{(\ln n)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{(\ln 2)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}.$$

Zatem badany szereg jest zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny dla $0 < \alpha < 1$. (Łatwo można pokazać, że dla $\alpha \leq 0$ szereg jest rozbieżny).

Dla $\alpha = 1$ mamy $\int_2^n \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$, a więc ciąg całek jest nieograniczony, czyli szereg jest rozbieżny.

(b) W tym przypadku

$$\int_3^n \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx = \ln(\ln(\ln n)) - \ln(\ln(\ln 3)).$$

Na podstawie kryterium całkowego rozpatrywany szereg jest rozbieżny.

3.3.6.

(a) Mamy

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_{n+1}}{S_n \ln S_n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n \ln S_n} \geq \sum_{n=1}^{N} \int_{S_n}^{S_{n+1}} \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$= \ln \ln S_{N+1} - \ln \ln S_1 \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \infty.$$

(b) Podobnie jak w części (a) mamy

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{a_n}{S_n \ln^2 S_n} = \sum_{n=2}^{N} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n \ln^2 S_n} \leq \sum_{n=2}^{N} \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$$

$$= -\frac{1}{\ln S_N} + \frac{1}{\ln S_1} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ln S_1}.$$

3.3.7. Załóżmy, że dla $x > x_0$ spełniona jest nierówność

$$\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} \leq q < 1.$$

Wtedy $\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} \varphi'(t) f(\varphi(t))dt \leq q \int_{x_0}^{x} f(t)dt$. Stąd

$$(1-q) \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)dt \leq q \left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)dt \right)$$

$$= q \left(\int_{x_0}^{\varphi(x_0)} f(t)dt - \int_{x}^{\varphi(x)} f(t)dt \right) \leq q \int_{x_0}^{\varphi(x_0)} f(t)dt.$$

Zatem na mocy kryterium całkowego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny.

Załóżmy teraz, że dla $x > x_0$ spełniona jest nierówność $\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} \geq 1$.

Wtedy podobnie jak powyżej otrzymujemy $\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)dt \geq \int_{x_0}^{x} f(t)dt$. Stąd $\int_{x}^{\varphi(x)} f(t)dt \geq \int_{x_0}^{\varphi(x_0)} f(t)dt$. Ponadto ponieważ dla każdego n istnieje takie $k_n \in \mathbb{N}$, że $n < \varphi(n) < n + k_n$, więc

$$I_{n+k_n} - I_n = \int_n^{n+k_n} f(t)dt \geq \int_n^{\varphi(n)} f(t)dt \geq \int_{x_0}^{\varphi(x_0)} f(t)dt.$$

Zatem ciąg $\{I_n\}$ określony w zadaniu 3.3.1 nie spełnia warunku Cauchy'ego zbieżności, a więc nie jest ograniczony, co oznacza rozbieżność badanego szeregu.

3.3.8.

(a) Jeśli $\lim_{x \to \infty} \left(-g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) \right) > 0$, to istnieją takie x_0 oraz $\delta > 0$, że

$$-g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) \geq \delta \quad \text{dla} \quad x \geq x_0.$$

Stąd $-(g(x)f(x))' \geq \delta f(x), x \geq x_0$. Zatem, dla dostatecznie dużych n, otrzymujemy

$$\int_{x_0}^{n} f(x)dx \leq \frac{1}{\delta} \int_{x_0}^{n} -(f(x)g(x))'dx = \frac{1}{\delta}(g(x_0)f(x_0) - g(n)f(n)) \leq \frac{1}{\delta} g(x_0)f(x_0).$$

A więc, na podstawie zadania 3.3.1, badany szereg jest zbieżny.

(b) Podobnie jak w części (a) otrzymujemy $-(g(x)f(x))' \leq 0$ dla $x \geq x_0$. Zatem funkcja gf jest rosnąca w $[x_0, \infty)$, czyli $g(x)f(x) \geq g(x_0)f(x_0)$, $x \geq x_0$. Stąd $f(x) \geq \frac{f(x_0)g(x_0)}{g(x)}$, czyli z nieograniczoności ciągu o wyrazach $\int_1^n \frac{1}{g(x)} dx$ wynika nieograniczoność ciągu całek $\int_1^n f(x)dx$.

3.3.9. Wystarczy w poprzednim zadaniu przyjąć $g(x) = x$.

3.3.10. Wystarczy w zadaniu 3.3.8 przyjąć $g(x) = x \ln x$.

3.3.11.

(a) Przyjmijmy

$$g(x) = \frac{\int_x^{\infty} f(t)dt}{f(x)}.$$

Wtedy $-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) = 1 > 0$.

(b) Niech

$$g(x) = \frac{\int_x^{\infty} f(t)dt}{1/2 \, f(x)}.$$

Wtedy $\int_1^n \frac{1}{g(x)}dx = \ln\int_{1/2}^n f(t)dt - \ln\int_{1/2}^1 f(t)dt$, czyli powyższy ciąg całek jest nieograniczony. Ponadto

$$-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) = -1 < 0.$$

3.3.12. Do zbadania zbieżności tego szeregu zastosujemy kryterium podane w zadaniu 3.3.9. Biorąc $f(x) = (\ln x)^{-(\ln x)^\gamma}$, $x > 1$, otrzymujemy

$$-x\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln x)^{\gamma-1}(\gamma\ln(\ln x) + 1).$$

Jeśli $\gamma \geq 1$, to $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\gamma-1}(\gamma\ln(\ln x)+1) = +\infty$, czyli badany szereg jest zbieżny. Jeśli natomiast $0 \leq \gamma < 1$, to $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\gamma-1}(\gamma\ln(\ln x)+1) = 0$, czyli szereg ten jest rozbieżny.

3.3.13. Niech

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+\frac{1}{\ln(\ln x)}}\ln x}, \qquad x > \mathrm{e}.$$

Można sprawdzić, że wtedy $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-x\frac{f'(x)}{f(x)}\right) = 1$, a więc nie można zastosować zadania 3.3.9. Zastosujemy więc kryterium z zadania 3.3.10. Dla dostatecznie dużych x mamy

$$\left(-\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x}\right)x\ln x = \frac{\ln x}{\ln(\ln x)} - \frac{\ln x}{(\ln(\ln x))^2} + 1 > 2,$$

gdyż $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{\ln(\ln x)} - \frac{\ln x}{(\ln(\ln x))^2}\right) = +\infty$.

3.3.14. Mamy $(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\frac{1}{\lambda_{n+1}f(\lambda_{n+1})} \leq \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}}\frac{1}{tf(t)}dt$. Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\frac{1}{f(\lambda_{n+1})} \leq \int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{1}{tf(t)}dt < \infty.$$

Wykazaliśmy zatem zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\frac{1}{f(\lambda_{n+1})}$. Niech $\{S_n\}$ oznacza ciąg sum częściowych szeregu podanego w zadaniu, a $\{S'_n\}$ ciąg sum częściowych powyższego szeregu. Wtedy

$$S_N - S'_N = \sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\left(\frac{1}{f(\lambda_n)} - \frac{1}{f(\lambda_{n+1})}\right)$$
$$< \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{f(\lambda_n)} - \frac{1}{f(\lambda_{n+1})}\right) < \frac{1}{f(\lambda_1)}.$$

Stąd już wynika zbieżność badanego szeregu.

3.3.15. Z monotoniczności funkcji f wynika, że

$$(*) \qquad f(\lambda_{n+1})(\lambda_{n+1}-\lambda_n) \leq \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(t)dt \leq f(\lambda_n)(\lambda_{n+1}-\lambda_n).$$

(a) Z lewej strony nierówności $(*)$ i z założeń zadania otrzymujemy

$$M\sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_{n+1}) \leq \int_{\lambda_1}^{\infty} f(t)dt < \infty.$$

(b) Z prawej strony tej nierówności i z założeń zadania wynika natomiast rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)$.

3.3.16. Załóżmy najpierw, że zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$. Na podstawie kryterium całkowego, zbieżna jest wtedy całka niewłaściwa $\int_1^{\infty}\frac{1}{f(t)}dt$. Stosując metodę całkowania przez części, a następnie przez podstawienie, otrzymujemy

$$(*) \qquad \int_1^{\infty}\frac{1}{f(t)}dt = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{f(t)} - \frac{1}{f(1)} + \int_1^{\infty}\frac{tf'(t)}{f^2(t)}dt$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{t}{f(t)} - \frac{1}{f(1)} + \int_{f(1)}^{\infty}\frac{f^{-1}(t)}{t^2}dt.$$

Wykażemy teraz, że

$$(**) \qquad \lim_{t\to\infty}\frac{t}{f(t)} = 0.$$

Ze zbieżności całki niewłaściwej wynika, że $\lim\limits_{t\to\infty}\int_t^{2t}\frac{1}{f(x)}dx = 0$. Ponieważ $\frac{1}{2}\frac{2t}{f(2t)} = \frac{1}{f(2t)}\int_t^{2t}dx < \int_t^{2t}\frac{1}{f(x)}dx$, więc prawdziwa jest równość $(**)$. Dowiedliśmy w ten sposób zbieżności całki $\int_1^{\infty}\frac{f^{-1}(t)}{t^2}dt$.

Ponadto mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{-1}(n)}{(n+1)^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{f^{-1}(t)}{t^2}dt = \int_1^{\infty}\frac{f^{-1}(t)}{t^2}dt < \infty,$$

co oznacza, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{-1}(n)}{(n+1)^2}$ jest zbieżny, co z kolei jest równoważne zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{-1}(n)}{n^2}$.

Załóżmy teraz, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ jest zbieżny. Podobnie jak powyżej, można pokazać, że zbieżna jest wtedy całka $\int_{f(1)}^{\infty}\frac{f^{-1}(t)}{t^2}dt$ i dalej naśladując powyższe rozumowania można wykazać zbieżność całki $\int_1^{\infty}\frac{1}{f(t)}dt$, co na podstawie kryterium całkowego oznacza zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$.

3.3.17. Zauważmy najpierw, że funkcję φ możemy określić na całym przedziale $[\mathrm{e},\infty)$. Przyjmujemy $\varphi(x)=1$ dla $x\in[\mathrm{e},\mathrm{e}^{\mathrm{e}})$, $\varphi(x)=2$ dla $x\in[\mathrm{e}^{\mathrm{e}},\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}})$. W celu uproszczenia zapisu wprowadźmy następujące oznaczenia $\hat{\mathrm{e}}^1=\mathrm{e}$ oraz $\hat{\mathrm{e}}^k=\mathrm{e}^{\hat{\mathrm{e}}^{k-1}}$ dla $k>1$. Wtedy

$$\varphi(x)=k \quad \text{dla} \quad x\in[\hat{\mathrm{e}}^k,\hat{\mathrm{e}}^{k+1}).$$

Niech

$$f(x)=\frac{1}{x(\ln_1 x)(\ln_2 x)\cdot\ldots\cdot(\ln_{\varphi(x)} x)}.$$

Stąd

$$f(x)=\frac{1}{x(\ln_1 x)(\ln_2 x)\cdot\ldots\cdot(\ln_k x)} \quad \text{dla} \quad x\in[\hat{\mathrm{e}}^k,\hat{\mathrm{e}}^{k+1}).$$

Stosując kryterium całkowe, pokazujemy, że badany szereg jest rozbieżny. Istotnie, dla $n>\hat{\mathrm{e}}^k$ mamy

$$I_n=\int_{\mathrm{e}}^{n} f(x)dx \geq \int_{\mathrm{e}}^{\hat{\mathrm{e}}^k} f(x)dx=\int_{\mathrm{e}}^{\hat{\mathrm{e}}^2}\frac{1}{x\ln x}dx+\int_{\hat{\mathrm{e}}^2}^{\hat{\mathrm{e}}^3}\frac{1}{x(\ln x)(\ln_2 x)}dx$$
$$+\ldots+\int_{\hat{\mathrm{e}}^{k-1}}^{\hat{\mathrm{e}}^k}\frac{1}{x(\ln x)(\ln_2 x)\cdot\ldots\cdot(\ln_{k-1} x)}dx=k-1.$$

3.4. SZEREGI O WYRAZACH DOWOLNYCH – ZBIEŻNOŚĆ, ZBIEŻNOŚĆ BEZWZGLĘDNA TWIERDZENIE LEIBNIZA

3.4.1.

(a) Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{an}{n+1}\right|^n}=|a|.$$

Zatem badany szereg jest zbieżny bezwzględnie dla $|a|<1$ i rozbieżny dla $|a|>1$. Jeśli $|a|=1$, to

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{an}{n+1}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

a więc szereg jest rozbieżny.

(b) Rozpatrzmy funkcję określoną wzorem $f(x)=\frac{(\ln x)^a}{x}$, $x>0$. Mamy $f'(x)=\frac{(\ln x)^{a-1}(a-\ln x)}{x^2}<0$ dla $x>\max\{1,\mathrm{e}^a\}$. Zatem na podstawie kryterium Leibniza szereg jest zbieżny dla każdego $a\in\mathbb{R}$.

Zbadamy teraz zbieżność bezwzględną tego szeregu, tzn. zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^a}{n}$. Na podstawie kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu (zadanie 3.2.28) zbieżność tego szeregu jest równoważna zbieżności szeregu o wyrazach $n^a(\ln 2)^a$. Zatem szereg ten jest zbieżny bezwzględnie dla $a<-1$.

(c) Jeśli $a>0$, to szereg jest zbieżny na podstawie kryterium Leibniza. Jeśli $a<0$, to

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{a}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{|a|}{n}.$$

Stosując ponownie kryterium Leibniza, otrzymujemy zbieżność badanego szeregu dla wszystkich $a\in\mathbb{R}$. Szereg ten nie jest zbieżny bezwzględnie dla $a\neq 0$, gdyż

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{|a|}{n}}{\frac{1}{n}}=|a|.$$

(d) Szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $-1\leq\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}<1$, czyli dla $a\in[-4,\frac{4}{5})\cup[3,\infty)$. Jest on oczywiście zbieżny bezwzględnie dla $a\in(-4,\frac{4}{5})\cup(3,\infty)$.

(e)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n^n}{a^{n^2}}\right|}=0 \quad \text{dla} \quad |a|>1.$$

Zatem szereg jest zbieżny bezwzględnie dla $|a|>1$.
Jeśli $|a|\leq 1$, to nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu, gdyż $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{|a|^{n^2}}=+\infty$.

(f) Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^a}=\lim_{n\to\infty}n^{\ln\ln n-a}=+\infty,$$

a więc nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności.

3.4.2. Jeśli $|a|<1$, to dla dostatecznie dużych n prawdziwa jest nierówność

$$\left|\frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}\right|<|a|^{n-1}.$$

Zatem szereg jest zbieżny bezwzględnie. Jeśli $|a|\geq 1$, to

$$\frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{\ln n}{na^{n-1}}}\right),$$

a więc dla dostatecznie dużych n wyrazy tego szeregu są dodatnie i szereg ten pod względem zbieżności zachowuje się tak jak szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

3.4.3. Załóżmy najpierw, że $a_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Stosując metody rachunku różniczkowego, można łatwo wykazać, że prawdziwa jest nierówność $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ dla $x > 0$. Stąd $1 - \frac{\sin a_n}{a_n} < \frac{1}{6}a_n^2$. Ponieważ $a_n^2 < a_n$ dla dostatecznie dużych n, więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny, co implikuje już zbieżność badanego szeregu. Bez założenia $a_n > 0$ badany szereg może być zarówno zbieżny, jak i rozbieżny. Niech np. $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 0$. Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin a_n}{a_n}\right)$ jest rozbieżny dla $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ i zbieżny dla $\alpha > \frac{1}{2}$.

3.4.4. Nie. Wystarczy rozpatrzyć następujący przykład:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n \ln n}, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \geq 2.$$

3.4.5. Zauważmy, że wyrazami szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$, $(\sum_{n=1}^{\infty} q_n)$ są wyrazy dodatnie (przeciwne do ujemnych) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, bądź zera. Oba te szeregi są rozbieżne, gdyż $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem zbieżnym, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest rozbieżny.

3.4.6. Niech $S_n = a_1 + \ldots + a_n$. Wtedy na podstawie poprzedniego zadania otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \lim_{n\to\infty} \left(-1 + \frac{S_n}{Q_n}\right) = -1.$$

3.4.7. Szereg nie jest zbieżny bezwzględnie. Zbadamy jego zbieżność. W tym celu grupujemy wyrazy tego samego znaku i otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\frac{n}{3}]}}{n} = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2}\right).$$

Stąd i z twierdzenia Leibniza wynika już zbieżność badanego szeregu.

3.4.8. Oczywiście szereg jest zbieżny bezwzględnie dla $a > 1$ i jest rozbieżny dla $a \leq 0$. Dla $0 < a \leq 1$ nie jest on zbieżny bezwzględnie. Zbadajmy więc jego zbieżność dla takich a. Zauważmy, że pierwsze trzy wyrazy naszego szeregu są ujemne, następnych pięć jest dodatnich itd. Grupując wyrazy tego samego znaku, otrzymujemy szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n$, gdzie $A_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k^a}$. Mamy

$$A_n < \frac{1}{n^{2a}} + \int_{n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{t^a} dt = \frac{1}{n^{2a}} + \frac{1}{1-a}((n+1)^{2-2a} - n^{2-2a}).$$

Stąd i z zadania 2.2.3 wynika, że $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$ dla $\frac{1}{2} < a < 1$.

Dla $a = 1$ mamy $\frac{2}{n+1} < A_n < \frac{2n+1}{n^2}$, czyli $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$ dla $\frac{1}{2} < a \leq 1$.

Pokażemy, że dla takich a ciąg $\{A_n\}$ jest malejący. Istotnie

$$\begin{aligned}
A_n - A_{n+1} &= \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k^a} - \sum_{k=(n+1)^2}^{(n+2)^2-1} \frac{1}{k^a} = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k^a} - \sum_{k'=n^2}^{(n+1)^2+1} \frac{1}{(k'+2n+1)^a} \\
&= \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \left(\frac{1}{k^a} - \frac{1}{(k+2n+1)^a}\right) - \frac{1}{((n+2)^2-2)^a} - \frac{1}{((n+2)^2-1)^a} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{1}{(n^2+k)^a} - \frac{1}{((n+1)^2+k)^a}\right) - \frac{1}{((n+2)^2-2)^a} - \frac{1}{((n+2)^2-1)^a} \\
&> (2n+1)\left(\frac{1}{(n^2+2n)^a} - \frac{1}{((n+1)^2+2n)^a}\right) \\
&\quad - \frac{1}{((n+2)^2-2)^a} - \frac{1}{((n+2)^2-1)^a}.
\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność wynika z faktu, że funkcja

$$g(x) = \frac{1}{(n^2+x)^a} - \frac{1}{((n+1)^2+x)^a}$$

jest malejąca w przedziale $[0, 2n]$. Stąd, dla dostatecznie dużych n,

$$\begin{aligned}
A_n - A_{n+1} &> (2n+1)\left(\frac{1}{(n^2+2n)^a} - \frac{1}{((n+1)^2+2n)^a}\right) - \frac{2}{(n+1)^{2a}} \\
&= 2\frac{1}{n^{2a}}\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-a} - \left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{-a}\right) - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2a}\right\} \\
&\geq n^{-2a}(2a-1) > 0,
\end{aligned}$$

gdyż $(1+x)^{-a} > 1 - ax$ oraz $(1+x)^{-a} < 1 - ax + \frac{a(a+1)}{2}x^2$ dla $a, x > 0$. Dwie ostatnie nierówności można udowodnić, stosując metody rachunku różniczkowego. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n$ jest więc zbieżny, na podstawie kryterium Leibniza, dla $\frac{1}{2} < a \leq 1$. Dla $0 < a \leq \frac{1}{2}$ mamy

$$A_n > (2n+1)\frac{1}{(n^2+2n)^a}.$$

Oznacza to, że nie jest w tym przypadku spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n$.

3.4.9. Podobnie jak w zadaniach 3.4.7 i 3.4.8, grupując wyrazy o tym samym znaku, badany szereg zapisujemy w postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{[e^{n-1}]+1} + \ldots + \frac{1}{[e^n]}\right).$$

Zauważmy teraz, że

$$\frac{1}{[e^{n-1}]+1}+\ldots+\frac{1}{[e^n]}>\frac{[e^n]-[e^{n-1}]}{[e^n]}=1-\frac{[e^{n-1}]}{[e^n]}.$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{[e^{n-1}]}{[e^n]}\right)=1-\frac{1}{e},$$

więc rozpatrywany szereg nie spełnia warunku koniecznego zbieżności i tym samym jest rozbieżny.

3.4.10.

(a) Zauważmy, że szereg ten można zapisać w postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A_n,\quad \text{gdzie}\quad A_n=\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k}.$$

Ponieważ $A_n>2^n\frac{1}{2^{n+1}-1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}$, więc badany szereg nie spełnia warunku koniecznego zbieżności.

(b) Podobnie jak w części (a) badany szereg można zapisać w postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n,\quad \text{gdzie}\quad A_n=\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k\ln k}.$$

Mamy

$$0<A_n<2^n\frac{1}{2^n\ln 2^n}.$$

Zatem $\lim_{n\to\infty}A_n=0$. Pokażemy teraz, że ciąg $\{A_n\}$ jest malejący. Istotnie

$$\begin{aligned}A_{n+1}&=\sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+2}-1}\frac{1}{k\ln k}=\sum_{l=0}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{(2^{n+1}+l)\ln(2^{n+1}+l)}\\&=\sum_{l=0}^{2^n-1}\left(\frac{1}{(2^{n+1}+2l)\ln(2^{n+1}+2l)}+\frac{1}{(2^{n+1}+2l+1)\ln(2^{n+1}+2l+1)}\right)\\&<\sum_{l=0}^{2^n-1}\frac{2}{(2^{n+1}+2l)\ln(2^{n+1}+2l)}<\sum_{l=0}^{2^n-1}\frac{1}{(2^n+l)\ln(2^n+l)}=A_n.\end{aligned}$$

3.4.11. Mamy

$$\begin{aligned}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{(-1)^n+\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}&=(-1)^n\left(1-\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}\right)\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\\&=(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n}}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Szeregi

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}},\qquad\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

są zbieżne na podstawie kryterium Leibniza. Natomiast szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

jest rozbieżny, a więc rozpatrywany szereg jest też rozbieżny.

3.4.12.

(a) Szereg ten jest zbieżny bezwzględnie (patrz zadanie 3.2.1(f)).

(b) Zbieżność tego szeregu wynika z kryterium Leibniza. Nie jest on zbieżny bezwzględnie (patrz zadanie 3.2.1(g)).

(c) Łatwo sprawdzić, że ciąg $\{\sqrt[n]{n}\}$, $n\geq 3$ jest malejący, a więc badany szereg jest zbieżny. Nie jest on zbieżny bezwzględnie (zadanie 3.2.5(b)).

(d) Zbieżność wynika z monotoniczności ciągu $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ i z faktu, że jego granicą jest liczba e (zadanie 2.1.38). Wykażemy teraz, że nie jest on zbieżny bezwzględnie. Skorzystamy z następującej nierówności

$$\ln(1+x)<x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3,\quad x>0,$$

przyjmując $x=\frac{1}{n}$. W ten sposób otrzymamy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e^{1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}}$, czyli

$$e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>e\left(1-e^{-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}}\right)>e\left(1-e^{-\frac{1}{4n}}\right).$$

Z zadania 2.5.4(a) wynika, że dla dostatecznie dużych n jest

$$4n\left(1-e^{-\frac{1}{4n}}\right)>\frac{1}{2}.$$

Stąd już łatwo wywnioskować, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ jest rozbieżny.

(e) Zbieżność tego szeregu wynika z monotoniczności ciągu $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ i z faktu, że jego granicą jest liczba e (zadanie 2.1.38). Szereg ten nie jest zbieżny bezwzględnie (zadanie 3.2.5(c)).

3.4.13.

(a) Łatwo sprawdzić, że w przedziale $(e^{\frac{a}{b}},+\infty)$ funkcja

$$f(x)=\frac{(\ln x)^a}{x^b}$$

jest malejąca i dąży do zera przy x dążącym do nieskończoności. Zbieżność szeregu wynika więc z kryterium Leibniza. Wykażemy, że szereg jest zbieżny bezwzględnie dla wszystkich $a>0$ i $b>1$. Zastosujemy w tym celu kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu (zadanie 3.2.28). Wystarczy więc zbadać zbieżność

szeregu o wyrazach

$$2^n \frac{n^a}{2^{nb}}.$$

Szereg o takich wyrazach jest zbieżny na mocy np. kryterium pierwiastkowego Cauchy'ego dla $b > 1$ i rozbieżny dla $0 < b < 1$. Łatwo sprawdzić, że dla $b = 1$ szereg o takich wyrazach jest rozbieżny.

(b) Zauważmy, że

$$\frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^b} = \frac{\mathrm{e}^{(\ln n)(\ln(\ln n))}}{n^b} = \frac{n^{\ln(\ln n)}}{n^b}.$$

Wynika stąd, że nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu.

3.4.14. Z monotoniczności ciągu wynika, że

$$r_{2n} = (a_{2n+1} - a_{2n+2}) + (a_{2n+3} - a_{2n+4}) + \ldots > 0$$

oraz

$$r_{2n+1} = (-a_{2n+2} + a_{2n+3}) + (-a_{2n+4} + a_{2n+5}) + \ldots < 0.$$

Ponadto

$$r_{2n} = a_{2n+1} + (-a_{2n+2} + a_{2n+3}) + (-a_{2n+4} + a_{2n+5}) + \ldots < a_{2n+1},$$
$$-r_{2n+1} = a_{2n+2} + (-a_{2n+3} + a_{2n+4}) + \ldots < a_{2n+2}.$$

3.4.15. Zauważmy, że

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + a_{k+1}) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n+1} - a_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -a_1.$$

3.4.16. Podobnie jak w poprzednim zadaniu mamy

$$\sum_{k=1}^{n}(aa_k + ba_{k+1} + ca_{k+2}) - (a+b+c)\sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$= b(a_{n+1} - a_1) + c(a_{n+1} + a_{n+2} - a_1 - a_2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -ba_1 - c(a_1 + a_2).$$

3.4.17. Z założeń dotyczących ciągu $\{a_n\}$ wynika, że istnieją stałe dodatnie c, C takie, że $c < |a_n| \le C$ dla $n > n_0$. Stąd otrzymujemy

$$\left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right| \le \frac{1}{c^2}|a_{n+1} - a_n|,$$

$$|a_{n+1} - a_n| \le C^2\left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right|.$$

Z powyższych nierówności wynika już teza naszego twierdzenia.

3.4.18. Niech S_n, $\widetilde{S}_n$ oznaczają n-te sumy częściowe odpowiednio szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$. Wtedy

$$\widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=1}^{n}(k+1)a_{k+1} + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}$$
$$= -(n+1)a_{n+1} + S_{n+1},$$

co kończy dowód.

3.4.19. Łatwo pokazać, że szereg ten spełnia założenia twierdzenia Leibniza, a więc jest zbieżny.

3.4.20. Jeśli $|a| < 1$, to z nierówności $|\sin x| \le |x|$ otrzymujemy

$$\left|n! \sin a \sin\frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{a}{n}\right| \le |a|^n.$$

Zatem w tym przypadku szereg jest zbieżny bezwzględnie. Jeśli $|a| \ge 1$, to szereg nie spełnia warunku koniecznego zbieżności. Istotnie, dla ustalonego a istnieje takie n_0, że $\frac{|a|}{n_0} \le 1$. Kładąc $C = (n_0 - 1)!\left|\sin a \sin\frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{a}{n_0 - 1}\right|$ i wykorzystując nierówność $\frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{6}$, $x > 0$, otrzymujemy

$$\left|n! \sin a \sin\frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{a}{n}\right| = Cn_0 \cdot \ldots \cdot n \sin\frac{|a|}{n_0} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{|a|}{n}$$
$$\ge Cn_0 \cdot \ldots \cdot n \sin\frac{1}{n_0} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{1}{n}$$
$$= C\prod_{k=n_0}^{n}\left(1 - \frac{1}{6k^2}\right) \ge C\prod_{k=n_0}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$
$$= C\frac{(n_0 - 1)(n+1)}{n_0 n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C\frac{n_0 - 1}{n_0} > 0.$$

3.4.21. Na podstawie zadania 2.5.4(a) otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a} - \frac{\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a} - 1}{\frac{1}{n}} - \frac{\sqrt[n]{b} - 1 + \sqrt[n]{c} - 1}{2\frac{1}{n}}\right)$$
$$= \ln a - \frac{1}{2}(\ln b + \ln c) = \ln\frac{a}{\sqrt{bc}}.$$

Zatem, jeśli $a > \sqrt{bc}$, to wyrazy rozpatrywanego szeregu są dodatnie i na podstawie kryterium porównawczego szereg jest rozbieżny. Podobnie, jeśli $a < \sqrt{bc}$, to szereg ten jest rozbieżnym szeregiem o wyrazach ujemnych. Niech teraz $a = \sqrt{bc}$. Wtedy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a} - \frac{\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[2n]{b} - \sqrt[2n]{c}\right)^2.$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[2n]{b} - 1 - \sqrt[2n]{c} + 1}{\frac{1}{2n}}\right)^2 = (\ln b - \ln c)^2,$$

więc zbieżność tego szeregu wynika ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

3.4.22.

(a) Na podstawie zadania 1.1.14 istnieją: ciąg liczb całkowitych $\{p_n\}$ oraz ciąg liczb naturalnych $\{q_n\}$ takie, że

$$\left|\pi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Stąd $|\cos p_n| = |\cos(\pi q_n - p_n)| > \cos\frac{1}{q_n} = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2q_n} > 1 - \frac{1}{2q_n^2}$. Czyli

$$(|\cos p_n|)^{p_n} > \left(1 - \frac{1}{2q_n^2}\right)^{p_n} > 1 - \frac{p_n}{q_n}\frac{1}{2q_n}.$$

Oznacza to, że podciąg $\{(\cos p_n)^{p_n}\}$ ciągu $\{\cos^n n\}$ nie jest zbieżny do zera. Badany szereg nie spełnia więc warunku koniecznego zbieżności.

(b) Wiadomo (patrz zadanie 1.1.22), że ciągi $\{p_n\}$ i $\{q_n\}$ występujące w części (a) można wybrać tak, że $\{q_n\}$ jest ciągiem liczb nieparzystych. Wtedy z nierówności

$$\left|\frac{\pi}{2} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$$

otrzymujemy $|\sin p_n| = |\cos\left(\frac{\pi}{2}q_n - p_n\right)| > \cos\frac{1}{q_n} > 1 - \frac{1}{2q_n^2}$. Zatem, podobnie jak w części (a), ciąg o wyrazach $(\sin p_n)^{p_n}$ nie jest zbieżny do zera, a więc nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu.

3.4.23.

(a) Na podstawie założenia i zadania 2.4.13(b) wiadomo, że istnieją takie n_0 oraz α, że

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > \alpha > 0 \quad \text{dla} \quad n \geq n_0.$$

Stąd $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n}{n+\alpha} < 1$. Oznacza to, że ciąg $\{a_n\}$ jest malejący. Pokażemy jeszcze, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Z powyższej nierówności otrzymujemy

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\cdot a_{n_0} < \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot n_0}{(\alpha+n)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n_0)}a_{n_0}.$$

Wystarczy teraz pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot n_0}{(\alpha+n)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n_0)} = 0$. Istotnie

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot n_0}{(\alpha+n)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n_0)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{\alpha}{n_0}\right)} = 0,$$

gdyż na podstawie zadania 1.2.1 mamy

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{\alpha}{n_0}\right) > 1 + \frac{\alpha}{n} + \ldots + \frac{\alpha}{n_0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Zatem z kryterium Leibniza wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

(b) Z warunku $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 0$ wynika, że ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący, a więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ jest rozbieżny, gdyż nie spełnia warunku koniecznego zbieżności.

3.4.24. Wystarczy zauważyć, że $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \alpha$.

Jeśli $\alpha \neq 0$, to można zastosować kryterium z poprzedniego zadania.
Jeśli $\alpha = 0$, to szereg nie spełnia warunku koniecznego zbieżności. Rzeczywiście, mamy

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1}\cdot\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{n-1}}{a_n}$$
$$= \frac{1}{a_1}\left(1+\frac{\beta_1}{1^{1+\varepsilon}}\right)\left(1+\frac{\beta_2}{2^{1+\varepsilon}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{\beta_{n-1}}{(n-1)^{1+\varepsilon}}\right).$$

Ponieważ istnieje β takie, że $|\beta_n| \leq \beta$, to

$$a_n \geq \frac{a_1}{\left(1+\frac{\beta}{1^{1+\varepsilon}}\right)\left(1+\frac{\beta}{2^{1+\varepsilon}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{\beta}{(n-1)^{1+\varepsilon}}\right)} \geq \frac{a_1}{e^{\beta A}},$$

gdzie $A = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$.

3.4.25. Wiadomo, że dla $x > -1$, $x \neq 0$ prawdziwa jest nierówność $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$. Stąd

$$\frac{n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)}{\frac{a_n}{a_{n+1}}} < n\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) < n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Oznacza to, że jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem o wyrazach dodatnich takim, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$, to z istnienia granicy $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}$ wynika istnienie granicy $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ i obie te granice są równe.

Niech $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = p - \frac{1}{2}$. Stąd i z zadania 3.4.23 wynika, że badany szereg jest zbieżny dla $p > \frac{1}{2}$ i rozbieżny dla $p < \frac{1}{2}$. W przypadku $p = \frac{1}{2}$ nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu, gdyż na mocy wzoru Stirlinga $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2\pi}$.

3.4.26. Niech $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Stosując przekształcenie Abela, otrzymujemy

$$a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k(p_k - p_{k+1}) + S_np_n.$$

Stąd

$$\frac{a_1p_1+a_2p_2+\ldots+a_np_n}{p_n}=S_n-\sum_{k=1}^{n-1}S_k\frac{p_{k+1}-p_k}{p_n}.$$

Wystarczy teraz skorzystać z twierdzenia Toeplitza (zadania 2.3.1).

3.4.27. Wystarczy zastosować poprzednie zadanie do szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ i przyjąć $p_n=\frac{1}{a_n}$.

3.4.28. Jest to szczególny przypadek poprzedniego zadania.

3.4.29. Gdyby szereg ten nie był zbieżny bezwzględnie, to podszeregi utworzone ze wszystkich jego wyrazów dodatnich oraz ze wszystkich wyrazów ujemnych byłyby rozbieżne (zadanie 3.4.5).

3.4.30. [19] Nie. Świadczy o tym następujący przykład.
Niech $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ będzie szeregiem zbieżnym, który nie jest zbieżny bezwzględnie. Połóżmy

$$a_1=b_1,\quad a_2=a_3=\frac{b_2}{2!},\quad a_4=a_5=\ldots=a_9=\frac{b_3}{3!},\ \ldots,$$

$$a_{1!+2!+\ldots+(n-1)!+1}=a_{1!+2!+\ldots+(n-1)!+2}=\ldots=a_{1!+2!+\ldots+(n-1)!+n!}=\frac{b_n}{n!},\ \ldots$$

Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie. Pokażemy teraz, że dla każdego $k,l\in\mathbb{N}$ podszereg

$$(*)\qquad a_k+a_{k+l}+a_{k+2l}+\ldots$$

jest zbieżny. Zauważmy, że dla $n\geq l$ jest dokładnie $\frac{n!}{l}$ wyrazów podszeregu $(*)$ postaci $\frac{b_n}{n!}$. Grupując te wyrazy, otrzymujemy szereg $stała+\frac{1}{l}\sum_{n=n_0}^{\infty}b_n$, który jest zbieżny.

3.4.31. Wystarczy rozpatrzyć szereg o postaci

$$1+\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}}_{n\text{ razy}}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$$

3.4.32. Tak. Rozpatrzmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o postaci

$$1+\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{n\ln n}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}}_{n\text{ razy}}-\frac{1}{\ln n}+\ldots$$

Wtedy

$$\sum_{n=1}^{\frac{N^2+3N-2}{2}}a_n^k=\begin{cases}1+\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n^{k-1}\ln^k n}+\frac{1}{\ln^k n}\right) & \text{dla } k \text{ parzystych},\\ 1+\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n^{k-1}\ln^k n}-\frac{1}{\ln^k n}\right) & \text{dla } k \text{ nieparzystych}.\end{cases}$$

Zauważmy teraz, że szereg $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^k n}$ jest rozbieżny dla każdego $k\in\mathbb{N}$. Można to sprawdzić, stosując np. kryterium Cauchy'ego o zagęszczaniu (patrz zadanie 3.2.28). Natomiast szereg $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{k-1}\ln^k n}$ jest zbieżny dla $k\geq 2$.

3.4.33. [19] Załóżmy, że tak nie jest i np. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n}{n}=2\alpha>0$. Wtedy na podstawie zadania 2.4.13(b) istnieje takie n_0, że dla $n>n_0$ spełniona jest nierówność

$$(*)\qquad \varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n>\alpha n.$$

Połóżmy $E_n=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n$. Wtedy stosując przekształcenie Abela, otrzymujemy

$$\varepsilon_1a_1+\varepsilon_2a_2+\ldots+\varepsilon_na_n=\sum_{k=1}^{n-1}E_k(a_k-a_{k+1})+E_na_n.$$

Stąd i z nierówności $(*)$ mamy

$$\varepsilon_1a_1+\varepsilon_2a_2+\ldots+\varepsilon_na_n>\sum_{k=1}^{n_0}E_k(a_k-a_{k+1})+\alpha\sum_{k=n_0+1}^{n-1}k(a_k-a_{k+1})+\alpha na_n$$

$$=stała+\alpha\sum_{k=n_0+1}^{n}a_k,$$

co daje sprzeczność.

3.4.34. [19] Połóżmy, podobnie jak w poprzednim zadaniu,

$$E_n=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Wtedy ciąg $\{E_n\}$ ma tę własność, że pomiędzy wyrazami przeciwnych znaków istnieje wyraz zerujący się. Rozróżnimy dwa przypadki:
(1) wyrazów zerujących się jest skończona ilość,
(2) wyrazów zerujących się jest nieskończenie wiele.
Zauważmy, że przypadek (1) sprowadza się do zadania 3.2.35. Rozpatrzmy więc przypadek (2). Z warunku Cauchy'ego zbieżności szeregów wynika, że dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje taki wskaźnik n_0, że dla $m>n_0$ mamy

$$\varepsilon > \left|\sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} \big((E_k - E_m) - (E_{k-1} - E_m)\big)a_k\right|$$

$$(*) \qquad = \left|\sum_{k=m+1}^{n} (E_k - E_m)(a_k - a_{k+1}) + (E_n - E_m)a_{n+1}\right|.$$

Załóżmy, że $E_m = 0$ oraz, że n jest takie, że wyrazy $E_{m+1}, E_{m+2}, \ldots, E_n$ mają ten sam znak. Wtedy z nierówności $(*)$ oraz z monotoniczności ciągu $\{a_n\}$ wynika, że

$$|E_n a_n| < \varepsilon, \quad n \geq m+1.$$

3.4.35. Dowód tego twierdzenia jest analogiczny do dowodu twierdzenia z zadania 3.4.33. Połóżmy $E_n = p_1 b_1 + \ldots + p_n b_n$ i załóżmy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1 b_1 + \ldots + p_n b_n}{n} = 2\alpha > 0.$$

Wtedy dla $n > n_0$ mamy $p_1 b_1 + \ldots + p_n b_n > \alpha n$. Zatem

$$b_1 + \ldots + b_n = \frac{1}{p_1}(p_1 b_1) + \ldots + \frac{1}{p_n}(p_n b_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} E_k \left(\frac{1}{p_k} - \frac{1}{p_{k+1}}\right) + E_n \frac{1}{p_n} > \text{stała} + \alpha \sum_{k=n_0+2}^{n} \frac{1}{p_k},$$

sprzeczność.

3.4.36. Wykażemy najpierw zbieżność takiego szeregu przy $p = q$. Mamy

$$S_{lp} = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{p+1} + \ldots + \frac{1}{2p}\right) + \ldots$$

$$+ (-1)^{l+1}\left(\frac{1}{(l-1)p+1} + \ldots + \frac{1}{lp}\right).$$

Oznacza to, że S_{lp} jest sumą częściową szeregu naprzemiennego, a więc istnieje skończona granica $\lim_{l\to\infty} S_{lp}$. Oczywiście sumy częściowe S_{lp+k}, $k = 1, 2, \ldots, p-1$, dążą do tej samej granicy.

Załóżmy teraz, że szereg opisany w zadaniu jest zbieżny. Wtedy na podstawie zadania 3.4.34 mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{np - nq}{np + nq} = \frac{p-q}{p+q} = 0.$$

Zatem musi być $p = q$.

3.4.37. Dowód analogiczny do dowodu twierdzenia Toeplitza podanego w zadaniu 2.3.1 oraz twierdzenia odwrotnego podanego w zadaniu 2.3.26.

3.5 KRYTERIA DIRICHLETA I ABELA

3.5.1.

(a) Ponieważ $\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2n}(1 - \cos(2n))$, więc wystarczy zbadać zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}\cos(2n).$$

Zbieżność pierwszego z tych szeregów wynika z kryterium Leibniza. Zbieżność drugiego wynika natomiast z kryterium Dirichleta. Istotnie, na podstawie wzoru (2) ze wstępu do podrozdziału 3.5, mamy

$$\left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos(2k)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \cos\Big((\pi - 2)k\Big)\right| = \left|\frac{\sin\frac{(\pi-2)n}{2}\cos\frac{(n+1)(\pi-2)}{2}}{\cos 1}\right|$$

$$\leq \frac{1}{\cos 1}.$$

Zatem ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos(2n)$ jest ograniczony. Ponieważ ciąg $\{\frac{1}{n}\}$ dąży monotonicznie do zera, więc spełnione są wszystkie założenia kryterium Dirichleta, czyli badany szereg jest zbieżny.

(b) Ciąg o wyrazach

$$a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n}$$

jest zbieżny do zera, jako ciąg średnich arytmetycznych ciągu $\{\frac{1}{n}\}$. Jak łatwo sprawdzić jest to ciąg malejący. Ponadto, na podstawie (1) ze wstępu do tego rozdziału, mamy

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\right| = \left|\frac{\sin\frac{n}{2}\sin\frac{n+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}.$$

Na podstawie kryterium Dirichleta szereg jest zbieżny.

(c) Zauważmy, że

$$\cos\left(\pi\frac{n^2}{n+1}\right) = \cos\left(n\pi - \frac{n\pi}{n+1}\right) = (-1)^n \cos\left(\pi - \frac{\pi}{n+1}\right)$$

$$= (-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1}.$$

Zatem badany szereg można zapisać w postaci

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos\frac{\pi}{n+1}}{\ln^2 n}.$$

Zbieżność powyższego szeregu wynika z twierdzenia Abela, gdyż szereg $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln^2 n}$ jest zbieżny (na mocy kryterium Leibniza), a ciąg $\{\cos\frac{\pi}{1+n}\}$ jest monotoniczny i ograniczony.

(d) Mamy

$$\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a+\sin\frac{n\pi}{4}}=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a}\left(1-\frac{\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a}}{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a}}\right).$$

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a},\quad a>0$$

jest zbieżny na podstawie kryterium Dirichleta. Zbadamy teraz zbieżność szeregu (o wyrazach dodatnich)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2a}}}{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a}}.$$

Istnieją takie stałe dodatnie c_a, C_a, dla których prawdziwe są nierówności

$$c_a\frac{1}{n^{2a}}<\frac{\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2a}}}{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a}}<C_a\frac{1}{n^{2a}},\quad n\neq 4k,\ k\in\mathbb{N}.$$

Oznacza to, że szereg ten jest zbieżny dla $a>\frac{1}{2}$ i rozbieżny dla $0<a\leq\frac{1}{2}$.

3.5.2. Dla dowolnej liczby naturalnej N mamy

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}=\sum_{n=2}^{N}\frac{\sin n\cos\frac{1}{n}}{\ln(\ln n)}+\sum_{n=2}^{N}\frac{\cos n\sin\frac{1}{n}}{\ln(\ln n)}.$$

Zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n\cos\frac{1}{n}}{\ln(\ln n)}$ wynika z twierdzenia Abela, gdyż szereg $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n}{\ln(\ln n)}$ jest zbieżny na mocy kryterium Dirichleta oraz ciąg $\left\{\cos\frac{1}{n}\right\}$ jest ograniczony i monotoniczny. Zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n\sin\frac{1}{n}}{\ln(\ln n)}$ wynika z kryterium Dirichleta.

3.5.3.

(a) Mamy

$$2\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(k^2a)\sin(ka)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}(\cos(k(k-1)a)-\cos(k(k+1)a))\right|$$
$$=|1-\cos(n(n+1)a)|\leq 2.$$

Zbieżność szeregu wynika więc z kryterium Dirichleta.

(b) Zbieżność szeregu dla dowolnego $a\in\mathbb{R}$ wynika, podobnie jak wyżej, z kryterium Dirichleta.

3.5.4. Ponieważ

$$\frac{\cos n\sin(na)}{n}=\frac{1}{2}\frac{\sin(n(a+1))}{n}+\frac{1}{2}\frac{\sin(n(a-1))}{n},$$

więc zbieżność szeregu wynika z kryterium Dirichleta.

3.5.5. Jeśli $a=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, to otrzymujemy szereg, którego wszystkie wyrazy są zerami. Dla pozostałych a, korzystając z nierówności $|\sin x|\geq\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{|\sin(na)|}{n}\geq\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos(2na)}{n}.$$

Stąd już widać, że dla $a\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, szereg nie jest zbieżny bezwzględnie.

3.5.6. Załóżmy najpierw, że $0<a<\pi$ i niech $m=\left[\frac{\sqrt{\pi}}{a}\right]$. Wtedy dla dostatecznie dużych n

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(ak)}{k}\right|\leq\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\sin(ak)}{k}\right|+\left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin(ak)}{k}\right|.$$

Ponieważ $|\sin t|<|t|$ dla $t\neq 0$, więc

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\sin(ak)}{k}\right|<\sum_{k=1}^{m}\frac{ka}{k}=ma\leq\sqrt{\pi}. \tag{1}$$

Ponadto

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin(ak)}{k}\right|\leq\frac{1}{(m+1)|\sin\frac{a}{2}|}<\frac{1}{\frac{a}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{a}}=\sqrt{\pi}. \tag{2}$$

Przy czym ostatnia nierówność w (2) wynika z faktu, że $\sin t>\frac{2}{\pi}t$ dla $0<t<\frac{\pi}{2}$.

Z (1) i (2) wynika, że żądana nierówność jest prawdziwa dla $a\in(0,\pi)$. Ze względu na nieparzystość funkcji sinus nierówność ta jest prawdziwa również dla $a\in(-\pi,0)$. Ponieważ $\sin k\pi=0$, więc nierówność jest oczywista dla

$a = -\pi, 0, \pi$. Z okresowości funkcji sinus wynika więc, że jest ona prawdziwa dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$.

3.5.7. Zbieżność tego szeregu wynika z kryterium Abela, gdyż szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny, a ciąg $\{\operatorname{arctg} n\}$ jest rosnący i ograniczony.

3.5.8. Zbieżność tego szeregu wynika z kryterium Abela, gdyż szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ jest zbieżny, a ciąg $\{\sqrt[n]{\ln x}\}$ jest ograniczony oraz malejący dla $x > \mathrm{e}$ i rosnący dla $1 < x < \mathrm{e}$.

3.5.9.

(a) Zauważmy najpierw, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ jest zbieżny na podstawie kryterium Dirichleta. Ponadto, ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, więc ciąg reszt $\{r_n\}$, $r_n = \sum_{k=n}^{\infty}a_k$, jest zbieżny do zera. Zatem dla $p \geq n$ mamy

$$\left|\sum_{k=n}^{p}\frac{a_k}{b_k}\right| = \left|\sum_{k=n}^{p}\frac{r_k - r_{k+1}}{b_k}\right| = \left|\sum_{k=n}^{p}\frac{r_k}{b_k} - \sum_{k=n}^{p}\frac{r_{k+1}}{b_k}\right|$$

$$= \left|\frac{r_n}{b_n} + \sum_{k=n+1}^{p} r_k\left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k-1}}\right) - \frac{r_{p+1}}{b_p}\right|$$

$$\leq \varepsilon_n\left(\frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_p} + \frac{1}{b_p}\right) = \frac{2\varepsilon_n}{b_n},$$

gdzie $\varepsilon_n = \sup_{k\geq n}|r_k|$. Stąd

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{a_k}{b_k}\right| \leq 2\varepsilon_n\frac{1}{b_n} = o\left(\frac{1}{b_n}\right).$$

(b) Patrz zadanie 3.4.26.

3.5.10. Mamy

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{n+k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n+k-1}(n+k-1)c_{n+k-1}.$$

Stąd i z kryterium Abela wynika zbieżność rozpatrywanych szeregów. Ponadto

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{n+k} = \sum_{k=n}^{\infty}(k-n+1)c_k$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}kc_k - (n-1)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k}kc_k = r_n - (n-1)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k}(r_k - r_{k+1})$$

$$= \frac{1}{n}r_n + (n-1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)r_k,$$

gdzie $r_n = nc_n + (n+1)c_{n+1} + \ldots$ Zatem

$$|t_n| \leq \frac{1}{n}|r_n| + \sup_{k\geq n+1}|r_k|(n-1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{n}|r_n| + \sup_{k\geq n+1}|r_k|\frac{n-1}{n}.$$

Stąd i z faktu, że $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ wynika, że $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.

3.5.11. Wykorzystując przekształcenie Abela, otrzymujemy

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}a_ib_i^k = \sum_{i=1}^{n-1}A_i(b_i^k - b_{i+1}^k) + A_nb_n^k,$$

gdzie A_n oznacza n-tą sumę częściową szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustalone i niech $|b_i| < \varepsilon$ dla $i \geq n_0$. Wtedy dla $m > n \geq n_0$ mamy

$$|S_m - S_n| = \left|\sum_{i=n}^{m-1}A_i(b_i^k - b_{i+1}^k) - A_nb_n^k + A_mb_m^k\right|$$

$$\leq \sum_{i=n}^{m-1}|A_i||b_i^k - b_{i+1}^k| + |A_{n-1}b_n^k| + |A_{m-1}b_m^k|$$

$$\leq L\left(\sum_{i=n}^{m-1}|b_i - b_{i+1}||b_i^{k-1} + b_i^{k-2}b_{i+1} + \ldots + b_{i+1}^{k-1}| + |b_n^k| + |b_m^k|\right)$$

$$\leq L\left(k\varepsilon^{k-1}\sum_{i=n}^{m-1}|b_i - b_{i+1}| + 2\varepsilon^k\right),$$

gdzie L jest stałą ograniczającą ciąg $\{A_n\}$. Stąd i z warunku Cauchy'ego zbieżności szeregów wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$.

3.5.12. Podobnie jak w poprzednim zadaniu, wykorzystując przekształcenie Abela, otrzymujemy

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}a_ib_i = \sum_{i=1}^{n-1}A_i(b_i - b_{i+1}) + A_nb_n,$$

gdzie A_n oznacza n-tą sumę częściową szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.
Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ jest zbieżny bezwzględnie i ciąg $\{A_n\}$ jest ograniczony, więc zbieżny jest (i to bezwzględnie) szereg $\sum_{n=1}^{\infty}A_n(b_n - b_{n+1})$. Ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ wynika, że istnieje $\lim_{n\to\infty}b_n$, gdyż $(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_{n-1} - b_n) = b_1 - b_n$. Istnieje zatem również granica $\lim_{n\to\infty}A_nb_n$. Stąd i z przekształcenia Abela wynika już teza twierdzenia.

3.5.13. Ciąg $\{x^n\}$ dla $0 \leq x < 1$ jest monotoniczny i ograniczony, a więc spełnione są założenia kryterium Abela. Jeśli $-1 < x < 0$, to monotoniczne i ogra-

niczone są ciągi $\{x^{2n}\}$ i $\{x^{2n-1}\}$. Zatem zbieżne są szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}x^{2n-1}$. Zbieżność rozpatrywanego szeregu wynika więc z równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}x^{2n-1}.$$

3.5.14. Jeśli $x > x_0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ powstaje z szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ przez pomnożenie jego wyrazów przez $\frac{1}{n^{x-x_0}}$, a więc na podstawie kryterium Abela jest on szeregiem zbieżnym.

3.5.15. Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!a_n}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$$

powstaje z szeregu Dirichleta przez pomnożenie jego wyrazów przez czynniki $\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$. Zauważmy najpierw, że dla dostatecznie dużych n czynniki te mają ten sam znak. Wykażemy teraz, że tworzą one ciąg monotoniczny. Istotnie, stosunek czynnika $(n+1)$ do n-tego wynosi

$$\frac{(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^x}{x+n+1} = \frac{\mathrm{e}^{(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{1+\frac{x+1}{n}}.$$

Zbadajmy teraz różnicę $R_n = \mathrm{e}^{(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 - \frac{x+1}{n}$. Na podstawie zadania 2.5.7 mamy

$$\begin{aligned} R_n &= (x+1)\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2!}(x+1)^2\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &\quad + \frac{1}{3!}(x+1)^3\ln^3\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ldots \\ &= \frac{1}{n^2}\left(-\frac{x+1}{2} + \frac{1}{2}(x+1)^2 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{3!}(x+1)^3\ln^3\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ldots, \end{aligned}$$

gdzie $O(a_n)$ oznacza wyrażenie, które po podzieleniu przez a_n pozostaje ograniczone. Stąd już wynika, że dla dostatecznie dużych n różnice R_n są dodatnie, jeśli $x(x+1) > 0$ i różnice te są ujemne, jeśli $x(x+1) < 0$. Zatem, dla dostatecznie dużych n, stosunek czynnika $(n+1)$ do n-tego jest stale większy niż 1 bądź stale mniejszy niż 1.
Wykażemy teraz, że ciąg o wyrazach

$$\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$$

jest zbieżny dla dowolnego $x \neq 0, -1, -2, \ldots$ Mamy

$$\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)} = \frac{1}{x}\frac{n}{x+n}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}.$$

Załóżmy teraz, że $x > 1$. Ponieważ dla takich x spełniona jest nierówność $\left(1+\frac{1}{k}\right)^x > 1+\frac{x}{k}$, więc

$$\ln\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)$$

i wszystkie składniki występujące w ostatniej sumie są dodatnie. Mamy ponadto

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)}{\frac{1}{k^2}} = \frac{x(x-1)}{2}.$$

Zatem istnienie granicy

$$\lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}$$

wynika ze zbieżności szeregu $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Oznacza to zbieżność rozpatrywanego ciągu dla $x > 1$.
Niech teraz $x \in (0,1)$. Wtedy spełniona jest nierówność $\left(1+\frac{1}{k}\right)^x < 1+\frac{x}{k}$, a więc można powtórzyć powyższe rozumowania dla ciągu o wyrazach

$$-\ln\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}.$$

Pozostał do rozpatrzenia przypadek $x < 0$, $x \neq -1, -2, -3, \ldots$ Niech k_0 będzie taką liczbą naturalną, że $1+\frac{x}{k} > 0$ dla $k \geq k_0$. Wykażemy teraz, że ciąg o wyrazach

$$\prod_{k=k_0}^{n-1}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}$$

jest zbieżny. Zauważmy, że w tym przypadku

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^x > 1+\frac{x}{k} \quad \text{dla} \quad k \geq k_0.$$

Zatem możemy postępować podobnie, jak dla $x > 1$.

3.5.16. Zauważmy najpierw, że dla $|x| < 1$ (na podstawie kryterium Abela) ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ (patrz

zadanie 3.5.13). Ponieważ ciąg $\left\{\frac{1}{1-x^{2n}}\right\}$ jest monotoniczny i ograniczony, więc z kryterium Abela i z równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n x^n \frac{1}{1-x^{2n}} + a_n x^{2n} \frac{1}{1-x^{2n}} \right)$$

wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

3.5.17. [19] Nie. Świadczy o tym następujący przykład, podobny do przykładu z zadania 3.4.30.
Niech $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będzie szeregiem zbieżnym, który nie jest zbieżny bezwzględnie. Niech $F(x) = 2^{x^2}$ i zdefiniujmy nowy szereg o wyrazach postaci

$$a_1 = a_2 = \frac{b_1}{2}, \quad a_k = \frac{b_m}{F(m) - F(m-1)} \quad \text{dla} \quad F(m-1) < k \leq F(m).$$

Szereg ten jest również zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie. Pokażemy teraz, że dla każdego $k, l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$ podszereg

$$(*) \qquad a_k + a_{kl} + a_{kl^2} + \ldots$$

jest zbieżny. Zauważmy najpierw, że dla każdego m istnieje dokładnie jedna liczba naturalna t_m taka, że

$$kl^{t_m} \leq F(m) < kl^{t_m+1}.$$

Istotnie, wystarczy przyjąć

$$t_m = \left[\log_l \frac{F(m)}{k} \right].$$

Z określenia liczby t_m wynika, że począwszy od pewnego wskaźnika podszereg $(*)$ ma $t_m - t_{m-1}$ wyrazów o postaci $\frac{b_m}{F(m) - F(m-1)}$. Grupując te wyrazy, otrzymujemy szereg

$$stała + \sum_{m=n_1}^{\infty} \frac{t_m - t_{m-1}}{F(m) - F(m-1)} b_m.$$

Zbieżność tego szeregu wynika z kryterium Abela, gdyż jak łatwo sprawdzić ciąg o wyrazach

$$c_m = \frac{t_m - t_{m-1}}{F(m) - F(m-1)}$$

jest ciągiem malejącym. Mamy bowiem

$$c_m > \frac{(2m-1)\log_l 2 - 1}{2^{m^2} - 2^{(m-1)^2}} \quad \text{oraz} \quad c_{m+1} < \frac{(2m+1)\log_l 2 + 1}{2^{(m+1)^2} - 2^{m^2}}.$$

Stąd już widać, że dla dostatecznie dużych m mamy $c_{m+1} < c_m$, gdyż

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(2m+1)\log_l 2 + 1}{(2m-1)\log_l 2 - 1} \cdot \frac{2^{m^2} - 2^{(m-1)^2}}{2^{(m+1)^2} - 2^{m^2}} = 0.$$

3.6 ILOCZYN CAUCHY'EGO SZEREGÓW

3.6.1. Załóżmy, że np. szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie. Niech A_n, B_n, C_n oznaczają odpowiednio n-te sumy częściowe szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, a A, B, C ich sumy. Wtedy

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \ldots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_n B_0. \end{aligned}$$

Mamy $B = B_n + r_n$, gdzie $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Stąd

$$C_n = BA_n - (a_0 r_n + a_1 r_{n-1} + \ldots + a_n r_0).$$

Pokażemy, że $\lim_{n\to\infty} (a_0 r_n + a_1 r_{n-1} + \ldots + a_n r_0) = 0$.
Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustalone i niech m, M będą takie, że

$$|r_n| \leq m \quad \text{dla} \quad n \geq 0, \quad M = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Wtedy istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $|r_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$ dla $n \geq k$ oraz takie $l \in \mathbb{N}$, że $|a_{l+1}| + \ldots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2m}$ dla dowolnego $n \geq l+1$. Zatem dla $n \geq l+k$ mamy

$$\begin{aligned} &|a_0 r_n + a_1 r_{n-1} + \ldots + a_n r_0| \\ &\quad \leq (|a_0||r_n| + \ldots + |a_l||r_{n-l}|) + (|a_{l+1}||r_{n-l-1}| + \ldots + |a_n||r_0|) \\ &\quad < (|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_l|)\frac{\varepsilon}{2M} + (|a_{l+1}| + \ldots + |a_n|)m \\ &\quad < M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2m} m = \varepsilon. \end{aligned}$$

Warto tu zauważyć, że jeśli oba szeregi są bezwzględnie zbieżne, to iloczyn Cauchy'ego tych szeregów jest również bezwzględnie zbieżny.

3.6.2.
(a) Z twierdzenia Mertensa wynika, że dla $|x| < 1$ iloczyn Cauchy'ego szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ przez siebie jest zbieżny. Ponadto

$$c_n = x^n + x x^{n-1} + \ldots + x^n = (n+1)x^n.$$

Stąd $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$.

(b) $\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-y}$.

(c) Szereg ten jest iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Na podstawie zadań 2.5.6, 3.1.4(b) oraz 3.6.1 jego suma wynosi $e - 1$.

3.6.3.

(a) Mamy

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \cdot \frac{1}{2^{n-k}(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \frac{1}{2^{n-k}} = \frac{1}{n!} \left(2 + \frac{1}{2}\right)^n.$$

Na podstawie zadania 2.5.7 suma takiego szeregu wynosi $e^{\frac{5}{2}}$.

(b)

$$c_n = \frac{1}{3^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-3)^k}{k}.$$

Na podstawie zadań 3.1.32(a) oraz 3.6.1 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = -\frac{1}{2} \ln 2$.

(c) c_{2n+1}

$$= x^{2n+1} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k (k+1)(2n+1-k+1)$$

$$= x^{2n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1)(2n+1-k+1) + \sum_{k=n+1}^{2n+1} (-1)^k (k+1)(2n+1-k+1) \right)$$

$$= x^{2n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1)(2n+1-k+1) - \sum_{k'=0}^{n} (-1)^{k'} (k'+1)(2n+1-k'+1) \right) = 0.$$

Ponadto, wykorzystując fakt, że $c_{2n+1} = 0$, otrzymujemy

$$c_{2n} = x^{2n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n-k} (k+1)(2n-k+1)$$

$$= x^{2n} \left(\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k (k+1)(2n-1-k+1) + \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k (k+1) + (2n+1) \right)$$

$$= x^{2n}(0 + (-n) + (2n+1)) = (n+1)x^{2n}.$$

Na mocy zadania 3.6.2(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n} = \frac{1}{(1-x^2)^2}.$$

3.6.4. Ponieważ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ jest iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, to jest on zbieżny dla $|x| < 1$ i jego suma wynosi $\frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

3.6.5. Udowodnimy najpierw wzór podany we wskazówce. Ponieważ $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, więc porównując współczynniki przy x^n (po zastosowaniu wzoru dwumiennego Newtona), otrzymujemy żądaną równość. Stąd

$$c_n = (-1)^n x^{2n} \frac{1}{(n!)^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = (-1)^n x^{2n} \frac{1}{(n!)^2} \binom{2n}{n}.$$

3.6.6. Ponieważ

$$c_n = \left(\frac{1}{a} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} + \frac{1}{2} \frac{1}{a+2} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2)} + \ldots + \frac{1}{a+2n} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \right) x^n,$$

więc wystarczy wykazać równość

$$\frac{1}{a} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} + \frac{1}{2} \frac{1}{a+2} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2)} + \ldots + \frac{1}{a+2n} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} = \frac{(a+1)(a+3) \cdot \ldots \cdot (a+(2n-1))}{a(a+2)(a+4) \cdot \ldots \cdot (a+2n)}.$$

W tym celu wyrażenie stojące po prawej stronie powyższej równości rozłożymy na ułamki proste

$$\frac{(a+1)(a+3) \cdot \ldots \cdot (a+(2n-1))}{a(a+2)(a+4) \cdot \ldots \cdot (a+2n)} = \frac{\alpha_0}{a} + \frac{\alpha_1}{a+2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{a+2n}.$$

Mnożąc obie strony przez $a(a+2)(a+4) \cdot \ldots \cdot (a+2n)$ i wstawiając $a = 0$, $a = -2, \ldots, a = -2k, \ldots, a = -2n$, otrzymujemy, odpowiednio

$$\alpha_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

$$\alpha_1 = \frac{-1(2n-3)!!}{-2(2n-2)!!}, \ldots,$$

$$\alpha_k = \frac{(-2k+1)(-2k+3) \cdot \ldots \cdot (-1) 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2(n-k)-1)}{-2k((-2k+2) \cdot \ldots \cdot (-2) \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2(n-k))}$$

$$= \frac{(2k-1)!!(2(n-k)-1)!!}{(2k)!!(2(n-k))!!}, \ldots,$$

$$\alpha_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

skąd już wynika żądana równość.

3.6.7. Niech A_n, B_n, C_n oznaczają odpowiednio n-te sumy częściowe szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$. Łatwo sprawdzamy, że

$$C_n = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_n B_0.$$

Stąd wynika, że $C_0 + C_1 + \ldots + C_n = A_0 B_n + A_1 B_{n-1} + \ldots + A_n B_0$. Dzieląc obie strony przez $n+1$ i korzystając z zadań 2.3.2 oraz 2.3.8, otrzymujemy $C = AB$.

3.6.8. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ będzie szukanym iloczynem Cauchy'ego. Wtedy

$$c_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1\cdot n} + \frac{1}{2(n-1)} + \ldots + \frac{1}{k(n-k+1)} + \ldots + \frac{1}{n\cdot 1}\right).$$

Ponieważ $\frac{1}{k(n-k+1)} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right)$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$, więc $c_n = (-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$.

Wiadomo, że $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \ln 2$ (patrz zadanie 3.1.32(a)) oraz, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$ jest zbieżny (porównaj zadanie 3.4.19). Zatem na podstawie poprzedniego zadania jego suma wynosi $(\ln 2)^2$.

3.6.9. Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest iloczynem Cauchy'ego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ przez siebie, to

$$c_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n-1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{n-k+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1}\right).$$

Każdy ze składników w nawiasie jest większy od $\frac{1}{n}$, a więc $|c_n| > 1$ dla $n > 1$. Dowodzi to rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

3.6.10. Mamy $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0 > a_0b_n$, a więc z rozbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ wynika rozbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

3.6.11. Rozpatrzmy następujące dwa szeregi rozbieżne

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n, \qquad 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Wtedy $c_n = a_0b_n + b_0a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_kb_{n-k}$, gdzie $a_0 = b_0 = 1$, $a_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^n$, $b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Zatem

$$c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(2^{n-k} + \frac{1}{2^{n-k+1}}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

3.6.12. Niech A_n, B_n, C_n oznaczają odpowiednio n-te sumy częściowe szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$. Wtedy $C_n = a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots + a_nB_0$. Stąd wynika, że

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k(b_n + b_{n-1} + \ldots + b_{n-k+1}) &= a_1(B_n - B_{n-1}) + a_2(B_n - B_{n-2}) + \ldots + a_n(B_n - B_0)\\ &= B_n(A_n - a_0) - a_1B_{n-1} - a_2B_{n-2} - \ldots - a_nB_0\\ &= B_nA_n - C_n.\end{aligned}$$

3.6.13. Niech $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ będzie iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$. Wtedy $c_n = (-1)^n(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0)$. Załóżmy najpierw, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jest zbieżny. Wtedy $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Ponieważ ponadto

$$|c_n| \geq b_n(a_0 + \ldots + a_n) \quad \text{oraz} \quad |c_n| \geq a_n(b_0 + \ldots + b_n),$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} a_n(b_0 + b_1 + \ldots + b_n) = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} b_n(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) = 0.$$

Załóżmy teraz, że prawdziwe są powyższe równości. Wtedy, na mocy poprzedniego zadania, wystarczy wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k((-1)^n b_n + (-1)^{n-1}b_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-k+1}b_{n-k+1}) = 0.$$

Podobnie jak w zadaniu 3.4.14, można pokazać, że

$$|(-1)^n b_n + (-1)^{n-1}b_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-k+1}b_{n-k+1}| \leq b_{n-k+1}.$$

Zatem

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k\left((-1)^n b_n + (-1)^{n-1}b_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-k+1}b_{n-k+1}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} a_kb_{n-k+1}.$$

Pokażemy teraz, że $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_kb_{n-k+1} = 0$. Mamy

$$0 < \sum_{k=1}^{2n} a_kb_{2n-k+1} \leq (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)b_n + (b_0 + b_1 + \ldots + b_n)a_n.$$

Stąd już wynika, że $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n} a_kb_{2n-k+1} = 0$. Podobnie pokazujemy, że $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n-1} a_kb_{2n-k} = 0$, co kończy dowód.

3.6.14. Korzystając z poprzedniego zadania, wystarczy wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{2^\beta}+\ldots+\frac{1}{n^\beta}\right)=0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha+\beta>1$. Z twierdzenia Stolza (zadanie 2.3.11)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{2^\beta}+\ldots+\frac{1}{n^\beta}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\beta(n^\alpha-(n-1)^\alpha)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha+\beta}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\alpha\right)}.$$

Ponieważ

$$\frac{\alpha}{n}-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2n^2}\le 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\alpha\le\frac{\alpha}{n},$$

więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha+\beta}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\alpha\right)}=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad \alpha+\beta>1,\\ \frac{1}{\alpha} & \text{dla} \quad \alpha+\beta=1,\\ +\infty & \text{dla} \quad \alpha+\beta<1.\end{cases}$$

3.6.15. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=0}^\infty a_nb_n$ jest zbieżny. Na mocy zadania 3.6.13, wystarczy wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty}a_n(b_0+b_1+\ldots+b_n)=0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty}b_n(a_0+a_1+\ldots+a_n)=0.$$

Niech $\varepsilon>0$ będzie dowolnie ustalone. Istnieje wtedy takie $k_0\in\mathbb{N}$, że $a_{k_0+1}b_{k_0+1}+a_{k_0+2}b_{k_0+2}+\ldots<\frac{\varepsilon}{2}$. Zatem dla $n>k_0$

$$a_n(b_1+\ldots+b_n)<a_n(b_1+\ldots+b_{k_0})+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, więc istnieje takie $n_1>k_0$, że

$$a_n<\frac{\varepsilon}{2(b_0+\ldots+b_{k_0})} \quad \text{dla} \quad n>n_1,$$

co oznacza, że $a_n(b_0+\ldots+b_n)<\varepsilon$ dla $n>n_1$. Z dowolności $\varepsilon>0$ wynika, że $\lim_{n\to\infty}a_n(b_0+\ldots+b_n)=0$.

Załóżmy teraz, że iloczyn Cauchy'ego jest zbieżny. Z zadania 3.6.13 wynika, że wtedy $\lim_{n\to\infty}a_n(b_0+\ldots+b_n)=0$. Stąd dla dostatecznie dużych n

$$(n+1)a_nb_n<a_n(b_0+\ldots+b_n)<1.$$

Zatem

$$(a_nb_n)^{1+\alpha}<\left(\frac{1}{n+1}\right)^{1+\alpha}.$$

3.7 ZMIANA PORZĄDKU SUMOWANIA SZEREGI PODWÓJNE

3.7.1. Niech $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$ oznacza n-tą sumę częściową szeregu $\sum_{n=1}^\infty a_n$. Wtedy

$$b_1+b_2+\ldots+b_n=S_{m_n} \quad \text{dla} \quad n\ge 1.$$

Wiadomo, że ze zbieżności ciągu wynika zbieżność każdego z jego podciągów i to do tej samej granicy, a więc $\lim_{n\to\infty}S_{m_n}=\lim_{n\to\infty}S_n$.

3.7.2. Niech $\{T_n\}$ będzie ciągiem sum częściowych badanego szeregu. Wtedy

$$T_{3n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}\right)-\frac{1}{4n}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

Stąd i z zadania 3.1.32(a) otrzymujemy $\lim_{n\to\infty}T_{3n}=\frac{1}{2}\ln 2$. Łatwo sprawdzić, że $\lim_{n\to\infty}T_{3n}=\lim_{n\to\infty}T_{3n+1}=\lim_{n\to\infty}T_{3n+2}$, a więc

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\ldots=\frac{1}{2}\ln 2.$$

3.7.3. Niech $\{T_n\}$ będzie ciągiem sum częściowych tak przestawionego szeregu. Niech ponadto $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$. Wtedy

$$T_{\alpha+\beta}=1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2\alpha-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2\beta}$$

$$=f(2\alpha-1)-\frac{1}{2}f(\alpha-1)-\frac{1}{2}f(\beta)=f(2\alpha)-\frac{1}{2}f(\alpha)-\frac{1}{2}f(\beta).$$

Udowodnimy teraz metodą indukcji matematycznej, że

$$T_{n(\alpha+\beta)}=f(2n\alpha)-\frac{1}{2}f(n\alpha)-\frac{1}{2}f(n\beta).$$

Załóżmy więc, że wzór ten jest prawdziwy dla dowolnie ustalonego $n\in\mathbb{N}$. Wtedy

$$T_{(n+1)(\alpha+\beta)}=f(2n\alpha)-\frac{1}{2}f(n\alpha)-\frac{1}{2}f(n\beta)+\frac{1}{2n\alpha+1}+\frac{1}{2n\alpha+3}$$

$$+\ldots+\frac{1}{2(n+1)\alpha-1}-\frac{1}{2n\beta+2}-\frac{1}{2n\beta+4}-\ldots-\frac{1}{2(n+1)\beta}$$

$$= f(2n\alpha) - \tfrac{1}{2}f(n\alpha) - \tfrac{1}{2}f(n\beta) + f(2(n+1)\alpha - 1)$$
$$- \tfrac{1}{2}f((n+1)\alpha - 1) - f(2n\alpha) + \tfrac{1}{2}f(n\alpha) - \tfrac{1}{2}f((n+1)\beta) + \tfrac{1}{2}f(n\beta)$$
$$= f(2(n+1)\alpha) - \tfrac{1}{2}f((n+1)\alpha) - \tfrac{1}{2}f\big((n+1)\beta\big).$$

Stąd i z zadania 2.1.41 mamy

$$\lim_{n\to\infty} T_{n(\alpha+\beta)} = \lim_{n\to\infty}\Big(f(2n\alpha) - \ln(2n\alpha) - \tfrac{1}{2}f(n\alpha) + \tfrac{1}{2}\ln(n\alpha) - \tfrac{1}{2}f(n\beta) + \tfrac{1}{2}\ln(n\beta)\Big) + \lim_{n\to\infty}\Big(\ln(2n\alpha) - \tfrac{1}{2}(\ln(n\alpha) + \ln(n\beta))\Big) = \lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n\alpha}{\sqrt{n^2\alpha\beta}} = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha}{\beta}.$$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} T_{n(\alpha+\beta)+k} = \lim_{n\to\infty} T_{n(\alpha+\beta)}$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots, (\alpha+\beta) - 1$, więc sumą rozpatrywanego szeregu jest $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha}{\beta}$.

3.7.4. Zauważmy, że jest to szczególny przypadek zadania poprzedniego z $\alpha = 1$ i $\beta = 4$.

3.7.5. Wystarczy dokonać przestawienia opisanego w zadaniu 3.7.3, przyjmując $\alpha = 4$ oraz $\beta = 1$.

3.7.6. Rozpatrzmy następujący szereg

(1) $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots$$

otrzymany z szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ w ten sposób, że po bloku n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, wyrazów dodatnich następuje jeden wyraz ujemny. Grupując teraz wyrazy tego szeregu następująco

$$\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\Big) + \ldots$$

otrzymamy szereg o postaci

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n^2-n+1} + \frac{1}{n^2-n+3} + \ldots + \frac{1}{n^2+n-1} - \frac{1}{2n}\Big).$$

Niech S_n i T_n oznaczają n-tą sumę częściową odpowiednio szeregu (1) i (2).

Wtedy

$$T_n = S_{\frac{(n+1)n}{2}+n} > \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{k^2+k-1} - \frac{1}{2k}\Big) > \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

3.7.7. Grupując odpowiednio wyrazy badanego szeregu, otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\Big).$$

Ponieważ

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{(4n-1)2n} + \sqrt{(4n-3)2n} - \sqrt{(4n-3)(4n-1)}}{\sqrt{4n-3}\sqrt{4n-1}\sqrt{2n}} > \frac{2\sqrt{2n} - \sqrt{4n-1}}{\sqrt{4n-1}\sqrt{2n}} > \frac{2\sqrt{2n} - \sqrt{4n}}{\sqrt{4n-1}\sqrt{2n}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{4n-1}},$$

więc $\lim_{n\to\infty} S_{3n} = +\infty$, gdzie $\{S_n\}$ oznacza ciąg sum częściowych szeregu podanego w zadaniu. Stąd już łatwo wynika, że $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

3.7.8. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie, S_n oznacza jego n-tą sumę częściową i $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Oznaczmy przez $\{T_n\}$ ciąg sum częściowych szeregu otrzymanego z szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ poprzez dowolne przestawienie jego wyrazów.

Niech teraz $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustalone. Ze zbieżności bezwzględnej szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika, że istnieje $n \in \mathbb{N}$, dla którego

(1) $$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots < \varepsilon.$$

Weźmy m tak duże, aby w sumie T_m występowały wszystkie wyrazy $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Wtedy na mocy (1)

$$|S - T_m| \le |S - S_n| + |S_n - T_m| < 2\varepsilon.$$

3.7.9. [3] Załóżmy najpierw, że $l > 0$. Weźmy takie przestawienie szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(n)$, że w sumie T_n jego n pierwszych wyrazów jest d wyrazów dodatnich i u ujemnych, przy czym $d > u$. Zatem $n = d + u$ oraz

$$T_n = (f(1) - f(2) + f(3) - \ldots - f(2u)) + (f(2u+1) + f(2u+3) + \ldots + f(2d-1)),$$

gdzie wyrażenie w drugim nawiasie zawiera $d - u$ wyrazów, a więc jest zawarte pomiędzy $(d-u)f(2u)$ i $(d-u)f(2d)$. Ponieważ wyrażenie w pierwszym nawiasie dąży do S przy u dążącym do nieskończoności, to tylko wyrażenie w drugim nawiasie wpływa na zmianę sumy szeregu. Niech $\nu(u) = d - u$. Mamy

(1) $$\nu(u)f(2d) < f(2u+1) + f(2u+3) + \ldots + f(2d-1) < \nu(u)f(2u)$$

i stąd oraz z monotoniczności ciągu $\{nf(n)\}$ otrzymujemy

(2) $$\frac{u}{u+\nu(u)} < \frac{f(2u+2\nu(u))}{f(2u)} < 1.$$

Wybierzmy $\nu(u)$ tak, by

(3) $$\lim_{u\to\infty} \nu(u) f(2u) = l.$$

$\left(\text{Można przyjąć np. } \nu(u) = l\left[\frac{1}{f(2u)}\right]\right)$. Wtedy $\lim_{u\to\infty} \frac{\nu(u)}{u} = 0$. Wynika to z faktu, że

$$l = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{2}\frac{\nu(u)}{u} 2u f(2u) \quad \text{i} \quad \lim_{u\to\infty} 2u f(2u) = +\infty.$$

Stąd i z nierówności (2) otrzymujemy $\lim_{u\to\infty} \frac{f(2u+2\nu(u))}{f(2u)} = 1$. Na mocy nierówności (1) i twierdzenia o trzech ciągach mamy więc

$$\lim_{u\to\infty} (f(2u+1) + f(2u+3) + \ldots + f(2d-1)) = l.$$

Wykazaliśmy więc, że $\lim_{u\to\infty} T_{2u+\nu(u)} = S + l$.

Niech teraz $2u + \nu(u) < k < 2(u+1) + \nu(u+1)$. Wtedy

$$0 \le T_k - T_{2u+\nu(u)} + f(2u+2) \le T_{2u+2+\nu(u+1)} - T_{2u+\nu(u)} + f(2u+2).$$

Wyrażenie po prawej stronie ostatniej z nierówności dąży do zera. Oznacza to już, że $\lim_{k\to\infty} T_k = S + l$. Gdy $l < 0$ wystarczy zamienić role d i u.

Udowodniliśmy więc, że jeśli spełniony jest warunek (3), to szereg, którego sumami częściowymi są T_n ma sumę zmienioną o l w stosunku do sumy wyjściowego szeregu.

3.7.10. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustalone. Wtedy

(1) $$\frac{g-\varepsilon}{n} < f(n) < \frac{g+\varepsilon}{n}, \quad n > n_0.$$

Niech ciąg $\{T_n\}$, $n = d + u$ będzie określony tak jak w zadaniu 3.7.9. Załóżmy, że liczba d wyrazów dodatnich jest tak wybrana, że $\lim_{u\to\infty} \frac{d}{u} = k$. Wtedy

$$\begin{aligned}\frac{1}{2u+1} + \frac{1}{2u+3} + \ldots + \frac{1}{2d-1} &= \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2u+1} + \ldots + \frac{1}{2d-1} - \ln(2d-1)\right)\\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2u-1} - \ln(2u-1)\right)\\ &\quad - \left(\frac{1}{2u} + \frac{1}{2u+2} + \ldots + \frac{1}{2d-2}\right) - \ln\frac{2u-1}{2d-1}.\end{aligned}$$

Na podstawie zadania 2.1.41 każde z wyrażeń w dwóch pierwszych nawiasach dąży do stałej Eulera γ. Używając metody z zadania 2.5.8(a), pokazujemy, że wyrażenie w trzecim nawiasie dąży do $\frac{1}{2}\ln k$. Stąd

$$\lim_{u\to\infty} \left(\frac{1}{2u+1} + \frac{1}{2u+3} + \ldots + \frac{1}{2d-1}\right) = \frac{1}{2}\ln k.$$

Wobec nierówności (1)

$$\lim_{u\to\infty} (f(2u+1) + f(2u+3) + \ldots + f(2d-1)) = \frac{1}{2} g \ln k.$$

Zatem suma S szeregu wyjściowego zostaje zmieniona o $\frac{1}{2} g \ln k$.

3.7.11. Wystarczy zastosować przestawienie opisane w zadaniu 3.7.9, przyjmując np. $\nu(u) = l\,[(2u)^p]$.

3.7.12. Zastosować zadanie 3.7.10 i przyjąć $\lim_{u\to\infty} \frac{d}{u} = \alpha$.

3.7.13. Jeśli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ powstaje przez przestawienie wyrazów szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, to z monotoniczności ciągu $\{a_n\}$ wynika

$$a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_m} \le a_1 + a_2 + \ldots + a_m.$$

Przyspieszenie rozbieżności nie jest więc możliwe.

3.7.14. [19] Niech $\{a_{r_n}\}$ będzie podciągiem ciągu $\{a_n\}$ spełniającym warunek $a_{r_n} < \min(2^{-n}, Q_n - Q_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, gdzie $Q_0 = 0$. Wtedy

$$a_{r_1} + a_{r_2} + \ldots + a_{r_n} \le Q_n \quad \text{oraz} \quad a_{r_1} + a_{r_2} + \ldots + a_{r_n} < 1.$$

Zatem ciąg o wyrazach $Q_n - (a_{r_1} + a_{r_2} + \ldots + a_{r_n})$ jest rozbieżny do $+\infty$. Własność ta pozwala na „dosypywanie" kolejno wyrazów szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ niewystępujących w ciągu $\{a_{r_n}\}$ w następujący sposób:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{r_1-1} + a_{r_1} + a_{r_1+1} + \ldots + a_i + a_{r_k} + a_{r_{k+1}} + \ldots + a_{r_n} < Q_n,$$

przy czym dodanie kolejnego wyrazu o wskaźniku większym niż i niewystępującego w ciągu $\{a_{r_n}\}$ nie zachowałoby powyższej nierówności.

3.7.15. [W. Sierpiński, Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie, 1911, 149–158]. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ oznaczają uzupełniające się podszeregi warunkowo zbieżnego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ utworzone odpowiednio z jego kolejnych wyrazów nieujemnych i ujemnych. Niech σ będzie dowolnie zadaną liczbą rzeczywistą. Ponieważ ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ jest rozbieżny do $+\infty$, więc istnieje (najmniejszy) wskaźnik k_1 taki, że

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} > \sigma.$$

Podobnie możemy wybrać najmniejszy wskaźnik n_1 tak, aby

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} + q_1 + q_2 + \ldots + q_{n_1} < \sigma.$$

Kontynuując ten proces, znajdujemy najmniejszy wskaźnik k_2 taki, że

$$p_1+p_2+\ldots+p_{k_1}+q_1+q_2+\ldots+q_{n_1}+p_{k_1+1}+\ldots+p_{k_2}>\sigma$$

oraz najmniejsze n_2, dla którego

$$p_1+p_2+\ldots+p_{k_1}+q_1+q_2+\ldots+q_{n_1}+p_{k_1+1}+\ldots+p_{k_2}+q_{n_1+1}+\ldots+q_{n_2}<\sigma.$$

Można więc określić indukcyjnie dwa ciągi wskaźników $k_1, k_2, \ldots$ oraz $n_1, n_2, \ldots$ i takie przestawienie wyjściowego szeregu, którego suma częściowa kończąca się wyrazem p_{k_m} jest większa niż σ, natomiast suma kończąca się wyrazem q_{n_m} jest mniejsza niż σ. Niech teraz S_n oznacza n-tą sumę częściową tak przestawionego szeregu. Wtedy

$$S_n<\sigma \quad \text{dla} \quad n<k_1, \quad \text{ale} \quad S_n>\sigma \quad \text{dla} \quad k_1\le n<k_1+n_1$$

oraz

$$S_n<\sigma \quad \text{dla} \quad k_m+n_m\le n<k_{m+1}+n_m,$$
$$S_n>\sigma \quad \text{dla} \quad k_{m+1}+n_m\le n<k_{m+1}+n_{m+1},$$

gdzie $m=1,2,\ldots$ Zauważmy, że z określenia ciągów $\{k_m\}$ oraz $\{n_m\}$ wynikają następujące nierówności

$$|S_{k_{m+1}-1+n_m}-\sigma|<p_{k_{m+1}},$$
$$|S_{k_{m+1}+n_m}-\sigma|<p_{k_{m+1}},$$
$$|S_{k_{m+1}+n_m+l}-\sigma|<p_{k_{m+1}} \quad \text{dla} \quad l=1,2,\ldots,n_{m+1}-n_m-1,$$
$$|S_{k_{m+1}+n_{m+1}}-\sigma|<|q_{n_{m+1}}|,$$
$$|S_{k_{m+1}+l+n_{m+1}}-\sigma|<|q_{n_{m+1}}| \quad \text{dla} \quad l=1,2,\ldots,k_{m+2}-k_{m+1}-1.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\lim\limits_{n\to\infty}q_n=0$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\sigma$.

3.7.16. Niech $\{S_m\}$ oraz $\{T_m\}$ oznaczają ciągi sum częściowych odpowiednio szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ i $\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}$. Załóżmy, że $k-l\le n_k\le k+l$ dla wszystkich $k\in\mathbb{N}$. Jeśli teraz $m>l$ i $n_k\le m-l$, to $k-l\le n_k\le m-l$. Stąd $k\le m$, a więc

$$\{1,2,\ldots,m-l\}\subset\{n_1,n_2,\ldots,n_m\}, \tag{1}$$

gdyż jeśli weźmiemy liczbę naturalną $s\le m-l$, to istnieje dokładnie jedno $k\in\mathbb{N}$ takie, że $s=n_k$. Stąd i z powyższych rozważań wynika, że $k\le m$, czyli s jest elementem zbioru $\{n_1,n_2,\ldots,n_m\}$. Z inkluzji (1) wynika, że każde a_n dla $n=1,2,\ldots,m-l$ występuje w sumie częściowej T_m.
Z drugiej strony, jeśli $k\le m$, to $n_k\le k+l\le m+l$. Dlatego wszystkie $a_{n_1},a_{n_2},\ldots,a_{n_m}$ występują w sumie częściowej S_{m+l}. Zatem

$$|S_m-T_m|\le|a_{m-l+1}|+\ldots+|a_{m+l}| \quad \text{dla} \quad m>l.$$

Stąd i ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ wynika, że $\lim\limits_{m\to\infty}S_m=\lim\limits_{m\to\infty}T_m$.

Załóżmy teraz, że ciąg $\{n_k-k\}$ jest nieograniczony. Wtedy szereg otrzymany przez przestawienie wyrazów może być rozbieżny bądź zbieżny do innej sumy (patrz zadania 3.7.2–3.7.6). Może jednak być również zbieżny do tej samej sumy, o czym świadczy następujący przykład.
Rozpatrzmy permutację zbioru liczb naturalnych, która zamienia miejscami liczby $\frac{n(n+1)}{2}$ i $\frac{n(n+3)}{2}$, a pozostałe pozostawia na swoich miejscach. Ponieważ $\frac{n(n+3)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}=n$, więc ciąg $\{n_k-k\}$ jest nieograniczony. Ponadto

$$T_m-S_m=\begin{cases}0, & \text{jeśli} \quad m=\dfrac{n(n+3)}{2},\\ a_{n(n+3)/2}-a_{n(n+1)/2}, & \text{jeśli} \quad \dfrac{n(n+1)}{2}\le m<\dfrac{n(n+3)}{2}.\end{cases}$$

3.7.17. [R.P. Agnew, Proc. Amer. Math. Soc. 6(1955), 563–564]. Niech $S_m=\sum_{k=1}^{m}a_k$, $T_m=\sum_{k=1}^{m}a_{n_k}$. Załóżmy, że m jest tak duże, że $1\in\{n_1,n_2,\ldots,n_m\}$. Ułóżmy liczby ze zbioru $\{n_1,n_2,\ldots,n_m\}$ w porządku rosnącym: $1,2,3,\ldots,\beta_{0,m}$, $\alpha_{1,m}+1,\alpha_{1,m}+2,\ldots,\beta_{1,m},\alpha_{2,m}+1,\alpha_{2,m}+2,\ldots,\beta_{2,m},\ldots,\alpha_{j_m,m}+1,\alpha_{j_m,m}+2,\ldots,\beta_{j_m,m}$, gdzie

$$0<\beta_{0,m}<\alpha_{1,m}<\beta_{1,m}<\alpha_{2,m}<\ldots<\beta_{j_m,m}.$$

Zatem suma częściowa T_m szeregu przestawionego może być zapisana w postaci

$$T_m=S_{\beta_{0,m}}+(S_{\beta_{1,m}}-S_{\alpha_{1,m}})+\ldots+(S_{\beta_{j_m,m}}-S_{\alpha_{j_m,m}}).$$

Stąd $T_m=\sum_{k=1}^{\infty}c_{m,k}S_k$, gdzie

$$c_{m,k}=\begin{cases}1, & \text{jeśli} \quad k=\beta_{l,m},\ l=0,1,\ldots,j_m,\\ -1, & \text{jeśli} \quad k=\alpha_{l,m},\ l=1,2,\ldots,j_m,\\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.}\end{cases}$$

Ponieważ $\lim\limits_{m\to\infty}\beta_{0,m}=+\infty$, więc dla każdego dowolnie ustalonego k mamy $\lim\limits_{m\to\infty}c_{m,k}=0$. Ponadto $\sum_{k=1}^{\infty}c_{m,k}=1$, $m=1,2,\ldots$ i $\sum_{k=1}^{\infty}|c_{m,k}|=2B_m-1$, gdzie B_m oznacza liczbę rozłącznych bloków kolejnych liczb naturalnych występujących w zbiorze $\{n_1,n_2,\ldots,n_m\}$. Zatem na podstawie twierdzenia Toeplitza (zadanie 3.4.37) mamy $\lim\limits_{m\to\infty}T_m=\lim\limits_{m\to\infty}S_m$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje N takie, że $B_m\le N$ dla $m\in\mathbb{N}$.

3.7.18. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ jest zbieżny bezwzględnie i jego sumą jest S. Dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje wtedy k_0 takie, że spełnione są nierówności

$$|c_1+c_2+\ldots+c_{k_0}-S|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{l=k_0+1}^{\infty}|c_l|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Niech teraz m, n będą tak duże, aby dla każdego $l \in \{1, 2, \ldots, k_0\}$ istniały wskaźniki: $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takie, że $c_l = a_{i,k}$. Wtedy

$$|S_{m,n} - S| < |c_1 + c_2 + \ldots + c_{k_0} - S| + \sum_{l=k_0+1}^{\infty} |c_l| < \varepsilon.$$

To dowodzi zbieżności szeregu podwójnego do sumy S. Zupełnie analogicznie można dowieść zbieżności bezwzględnej szeregu podwójnego.

3.7.19. Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$S^* = \sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{i,k}|, \qquad T^* = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|,$$

$$S^*_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|, \qquad T^*_n = \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$. Niech l będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną i niech m, n będą tak duże, by w sumie częściowej $S^*_{m,n}$ występowały wszystkie wyrazy sumy częściowej T^*_l oraz, by spełniona była nierówność $|S^* - S^*_{m,n}| < \varepsilon$. Wtedy $T^*_l \le S^*_{m,n} < S^* + \varepsilon$. Oznacza to, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Niech T, T_n oznaczają odpowiednio jego sumę i n-tą sumę częściową. W celu wykazania równości

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

obierzmy dowolnie $\varepsilon > 0$ i niech l będzie tak duże, by

$$|T^*_l - T^*| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad |T_l - T| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jeśli teraz $S_{m,n}$ oznacza sumę częściową szeregu podwójnego oraz m, n są tak duże, że suma ta zawiera wszystkie składniki sumy T_l, to

$$|S_{m,n} - T| \le |T - T_l| + |T^* - T^*_l| < \varepsilon.$$

3.7.20. Jest to wniosek z dwóch poprzednich zadań.

3.7.21. Załóżmy np., że szereg $\sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}|)$ jest zbieżny. Wtedy zbieżne są wszystkie szeregi o postaci $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| = \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots$ i szereg $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i = \sigma$. Wynika stąd zbieżność szeregów $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} = S_i$, $i = 1, 2, \ldots$ oraz nierówność $|S_i| \le \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Stąd i ze zbieżności szeregu $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i$ wynika bezwzględna zbieżność szeregu $\sum_{i=1}^{\infty} S_i$. Oznacza to, że szereg $\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k})$ jest zbieżny.

3.7.22. Niech $\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k} = S$ oraz $\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{i,k}| = S^*$ i niech $\{S_{m,n}\}$ oraz $\{S^*_{m,n}\}$ oznaczają dwuwskaźnikowe ciągi sum częściowych tych szeregów. Wykażemy najpierw, że szereg iterowany

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| \right)$$

jest zbieżny i jego sumą jest S^*. Istotnie, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie n_0, że $S^* - \varepsilon < S^*_{m,n} < S^*$ dla $m, n > n_0$. Ponieważ przy ustalonym m ciąg $\{S^*_{m,n}\}$ jest niemalejący i ograniczony, więc istnieje $\lim_{n\to\infty} S^*_{m,n} = S^*_m$ i $S^* - \varepsilon \le S^*_m \le S^*$ dla $m > n_0$. Wobec dowolności $\varepsilon > 0$ mamy $\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} S^*_{m,n}) = S^*$. Jak wiemy, ze zbieżności bezwzględnej szeregu iterowanego wynika jego zbieżność. Zatem szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}$ jest zbieżny dla każdego i. Niech S_i oznacza jego sumę. Wykażemy teraz, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taki wskaźnik m_1, że

$$|(S_1 + S_2 + \ldots + S_m) - S| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad m > m_1.$$

Ze zbieżności i zbieżności bezwzględnej szeregów podwójnych wynika, że

$$|S_{m,n} - S| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{oraz} \quad |S^*_{m,n} - S^*| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla} \quad m, n > m_1.$$

Zatem

$$|(S_1 + S_2 + \ldots + S_m) - S| = \left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} - S \right|$$

$$\le |S_{m,n} - S| + \left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{i,k} \right| \le |S_{m,n} - S| + |S^* - S^*_{m,n}| < \varepsilon$$

dla $m > m_1$.
Dowód dotyczący drugiego szeregu iterowanego jest analogiczny.

3.7.23. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n,1} + a_{n-1,2} + a_{n-2,3} + \ldots + a_{1,n})$ możemy traktować jako szereg powstały z szeregu podwójnego przez pewne uporządkowanie jego wyrazów w ciąg. Jeśli jeden z szeregów

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{i,k}|, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (|a_{n,1}| + |a_{n-1,2}| + |a_{n-2,3}| + \ldots + |a_{1,n}|)$$

jest zbieżny, to teza naszego twierdzenia wynika bezpośrednio z zadań 3.7.18, 3.7.19 i 3.7.22. Wystarczy więc pokazać, że ze zbieżności bezwzględnej jednego z szeregów iterowanych wynika zbieżność bezwzględna szeregu otrzymanego z szeregu podwójnego przez jakiekolwiek uporządkowanie jego wyrazów w ciąg. Załóżmy np., że szereg $\sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}|)$ jest zbieżny i niech S^* oznacza jego sumę. Niech $\{c_n\}$ oznacza dowolne uporządkowanie wyrazów macierzy nieskończonej $(a_{i,k})_{i,k=1,2,\ldots}$. Wtedy dla dowolnego $l \in \mathbb{N}$ istnieją tak duże m, n, że

$$|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_l| \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \le S^*.$$

Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest zbieżny bezwzględnie, co oznacza zbieżność bezwzględną szeregu podwójnego (patrz zadanie 3.7.18).

3.7.24. Wiadomo, że $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m$. Stąd $\sum_{\substack{n,k=0 \\ k+n=m}}^{m} \frac{1}{n!k!} = \frac{2^m}{m!}$. Zatem

$$\sum_{\substack{n,k=0 \\ k+n=m}}^{m} \frac{1}{n!k!(n+k+1)} = \frac{2^m}{(m+1)!}.$$

Czyli na podstawie zadania 3.7.23 mamy

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{1}{n!k!(n+k+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{n,k=0 \\ k+n=m}}^{m} \frac{1}{n!k!(n+k+1)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{(m+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1).$$

Ostatnia równość wynika z zadania 2.5.7.

3.7.25. Mamy (patrz zadanie 3.7.23)

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{1}{nk(n+k+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+k+2} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) + \ldots \right\} = \frac{7}{4}.$$

3.7.26. Z zadania 3.7.23 wynika, że

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{n!k!}{(n+k+2)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n!}{(n+k+1)!} - \frac{(n+1)!}{(n+k+2)!} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k+1} \frac{0!}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Stąd i z zadania 3.1.28 otrzymujemy równość podaną w zadaniu.

3.7.27. Suma wyrazów każdego z wierszy macierzy jest skończona i wynosi odpowiednio $x, x(1-x), x(1-x)^2, \ldots$ Ponadto

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \ldots = 1.$$

Oznacza to zbieżność odpowiedniego szeregu iterowanego. Ponieważ sumowanie wyrazów kolumn macierzy daje na przemian 1 i -1, więc drugi szereg iterowany jest rozbieżny. Z zadania 3.7.23 wynika więc, że żaden z szeregów iterowanych nie jest zbieżny bezwzględnie.

3.7.28.

(a) Ze zbieżności bezwzględnej szeregów $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ oraz $\sum_{k=0}^{\infty} y^k$ wynika zbieżność bezwzględna szeregu iterowanego $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^i y^k \right)$, gdyż

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x^i y^k| \right) = \sum_{i=0}^{\infty} |x^i| \left(\frac{1}{1-|y|} \right) = \frac{1}{(1-|x|)(1-|y|)}.$$

Badany szereg podwójny jest więc zbieżny bezwzględnie.

(b) Rozpatrując szeregi iterowane, łatwo sprawdzić, że szereg ten jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha > 1$ i $\beta > 1$.

(c) Porządkując wyrazy i grupując je w ten sposób, aby suma $i + k$ miała ustaloną wartość n, otrzymujemy

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{1}{(i+k)^p} = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \frac{1}{n^p}.$$

Zatem rozważany szereg jest zbieżny dla $p > 2$ i rozbieżny dla $p \leq 2$.

3.7.29.

(a) Oczywiście wystarczy obliczyć sumę szeregu iterowanego

$$\sum_{i=2}^{\infty} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(p+i)^k} \right) = \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{p+i} \cdot \frac{1}{p+i-1} \right) = \frac{1}{p+1}.$$

(b) Podobnie jak w części (a) obliczamy sumę szeregu iterowanego

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)^i} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \ln 2.$$

Ostatnia równość wynika z zadania 3.1.32(a).

(c) Podobnie jak w części (b) mamy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4i-1)^{2k}} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(4i-2)4i} = \frac{1}{4} \ln 2.$$

3.7.30. Skoro $S_{m,n} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = b_{m,n}$, to

$$a_{1,1} = S_{1,1} = b_{1,1},$$
$$a_{1,n} = S_{1,n} - S_{1,n-1} = b_{1,n} - b_{1,n-1}, \quad n > 1,$$
$$a_{m,1} = S_{m,1} - S_{m-1,1} = b_{m,1} - b_{m-1,1}, \quad m > 1.$$

Podobnie, dla $n, m > 1$, mamy

$$a_{m,n} = S_{m,n} - S_{m-1,n} - (S_{m,n-1} - S_{m-1,n-1})$$
$$= b_{m,n} - b_{m-1,n} - (b_{m,n-1} - b_{m-1,n-1}), \quad n, m > 1.$$

3.7.31. Ponieważ $S_{m,n} = (-1)^{m+n}\left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n}\right)$, więc dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie n_0, że dla $m, n > n_0$ mamy

$$|S_{m,n}| < \varepsilon,$$

co oznacza zbieżność szeregu podwójnego do zera. Szeregi iterowane są rozbieżne. Mamy bowiem

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = S_{i,n} - S_{i-1,n} = (-1)^{i+n}\frac{3}{2^i} + (-1)^{i+n}\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Zatem szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}$ jest rozbieżny dla każdego naturalnego i.

3.7.32. Mamy

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x|^{ik}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x|^i}{1-|x|^i}.$$

Zbieżność ostatniego szeregu wynika np. z kryterium d'Alemberta. Oznacza to, że szereg iterowany jest zbieżny bezwzględnie. Na podstawie zadania 3.7.23 jest więc

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} x^{ik} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}.$$

Stosując teraz zadanie 3.7.19 i porządkując wskaźniki (i,k) w ciąg według wielkości iloczynów ik i łącząc w jedną grupę składniki odpowiadające tej samej wartości iloczynu, otrzymujemy

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} x^{ik} = \sum_{n=1}^{\infty}\theta(n)x^n,$$

gdyż liczba dzielników liczby n równa jest liczbie wskaźników (i,k), dla których $ik = n$. Ponadto, dla $n = 2, 3, \ldots$, mamy

$$S_{n,n} - S_{n-1,n-1} = x^n + x^{2n} + \ldots + x^{(n-1)n} + x^{n^2} + x^{n(n-1)}$$
$$+ \ldots + x^{n2} + x^n = 2\frac{x^n - x^{n^2}}{1-x^n} + x^{n^2}.$$

Oczywiście $S_{1,1} = x = 2\frac{x-x}{1-x} + x$. Zatem z równości

$$S_{n,n} = (S_{n,n} - S_{n-1,n-1}) + (S_{n-1,n-1} - S_{n-2,n-2}) + \ldots + S_{1,1}$$

i z udowodnionej już części zadania otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n - x^{n^2}}{1-x^n} + \sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}.$$

Stąd już wynika ostatnia z równości naszego zadania.

3.7.33. Podobnie jak w poprzednim zadaniu można łatwo udowodnić zbieżność bezwzględną szeregu iterowanego. Zatem pierwsza równość wynika bezpośrednio z zadania 3.7.23. Drugą równość dowodzimy, porządkując wyrazy szeregu podwójnego tak jak w poprzednim zadaniu.

3.7.34.

(a) Z własności szeregów iterowanych otrzymujemy

$$\sum_{p=2}^{\infty} S_p = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n} + \ldots = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)} = 1.$$

(b) Podobnie jak w części (a) mamy

$$\sum_{p=2}^{\infty}(-1)^p S_p = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}.$$

3.7.35. Niech $\mathbf{B}$ oznacza zbiór tych liczb naturalnych większych bądź równych 2, które nie są potęgami żadnej liczby naturalnej. Wtedy

$$\mathbf{A} = \{k^n : n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ k \in \mathbf{B}\}.$$

Ponieważ $\frac{1}{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n^j}$, $n \geq 2$, więc na mocy zadań 3.7.23 oraz 3.7.34 otrzymujemy

$$\sum_{n\in\mathbf{A}}\frac{1}{n-1} = \sum_{n\in\mathbf{A}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n^j} = \sum_{k\in\mathbf{B}}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k^{nj}}$$
$$= \sum_{k\in\mathbf{B}}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{k^{nj}} = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{k^n} = 1.$$

3.7.36. [G.T. Williams, Amer. Math. Monthly, 60 (1953), 19–25]. Lewa strona równości może być zapisana w postaci

$$(*) \qquad \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k^2}\frac{1}{j^{2n-2}} + \frac{1}{k^4}\frac{1}{j^{2n-4}} + \ldots + \frac{1}{k^{2n-2}}\frac{1}{j^2}\right).$$

Wykonując w powyższym wyrażeniu sumowanie w nawiasie, otrzymujemy

$$(**) \qquad \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1,\,k\neq j}^{N}\frac{j^{2-2n}-k^{2-2n}}{k^2-j^2}+(n-1)\frac{1}{j^{2n}}\right).$$

Ponadto mamy

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1,\,k\neq j}^{N}\frac{j^{2-2n}-k^{2-2n}}{k^2-j^2} &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1,\,k\neq j}^{N}\frac{j^{2-2n}}{k^2-j^2}-\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1,\,k\neq j}^{N}\frac{k^{2-2n}}{k^2-j^2}\\ &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1,\,k\neq j}^{N}\frac{1}{j^{2n-2}}\frac{1}{k^2-j^2}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1,\,k\neq j}^{N}\frac{1}{k^{2n-2}}\frac{1}{j^2-k^2}\\ &= 2\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n-2}}\sum_{k=1,\,k\neq j}^{N}\frac{1}{k^2-j^2}.\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1,\,k\neq j}^{N}\frac{j^{2-2n}-k^{2-2n}}{k^2-j^2}+(n-1)\frac{1}{j^{2n}}\right)\\ (**) \qquad &= \lim_{N\to\infty}\left(2\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n-2}}\sum_{k=1,\,k\neq j}^{N}\frac{1}{k^2-j^2}+(n-1)\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n}}\right).\end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że

$$\begin{aligned}2j\sum_{k=1,\,k\neq j}^{N}\frac{1}{k^2-j^2} &= \sum_{k=1,\,k\neq j}^{N}\frac{1}{k-j}-\sum_{k=1,\,k\neq j}^{N}\frac{1}{k+j}\\ &= \sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k-j}+\sum_{k=j+1}^{N}\frac{1}{k-j}-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k+j}+\frac{1}{2j}\\ &= -\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{N-j}\frac{1}{k}-\sum_{k=j+1}^{N+j}\frac{1}{k}+\frac{1}{2j} = -\sum_{k=1}^{N+j}\frac{1}{k}+\frac{1}{j}+\sum_{k=1}^{N-j}\frac{1}{k}+\frac{1}{2j}\\ &= \frac{3}{2j}-\left(\frac{1}{N-j+1}+\frac{1}{N-j+2}+\ldots+\frac{1}{N+j}\right).\end{aligned}$$

Stąd i z równości $(***)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1,\,k\neq j}^{N}\frac{j^{2-2n}-k^{2-2n}}{k^2-j^2}+(n-1)\frac{1}{j^{2n}}\right)\\ &\quad = (n+\tfrac{1}{2})\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n}}-\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n-1}}\left(\frac{1}{N-j+1}+\ldots+\frac{1}{N+j}\right).\end{aligned}$$

Ponieważ $0<\frac{1}{N-j+1}+\ldots+\frac{1}{N+j}<\frac{2j}{N-j+1}$, więc

$$\begin{aligned}0 &< \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n-1}}\left(\frac{1}{N-j+1}+\ldots+\frac{1}{N+j}\right)\\ &< 2\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n-2}}\frac{1}{N-j+1}\le 2\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}\frac{1}{N-j+1}\\ &= \frac{2}{N+1}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{j}+\frac{1}{N-j+1}\right) = \frac{4}{N+1}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}\le\frac{4}{N+1}(\gamma+\ln(N+1)),\end{aligned}$$

gdzie γ jest stałą Eulera określoną w zadaniu 2.1.41. Stąd i z wzoru $(*)$

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k^2}\frac{1}{j^{2n-2}}+\frac{1}{k^4}\frac{1}{j^{2n-4}}+\ldots+\frac{1}{k^{2n-2}}\frac{1}{j^2}\right)\\ &\quad = \lim_{N\to\infty}(n+\tfrac{1}{2})\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n}} = (n+\tfrac{1}{2})\zeta(2n).\end{aligned}$$

3.7.37. Przyjmując $n=2$ w równości podanej w poprzednim zadaniu, otrzymujemy

$$\zeta(2)\zeta(2) = (2+\tfrac{1}{2})\zeta(4).$$

Stąd i z zadania 3.1.28 mamy

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Podobnie, kładąc $n=3$, otrzymujemy

$$\zeta(6) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Analogicznie

$$\zeta(8) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}.$$

3.8 ILOCZYNY NIESKOŃCZONE

3.8.1.

(a) Mamy

$$P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{n+1}{2n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}.$$

(b) $$\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$$

$$=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)((k+1)^2-(k+1)+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}=\frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{2}{3}.$$

(c) Jeśli $x=0$, to wartość iloczynu nieskończonego wynosi 1. Jeśli $x\neq 2^m\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, to $\cos\frac{x}{2^m}\neq 0$ oraz $\sin\frac{x}{2^n}\neq 0$. Zatem

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{x}{2^{k-1}}}{\sin\frac{x}{2^k}}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\sin x}{x}.$$

(d) Podobnie jak w poprzednim zadaniu mamy

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cosh\frac{x}{2^n}=\begin{cases}\dfrac{\sinh x}{x} & \text{dla } x\neq 0,\\ 1 & \text{dla } x=0.\end{cases}$$

(e) Dla $|x|<1$ mamy

$$\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)=\prod_{k=0}^{n}\frac{1-x^{2^{k+1}}}{1-x^{2^k}}=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{1-x}.$$

(f) $$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}=\frac{2(n+1)}{n+2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}2.$$

(g) Ponieważ

$$\prod_{k=1}^{n}a^{\frac{(-1)^k}{k}}=a^{\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}},$$

więc na podstawie ciągłości funkcji wykładniczej oraz na podstawie zadania 3.1.32(a) otrzymujemy $\prod_{n=1}^{\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}=a^{-\ln 2}$.

(h) $$\prod_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}}{1+\frac{1}{k}}=\frac{\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{n+1}=\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n}\cdot\frac{n}{n+1}.$$

Stąd i z zadania 2.1.41

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{\gamma},$$

gdzie γ jest stałą Eulera.

(i) Mamy

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{(3k)^2}{(3k-1)(3k+1)}=\prod_{k=1}^{n}\frac{(3k)^3}{(3k-1)3k(3k+1)}=\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n+1)!}.$$

Korzystając teraz ze wzoru Stirlinga

$$n!=\alpha_n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n,\quad\text{gdzie}\quad\lim_{n\to\infty}\alpha_n=1,$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{3n}(2\pi)^{3/2}n^{3n+3/2}\mathrm{e}^{-3n}}{(2\pi)^{1/2}(3n+1)^{3n+1+1/2}\mathrm{e}^{-3n-1}}$$

$$=2\pi\mathrm{e}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{3n}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{3/2}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

3.8.2.

(a) $$P_{2n}=\prod_{k=2}^{2n}\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right)=1+\frac{1}{2n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1,$$

$$P_{2n-1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}=1.$$

(b) $$P_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}=n+1\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

Oznacza to, że rozpatrywany iloczyn nieskończony jest rozbieżny.

(c) $$P_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

a więc iloczyn ten jest również rozbieżny.

3.8.3. Zauważmy najpierw, że

(1) $$a_1+a_2+\ldots+a_n\leq(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n),$$

gdyż wszystkie a_n są nieujemne. Ponadto ponieważ $\mathrm{e}^x\geq 1+x$ dla $x\geq 0$, więc

(2) $$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)\leq\mathrm{e}^{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

Z nierówności (1) i (2) oraz z ciągłości funkcji wykładniczej wynika, że zbieżność iloczynu nieskończonego $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ jest równoważna zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

3.8.4. Załóżmy najpierw, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny. Wtedy $\sum_{n=N}^{\infty}a_n<\frac{1}{2}$ dla dostatecznie dużego N. Z zadania 1.2.1 wiemy, że

$$\prod_{k=N}^{n}(1-a_k)\geq 1-\sum_{k=N}^{n}a_k>\frac{1}{2}.$$

Ponieważ $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1-a_k) = P_{N-1}\prod_{k=N}^{n}(1-a_k)$, więc ciąg o wyrazach $\frac{P_n}{P_{N-1}}$ jest zbieżny (jako ciąg malejący i ograniczony od dołu) do pewnej liczby P z przedziału $\left[\frac{1}{2},1\right]$. Stąd $\lim_{n\to\infty} P_n = P_{N-1}P \neq 0$.

Załóżmy teraz, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny. Jeśli granica ciągu $\{a_n\}$ jest różna od zera bądź nie istnieje, to granica ciągu $\{1-a_n\}$ jest odpowiednio różna od 1 bądź nie istnieje. Nie jest więc spełniony warunek konieczny zbieżności iloczynu nieskończonego. Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, to $0 \leq a_n < 1$ dla $n \geq N$. Wobec równości (patrz zadanie 2.5.7)

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}\right) + \dots$$

otrzymujemy $1 - x \leq \mathrm{e}^{-x}$ dla $0 \leq x < 1$. Zatem

$$0 \leq \prod_{k=N}^{n}(1-a_k) \leq \mathrm{e}^{-\sum_{k=N}^{n} a_k}, \quad n \geq N.$$

Stąd $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=N}^{n}(1-a_k) = 0$. Czyli iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ jest rozbieżny.

3.8.5. Zauważmy, że

$$\prod_{k=1}^{2n}(1+a_k) = \prod_{k=1}^{n}(1+a_{2k-1})(1+a_{2k})$$
$$= \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k\sqrt{k}}\right).$$

Zatem, na podstawie zadania 3.8.4, rozpatrywany iloczyn jest zbieżny.

3.8.6.

(a) Ponieważ $\cos\frac{1}{n} = 1 - \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ oraz $1 \neq 1-\cos\frac{1}{n} > 0$, $n \in \mathbb{N}$, więc na podstawie zadania 3.8.4 zbieżność badanego iloczynu wynika ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ (patrz zadanie 3.2.1(e)).

(b) Podobnie jak w (a) zbieżność badanego iloczynu jest równoważna zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)$. Zbieżność tego szeregu wynika z zadania 3.2.5(d).

(c) Mamy

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{n}} = 1 + \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{n}}.$$

Ponieważ $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{n}} > 0$ dla $n \geq 2$ oraz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = 2,$$

więc na podstawie zadania 3.8.3 badany iloczyn jest rozbieżny.

(d) Z faktu, że $\lim_{n\to\infty}\frac{1-n\ln(1+1/n)}{1/n} = \frac{1}{2}$ oraz z zadania 3.8.4 wynika rozbieżność rozpatrywanego iloczynu.

(e) Rozbieżność iloczynu wynika z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$ (patrz 3.2.5(a)).

(f) Ponieważ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n} = 1$, więc z zadania 2.5.5 wynika, że $\lim_{n\to\infty}\frac{(1/n^2)\ln n}{\sqrt[n^2]{n}-1} =$ 1. Tak więc zbieżność iloczynu wynika ze zbieżności szeregu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$.

3.8.7. Ze względu na zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ możemy założyć, że $|a_n| < 1$. Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2} \tag{1}$$

i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, więc zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest równoważna zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$. Wiadomo, że zbieżność ostatniego szeregu jest równoważna zbieżności iloczynu $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$.

Załóżmy teraz, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny. Z równości (1) wynika, że dla dostatecznie dużych n spełniona jest nierówność

$$a_n - \ln(1+a_n) > \frac{1}{4}a_n^2.$$

To z kolei implikuje rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ do $-\infty$, co jest równoważne rozbieżności iloczynu $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ do zera.

3.8.8. Wystarczy zastosować twierdzenie z poprzedniego zadania.

3.8.9. Rozbieżność badanego iloczynu wynika z zadania 3.8.7.

3.8.10. Podobnie jak w zadaniu 3.8.7, wystarczy skorzystać z równości

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\ln(1+a_n) - a_n + \frac{1}{2}a_n^2\right|}{|a_n|^3} = \frac{1}{3}.$$

3.8.11. Stosując kryterium z poprzedniego zadania, pokazujemy, że rozpatrywany iloczyn jest zbieżny dla $\frac{1}{3} < \alpha$. Ponadto szeregi

$$-\frac{1}{2^\alpha}+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^{2\alpha}}\right)-\frac{1}{3^\alpha}+\left(\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{3^{2\alpha}}\right)-\frac{1}{4^\alpha}+\dots$$

oraz

$$\left(-\frac{1}{2^\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^{2\alpha}}\right)^2+\left(-\frac{1}{3^\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{3^{2\alpha}}\right)^2+\left(-\frac{1}{4^\alpha}\right)^2+\dots$$

są rozbieżne dla $\alpha\le\frac{1}{2}$.

3.8.12. W celu uogólnienia twierdzenia wystarczy skorzystać z równości

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\ln(1+a_n)-a_n+\frac{1}{2}a_n^2-\frac{1}{3}a_n^3+\dots+\frac{(-1)^k}{k}a_n^k\right|}{|a_n|^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$$

dla $k\ge 2$.

3.8.13. Ze wzoru Taylora otrzymujemy

$$(*)\qquad \ln(1+a_n)=a_n-\frac{1}{2(1+\theta_n)^2}a_n^2=a_n-\Theta_n a_n^2,$$

przy czym $\frac{2}{9}<\Theta_n<2$, jeśli $|a_n|<\frac{1}{2}$. Z równości $(*)$, dla dostatecznie dużych n_1,n_2 takich, że $n_1<n_2$, otrzymujemy

$$\sum_{n=n_1}^{n_2}\ln(1+a_n)=\sum_{n=n_1}^{n_2}a_n-\Theta\sum_{n=n_1}^{n_2}a_n^2,\quad\text{gdzie}\quad\Theta\in\left(\frac{2}{9},2\right).$$

Z powyższej równości i z warunku Cauchy'ego zbieżności szeregów wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

3.8.14. Ze zbieżności iloczynów $\prod_{n=1}^\infty(1+a_n)$ i $\prod_{n=1}^\infty(1-a_n)$ wynika zbieżność iloczynu $\prod_{n=1}^\infty(1-a_n^2)$. Stąd i z zadania 3.8.4 wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$. Teraz wystarczy zastosować poprzednie zadanie.

3.8.15. Ponieważ ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny monotonicznie do 1, więc $a_n=1+\alpha_n$, gdzie $\{\alpha_n\}$ jest ciągiem monotonicznie zbieżnym do zera. Zbieżność rozpatrywanego iloczynu jest więc równoważna zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}\ln(1+\alpha_n).$$

Na podstawie kryterium Leibniza szereg ten jest zbieżny.

3.8.16.

(a) Ponieważ $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=1+1=2$, więc badany iloczyn jest rozbieżny.

(b) Zbieżność iloczynu $\prod_{n=1}^\infty a_n^2$ jest równoważna zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^\infty\ln a_n^2$. Szereg ten jest zbieżny, gdyż $\ln a_n^2=2\ln a_n$.

(c), (d) Podobnie jak w (b) wystarczy zauważyć, że

$$\ln(a_nb_n)=\ln a_n+\ln b_n\quad\text{oraz}\quad\ln\frac{a_n}{b_n}=\ln a_n-\ln b_n.$$

3.8.17. Załóżmy najpierw, że szereg $\sum_{n=1}^\infty x_n^2$ jest zbieżny. Wtedy $\lim_{n\to\infty}x_n=0$. Zbieżność rozpatrywanych iloczynów wynika z zadania 3.8.4 oraz z równości

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos x_n}{x_n^2}=\frac{1}{2}\quad\text{oraz}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x_n}{x_n}}{x_n^2}=\frac{1}{6}.$$

Jeśli jeden z podanych iloczynów jest zbieżny, to również $\lim_{n\to\infty}x_n=0$. Wtedy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^\infty x_n^2$ wynika również z powyższych równości.

3.8.18. Mamy

$$a_1\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{a_k}{S_{k-1}}\right)=a_1\prod_{k=1}^n\frac{S_k}{S_{k-1}}=S_n.$$

3.8.19. Patrz np. rozwiązanie zadania 3.1.9.

3.8.20. Ponieważ ciąg iloczynów częściowych $\{P_n\}$ jest rosnący, więc z rozbieżności iloczynu wynika, że $P=\lim_{n\to\infty}P_n=+\infty$. Stąd i z poprzedniego zadania otrzymujemy tezę naszego twierdzenia.

3.8.21. Wystarczy w poprzednim zadaniu przyjąć $a_n=x^n$.

3.8.22. Załóżmy najpierw, że iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^\infty a_n$ jest zbieżny, czyli $\lim_{n\to\infty}P_n=P\ne 0$, gdzie $P_n=\prod_{k=1}^n a_k$. Wynika stąd, że istnieje taka $\alpha>0$, że $|P_n|\ge\alpha$ dla wszystkich n. Ponieważ ciąg $\{P_n\}$ jest zbieżny, więc spełnia warunek Cauchy'ego, czyli dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba naturalna n_0, że dla wszystkich $n\ge n_0$ oraz wszystkich $k\in\mathbb{N}$ mamy

$$|P_{n+k}-P_{n-1}|<\varepsilon\alpha.$$

Stąd

$$\left|\frac{P_{n+k}}{P_{n-1}}-1\right|<\frac{\varepsilon\alpha}{|P_{n-1}|}\le\varepsilon\quad\text{dla}\quad n\ge n_0.$$

Załóżmy teraz, że dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje takie n_0, że dla wszystkich $n\ge n_0$ i wszystkich $k\in\mathbb{N}$ spełniony jest warunek

$$(*)\qquad |a_na_{n+1}\cdot\ldots\cdot a_{n+k}-1|<\varepsilon.$$

Kładąc w warunku $(*)$ $\varepsilon = \frac{1}{2}$, otrzymujemy

$$(**) \qquad \frac{1}{2} < \frac{P_{n-1}}{P_{n_0}} < \frac{3}{2} \quad \text{dla} \quad n > n_0.$$

Przyjmując następnie w $(*)$ za ε wielkość $\frac{2\varepsilon}{3|P_{n_0}|}$, znajdujemy takie n_1, że

$$\left|\frac{P_{n+k}}{P_{n-1}} - 1\right| < \frac{2\varepsilon}{3|P_{n_0}|} \quad \text{dla} \quad n \geq n_1,\ k \in \mathbb{N}.$$

Zatem dla $n > \max\{n_0, n_1\}$ mamy

$$|P_{n+k} - P_{n-1}| < \frac{2\varepsilon}{3}\left|\frac{P_n}{P_{n_0}}\right| < \varepsilon.$$

Oznacza to, że ciąg $\{P_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, a więc jest zbieżny. Ze względu na nierówność $(**)$ jego granicą jest liczba różna od zera.

3.8.23. Mamy

$$\prod_{k=1}^{2n}(1+x^k) = \prod_{k=1}^{2n}\frac{1-x^{2k}}{1-x^k} = \frac{\prod_{k=1}^{2n}(1-x^{2k})}{\prod_{k=1}^{2n}(1-x^k)}$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{2n}(1-x^{2k})}{\prod_{k=1}^{n}(1-x^{2k})\prod_{k=1}^{n}(1-x^{2k-1})} = \frac{\prod_{k=n+1}^{2n}(1-x^{2k})}{\prod_{k=1}^{n}(1-x^{2k-1})}.$$

Stąd i z poprzedniego zadania wynika żądana równość.

3.8.24. Wystarczy zastosować twierdzenie z zadania 3.8.3.

3.8.25. Zauważmy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prawdziwa jest nierówność

$$|(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n) - 1| \leq (1+|x_1|)(1+|x_2|)\cdot\ldots\cdot(1+|x_n|) - 1.$$

Stąd i z zadania 3.8.22 wynika już nasze twierdzenie.

3.8.26. Niech $P_n = (1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n), n \in \mathbb{N}$. Wtedy $P_n - P_{n-1} = P_{n-1}a_n$ oraz

$$P_n = P_1 + (P_2 - P_1) + \ldots + (P_n - P_{n-1}) = P_1 + P_1a_2 + P_2a_3 + \ldots + P_{n-1}a_n.$$

Zatem

$$P_n = (1+a_1)+a_2(1+a_1)+a_3(1+a_1)(1+a_2)+\ldots+a_n(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_{n-1}),$$

czyli

$$P_n = (1+a_1)+(a_2+a_1a_2)+(a_3+a_1a_3+a_2a_3+a_1a_2a_3)+\ldots$$
$$+(a_n+a_1a_n+\ldots+a_{n-1}a_n+a_1a_2a_n+\ldots+a_{n-2}a_{n-1}a_n+\ldots+a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}a_n).$$

Zauważmy, że ze zbieżności bezwzględnej iloczynu nieskończonego $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ wynika zbieżność bezwzględna szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ oraz szeregu

$$1 + a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_{n-1}).$$

Ten ostatni szereg można potraktować jako szereg powstały przez odpowiednie uporządkowanie szeregu podwójnego, którego wyrazy można zapisać w postaci macierzy nieskończonej

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots \\ a_1a_2 & a_1a_3 & a_2a_3 & a_1a_4 & \ldots \\ a_1a_2a_3 & a_1a_2a_4 & a_1a_3a_4 & a_2a_3a_4 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Na podstawie zadania 3.7.18 szereg podwójny jest również zbieżny bezwzględnie. Zatem z zadania 3.7.22 wynika zbieżność bezwzględna szeregów iterowanych oraz równość podana w naszym zadaniu.

3.8.27. Ze zbieżności bezwzględnej szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ wynika zbieżność bezwzględna szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx$ dla każdego rzeczywistego x. Wystarczy teraz zastosować poprzednie zadanie, podstawiając a_nx zamiast a_n.

3.8.28. Oczywiście, przy założeniu $|q| < 1$, iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^nx)$ jest zbieżny bezwzględnie dla każdego rzeczywistego x (patrz zadanie 3.8.3). Możemy więc skorzystać z poprzedniego zadania, przyjmując $a_n = q^n$.
Niech teraz $f(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^nx) = 1 + A_1x + A_2x^2 + \ldots$
Wtedy $(1+qx)f(qx) = f(x)$. Z powyższych równości, poprzez porównanie współczynników przy x w odpowiedniej potędze, otrzymujemy

$$A_1 = \frac{q}{1-q} \quad \text{oraz} \quad A_n = A_{n-1}\frac{q^n}{1-q^n} \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, \ldots$$

Następnie metodą indukcji matematycznej pokazujemy, że

$$A_n = \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdot\ldots\cdot(1-q^n)}.$$

3.8.29. Rozwiązanie jest analogiczne do rozwiązania poprzedniego zadania. Wystarczy skorzystać z zależności $(1+qx)f(q^2x) = f(x)$, gdzie

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}x).$$

3.8.30. Mamy

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_nx)\left(1+\frac{a_n}{x}\right)=\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}A_kx^k\right)\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{x^k}\right)$$
$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}A_kx^k\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{x^k}.$$

Ze zbieżności bezwzględnej szeregów $\sum_{k=1}^{\infty}A_kx^k$ oraz $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{x^k}$ wynika zbieżność bezwzględna ich iloczynu Cauchy'ego (patrz rozwiązanie zadania 3.6.1). Ciąg wyrazów tego iloczynu można traktować jako pewne uporządkowanie wyrazów szeregu podwójnego

$$\begin{pmatrix} A_1A_1 & A_2A_2 & A_3A_3 & \dots \\ A_2A_1\left(x+\frac{1}{x}\right) & A_3A_2\left(x+\frac{1}{x}\right) & A_4A_3\left(x+\frac{1}{x}\right) & \dots \\ A_3A_1\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) & A_4A_2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) & A_5A_3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}$$

Stąd oraz z zadań 3.7.18 i 3.7.22 otrzymujemy równość

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_kx^k\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{x^k}=(A_1A_1+A_2A_2+A_3A_3+\dots)$$
$$+(A_2A_1+A_3A_2+\dots)\left(x+\frac{1}{x}\right)+(A_3A_1+A_4A_2+\dots)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\dots.$$

3.8.31. [3] Na podstawie zadania 3.8.30 mamy

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}x)\left(1+\frac{q^{2n-1}}{x}\right)=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right).$$

Niech

$$F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}x)\left(1+\frac{q^{2n-1}}{x}\right).$$

Wtedy, korzystając z równości $qxF(q^2x)=F(x)$, otrzymujemy

$$B_1=B_0q,\quad B_n=B_{n-1}q^{2n-1},$$

skąd indukcyjnie dowodzimy, że

$$B_n=B_0q^{n^2},\quad n=1,2,\dots$$

Zatem

$$F(x)=B_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\right).$$

Wystarczy teraz znaleźć B_0. W tym celu korzystamy z zadań 3.8.29 oraz 3.8.30. Niech $P_n=\prod_{k=1}^{n}(1-q^{2k})$ i $P=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$. Wtedy

$$B_0q^{n^2}=B_n=A_n+A_1A_{n+1}+\dots=\frac{q^{n^2}}{P_n}+\frac{q^{(n+1)^2+1}}{P_1P_{n+1}}+\dots$$

Zatem

$$P_nB_0-1<\frac{q^{2n}}{P^2}+\frac{q^{4n}}{P^2}+\dots$$

Stąd, przechodząc do granicy, otrzymujemy $B_0=\frac{1}{P}$.

3.8.32. Wystarczy w poprzednim zadaniu przyjąć
(a) $x=-1$. **(b)** $x=1$. **(c)** $x=q$.

3.8.33. Zauważmy, że dla $n>1$

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{x-k}{x+k}-\prod_{k=1}^{n}\frac{x-k}{x+k}\right).$$

Stąd

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{1+x}+\sum_{k=2}^{n}a_k=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{x-k}{x+k}.$$

Jeśli x jest liczbą naturalną, to $S_n=\frac{1}{2}$ dla dostatecznie dużych n. Załóżmy teraz, że x nie jest liczbą naturalną. Pokażemy, że $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$. W tym celu skorzystamy z równości

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{x-k}{x+k}\right|=e^{\lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{x-k}{x+k}\right|}.$$

Ponieważ, począwszy od pewnego wskaźnika, mamy $\left|\frac{x-k}{x+k}\right|=-\left(1-\frac{2k}{x+k}\right)$, więc z zadania 3.8.4 wynika, że powyższa granica wynosi 0, co oznacza, że $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$.

3.8.34. Załóżmy, że iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{\infty}(1+ca_n)$ jest zbieżny dla $c=c_0$ oraz dla $c=c_1$, gdzie $c_0\neq c_1$. Wtedy iloczyny:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+c_1a_n)^{\frac{c_0}{c_1}},\quad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+c_1a_n)^{\frac{c_0}{c_1}}}{1+c_0a_n}$$

są także zbieżne. Ponadto

$$\frac{(1+c_1a_n)^{\frac{c_0}{c_1}}}{1+c_0a_n}=1+\frac{c_0(c_0-c_1)}{2}a_n^2(1+\varepsilon_n),$$

gdzie $\varepsilon_n \to 0$, gdy $n \to \infty$. Zatem, na podstawie zadań 3.8.3 oraz 3.8.4, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny. Z zadania 3.8.13 wynika więc także zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Zbieżne są więc szeregi $\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n)^2$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$, gdzie c oznacza dowolną liczbę rzeczywistą. Stąd i z zadania 3.8.7 wynika już teza naszego twierdzenia.

3.8.35. Zbieżność tego szeregu dla x będącego liczbą całkowitą jest oczywista. Załóżmy teraz, że x_0 nie jest liczbą całkowitą i że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \prod_{k=0}^{n}(x_0^2-k^2)$ jest zbieżny. Dla dowolnie ustalonego $x \in \mathbb{R}$ rozpatrzmy ciąg o wyrazach

$$b_n = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(x^2-k^2)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x_0^2-k^2)}.$$

Mamy

$$b_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{x^2-k^2}{x_0^2-k^2} = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{x^2-x_0^2}{x_0^2-k^2}\right).$$

Stąd już widać, że począwszy od pewnego wskaźnika ciąg $\{b_n\}$ jest monotoniczny. Ponadto ze zbieżności iloczynu $\prod_{k=0}^{\infty} \frac{x^2-k^2}{x_0^2-k^2}$ wynika ograniczoność ciągu $\{b_n\}$. Ponieważ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \prod_{k=0}^{n}(x^2-k^2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \prod_{k=0}^{n}(x_0^2-k^2)b_n,$$

to zbieżność badanego szeregu wynika z kryterium Abela zbieżności szeregów.

3.8.36.

(a) Mamy

$$\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_n^{kx}}.$$

Mnożąc skończoną liczbę powyższych równości, otrzymujemy

$$(*) \qquad \prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}{}'\frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^{p_N}\frac{1}{k^x}+\sum_{k=p_N+1}^{\infty}{}'\frac{1}{k^x},$$

gdzie $\sum'$ oznacza sumowanie po tych liczbach naturalnych, których rozkład na czynniki pierwsze zawiera tylko liczby $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Stąd

$$0 < \prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} - \sum_{k=1}^{p_N}\frac{1}{k^x} = \sum_{k=p_N+1}^{\infty}{}'\frac{1}{k^x} < \sum_{k=p_N+1}^{\infty}\frac{1}{k^x}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{N\to\infty}\sum_{k=p_N+1}^{\infty}\frac{1}{k^x} = 0$, więc

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}.$$

(b) Wykorzystując równość $(*)$ z części (a), otrzymujemy

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1} > \sum_{k=1}^{p_N}\frac{1}{k}.$$

Stąd i z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ wynika rozbieżność iloczynu $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ do zera, co jest równoważne z rozbieżnością szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ (zadanie 3.8.4).

3.8.37. [17]

(a) Przyjmując we wzorze de Moivre'a $m = 2n+1$, otrzymujemy

$$\sin(2n+1)t = (2n+1)\cos^{2n}t\sin t - \binom{2n+1}{3}\cos^{2n-2}t\sin^3 t + \ldots + (-1)^n\sin^{2n+1}t.$$

Oznacza to, że

$$(1) \qquad \sin(2n+1)t = \sin t\, W(\sin^2 t),$$

gdzie $W(u)$ jest wielomianem stopnia $\le n$. Ponieważ lewa strona tej równości zeruje się dla $t_k = \frac{k\pi}{2n+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, należących do przedziału $(0, \frac{\pi}{2})$, więc $u_k = \sin^2 t_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, są zerami wielomianu $W(u)$. Dlatego

$$W(u) = A\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{u}{\sin^2 t_k}\right).$$

Stąd i z równości (1)

$$(2) \qquad \sin(2n+1)t = A\sin t\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2 t}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right).$$

Obliczymy teraz stałą A. Mamy $A = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} = 2n+1$. Wstawiając otrzymaną wartość A do wzoru (2) oraz przyjmując $t = \frac{x}{2n+1}$, otrzymujemy

$$\sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right). \tag{3}$$

Ustalmy teraz $x \in \mathbb{R}$ oraz $m \in \mathbb{N}$ tak, aby $|x| < (m+1)\pi$ i niech n będzie większe niż m. Wtedy na podstawie równości (3)

$$\sin x = P_{m,n}Q_{m,n}, \tag{4}$$

gdzie

$$P_{m,n} = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right),$$

$$Q_{m,n} = \prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right).$$

Przechodząc z n do nieskończoności, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} P_{m,n} = x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{5}$$

Stąd i z równości (4) wynika, że dla $x \neq k\pi$ istnieje granica $\lim_{n\to\infty} Q_{m,n} = Q_m$.
Teraz oszacujemy wielkość Q_m. Na podstawie założeń dotyczących x oraz m mamy

$$0 < \frac{|x|}{2n+1} < \frac{k\pi}{2n+1} \le \frac{n\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2} \quad \text{dla} \quad k = m+1,\dots,n.$$

Stąd i z nierówności $\frac{2}{\pi}u < \sin u < u$ dla $0 < u < \frac{\pi}{2}$, mamy $\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right) < Q_{m,n} < 1$. Ponieważ iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4n^2}\right)$ jest zbieżny, więc

$$\prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right) \le Q_m \le 1.$$

Stąd

$$\lim_{m\to\infty} Q_m = 1. \tag{6}$$

Na podstawie równości (4), (5) i (6) otrzymujemy żądaną równość.
(b) Wystarczy skorzystać z części (a) oraz z równości $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

3.8.38. Wystarczy we wzorze (a) z poprzedniego zadania podstawić $x = \frac{\pi}{2}$.

3.8.39.
(a) Zbieżność rozpatrywanego iloczynu jest równoważna zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right)$. Zbieżność bezwzględna powyższego szeregu wynika z faktu, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right|}{\frac{x^2}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

(b) Mamy

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} = 1+\frac{x(x-1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Stąd i z zadania 3.8.3 wynika zbieżność bezwzględna rozpatrywanego iloczynu.

3.8.40. Oczywiście zbieżność iloczynu $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, $a_n > -1$, jest równoważna zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$, przy czym pomiędzy wartością P iloczynu i sumą S szeregu zachodzi związek $P = \mathrm{e}^S$.
Załóżmy teraz, że iloczyn nieskończony jest zbieżny bezwzględnie. Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny bezwzględnie (patrz zadanie 3.8.3). Stąd, wobec równości,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|} = 1, \quad \text{jeśli} \quad \lim_{n\to\infty}a_n = 0, \tag{1}$$

szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ jest zbieżny bezwzględnie. Wobec tego (patrz zadanie 3.7.8) dowolne przestawienie wyrazów tego szeregu nie zmienia jego sumy. Stąd i z uwagi podanej na początku naszego rozwiązania wynika, że wartość iloczynu nie zależy od porządku jego czynników.
Załóżmy teraz, że wartość iloczynu $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ nie zależy od porządku jego czynników. Oznacza to, że suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ również nie zależy od porządku wyrazów. Z twierdzenia Riemanna wynika więc, że szereg ten jest zbieżny bezwzględnie, co wobec (1) jest równoważne zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

3.8.41. [19] Niech

$$R_n = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n+1}{2n} = \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}.$$

Wtedy

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2\alpha}\right) = R_\alpha,$$

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2\beta+1}\right) = \frac{1}{R_\beta}.$$

Stąd wynika, że iloczyn częściowy $(\alpha+\beta)n$ pierwszych czynników jest równy

$\frac{R_{n\alpha}}{R_{n\beta}}$. Ze wzoru Wallisa (patrz zadanie 3.8.38)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_{n\alpha}}{R_{n\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

3.8.42. Jeżeli iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ nie jest zbieżny bezwzględnie, to również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ nie jest zbieżny bezwzględnie (patrz rozwiązanie zadania 3.8.40). W myśl twierdzenia Riemanna wyrazy tego szeregu można poprzestawiać tak, aby otrzymać szereg zbieżny do dowolnej liczby rzeczywistej S bądź rozbieżny do $+\infty$ lub $-\infty$. Stąd i z równości $P = \mathrm{e}^S$ (patrz rozwiązanie zadania 3.8.40) wynika już teza naszego twierdzenia.

LITERATURA

[1] W.I. Bernuk, I.K. Žuk, O.W. Melnikov, *Sbornik olimpiadnych zadač po matematike*, Narodnaja Asveta, Mińsk 1980.

[2] P. Biler, A. Witkowski, *Problems in Mathematical Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel 1990.

[3] T.J. Bromwich, *An Introduction to the Theory of Infinite Series*, Macmillan and Co., Limited, London 1949.

[4] R.B. Burckel, *An Introduction to Classical Complex Analysis*, Academic Press, New York–San Francisco 1979.

[5] B.P. Demidovič, *Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu*, Nauka, Moskwa 1969.

[6] A.J. Dorogovcev, *Matematičeskij analiz. Spravočnoe posobe*, Vyščaja Škola, Kijów 1985.

[7] A.J. Dorogovcev, *Matematičeskij analiz. Sbornik zadač*, Vyščaja Škola, Kijów 1987.

[8] G.M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I (2004), t. II (2004), t. III (2005), Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

[9] G.H. Hardy, *Kurs analizy, rachunek różniczkowy i całkowy.*, Atlas TNSW, Warszawa 1939.

[10] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge 1967.

[11] G. Klambauer, *Mathematical Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York 1975.

[12] G. Klambauer, *Problems and Propositions in Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel 1979.

[13] K. Knopp, *Szeregi nieskończone*, PWN, Warszawa 1956.

[14] L.D. Kudriavcev, A.D. Kutasov, V.I. Chejlov, M.I. Shabunin, *Problemas de Análisis Matemático*, Mir, Moskwa 1989.

[15] K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej*, PWN, Warszawa 1979.

[16] D.S. Mitrinovič, *Elementarne nierówności*, PWN, Warszawa 1972.

[17] D.S. Mitrinovič, D.D. Adamovič, *Nizovi i Redovi. Definicije, stavovi, zadaci, problemi*, Naučna Knjiga, Beograd 1971.

[18] A. Ostrowski, *Aufgabensammlung zur Infinitesimalrechnung, Band I: Funktionen einer Variablen*, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1964.

[19] G.Pólya , G. Szegö, *Problems and theorems in analysis I*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1978.

[20] J.I. Rivkind, *Zadači po matematičeskomu analizu*, Vyšejšaja Škola, Mińsk 1973.

[21] W.I. Rožkov, G.D. Kurdevanidze, N.G. Panfilov, *Sbornik zadač matematičeskich olimpiad*, Izdatelstwo Universiteta Družby Narodov, Moskwa 1987.

[22] W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.
[23] W.A. Sadowničij, A.S. Podkolzin, *Zadači studenčeskich olimpiad po matematike*, Nauka, Moskwa 1978.
[24] W. Sierpiński, *Arytmetyka teoretyczna*, PWN, Warszawa 1959.
[25] W. Sierpiński, *Działania nieskończone*, Czytelnik, Warszawa 1948.
[26] H. Silverman, *Complex variables*, Houghton Mifflin Company, Boston 1975.
[27] G.A. Tonojan, W.N. Sergeev, *Studenčeskije matematičeskije olimpiady*, Izdatelstwo Erevanskogo Universiteta, Erewań 1985.
[28] Czasopisma: *The American Mathematical Monthly, Delta, Matematika Sevodnja.*

SKOROWIDZ

C
ciąg Fibonacciego 23
– malejący 15
– rosnący 15
– ściśle malejący 15
– – rosnący 15
ciągi monotoniczne 15

F
funkcja dzeta Riemanna 80

K
kryterium Abela 70
– Bertranda 55
– całkowe 62
– Cauchy'ego o zagęszczaniu 55
– Dirichleta 70
– Gaussa 55
– Kummera 61, 62
– Raabego 54

L
lemat Kroneckera 71

N
nierówność Bernoulliego 7
– Carlemana 59
– Cauchy'ego 7
– Czebyszewa 10
nierówności Weierstrassa 12

P
prawo najlepszego przybliżenia 7
punkt skupienia ciągu 30

R
redukt ułamka łańcuchowego 6

S
stała Eulera 20
szereg Dirichleta 72
– iterowany 77
– podwójny 77
– wyrwany 69

Ś
średnia arytmetyczna 7
– arytmetyczno-geometryczna 19
– geometryczna 7
– harmoniczna 7

T
twierdzenie Abela 74
– Bolzano–Weierstassa 35
– Mertensa 72
– odwrotne do kryterium Kummera 62
– – do twierdzenia Toeplitza 30
– Schlömilcha 55
– Stolza 28
– Toeplitza o regularnym przekształceniu ciągu 27

U
ułamek łańcuchowy skończony 5

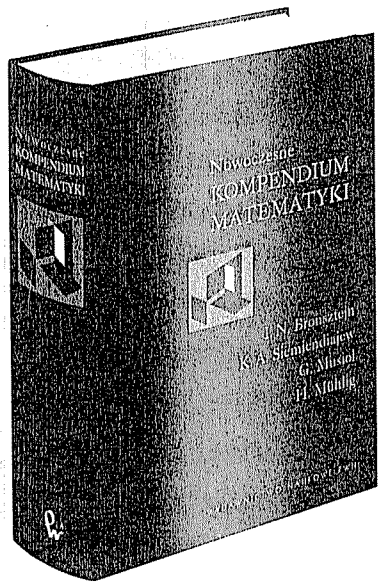
W
warunek Cauchy'ego zbieżności iloczynu nieskończonego 83
wzór Eulera 85
– Wallisa 85

Z
zasada indukcji matematycznej 113

Politechnika Warszawska
W.6268/2
Biblioteka
Wydziału Elektroniki

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Wydanie pierwsze
Arkuszy drukarskich 19,5
Druk ukończono w sierpniu 2005 r.
Druk i oprawa: GRAFMAR Sp. z o.o.
36-100 Kolbuszowa Dolna, ul. Wiejska 43

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN



Nowa encyklopedia matematyki praktycznej!

Igor N. Bronsztejn, Konstantin A. Siemiendiajew, Gerhard Musiol, Heiner Mühlig
NOWOCZESNE KOMPENDIUM MATEMATYKI
(*Taschenbuch der Mathematik*)
tłum. Andrzej Szczech, Marek Gorzecki

Niezastąpione źródło wiedzy dla zainteresowanych matematyką oraz jej zastosowaniami.

- Obszerne wiadomości z 20 działów matematyki.
- Znakomicie opracowana matematyka współczesna – narzędzie modelowania matematycznego i zastosowań matematyki, m.in. algebra i matematyka dyskretna, układy dynamiczne i chaos, teoria optymalizacji, metody numeryczne, matematyka finansowa, kryptologia.
- Pakiety oprogramowania matematycznego *Mathematica* i *Maple* oraz ich zastosowania.
- Wiele użytecznych tablic: tablice całek nieoznaczonych, oznaczonych i eliptycznych, transformacji Laplace'a i Fouriera oraz rozkładów Poissona, *F*-Fishera, *t*-Studenta i standardowego rozkładu normalnego.
- Przejrzysta, uporządkowana forma podawanych informacji.
- Obszerny skorowidz ułatwiający znajdowanie potrzebnych fragmentów tekstu.

Publikacja niezbędna matematykom, fizykom, ekonomistom, astronomom, chemikom, geofizykom, inżynierom, studentom uniwersytetów i uczelni technicznych, nauczycielom i uczniom szkół średnich.

www.pwn.pl • 0 801 33 33 88 • www.pwn.pl