Wojciech Babiański • Lech Chańko • Joanna Czarnowska
Barbara Mojsiewicz • Jolanta Wesołowska

teraz matura 2015

MATEMATYKA
Poziom podstawowy

ZBIÓR ZADAŃ I ZESTAWÓW MATURALNYCH

nowa era

teraz matura 2015

MATEMATYKA
Poziom podstawowy

ZBIÓR ZADAŃ I ZESTAWÓW MATURALNYCH

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo.
Więcej na **www.legalnakultura.pl**

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2014
ISBN 978-83-267-2048-2
Warszawa 2014

Konsultacje merytoryczne: Małgorzata Jarosławska, Edyta Ornoch, Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejewska, Renata Wolniewicz
Opracowanie merytoryczne i redakcja merytoryczna: Magdalena Spalińska, Elżbieta Zięcina
Redakcja językowa: Zofia Psota
Korekta techniczna: Zofia Chyża
Nadzór artystyczny: Kaia Juszczak
Projekt okładki: Małgorzata Gregorczyk, Maciej Galiński
Projekt graficzny: Małgorzata Gregorczyk, Maciej Galiński, Paulina Tomaszewska, Ewa Kaletyn, Aleksandra Szpunar
Skład systemem TEX: Dorota Chańko
Rysunki: Dorota Chańko
Fotografia na okładce: Gallo Images Poland/Getty Images/Photographer's Choice/Harald Sund

Nowa Era Sp. z o.o.
Al. Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
Tel.: 22 570 25 80; faks: 22 570 25 81
Infolinia: 801 88 10 10 (z telefonów stacjonarnych)
58 721 48 00 (z telefonów komórkowych)
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl

Druk i oprawa: Drukarnia POZKAL, Inowrocław

Spis treści

1. Zadania powtórzeniowe

1. Liczby rzeczywiste 6
2. Zbiory, przedziały i nierówności 13
3. Funkcje 19
4. Funkcja liniowa 26
5. Funkcja kwadratowa 33
6. Funkcje wymierne 41
7. Funkcje trygonometryczne 47
8. Funkcje wykładnicze i logarytmy 53
9. Ciągi 59
10. Planimetria 65
11. Geometria analityczna 75
12. Stereometria 80
13. Rachunek prawdopodobieństwa 88
14. Statystyka 95

2. Zestawy maturalne

Zestaw 1 104
Zestaw 2 108
Zestaw 3 112
Zestaw 4 117
Zestaw 5 122
Zestaw 6 127
Zestaw 7 131
Zestaw 8 135

Zestaw 9 139
Zestaw 10 143
Zestaw 11 147
Zestaw 12 151

3. Odpowiedzi i modele rozwiązań

Zadania powtórzeniowe 156
Zestawy maturalne 222

Schematy oceniania zadań otwartych 244
Wybrane wzory matematyczne 250
Uzupełnienie zestawu wybranych wzorów matematycznych 267

Każdy dział pierwszej części zbioru został podzielony na zestawy:
Zestaw A – zadania powtórzeniowe,
Zestaw B – zadania zamknięte,
Zestaw C – zadania otwarte krótkiej odpowiedzi,
Zestaw D – zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi.

W sekcji „Ocenianie arkuszy maturalnych" przedstawiono na przykładach kryteria oceniania zadań otwartych.

W drugiej części zbioru znajduje się 12 zestawów maturalnych.

Część trzecia zawiera odpowiedzi do wszystkich zadań oraz modele rozwiazań zadań otwartych.

Zbiór kończą uaktualnione tablice wzorów matematycznych Centralnej Komisji Egzaminacyjnej (CKE). Tablice te będą dostępne dla uczniów na egzaminie maturalnym.

Symbolem CKE oznaczono zadania pochodzące z „Informatora CKE", „Przykładowego arkusza maturalnego CKE" lub z matur z lat ubiegłych. Rozwiązania tych zadań zostały opracowane na podstawie materiałów CKE.

Zadania powtórzeniowe

1. Liczby rzeczywiste

Zbiór **liczb rzeczywistych** oznaczamy literą **R**.

Liczby naturalne to liczby: $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ Zbiór liczb naturalnych oznaczamy literą **N**. Liczbę naturalną, która ma dokładnie dwa dzielniki (1 i samą siebie), nazywamy **liczbą pierwszą**. Początkowe liczby pierwsze to: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$

Liczby całkowite to liczby naturalne dodatnie: $1, 2, 3, 4, \ldots$, liczby do nich przeciwne: $-1, -2, -3, -4, \ldots$ oraz liczba 0. Zbiór liczb całkowitych oznaczamy literą **C**.

Liczby wymierne to liczby mające postać $\frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in \mathbf{C}$ oraz $n \neq 0$. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą **W**. Każdą liczbę wymierną można zapisać w postaci rozwinięcia dziesiętnego **skończonego** lub **nieskończonego okresowego**.

Liczby niewymierne to liczby rzeczywiste, które nie są wymierne. Zbiór liczb niewymiernych oznaczamy literami **NW**.

Potęga o wykładniku całkowitym

$a^0 = 1$ dla $a \neq 0$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ dla $a \neq 0$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dla $a \neq 0, n \in \mathbf{N}$

Potęga o wykładniku wymiernym

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ dla $a \geqslant 0, n \in \mathbf{N}, n > 1$

$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ dla $a > 0, n \in \mathbf{N}, n > 1, m \in \mathbf{C}$

Działania na potęgach

Dla dowolnych liczb $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbf{R}$:

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$ $\qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\qquad a^x \cdot b^x = (ab)^x$

Działania na pierwiastkach

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad a, b \geqslant 0$ $\qquad \sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geqslant 0, b > 0$ $\qquad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}, \quad b \neq 0$

Wzory skróconego mnożenia

Kwadrat sumy: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Kwadrat różnicy: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Różnica kwadratów: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 156

1. Dana jest liczba sześciocyfrowa $654\,32x$, gdzie x oznacza cyfrę jedności. Wyznacz tę liczbę, jeśli jest ona podzielna przez:

a) 3, b) 4, c) 5, d) 8, e) 9.

2. Podaj przykład liczby wymiernej x spełniającej podany warunek.

a) $\frac{3}{4} < x < \frac{11}{12}$ b) $\frac{5}{6} < x < \frac{9}{10}$ c) $\frac{3}{4} < x < \frac{4}{5}$ d) $0{,}25 < x < \frac{1}{3}$

3. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci.

a) $\sqrt{72} + \sqrt{32} + \sqrt{8}$ c) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{432}$ e) $\frac{4\sqrt{3} + \sqrt{27}}{\sqrt{12}}$

b) $2\sqrt{75} - 2\sqrt{3} + \sqrt{300}$ d) $\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{500} - \sqrt[3]{4}\right)$ f) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{6} + \sqrt{24}\right)}{\sqrt{3}}$

4. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-1\frac{61}{64}} - \sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} + \sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}$ c) $\sqrt[3]{2\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[3]{-1\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{1\frac{7}{9}} \cdot \sqrt[3]{-1\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} + \sqrt[3]{-\frac{216}{125}} - \sqrt[5]{-\frac{243}{32}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{750}}{\sqrt[3]{-6}} + \frac{\sqrt[3]{432}}{\sqrt[3]{-2}} - \frac{\sqrt[3]{-320}}{\sqrt[3]{-5}}$

5. Dla jakiej liczby naturalnej n jest spełniony warunek $n - 1 \leqslant x < n$?

a) $x = \frac{3^{32} - 3^{30}}{3^{28}}$ b) $x = \frac{2^{22} + 2^{21}}{3 \cdot 2^{11}}$ c) $x = \frac{5^{14} - 5^{12}}{5^{13} + 5^{12}}$

6. Oblicz.

a) $\frac{2^8 - 4^3}{16^2 + 8^2}$ b) $\frac{3^5 + 27^2}{9 \cdot 3^5}$ c) $\frac{5^8 : 5^2 - 125^2}{25^{-3} : 5^{-2}}$

7. Oblicz. Wynik podaj w notacji wykładniczej.

a) $\frac{(6 \cdot 10^{21}) \cdot (4{,}4 \cdot 10^2)}{2 \cdot 10^4}$ b) $\frac{(3 \cdot 10^{11}) \cdot (6 \cdot 10^4)}{(1{,}5 \cdot 10^3) \cdot (4 \cdot 10^5)}$ c) $\frac{3 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5}{(2 \cdot 10^4) \cdot (3 \cdot 10^2)}$

8. Oblicz.

a) $\left(2 - 3\sqrt{3}\right)\left(2 - 3\sqrt{3}\right)$ c) $\left(4\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)$ e) $\left(\sqrt{6} - 3\sqrt{3}\right)^2$

b) $\left(7 + 5\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2} + 7\right)$ d) $\left(\sqrt{8} + 2\sqrt{6}\right)\left(2\sqrt{6} - \sqrt{8}\right)$ f) $\left(2\sqrt{32} - 3\sqrt{2}\right)^2$

9. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych x i y.

a) $x = \sqrt{2} + 1$, $y = \sqrt{2} - 1$ b) $x = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}$, $y = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$

10. Jaka cyfra znajduje się na piętnastym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby?

a) 0,(3210) b) 6,(3648) c) 4,3(201) d) 1,29(325)

11. Wykonaj działania. Wynik podaj w najprostszej postaci.

a) $(x+1)^2-(x-1)^2+(x+2)^2+(2-x)^2$

b) $2(3+x)^2-(2-x)^2-3(2-x)(2+x)$

c) $(4x-3y)(4x+3y)-2(4x+3y)^2+2(3x-4y)^2$

12. Uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość dla podanego x.

a) $(\sqrt{2}-x)^2-(2x^3+1)(2x^3-1)$, $x=\sqrt{2}$

b) $(x+2)^2-(3x+2)(2-3x)-(\sqrt{3}+x)^2$, $x=\sqrt{3}$

c) $(x-3)^2+\sqrt{5}(2x+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2x)-(1-x)^2$, $x=-\sqrt{5}$

13. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{3}{\sqrt{3}-1}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ e) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ g) $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}$

b) $\frac{4}{\sqrt{2}+3}$ d) $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-2}$ f) $\frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ h) $\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+1}$

14. Oblicz.

a) $\frac{(3+\sqrt{5})^2-(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}$

b) $\frac{(1+\sqrt{12})^2-(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{8}-2)(2+2\sqrt{2})}$

c) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{5}+3}\right)^2$

d) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$

15. Oblicz wartość wyrażenia $xy^{-2}-\frac{4}{5}z^{-1}$ dla $x=3,(3)$, $y=0,(5)$ i $z=0,(9)$.

16. Wyznacz wszystkie pary liczb naturalnych a i b, dla których zachodzi równość $a^2-b^2=24$.

17. Wykaż, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb:

a) naturalnych jest liczbą nieparzystą,

b) nieparzystych nie jest liczbą podzielną przez 4.

18. Wykaż, że podana nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb dodatnich x i y.

a) $2xy \leqslant x^2+y^2$ b) $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$

19. Wyznacz x, jeżeli:

a) 20% liczby 30 jest równe 30% liczby x,

b) 5% liczby 8 jest równe 4% liczby x,

c) 110% liczby 24 jest równe 44% liczby x.

20. Bilet lotniczy z Gdańska do Nowego Jorku kosztuje 2400 zł. Jaka byłaby jego cena, gdyby cenę obecną:

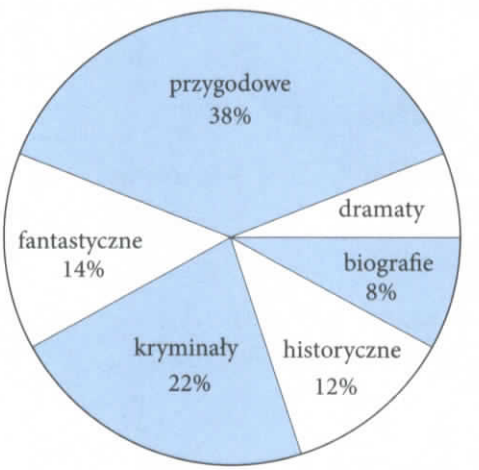
a) podniesiono o 15%, a następnie obniżono o 15%,

b) obniżono o 20%, a następnie podniesiono o 20%,

c) podniesiono o 25%, a następnie obniżono o 20%?

21. Kostium kąpielowy w lipcu kosztował 80 zł, w sierpniu obniżono jego cenę o 12%, a we wrześniu nastąpiła kolejna obniżka, tym razem o 10%. Jaka była cena kostiumu po obu obniżkach? Ile kosztowałby, gdyby jego cenę obniżono raz, o 22%?

22. Na diagramie przedstawiono wyniki ankiety przeprowadzonej wśród uczniów, którzy odpowiadali na pytanie: „Jakie książki czytasz najczęściej? Wybierz jeden rodzaj."



a) Ile procent spośród ankietowanych uczniów najczęściej czyta dramaty?

b) Oblicz, ilu uczniów brało udział w ankiecie, wiedząc, że książki fantastyczne najczęściej czyta 21 spośród nich.

c) O ile procent więcej uczniów częściej czyta książki historyczne niż biografie?

23. Bydgoszcz jest ósmym miastem w Polsce pod względem liczby ludności. W 2002 roku w tym mieście mieszkało 372 104 osób, a 10 lat później – 363 926 osób.

a) O ile procent mniej mieszkańców miała Bydgoszcz w 2012 roku niż w 2002 roku?

b) O ile procent więcej mieszkańców miała Bydgoszcz w 2002 roku niż w 2012 roku?

Wynik podaj z dokładnością do 1‰.

24. W roku 2010 w województwie kujawsko-pomorskim zameldowanych było 2 069 575 mieszkańców, w tym 998 266 mężczyzn.

a) O ile punktów procentowych więcej kobiet niż mężczyzn mieszkało w tym województwie?

b) O ile procent więcej kobiet niż mężczyzn mieszkało w tym województwie?

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 156

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Dana jest piętnastocyfrowa liczba $211\,111\,111\,111\,1x2$. Jeśli ta liczba jest podzielna przez 12, to cyfrą x jest:

A. 7, **B.** 5, **C.** 3, **D.** 1.

Zadanie 2. (1 pkt)
Zaokrąglenie liczby $\sqrt[3]{1\frac{4}{5}} : \sqrt[3]{8\frac{1}{3}}$ do całości jest równe:

A. 1, **B.** 2, **C.** 3, **D.** 4.

Zadanie 3. (1 pkt) CKE
Liczba $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2$ jest równa:

A. 4, **B.** 9, **C.** $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$, **D.** $4+2\sqrt{3}$.

Zadanie 4. (1 pkt) CKE
Liczba $3^{\frac{8}{3}} \cdot \sqrt[3]{9^2}$ jest równa:

A. 3^3, **B.** $3^{\frac{32}{9}}$, **C.** 3^4, **D.** 3^5.

Zadanie 5. (1 pkt) CKE
Wskaż równość prawdziwą.

A. $-256^2 = (-256)^2$
B. $256^3 = (-256)^3$
C. $\sqrt{(-256)^2} = -256$
D. $\sqrt[3]{-256} = -\sqrt[3]{256}$

Zadanie 6. (1 pkt) CKE
W klasie jest cztery razy więcej chłopców niż dziewcząt. Ile procent wszystkich uczniów tej klasy stanowią dziewczęta?

A. 4% **B.** 5% **C.** 20% **D.** 25%

Zadanie 7. (1 pkt)
Jakim procentem liczby 6 jest 30% liczby 5?

A. 20% **B.** 25% **C.** 36% **D.** 40%

Zadanie 8. (1 pkt)
Michał chce wpłacić kwotę k zł na lokatę roczną. Bank A oferuje lokatę oprocentowaną 5% rocznie, a bank B lokatę oprocentowaną 6% rocznie. Jeśli Michał zdecyduje się na bank A, to po roku otrzyma odsetki w wysokości x zł, a jeśli zdecyduje się na bank B, to odsetki wyniosą y zł. Prawdziwa jest zależność:

A. $y = 101\%x$, **B.** $y = 110\%x$, **C.** $y = 120\%x$, **D.** $y = 150\%x$.

Zestaw C. Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

odpowiedzi i modele – s. 156

Zadanie 1. (2 pkt)
Wykaż, że dla dowolnej nieparzystej liczby naturalnej x liczba $2x^2 + 4x + 10$ jest podzielna przez 8.

Zadanie 2. (2 pkt) CKE
Uzasadnij, że liczba $4^{12} + 4^{13} + 4^{14}$ jest podzielna przez 42.

Zadanie 3. (2 pkt)
Wykaż, że liczba $\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)^2 + 4\sqrt{3}$ jest naturalna.

Zadanie 4. (2 pkt)
Uzasadnij, że liczba $\sqrt{5+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{5-2\sqrt{6}}$ jest wymierna.

Zadanie 5. (2 pkt)
Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości: $3\sqrt{3} - 1$ i $3 + \sqrt{3}$. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Zadanie 6. (2 pkt)
Pan Lewandowski zarabia miesięcznie 3500 zł netto. W grudniu na jego konto razem z pensją wpłynął dodatek świąteczny, a kwota, którą otrzymał, wyniosła 3745 zł. Jaki procent comiesięcznej pensji stanowił dodatek świąteczny?

Zadanie 7. (2 pkt) CKE
Dany jest prostokąt o bokach a i b oraz prostokąt o bokach c i d. Długość boku c to 90% długości boku a. Długość boku d to 120% długości boku b. Oblicz, ile procent pola prostokąta o bokach a i b stanowi pole prostokąta o bokach c i d.

Zadanie 8. (2 pkt) CKE
Dany jest prostokąt o bokach a i b. Zmniejszamy długość boku a o 10% oraz zwiększamy długość boku b o 20%. Wyznacz stosunek $\frac{a}{b}$, jeśli wiadomo, że otrzymany prostokąt ma taki sam obwód jak prostokąt wyjściowy.

Zadanie 9. (2 pkt) CKE
Udowodnij, że jeśli x, y są liczbami rzeczywistymi, to $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$.

Zadanie 10. (2 pkt) CKE
Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} \geqslant \frac{a+1}{2}$.

Zadanie 11. (2 pkt)
Wiedząc, że $\frac{1}{a} + a = 14$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}$.

Zestaw D. Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

odpowiedzi – s. 156
modele – s. 157

Zadanie 1. (4 pkt)

Dane są liczby $x = \frac{3^{11}+27^4}{4\cdot 9^4}$ i $y = \sqrt{\sqrt{4\sqrt{81}}+\sqrt{25\sqrt{16}}+\sqrt[3]{\sqrt{64}}}$. Porównaj liczby $2x^{-1}$ i y^{-2}.

Zadanie 2. (4 pkt)

Wyrażenie $(x+3y)^2-(x+3y)(3y-x)-(x-3y)^2-y(6x-9y)$ doprowadź do najprostszej postaci, a następnie sprawdź, czy jego wartość dla $x=-\sqrt{2}$ i $y=\frac{1}{3}$ jest liczbą ujemną.

Zadanie 3. (5 pkt)

Uporządkuj rosnąco liczby:

$a = \sqrt[3]{2\frac{10}{27}}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$, $b = -0{,}5^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$, $c = \sqrt[3]{-\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^2}$, $d = \frac{0{,}3^{-1}\cdot 0{,}4^2}{2{,}5^{-1}}$.

Zadanie 4. (4 pkt)

Liczby $a = \left(\frac{2^3}{5}\right)^{-1} - 2^{-2}\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^0$ i $b = \left(\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 2^{-3}}\right) : \sqrt{8\sqrt{64}}$ zapisz w postaci dziesiętnej. Podaj zaokrąglenia liczb a i b z dokładnością do części dziesiętnych.

Zadanie 5. (3 pkt) CKE

Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2^{50}+1}+\sqrt{2^{50}-1} < 2^{26}$.

Zadanie 6. (4 pkt)

W kwadracie dwa równoległe boki wydłużono o 25%, a pozostałe dwa skrócono o p%. Powstał prostokąt, którego pole jest o 20% większe od pola kwadratu. Oblicz p.

Zadanie 7. (4 pkt)

W hurtowni jest 3200 telewizorów, z których 3% ma pewne usterki. Ile wadliwych telewizorów należy usunąć, aby w hurtowni pozostało mniej niż 1% odbiorników z usterkami?

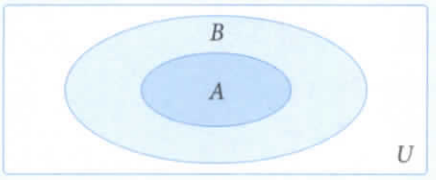
Zadanie 8. (4 pkt) CKE

W pewnej klasie liczba dziewcząt stanowi 60% liczby uczniów. Gdy 6 dziewcząt wyjechało na mecz siatkówki, w klasie pozostało tyle samo chłopców, ile dziewcząt. Oblicz, ile osób liczy ta klasa oraz ilu jest w niej chłopców.

Zadanie 9. (3 pkt) CKE

Koncern paliwowy dwukrotnie w jednym tygodniu podnosił cenę benzyny, pierwszy raz o 10%, drugi raz o 5%. Po obu podwyżkach jeden litr benzyny wyprodukowanej przez ten koncern kosztuje 4,62 zł. Oblicz cenę jednego litra benzyny przed podwyżkami.

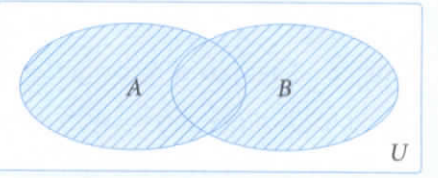
2. Zbiory, przedziały i nierówności



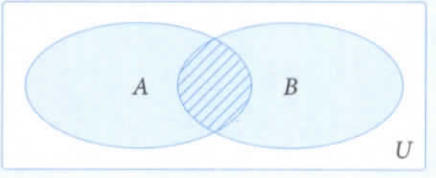
$A \subset B$

Zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B ($A \subset B$), jeśli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B.

Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do co najmniej jednego ze zbiorów: A lub B. Zbiór ten oznaczamy $A \cup B$.



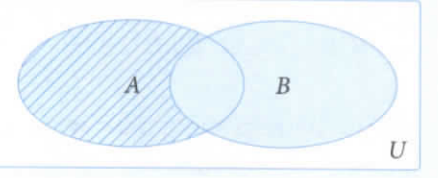
$A \cup B$ – suma zbiorów A i B (obszar zakreskowany)



$A \cap B$ – iloczyn (część wspólna) zbiorów A i B (obszar zakreskowany)

Iloczynem zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą jednocześnie do obu zbiorów. Zbiór ten oznaczamy $A \cap B$.

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B. Zbiór ten oznaczamy $A \setminus B$.



$A \setminus B$ – różnica zbiorów A i B (obszar zakreskowany)

Wartość bezwzględna

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jeśli} \quad a \geqslant 0 \\ -a & \text{jeśli} \quad a < 0 \end{cases}$$

Zauważ, że $\sqrt{a^2} = |a|$ dla $a \in \mathbf{R}$.

Błąd bezwzględny i błąd względny

Niech a będzie przybliżeniem liczby x.

Błąd bezwzględny przybliżenia jest to wartość bezwzględna różnicy między liczbą x i jej przybliżeniem a, czyli liczba $|x - a|$.

Stosunek błędu bezwzględnego do wartości bezwzględnej liczby x nazywamy **błędem względnym**: $\frac{|x-a|}{|x|}$. Błąd względny często wyraża się w procentach.

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 159

1. Wyznacz wszystkie elementy zbiorów A i B. Czy prawdziwa jest któraś z relacji $A \subset B$, $B \subset A$?

a) A – zbiór liczb naturalnych x spełniających warunek: $x \leqslant \sqrt{26}$
B – zbiór liczb całkowitych x spełniających warunek: $-2 \leqslant x \leqslant 6$

b) A – zbiór liczb całkowitych x spełniających warunek: $-27 < x^3 < 27$
B – zbiór liczb naturalnych x spełniających warunek: $x^3 \leqslant 8$

2. Który z podanych zbiorów jest zbiorem dwuelementowym, a który jest zbiorem pustym?

A – zbiór liczb rzeczywistych, których kwadrat jest równy 8

B – zbiór liczb rzeczywistych, których sześcian jest równy 8

C – zbiór liczb wymiernych, których kwadrat jest równy 9

D – zbiór liczb całkowitych, których sześcian jest równy 9

3. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

a) $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ b) $A = \{3, 4, 8, 9\}$, $B = \{3, 9\}$

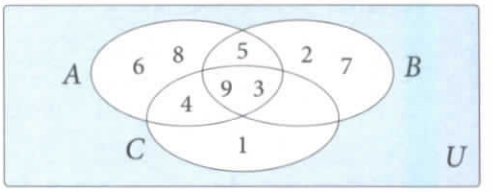
4. A jest zbiorem dzielników liczby 24, a B – zbiorem dzielników liczby 30. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

5. A jest zbiorem spółgłosek w słowie *matematyka*, B – zbiorem spółgłosek w słowie *trygonometria*, a C – zbiorem spółgłosek w słowie *planimetria*. Wyznacz zbiór:

a) $A \cap B$, b) $B \cap C$, c) $A \setminus B$, d) $(A \cup B) \setminus C$, e) $(B \cap C) \setminus A$.

6. Korzystając z diagramu obok, wyznacz zbiór:

a) $A \cup C$,
b) $B \cap C$,
c) $B \setminus A$,
d) $(A \cup B) \setminus C$,
e) $A \cup (B \setminus C)$,
f) $C \setminus (A \cap B)$.



7. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

a) $A = \langle -1; 3\rangle$, $B = (0; \infty)$
b) $A = (-\infty; 2)$, $B = (-3; 2)$
c) $A = (-\infty; 1)$, $B = \langle 4; \infty)$
d) $A = (-\infty; 2\rangle$, $B = (-\infty; 0\rangle$
e) $A = (-\infty; 3\rangle$, $B = \langle 3; \infty)$
f) $A = (-\infty; 5\rangle$, $B = (5; \infty)$

8. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap B \cap C$.

a) $A = \langle -3; 3\rangle$, $B = (1; \infty)$, $C = (-\infty; 2)$ b) $A = (4; \infty)$, $B = \langle 1; 5\rangle$, $C = (2; 3)$.

9. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

a) $A = \langle -1; 2\rangle \cup (4; 8)$, $B = (0; 6)$

b) $A = (-\infty; 2\rangle \cup (3; \infty)$, $B = \langle 1; 5\rangle$

c) $A = \langle -3; 0) \cup (2; 4)$, $B = (-\infty; -1\rangle$

d) $A = \langle 0; 5)$, $B = \langle -2; 1) \cup (2; 3)$

e) $A = (-\infty; 2\rangle$, $B = \{2, 3\}$

f) $A = (-1; 5\rangle$, $B = \{-1, 2, 5\}$

10. Ile liczb postaci $\frac{1}{2}k$, gdzie k jest liczbą całkowitą, należy do zbioru $A \cap B$?

a) $A = (1; 3) \cup \langle 4; 5\rangle$, $B = (2; \infty)$

b) $A = (-2; \infty)$, $B = \langle -1; 1) \cup (2; 3)$

c) $A = (-1; 0\rangle$, $B = \langle -2; 2) \cup (3; 5)$

d) $A = \langle 1; 6\rangle$, $B = (2; 3\rangle \cup \langle 4; 5\rangle$

11. Zaznacz na osi liczbowej rozwiązania równania.

a) $|x| = 5$ b) $|-x| = 2$ c) $\sqrt{x^2} = 9$ d) $\sqrt{x^2} = \frac{1}{3} - 0{,}(3)$

12. Wskaż liczby całkowite należące do przedziału $(-5; 5)$ spełniające nierówność.

a) $|x| < 2$ b) $|x| \geqslant 3$ c) $|x| > 0$ d) $|x| \leqslant 0$

13. Jaki błąd bezwzględny popełniono, przybliżając liczbę x liczbą y?

a) $x = 12{,}34$, $y = 12{,}5$ b) $x = \frac{1}{80}$, $y = 0{,}01$ c) $x = \frac{1}{15}$, $y = 0{,}06$

14. Oblicz błąd względny podanego przybliżenia liczby $\frac{5}{7}$. Odpowiedź podaj z dokładnością do 0,1%.

a) 0,7 b) 0,71 c) 0,72

15. Przybliżenie pewnej liczby podane z błędem bezwzględnym 0,02 wynosi 1,4. Wyznacz tę liczbę, jeśli przybliżenie to podane jest:

a) z nadmiarem, b) z niedomiarem.

16. Przybliżenie pewnej liczby wynosi 6 i jest podane z błędem bezwzględnym 0,2. Wyznacz tę liczbę i podaj błąd względny przybliżenia z dokładnością do 0,1%, jeśli jest to przybliżenie:

a) z niedomiarem, b) z nadmiarem.

17. Podaj największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność.

a) $6 - (0{,}8 - 0{,}2x) \geqslant 2x - 0{,}2(6x - 2)$

b) $4\left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{2}\right) - 2\left(4 - \frac{3}{4}x\right) > 5x - \frac{1}{2}(2 - 5x)$

c) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x\right) + 2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}x - 1\frac{1}{5}\right) \geqslant 2\frac{1}{6}x - 1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

18. Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań.

a) $9x^2 - (3x - 4)^2 \leqslant -4$

b) $4\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)^2 > x^2 + 7$

c) $4(-2x - 3)^2 \geqslant 13 - (4x + 1)(1 - 4x)$

d) $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 < 3 - \left(2 - \frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{2}x + 2\right)$

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 160

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Ile elementów należy do zbioru $X = \langle -\sqrt{2}; \sqrt{6}\rangle \cap \mathbf{C}$, gdzie $\mathbf{C}$ jest zbiorem liczb całkowitych?

A. 6 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

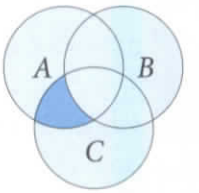
Zadanie 2. (1 pkt)
Liczba $a = -3\sqrt{7}$ należy do przedziału $\langle n-3; n-2\rangle$ dla:

A. $n = -5$, **B.** $n = -6$, **C.** $n = -7$, **D.** $n = -8$.

Zadanie 3. (1 pkt)
Zbiór $X = \mathbf{R} \setminus (1;6\rangle$ można zapisać w postaci:

A. $X = (-\infty; 1) \cup (6; \infty)$,
B. $X = (-\infty; 1\rangle \cup \langle 6; \infty)$,
C. $X = (-\infty; 1) \cup \langle 6; \infty)$,
D. $X = (-\infty; 1\rangle \cup (6; \infty)$.

Zadanie 4. (1 pkt)
Na diagramie obok ciemniejszym kolorem zaznaczono zbiór:



A. $A \cap C$, **B.** $A \cup C$, **C.** $(A \cap C) \setminus B$, **D.** $(A \cup C) \setminus B$.

Zadanie 5. (1 pkt) CKE
Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{2-x}{3} - \frac{2x-1}{2} < x$ jest przedział:

A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$, **B.** $\left(-\infty; \frac{1}{14}\right)$, **C.** $\left(\frac{1}{14}; \infty\right)$, **D.** $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$.

Zadanie 6. (1 pkt) CKE
Liczba 15 jest przybliżeniem z niedomiarem liczby x. Błąd bezwzględny tego przybliżenia jest równy 0,24. Liczba x to:

A. 14,76, **B.** 14,80, **C.** 15,20, **D.** 15,24.

Zadanie 7. (1 pkt)
Liczba x jest przybliżeniem liczby 0,345 z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku. Liczba y, która jest przybliżeniem liczby x z dokładnością do jednego miejsca po przecinku, jest równa:

A. 0, **B.** 0,3, **C.** 0,4, **D.** 0,5.

Zadanie 8. (1 pkt)
W klasach drugich pewnego liceum jest 62 uczniów: 19 osób uczy się języka francuskiego, 30 osób – angielskiego, 24 osoby – niemieckiego, 14 osób – francuskiego i angielskiego, 10 osób – francuskiego i niemieckiego, 12 osób – niemieckiego i angielskiego, 8 osób – francuskiego, angielskiego i niemieckiego. Ilu uczniów nie uczy się żadnego z wymienionych języków?

A. 20 **B.** 17 **C.** 14 **D.** 10

Zestaw C. Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

odpowiedzi i modele – s. 160

Zadanie 1. (2 pkt)
Na osi liczbowej zaznaczono przedział A_1, do którego należą liczby, których odległość od liczby 3 jest nie większa od 5. Następnie przedział ten przesunięto wzdłuż osi o 4 jednostki w kierunku ujemnym; powstał przedział A_2. Wyznacz część wspólną przedziałów A_1 i A_2.

Zadanie 2. (2 pkt)
Wypisz wszystkie elementy zbiorów: A – zbioru naturalnych liczb nieparzystych mniejszych od 11, B – zbioru dzielników naturalnych liczby 63. Wyznacz część wspólną tych zbiorów.

Zadanie 3. (2 pkt)
Dane są przedziały $A = \langle 3; 6\rangle$, $B = (5; \infty)$. Podaj, ile liczb całkowitych należy do zbioru $A \cap B$, a ile do zbioru $A \setminus B$.

Zadanie 4. (2 pkt)
Zapisz w postaci przedziału zbiór liczb rzeczywistych spełniających równanie $|1 - x| = x - 1$.

Zadanie 5. (2 pkt)
Wykaż, że $|3 - 2\sqrt{3}| - 2\sqrt{3}$ jest liczbą wymierną.

Zadanie 6. (2 pkt) CKE
Zbiorem rozwiązań nierówności $ax + 4 \geqslant 0$ z niewiadomą x jest przedział $(-\infty; 2\rangle$. Wyznacz a.

Zadanie 7. (2 pkt)
Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności $\frac{x - \frac{3}{2}}{2} - \frac{x - \frac{5}{2}}{6} \geqslant \frac{\frac{7}{2} - x}{3}$.

Zadanie 8. (2 pkt)
Liczba $a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbf{N}$, spełnia równanie $2x - 5 = \sqrt{2}x - 1$. Wyznacz wartość sumy $a + b$.

Zadanie 9. (2 pkt)
Oblicz 12% liczby 32 i podaj wynik z dokładnością do 0,1. Następnie oblicz błąd względny tego przybliżenia z dokładnością do 0,0001.

Zadanie 10. (2 pkt)
Zaokrąglij liczbę 5,65 do części dziesiętnych, a następnie oblicz błąd względny tego przybliżenia z dokładnością do 0,01%.

Zadanie 11. (2 pkt)
Liczba a jest przybliżeniem liczby 3,425 z niedomiarem. Wyznacz liczbę a, *jeżeli błąd bezwzględny* tego przybliżenia jest równy $\frac{1}{80}$.

Zestaw D. Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

odpowiedzi – s. 160
modele – s. 161

Zadanie 1. (4 pkt)
Dane są zbiory:
A – zbiór rozwiązań nierówności $1{,}5 - 0{,}75x > 0$,
B – zbiór rozwiązań nierówności $-3x \leqslant 12$,
$C = \langle 0; 6\rangle$.
Wyznacz zbiór $A \cap B$. Ile dzielników liczby 48 należy do zbioru $C \setminus A$?

Zadanie 2. (4 pkt)
Dane są zbiory:
A – zbiór liczb rzeczywistych spełniających warunek: $-\frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{6}x < \frac{3}{2}$,
B – zbiór liczb rzeczywistych spełniających warunek: $1 \leqslant 3x - 2 \leqslant 12$.
Ile parzystych liczb naturalnych należy do zbioru $A \setminus B$?

Zadanie 3. (4 pkt)
Dane są zbiory $A = (-\infty; -2) \cup \langle 3; \infty)$ oraz $B = \langle -5; 3\rangle$. Wyznacz zbiory $A \cap B$ oraz $A \setminus B$. Ile liczb postaci $\frac{k}{2}$, gdzie k jest liczbą całkowitą, należy do zbioru $B \setminus A$?

Zadanie 4. (4 pkt)
Wypisz wszystkie liczby całkowite x, które spełniają jednocześnie podane nierówności:

$$\left(\tfrac{1}{2}x - 2\right)^2 \geqslant 7 - \left(2 + \tfrac{1}{2}x\right)\left(-\tfrac{1}{2}x + 2\right) \text{ i } x^2 - 8 < 0.$$

Zadanie 5. (4 pkt)
Ile rozwiązań ma równanie $|x| + \sqrt{2} = 2 - m$ dla $m = \sqrt{2}$, a ile dla $m = \frac{1}{2}$? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 6. (5 pkt)
Które spośród liczb a, b, c spełniają jednocześnie obie nierówności: $(1-x)^2 \leqslant (x-1)(1+x) - 2$ oraz $\frac{1}{4}x + 3 \geqslant \frac{3}{2}x - 2$?

$$a = 2 + \left(-\tfrac{2}{3}\right)^{-2},\ b = 4 \cdot 2^{-2} + 9 \cdot 3^{-1},\ c = 20^{-1} \cdot \left(\tfrac{1}{5}\right)^{-2} - \tfrac{8}{3} \cdot \left(-\tfrac{4}{3}\right)^{-1}$$

Zadanie 7. (4 pkt)
Przybliżenie pewnej liczby dodatniej, podane z 20-procentowym błędem względnym, jest równe 5. Wyznacz tę liczbę, jeśli przybliżenie podane jest z niedomiarem.

Zadanie 8. (4 pkt)
Uzasadnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x wartość wyrażenia:

$$\left(\sqrt{2}x - 1\right)^2 - \left(2\sqrt{2}x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + 6x^2$$

spełnia równanie $4x^3 - 3x^2 + 4x = 3$.

Zadanie 9. (4 pkt)
Uzasadnij, że istnieje tylko jedna liczba całkowita spełniająca jednocześnie nierówności:

$$x > \sqrt{2}x - 1 \text{ i } \sqrt{3}x > x + 1.$$

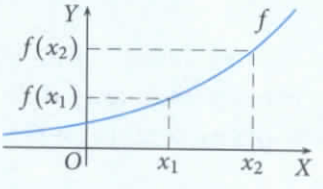
3. Funkcje

Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y $(f: X \to Y)$ nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$.
Zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji f, a jego elementy – **argumentami** funkcji f.
Dziedzinę funkcji f oznaczamy przez D lub D_f.

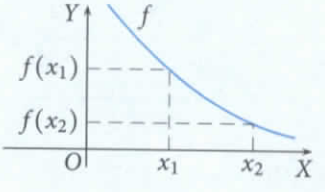
Miejscem zerowym funkcji $f: X \to \mathbf{R}$ nazywamy taki argument x, dla którego $f(x) = 0$.

Niech $X \subset \mathbf{R}$. Funkcję $f: X \to \mathbf{R}$ nazywamy:

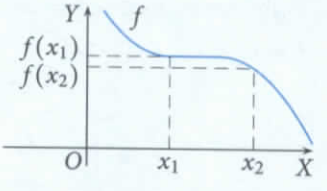
- **rosnącą** w zbiorze X, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:
  jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$



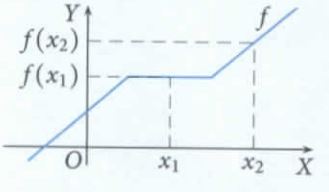
- **malejącą** w zbiorze X, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:
  jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$



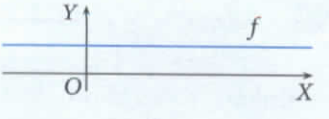
- **nierosnącą** w zbiorze X, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:
  jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) \geqslant f(x_2)$



- **niemalejącą** w zbiorze X, jeśli dla dowolnych argumentów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:
  jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) \leqslant f(x_2)$



- **stałą** w zbiorze X, jeśli istnieje taka liczba c, że dla dowolnego $x \in X$ zachodzi równość $f(x) = c$.

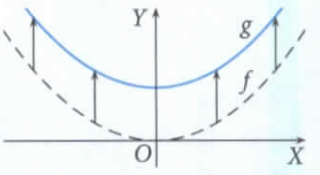


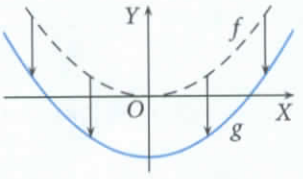
Funkcję f nazywamy rosnącą (odpowiednio: malejącą, nierosnącą, niemalejącą, stałą), gdy jest ona rosnąca (odpowiednio: malejąca, nierosnąca, niemalejąca, stała) w swojej dziedzinie.

Funkcję, która jest rosnąca, malejąca, nierosnąca, niemalejąca lub stała, nazywamy **funkcją monotoniczną**.

Przekształcanie wykresu funkcji

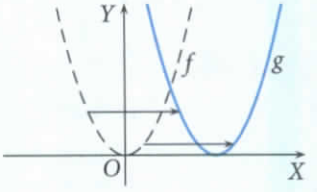
Wykres funkcji $g(x) = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w górę** wzdłuż osi OY.

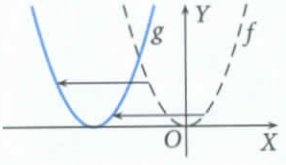




Wykres funkcji $g(x) = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w dół** wzdłuż osi OY.

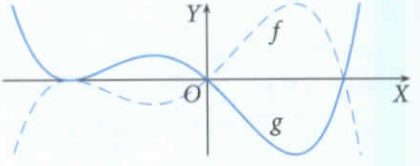
Wykres funkcji $g(x) = f(x - p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w prawo** wzdłuż osi OX.

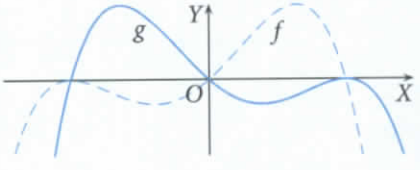




Wykres funkcji $g(x) = f(x + p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w lewo** wzdłuż osi OX.

Wykres funkcji $g(x) = -f(x)$ otrzymujemy przez odbicie symetryczne wykresu funkcji f względem osi OX.





Wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ otrzymujemy przez odbicie symetryczne wykresu funkcji f względem osi OY.

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 163

1. Funkcja f określona jest za pomocą tabeli. Naszkicuj jej wykres. Podaj jej miejsca zerowe oraz wartość najmniejszą i wartość największą. Ile liczb należy do zbioru wartości tej funkcji?

a)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	5	0	−3	−4	−3	0	5

b)

x	−6	−4	−2	0	2	4	6
y	3	4	3	2	1	0	−1

2. Dany jest zbiór $X = \{2, 4, 6, 8\}$. Przedstaw w formie tabeli przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi x ze zbioru X odpowiada liczba rzeczywista y, która jest:

a) o jeden mniejsza od liczby x,

b) dwa razy mniejsza od liczby x,

c) liczbą przeciwną do liczby x,

d) liczbą odwrotną do liczby x.

3. a) Funkcja f: $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbf{R}$ każdemu argumentowi przyporządkowuje jego podwojoną wartość bezwzględną. Podaj wzór funkcji f, naszkicuj jej wykres i podaj zbiór wartości.

b) Dziedziną funkcji f jest zbiór $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi jego kwadrat pomniejszony o 3. Podaj wzór funkcji f, naszkicuj jej wykres oraz podaj zbiór wartości.

4. Wyznacz wzór i miejsca zerowe funkcji, która każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje liczbę:

a) o dwa większą od jej potrojonej wartości,

b) o osiem mniejszą od połowy jej kwadratu.

5. Naszkicuj wykres funkcji f i oblicz $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ oraz $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

a) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ 3x - 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{dla } x < -1 \\ -x & \text{dla } x \geqslant -1 \end{cases}$

6. Wyznacz dziedzinę funkcji f. Podaj punkty, w których jej wykres przecina osie układu współrzędnych.

a) $f(x) = \frac{x+2}{2x-8}$

b) $f(x) = \frac{x-3}{3x+6}$

c) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-16}$

d) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$

e) $f(x) = \frac{x+6}{(x-1)(x+4)}$

f) $f(x) = \frac{3x-9}{(x-3)(x+2)}$

7. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f.

a) $f(x) = \sqrt{x-5}$

b) $f(x) = \sqrt{9-x}$

c) $f(x) = \sqrt{1-2x}$

d) $f(x) = \sqrt{0{,}25x+3}$

e) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}$

f) $f(x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2}$

8. Dane są liczby $a = -2$, $b = 0$, $c = 1$ i $d = 3$. Które spośród nich należą do dziedziny funkcji f?

a) $f(x) = \frac{3x}{x+2} + \sqrt{2-x}$

b) $f(x) = \frac{1}{2x-6} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \sqrt{|x|} - \sqrt{2x-5}$

d) $f(x) = \sqrt{-x} + \sqrt{x+1}$

9. Wyznacz dziedzinę funkcji f, uprość jej wzór i naszkicuj wykres.

a) $f(x)=\frac{2x+4}{x+2}$ b) $f(x)=\frac{3x^2}{x}$ c) $f(x)=\frac{2x-8}{x-4}$ d) $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$

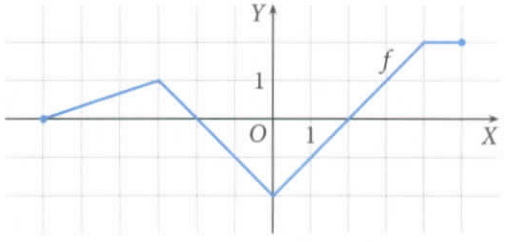
10. Punkty: A, B, C, D należą do wykresu funkcji f. Oblicz a, b, c i d.

a) $f(x)=\frac{2}{x^2}$, $A(a,8)$, $B(1,b)$, $C(\sqrt{2},c)$, $D(3\sqrt{2},d)$

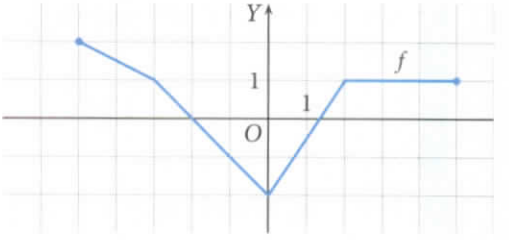
b) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $A(a,2)$, $B(b,1)$, $C(4,c)$, $D(12,d)$

11. Z wykresu funkcji f odczytaj jej dziedzinę, zbiór wartości, przedziały monotoniczności, argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartość 1 oraz zbiór rozwiązań nierówności $f(x)\geqslant 1$.

a)

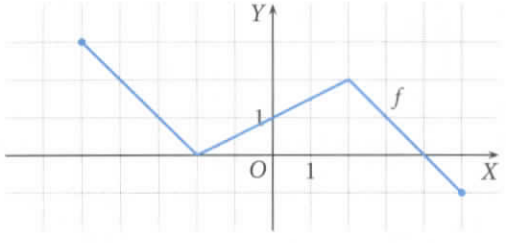


b)

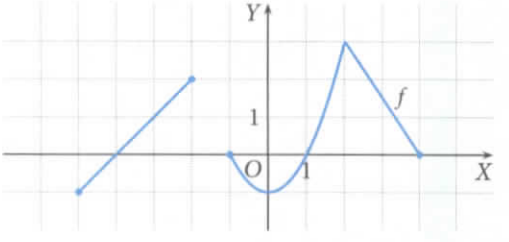


12. Naszkicuj wykresy funkcji: $f_1(x)=f(x)-2$, $f_2(x)=f(x)+3$, $f_3(x)=f(x-1)$, $f_4(x)=f(x+2)$. Wyznacz dziedziny i zbiory wartości tych funkcji, a następnie podaj ich przedziały monotoniczności.

a)



b)



13. Wyznacz wzory funkcji g i h. Naszkicuj ich wykresy i odczytaj argumenty, dla których te funkcje przyjmują wartość równą 2.

a) $f(x)=2x$, $g(x)=f(x+3)$, $h(x)=f(x)-2$

b) $f(x)=-|x|$, $g(x)=f(x-3)$, $h(x)=f(x)+2$

14. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x)=f(x)-2$ i $h(x)=f(x-2)$.

a) $f(x)=\begin{cases}2 & \text{dla } x\in(-\infty;-2)\\ -x & \text{dla } x\in\langle -2;\infty)\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{dla } x\in(-\infty;-1)\\ x+1 & \text{dla } x\in\langle -1;\infty)\end{cases}$

15. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -4;\infty)$, a jej zbiorem wartości – przedział $(-3;3\rangle$. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji g.

a) $g(x)=f(x)+4$ b) $g(x)=f(x+2)$ c) $g(x)=-f(x)$ d) $g(x)=f(-x)$

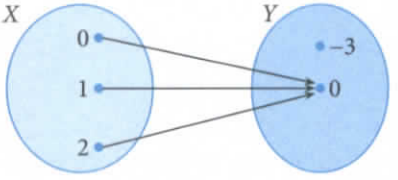
Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 164

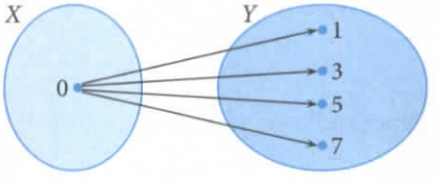
Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Przyporządkowanie będące funkcją o dziedzinie X przedstawiono na grafie:

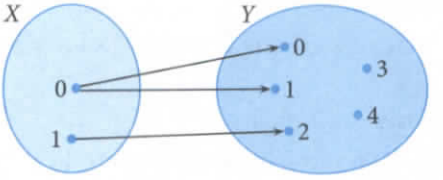
A.



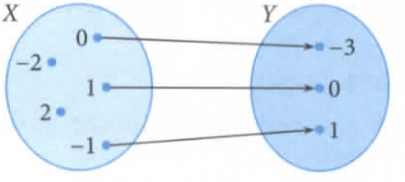
B.



C.



D.



Zadanie 2. (1 pkt) CKE
Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej większej od 1 jej największy dzielnik będący liczbą pierwszą. Spośród liczb: $f(42)$, $f(44)$, $f(45)$, $f(48)$ największa to:

A. $f(42)$, **B.** $f(44)$, **C.** $f(45)$, **D.** $f(48)$.

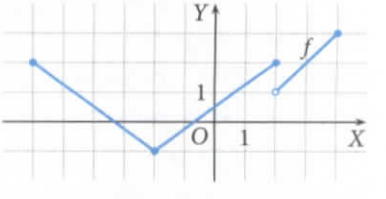
Zadanie 3. (1 pkt)
Funkcja f określona na zbiorze liczb całkowitych każdemu argumentowi przyporządkowuje liczbę o 4 mniejszą od jego podwojonego kwadratu. Prawdziwa jest równość:

A. $f(-4) = 28$, **B.** $f(-4) = 16$, **C.** $f(-4) = -12$, **D.** $f(-4) = -16$.

Zadanie 4. (1 pkt)
Wykres funkcji g otrzymujemy przez symetryczne odbicie względem osi OX wykresu funkcji $f(x) = x^2$, a następnie przesunięcie o trzy jednostki do góry. Funkcja g dana jest wzorem:

A. $g(x) = -(x+3)^2$,
B. $g(x) = -(x-3)^2$,
C. $g(x) = -(x^2+3)$,
D. $g(x) = -(x^2-3)$.

Zadanie 5. (1 pkt)
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant 2$ jest zbiór:



A. $\{2\} \cup \langle 3;4\rangle$,
B. $\{-6\} \cup \langle 3;4\rangle$,
C. $\{-6\} \cup \langle 2;4\rangle$,
D. $\{-6,2\} \cup \langle 3;4\rangle$.

Zestaw C. Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

odpowiedzi i modele – s. 164

Zadanie 1. (2 pkt)

Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji $f(x) = \frac{x(x^2-25)}{x+5}$.

Zadanie 2. (2 pkt)

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$.

Zadanie 3. (2 pkt)

Funkcja f określona na zbiorze liczb rzeczywistych przyporządkowuje każdej liczbie jej kwadrat pomniejszony o 1. Podaj wzór funkcji f i jej najmniejszą wartość.

Zadanie 4. (2 pkt)

Funkcja f określona na zbiorze liczb rzeczywistych przyporządkowuje każdej liczbie jej sześcian. Oblicz:

a) $f(-\sqrt{2})$, b) $f(2\sqrt{3})$.

Zadanie 5. (2 pkt)

Dziedziną funkcji f jest przedział $(-\infty; 1)$, a zbiorem wartości – przedział $(-2; 4\rangle$. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji $g(x) = f(x) - 3$.

Zadanie 6. (2 pkt)

Funkcja f: $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbf{R}$ każdemu argumentowi przyporządkowuje jego wartość bezwzględną powiększoną o trzy. Podaj wzór funkcji f i naszkicuj jej wykres.

Zadanie 7. (2 pkt)

Dziedziną funkcji f jest zbiór dodatnich liczb naturalnych mniejszych od 7. Funkcja f przyporządkowuje każdemu argumentowi liczbę jego dzielników. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

Zadanie 8. (2 pkt)

Wyznacz wzór funkcji $g(x) = f(x-3)$ i naszkicuj jej wykres, jeżeli $f(x) = 2x$.

Zadanie 9. (2 pkt)

Szkolne kółko rowerowe zorganizowało rajd wzdłuż Mierzei Wiślanej. Uczniowie wyruszyli z Mikoszewa o godzinie 9.00. W ciągu pierwszej godziny przejechali 20 km do Kątów Rybackich, gdzie zrobili 15 minutową przerwę. Przez kolejną godzinę przejechali 15 km do Krynicy Morskiej, gdzie odpoczywali przez pół godziny. Kolejny etap wycieczki – 10 km do miejscowości Piaski – pokonali z prędkością 20 km/h. Po półgodzinnym odpoczynku wyruszyli w powrotną drogę i jechali ze średnią prędkością 15 km/h. Naszkicuj wykres przedstawiający zależność odległości miejsca pobytu rowerzystów od Mikoszewa jako funkcję czasu.

Zestaw D. Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

odpowiedzi – s. 164
modele – s. 166

Zadanie 1. (4 pkt)

Funkcja f określona na zbiorze liczb naturalnych przyporządkowuje każdej liczbie jej resztę z dzielenia przez 4.

a) Oblicz: $f(15)$, $f(93)$, $f(102)$.

b) Naszkicuj wykres funkcji f dla argumentów mniejszych od 10.

Zadanie 2. (5 pkt) CKE

Funkcja określona jest wzorem $f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{dla } x<2\\ 1 & \text{dla } 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$

a) Uzupełnij tabelę.

x	-3	3	
$f(x)$			0

b) Naszkicuj wykres funkcji f.

c) Podaj wszystkie liczby całkowite x spełniające nierówność $f(x)\geqslant -6$.

Zadanie 3. (4 pkt)

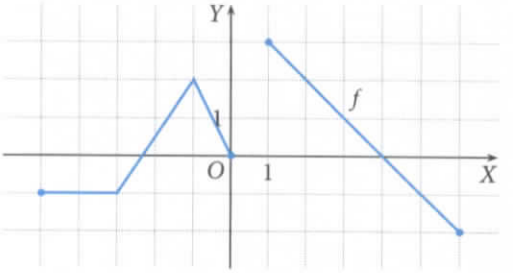
Z wykresu funkcji f odczytaj:

a) dziedzinę,

b) zbiór wartości,

c) rozwiązanie równania $f(x)=2$,

d) zbiór rozwiązań nierówności $f(x)\geqslant -1$.



Zadanie 4. (5 pkt)

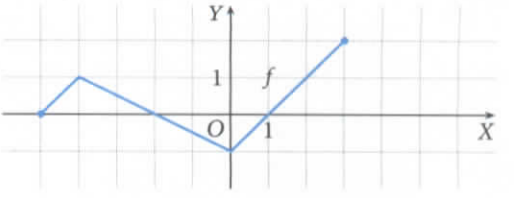
Naszkicuj wykresy funkcji

$$f(x)=\begin{cases}2-2x & \text{dla } x\in(-3;1)\\ x-1 & \text{dla } x\in\langle 1;5\rangle\end{cases}$$

oraz $g(x)=-f(x)$. Podaj zbiór wartości funkcji g. Oblicz $g\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Zadanie 5. (4 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f. Naszkicuj wykres funkcji $g(x)=f(-x)$ i podaj jej dziedzinę, zbiór wartości oraz miejsca zerowe.

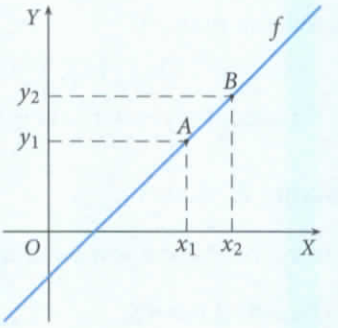


Zadanie 6. (4 pkt)

Naszkicuj wykresy funkcji $f(x)=|x|$, $g(x)=|x-2|$ i $h(x)=g(-x)$. Podaj współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji h z prostą o równaniu $y=4$.

4. Funkcja liniowa

Funkcją liniową nazywamy funkcję określoną wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie a i b są stałymi.



Wykresem funkcji liniowej jest prosta. Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej $y = ax + b$.

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez dwa różne punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ takie, że $x_1 \neq x_2$, jest równy:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = ax + b$ jest:

- **rosnąca** dla $a > 0$,
- **malejąca** dla $a < 0$,
- **stała** dla $a = 0$.

Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są:

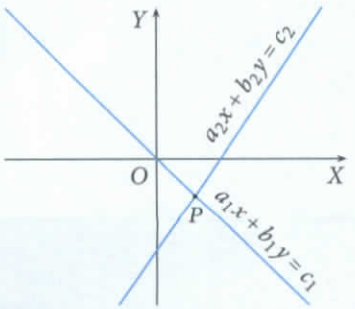
- **równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$,
- **prostopadłe** wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Układ równań liniowych

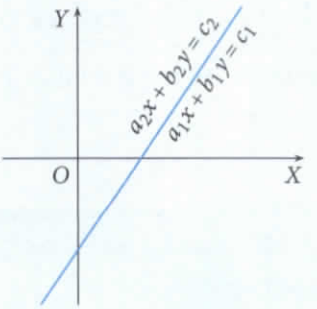
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

nazywamy:

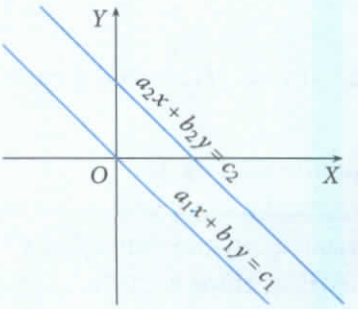
- **oznaczonym**, gdy ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- **nieoznaczonym**, gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań,
- **sprzecznym**, gdy nie ma rozwiązań.



Układ oznaczony – proste opisane równaniami tego układu przecinają się w jednym punkcie.



Układ nieoznaczony – oba równania opisują tę samą prostą.



Układ sprzeczny – proste opisane równaniami tego układu są równoległe i się nie pokrywają.

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 168

1. Podaj argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne. Oblicz pole figury ograniczonej wykresem tej funkcji i osiami układu współrzędnych.

a) $f(x) = 6x + 3$ b) $f(x) = -\frac{2}{3}x - 4$ c) $f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$

2. Wyznacz współczynnik b, jeżeli:

a) miejscem zerowym funkcji $f(x) = 3x + b$ jest 2,

b) wykres funkcji $f(x) = 3x + b$ przechodzi przez punkt $(1, 2)$.

3. Dla jakich wartości współczynnika b funkcja liniowa $f(x) = 2x + b$:

a) dla argumentu 3 przyjmuje wartość większą od 4,

b) ma miejsce zerowe mniejsze od 2?

4. Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja $f(x) = -2x + 3$ przyjmuje wartości należące do przedziału:

a) $(-3; 5\rangle$, b) $\left(-5\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$, c) $\langle 1 - 2\sqrt{2}; 0\rangle$.

5. Wyznacz wzór funkcji liniowej, która spełnia podane warunki.

a) $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3$ i $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$ b) $f\left(\sqrt{2}\right) = 6$ i $f(2) = 6$

6. Wyznacz równanie prostej AB. Sprawdź, czy należy do niej punkt C.

a) $A(-2, 6), B(2, -2), C(5, 8)$ b) $A(-1, 7), B(-9, -1), C(1, 9)$

7. Określ monotoniczność funkcji f.

a) $f(x) = \left(1 - \sqrt{3}\right)x + 1$ b) $f(x) = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)x + 4$

8. Określ monotoniczność funkcji f dla $m = -2$, $m = -1$ i $m = 0$.

a) $f(x) = \left(-3 - \frac{3}{2}m\right)x - 7$ b) $f(x) = \left(\sqrt{3}m + 3\right)x + 2$

9. Wyznacz wzór funkcji liniowej g, której wykres przechodzi przez punkt P i jest równoległy do wykresu funkcji f. Oblicz $g(-6)$.

a) $f(x) = 3x + 2$, $P(2, 2)$ c) $f(x) = -\sqrt{3}x + 5$, $P\left(\sqrt{3}, 0\right)$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$, $P(4, 2)$ d) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 2$, $P\left(-4\sqrt{3}, 1\right)$

10. Wyznacz wzór funkcji liniowej g, której wykres przechodzi przez punkt P i jest prostopadły do wykresu funkcji f. Wyznacz miejsce zerowe funkcji g.

a) $f(x) = -4x$, $P(4, 2)$ c) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 4$, $P(1, 4)$

b) $f(x) = 2x + 1$, $P(-6, 2)$ d) $f(x) = \sqrt{2}x + 1$, $P\left(\sqrt{2}, -1\right)$

11. Wyznacz wartość m, dla której proste k i l są równoległe.

a) $k: y = -2x - 9$, $l: y = 4mx + 1$

b) $k: y = 3mx + 2$, $l: y = (2m - 4)x - 1$

12. Wyznacz wartość m, dla której proste k i l są prostopadłe.

a) $k: y = x - 3$, $l: y = 2mx + 2$

b) $k: y = \frac{1}{3}x + 1$, $l: y = (1 - 2m)x + 6$

13. Dane są punkty $A(-2, 4)$, $B(2, 1)$. Napisz równanie prostej k prostopadłej do prostej AB i przechodzącej przez punkt $(3, 6)$. Określ monotoniczność funkcji, której wykresem jest prosta k. Dla jakich argumentów funkcja, której wykresem jest prosta k, przyjmuje wartości ujemne?

14. Dla jakiej wartości a miejscem zerowym funkcji f jest liczba x_0?

a) $f(x) = (1 + a)x + 2$, $x_0 = 4$

b) $f(x) = (3a - 2)x - 10$, $x_0 = -2$

c) $f(x) = \left(a + \sqrt{2}\right)x - 2$, $x_0 = \sqrt{2}$

d) $f(x) = \left(\sqrt{3} - 3a\right)x - 18$, $x_0 = 3\sqrt{3}$

15. Określ monotoniczność funkcji $f(x) = ax + b$, jeśli liczba a spełnia równanie:

a) $\sqrt{5}a - 5 = \sqrt{5} + 5$,

b) $1 - 2\sqrt{5}a = 3\sqrt{5}$,

c) $2a + \sqrt{3}a = 2$,

d) $3a - \sqrt{3}a = \sqrt{3} + 3$,

e) $a + 3 = 4 - \sqrt{7}a$,

f) $4a - \sqrt{6} = \sqrt{6}a - 3$.

16. Wyznacz miejsce zerowe funkcji $f(x) = -2x + b$, jeśli liczba b spełnia równanie:

a) $(b + 5)(5 - b) = 5b - b^2$,

b) $\left(\sqrt{2} - b\right)^2 - \left(b - 2\sqrt{2}\right)^2 = -6$,

c) $(b + 3)(b - 3) = b(b + 9) - 3(b + 1)$,

d) $\left(\frac{1}{2}b + 2\right)\left(2 - \frac{1}{2}b\right) + \left(1 + \frac{1}{2}b\right)^2 = 0$.

17. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = 2x + 1$, jeśli jej dziedziną jest zbiór tych liczb rzeczywistych x, które spełniają nierówność:

a) $(2x - 3)(3 + 2x) \leqslant (2x - 1)^2$,

b) $\left(2\sqrt{3} - x\right)^2 \geqslant \left(x - 3\sqrt{3}\right)^2$,

c) $(3x + 5)^2 < 9(x - 2)^2$,

d) $3 < -4(3 - x)^2 - (2x + 3)(3 - 2x)$.

18. Podaj liczbę rozwiązań równania w zależności od a.

a) $(2 - a)x = 3 + x$

b) $(4x - 1)a = 3a + xa$

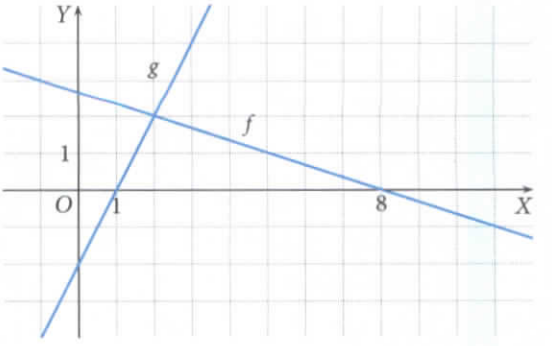
c) $3x + 2a = 3 + 6ax$

19. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji liniowych f i g.

a) Wyznacz wzór funkcji g i oblicz $g(-49)$.

b) Wyznacz wzór funkcji f i oblicz pole trójkąta ograniczonego przez wykres funkcji f i osie układu współrzędnych.

c) Dla jakich argumentów funkcje f i g jednocześnie przyjmują wartości dodatnie?



20. Rozwiąż graficznie i algebraicznie układ równań.

a) $\begin{cases} 3x+y=5 \\ x-2y=-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x-y=10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-2y=5 \\ x-2=4+2y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 0{,}5x+0{,}75y=2 \\ 0{,}25y=3+x \end{cases}$

e) $\begin{cases} y=\frac{x-2y+4}{3} \\ y+3=4x \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x+2y=3 \\ y+2=\frac{3(1-x)+4}{2} \end{cases}$

21. Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji f i g.

a) $f(x)=\begin{cases} -2 & \text{dla} \quad x<4 \\ x-6 & \text{dla} \quad x\geqslant 4 \end{cases}$, $g(x)=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$

b) $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{dla} \quad x\leqslant -5 \\ -2x-8 & \text{dla} \quad x>-5 \end{cases}$, $g(x)=-\frac{2}{3}x-4$

22. Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej jest równa 8. Jeżeli cyfry w tej liczbie zamienimy miejscami, to otrzymamy liczbę o 18 większą. Wyznacz liczbę początkową.

23. Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej jest równa 12. Jeżeli od cyfry dziesiątek odejmiemy 6, a do cyfry jedności dodamy 6, to otrzymamy liczbę złożoną z tych samych cyfr, ale ustawionych w odwrotnej kolejności. Wyznacz liczbę początkową.

24. a) Sławek jest o 5 lat starszy od Janka. Dziesięć lat temu Sławek był dwa razy starszy od Janka. Ile lat ma każdy z chłopców?

b) Sześć lat temu Basia była o 25% młodsza od Ani. Teraz Ania i Basia mają razem 33 lata. Ile lat ma każda z dziewczynek?

25. Marysia i Bogdan są małżeństwem od 24 lat, w dniu ślubu mieli razem 54 lata. Za rok Marysia będzie dokładnie dwa razy starsza niż w dniu ślubu. Ile lat ma teraz Marysia, a ile – Bogdan?

26. Gosia rozpoczyna pracę w kwiaciarni. Zaproponowano jej stawkę dzienną w wysokości 40 zł, plus 1 zł 50 gr za każdą sprzedaną wiązankę kwiatów. Podaj wzór opisujący wysokość tygodniowej pensji y Gosi (za 5 dni pracy) w zależności od liczby sprzedanych wiązanek x. Oblicz, ile wiązanek kwiatów musiałaby sprzedać w ciągu 5 dni, aby zarobić w tym czasie 425 zł.

27. Funkcja $k(x) = 1000 + 20x$ opisuje koszty (w złotych), jakie dziennie ponosi firma produkująca plecaki. 1000 zł to koszt stały, 20 zł to koszt wyprodukowania jednego plecaka, x – liczba plecaków. Funkcja $p(x) = 130x$ opisuje dzienny przychód ze sprzedaży x plecaków. Ile plecaków dziennie należy wyprodukować – przy założeniu, że wszystkie zostaną sprzedane – aby dzienny zysk był większy od 5000 zł?

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 168

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{4}{3}x - 4$ nie należy punkt:

A. $(-3, 0)$, **B.** $\left(-\frac{3}{4}, -3\right)$, **C.** $\left(1\frac{1}{8}, -7\right)$, **D.** $\left(6\frac{3}{4}, -13\right)$.

Zadanie 2. (1 pkt)
Jeśli wykres funkcji $f(x) = -3x - 2b$ przecina oś OY w punkcie, którego rzędna jest równa 6, to wykres funkcji $g(x) = 2x + \frac{1}{3}b$ przecina oś OY w punkcie, którego rzędna jest równa:

A. -1, **B.** $-\frac{2}{3}$, **C.** $\frac{1}{3}$, **D.** 2.

Zadanie 3. (1 pkt)
Funkcja $f(x) = -3x + 1$ przyjmuje wartości należące do przedziału $\langle 4; 10\rangle$ dla wszystkich argumentów należących do przedziału:

A. $\langle -10; -4\rangle$, **B.** $\langle -9; -3\rangle$, **C.** $\left\langle -3\frac{1}{3}; -1\frac{1}{3}\right\rangle$, **D.** $\langle -3; -1\rangle$.

Zadanie 4. (1 pkt)
Ile rozwiązań ma układ równań $\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ 2y - x = -1 \end{cases}$?

A. jedno **B.** dwa **C.** nieskończenie wiele **D.** układ jest sprzeczny

Zadanie 5. (1 pkt)
Funkcja liniowa f spełnia warunki: $f(-\sqrt{3}) = 1$ i $f(2\sqrt{3}) = -5$. Wynika z tego, że prosta będąca wykresem tej funkcji przechodzi przez następujące ćwiartki układu współrzędnych:

A. I, II, III, **B.** I, II, IV, **C.** I, III, IV, **D.** II, III, IV.

Zadanie 6. (1 pkt) CKE
Liczba 1 jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = (2 - m)x + 1$. Wynika stąd, że:

A. $m = 0$, **B.** $m = 1$, **C.** $m = 2$, **D.** $m = 3$.

Zadanie 7. (1 pkt) CKE
Które z równań opisuje prostą prostopadłą do prostej o równaniu $y = 4x + 5$?

A. $y = -4x + 3$ **B.** $y = -\frac{1}{4}x + 3$ **C.** $y = \frac{1}{4}x + 3$ **D.** $y = 4x + 3$

Zadanie 8. (1 pkt)
Funkcja liniowa przyjmuje wartości dodatnie wyłącznie dla argumentów większych od 3, a jej wykres przechodzi przez punkt $(2, -4)$. Wynika z tego, że pole trójkąta ograniczonego wykresem tej funkcji i osiami układu współrzędnych jest równe:

A. 18, **B.** 12, **C.** 10, **D.** 8.

Zestaw C. Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

odpowiedzi i modele – s. 169

Zadanie 1. (2 pkt)
Wykres funkcji liniowej przechodzi przez punkt $(-2,4)$. Funkcja przyjmuje wartości ujemne wyłącznie dla argumentów większych od 2. Podaj wzór tej funkcji.

Zadanie 2. (2 pkt) CKE
O funkcji liniowej f wiadomo, że $f(1) = 2$ oraz że do wykresu tej funkcji należy punkt $P(-2,3)$. Wyznacz wzór funkcji f.

Zadanie 3. (2 pkt)
Określ monotoniczność funkcji $f(x) = (4 - \sqrt{2}m)x + 2$ dla $m = \frac{5}{2}\sqrt{2} - 1$.

Zadanie 4. (2 pkt) CKE
Napisz równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y = 2x - 11$ i przechodzącej przez punkt $P(1,2)$.

Zadanie 5. (2 pkt)
Napisz równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $x - 3y + 6 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(-1,2)$.

Zadanie 6. (2 pkt)
Wyznacz wartość m, dla której proste $3x - y + 4 = 0$ i $y = \frac{m-1}{2}x + 2$ są prostopadłe.

Zadanie 7. (2 pkt) CKE
Proste l i k przecinają się w punkcie $A(0,4)$. Prosta l wyznacza wraz z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt o polu 8, a prosta k – trójkąt o polu 10. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są: punkt A oraz punkty przecięcia prostych l i k z osią OX.

Zadanie 8. (2 pkt)
Uzasadnij, że dla $x = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ funkcja liniowa $f(x) = \sqrt{2}x - 2\sqrt{3}$ przyjmuje wartość całkowitą.

Zadanie 9. (2 pkt)
Rozwiąż równanie $2x - \sqrt{6} = \sqrt{6}x - 2$.

Zadanie 10. (2 pkt)
Oblicz wartość a, dla której miejscem zerowym funkcji $f(x) = \frac{1-a}{2}x + 2$ jest liczba 4.

Zestaw D. Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

odpowiedzi – s. 169
modele – s. 170

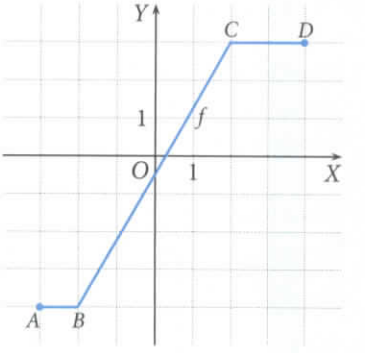
Zadanie 1. (5 pkt)
Dana jest funkcja $f(x) = (2-a)x + 4$. Wyznacz a, jeśli:

a) punkt $A(-2, 6)$ należy do wykresu funkcji f,

b) wykresy funkcji f i $g(x) = -2x + 2$ przecinają oś OX w tym samym punkcie.

Zadanie 2. (4 pkt)
Miejscem zerowym funkcji $f(x) = ax + 2$ jest liczba $\frac{1}{2}$. Wyznacz wzór funkcji f i podaj argumenty, dla których wartości funkcji f są mniejsze od wartości funkcji $g(x) = -3x + 4$.

Zadanie 3. (4 pkt) CKE
Na rysunku obok przedstawiono łamaną $ABCD$, która jest wykresem funkcji $y = f(x)$. Korzystając z wykresu:



a) zapisz zbiór wartości funkcji f w postaci przedziału,

b) podaj wartość funkcji f dla argumentu $x = 1 - \sqrt{10}$,

c) wyznacz równanie prostej BC,

d) oblicz długość odcinka BC.

Zadanie 4. (6 pkt)
Dane są proste k: $y = -\frac{4}{3}x + 5$, l: $y = \frac{4}{3}x + 5$.

a) Napisz równanie prostej m przechodzącej przez punkt $(0, -3)$, równoległej do prostej k.

b) Napisz równanie prostej n przechodzącej przez punkt $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$, równoległej do prostej l.

c) Oblicz pole figury ograniczonej prostymi: k, l, m, n.

Zadanie 5. (4 pkt) CKE
Ala jeździ do szkoły rowerem, a Ola skuterem. Obie pokonują tę samą drogę. Ala wyjechała do szkoły o godzinie 7:00 i pokonała całą drogę w ciągu 40 minut. Ola wyjechała 10 minut później niż Ala, a pokonanie całej drogi zajęło jej tylko 20 minut. Oblicz, o której godzinie Ola wyprzedziła Alę.

Zadanie 6. (3 pkt) CKE
Dwaj rzemieślnicy przyjęli zlecenie wykonania wspólnie 980 detali. Zaplanowali, że każdego dnia pierwszy z nich wykona m, a drugi n detali. Obliczyli, że razem wykonają zlecenie w ciągu 7 dni. Po pierwszym dniu pracy pierwszy z rzemieślników rozchorował się i wtedy drugi, aby wykonać całe zlecenie, musiał pracować o 8 dni dłużej niż planował (nie zmieniając liczby wykonywanych codziennie detali). Oblicz m i n.

5. Funkcja kwadratowa

Funkcją kwadratową lub **trójmianem kwadratowym** nazywamy funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$ określoną dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie a, b, c są stałymi i $a \neq 0$.

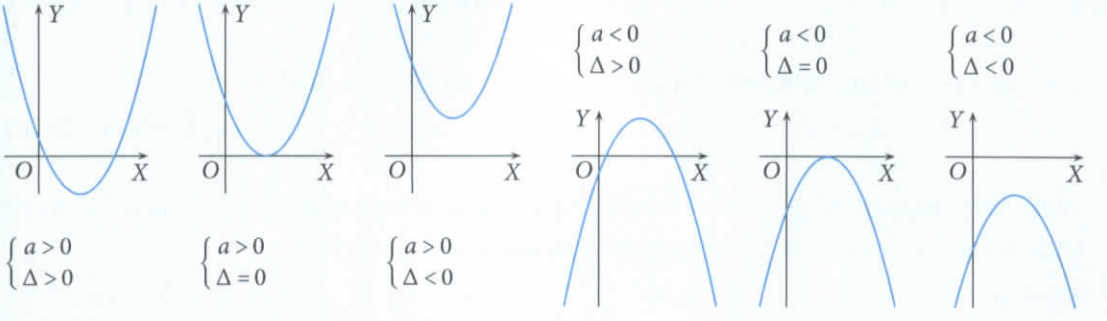
Wykres funkcji kwadratowej nazywamy **parabolą**. Znak współczynnika a decyduje o tym, w którą stronę są skierowane ramiona paraboli o równaniu $y = ax^2 + bx + c$: do góry ($a > 0$) czy do dołu ($a < 0$).

Wyróżnikiem trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ nazywamy liczbę $\Delta = b^2 - 4ac$.

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

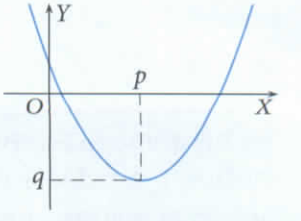
- Jeśli $\Delta > 0$, to funkcja ma dwa różne miejsca zerowe:
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- Jeśli $\Delta = 0$, to funkcja ma jedno miejsce zerowe: $x_0 = \frac{-b}{2a}$ (nazywamy je pierwiastkiem podwójnym).
- Jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma miejsc zerowych.

Położenie wykresu funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ względem osi OX



Wzór funkcji kwadratowej

- Postać **ogólna**: $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
Współrzędne wierzchołka paraboli: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- Postać **kanoniczna**: $y = a(x - p)^2 + q$, $a \neq 0$.
Współrzędne wierzchołka paraboli: (p, q), gdzie:
$$p = -\frac{b}{2a} \text{ i } q = -\frac{\Delta}{4a}.$$



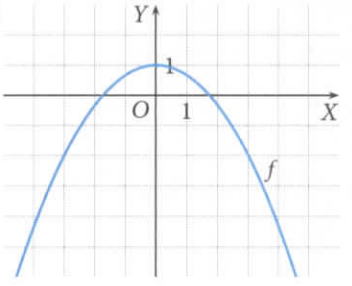
- Postać **iloczynowa**:
  - jeśli $\Delta > 0$, to $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1 i x_2 są miejscami zerowymi;
  - jeśli $\Delta = 0$, to $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest miejscem zerowym;
  - jeśli $\Delta < 0$, to nie istnieje postać iloczynowa.

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

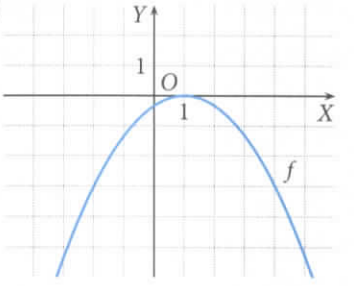
odpowiedzi – s. 171

1. Wykres funkcji f przedstawiony na rysunku powstał w wyniku przesunięcia paraboli $y = -\frac{1}{3}x^2$. Podaj wzór funkcji f.

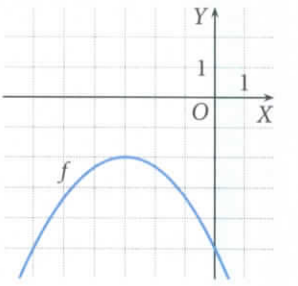
a)



b)



c)



2. Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ b) $f(x) = x^2 + 6x$ c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$

3. Podaj punkty przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych. Zapisz wzór funkcji f w postaciach iloczynowej i kanonicznej oraz naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ b) $f(x) = -x^2 - 4x + 5$ c) $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$

4. Wyznacz przedziały monotoniczności oraz zbiór wartości funkcji f.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 6x + 7$ b) $f(x) = -5x^2 - 15x + 1$ c) $f(x) = x^2 - 4\sqrt{2}x - 2$

5. Wykresem funkcji $f(x) = 2x^2 + bx + c$ jest parabola o wierzchołku w punkcie W. Wyznacz współczynniki b i c oraz podaj najmniejszą wartość funkcji f.

a) $W(0,2)$ b) $W(0,0)$ c) $W(2,5)$ d) $W(-1,-3)$

6. Wyznacz współczynnik c taki, aby zbiorem wartości funkcji $f(x) = -x^2 + 2x + c$ był podany przedział. Podaj wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.

a) $(-\infty;-2\rangle$ b) $(-\infty;0\rangle$ c) $(-\infty;4\rangle$ d) $(-\infty;3\sqrt{2}\rangle$

7. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f i zapisz jej wzór w postaci iloczynowej (jeśli jest to możliwe). Naszkicuj wykres funkcji f i odczytaj z niego, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości nieujemne.

a) $f(x) = x^2 + 4x - 5$ b) $f(x) = -x^2 + x + 6$ c) $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$

8. Do wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$ należą punkty A i B. Zapisz wzór funkcji f w postaciach kanonicznej i iloczynowej.

a) $A(-1,0), B(5,0)$ b) $A(1,0), B(0,-3)$ c) $A(2,2), B(3,1)$

9. a) Wykres funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + 1$ jest symetryczny względem prostej $x = 2$, a wartość najmniejsza funkcji f jest równa -3. Napisz równanie tej funkcji w postaci ogólnej.

b) Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = a(x + 1)(x - 3)$, której największa wartość jest równa 8. Wyznacz współczynnik a oraz przedstaw wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

10. Wyznacz współczynnik a we wzorze funkcji kwadratowej $f(x) = a(x+1)^2 - 4$:

a) jeśli wykres funkcji f przechodzi przez punkt $P(2, 14)$,

b) jeśli jednym z miejsc zerowych funkcji f jest 1.

11. Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx - 4$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; -1\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle -1; \infty)$. Wierzchołek paraboli będącej wykresem tej funkcji należy do prostej $y = 3x - 1{,}5$. Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Wyznacz miejsca zerowe tej funkcji.

12. Wyznacz współczynniki b i c funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 + bx + c$, jeśli:

a) funkcja f ma tylko jedno miejsce zerowe $x_0 = 2$,

b) funkcja f osiąga wartość najmniejszą równą 3, a jej wykres jest symetryczny względem prostej $x = 1$,

c) funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie tylko dla $x \in \langle 1; 4\rangle$,

d) zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -1; \infty)$, a jej wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 1)$.

13. Wyznacz wszystkie wartości współczynników a, b i c, dla których funkcja f nie ma miejsc zerowych.

a) $f(x) = ax^2 + 4x + 2$ b) $f(x) = x^2 + bx + 1$ c) $f(x) = -x^2 + 6x + c$

14. Jednym z rozwiązań równania $x^2 - 6x + c = 0$ jest liczba $3 - \sqrt{2}$. Wyznacz współczynnik c i znajdź drugie rozwiązanie.

15. Rozwiąż równanie.

a) $9x^2 - 4 = 0$ b) $x^2 + 2x = 0$ c) $6x - 9 = x^2$ d) $4x - 4x^2 = 1$

16. Rozwiąż równanie.

a) $2(x+1)^2 = 5(4-x)$ b) $x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$ c) $\sqrt{3}x^2 - 9x + 6\sqrt{3} = 0$

17. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 9 > 0$ c) $x^2 + 16 \geqslant 8x$ e) $2x^2 + 5x - 3 > 0$

b) $6x^2 + 3x \geqslant 0$ d) $2x^2 - 2 + 3x \leqslant 0$ f) $-3x^2 - 2x + 1 \leqslant 0$

18. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f.

a) $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+3x-10}$ b) $f(x)=\frac{x^2-x-2}{\sqrt{x^2-16}}$ c) $f(x)=\frac{x^2-6x+5}{\sqrt{x^2+x-12}}$

19. Dane są funkcje $f(x)=x^2-4x+1$ i $g(x)=x-3$. Rozwiąż nierówność.

a) $f(x)>g(x)$ b) $f(x)-x\cdot g(x)\geqslant 0$ c) $2f(x)+4g(x)<-10$

20. Wykaż, że dla $p=-3$ nierówność jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą.

a) $px^2+\sqrt{2}x+p<0$ b) $x^2+px-2p>0$ c) $px^2+(1-2p)x+3p<0$

21. Wyznacz wszystkie wartości m, dla których prosta $y=m$ ma dwa punkty wspólne z wykresem funkcji f.

a) $f(x)=x^2-1$ b) $f(x)=-4x^2-2x$ c) $f(x)=-2x^2-4x+1$

22. Podaj współrzędne punktów przecięcia prostej l z wykresem funkcji f.

a) $l: y=-1$, $f(x)=x^2-2x$

b) $l: y=-2$, $f(x)=-x^2-x+18$

c) $l: y=x-1$, $f(x)=2x^2+7x+3$

d) $l: y=2x-1$, $f(x)=-x^2+2x+8$

23. Rozwiąż graficznie i algebraicznie układ równań.

a) $\begin{cases} y=x^2+x-2 \\ y=-x+1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y=x^2-2x-3 \\ y=-2x+1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x^2+x+4 \\ y=-\frac{1}{2}x+2 \end{cases}$

24. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x)=-x^2+4x+1$, $\langle 0;3\rangle$

b) $f(x)=x^2-4x+5$, $\langle -1;1\rangle$

c) $f(x)=2x^2+8x+3$, $\langle -3;1\rangle$

d) $f(x)=-x^2+6x+1$, $\langle -2;2\rangle$

e) $f(x)=-3x^2-6x+2$, $\langle -2;0\rangle$

f) $f(x)=2x^2+2x+1$, $\langle -1;3\rangle$

25. Kwadrat pewnej liczby jest o 270 większy od jej potrojonej wartości. Znajdź tę liczbę.

26. Iloczyn dwóch liczb jest równy 225. Znajdź te liczby, jeżeli jedna z nich jest o 7 większa od podwojonej drugiej liczby.

27. Suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych wynosi 925. Znajdź te liczby.

28. Suma kwadratów dwóch kolejnych nieparzystych liczb naturalnych wynosi 650. Znajdź te liczby.

29. Wyznacz dwie kolejne liczby naturalne, których suma jest większa od 23, a suma ich kwadratów jest mniejsza od 365.

30. Wyznacz najmniejszą możliwą wartość sumy kwadratów dwóch liczb x i y, jeśli:

a) $x + y = 2$, b) $x - y = 3$, c) $3x + y = 0$, d) $2x - y = 1$.

31. Wyznacz największą możliwą wartość iloczynu dwóch liczb x i y, jeśli:

a) $x + y = 6$, b) $2x + y = 4$, c) $4x + 2y = 1$, d) $x + y = 0$.

32. Suma dwóch liczb jest równa 10. Wyznacz te liczby, tak aby suma potrojonego kwadratu jednej z nich i kwadratu drugiej była jak najmniejsza.

33. Jakie wymiary powinien mieć prostokąt o obwodzie 20 cm, aby jego pole było jak największe?

34. Mamy 58 metrów bieżących siatki ogrodzeniowej. Zamierzamy ogrodzić prostokątny ogródek o jak największej powierzchni. Jakie powinien on mieć wymiary, jeśli na jednym z boków trzeba zostawić nieogrodzone 2 m na furtkę?

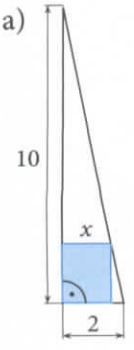
35. Obwód prostokąta jest równy 8. Wyznacz długości jego boków, tak aby prostokąt miał jak najkrótszą przekątną.

36. Wysokość prostopadłościanu jest równa 3 cm, a jego podstawą jest prostokąt o obwodzie 16 cm. Jakie powinny być wymiary podstawy tego prostopadłościanu, by jego pole powierzchni całkowitej było jak największe? Oblicz objętość takiego prostopadłościanu.

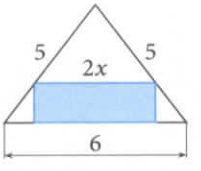
37. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o obwodzie 12. Oblicz największe możliwe pole powierzchni bocznej takiego walca.

38. Przedstaw pole P prostokąta (rysunek niżej) jako funkcję zmiennej x i podaj jej dziedzinę. Dla jakiego argumentu pole jest największe? Wyznacz wymiary prostokąta o największym polu.

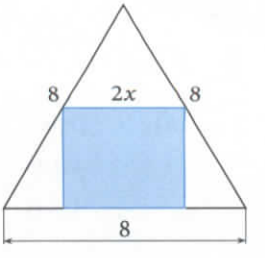
a)



b)



c)

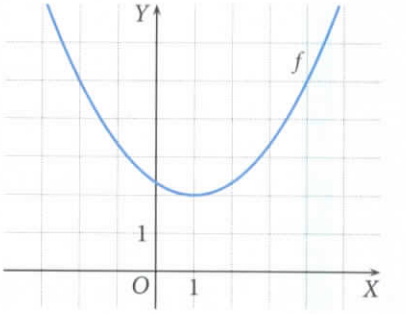


Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 172

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Wykres funkcji f (rysunek obok) powstał w wyniku przesunięcia paraboli $y = \frac{1}{3}x^2$. Dla $x = 10$ funkcja f przyjmuje wartość:



A. 24, **B.** 29, **C.** $33\frac{1}{3}$, **D.** $35\frac{1}{3}$.

Zadanie 2. (1 pkt)
Wierzchołek paraboli $y = x^2 + 4x$ leży na prostej danej równaniem:

A. $y = -x$, **B.** $y = x$, **C.** $y = 2x$, **D.** $y = 4x$.

Zadanie 3. (1 pkt) CKE
Wykresem funkcji kwadratowej f jest parabola o wierzchołku $W(5, 7)$. Wówczas prawdziwa jest równość:

A. $f(1) = f(9)$, **B.** $f(1) = f(11)$, **C.** $f(1) = f(13)$, **D.** $f(1) = f(15)$.

Zadanie 4. (1 pkt) CKE
Prosta o równaniu $y = a$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 6x - 10$. Wynika stąd, że:

A. $a = 3$, **B.** $a = 0$, **C.** $a = -1$, **D.** $a = -3$.

Zadanie 5. (1 pkt)
Jeśli funkcja $f(x) = ax^2 - 2x + \frac{1}{2}$ ma dwa różne miejsca zerowe, to a może być równe:

A. 1, **B.** 2, **C.** 3, **D.** $\sqrt{5}$.

Zadanie 6. (1 pkt) CKE
Równanie $(2x - 1)(x - 2) = (1 - 2x)(x + 2)$ ma dwa rozwiązania. Są to liczby:

A. -2 oraz $\frac{1}{2}$, **B.** 0 oraz $\frac{1}{2}$, **C.** $\frac{1}{2}$ oraz 2, **D.** -2 oraz 2.

Zadanie 7. (1 pkt)
Wskaż nierówność, którą spełnia każda liczba rzeczywista.

A. $6x^2 + x + 1 > 0$ **B.** $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} > 0$ **C.** $x^2 - 100x + 25 \geqslant 0$ **D.** $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$

Zadanie 8. (1 pkt)
Pole trójkąta prostokątnego jest równe 30 cm^2. Jedna przyprostokątna jest o 7 cm dłuższa od drugiej. Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość:

A. 8 cm, **B.** 10 cm, **C.** 13 cm, **D.** 15 cm.

Zestaw C. Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

odpowiedzi – s. 172
modele – s. 173

Zadanie 1. (2 pkt)
Wypisz wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność $x(x+2) < 8$.

Zadanie 2. (2 pkt) CKE
Rozwiąż nierówność $x^2 + 6x - 7 \leqslant 0$.

Zadanie 3. (2 pkt) CKE
Rozwiąż nierówność $3x^2 > 8x + 3$.

Zadanie 4. (2 pkt)
Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja $f(x) = 4x^2 - x - 3$ przyjmuje wartości niedodatnie.

Zadanie 5. (2 pkt)
Wyznacz współczynnik b funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 + bx + 8$, wiedząc, że ma ona tylko jedno miejsce zerowe.

Zadanie 6. (2 pkt)
Wyznacz współczynnik b funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + bx + 1$, wiedząc, że prosta $x = 3$ jest osią symetrii wykresu tej funkcji.

Zadanie 7. (2 pkt)
Dany jest trójmian $y = x^2 + bx + c$. Wyznacz współczynniki b i c, wiedząc, że trójmian osiąga najmniejszą wartość równą 4 dla $x = -2$.

Zadanie 8. (2 pkt)
Wyznacz współczynnik a funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + 2x - 1$, wiedząc, że współrzędna y wierzchołka wykresu funkcji f jest równa 2.

Zadanie 9. (2 pkt)
Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji danej wzorem $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ w przedziale $\langle -2; 0 \rangle$.

Zadanie 10. (2 pkt) CKE
Oblicz najmniejszą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x + 1$ w przedziale $\langle 0; 1 \rangle$.

Zadanie 11. (2 pkt)
Wyznacz wszystkie wartości m, dla których prosta $y = m$ nie ma punktów wspólnych z wykresem funkcji $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.

Zadanie 12. (2 pkt)
Suma pewnej liczby i jej kwadratu wynosi 272. Znajdź tę liczbę.

Zestaw D. Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

odpowiedzi – s. 172
modele – s. 174

Zadanie 1. (4 pkt)
Wyznacz współczynnik m taki, aby przedział $\langle -1; \infty)$ był zbiorem wartości funkcji kwadratowej $y = x^2 + mx + 1$.

Zadanie 2. (5 pkt)
Liczby -2 i 4 są miejscami zerowymi funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$.

a) Wyznacz współczynniki b i c, a następnie naszkicuj wykres funkcji f.

b) Dla jakich wartości x wykres funkcji f leży powyżej wykresu funkcji $g(x) = x + 2$?

Zadanie 3. (5 pkt) CKE
Wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = -2x^2$ przesunięto wzdłuż osi OX o 3 jednostki w prawo i wzdłuż osi OY o 8 jednostek w górę, powstał wykres funkcji g.

a) Rozwiąż nierówność $f(x) + 5 < 3x$.

b) Podaj zbiór wartości funkcji g.

c) Funkcja g określona jest wzorem $g(x) = -2x^2 + bx + c$. Oblicz b i c.

Zadanie 4. (4 pkt)
Zdjęcie o wymiarach 20 cm × 30 cm oprawiono w prostokątną ramkę o jednakowej szerokości. Jaka jest szerokość ramki, jeśli pole zdjęcia wraz z ramką wynosi 651 cm^2?

Zadanie 5. (5 pkt)
Oblicz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej $f(x) = (2x + 1)(x - 2)$ w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$.

Zadanie 6. (6 pkt)
Suma obwodów prostokąta o stosunku boków 1:2 i prostokąta o stosunku boków 1:3 jest równa 40. Przy jakich długościach boków takich prostokątów suma ich pól jest najmniejsza?

Zadanie 7. (5 pkt) CKE
W roku 2015 na uroczystości urodzinowej ktoś spytał jubilata, ile ma lat. Jubilat odpowiedział: „jeżeli swój wiek sprzed 27 lat pomnożę przez swój wiek za 15 lat, to otrzymam rok swojego urodzenia". Oblicz, ile lat ma ten jubilat.

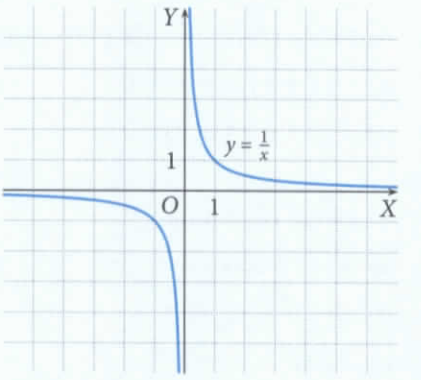
Zadanie 8. (5 pkt) CKE
Doświadczalnie ustalono, że czas $T(n)$, liczony w sekundach, potrzebny na alfabetyczne ułożenie n kartek z nazwiskami wyraża się, z dobrym przybliżeniem, wzorem $T(n) = an^2 + bn$. Ułożenie 10 kartek trwa średnio 20 sekund, a 30 kartek średnio 90 sekund. Wyznacz wzór funkcji $T(n)$ i oblicz, ile kartek można ułożyć średnio w ciągu 50 sekund.

6. Funkcje wymierne

Funkcję postaci $y = \frac{a}{x}$, gdzie $a > 0$ i $x \in \mathbf{R}_+$, nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**, wielkości x i y – **odwrotnie proporcjonalnymi**, a liczbę a – **współczynnikiem proporcjonalności**.

Wykresem funkcji $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ oraz $a \neq 0$, jest **hiperbola**.

Prosta $y = 0$ jest jej asymptotą poziomą, a prosta $x = 0$ – asymptotą pionową.



Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 176

1. Wyznacz różnicę $S - T$, a następnie oblicz jej wartość dla $x = -\sqrt{2}$.

a) $S = x^6 - 1\frac{1}{4}x^4 + x^2 - 6$, $T = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 6$

b) $S = \sqrt{1\frac{9}{16}}x^4 + \sqrt{2}x^3 - \frac{1}{8}x^2$, $T = 0{,}25x^4 - 2\sqrt{2}x^3 + 0{,}375x^2$

2. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

a) $x\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 - \frac{x}{2}(4x - 1)$

b) $(3x^2 - 1)^2 - 9x^2(1 - x)^2$

c) $(x^2 - 1)(x^2 + x - 1) - (x^2 - 2)^2$

d) $(5 + 2x^3)^2 + 4x^2(x^2 + 1)(1 - x^2)$

3. Wyznacz i uporządkuj wyrażenie W, jeśli $S = x^3 + 3x + 1$, $T = x^2 - 1$.

a) $W = x \cdot S - T^2$

b) $W = x \cdot T - S^2$

4. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(x - 5)(x^2 + 5x + 25)$ dla $x = \sqrt[3]{5}$,

b) $(3 - 2x)(4x^2 + 6x + 9)$ dla $x = \sqrt[3]{2}$,

c) $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$ dla $x = -\sqrt[3]{3}$,

d) $(x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$ dla $x = -\sqrt[3]{4}$.

5. Wyrażenie W dla $x = -1$ przyjmuje wartość 5. Wyznacz a.

a) $W = 3 - 2x^2 + ax^3$

b) $W = x(x - a)^2 + 6$

6. Która spośród liczb: -3, -2, 2 spełnia równanie?

a) $x^3 + 3x^2 + 5x + 6 = 0$

b) $x^3 - 2x^2 - 17x - 6 = 0$

7. Uzasadnij, że istnieje liczba całkowita spełniająca układ równań.

a) $\begin{cases} 2x^3 - 128 = 0 \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 27 + x^3 = 0 \\ 2x^2 + 5x - 3 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^3 + 216 = 0 \\ x^2 = 12 - 4x \end{cases}$

8. Rozwiąż równanie. Ile pierwiastków tego równania należy do przedziału $(-\pi; \pi)$?

a) $x(x+3)(x-4) = 0$ c) $x(2x+1)(x-\frac{2}{3}) = 0$ e) $x(2x-7)(3x-7) = 0$

b) $x(x+6)(x+9) = 0$ d) $x(4x-3)(x-5) = 0$ f) $x(6x+1)(6x+5) = 0$

9. Rozwiąż równanie.

a) $x(x^2 - 25) = 0$ d) $x(x^2 - 6x + 9) = 0$ g) $x(x^2 - x - 6) = 0$

b) $x(4x^2 - 1) = 0$ e) $x(4x^2 + 4x + 1) = 0$ h) $x(x^2 + 4x + 3) = 0$

c) $x(9x^2 - 4) = 0$ f) $x(x^2 - x + \frac{1}{4}) = 0$ i) $x(2x^2 + 3x + 1) = 0$

10. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$ c) $3x^3 + 7x^2 + 2x = 0$ e) $9x^4 - 6x^3 + x^2 = 0$

b) $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$ d) $6x^3 - 5x^2 - 6x = 0$ f) $3x^4 + 7x^3 + 4x^2 = 0$

11. Podaj wzór proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$, jeżeli do jej wykresu należy punkt A.

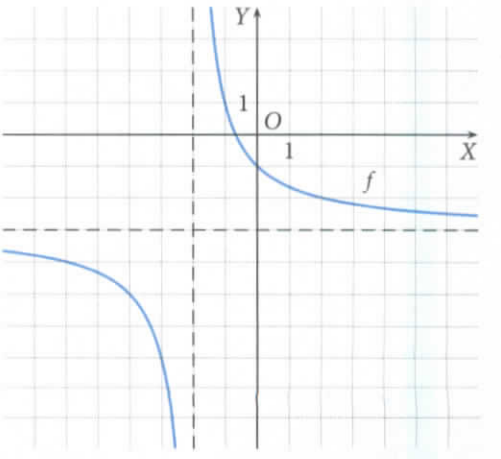
a) $A(2, 4)$ b) $A(-1, 3)$ c) $A\left(-\frac{1}{3}, 6\right)$ d) $A\left(\sqrt{6}, \sqrt{3}\right)$

12. Które z punktów $A(5, 1)$, $B\left(\frac{5}{2}, 2\right)$ i $C(-0{,}8, 12{,}5)$ należą do wykresu funkcji f?

a) $f(x) = \frac{5}{x}$ b) $f(x) = -\frac{10}{x}$ c) $f(x) = 4 - \frac{5}{x}$

13. Naszkicuj wykres danej funkcji f i podaj jej wartość najmniejszą oraz wartość największą w przedziale $\langle 1; 3 \rangle$.

a) $f(x) = \frac{3}{x}$ b) $f(x) = -\frac{6}{x}$



14. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x+2} - 3$.

a) Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od -2, a dla jakich – mniejsze od 1.

b) Wyznacz miejsce zerowe funkcji f.

15. Naszkicuj wykres funkcji f. Wyznacz jej dziedzinę oraz zbiór wartości i odczytaj z wykresu przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = \frac{3}{x} - 2$ b) $f(x) = 1 - \frac{3}{x}$ c) $f(x) = \frac{3}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{3}{2-x}$

16. Do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{15}{x}$ należy punkt A. Oblicz k.

a) $A(3, k)$ b) $A\left(-\frac{5}{2}, k-1\right)$ c) $A(k+1, 10)$

17. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 2. Oblicz k.

a) $f(x) = \frac{k}{x} + 1$ b) $f(x) = \frac{1}{x-k} - 3$ c) $f(x) = k - \frac{2}{5x}$

18. Wyznacz dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -1$.

a) $\frac{4x^2-1}{2x^3+x^2}$ b) $\frac{x^3+4x}{x^5-16x}$ c) $\frac{x^2-2x+1}{x^3-1}$ d) $\frac{x^2+2x-8}{x^2-4x+4}$

19. Wyznacz dziedzinę i wykonaj działania.

a) $\frac{1}{2x} - \frac{3}{8x}$ b) $\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x+4}$ c) $\frac{5}{x+3} - \frac{2}{x+1}$ d) $\frac{2x+1}{x+5} + \frac{3x}{x-2}$

20. Wyznacz dziedzinę i wykonaj działania.

a) $\frac{x^2-4}{2x^2} \cdot \frac{x}{x-2}$ b) $\frac{x^2-1}{x} : \frac{x+1}{2x^2}$ c) $\frac{25x^2-1}{x^2-9} : \frac{5x^2+x}{2x-6}$

21. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{5}{x+4} = 1$ d) $\frac{1-2x}{x} = 3x$ g) $\frac{2}{x-5} - \frac{4}{x-6} = 0$

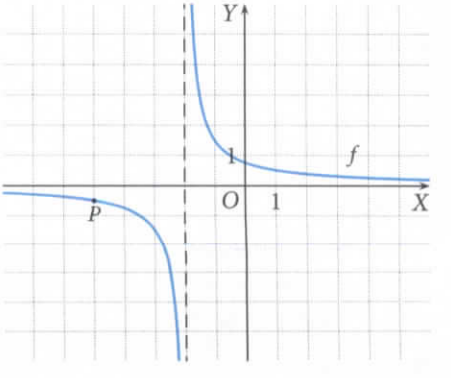
b) $\frac{2x-1}{6-7x} = \frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{2x} + \frac{7}{4x} = x$ h) $\frac{x+3}{3-x} = \frac{x}{x-1}$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{3x} = 8$ f) $8 - \frac{5x-10}{x} = x$ i) $2x + \frac{3-x}{x} = 4$

22. Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x+2}$ (rysunek obok) należy punkt $P(-5, -\frac{1}{2})$.

a) Wyznacz a.

b) Oblicz $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ i $f\left(\sqrt{3}+1\right)$.



23. Samochód przejechał 225 km. Gdyby jechał z prędkością o 10 km/h większą, to czas przejazdu skróciłby się o 15 minut. Oblicz prędkość, z jaką jechał samochód.

24. Dwa pociągi towarowe wyjechały z miast A i B oddalonych od siebie o 540 km. Pociąg jadący z miasta A do miasta B wyjechał o godzinę wcześniej niż pociąg jadący z miasta B do miasta A i jechał z prędkością o 9 km/h mniejszą. Pociągi minęły się w połowie drogi. Oblicz prędkości obu pociągów.

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 176

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Ile wspólnych pierwiastków mają równania $\frac{1}{2}x^3 - 8x = 0$ i $x^2 - 2x = 8$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 2. (1 pkt)
Ile pierwiastków równania $x^3 = \frac{1}{2}x$ należy do przedziału $\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle$?

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Zadanie 3. (1 pkt)
Jeśli do wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ należy punkt $\left(\frac{2}{3}, 9\right)$, to liczba punktów o obu współrzędnych całkowitych, które należą do wykresu tej funkcji, jest równa:

A. 4, **B.** 6, **C.** 8, **D.** 12.

Zadanie 4. (1 pkt)
Punkt (x, y) należy do wykresu pewnej proporcjonalności odwrotnej. Oznacza to, że do tego wykresu należy również punkt:

A. $(2x, 2y)$, **B.** $\left(2x, \frac{1}{2}y\right)$, **C.** (x^2, y^2), **D.** $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$.

Zadanie 5. (1 pkt)
Liczba 2 jest pierwiastkiem równania:

A. $\frac{x-5}{x-4} = \frac{x+1}{x}$, **B.** $\frac{x+1}{x} = \frac{x+3}{x+1}$, **C.** $\frac{x}{x-1} = \frac{x}{2x-1}$, **D.** $\frac{x+2}{2x+1} = \frac{2}{x+1}$.

Zadanie 6. (1 pkt)
Wszystkie rozwiązania równania $\frac{2-x}{-5} = \frac{3}{x}$ należą do przedziału:

A. $\langle -6; 3\rangle$, **B.** $\langle -3; 5\rangle$, **C.** $\langle -1; 8\rangle$, **D.** $\langle 0; 10\rangle$.

Zadanie 7. (1 pkt)
Dany jest prostokąt $ABCD$ o sąsiednich bokach długości x cm i $4x$ cm. Gdyby każdy bok prostokąta wydłużyć o 2 cm, to stosunek jego sąsiednich boków byłby równy 3. Pole prostokąta $ABCD$ jest równe:

A. 16 cm^2, **B.** 40 cm^2, **C.** 64 cm^2, **D.** 108 cm^2.

Zadanie 8. (1 pkt)
Mianownik ułamka jest o 3 większy od jego licznika. Gdyby licznik i mianownik tego ułamka zmniejszyć o 2, to ułamek ten byłby równy 0,5. Suma licznika i mianownika tego ułamka to:

A. 13, **B.** 11, **C.** 9, **D.** 7.

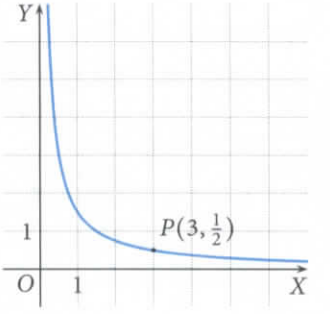
Zestaw C. Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

odpowiedzi – s. 176
modele – s. 177

Zadanie 1. (2 pkt)
Rozwiąż równanie $2x^3 - 18x = 0$.

Zadanie 2. (2 pkt)
Dla jakiej wartości a liczba -3 jest pierwiastkiem równania $(2a+3)x^3 - 7x + 5 - a = 0$?

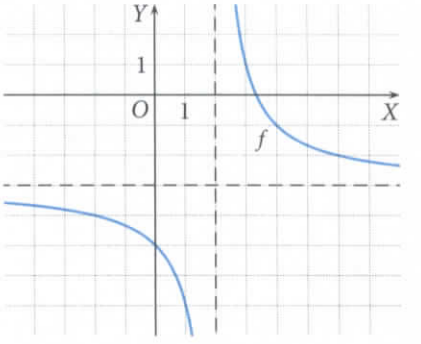
Zadanie 3. (2 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono wykres proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{a}{x}$. Wyznacz liczbę odwrotnie proporcjonalną do liczby $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Zadanie 4. (2 pkt)
Wyznacz a, jeśli punkt $P\left(\frac{3}{2}, -6\right)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x-3}$. Czy punkt $Q\left(21, \frac{1}{2}\right)$ należy do wykresu tej funkcji?

Zadanie 5. (2 pkt)
Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2}{x}$. Wykaż, że $f(1-\sqrt{2}) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) = 0$.

Zadanie 6. (2 pkt)
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x-2} - 3$. Oblicz miejsce zerowe funkcji f i podaj argumenty, dla których przyjmuje ona wartości nieujemne.



Zadanie 7. (2 pkt)
Wyznacz q, jeśli punkt $P\left(\frac{2}{3}, -4\right)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{6}{x} + q$.

Zadanie 8. (2 pkt) CKE
Rozwiąż równanie $\frac{x(x+1)}{x-1} = 5x - 4$ dla $x \neq 1$.

Zadanie 9. (2 pkt)
Równania $\frac{1}{4x} = 5$ i $\frac{1}{x} = 2m$ są spełnione przez tę samą liczbę x. Oblicz m.

Zadanie 10. (2 pkt) CKE
Rozwiąż równanie $\frac{2-3x}{1-2x} = -\frac{1}{2}$.

Zadanie 11. (2 pkt)
Samochód przejechał 8 km drogą polną, z prędkością v, a następnie 32 km szosą, z prędkością $v + 60$ km/h. Oblicz v, jeżeli każdy odcinek drogi przebył w takim samym czasie.

Zestaw D. Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

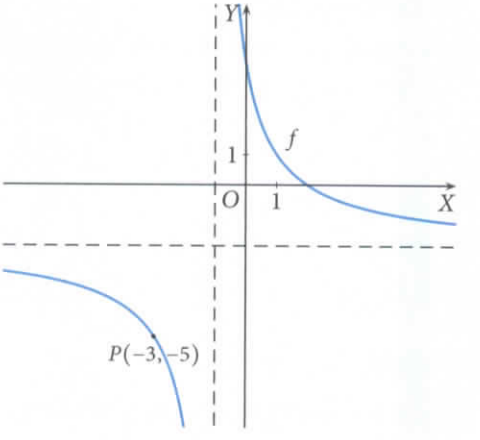
odpowiedzi – s. 176
modele – s. 178

Zadanie 1. (3 pkt)
Oblicz m, jeśli liczba $\sqrt{3}$ jest pierwiastkiem równania $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx - 3 = 0$.

Zadanie 2. (4 pkt)
W wyrażeniu $n^4 - 2n^3 + n^2$ wyłącz n^2 przed nawias, a następnie uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej n wartość tego wyrażenia jest liczbą podzielną przez 4.

Zadanie 3. (5 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = \frac{6}{x+1} + q$$



a) Wyznacz q.
b) Wyznacz miejsce zerowe funkcji f.
c) Oblicz $f\left(\sqrt{2}-1\right)$.
Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

Zadanie 4. (5 pkt)
Miejscem zerowym funkcji $f(x) = \frac{3}{x} - k$ jest liczba $\frac{3}{2}$.
a) Podaj wzór funkcji f i narysuj jej wykres.
b) Odczytaj z wykresu wartość najmniejszą funkcji w przedziale $\langle 1; 3 \rangle$.

Zadanie 5. (5 pkt) CKE
Za wynajęcie autobusu na wycieczkę uczniowie klasy IA mieli zapłacić 1800 zł. Ponieważ 4 uczniów zrezygnowało z wycieczki, każdy z pozostałych uczniów zapłacił o 15 zł więcej. Oblicz, ilu uczniów jest w klasie IA.

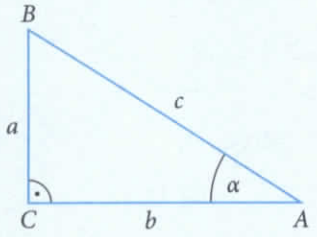
Zadanie 6. (4 pkt)
Odległość między miastami A i B wynosi 240 km. Z miasta A wyruszyły jednocześnie dwa samochody. Pierwszy samochód jechał z prędkością o 20 km/h większą niż drugi. W wyniku awarii pierwszy samochód miał godzinny postój. Do miasta B samochody dojechały równocześnie. Oblicz średnią prędkość drugiego samochodu.

Zadanie 7. (5 pkt) CKE
W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię 240 m^2. Basen w drugim hotelu ma powierzchnię 350 m^2 i jest o 5 m dłuższy oraz 2 m szerszy niż basen w pierwszym hotelu. Oblicz wymiary obu basenów. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

Zadanie 8. (5 pkt) CKE
Uczeń przeczytał książkę liczącą 480 stron, przy czym każdego dnia czytał jednakową liczbę stron. Gdyby czytał każdego dnia o 8 stron więcej, to przeczytałby tę książkę o 3 dni wcześniej. Oblicz, ile dni uczeń czytał tę książkę.

7. Funkcje trygonometryczne

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

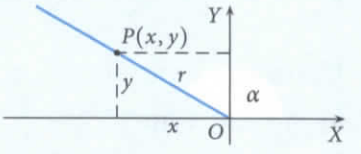
Rozwiązaniem trójkąta nazywamy wyznaczenie długości wszystkich jego boków i miar wszystkich jego kątów.

Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem leżącym na ramieniu końcowym kąta $\alpha \in \langle 0°; 180° \rangle$, różnym od początku układu współrzędnych. Wtedy:

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ $(x \neq 0$, czyli $\alpha \neq 90°)$.



Dla dowolnego $\alpha \in \langle 0°; 180° \rangle$ prawdziwe są zależności:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$ dla $\alpha \neq 90°$

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 180

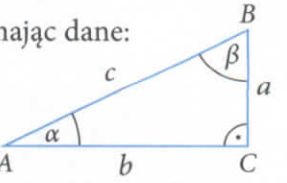
1. Oblicz długości boków trójkąta prostokątnego ABC (rysunek obok), mając dane:

a) $c = 15$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$,

b) $a = 14$, $\sin\beta = \frac{24}{25}$,

c) $b = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\beta = 2 + \sqrt{3}$,

d) $c = \sqrt{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5$.



2. Rozwiąż trójkąt prostokątny ABC, mając dane:

a) $\alpha = 45°$, $c = 8$,

b) $\beta = 30°$, $a = 2\sqrt{3}$,

c) $a = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$, $c = 2\sqrt{6} - 4$.

3. W trójkącie prostokątnym o kątach ostrych α i β dłuższa przyprostokątna leży naprzeciwko kąta α. Oblicz $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\beta$, jeżeli jedna z przyprostokątnych:

a) jest cztery razy dłuższa od drugiej,

b) jest o 60% krótsza od drugiej.

4. Wyznacz miary kątów trójkąta prostokątnego, którego kąt ostry α spełnia warunek:

a) $\operatorname{tg}\alpha = 2\sin\alpha$,

b) $\sin\alpha - \cos\alpha = 0$.

5. Oblicz, nie korzystając z tablic ani kalkulatora.

a) $2 - \sin^2 10^\circ - \cos^2 10^\circ$

b) $(\sin 28^\circ + \cos 28^\circ)^2 + (\sin 28^\circ - \cos 28^\circ)^2$

c) $\cos^2 81^\circ(1 + \operatorname{tg}^2 81^\circ)$

d) $\dfrac{\sin^3 1^\circ + \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \cos^3 1^\circ}{2\sin 1^\circ}$

6. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α.

a) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$

b) $\cos\alpha = \frac{8}{17}$

c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{60}{11}$

d) $\operatorname{tg}\alpha = 2$

7. Oblicz tangens kąta ostrego α, jeżeli:

a) $\sin^2\alpha = 0{,}36$,

b) $9\cos^2\alpha - 25\sin^2\alpha = 0$,

c) $9\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1$.

8. Kąt α jest ostry, a $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $1 - 3\cos^2\alpha$

b) $\cos^2\alpha - \cos^4\alpha$

c) $\dfrac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}{\cos\alpha}$

9. Uzasadnij równość.

a) $\sin^2 25^\circ + \sin^2 65^\circ = 1$

b) $\cos 17^\circ - \sin 73^\circ = 0$

c) $\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = 1$

d) $\operatorname{tg} 66^\circ \cdot \cos 66^\circ - \cos 24^\circ = 0$

10. Uzasadnij równość dla dowolnego kąta ostrego α.

a) $\dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$

b) $\cos^2\alpha \cdot (\operatorname{tg}^2\alpha + 1) = 1$

c) $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} = 1 + \operatorname{tg}\alpha$

d) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1 - \sin\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{1 + \sin\alpha} = 2$

11. Wyznacz miarę kąta ostrego α, jeżeli:

a) $\sin\alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = 1$,

b) $\sin\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$,

c) $\operatorname{tg}\alpha = 3\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$,

d) $2 - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ$.

12. Wyznacz miarę kąta ostrego α, jeżeli:

a) $2 - \operatorname{tg}\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$,

b) $\dfrac{\sqrt{2} + \cos\alpha}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$,

c) $2(\sin^3\alpha + \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha) = 1$,

d) $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} = 2$.

13. Kąt α jest kątem ostrym, a $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + 4\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

b) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

14. Dla kątów ostrych α i β pewnego trójkąta prostokątnego zachodzi równość:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = 0{,}48$$

Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2$, b) $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, c) $\cos\alpha + \cos\beta$.

15. Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa ma długość 4, a ramię długości 6 tworzy z dłuższą podstawą kąt $30°$.

16. Oblicz przybliżoną miarę kąta między przekątnymi prostokąta, w którym długość jednego z boków stanowi 75% długości drugiego boku.

17. Oblicz pole i obwód trójkąta równoramiennego o ramieniu długości 10 i kącie przy podstawie $43°$. Odpowiedź podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

18. Wierzchołek latarni morskiej, która stoi na wysokiej skarpie, znajduje się na wysokości 56 m n.p.m. Z kutra widać wierzchołek latarni pod kątem $12°$, a jej podstawę pod kątem $8°$. Oblicz wysokość skarpy. Odpowiedź podaj z dokładnością do 1 m.

19. Punkt P leży na ramieniu końcowym kąta α. Przedstaw ten kąt na rysunku i oblicz wartości jego funkcji trygonometrycznych.

a) $P(-4,4)$ b) $P(-2,4)$ c) $P(-6,8)$ d) $P(-6,0)$

20. Punkt P leży na ramieniu końcowym kąta α, a punkt Q – na ramieniu końcowym kąta β. Oblicz $\cos\alpha - \cos\beta$ oraz $\sin\alpha - \sin\beta$.

a) $P(-4,3)$, $Q(3,4)$ b) $P(-5,12)$, $Q(-12,5)$

21. Oblicz.

a) $\cos 90° - 3\sin 90°$ b) $2\sin 0° - \cos^2 180°$ c) $\cos^2 0° - \mathrm{tg}^2 180°$

22. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha \in \langle 90°; 180°\rangle$.

a) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ b) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ c) $\sin\alpha = 0{,}6$

23. Korzystając z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych, oblicz przybliżoną wartość wyrażenia. Odpowiedź podaj z dokładnością do czwartego miejsca po przecinku.

a) $\sin 125° + \sin 105°$ b) $\cos 163° + \cos 153°$ c) $\mathrm{tg}\,145° - \mathrm{tg}\,154°$

24. Oblicz.

a) $\sin^2 120° - \cos^2 135°$ c) $4\cos 120° \cdot \cos 135°$ e) $6\,\mathrm{tg}\,135° - 8\sin 120°$

b) $\dfrac{\sin 150° + \cos 120°}{6\,\mathrm{tg}\,120°}$ d) $\dfrac{\mathrm{tg}\,120° - \mathrm{tg}\,150°}{2\cos 150°}$ f) $\dfrac{\sin 135° + \sin 150°}{\cos 120° + \cos 135°}$

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 180

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

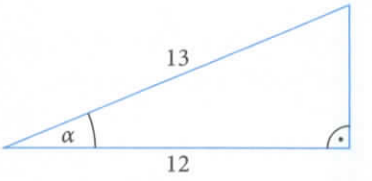
Zadanie 1. (1 pkt) CKE

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Wówczas:

A. $\cos\alpha < \frac{3}{4}$, **B.** $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$, **D.** $\cos\alpha > \frac{\sqrt{13}}{4}$.

Zadanie 2. (1 pkt)

Dany jest trójkąt prostokątny (rysunek obok). Wartość wyrażenia $\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ wynosi:



A. 1, **C.** $\frac{\sqrt{7}}{13}$,

B. $\frac{7}{13}$, **D.** $\frac{\sqrt{119}}{13}$.

Zadanie 3. (1 pkt) CKE

Jeżeli kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, to $\frac{2-\cos\alpha}{2+\cos\alpha}$ równa się:

A. -1, **B.** $-\frac{1}{3}$, **C.** $\frac{3}{7}$, **D.** $\frac{84}{25}$.

Zadanie 4. (1 pkt)

Dany jest kąt ostry α taki, że $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$. Wówczas:

A. $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, **B.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, **C.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, **D.** $\sin\alpha = \frac{1}{5}$.

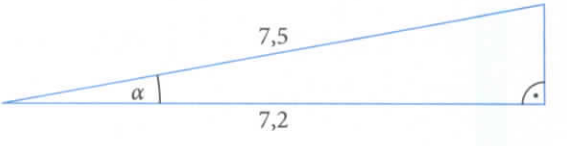
Zadanie 5. (1 pkt)

Dla dowolnego kąta ostrego α wyrażenie $\cos\alpha \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$ jest równe:

A. $\sin 45^\circ$, **B.** $\sqrt{2}\sin 45^\circ$, **C.** $\cos 60^\circ$, **D.** $\frac{1}{2}\cos 60^\circ$.

Zadanie 6. (1 pkt)

Dla kąta α przedstawionego na rysunku obok wartość wyrażenia $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$ jest równa:



A. 0,36, **B.** 0,33, **C.** 0,28, **D.** 0,21.

Zadanie 7. (1 pkt)

Które z podanych niżej wyrażeń ma wartość równą 0?

A. $\cos 137^\circ - \cos 43^\circ$ **C.** $\cos 137^\circ + \sin 43^\circ$

B. $\sin 137^\circ - \cos 43^\circ$ **D.** $\cos 137^\circ + \cos 43^\circ$

Zadanie 8. (1 pkt)

Liczba $\frac{\cos 120^\circ - \operatorname{tg} 135^\circ}{\sin 120^\circ}$ należy do przedziału:

A. $(-2;-1)$, **B.** $(-1;0)$, **C.** $(0;1)$, **D.** $(1;2)$.

Zestaw C. Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

odpowiedzi – s. 180
modele – s. 181

Zadanie 1. (2 pkt)
Oblicz sinus kąta ostrego α, jeżeli $\operatorname{tg}^2\alpha - 8 = 0$.

Zadanie 2. (2 pkt)
Oblicz $3 - 2\sin^2\alpha$, jeżeli α jest kątem ostrym, a $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

Zadanie 3. (2 pkt) CKE
Kąt α jest ostry, a $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Zadanie 4. (2 pkt) CKE
Kąt α jest ostry, a $\cos\alpha = \frac{8}{17}$. Oblicz $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$.

Zadanie 5. (2 pkt)
Oblicz $\frac{\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$, jeżeli α jest kątem ostrym, a $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

Zadanie 6. (2 pkt) CKE
W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 2 i 4, a jeden z kątów ostrych ma miarę α. Oblicz $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Zadanie 7. (2 pkt) CKE
Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3 + 2\operatorname{tg}^2\alpha$.

Zadanie 8. (2 pkt)
W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest o 60% dłuższa od drugiej. Oblicz tangens większego z kątów ostrych tego trójkąta.

Zadanie 9. (2 pkt)
Uzasadnij tożsamość $\frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} = 1 - \sin^2\alpha$ dla $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 90°$, $\alpha \neq 180°$.

Zadanie 10. (2 pkt)
Wyznacz miary kątów ostrych w trójkącie prostokątnym, jeżeli tangens jednego z nich jest dwa razy większy od sinusa tego kąta.

Zadanie 11. (2 pkt)
Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna ma długość 10, a tangens jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{1}{2}$.

Zadanie 12. (2 pkt)
Ramię końcowe kąta rozwartego α jest zawarte w prostej $y = -3x$. Oblicz $\cos\alpha$.

Zadanie 13. (2 pkt)
Uzasadnij, że dla dowolnego $\alpha \in \langle 0°; 90°) \cup (90°; 180°\rangle$ prawdziwa jest równość:

$$\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = \sin^2\alpha$$

Zestaw D. Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

odpowiedzi – s. 180
modele – s. 183

Zadanie 1. (4 pkt)
Dany jest trójkąt prostokątny o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(10,0)$, $C(8,4)$. Oblicz iloczyn sinusów kątów ostrych tego trójkąta.

Zadanie 2. (3 pkt)
Dany jest kąt $\alpha \in (0°;180°)$. Uprość wyrażenie $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ tak, aby występowała w nim tylko funkcja sinus. Oblicz wartość wyrażenia, jeżeli $\sin\alpha = \sqrt{3} - 1$.

Zadanie 3. (3 pkt)
Wiadomo, że dla pewnego kąta $\alpha \in \langle 0°;90°) \cup (90°;180°\rangle$ zachodzi równość: $\operatorname{tg}\alpha = \cos\alpha$. Uzasadnij, że $\sin\alpha \cdot (1+\sin\alpha) = 1$.

Zadanie 4. (4 pkt) CKE
Uzasadnij, że dla każdego $\alpha \in \langle 0°;90°) \cup (90°;180°\rangle$ prawdą jest, że:

$$(1+\sin\alpha)\cdot\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right) = \cos\alpha$$

Zadanie 5. (4 pkt)
Oblicz $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$, jeżeli $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \frac{2}{9}$.

Zadanie 6. (5 pkt) CKE
Miara jednego z kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa α.

a) Uzasadnij, że spełniona jest nierówność $\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha < 0$.

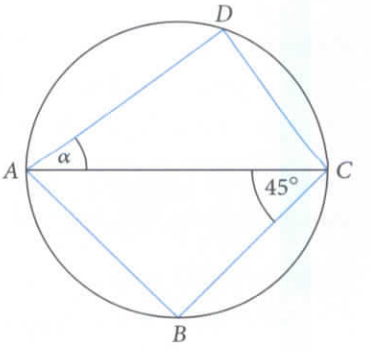
b) Dla $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ oblicz wartość wyrażenia $\cos^3\alpha + \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

Zadanie 7. (4 pkt)
Korzystając ze wzoru $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$, wyznacz miarę kąta ostrego α, jeżeli:

$$\sin^2 75° + 4\sin^2\alpha + \sin^2 15° = 4$$

Zadanie 8. (5 pkt)
W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym pole powierzchni całkowitej jest cztery razy większe od pola podstawy. Oblicz sinus kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do jego podstawy.

Zadanie 9. (5 pkt)
Czworokąt $ABCD$ wpisano w okrąg o promieniu 2 (rysunek obok). Przekątna AC jest średnicą tego okręgu. Oblicz pole czworokąta, wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



8. Funkcje wykładnicze i logarytmy

Własności potęg

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

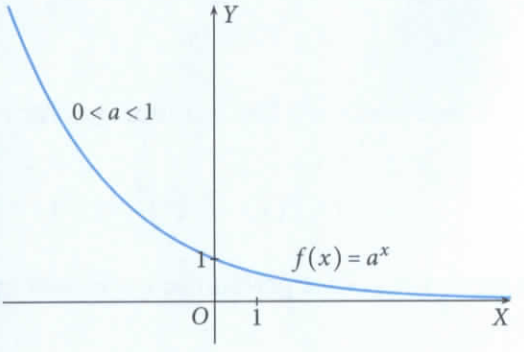
Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}_+$ i dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$ prawdziwe są wzory:

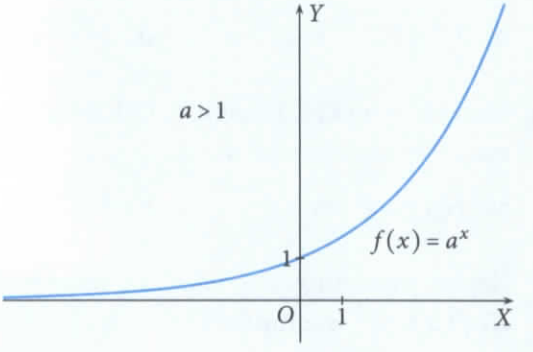
$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y} \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

Funkcja wykładnicza

Funkcję postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, określoną dla $x \in \mathbf{R}$, nazywamy **funkcją wykładniczą**.





Logarytm

Niech a i b będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. **Logarytmem** liczby b przy podstawie a nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę logarytmowaną b.

$$\log_a b = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^x = b$$

Jeżeli a, x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1 \text{ oraz } a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Ponadto dla $\alpha \in \mathbf{R}$: $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$, w szczególności $\log_a a^\alpha = \alpha$.

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 185

1. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 2.

a) $\sqrt{2}\cdot 2^{0,25}$ b) $4\cdot(0,5)^{\frac{3}{5}}$ c) $64^{\frac{2}{9}}:0,25^{\frac{5}{6}}$ d) $\frac{2}{\sqrt[3]{32}}$ e) $\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$

2. Czy x jest liczbą naturalną?

a) $x=25^{\frac{3}{14}}\cdot 25^{\frac{2}{7}}$ c) $x=9^{1,5}\cdot 12^{-3}$ e) $x=\sqrt{3}\cdot 8^{\frac{1}{6}}\cdot 12^{\frac{3}{4}}$

b) $x=9^{0,75}\cdot 3^{-0,5}$ d) $x=18^{1,5}:2^{0,5}$ f) $x=\left(0,4\cdot 5^{2,5}\right):\sqrt{5}$

3. Oblicz.

a) $\left(17^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ b) $7^{2-\sqrt{3}}\cdot 49^{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$ c) $4^{2+\sqrt{2}}:\sqrt{2}^{\sqrt{32}}$

4. Wyznacz wartości x, dla których równość jest prawdziwa.

a) $2^x=512$ c) $4^{x+1}=256$ e) $6\cdot 6^x=216$

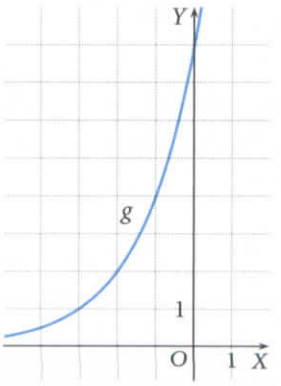
b) $3^{2x}=81$ d) $3\cdot 5^x=375$ f) $\frac{3}{7}\cdot 7^x=147$

5. Naszkicuj wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości mniejsze od m.

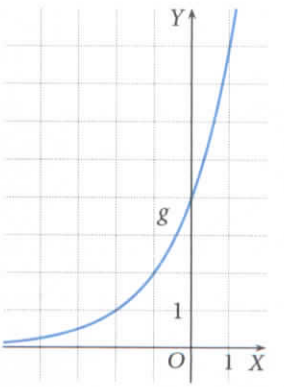
a) $f(x)=4^x$, $m=1$ b) $f(x)=2^{-x}$, $m=4$ c) $f(x)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$, $m=4$

6. Zapisz wzór funkcji g, wiedząc, że jej wykres otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x)=2^x$ wzdłuż osi OX.

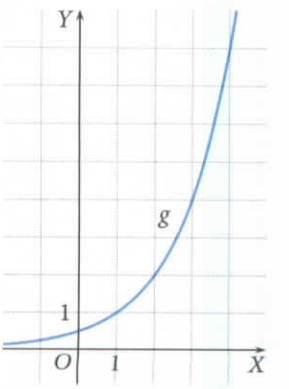
a)



b)



c)



7. Dana jest funkcja $f(x)=2^x$. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji g i h. Odczytaj współrzędne punktów wspólnych tych wykresów.

a) $g(x)=f(x)-1$, $h(x)=f(x-1)$ c) $g(x)=f(-x)$, $h(x)=f(x+2)$

b) $g(x)=f(x)+2$, $h(x)=f(x+1)$ d) $g(x)=f(x)-4$, $h(x)=-f(x)$

8. Naszkicuj wykres funkcji f. Odczytaj współrzędne punktów, w których wykres przecina osie układu współrzędnych. Określ monotoniczność tej funkcji.

a) $f(x) = 2^{x+3}$ c) $f(x) = 3 \cdot 3^{-x}$ e) $f(x) = 4^{2-x}$

b) $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x - 2$ d) $f(x) = 2^{-x} + 3$ f) $f(x) = -3^{-x}$

9. Dana jest funkcja $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x + a$. Oblicz a, jeżeli:

a) wykres funkcji f przechodzi przez punkt $\left(1, \frac{1}{2}\right)$,

b) miejscem zerowym funkcji f jest liczba -2.

10. Sprawdź, czy punkt A należy do wykresu funkcji f.

a) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $A\left(-3, 3\frac{3}{8}\right)$ b) $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$, $A\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ c) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

11. Punkty A i B należą do wykresu funkcji f. Oblicz a i b.

a) $f(x) = 4^x$, $A\left(\frac{3}{2}, a\right)$, $B\left(b, \frac{1}{16}\right)$ c) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, $A(0, a)$, $B\left(b, \frac{8}{27}\right)$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $A(-3, a)$, $B\left(b, \sqrt[3]{2}\right)$ d) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$, $A(-2, a)$, $B\left(b, \frac{1}{2}\right)$

12. Oblicz podstawę logarytmu.

a) $\log_a 216 = 3$ c) $\log_a 0{,}04 = -2$ e) $\log_a \sqrt{3} = \frac{1}{4}$

b) $\log_a 125 = -3$ d) $\log_a 1{,}1 = \frac{1}{2}$ f) $\log_a \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}$

13. Oblicz x.

a) $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$ b) $\log_{\sqrt{2}} x = 6$ c) $\log_{0{,}04} x = -\frac{1}{2}$

14. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\log_4 2 - \log_4 32 - 6\log_4 1$ b) $\log_3 12 + 2\log_3 6 - 4\log_3 2$

15. Czy podana liczba jest równa $\log_3 54$?

a) $1 + \log_3 18$ b) $2 + \log_3 6$ c) $3 + \log_3 2$

16. Czy podana równość jest prawdziwa?

a) $\log 10 = 2\log 5$ b) $\log 36 = 2\log 6$ c) $\log_2 16 = \log_2 25 - 2\log_2 3$

17. Oblicz x.

a) $\log_3 x = 2 + 2\log_3 2$ c) $\log_{0,5} x = 1 + \log_{0,5} 6 - 2\log_{0,5} 3$

b) $\log x = -1 + 2\log 5$ d) $\log_{\sqrt{2}} x = 4 - 2\log_{\sqrt{2}} 6 + 3\log_{\sqrt{2}} 3$

18. Oblicz przybliżoną wartość logarytmu, przyjmując, że $\log 2 \approx 0{,}301$.

a) $\log 20$ b) $\log 8$ c) $\log \frac{1}{5}$ d) $\log 0{,}25$

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 185

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

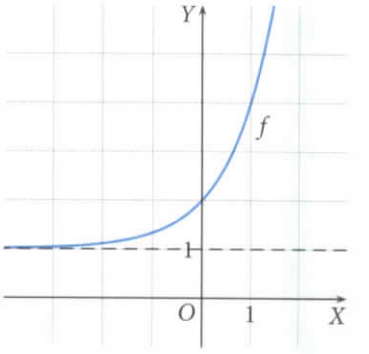
Zadanie 1. (1 pkt)

Liczba $\left(0{,}5^{\sqrt{2}} \cdot 2\right)^{\sqrt{2}+1}$ jest równa:

A. $\frac{1}{2}$, **B.** 1, **C.** 2, **D.** 8.

Zadanie 2. (1 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 3^x + a$.
Funkcja ta przyjmuje wartość 730 dla argumentu:



A. $x = 6$, **B.** $x = 9$, **C.** $x = 10$, **D.** $x = 243$.

Zadanie 3. (1 pkt) CKE

Funkcja wykładnicza określona wzorem $f(x) = 3^x$ przyjmuje wartość 6 dla argumentu:

A. $x = 2$, **B.** $x = \log_3 2$, **C.** $x = \log_3 6$, **D.** $x = \log_6 3$.

Zadanie 4. (1 pkt)

Punkt $P\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$ dla:

A. $a = 6$, **B.** $a = 3$, **C.** $a = \frac{3}{4}$, **D.** $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie 5. (1 pkt)

Wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{64} \cdot 4^x$ otrzymamy, przesuwając wykres funkcji $f(x) = 4^x$:

A. o 3 jednostki w dół,
B. o 3 jednostki w górę,
C. o 3 jednostki w prawo,
D. o 3 jednostki w lewo.

Zadanie 6. (1 pkt)

Równość $\log_{4x} 6 = \frac{1}{2}$ zachodzi dla:

A. $x = 6$, **B.** $x = 9$, **C.** $x = 16$, **D.** $x = 36$.

Zadanie 7. (1 pkt) CKE

Liczba $\log 24$ jest równa:

A. $2\log 2 + \log 20$, **B.** $\log 6 + 2\log 2$, **C.** $2\log 6 - \log 12$, **D.** $\log 30 - \log 6$.

Zadanie 8. (1 pkt)

Prawdziwa jest równość:

A. $\log_6 18 = 2 + \log_6 2$,
B. $\log_6 3 = 2 + \log_6 12$,
C. $\log_6 72 = 2 + \log_6 3$,
D. $\log_6 144 = 2 + \log_6 4$.

Zestaw C. Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

odpowiedzi – s. 185
modele – s. 186

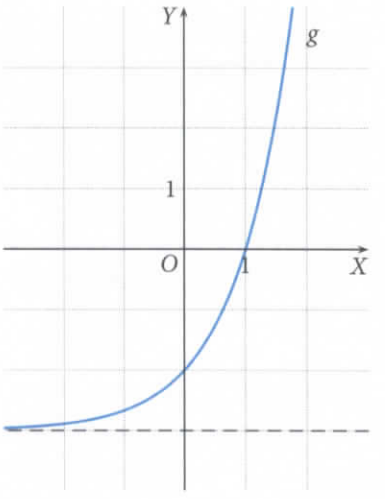
Zadanie 1. (2 pkt)
Oblicz $\frac{6^{\sqrt{3}} \cdot 3^{-\sqrt{3}}}{2^{\sqrt{3}}}$.

Zadanie 2. (2 pkt)
Znajdź liczbę odwrotną do liczby $\left(0{,}125 \cdot \sqrt[4]{128}\right)^{-2}$.

Zadanie 3. (2 pkt)
Zapisz liczby 4^{100} i 32^{50} w postaci potęg o tej samej podstawie. Która z tych liczb jest większa?

Zadanie 4. (2 pkt)
Określ monotoniczność funkcji $f(x) = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{-x}$.

Zadanie 5. (2 pkt)
Wykres funkcji g (rysunek obok) otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = 3^x$ wzdłuż osi OY.
Oblicz $g(-4)$.



Zadanie 6. (2 pkt)
Oblicz a, jeśli punkt $P\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = a^x$.

Zadanie 7. (2 pkt)
Oblicz średnią arytmetyczną liczb: $\log_4 12$; $-\log_4 3$; 2.

Zadanie 8. (2 pkt)
Wyznacz miejsce zerowe funkcji $f(x) = 3x + b$, gdzie $b = \log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2}$.

Zadanie 9. (2 pkt)
Oblicz $\frac{\log 3 + \log 4}{\log 24 - \log 2}$.

Zadanie 10. (2 pkt)
Oblicz $(abc)^{\frac{1}{3}}$, jeżeli $\log_2 a = 5$, $b = \log 0{,}01$, $c = \log_{0{,}05} 20$.

Zadanie 11. (2 pkt)
Która z liczb a, b, c jest największa, jeśli: $\log_a 0{,}1 = -1$, $\log_{2,5} b = 2$, $c = \log_{\sqrt{2}} 2$?

Zadanie 12. (2 pkt)
Uzasadnij, że liczba $(2\log_{0,1} 3 - \log_{0,1} 27) + (2\log_{0,1} 6 - \log_{0,1} 12)$ jest liczbą wymierną.

Zadanie 13. (2 pkt)
Niech $a = \log_2 3$. Uzasadnij równość $\log_2 18 = 1 + 2a$.

Zestaw D. Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

odpowiedzi – s. 185
modele – s. 187

Zadanie 1. (5 pkt)

Zapisz liczby: $a = \left(\frac{5}{3}\right)^{-2,1}$, $b = (0{,}6)^{3,2}$, $c = \left(\frac{9}{25}\right)^{\sqrt{2}}$, $d = (0{,}36)^{2,4}$ w postaci potęg o tej samej podstawie i uporządkuj je rosnąco.

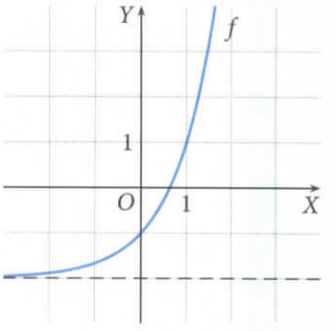
Zadanie 2. (5 pkt)

Liczba $9^{\sqrt{27}+1} : 27^{2\sqrt{3}+1}$ jest pierwiastkiem równania $3x^3 - x^2 + ax + 4 = 0$. Oblicz a. Znajdź pozostałe pierwiastki tego równania.

Zadanie 3. (4 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = 3^x + a$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$ oraz uzasadnij, że:

$$g\left(-\tfrac{1}{2}\right) - g\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\operatorname{tg} 30^\circ.$$



Zadanie 4. (4 pkt)

Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą m, dla której funkcja $f(x) = \left(2 - \frac{1}{3}m^2\right)^x$ jest malejąca.

Zadanie 5. (4 pkt) CKE

Rozwiąż równanie $4^{23}x - 32^9x = 16^4 \cdot \left(4^4\right)^4$. Zapisz rozwiązanie tego równania w postaci 2^k, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zadanie 6. (3 pkt) CKE

Wykaż, że liczba 3^{54} jest rozwiązaniem równania $243^{11} - 81^{14} + 7x = 9^{27}$.

Zadanie 7. (5 pkt)

Do wykresu funkcji $f(x) = 2^{ax} + b$ należy punkt $A\left(1, -\frac{3}{2}\right)$, a jej zbiorem wartości jest przedział $(-2; \infty)$. Oblicz a i b oraz naszkicuj wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

Zadanie 8. (4 pkt)

Oblicz $\frac{\sqrt{a \cdot b^2}}{c}$, jeżeli $\log_3 a = 5$, $\log_2 \frac{1}{8} = b$, $\log_c 9 = 4$.

Zadanie 9. (4 pkt)

Uzasadnij, że liczby $1 + \log_2 24$, $2 + 2\log_2 6$, $4 + 3\log_2 3$ tworzą ciąg arytmetyczny.

Zadanie 10. (4 pkt)

Liczba a spełnia równanie $\log_2 \frac{1}{9} = -2a$, a liczba b spełnia równanie $\log_2 \frac{4}{3} = 2 - b$. Uzasadnij, że liczby a i b są równe.

9. Ciągi

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich. Ciąg $a: \mathbf{N}_+ \to \mathbf{R}$ nazywamy liczbowym; oznaczamy go (a_n), a kolejne wartości ciągu nazywamy jego wyrazami i oznaczamy $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Ciągiem skończonym k-wyrazowym nazywamy funkcję, której dziedziną jest skończony zbiór liczb $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$.

Ciągi monotoniczne

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy:

- **rosnącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} > a_n$,
- **malejącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} < a_n$,
- **nierosnącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} \leqslant a_n$,
- **niemalejącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$: $a_{n+1} \geqslant a_n$,
- **stałym**, jeżeli wszystkie wyrazy ciągu są równe.

Ciąg arytmetyczny

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągiem arytmetycznym**, jeżeli istnieje taka liczba r, że dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ zachodzi równość:

$$a_{n+1} = a_n + r.$$

Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu.

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r:

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n.$$

Ciąg geometryczny

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągiem geometrycznym**, jeżeli istnieje taka liczba q, że dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ zachodzi równość:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu.

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q \neq 1$:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Dla $q = 1$ jest $S_n = n \cdot a_1$.

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 189

1. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n).

a) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ b) $a_n = n^n$ c) $a_n = \log_2 4^n$

2. Ile wyrazów dodatnich ma ciąg (a_n)? Podaj największy z nich.

a) $a_n = 13 - 3n$ b) $a_n = 9 - n^2$ c) $a_n = \frac{1}{2}(2+n)(6-n)$

3. Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zeru?

a) $a_n = n^2 + n - 6$ b) $a_n = \frac{12n-3}{n+2}$ c) $a_n = 2n^2 - 3n + 1$

4. Które wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od liczby m?

a) $a_n = \frac{n}{4} + 1$, $m = 10$ b) $a_n = n^2 - 2n$, $m = 8$ c) $a_n = n^2 - 4n$, $m = 6$

5. Oblicz trzynasty wyraz ciągu arytmetycznego.

a) $0, 4, 8, 12, \ldots$ b) $1, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2}, \ldots$ c) $4\frac{1}{3}, 3\frac{2}{3}, 3, \ldots$

6. Czy ciąg (a_n) jest arytmetyczny? Odpowiedź uzasadnij.

a) $a_n = 2 - 2n$ b) $a_n = 2 + n^2$ c) $a_n = \frac{2n + n^2}{n}$

7. Wykaż, że ciąg $a_n = \log_2(2 \cdot 3^n)$ jest ciągiem arytmetycznym. Oblicz jego pierwszy wyraz i różnicę.

8. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n), jeśli:

a) $a_2 = 8$, $a_6 = 0$, b) $a_4 = -5$, $a_7 = -4$, c) $a_2 = 1$, $a_4 = 3 - 2\sqrt{3}$.

9. Wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 3. Oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu, jeśli $a_{10} = 66$.

10. Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego (a_n), jeśli:

a) $a_1 + a_2 = 11$ i $a_3 + a_4 = 31$, b) $a_1 + a_3 = -2$ i $a_2 \cdot a_4 = -5$.

11. a) Liczby $x - 4, 5, x + 12$ tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz x.

b) Liczby $6, x, y, z, 9$ tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz x, y i z.

12. Długości trzech krawędzi prostopadłościanu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 3$. Pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest równe 132. Oblicz jego objętość.

13. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r > 0$. Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

14. Oblicz.

a) $3+6+9+\ldots+96$ b) $1+5+9+\ldots+101$

15. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 16, a różnica $r=-\frac{1}{2}$. Oblicz sumę $a_{10}+a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{20}$.

16. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 3, a trzeci jest o 8 większy. Oblicz sumę piętnastu początkowych wyrazów o numerach nieparzystych.

17. Lewa strona równania jest sumą kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego. Wyznacz x.

a) $2+6+10+\ldots+x=648$ b) $(2-3x)+(5-3x)+\ldots+(35-3x)=66$

18. Dane są trzy początkowe wyrazy ciągu geometrycznego (a_n). Dopisz trzy kolejne wyrazy tego ciągu i wyznacz jego wzór ogólny.

a) $3, -6, 12$ b) $27, 18, 12$ c) $\sqrt{3}-\sqrt{2}, 1, \sqrt{3}+\sqrt{2}$

19. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n).

a) $a_1=3, a_2=6$ b) $a_3=9, a_4=6$ c) $a_1=-3, a_4=24$

20. Dany jest ciąg geometryczny (a_n). Oblicz a_1, q oraz a_4.

a) $a_n=-2\cdot 3^n$ b) $a_n=2^{-n}$ c) $a_n=3\cdot(-2)^n$ d) $a_n=-2^n$

21. Czy ciąg (a_n) jest geometryczny? Odpowiedź uzasadnij.

a) $a_n=3n^2$ b) $a_n=3^{n+2}$ c) $a_n=3+2^n$ d) $a_n=3^n\cdot 2^n$

22. Wyznacz pierwszy wyraz i iloraz rosnącego ciągu geometrycznego (a_n), w którym:

a) $a_4=5, 25a_3=16a_5$, b) $a_2=\sqrt{2}-1, a_4=\sqrt{2}+1$.

23. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), jeżeli:

a) $a_1=4, 2a_5=3a_4, n=5$, b) $a_2=2, a_7=-64, n=8$.

24. Oblicz długość linii składającej się z dziesięciu połączonych półokręgów o średnicach odpowiednio: $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots$

25. Kredyt w wysokości 10000 zł wraz z odsetkami należy spłacić jednorazowo po 5 latach. Co roku bank dolicza odsetki w wysokości 8%. Jaką kwotę trzeba będzie spłacić?

26. Na lokacie złożono 25000 zł przy rocznej stopie procentowej 4%. Oblicz wielkość kapitału na lokacie po upływie roku, jeżeli odsetki są kapitalizowane:

a) co pół roku, b) co kwartał, c) co miesiąc.

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 189

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = (-1)^n \cdot (25 - 9n^2)$. Różnica $a_2 - a_1$ jest równa:

A. -37, **B.** -16, **C.** -5, **D.** 5.

Zadanie 2. (1 pkt) CKE
Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (n+3)(n-5)$ dla $n \geqslant 1$. Liczba ujemnych wyrazów tego ciągu jest równa:

A. 3, **B.** 4, **C.** 7, **D.** 9.

Zadanie 3. (1 pkt)
Różnica ciągu arytmetycznego danego wzorem $a_n = \frac{3-6n}{2}$ jest równa:

A. -6, **B.** -3, **C.** 3, **D.** 6.

Zadanie 4. (1 pkt)
Trzeci wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 24, a szósty wynosi 9. Suma pięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

A. 144, **B.** 120, **C.** 112, **D.** 99.

Zadanie 5. (1 pkt)
Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 6, a suma jego pięciu początkowych wyrazów wynosi 130. Czwarty wyraz tego ciągu jest równy:

A. 26, **B.** 30, **C.** 36, **D.** 46.

Zadanie 6. (1 pkt)
Iloczyn trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 729. Drugim wyrazem tego ciągu jest liczba:

A. 6, **B.** 9, **C.** 12, **D.** 18.

Zadanie 7. (1 pkt) CKE
W dziewięciowyrazowym ciągu geometrycznym o wyrazach dodatnich pierwszy wyraz jest równy 3, a ostatni wyraz jest równy 12. Piąty wyraz tego ciągu jest równy:

A. $3\sqrt[4]{2}$, **B.** 6, **C.** $7\frac{1}{2}$, **D.** $8\frac{1}{7}$.

Zadanie 8. (1 pkt) CKE
Liczby: -8, 4 i $x+1$ (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wówczas liczba x jest równa:

A. -3, **B.** $-1{,}5$, **C.** 1, **D.** 15.

Zadanie 9. (1 pkt)
Liczby 8, x, y, 27 tworzą ciąg geometryczny. Iloczyn liczb x i y jest równy:

A. 144, **B.** 196, **C.** 216, **D.** 248.

Zestaw C. Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

odpowiedzi – s. 189
modele – s. 190

Zadanie 1. (2 pkt) CKE
Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$, dla $n \geqslant 1$. Oblicz a_2 i a_5.

Zadanie 2. (2 pkt) CKE
Ile wyrazów ujemnych ma ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - 2n - 24$ dla $n \geqslant 1$?

Zadanie 3. (2 pkt) CKE
Liczby: $x - 2$, 3, $x + 6$ są w podanej kolejności pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

Zadanie 4. (2 pkt) CKE
Wykaż, że dla każdego m ciąg o kolejnych wyrazach: $\frac{m+1}{4}$, $\frac{m+3}{6}$, $\frac{m+9}{12}$ jest arytmetyczny.

Zadanie 5. (2 pkt) CKE
Liczby: 2, $x - 3$, 8 są w podanej kolejności pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

Zadanie 6. (2 pkt) CKE
Wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2. Ponadto $a_3 = 12$. Oblicz a_{15}.

Zadanie 7. (2 pkt)
Oblicz różnicę r ciągu arytmetycznego (a_n), w którym piąty wyraz jest o 2 mniejszy od drugiego wyrazu.

Zadanie 8. (2 pkt)
Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), w którym $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 105$. Oblicz a_7.

Zadanie 9. (2 pkt)
Oblicz sumę $5 + 9 + 13 + \ldots + 105$.

Zadanie 10. (2 pkt)
Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n), jeżeli $a_1 = 3$ oraz $a_3 = 5a_2$.

Zadanie 11. (2 pkt)
Liczby: $\frac{27}{2}$, a, b, 4 tworzą ciąg geometryczny. Oblicz a i b.

Zadanie 12. (2 pkt)
Wyznacz x, tak by liczby: 9, x, $x - 2$ tworzyły malejący ciąg geometryczny.

Zestaw D. Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

odpowiedzi – s. 189
modele – s. 191

Zadanie 1. (5 pkt)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), w którym $a_5 = 2$ oraz $a_8 = 14$. Zapisz wzór ogólny tego ciągu. Dla jakiej wartości n suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest najmniejsza?

Zadanie 2. (5 pkt) CKE

Nieskończony ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2 - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

a) Oblicz, ile wyrazów ciągu (a_n) jest mniejszych od 1,975.

b) Dla pewnej liczby x trzywyrazowy ciąg (a_2, a_7, x) jest arytmetyczny. Oblicz x.

Zadanie 3. (4 pkt)

Dany jest trójkąt prostokątny o polu 54. Długości jego boków tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz obwód tego trójkąta.

Zadanie 4. (5 pkt)

Suma dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 120, a suma pierwszych pięciu wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 65. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Znajdź n takie, że liczby a_7, a_{10}, a_n są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Zadanie 5. (6 pkt) CKE

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) dla $n \geqslant 1$, w którym $a_7 = 1$, $a_{11} = 9$.

a) Oblicz pierwszy wyraz a_1 i różnicę r ciągu (a_n).

b) Sprawdź, czy ciąg (a_7, a_8, a_{11}) jest geometryczny.

c) Wyznacz takie n, aby suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) była najmniejsza.

Zadanie 6. (4 pkt)

Dane są liczby 3, a, b, 25. Trzy pierwsze tworzą rosnący ciąg arytmetyczny, trzy ostatnie – ciąg geometryczny. Oblicz a i b.

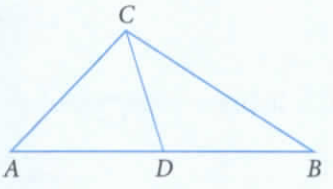
Zadanie 7. (5 pkt) CKE

Ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny i $a + b + c = 33$. Ciąg $(a, b + 3, c + 13)$ jest geometryczny. Oblicz a, b i c.

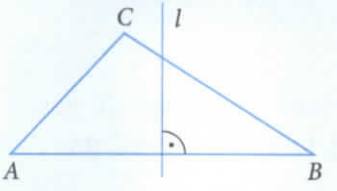
Zadanie 8. (3 pkt) CKE

Dziadek założył w banku trzyletnią lokatę o stałej rocznej stopie procentowej równej 5% (po uwzględnieniu podatków i prowizji). Odsetki są kapitalizowane po każdym roku trwania lokaty. Środki otrzymane w banku po zlikwidowaniu lokaty dziadek podzielił pomiędzy dziewięcioro wnucząt tak, aby każde z dzieci otrzymało 1029 zł. Oblicz początkową kwotę lokaty.

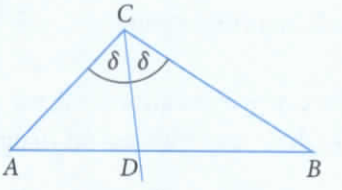
10. Planimetria



Środkowa trójkąta jest odcinkiem łączącym wierzchołek trójkąta ze środkiem jego przeciwległego boku (np. odcinek CD).

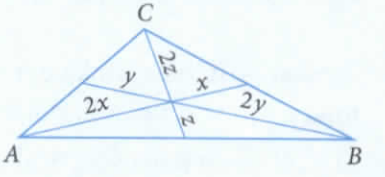


Symetralna boku trójkąta to prosta prostopadła do boku trójkąta i przechodząca przez środek tego boku (np. prosta l).

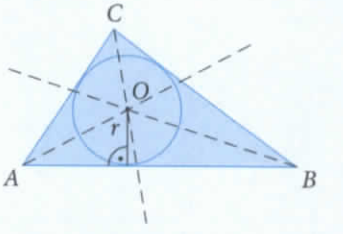


Dwusieczna kąta wewnętrznego trójkąta to półprosta o początku w wierzchołku tego kąta, dzieląca go na dwa kąty przystające (np. półprosta CD).

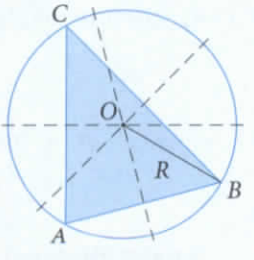
W każdym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie, zwanym **środkiem ciężkości** trójkąta. Dzieli on każdą ze środkowych w stosunku 2:1, licząc od wierzchołka.

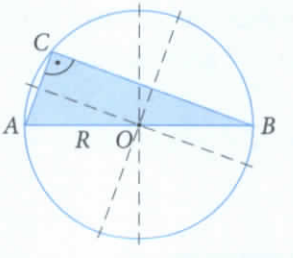


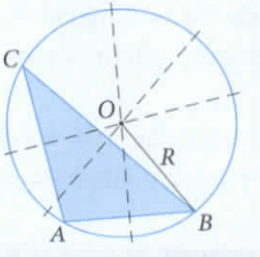
Dwusieczne kątów wewnętrznych każdego trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest **środkiem okręgu wpisanego** w ten trójkąt.



Symetralne boków każdego trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest **środkiem okręgu opisanego** na tym trójkącie.



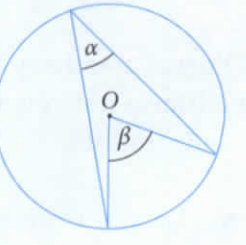




Kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg

Kąt środkowy w okręgu jest dwa razy większy od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

Kąt wpisany oparty na średnicy okręgu jest kątem prostym.



Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 193

1. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości $6-\sqrt{13}$ i $6+\sqrt{13}$. Oblicz długość przeciwprostokątnej.

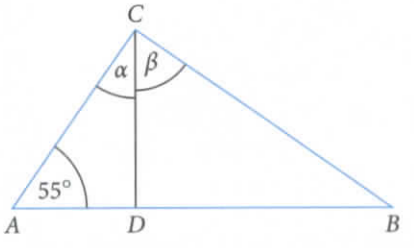
2. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość $\sqrt{5}$, a jedna z przyprostokątnych jest dwa razy dłuższa od drugiej. Oblicz pole trójkąta.

3. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 6 i 8. Oblicz wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną.

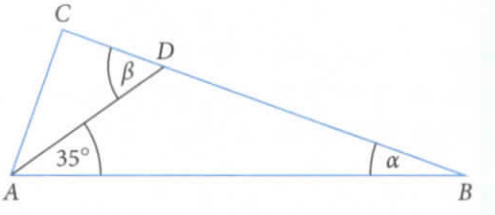
4. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest trzy razy dłuższa od drugiej, a wysokość opuszczona na przeciwprostokątną wynosi $3\sqrt{10}$. Oblicz długości przyprostokątnych.

5. Trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym o kącie prostym przy wierzchołku C. Wyznacz miary kątów α i β, jeśli odcinek:

   a) CD jest wysokością trójkąta,

   b) AD jest zawarty w dwusiecznej kąta CAB.

6. Przeciwprostokątna w trójkącie prostokątnym ma długość 12. Środkowe trójkąta przecinają się w punkcie P. Oblicz długość środkowej opuszczonej na przeciwprostokątną oraz długości odcinków, na które punkt P dzieli środkową.

7. W trójkącie ABC środkowa opuszczona z wierzchołka C jest dwa razy krótsza od boku AB. Wyznacz miarę kąta ACB.

8. Środkowe w trójkącie równoramiennym mają długości: 12, 12 i 3. Oblicz długości boków tego trójkąta.

9. Długość podstawy trójkąta równoramiennego wynosi $4\sqrt{5}$, a wysokość opuszczona na tę podstawę jest równa 4. Oblicz długość ramienia trójkąta oraz wysokość opuszczoną na ramię trójkąta.

10. W trójkącie równoramiennym ramię jest dwa razy dłuższe od wysokości opuszczonej na podstawę. Oblicz pole trójkąta, jeśli podstawa ma długość 12.

11. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 6 i 8. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie i promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

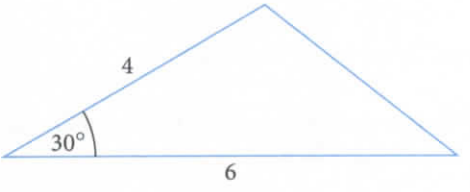
12. Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym wynosi 5, a jedna z przyprostokątnych tego trójkąta jest dwa razy dłuższa od drugiej. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

13. W trójkąt równoramienny o wysokości 4 cm i podstawie długości 6 cm wpisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu.

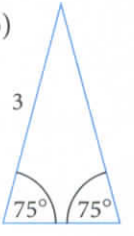
14. Na okręgu o promieniu 2 opisano trójkąt równoramienny o kącie przy podstawie 30°. Oblicz obwód tego trójkąta.

15. Korzystając z danych zamieszczonych na rysunku, oblicz pole trójkąta.

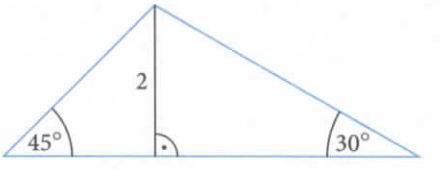
a)



b)



c)



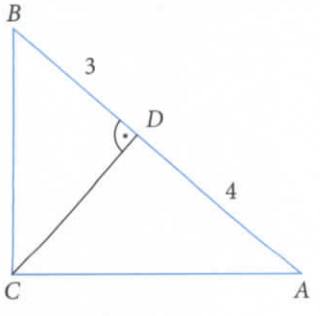
16. Sprawdź, czy trójkąty o podanych długościach boków są podobne. Jeżeli tak, to podaj skalę podobieństwa.

a) 6, 9, 12 oraz 3, 2, 4

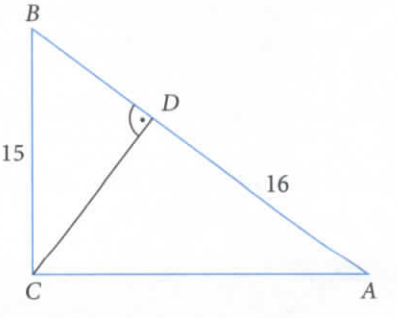
b) $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, 3 oraz $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, 1

17. Trójkąt ABC jest prostokątny (rysunek niżej). Wykaż, że trójkąty ABC, ACD i CBD są podobne. Oblicz obwód trójkąta ACD.

a)



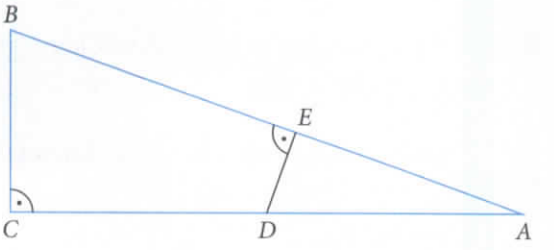
b)



18. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 6. Wysokość opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją w stosunku 1:2. Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

19. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości $\sqrt{5}$ i $2\sqrt{5}$. Oblicz długości odcinków, na jakie wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną.

20. Dany jest trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok). Punkt D jest środkiem odcinka AC. Wykaż, że trójkąty ABC i ADE są podobne. Oblicz długość odcinka DE, jeśli $|BC| = 5$ i $|CD| = 6$.

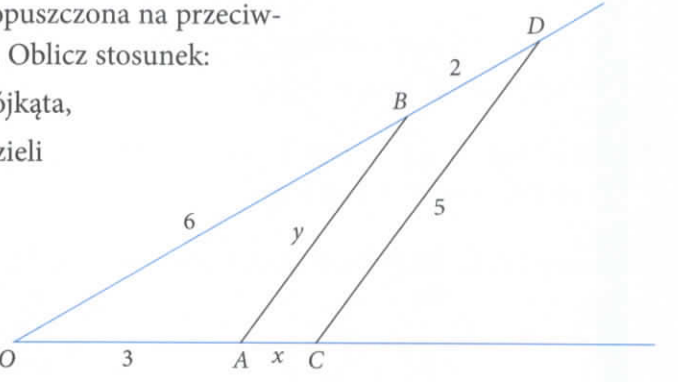


21. W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona na przeciwprostokątną dzieli ją w stosunku 9:16. Oblicz stosunek:

a) długości przyprostokątnych tego trójkąta,

b) pól trójkątów, na które wysokość dzieli ten trójkąt.

22. Odcinki AB i CD są równoległe (rysunek obok). Oblicz x i y.



23. Wykaż, że pole koła opisanego na kwadracie jest dwa razy większe od pola koła wpisanego w ten kwadrat.

24. Promień koła opisanego na kwadracie jest o 2 większy od promienia koła wpisanego w ten kwadrat. Oblicz sumę tych promieni.

25. Pole koła opisanego na prostokącie wynosi 40π. Jeden z boków prostokąta jest trzy razy dłuższy od drugiego. Oblicz obwód tego prostokąta.

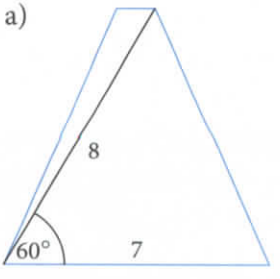
26. Pole rombu wynosi 6, a jedna z przekątnych tego rombu ma długość 4. Oblicz długość boku i wysokość tego rombu.

27. Pole rombu wynosi 36, a jedna z przekątnych tego rombu jest dwa razy dłuższa od drugiej. Oblicz długość boku tego rombu i pole koła wpisanego w ten romb.

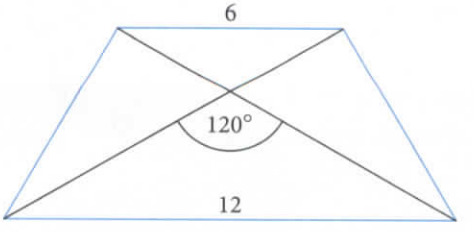
28. Oblicz cosinus kąta ostrego rombu o boku 3 i wysokości 2.

29. Trapez na rysunku jest równoramienny. Oblicz jego pole.

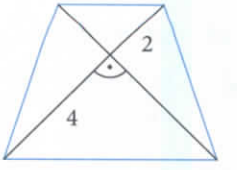
a)



b)

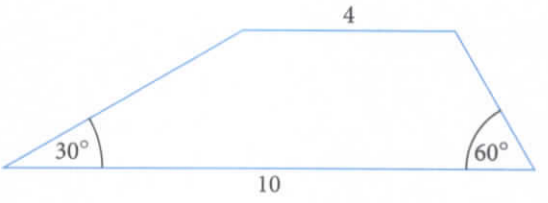


c)



30. W trapezie równoramiennym krótsza podstawa i wysokość mają długość 3, a długość przekątnej jest równa 5. Oblicz obwód i pole tego trapezu.

31. Oblicz wysokość trapezu przedstawionego na rysunku.

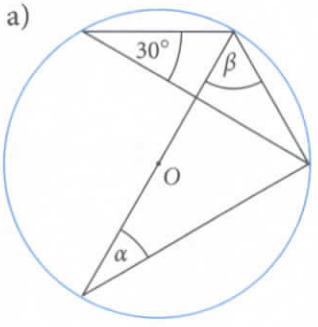


32. a) Oblicz pole równoległoboku o bokach 5 i 4 oraz kącie ostrym 45°.

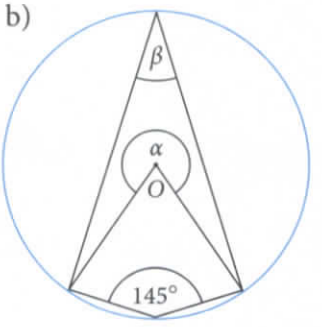
b) Przekątne równoległoboku mają długości 8 i 10, a kąt między nimi jest równy 30°. Oblicz pole tego równoległoboku.

33. Wyznacz miary kątów α i β.

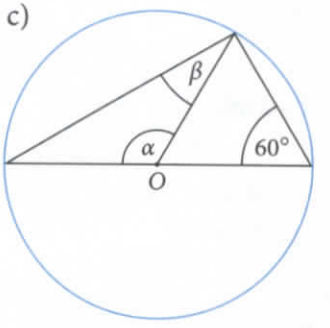
a)



b)

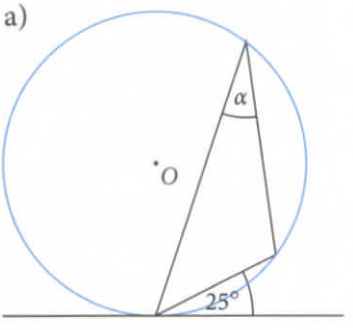


c)

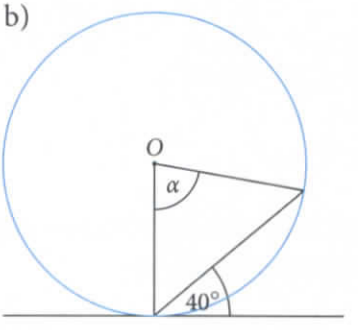


34. Wyznacz miarę kąta α.

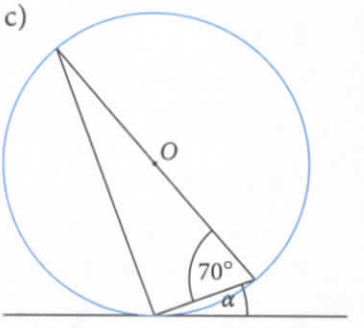
a)



b)



c)



35. Z punktu A leżącego na okręgu poprowadzono dwie cięciwy – AB i AC. Miara kąta zawartego między styczną poprowadzoną do okręgu w punkcie A a cięciwą AB zawierającą łuk AB wynosi 40°, a między styczną a cięciwą AC ma 70°. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

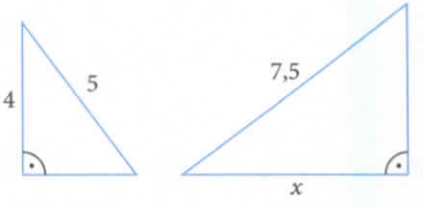
36. W okręgu o promieniu 6 poprowadzono cięciwę AB. Kąt między tą cięciwą a styczną do okręgu w punkcie A wynosi 45°. Oblicz długości łuków okręgu wyznaczonych przez cięciwę AB.

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 193

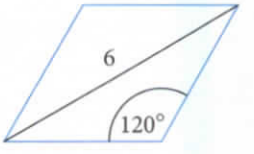
Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Trójkąty na rysunku obok są podobne, jeśli:



A. $x = 3{,}5$, **C.** $x = 4{,}5$,
B. $x = 4$, **D.** $x = 5$.

Zadanie 2. (1 pkt)
Pole rombu przedstawionego na rysunku obok jest równe:

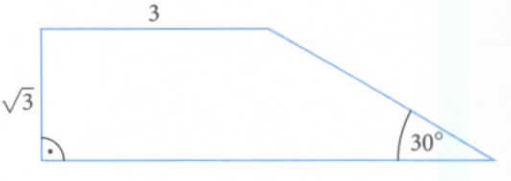


A. $6\sqrt{3}$, **C.** 12,
B. $3\sqrt{3}$, **D.** 9.

Zadanie 3. (1 pkt)
Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość $8\sqrt{6}$, a pole tego trapezu jest równe $24\sqrt{3}$. Wysokość trapezu jest równa:

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, **B.** $6\sqrt{2}$, **C.** $3\sqrt{2}$, **D.** $2\sqrt{3}$.

Zadanie 4. (1 pkt)
Pole trapezu przedstawionego na rysunku obok jest równe:

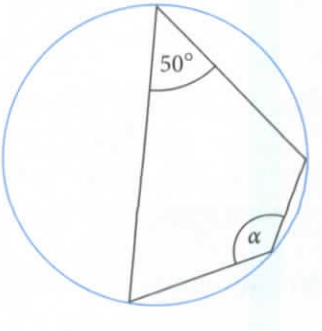


A. $4\sqrt{3}$, **C.** $6\sqrt{3}$,
B. $4{,}5\sqrt{3}$, **D.** $6{,}5\sqrt{3}$.

Zadanie 5. (1 pkt)
W trójkącie prostokątnym środkowa opuszczona z wierzchołka kąta prostego ma długość $3\sqrt{2}$. Pole koła opisanego na tym trójkącie jest równe:

A. 18π, **B.** 12π, **C.** $6\sqrt{2}\pi$, **D.** $9\sqrt{2}\pi$.

Zadanie 6. (1 pkt)
Kąt α na rysunku obok ma miarę:



A. 100°, **B.** 110°, **C.** 120°, **D.** 130°.

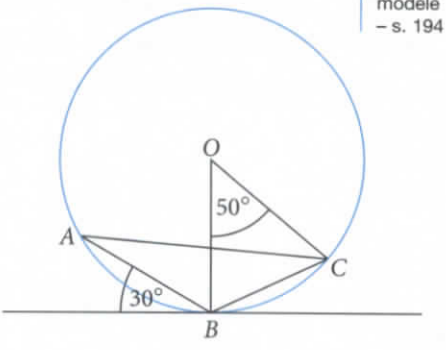
Zadanie 7. (1 pkt)
Pole koła opisanego na prostokącie o bokach długości $\sqrt{2}+1$ i $\sqrt{2}-1$ jest równe:

A. $\frac{3}{2}\pi$, **B.** 2π, **C.** $2\sqrt{2}\pi$, **D.** $(2\sqrt{2}+2)\pi$.

Zestaw C. Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

odpowiedzi – s. 193
modele – s. 194

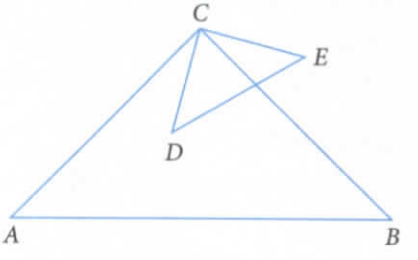
Zadanie 1. (2 pkt)
Wyznacz miarę kąta ABC (rysunek obok).



Zadanie 2. (2 pkt)
Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 4 i 8. Oblicz długość środkowej tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego.

Zadanie 3. (2 pkt)
Jeden z kątów trójkąta prostokątnego ma miarę $60°$, a przeciwprostokątna w tym trójkącie ma długość 8. Oblicz długości przyprostokątnych.

Zadanie 4. (2 pkt) CKE
Trójkąty prostokątne równoramienne ABC i CDE są położone tak, jak na rysunku obok (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku C jest prosty). Wykaż, że $|AD| = |BE|$.

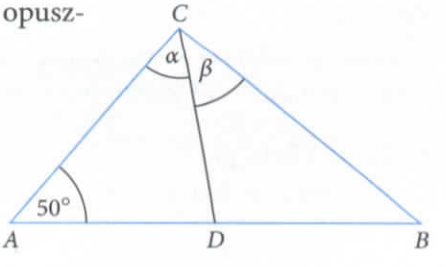


Zadanie 5. (2 pkt)
Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość 8. Oblicz obwód trójkąta, jeśli promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2.

Zadanie 6. (2 pkt)
W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę $30°$, a wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa 3. Oblicz długości przyprostokątnych.

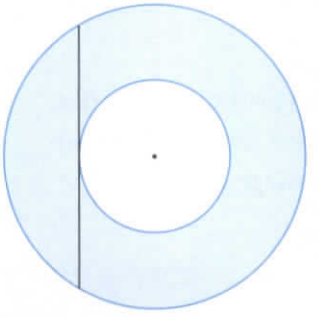
Zadanie 7. (2 pkt)
Pole trójkąta prostokątnego jest równe 12, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi 3. Oblicz wysokość trójkąta opuszczoną na przeciwprostokątną.

Zadanie 8. (2 pkt)
W trójkącie prostokątnym ABC z wierzchołka kąta prostego C poprowadzono środkową CD (rysunek obok). Wyznacz miary kątów α i β.



Zadanie 9. (2 pkt) CKE
Na trójkącie o bokach długości: $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{15}$ opisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu.

Zadanie 10. (2 pkt) CKE
W pierścieniu kołowym cięciwa zewnętrznego okręgu ma długość 10 i jest styczna do wewnętrznego okręgu (zobacz rysunek). Wykaż, że pole tego pierścienia można wyrazić wzorem, w którym nie występują promienie wyznaczających go okręgów.



Zadanie 11. (2 pkt)
W trójkącie równoramiennym ramię o długości 8 cm jest nachylone do podstawy pod kątem 67,5°. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 12. (2 pkt)
Na kwadracie o boku długości 1 opisano okrąg. Oblicz pole kwadratu opisanego na tym okręgu.

Zadanie 13. (2 pkt) CKE
Punkt E leży na ramieniu BC trapezu $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Udowodnij, że:

$$|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle BAE| + |\sphericalangle CDE|.$$

Zadanie 14. (2 pkt)
Ramiona trapezu mają długości 3 i 6, a wysokość jest równa 2. Oblicz pole tego trapezu, jeśli jego obwód jest równy 21.

Zadanie 15. (2 pkt)
Wysokość trapezu wynosi 3, a dłuższa podstawa ma długość 6. Punkt przecięcia przekątnych trapezu dzieli każdą z nich w stosunku 1:2. Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 16. (2 pkt) CKE
Krótsza przekątna dzieli trapez prostokątny na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 6. Oblicz obwód tego trapezu.

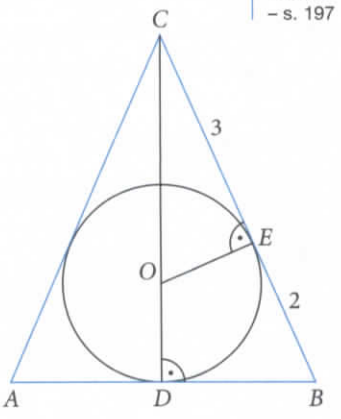
Zadanie 17. (2 pkt)
Obwód rombu jest równy 24. Oblicz pole rombu, jeśli jedna z jego przekątnych jest równa bokowi.

Zadanie 18. (2 pkt)
Pole równoległoboku jest równe 12, a jeden z jego boków ma długość 4. Oblicz długość drugiego boku, jeśli kąt ostry tego równoległoboku jest równy 45°.

Zestaw D. Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

odpowiedzi – s. 193
modele – s. 197

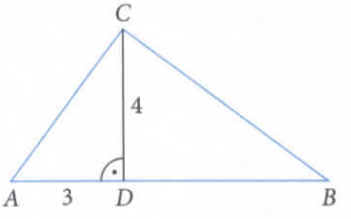
Zadanie 1. (4 pkt)
W trójkąt równoramienny wpisano okrąg. Każde ramię trójkąta zostało podzielone przez punkt styczności na odcinki o długości 2 i 3 (rysunek obok). Oblicz promień okręgu.



Zadanie 2. (4 pkt)
Podstawa trójkąta równoramiennego jest równa 6, a ramię ma długość $3\sqrt{5}$. Środkowe przecinają się w punkcie P. Oblicz odległość tego punktu od każdego z wierzchołków.

Zadanie 3. (4 pkt) CKE
W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość 18 cm, a wysokość CD jest równa 15 cm. Punkt D dzieli bok AB tak, że $|AD| : |DB| = 1 : 2$. Przez punkt P leżący na odcinku DB poprowadzono prostą równoległą do prostej CD, odcinając od trójkąta ABC trójkąt, którego pole jest cztery razy mniejsze niż pole trójkąta ABC. Oblicz długość odcinka PB.

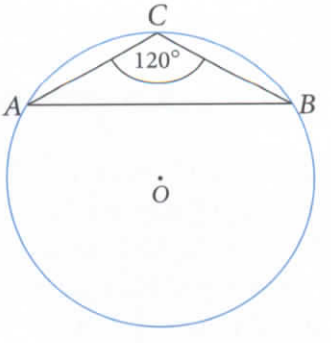
Zadanie 4. (4 pkt)
Trójkąt ABC (rysunek obok) jest prostokątny o kącie prostym przy wierzchołku C. Oblicz jego obwód.



Zadanie 5. (5 pkt)
Krótsza podstawa trapezu równoramiennego ma długość 2, a jego przekątna ma długość 12. Punkt przecięcia przekątnych dzieli każdą z nich w stosunku 1:3. Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 6. (4 pkt) CKE
Dany jest trapez, w którym podstawy mają długość 4 cm i 10 cm oraz ramiona tworzą z dłuższą podstawą kąty o miarach 30° i 45°. Oblicz wysokość tego trapezu.

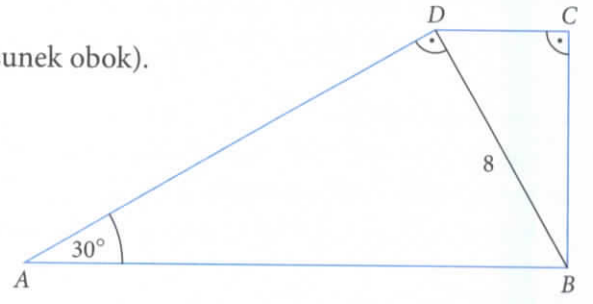
Zadanie 7. (4 pkt)
W okrąg o promieniu 4 wpisano trójkąt równoramienny (rysunek obok). Oblicz długości boków tego trójkąta, jeśli kąt między jego ramionami wynosi 120°.



Zadanie 8. (3 pkt)
W pewnym rombie kąt rozwarty jest dwa razy większy od kąta ostrego. Oblicz długość boku i wysokość rombu, jeśli krótsza przekątna ma długość 4.

Zadanie 9. (4 pkt)
Dany jest trapez równoramienny o podstawach AB i CD. Jego przekątne przecinają się w punkcie P. Oblicz pole i obwód tego trapezu, jeśli $|AB| = 36$ cm, $|DC| = 24$ cm, a punkt P jest odległy od dłuższej podstawy o 15 cm.

Zadanie 10. (4 pkt)
Oblicz obwód trapezu prostokątnego $ABCD$ (rysunek obok).

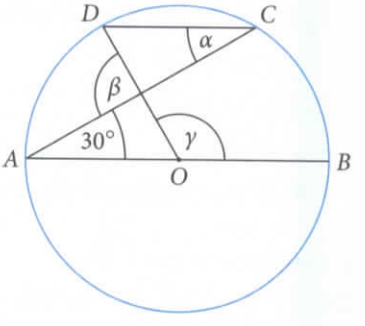


Zadanie 11. (5 pkt)
Bok rombu ma długość 5, a wysokość rombu wynosi 4. Oblicz długości przekątnych tego rombu.

Zadanie 12. (4 pkt)
Stosunek pól trzech parami stycznych zewnętrznie okręgów wynosi 1:4:9. Uzasadnij, że środki tych okręgów są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

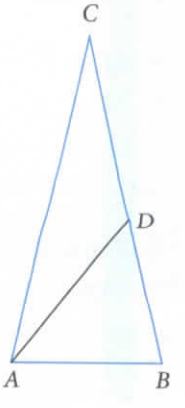
Zadanie 13. (4 pkt)
Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny jest równy 4, a promień okręgu na nim opisanego jest równy 10. Oblicz pole trójkąta.

Zadanie 14. (3 pkt)
Odcinki AB i CD są równoległe, a punkt O jest środkiem okręgu (rysunek obok). Wyznacz miary kątów α, β i γ.



Zadanie 15. (4 pkt)
Ramiona trapezu mają długości 5 i 6, a dłuższa podstawa jest równa 10. Oblicz długość krótszej podstawy, jeżeli wysokość trapezu wynosi 4.

Zadanie 16. (4 pkt)
W trapezie równoramiennym długość ramienia jest równa długości krótszej podstawy. Oblicz długość dłuższej podstawy, jeżeli kąt ostry trapezu wynosi 45°, a jego obwód jest równy 14.

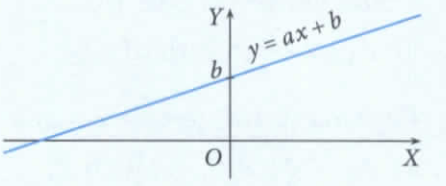


Zadanie 17. (4 pkt) CKE
Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramienne w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$ (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|\sphericalangle ADC| = 5|\sphericalangle ACD|$.

11. Geometria analityczna

Prosta

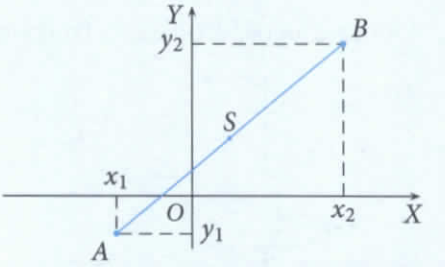
Równanie $y = ax + b$ nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.



Odcinek

Dane są punkty $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Punkt S, będący **środkiem odcinka** AB, ma współrzędne:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$



Długość odcinka AB wyraża się wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Proste o równaniach $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ i $y = a_1x + b_1$ są równoległe, gdy mają równe współczynniki kierunkowe, czyli gdy $a = a_1$.

Proste o równaniach $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ i $y = a_1x + b_1$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = -\frac{1}{a}$ (czyli $a \cdot a_1 = -1$).

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 202

1. Napisz równanie prostej AB.

a) $A(1,2), B(-1,8)$ b) $A(-8,0), B(4,9)$ c) $A(-7,5), B(2,5)$

2. Napisz równanie prostej o współczynniku kierunkowym a, przechodzącej przez punkt P.

a) $a = -\frac{1}{2}, P(2,-5)$ b) $a = \sqrt{2}, P(0,1)$ c) $a = 0, P\left(\sqrt{3},1\right)$

3. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(2,-1)$, równoległej do prostej l.

a) $l: 4x - y = \sqrt{2}$ b) $l: 4y - 4 = 0$ c) $l: 2x - 8 = 0$

4. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(-2,3)$, prostopadłej do prostej l.

a) $l: 3y + x = 6$ b) $l: 0{,}5x - 2y + 1 = 0$ c) $l: 10x - 5 = 0$

5. Wyznacz współrzędne środka odcinka AB.

a) $A(-6,5), B(2,-3)$ b) $A(-1,3), B(1,5)$ c) $A\left(\frac{4}{5}, \sqrt{2}\right), B\left(\frac{6}{5}, 1 - \sqrt{2}\right)$

6. Punkt S jest środkiem odcinka AB. Oblicz a i b.

a) $A(-1,3), B(5,-7), S(a,b)$ b) $A(3a,2), B(a,2b), S(b,a)$

7. Wyznacz równania osi symetrii odcinka AB.

a) $A(-7,3), B(5,3)$ b) $A(-2,-3), B(0,3)$ c) $A(-2,-10), B(4,8)$

8. Oblicz obwód trójkąta ABC.

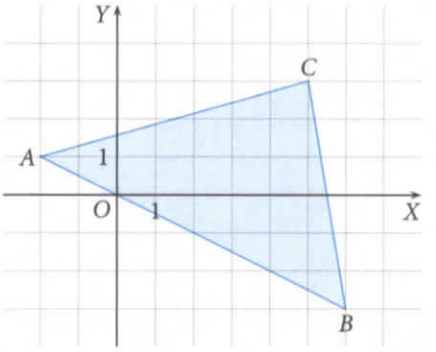
a) $A(2,2), B(6,-6), C(6,5)$ b) $A(-7,-3), B(5,3), C(1,5)$

9. Czy trójkąt ABC jest równoramienny? Czy jest on prostokątny?

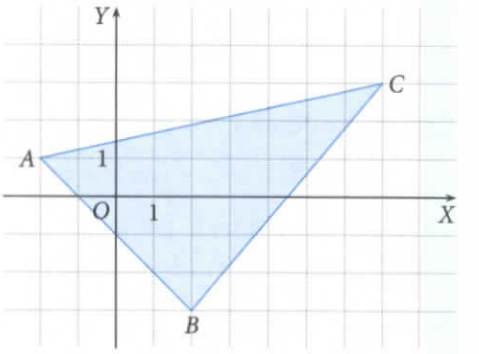
a) $A(-4,2), B(0,-1), C(6,7)$ b) $A(0,-2), B(-1,5), C(7,-1)$

10. Oblicz długość środkowej trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C.

a)



b)



11. Dany jest równoległobok $ABCD$. Wyznacz punkt przecięcia przekątnych tego równoległoboku i oblicz jego obwód.

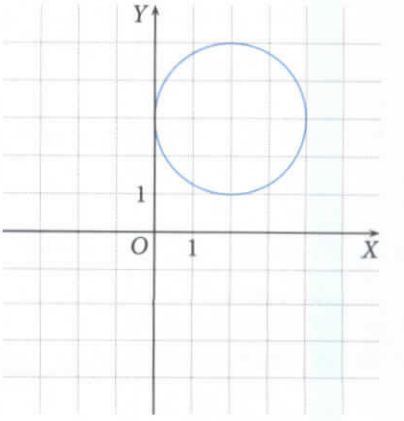
a) $A(-3,-2), B(5,2), C(5,5)$ b) $B(-1,-4), C(2,5), D(-2,8)$

12. Oblicz obwód okręgu, którego średnicą jest odcinek AB.

a) $A(-5,4), B(3,-2)$ b) $A(-6,-2), B(6,3)$

13. Dany jest okrąg O_1 o środku w punkcie $(2,3)$, styczny do osi OY (rysunek obok). Wyznacz promień okręgu O_2 stycznego zewnętrznie do okręgu O_1, jeśli środkiem okręgu O_2 jest punkt S.

a) $S(-1,-1)$ b) $S(-4,-5)$



14. Dany jest okrąg O_1 o środku w punkcie $(-4,1)$ i promieniu równym 3. Wyznacz promień okręgu O_2 o środku S, wiedząc, że okręgi O_1 i O_2 są styczne wewnętrznie.

a) $S(-1,-3)$ b) $S(8,-4)$

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 202

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
W której ćwiartce układu leży punkt (x, y), jeśli jego współrzędne spełniają układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 4x + 3 \end{cases}$$

A. I **B.** II **C.** III **D.** IV

Zadanie 2. (1 pkt)
Jeśli punkt $S(-2, 3)$ jest środkiem odcinka o końcach $A(0, a)$ i $B(b, -1)$, to:

A. $a + b = 3$, **B.** $a + b = 2$, **C.** $a + b = 1$, **D.** $a + b = 0$.

Zadanie 3. (1 pkt)
Pole trójkąta o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(5, -5)$, $C(5, 3)$ jest równe polu kwadratu, którego bok ma długość:

A. 5, **B.** 4, **C.** $5\sqrt{2}$, **D.** $2\sqrt{5}$.

Zadanie 4. (2 pkt) CKE
Punkty $E(7, 1)$ i $F(9, 7)$ to środki boków, odpowiednio AB i BC, kwadratu $ABCD$. Przekątna tego kwadratu ma długość:

A. $4\sqrt{5}$, **B.** 10, **C.** $4\sqrt{10}$, **D.** 20.

Zadanie 5. (1 pkt)
Punkt $A(-2, 1)$ jest wierzchołkiem kwadratu, którego przekątne przecinają się w punkcie $S(1, 4)$. Pole tego kwadratu jest równe:

A. 36, **B.** 25, **C.** 16, **D.** 9.

Zadanie 6. (1 pkt)
Obwód rombu $ABCD$ o wierzchołkach $A(-5, -6)$ i $B(5, -1)$ jest liczbą należącą do przedziału:

A. $(44; 48)$, **B.** $(40; 44)$, **C.** $(36; 40)$, **D.** $(32; 36)$.

Zadanie 7. (1 pkt) CKE
Punkty $A(-1, 3)$ i $C(7, 9)$ są przeciwległymi wierzchołkami prostokąta $ABCD$. Promień okręgu opisanego na tym prostokącie jest równy:

A. 10, **B.** $6\sqrt{2}$, **C.** 5, **D.** $3\sqrt{2}$.

Zadanie 8. (1 pkt)
Okrąg O_1 o środku w punkcie $S(-8, -4)$ przechodzi przez punkt $(0, 0)$. Długość tego okręgu jest równa:

A. $8\sqrt{2}\pi$, **B.** $8\sqrt{5}\pi$, **C.** $16\sqrt{2}\pi$, **D.** $16\sqrt{5}\pi$.

Zestaw C. Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

odpowiedzi i modele – s. 202

Zadanie 1. (2 pkt) CKE
Punkty $A(-3,-5)$, $B(4,-1)$, $C(-2,3)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.

Zadanie 2. (2 pkt)
Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A(1,1)$ i $B(3,5)$. Sprawdź, czy punkt $C\left(-\frac{1}{2},-2\right)$ należy do tej prostej.

Zadanie 3. (2 pkt)
Punkt P należy do odcinka o końcach $A(-1,-1)$ i $B(7,5)$. Wyznacz współrzędne punktu P, wiedząc, że $|AP| = \frac{1}{4}|AB|$.

Zadanie 4. (2 pkt)
Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A(-2,1)$, $B(4,4)$ i $C(1,7)$. Uzasadnij, że wysokość tego trójkąta opuszczona z wierzchołka A zawiera się w dwusiecznej kąta CAB.

Zadanie 5. (2 pkt)
Odcinek o końcach $A(3,-2)$ i $B(7,-10)$ jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego. Podaj współrzędne środka okręgu opisanego na tym trójkącie i oblicz promień tego okręgu.

Zadanie 6. (2 pkt)
Podstawą trójkąta równoramiennego ABC jest odcinek AB, gdzie $A(-2,1)$, $B(6,1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C, wiedząc, że należy on do prostej $y = x + 2$.

Zadanie 7. (2 pkt)
Dla jakiej liczby a proste $ax - y = 3$ i $y = (a-4)x + \sqrt{2}$ są prostopadłe?

Zadanie 8. (2 pkt)
Punkty $A(-2,-2)$, $B(1,0)$, $C(3,8)$ i $D(1,5)$ są kolejnymi wierzchołkami czworokąta. Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych tego czworokąta.

Zadanie 9. (2 pkt)
Oblicz pole rombu $ABCD$ o wierzchołkach $A(-11,-17)$, $B(5,-4)$, którego przekątne przecinają się w punkcie $(1,-1)$.

Zadanie 10. (2 pkt) CKE
Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową CD trójkąta ABC, którego wierzchołkami są punkty: $A(-2,-1)$, $B(6,1)$, $C(-7,10)$.

Zadanie 11. (2 pkt)
Punkt $S(-3,5)$ jest środkiem odcinka AB. Wyznacz współrzędne punktów A i B, jeżeli punkt A leży na osi OX, a punkt B – na osi OY.

Zestaw D. Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

odpowiedzi – s. 202
modele – s. 204

Zadanie 1. (4 pkt)
Punkt $A(a, 3)$ należy do prostej $y = -2x + 5$. Oblicz a. Znajdź na osi OX punkt B, którego odległość od punktu A jest równa $3\sqrt{10}$.

Zadanie 2. (4 pkt) CKE
Punkty $A(2, 0)$ i $B(12, 0)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego ABC o przeciwprostokątnej AB. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = x$. Oblicz współrzędne punktu C.

Zadanie 3. (4 pkt)
Punkt $S(0, 1)$ jest środkiem odcinka AB. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do odcinka AB, przechodzącej przez punkt B, jeżeli $A(-6, -3)$.

Zadanie 4. (6 pkt)
Wyznacz na osi OY taki punkt C, aby trójkąt o wierzchołkach $A(0, 0)$, $B(4, 2)$ i C był trójkątem prostokątnym. Rozpatrz dwa przypadki.

Zadanie 5. (4 pkt) CKE
Punkty $B(0, 10)$ i $O(0, 0)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego OAB o kącie prostym przy wierzchołku A. Przyprostokątna OA zawiera się w prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x$. Oblicz współrzędne punktu A i długość przyprostokątnej OA.

Zadanie 6. (5 pkt)
Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A(7, 4)$, $B(1, 10)$ i $C(-2, 1)$ jest równoramienny. Oblicz wysokość trójkąta opuszczoną na bok AB oraz jego pole.

Zadanie 7. (5 pkt)
Trójkąt o wierzchołkach $A(6, 0)$, $B(0, y)$ i $C(0, 0)$ jest prostokątny. Oblicz y, jeżeli promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2.

Zadanie 8. (5 pkt) CKE
Dane są wierzchołki trójkąta ABC: $A(2, 2)$, $B(9, 5)$ i $C(3, 9)$. Z wierzchołka C poprowadzono wysokość tego trójkąta, która przecina bok AB w punkcie D. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt D i równoległej do boku BC.

Zadanie 9. (4 pkt)
Punkty $A(2, 1)$, $B(-2, 4)$ i $C(0, 0)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego. Oblicz sinus większego z kątów ostrych tego trójkąta.

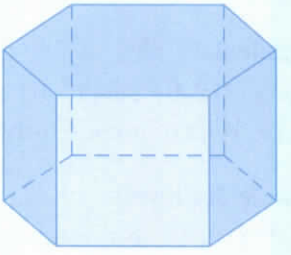
Zadanie 10. (4 pkt)
Dane są okręgi O_1 o środku w punkcie $(5, 4)$ i promieniu $r = 6$ oraz O_2 o środku w punkcie $(-3, -2)$. Uzasadnij, że jeśli do okręgu O_2 należy punkt $(-6, 2)$, to okręgi te mają dwa punkty wspólne.

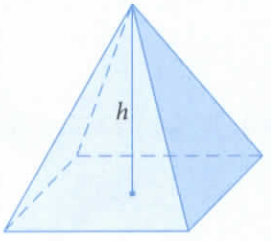
12. Stereometria

Objętość dowolnego graniastosłupa wyraża się wzorem:

$$V = P_p \cdot h,$$

gdzie P_p jest polem podstawy graniastosłupa, a h – jego wysokością.





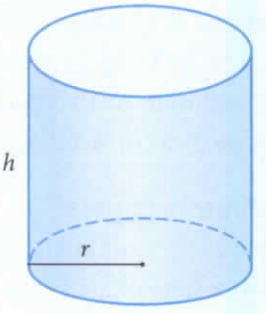
Objętość dowolnego ostrosłupa wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h,$$

gdzie P_p jest polem podstawy ostrosłupa, a h – jego wysokością.

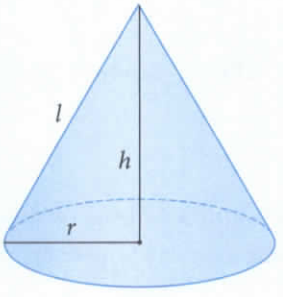
Pole powierzchni całkowitej walca o promieniu podstawy r i wysokości h wyraża się wzorem:

$$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h).$$



Objętość walca o promieniu podstawy r i wysokości h wyraża się wzorem:

$$V = \pi r^2 h.$$



Pole powierzchni całkowitej stożka o promieniu podstawy r i tworzącej l wyraża się wzorem:

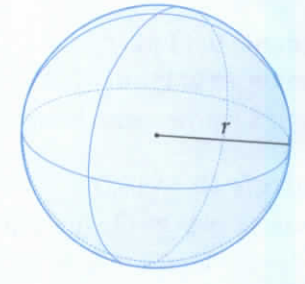
$$P_c = \pi r^2 + \pi rl = \pi r(r + l).$$

Objętość stożka o promieniu podstawy r i wysokości h wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Pole powierzchni kuli o promieniu r wyraża się wzorem:

$$P = 4\pi r^2.$$



Objętość kuli o promieniu r wyraża się wzorem:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 206

1. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego ma długość 2, a jego pole powierzchni całkowitej jest równe 36. Oblicz wysokość tego graniastosłupa, jeżeli jego podstawą jest:

a) trójkąt, b) kwadrat, c) sześciokąt.

2. Przekątna prostopadłościanu ma długość 60 i tworzy z przekątną podstawy kąt α. Oblicz wysokość tego prostopadłościanu, jeśli:

a) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, b) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, c) $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

3. Oblicz długość przekątnej sześcianu i jego objętość, jeśli przekątna podstawy tego sześcianu jest o 1 dłuższa od jego krawędzi.

4. Krótsza przekątna podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość $\sqrt{3}$, a jego wysokość jest równa 4. Oblicz objętość i długości przekątnych tego graniastosłupa.

5. Oblicz objętość graniastosłupa prostego, jeżeli jego wysokość jest równa 8, a podstawą jest trójkąt:

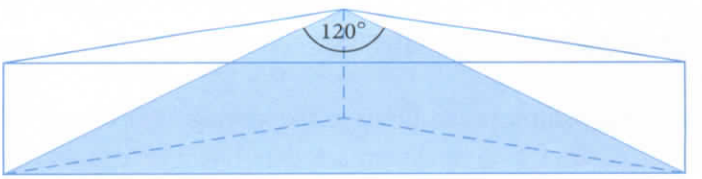
a) równoramienny o ramieniu długości 6 i kącie rozwartym 120°,

b) równoboczny taki, że promień opisanego na nim okręgu jest równy 4.

6. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny. Przekątne ścian bocznych tego graniastosłupa tworzą z krawędziami podstawy kąty 30°, 30° i 45°. Oblicz objętość tego graniastosłupa, jeśli jego wysokość jest równa 4.

7. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o kącie ostrym 30° i polu 8 cm^2. Ściany boczne tego wielościanu są kwadratami. Oblicz wysokość graniastosłupa i długość przekątnej ściany bocznej.

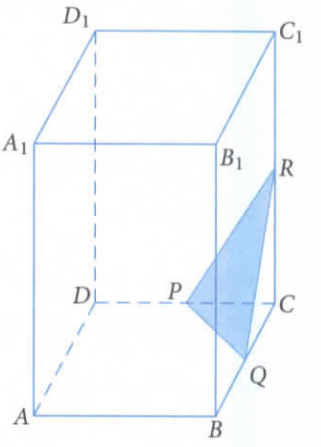
8. Wysokość graniastosłupa prostego jest równa $\sqrt{3}$, a jego podstawą jest trójkąt równoramienny. Dwie przekątne ścian bocznych mają długość 6 i przecinają się pod kątem 120° (rysunek niżej). Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.



9. Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny, którego pole powierzchni bocznej jest cztery razy większe od sumy pól podstaw. Graniastosłup ten przecięto płaszczyzną zawierającą przekątne jego podstaw. Wiedząc, że pole otrzymanego przekroju jest równe $18\sqrt{2}$ cm^2, oblicz objętość graniastosłupa.

10. Podstawą graniastosłupa prawidłowego jest kwadrat o polu 16 cm^2, a suma długości wszystkich jego krawędzi jest równa 80 cm. Graniastosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch krawędzi bocznych, należących do jednej ze ścian graniastosłupa i środki dwóch krawędzi podstawy. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

11. Dany jest prostopadłościan (rysunek obok), w którym $|BC| = 6$, $|DC| = 8$, $|CC_1| = 24$. Punkty P, Q i R są środkami odpowiednich krawędzi prostopadłościanu. Oblicz pole trójkąta PQR.



12. Wysokość ostrosłupa prawidłowego wynosi 4, a promień okręgu wpisanego w jego podstawę jest równy 2. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeżeli jego podstawą jest:

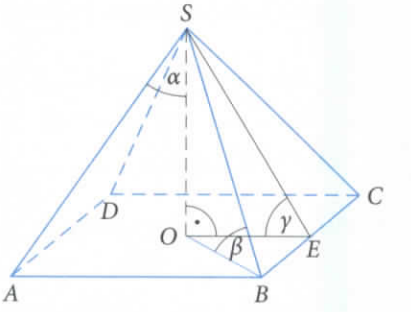
a) kwadrat, b) trójkąt, c) sześciokąt.

13. Kąt między wysokościami przeciwległych ścian ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równy 60°. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa, jeśli długość krawędzi podstawy jest równa 4 cm.

14. Długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa a. Wykaż, że objętość tego ostrosłupa wyraża się wzorem:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{a^3}{\operatorname{tg}\alpha},$$

gdzie α jest kątem zawartym między wysokością a krawędzią boczną ostrosłupa (rysunek obok). Zapisz analogiczny wzór za pomocą a oraz kąta:



a) β zawartego między krawędzią boczną a przekątną podstawy tego ostrosłupa,

b) γ zawartego między wysokością ściany bocznej a płaszczyzną podstawy.

15. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 6, a krawędź boczna jest równa 4. Oblicz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

16. Wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa, jeśli długość jego krawędzi bocznej jest równa 8.

17. Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi $24\sqrt{3}$, a długość krawędzi bocznej jest równa 6. Oblicz tangens kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego płaszczyzny podstawy.

18. Oblicz objętość walca, którego:

a) przekrój płaszczyzną zawierającą jego oś jest kwadratem o przekątnej 4,

b) powierzchnia boczna po rozwinięciu jest prostokątem o wymiarach $6\text{ cm} \times 8\text{ cm}$. Rozważ dwie możliwości.

19. Pole powierzchni całkowitej walca jest dwa razy większe od jego pola powierzchni bocznej. Oblicz średnicę podstawy tego walca, jeśli jego objętość wynosi 27π.

20. Oblicz kąt rozwarcia stożka, jeśli:

a) powierzchnia boczna po rozwinięciu jest półkolem o promieniu 2,

b) pole podstawy stożka jest równe 9π, a jego objętość wynosi $3\sqrt{3}\pi$.

21. Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe 21π. Oblicz promień podstawy stożka, jeśli:

a) tworząca stożka jest dwa razy dłuższa od promienia jego podstawy,

b) powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest wycinkiem koła o kącie $270°$.

22. Pole podstawy stożka jest równe polu koła wielkiego kuli o objętości 288π. Tangens kąta między tworzącą stożka a jego podstawą jest równy $\frac{5}{3}$. Oblicz objętość tego stożka.

23. Promień kuli jest równy promieniowi podstawy stożka. Oblicz stosunek objętości kuli do objętości stożka, jeżeli:

a) przekrój stożka płaszczyzną zawierającą jego oś jest trójkątem równobocznym,

b) kąt rozwarcia stożka jest równy 2α.

24. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 4 cm. Kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy jest równy $60°$, a α jest kątem nachylenia krawędzi bocznej do tej płaszczyzny.

a) Sporządź odpowiedni szkic i zaznacz na nim wielkości podane w zadaniu.

b) Oblicz $\cos\alpha$ i odczytaj z tablic przybliżoną wartość α z dokładnością do $1°$.

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 206

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

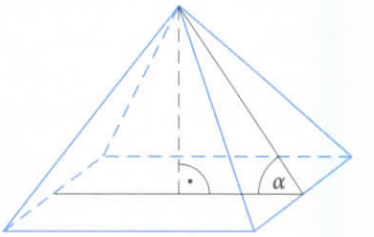
Zadanie 1. (1 pkt)
Przekątna podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $5\sqrt{2}$, a jego pole powierzchni bocznej jest równe 120. Wysokość tego graniastosłupa wynosi:

A. 6, **B.** $6\sqrt{2}$, **C.** 12, **D.** $12\sqrt{2}$.

Zadanie 2. (1 pkt)
Pole podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 16 cm^2, a jego wysokość wynosi $3\sqrt{2}$. Przekątna tego graniastosłupa ma długość:

A. $4\sqrt{2}$ cm, **B.** $5\sqrt{2}$ cm, **C.** $4\sqrt{3}$ cm, **D.** $5\sqrt{3}$ cm.

Zadanie 3. (1 pkt)
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym tangens kąta α między wysokością ściany bocznej a odcinkiem łączącym środki boków kwadratu będącego podstawą ostrosłupa wynosi 2 (rysunek obok). Jeśli krawędź podstawy ostrosłupa ma długość 6, to objętość ostrosłupa jest równa:



A. 120, **B.** 144, **C.** 72, **D.** 216.

Zadanie 4. (1 pkt)
Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest kwadratem o polu $4\pi^2$. Objętość tego walca jest równa:

A. $2\pi^2$, **B.** $4\pi^3$, **C.** 8π, **D.** $8\pi^3$.

Zadanie 5. (1 pkt) CKE
Tworząca stożka ma długość l, a promień jego podstawy jest równy r. Powierzchnia boczna tego stożka jest 2 razy większa od pola jego podstawy. Wówczas:

A. $r = \frac{1}{6}l$, **B.** $r = \frac{1}{4}l$, **C.** $r = \frac{1}{3}l$, **D.** $r = \frac{1}{2}l$.

Zadanie 6. (1 pkt)
Dane są stożek o wysokości 4 i promieniu podstawy r oraz stożek o tej samej wysokości i promieniu podstawy $\frac{1}{2}r$. Stosunek objętości większego stożka do objętości mniejszego jest równy:

A. 2, **B.** 4, **C.** 6, **D.** 8.

Zadanie 7. (1 pkt)
Kula wpisana w sześcian o przekątnej 6 cm ma objętość równą:

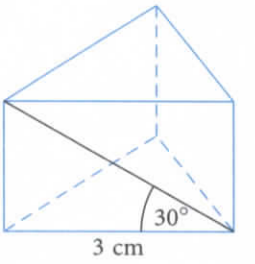
A. $4\sqrt{3}\pi$ cm^3, **B.** $6\sqrt{3}\pi$ cm^3, **C.** $12\sqrt{3}\pi$ cm^3, **D.** $18\sqrt{3}\pi$ cm^3.

Zestaw C. Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

odpowiedzi i modele – s. 207

Zadanie 1. (2 pkt)
Wysokość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 8, a jego objętość wynosi $32\sqrt{3}$. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

Zadanie 2. (2 pkt)
Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią podstawy kąt 30° (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa, jeżeli krawędź jego podstawy ma długość 3 cm.



Zadanie 3. (2 pkt)
Podstawą graniastosłupa prostego jest romb, którego jedna przekątna jest dwa razy dłuższa od drugiej, a pole wynosi 16. Oblicz długość krótszej przekątnej tego graniastosłupa, jeśli jego wysokość jest równa 2.

Zadanie 4. (2 pkt)
Wszystkie krawędzie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego są tej samej długości. Najdłuższa przekątna tego graniastosłupa ma długość 20 cm. Oblicz długości krawędzi.

Zadanie 5. (2 pkt)
Wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 2 cm. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa, jeżeli pole powierzchni całkowitej tego wielościanu jest równe 21 cm^2.

Zadanie 6. (2 pkt) CKE
Oblicz sinus kąta zawartego między przekątną sześcianu a jego płaszczyzną podstawy.

Zadanie 7. (2 pkt)
Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 6, a kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy wynosi 60°. Oblicz wysokość podstawy tego ostrosłupa.

Zadanie 8. (2 pkt)
Czy sok z dwóch butelek o pojemności 250 ml zmieści się w szklance w kształcie walca o promieniu podstawy 4 cm i wysokości 10 cm?

Zadanie 9. (2 pkt)
Przekrój stożka płaszczyzną zawierającą jego oś jest trójkątem prostokątnym o polu 25 cm^2. Oblicz średnicę podstawy tego stożka.

Zestaw D. Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

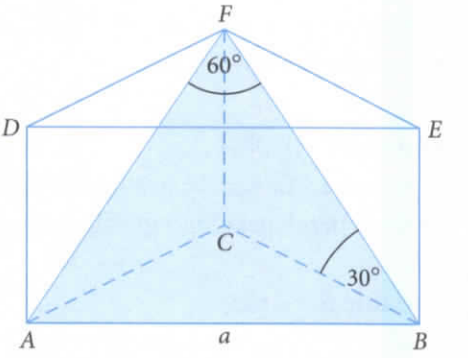
odpowiedzi – s. 207
modele – s. 209

Zadanie 1. (5 pkt)
Pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi $48\sqrt{3}$. Przekątna ściany bocznej tego graniastosłupa tworzy z krawędzią boczną kąt 30°. Oblicz długość tej przekątnej.

Zadanie 2. (4 pkt)
Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego krótsza przekątna ma długość $4\sqrt{3}$, a wysokość jest trzy razy dłuższa od krawędzi podstawy.

Zadanie 3. (4 pkt)
Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o boku długości 3 cm. Dłuższa przekątna graniastosłupa ma długość 6 cm, a wysokość graniastosłupa jest równa $2\sqrt{3}$ cm. Oblicz pole podstawy tego graniastosłupa.

Zadanie 4. (6 pkt)
Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny, którego podstawa ma długość a (rysunek obok). Przekątna FB ściany bocznej tworzy z krawędzią BC kąt 30°, a kąt między przekątnymi FB i FA wynosi 60°. Wykaż, że objętość tego graniastosłupa jest równa $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.



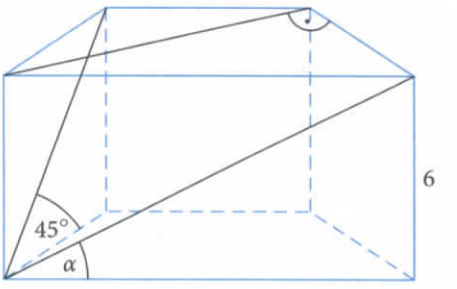
Zadanie 5. (6 pkt)
Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość d, a sinus kąta między tą przekątną a krawędzią podstawy jest równy p. Wykaż, że wysokość tego graniastosłupa wyraża się wzorem $d\sqrt{2p^2-1}$.

Zadanie 6. (4 pkt) CKE
Jacek bawi się sześciennymi klockami o krawędzi 2 cm. Zbudował z nich jeden duży sześcian o krawędzi 8 cm i wykorzystał do tego wszystkie swoje klocki. Następnie zburzył budowlę i ułożył z tych klocków drugą bryłę – graniastosłup prawidłowy czworokątny. Wtedy okazało się, że został mu dokładnie jeden klocek, którego nie było gdzie dołożyć. Oblicz stosunek pola powierzchni całkowitej pierwszej ułożonej bryły do pola powierzchni całkowitej drugiej bryły i wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

Zadanie 7. (5 pkt) CKE
Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 4 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Oblicz długość krawędzi sześcianu, którego objętość jest równa objętości tego ostrosłupa.

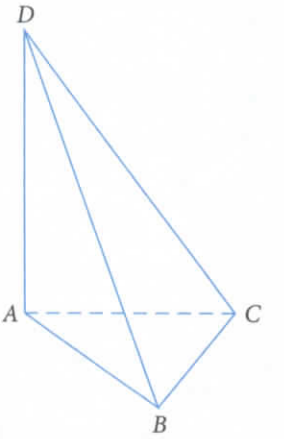
Zadanie 8. (5 pkt) CKE
Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 8. Punkt D jest środkiem krawędzi AB, a odcinek DS jest wysokością ostrosłupa. Krawędzie AS i BS mają długość 7. Oblicz długość krawędzi CS.

Zadanie 9. (7 pkt)
Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny, którego przekątna tworzy kąt prosty z ramieniem (rysunek obok). Przekątna jednej ze ścian bocznych tworzy z ramieniem trapezu kąt 45°, a przekątna drugiej ze ścian tworzy z dłuższą podstawą trapezu kąt α, którego tangens jest równy $\frac{1}{2}$. Oblicz objętość graniastosłupa, jeżeli jego wysokość jest równa 6.



Zadanie 10. (6 pkt)
Sześcian o krawędzi 4 cm przecięto płaszczyzną zawierającą przekątną jego dolnej podstawy i środki dwóch krawędzi jego górnej podstawy. Wykaż, że pole otrzymanego przekroju jest równe 18 cm^2.

Zadanie 11. (4 pkt) CKE
Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt ABC. Krawędź AD jest wysokością ostrosłupa (patrz rysunek). Oblicz objętość ostrosłupa $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|AD| = 12$, $|BC| = 6$, $|BD| = |CD| = 13$.



Zadanie 12. (4 pkt) CKE
W graniastosłupie czworokątnym prawidłowym przekątna o długości d jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\sin\alpha = 0{,}2$. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

Zadanie 13. (5 pkt)
Objętości walca i stożka są równe. Promień podstawy stożka jest dwa razy większy od promienia podstawy walca, a wysokość stożka jest o 1 mniejsza od wysokości walca. Oblicz stosunek pola powierzchni stożka do pola powierzchni walca, jeżeli tangens kąta między tworzącą stożka a jego wysokością jest równy $\frac{4}{3}$.

Zadanie 14. (5 pkt) CKE
Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 8. Krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 40°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

13. Rachunek prawdopodobieństwa

Reguła dodawania

Jeśli zbiory A i B są rozłączne, to $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$.

Reguła mnożenia

Jeśli zbiór A ma m elementów, a zbiór B ma n elementów, to liczba różnych par (x, y) takich, że $x \in A$ oraz $y \in B$, jest równa $m \cdot n$.

Własności prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, na którym zostało określone prawdopodobieństwo P. Wówczas:

- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$,
- $P(\Omega) = 1$ (Ω – zdarzenie pewne),
- $P(\emptyset) = 0$ ($\emptyset$ – zdarzenie niemożliwe),
- $P(A) \leqslant P(B)$ dla $A \subset B \subset \Omega$,
- $P(A') = 1 - P(A)$, gdzie A' jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$.

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 214

1. Dane są zbiory $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 5, 7\}$ i $C = \{0, 3, 6, 9\}$. Ile jest liczb trzycyfrowych, których pierwsza cyfra należy do zbioru A, druga – do zbioru B, a trzecia – do zbioru C? Ile wśród tych liczb jest liczb parzystych, a ile – podzielnych przez trzy?

2. Ile różnych liczb można otrzymać, zmieniając kolejność cyfr w liczbie:

a) 312, b) 5467, c) 231 507?

3. Tworzymy kody, w których na początku występują cyfry, a następnie litery. Ile jest takich kodów, jeżeli wykorzystujemy wszystkie litery i cyfry poniższego kodu oraz cyfry i litery nie mogą się powtarzać?

a) $35ABC$ b) $2468EF$ c) $2357ADGHF$

4. Numery pewnej serii dowodów osobistych składają się z trzech liter i z sześciu następujących po nich cyfr. Oblicz, ile może być dowodów z takimi numerami, jeżeli jedyne występujące litery to A, P i R (mogą się one powtarzać) oraz:

a) cyfry się nie powtarzają, b) cyfry mogą się powtarzać.

5. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 1, 3, 5, 7 i 8 oraz:

a) żadna cyfra się nie powtarza, b) cyfry mogą się powtarzać?

6. Ile jest liczb:

a) trzycyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry 0 i 3 oraz żadna cyfra się nie powtarza,

b) czterocyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry 0, 1, 5 oraz żadna cyfra się nie powtarza,

c) pięciocyfrowych, w których zapisie żadna cyfra się nie powtarza?

7. Ile jest liczb pięciocyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry:

a) 1, 2, b) 0, 1, c) 0, 1, 2, d) 0, 1, 2, 3?

8. Ile jest liczb:

a) trzycyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0,

b) parzystych trzycyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry 2 i 5,

c) nieparzystych czterocyfrowych?

9. Rzucamy trzy razy żetonem, którego jedna strona jest biała, a druga czarna. Niech zdarzenie A oznacza, że wypadła co najwyżej jeden raz strona biała, B – że wypadła co najwyżej dwa razy strona biała, C – że ani razu nie wypadła strona czarna. Które ze zdarzeń: $A \cap C$, $A \cap B$, $B \cup C$ i $B' \cap A$ jest zdarzeniem niemożliwym, a które – zdarzeniem pewnym?

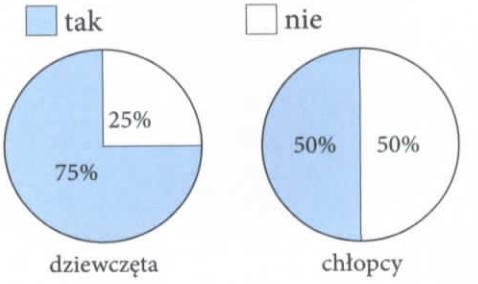
10. Rzucamy dwa razy kostką. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom: A – suma oczek jest równa 7, B – iloczyn oczek jest równy 6. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń: A, B, A', B', $A \cap B$ oraz $A \cup B$.

11. Rzucamy trzy razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom: A – reszka wypadła nie więcej razy niż orzeł, B – orzeł wypadł co najwyżej dwa razy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń: A, B, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

12. W pewnej klasie jest 16 dziewcząt i 14 chłopców. Uczniom tej klasy zadano pytanie: „Czy byłeś w górach?". Na diagramie przedstawiono wyniki ankiety. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba z tej klasy:

a) jest dziewczyną i była w górach,

b) nie była w górach.



13. W urnie jest 20 kul ponumerowanych od 1 do 20. Wyjmujemy losowo jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie to kula o numerze:

a) większym od 8, b) podzielnym przez 5, c) będącym liczbą pierwszą.

14. Losujemy jedną liczbę spośród liczb naturalnych dwucyfrowych. Oblicz prawdopodobieństwo, że ta liczba jest podzielna przez 11.

15. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeżeli $B \subset A$, $P(A) = 0{,}8$ oraz $P(B) = 0{,}5$.

16. a) Oblicz $P(A \cap B)$ i $P(A \setminus B)$, jeżeli wiadomo, że $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}8$ i $P(A \cup B) = 0{,}9$.

b) Oblicz $P(A \cap B)$ i $P(B \setminus A)$, jeżeli wiadomo, że $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}7$ i $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym.

c) Oblicz $P(A \cup B)$ i $P(A \setminus B)$, jeżeli wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ i $A \cap B$ jest zdarzeniem niemożliwym.

17. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, wiedząc, że:

a) $9P(A) \cdot P(A') = 2$, b) $\frac{P(A)}{P(A')} = 3$.

18. W pierwszej urnie jest 8 kul białych i 2 czarne, a w drugiej urnie są 2 kule białe i n czarnych. Prawdopodobieństwo wylosowania czarnej kuli z pierwszej urny jest o 0,2 mniejsze od prawdopodobieństwa wylosowania białej kuli z drugiej urny. Oblicz n.

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 214

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Ile jest liczb trzycyfrowych mniejszych od 500, w których zapisie występują jedynie cyfry 2, 3 i 7 oraz cyfry mogą się powtarzać?

A. 18 **B.** 27 **C.** 32 **D.** 42

Zadanie 2. (1 pkt)
Ze zbioru liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5 i mniejszych od 200 wybieramy losowo jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie ona podzielna przez 10?

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{20}{39}$ **C.** $\frac{19}{39}$ **D.** $\frac{19}{40}$

Zadanie 3. (1 pkt) CKE
Wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 6 lub przez 10 jest:

A. 25, **B.** 24, **C.** 21, **D.** 20.

Zadanie 4. (1 pkt) CKE
Liczba wszystkich sposobów, na jakie Ala i Bartek mogą usiąść na dwóch spośród pięciu miejsc w kinie, jest równa:

A. 25, **B.** 20, **C.** 15, **D.** 12.

Zadanie 5. (1 pkt) CKE
Każdy uczestnik spotkania dwunastoosobowej grupy przyjaciół uścisnął dłoń każdemu z pozostałych członków tej grupy. Liczba wszystkich uścisków dłoni była równa:

A. 66, **B.** 72, **C.** 132, **D.** 144.

Zadanie 6. (1 pkt) CKE
Rzucamy jeden raz symetryczną sześcienną kostką do gry. Niech p_i oznacza prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek podzielnej przez i. Wtedy:

A. $2p_4 = p_2$, **B.** $2p_6 = p_3$, **C.** $2p_3 = p_6$, **D.** $2p_2 = p_4$.

Zadanie 7. (1 pkt)
W pewnej grze rzucamy kostką i monetą. Liczba zdobytych punktów równa się sumie liczby wyrzuconych oczek oraz liczby uzyskanych orłów. Prawdopodobieństwo, że w jednym rzucie uzyskamy 7 punktów, jest równe:

A. $\frac{1}{6}$, **B.** $\frac{1}{7}$, **C.** $\frac{1}{10}$, **D.** $\frac{1}{12}$.

Zadanie 8. (1 pkt)
Rzucamy trzema kostkami do gry. Prawdopodobieństwo, że iloczyn liczby oczek otrzymanych na tych kostkach jest równy 5, wynosi:

A. $\frac{1}{36}$, **B.** $\frac{1}{72}$, **C.** $\frac{1}{108}$, **D.** $\frac{5}{216}$.

Zestaw C. Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

odpowiedzi – s. 214
modele – s. 215

Zadanie 1. (2 pkt)
Oblicz, na ile sposobów można przypisać pięciu zawodnikom koszulki wybrane spośród koszulek o numerach 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Ile jest sposobów przydzielenia koszulek tym zawodnikom, jeśli nie wykorzystujemy koszulki o numerze 4?

Zadanie 2. (2 pkt)
Spośród sześciu uczniów wybieramy przewodniczącego klasy i jego zastępcę. Zastępcą może zostać każdy z tych uczniów, a przewodniczącym – tylko jedna z czterech osób wybranych spośród tej grupy. Oblicz, na ile sposobów można dokonać wyboru.

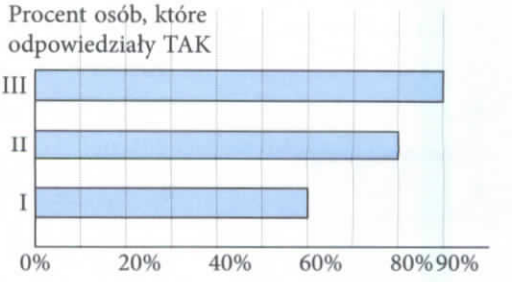
Zadanie 3. (2 pkt)
Ile jest liczb czterocyfrowych takich, że pierwsza i ostatnia cyfra są takie same?

Zadanie 4. (2 pkt)
W urnie jest 6 kul białych, 3 kule czarne i pewna liczba kul niebieskich. Oblicz, ile jest kul niebieskich, jeżeli prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z tej urny wynosi $\frac{1}{3}$.

Zadanie 5. (2 pkt) CKE
Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania iloczynu liczby oczek równego 5.

Zadanie 6. (2 pkt)
W pierwszej urnie są 2 kule białe i 4 kule czarne. W drugiej urnie jest 1 kula biała i 3 kule czarne. Z każdej urny losujemy po jednej kuli. Zdarzenie A polega na wylosowaniu kul o takim samym kolorze. Sprawdź, czy zdarzenia A i A' są jednakowo prawdopodobne.

Zadanie 7. (2 pkt)
Pewna firma w trzech oddziałach: I, II i III, zatrudnia odpowiednio: 75, 45 i 30 pracowników. Wśród wszystkich pracowników przeprowadzono ankietę, w której zadano pytanie: „Czy jesteś zadowolony ze swojej pracy?". Wyniki przedstawiono na diagramie. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany pracownik jest zadowolony ze swojej pracy.



Zadanie 8. (2 pkt)
Oblicz $P(A \setminus B)$, jeżeli wiadomo, że $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ oraz $P(A \cup B) = \frac{11}{12}$.

Zestaw D. Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

odpowiedzi – s. 214
modele – s. 216

Zadanie 1. (4 pkt) CKE

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje jedna cyfra nieparzysta i trzy cyfry parzyste.

Uwaga: przypominamy, że zero jest liczbą parzystą.

Zadanie 2. (4 pkt)

Kod sejfu składa się z 6 różnych cyfr. Na wciśnięcie jednej cyfry potrzeba średnio 1 sekundy. Oblicz, ile minut zajmie w najgorszym razie otwarcie sejfu właścicielowi, który nie pamięta kolejności cyfr, ale:

a) pamięta wszystkie cyfry,

b) pamięta pięć cyfr.

Zadanie 3. (3 pkt)

Spośród liczb czterocyfrowych, w których zapisie wykorzystano tylko cyfry 0 i 1, wylosowano jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że dzieli się ona przez trzy.

Zadanie 4. (3 pkt) CKE

Spośród cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6 losujemy kolejno dwa razy po jednej cyfrze ze zwracaniem. Tworzymy liczbę dwucyfrową w ten sposób, że pierwsza z wylosowanych cyfr jest cyfrą dziesiątek, a druga – cyfrą jedności tej liczby. Oblicz prawdopodobieństwo utworzenia liczby większej od 52.

Zadanie 5. (3 pkt)

W urnie jest dziesięć kul ponumerowanych od 1 do 10. Losujemy dwie kule. Czy bardziej prawdopodobne jest, że druga z wylosowanych kul będzie miała dwa razy większy numer od pierwszej kuli w przypadku losowania bez zwracania czy ze zwracaniem?

Zadanie 6. (4 pkt) CKE

Dane są dwa pojemniki. W pierwszym z nich znajduje się 9 kul: 4 białe, 3 czarne i 2 zielone. W drugim pojemniku jest 6 kul: 2 białe, 3 czarne i 1 zielona. Z każdego pojemnika losujemy po jednej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru.

Zadanie 7. (4 pkt) CKE

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo następującego zdarzenia:

a) A – w każdym rzucie wypadnie nieparzysta liczba oczek,

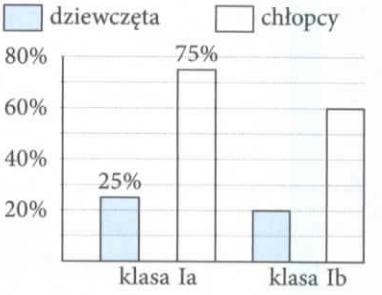
b) B – suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest liczbą większą od 9,

c) C – suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest liczbą nieparzystą i większą od 9.

Zadanie 8. (3 pkt)
W urnie jest pięć kul białych o numerach: 1, 2, 3, 4, 5 oraz trzy kule czarne o numerach: 1, 2, 3. Losujemy bez zwracania dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że pierwsza wylosowana kula będzie biała, a druga będzie miała numer 1.

Zadanie 9. (3 pkt)
W trzech urnach: I, II i III jest po n kul. Kule są dwóch kolorów – białe i czarne, przy czym białych kul jest w kolejnych urnach odpowiednio 2, 3 i 4. Z każdej urny losujemy jedną kulę. Oblicz n, jeżeli wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania trzech kul białych wynosi $\frac{1}{9}$.

Zadanie 10. (5 pkt)
W klasie Ia jest 12 dziewcząt i 8 chłopców, a w Ib jest 5 dziewcząt i 15 chłopców. Uczniom obu klas zadano pytanie: „Czy lubisz oglądać mecze piłki nożnej?". Na diagramie przedstawiono procent odpowiedzi „tak". Czy prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba z klasy Ia lubi oglądać mecze piłki nożnej jest większe niż takie prawdopodobieństwo w klasie Ib?



Zadanie 11. (4 pkt) CKE
Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb oczek w obu rzutach będzie podzielny przez 12. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 12. (4 pkt) CKE
Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką, której jedna ściana ma jedno oczko, dwie ściany mają po dwa oczka i trzy ściany mają po trzy oczka. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: liczby oczek otrzymane w obu rzutach różnią się o 1.

Zadanie 13. (4 pkt) CKE
Z pojemnika, w którym jest pięć losów: dwa wygrywające i trzy puste, losujemy dwa razy po jednym losie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy co najmniej jeden los wygrywający. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

Zadanie 14. (4 pkt)
Prawdopodobieństwo wygrania w pewnej loterii co najwyżej 5 zł wynosi 0,9, natomiast prawdopodobieństwo wygrania co najmniej 5 zł jest równe 0,2. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania dokładnie 5 zł.

Zadanie 15. (3 pkt)
Oblicz $P(B \setminus A)$, jeżeli $P(A) = \frac{2}{3}$ i $P(A \cup B) = \frac{8}{9}$.

14. Statystyka

Średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Medianą nieparzystej liczby danych uporządkowanych rosnąco lub malejąco jest wartość środkowa. W przypadku parzystej liczby tak uporządkowanych danych medianą jest średnia arytmetyczna dwóch sąsiednich wartości środkowych.

Dominantą nazywamy wartość, która wśród danych występuje najczęściej.

Wariancją liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n},$$

gdzie $\overline{x}$ jest średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Odchyleniem standardowym liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę σ określoną za pomocą wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}}.$$

Wariancja jest równa σ^2.

Średnią ważoną liczb $x_1, x_2, \ldots, x_k$ z odpowiadającymi im wagami $n_1, n_2, \ldots, n_k$, będącymi liczbami dodatnimi, określamy wzorem:

$$\overline{x}_w = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}.$$

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 218

1. Oblicz średnią arytmetyczną danych liczb.

a) 8, 9, 9, 9, 9, 5, 7, 9, 9, 7, 7

b) 7, −3, 4, 5, −6, 7, 8, −9, 10, 11

2. Wyznacz medianę i dominantę danych liczb.

a) 9, 5, 7, 0, 7, 5, 0, 9, 7, 7, 0

b) 6, 6, 4, 8, 8, 9, 9, 10, 6, 4

3. W tabeli podano oceny z klasówki z matematyki w pewnej klasie. Oblicz średnią, wyznacz medianę i dominantę otrzymanych ocen dla dziewcząt, dla chłopców i dla całej klasy.

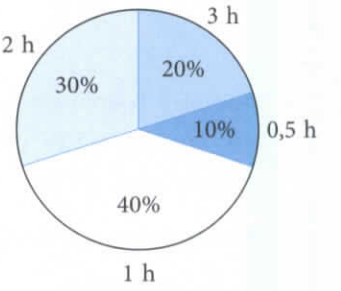
Ocena	2	3	3,5	4	4,5	5
Dziewczęta	2	2	4	1	2	1
Chłopcy	1	4	3	3	2	0

4. Wyznacz medianę i dominantę następujących danych:

a) liczba godzin matematyki w klasie Ia w kolejnych dniach tygodnia: 1, 1, 0, 1, 2,

b) liczba nieobecności w semestrze na zajęciach ze statystyki w pewnej szesnastoosobowej grupie studentów:
2, 5, 0, 0, 2, 2, 1, 4, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 3.

5. W grupie 80 losowo wybranych uczniów klas trzecich w pewnym liceum zadano pytanie: „Ile czasu poświęcasz dziennie na naukę?" Wyniki ankiety przedstawiono na diagramie. Oblicz średnią arytmetyczną, wyznacz medianę i dominantę zebranych danych.



6. W pewnej firmie zatrudniającej 10 osób miesięczne wynagrodzenia w złotych poszczególnych osób w 2009 roku wynosiły: 3000, 3100, 3050, 3300, 3250, 5500, 2350, 3700, 7500, 3300.

a) Oblicz średnie miesięczne wynagrodzenie w tej firmie.

b) Podaj procent pracowników tej firmy zarabiających poniżej średniej.

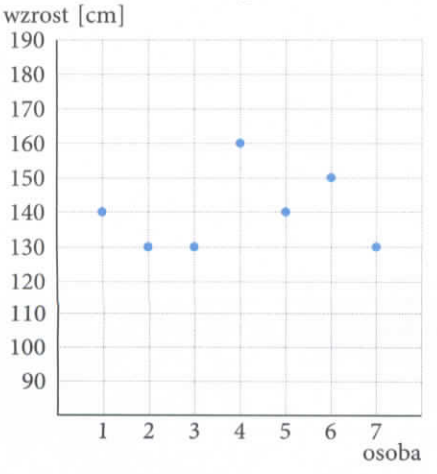
7. Uczeń ma 8 ocen z biologii, ich średnia arytmetyczna jest równa 3. O ile wzrośnie ta średnia, jeżeli otrzyma on jeszcze dwie oceny – czwórkę i szóstkę?

8. Zmierzono wzrost uczniów w dwóch siedmioosobowych grupach. Wyniki przedstawiono na diagramach.

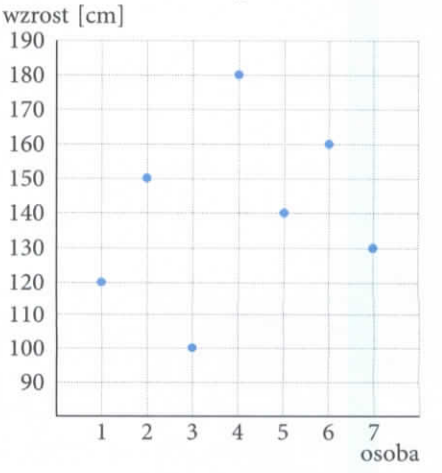
a) Oblicz średnią i wyznacz medianę dla każdej grupy.

b) Oblicz wariancję i odchylenie standardowe dla każdej grupy. Odpowiedź podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Grupa I



Grupa II



9. W tabeli przedstawiono dane dotyczące miesięcznego wynagrodzenia w dwóch firmach. Oblicz odchylenie standardowe wynagrodzeń w firmie X i w firmie Y.

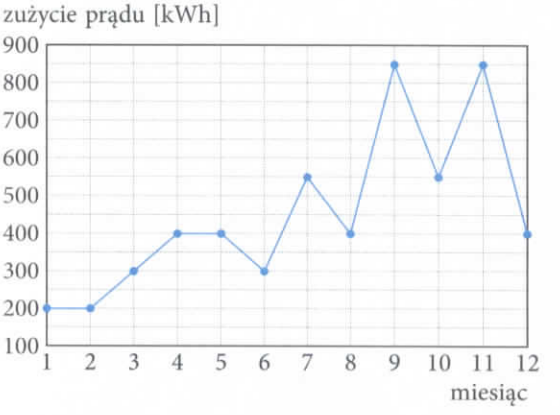
Firma	X			Y		
Liczba pracowników	3	14	3	14	4	2
Wynagrodzenie [zł]	2500	3000	3500	2500	3500	5500

10. Na wykresie obok podano zużycie prądu w kolejnych miesiącach roku 2010 przez pewną rodzinę.

a) Czy średnie zużycie prądu w drugim półroczu jest dwa razy większe niż w pierwszym?

b) Czy odchylenie standardowe miesięcznego zużycia prądu w drugim półroczu jest większe niż w pierwszym?

c) W których miesiącach zużycie prądu było większe od średniej?



11. W tabeli podane są liczby i odpowiadające im wagi. Oblicz średnią ważoną tych liczb.

a)

Liczba	1	3	5	7
Waga	4	6	3	2

b)

Liczba	18	5	4	8	3
Waga	0,1	0,2	0,15	0,05	0,4

12. Teleturniej składa się z trzech konkurencji ocenianych w skali od 0 do 10. Ostateczny wynik jest średnią ważoną poszczególnych wyników. Który zawodnik wygrał teleturniej?

Waga	2	3	5
Kuba	8	5	10
Paweł	10	5	8
Marek	8	10	5

13. W klasach IIa liczącej 27 osób i IIb liczącej 18 osób przeprowadzono sprawdzian ze statystyki. Średnia ocen ze sprawdzianu w klasie IIa jest równa 4, a w IIb wynosi 3,5. Oblicz średnią ocen ze sprawdzianu w obu klasach razem.

14. Średnie arytmetyczne dwóch zestawów danych wynoszą 16 i 10. Oblicz średnią arytmetyczną łącznego zestawu danych, jeśli stosunek liczebności danych wynosi odpowiednio:

a) $1:2$, b) $1:3$, c) $2:3$.

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 219

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

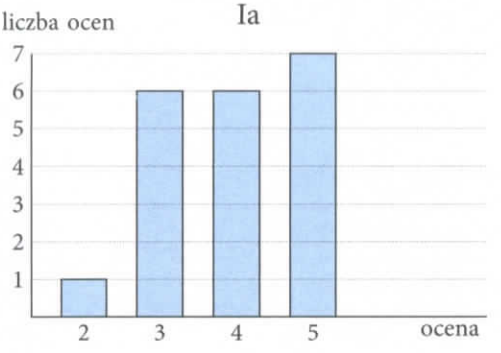
Zadanie 1. (1 pkt)
Niech M oznacza medianę, D – dominantę, a S – średnią zestawu liczb: 1, 2, 1, 4, 1, 3, 3, 2, 1. Wówczas:

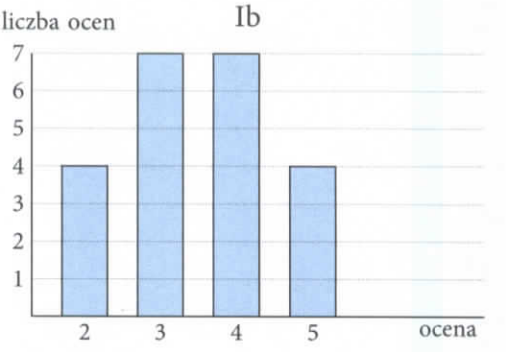
A. $M < D$, **B.** $M < S$, **C.** $M = D$, **D.** $M = S$.

Zadanie 2. (1 pkt)
Do zestawu liczb 5, 4, 4, 1, 5, 5, 9, 3 dopisano liczbę x taką, że średnia arytmetyczna nowego zestawu liczb jest równa ich medianie. Zatem:

A. $x = 3\frac{1}{2}$, **B.** $x = 4$, **C.** $x = 4\frac{1}{2}$, **D.** $x = 5$.

W zadaniach 3–5 skorzystaj z zamieszczonych niżej diagramów, na których przedstawiono wyniki sprawdzianu z geografii w dwóch klasach pierwszych pewnego liceum.





Zadanie 3. (1 pkt)
Niech S_a oznacza średnią ocen ze sprawdzianu w klasie Ia, a S_b – średnią ocen w klasie Ib. Różnica $S_a - S_b$ jest równa:

A. 0,5, **B.** 0,45, **C.** 0,4, **D.** 0,35.

Zadanie 4. (1 pkt)
Średnia ocen z tego sprawdzianu dla obu klas razem, podana z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku, wynosi:

A. 3,71, **B.** 3,72, **C.** 3,73, **D.** 3,95.

Zadanie 5. (1 pkt)
Niech M_a oznacza medianę wyników sprawdzianu w klasie Ia, M_b – oznacza medianę w klasie Ib, a M – medianę wyników sprawdzianu w obu klasach razem. Wówczas:

A. $M_a < M$, **B.** $M_b > M$, **C.** $M_a = M$, **D.** $M_b = M$.

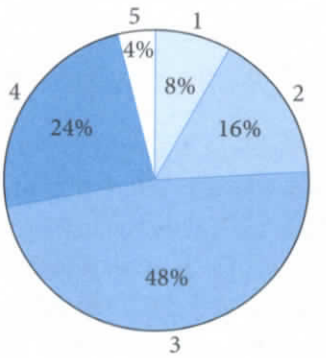
Zestaw C. Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

odpowiedzi i modele – s. 219

Zadanie 1. (2 pkt)
Na diagramie kołowym przedstawiono wyniki sprawdzianu z fizyki w klasie liczącej 25 uczniów.

a) Oblicz średnią ocen z tego sprawdzianu.

b) Ilu uczniów otrzymało ocenę wyższą od średniej?



Zadanie 2. (2 pkt)
Średnia arytmetyczna liczb: $5x$, 3, 5, 7, 6, 1, 5, $2x$ jest równa 6. Oblicz x oraz wyznacz medianę i dominantę tych liczb.

Zadanie 3. (2 pkt)
Średnia arytmetyczna liczb: 6, 7, 3, 9, 10, x, y jest równa 9. Oblicz x i y, jeśli mediana jest równa 8 i $y > x$.

Zadanie 4. (2 pkt)
Na wykresie przedstawiono liczbę mieszkań oddanych do użytku w kolejnych miesiącach 2009 roku.

a) Oblicz średnią miesięczną liczbę mieszkań oddanych do użytku w drugim półroczu 2009 roku.

b) Oblicz odchylenie standardowe miesięcznej liczby mieszkań oddanych do użytku w drugim półroczu 2009 roku.

Zadanie 5. (2 pkt)
Ocena wystawiana na półrocze jest średnią ważoną, zaokrągloną do liczby całkowitej, ocen: z klasówek, z odpowiedzi ustnych i ze sprawdzianów. Który z uczniów A, B i C uzyskał najlepszą ocenę na półrocze?

	Klasówka 1	Klasówka 2	Odpowiedź 1	Odpowiedź 2	Sprawdzian
Waga	0,3	0,3	0,1	0,1	0,2
A	4	4	5	4	5
B	5	5	4	4	4
C	5	4	5	4	4

Zestaw D. Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

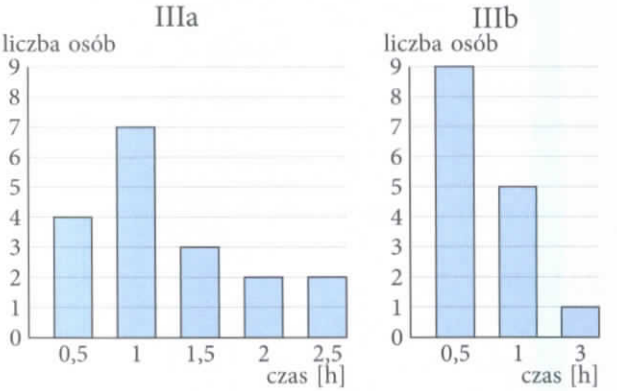
odpowiedzi – s. 219
modele – s. 220

Zadanie 1. (3 pkt)

Wypisz liczby pierwsze mniejsze od 30. Oblicz średnią i wyznacz medianę tych liczb.

Zadanie 2. (6 pkt)

W klasach IIIa i IIIb przeprowadzono ankietę. Każdy uczeń odpowiadał na pytanie: „Ile godzin dziennie spędzasz przed komputerem?" Wyniki ankiety przedstawiono na diagramach. Oblicz średnią arytmetyczną, wyznacz medianę i dominantę zebranych danych dla każdej klasy i obu klas razem. Wyniki podaj z dokładnością do 1 minuty.



Zadanie 3. (4 pkt)

Pewna firma ma dwa oddziały, I i II. Średnia płaca w oddziale I przedsiębiorstwa jest równa 2700 zł, a w oddziale II – 3300 zł. Oblicz średnią płacę w obu oddziałach razem, jeżeli:

a) oddział I zatrudnia dwa razy więcej pracowników niż oddział II,

b) oddział I zatrudnia o 40% mniej pracowników niż oddział II.

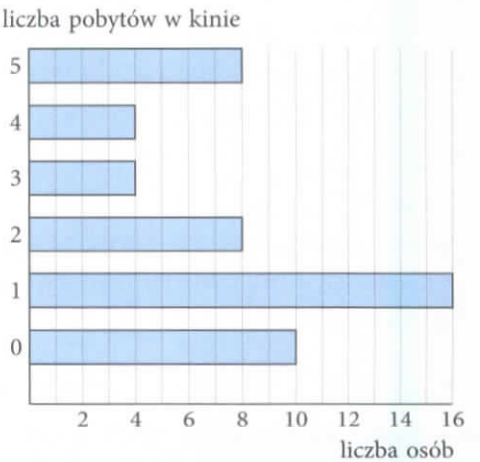
Zadanie 4. (4 pkt)

Grupie 50 losowo wybranych uczniów liceum zadano pytanie: „Ile razy w ostatnim miesiącu byłeś w kinie?" Wyniki ankiety przedstawiono na diagramie. Czy na jego podstawie można stwierdzić, że w ciągu ostatniego miesiąca:

a) przynajmniej połowa badanych osób co najmniej raz była w kinie,

b) badana osoba średnio 2 razy była w kinie,

c) ponad 40% badanych było w kinie więcej niż 2 razy?



Zadanie 5. (4 pkt)

Średnie miesięczne wynagrodzenie w pewnej firmie zatrudniającej 15 pracowników było równe 3600 zł. Zatrudniono nowego pracownika. Ile zarabia ten pracownik, jeśli obecnie średnie miesięczne wynagrodzenie w firmie jest:

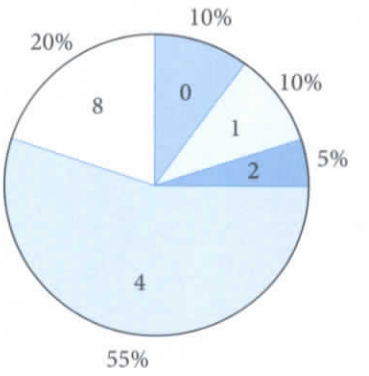
a) o 1% wyższe niż wcześniej,

b) o 10 zł niższe niż wcześniej.

Zadanie 6. (3 pkt)
Średnia ocen z języka polskiego na koniec roku w pewnej klasie liczącej 20 osób wynosiła 3,6. Czterech uczniów otrzymało ocenę niedostateczną. Jaka byłaby średnia ocen w tej klasie, gdyby ci uczniowie na koniec roku otrzymali ocenę dostateczną?

Zadanie 7. (3 pkt)
Średnia arytmetyczna n liczb wynosi 50. Jeżeli dołączymy do nich liczby 70 i 130, to średnia nowego zestawu będzie równa 70. Oblicz n.

Zadanie 8. (3 pkt)
Uczniom pewnej szkoły zadano pytanie: „Ile razy w ostatnim miesiącu byłeś na basenie?" Procentowy rozkład odpowiedzi podano na diagramie kołowym.



a) Ile razy średnio uczeń tej szkoły był w ostatnim miesiącu na basenie?

b) Oblicz odchylenie standardowe miesięcznej liczby obecności na basenie.

Zadanie 9. (5 pkt) CKE
W tabeli przedstawiono wyniki części teoretycznej egzaminu na prawo jazdy. Zdający uzyskał wynik pozytywny, jeżeli popełnił co najwyżej dwa błędy.

Liczba błędów	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Liczba zdających	8	5	8	5	2	1	0	0	1

a) Oblicz średnią arytmetyczną liczby błędów popełnionych przez zdających ten egzamin. Wynik podaj w zaokrągleniu do całości.

b) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wśród dwóch losowo wybranych zdających tylko jeden uzyskał wynik pozytywny. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zestawy maturalne

Zestaw 1

odpowiedzi i modele – s. 222

Zadania zamknięte

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

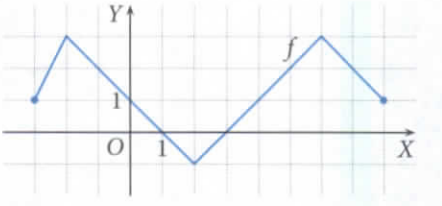
Zadanie 1. (1 pkt)
Liczba, której 5% jest równe 6, to:

A. 0,3, **B.** 12, **C.** 30, **D.** 120.

Zadanie 2. (1 pkt)
Która z poniższych liczb jest równa 2?

A. $0{,}02 \cdot 10^3$ **B.** $20^{-1} \cdot 10^2$ **C.** $(0{,}2)^{-1} \cdot 10$ **D.** $10^2 : (0{,}02)^{-1}$

Zadanie 3. (1 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f\colon\langle -3;8\rangle \to \mathbf{R}$. Największa wartość tej funkcji w przedziale $\langle 0;5\rangle$ jest równa:



A. 2, **B.** 1, **C.** 3, **D.** 0.

Zadanie 4. (1 pkt)
Wybierz wartość m, dla której funkcja $f(x) = (2-m)x + 1$ jest rosnąca.

A. $m = -1$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = 10$

Zadanie 5. (1 pkt)
Suma współrzędnych wierzchołka paraboli $y = 2(x-1)^2 + 3$ jest równa:

A. -4, **B.** -2, **C.** 2, **D.** 4.

Zadanie 6. (1 pkt)
Zbiorem rozwiązań nierówności $1 - 5(1-x) \leqslant 2(3x-1)$ jest:

A. $(-\infty;-2\rangle$, **B.** $\langle -2;\infty)$, **C.** $(-\infty;-6\rangle$, **D.** $\langle -6;\infty)$.

Zadanie 7. (1 pkt)
Dla której wartości a funkcja $f(x) = x^2 - a$ przyjmuje wartości ujemne?

A. dla $a = 4$ **B.** dla $a = 0$ **C.** dla $a = -1$ **D.** dla $a = -7$

Zadanie 8. (1 pkt)
Równanie $2 - \frac{1}{x} = x$:

A. ma jedno rozwiązanie,
B. ma dwa rozwiązania,
C. ma trzy rozwiązania,
D. nie ma rozwiązań.

Zadanie 9. (1 pkt)
Promień okręgu opisanego na prostokącie o bokach długości 3 i 4 jest równy:

A. 1,5, **B.** 2, **C.** 2,5, **D.** 5.

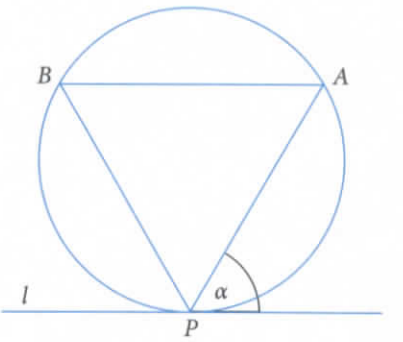
Zadanie 10. (1 pkt)
Jeżeli kąt α jest ostry oraz $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, to:

A. $0° < \alpha < 30°$, **B.** $\alpha = 30°$, **C.** $30° < \alpha < 60°$, **D.** $60° < \alpha < 90°$.

Zadanie 11. (1 pkt)
Punkt $S(2,0)$ jest środkiem odcinka o końcach $A(3,4)$ i B. Wówczas:

A. $B(1,4)$, **B.** $B(3,2)$, **C.** $B(5,4)$, **D.** $B(1,-4)$.

Zadanie 12. (1 pkt)
Równoboczny trójkąt ABP jest wpisany w okrąg. Prosta l jest styczna do okręgu w punkcie P (rysunek obok). Wówczas:

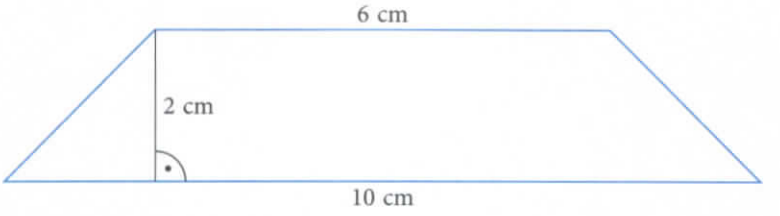


A. $\alpha = 30°$, **B.** $\alpha < 30°$, **C.** $\alpha = 60°$, **D.** $\alpha > 60°$.

Zadanie 13. (1 pkt)
Dany jest odcinek o końcach $A(2,-1)$ i $B(a,4)$. Jeżeli $|AB| = 5$, to:

A. $a = -2$, **B.** $a = 2$, **C.** $a = 6$, **D.** $a = -6$.

Zadanie 14. (1 pkt)
Na rysunku przedstawiono trapez równoramienny o podstawach długości 6 cm i 10 cm oraz wysokości 2 cm.



Ramię tego trapezu ma długość:

A. 2 cm, **B.** $2\sqrt{2}$ cm, **C.** $2\sqrt{5}$ cm, **D.** 4 cm.

Zadanie 15. (1 pkt)
Suma rozwiązań równania $(x^2-4)(x-1) = 0$ jest równa:

A. 0, **B.** 1, **C.** -1, **D.** 5.

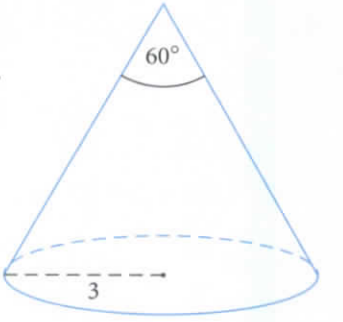
Zadanie 16. (1 pkt)
Ciągiem arytmetycznym o różnicy 4 jest ciąg:

A. $a_n = 2n + 4$, **B.** $a_n = 3n + 1$, **C.** $a_n = 4n + 3$, **D.** $a_n = n + 4$.

Zadanie 17. (1 pkt)
Do okręgu o środku $O(-2,0)$ i promieniu 5 należy punkt:

A. $(-5,-3)$, **B.** $(-3,5)$, **C.** $(2,-3)$, **D.** $(1,5)$.

Zadanie 18. (1 pkt)
Kąt rozwarcia stożka ma miarę 60°, a promień jego podstawy jest równy 3 (rysunek obok). Pole powierzchni bocznej tego stożka wynosi:

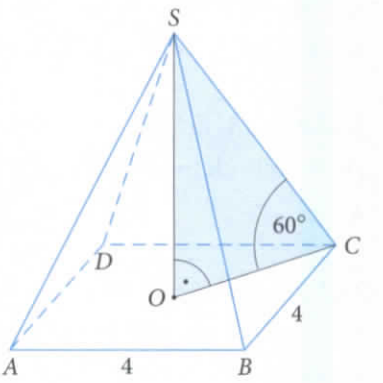


A. 18π, **B.** 12π, **C.** $6\sqrt{3}\pi$, **D.** $3\sqrt{3}\pi$.

Zadanie 19. (1 pkt)
Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o wszystkich wyrazach dodatnich. Jeśli $a_1 = 5$ oraz $a_3 = 2a_2$, to wzorem ogólnym tego ciągu jest:

A. $a_n = 2^n$, **B.** $a_n = 5^n$, **C.** $a_n = 5 \cdot 2^n$, **D.** $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$.

Zadanie 20. (1 pkt)
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 4, a krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60°. Wysokość tego ostrosłupa jest równa:



A. $\sqrt{2}$, **B.** $\sqrt{6}$, **C.** $2\sqrt{6}$, **D.** $4\sqrt{6}$.

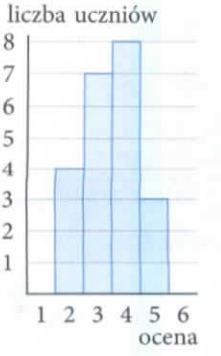
Zadanie 21. (1 pkt)
Na loterii jest 60 losów, w tym 12 wygrywających. Kupujemy jeden los. Prawdopodobieństwo wylosowania losu niewygrywającego wynosi:

A. 0,2, **B.** 0,4, **C.** 0,6, **D.** 0,8.

Zadanie 22. (1 pkt)
Niech $A, B \subset \Omega$. Jeśli $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, to $P(A \cup B)$ jest równe:

A. $\frac{5}{6}$, **B.** $\frac{2}{3}$, **C.** $\frac{1}{3}$, **D.** $\frac{1}{2}$.

Zadanie 23. (1 pkt)
Na diagramie obok przedstawiono wyniki sprawdzianu przeprowadzonego w klasie IIIa. Mediana ocen jest równa:



A. 2, **B.** 3, **C.** 3,5, **D.** 4.

Zadanie 24. (1 pkt)
Jeśli do wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + a$ należy punkt $P(-1,3)$, to:

A. $a = 1$, **B.** $a = 2{,}5$, **C.** $a = 3{,}5$, **D.** $a = 5$.

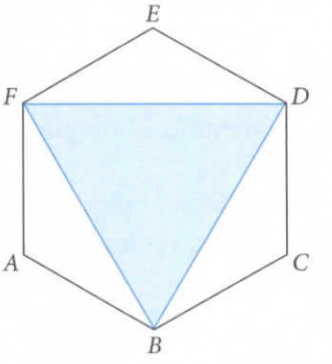
Zadanie 25. (1 pkt)
Suma $\frac{1}{2}\log_6 4 + \log_6 18$ jest równa:

A. $\log_6 20$, **B.** $\log_6 22$, **C.** 2, **D.** 6.

ZESTAW 1

Zadania otwarte

Zadanie 26. (2 pkt)
Bok sześciokąta foremnego $ABCDEF$ ma długość 6 cm. Oblicz promień koła wpisanego w trójkąt BDF (rysunek obok).



Zadanie 27. (2 pkt)
Rozważmy wszystkie liczby czterocyfrowe, w których zapisie użyto cyfr: 1, 2, 3, 4 i cyfry te się nie powtarzają. Spośród tych liczb wylosowano jedną. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest to liczba parzysta.

Zadanie 28. (2 pkt)
Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $4x + y + 1 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(4,3)$.

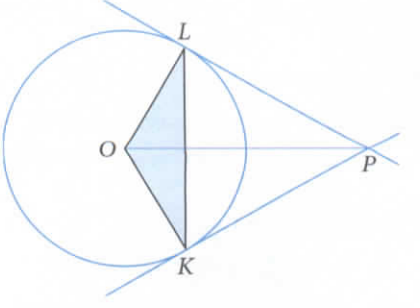
Zadanie 29. (2 pkt)
Rozwiąż równanie $x(2x^2 - 1) = 0$.

Zadanie 30. (2 pkt)
Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = \frac{2}{x}$ i $g(x) = -2$. Odczytaj z rysunku argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe od wartości funkcji g.

Zadanie 31. (5 pkt)
Punkt $A(4,8)$ należy do okręgu, który jest styczny do osi OX w punkcie $B(4,0)$. Oblicz różnicę między polem kwadratu wpisanego w ten okrąg a polem trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg.

Zadanie 32. (5 pkt)
Liczby: 3, b, c tworzą w podanej kolejności rosnący ciąg geometryczny. Te same liczby są w podanej kolejności pierwszym, drugim i piątym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz b i c.

Zadanie 33. (5 pkt)
Dany jest okrąg o środku O i promieniu 4. Z punktu P poprowadzono dwie styczne do tego okręgu w punktach K i L (rysunek obok). Wiedząc, że odległość punktu P od środka okręgu jest równa 8, oblicz pole trójkąta KOL.



Zestaw 2

odpowiedzi i modele – s. 224

Zadania zamknięte

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

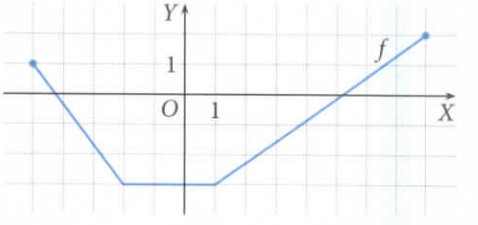
Zadanie 1. (1 pkt)
Pewien towar kosztował 200 zł. Jego cenę podniesiono o 15%. Towar kosztuje teraz:

A. 203 zł, **B.** 215 zł, **C.** 220 zł, **D.** 230 zł.

Zadanie 2. (1 pkt)
Liczba $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ należy do przedziału:

A. $(0;1)$, **B.** $(1;3)$, **C.** $(3;4)$, **D.** $(4;5)$.

Zadanie 3. (1 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f:\langle -5;8\rangle \to \mathbf{R}$. Funkcja f jest niemalejąca w przedziale:



A. $\langle -4;5\rangle$, **B.** $\langle -2;8\rangle$, **C.** $\langle -5;1\rangle$, **D.** $\langle -5;8\rangle$.

Zadanie 4. (1 pkt)
Jeśli $a = 407{,}89$, to zaokrąglenie liczby $0{,}01a$ do jednego miejsca po przecinku wynosi:

A. 4,1, **B.** 40,8, **C.** 407,9, **D.** 408.

Zadanie 5. (1 pkt)
Jeśli wykres funkcji $f(x) = 2x - 4b$ przecina oś OY w punkcie $P(0,-5)$, to:

A. $b = -5$, **B.** $b = 1{,}25$, **C.** $b = 5$, **D.** $b = -1{,}25$.

Zadanie 6. (1 pkt)
Które z poniższych wyrażeń po uproszczeniu jest równe $2x - 3$ dla $x \neq 0$?

A. $\frac{4x^2-3x}{2x}$ **B.** $\frac{8x^2-6x}{4x}$ **C.** $\frac{6x-4x^2}{-2x}$ **D.** $\frac{-4x^2-6x}{-2x}$

Zadanie 7. (1 pkt)
Suma miejsc zerowych funkcji $y = 3x(x-1)(x+2)$ jest równa:

A. -1, **B.** 1, **C.** 2, **D.** 3.

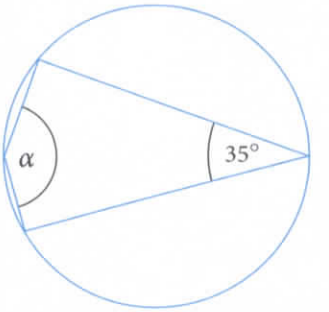
Zadanie 8. (1 pkt)
Dane są sumy algebraiczne $S = x - 1$ i $T = x^2 + x + 1$. Iloczyn $S \cdot T$ jest równy:

A. $x^3 - 1$, **B.** $x^3 + x^2$, **C.** $x^3 - x^2 + x$, **D.** $x^3 - x^2 + x - 1$.

Zadanie 9. (1 pkt)
Jeśli pole trójkąta równobocznego jest równe $9\sqrt{3}$, to bok tego trójkąta ma długość:

A. $3\sqrt{2}$, **B.** $3\sqrt{3}$, **C.** $4{,}5\sqrt{3}$, **D.** 6.

Zadanie 10. (1 pkt)
Kąt α wpisany w okrąg (rysunek obok) ma miarę równą:



A. $70°$, **B.** $115°$, **C.** $145°$, **D.** $150°$.

Zadanie 11. (1 pkt)
Jeżeli zbiorem wartości funkcji $y = (x-5)^2 - q$ jest przedział $\langle 2; \infty)$, to:

A. $q = -5$, **B.** $q = -2$, **C.** $q = 2$, **D.** $q = 5$.

Zadanie 12. (1 pkt)
Jeżeli α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg}\alpha = 2$, to wartość wyrażenia $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha}$ jest równa:

A. 3, **B.** 2,5, **C.** 2, **D.** 1,5.

Zadanie 13. (1 pkt)
Jeśli dla $x = -2$ wartość wyrażenia $\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + m$ jest równa 0, to:

A. $m = -2$, **B.** $m = 0$, **C.** $m = 2$, **D.** $m = 4$.

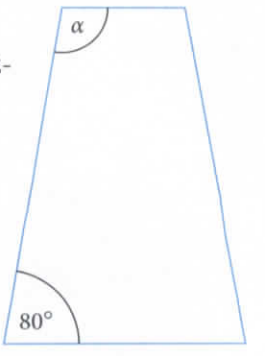
Zadanie 14. (1 pkt)
Trzeci wyraz ciągu geometrycznego jest równy 2, a szósty wynosi 54. Iloraz tego ciągu jest równy:

A. $\sqrt{3}$, **B.** 2, **C.** 3, **D.** 6.

Zadanie 15. (1 pkt)
Największym pierwiastkiem równania $x + 2 = \frac{24}{x}$ jest liczba:

A. -6, **B.** 4, **C.** 6, **D.** 12.

Zadanie 16. (1 pkt)
W trapezie równoramiennym (rysunek obok) kąt między ramieniem a dłuższą podstawą ma miarę $80°$. Jeżeli kąt α jest kątem między ramieniem a krótszą podstawą, to:



A. $\frac{\alpha}{2} = 30°$, **B.** $\frac{\alpha}{2} = 50°$, **C.** $\frac{\alpha}{2} = 60°$, **D.** $\frac{\alpha}{2} = 100°$.

Zadanie 17. (1 pkt)
Jeżeli przekątna sześcianu ma długość 6 cm, to jego krawędź ma długość:

A. 2 cm, **B.** 3 cm, **C.** $2\sqrt{3}$ cm, **D.** $3\sqrt{2}$ cm.

Zadanie 18. (1 pkt)
Kąt ostry rombu ma miarę $30°$, a jego bok ma długość 4. Pole tego rombu jest równe:

A. 4, **B.** $4\sqrt{3}$, **C.** 8, **D.** $8\sqrt{3}$.

Zadanie 19. (1 pkt)
Proste $kx - y - 1 = 0$ i $2x + y + \frac{1}{2} = 0$ nie mają punktów wspólnych dla:

A. $k = -2$, **B.** $k = -\frac{1}{2}$, **C.** $k = 2$, **D.** $k = \frac{1}{2}$.

Zadanie 20. (1 pkt)
Jeśli $a = \log_6 2$ i $b = \log_6 3$, to suma $a + b$ jest równa:

A. $\log_6 5$, **B.** 6, **C.** 5, **D.** 1.

Zadanie 21. (1 pkt)
Ile jest wszystkich parzystych liczb czterocyfrowych, w których zapisie występują jedynie cyfry: 1, 2 i 3?

A. 27 **B.** 54 **C.** 64 **D.** 81

Zadanie 22. (1 pkt)
Jeśli para liczb (x, y) spełnia układ równań:

$$\begin{cases} 2x - y = -7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

to iloczyn $x \cdot y$ jest równy:

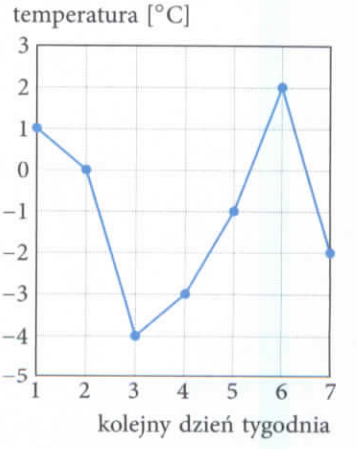
A. -6, **B.** -3, **C.** 3, **D.** 6.

Zadanie 23. (1 pkt)
Z urny zawierającej 5 kul białych, 3 czarne i 2 czerwone losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula nie będzie czerwona, wynosi:

A. $\frac{1}{5}$, **B.** $\frac{2}{5}$, **C.** $\frac{3}{5}$, **D.** $\frac{4}{5}$.

Zadanie 24. (1 pkt)
Kuba notował temperaturę powietrza o godz. 12.00 w kolejnych dniach pierwszego tygodnia ferii. Otrzymane dane przedstawił za pomocą wykresu. Średnia arytmetyczna zanotowanych przez Kubę temperatur powietrza jest równa:

A. $-2°C$, **C.** $1°C$,
B. $-1°C$, **D.** $2°C$.



Zadanie 25. (1 pkt)
Wykres funkcji $y = 2^x + 1$ jest symetryczny względem osi OY do wykresu funkcji:

A. $y = 2^x - 1$, **C.** $y = -2^x - 1$,
B. $y = -2^x + 1$, **D.** $y = 2^{-x} + 1$.

Zadania otwarte

Zadanie 26. (2 pkt)
Na początku sierpnia ceny jabłek i gruszek w osiedlowym sklepie były takie same. W ciągu miesiąca cena gruszek spadła o 38%, a cenę jabłek dwukrotnie obniżono o 20%. Które owoce są tańsze po tych zmianach? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 27. (2 pkt)
Dany jest ciąg $a_n = \frac{n+1}{n}$. Wyznacz wzór ogólny ciągu $b_n = a_{n+1} - a_n$. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

Zadanie 28. (2 pkt)
W okrąg o promieniu $2\sqrt{5}$ wpisano trójkąt prostokątny, którego jedna przyprostokątna jest dwa razy dłuższa od drugiej. Oblicz długość krótszej przyprostokątnej.

Zadanie 29. (2 pkt)
Uzasadnij, że prosta $y = x + 2$ nie jest prostopadła do prostej przechodzącej przez punkty $A(-1,3)$ i $B(-6,7)$.

Zadanie 30. (2 pkt)
Dla jakich wartości współczynnika k funkcja $y = x^2 - kx + 4$ nie ma miejsc zerowych?

Zadanie 31. (5 pkt)
Dany jest ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie równym 1. Suma początkowych dziesięciu wyrazów tego ciągu jest czterokrotnie większa od sumy początkowych pięciu wyrazów. Sprawdź, czy suma początkowych stu wyrazów tego ciągu jest większa od $10 \cdot 2^{10}$.

Zadanie 32. (4 pkt)
Dany jest trójkąt prostokątny o wierzchołkach: $A(8,3)$, $B(0,4)$, $C(2,0)$. Oblicz $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, jeżeli $\alpha = |\sphericalangle CAB|$ oraz $\beta = |\sphericalangle ABC|$.

Zadanie 33. (6 pkt)
Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 54 cm. Wiedząc, że krawędź boczna tego ostrosłupa jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy, oblicz jego objętość.

Zestaw 3

odpowiedzi i modele – s. 226

Zadania zamknięte

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)

Buty, które kosztowały 180 zł, przeceniono na 144 zł. Obniżka wynosiła:

A. 80%, **B.** 36%, **C.** 25%, **D.** 20%.

Zadanie 2. (1 pkt)

Jeśli $a=\frac{1}{2}$, $b=3+\sqrt{2}$ i $c=4-\sqrt{2}$, to $\frac{b-2c}{a}$ jest równe:

A. $-10-2\sqrt{2}$, **B.** $-10+6\sqrt{2}$, **C.** $-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, **D.** $-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

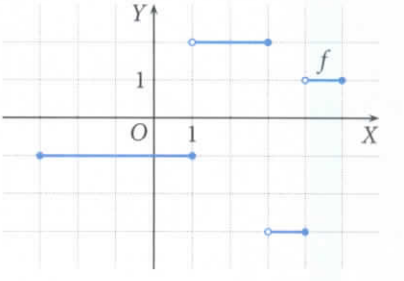
Zadanie 3. (1 pkt)

Liczbę $\sqrt{3\sqrt{3}}$ można zapisać w postaci:

A. $3^{\frac{1}{4}}$, **B.** $3^{\frac{2}{3}}$, **C.** $3^{\frac{3}{4}}$, **D.** $3^{\frac{5}{4}}$.

Zadanie 4. (1 pkt)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f\colon \langle -3;5\rangle \to \mathbf{R}$.
Dla $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ funkcja ta przyjmuje wartość:



A. -3, **B.** -1, **C.** 1, **D.** 2.

Zadanie 5. (1 pkt)

Jeśli $\frac{3\cdot 10^4+6\cdot 10^3}{(1{,}5\cdot 10^3)\cdot(4\cdot 10^2)}=\frac{n}{50}$, to:

A. $n=1$, **B.** $n=3$, **C.** $n=6$, **D.** $n=9$.

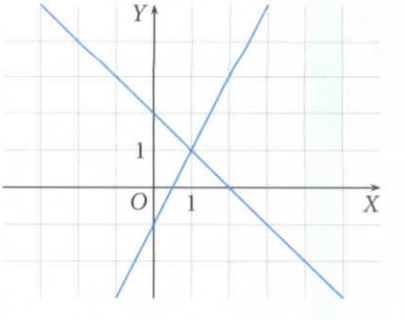
Zadanie 6. (1 pkt)

Jeśli dziedziną funkcji $f(x)=-x+2$ jest przedział $(0;1\rangle$, to jej zbiorem wartości jest przedział:

A. $\langle 0;1)$, **B.** $(0;1\rangle$, **C.** $(1;2\rangle$, **D.** $\langle 1;2)$.

Zadanie 7. (1 pkt)

Na rysunku obok przedstawiono interpretację geometryczną układu równań:



A. $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x-y=2 \\ -2x+y=-1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x-y=-2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

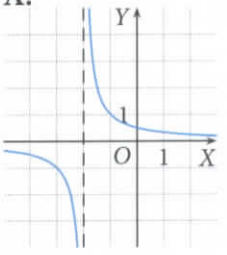
Zadanie 8. (1 pkt)
Dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ jest zbiór:

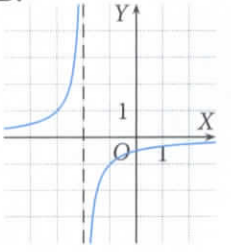
A. $\langle 0; \infty)$, **B.** $\langle 1; \infty)$, **C.** $\langle 0; 1\rangle$, **D.** $(-\infty; 0\rangle \cup \langle 1; \infty)$.

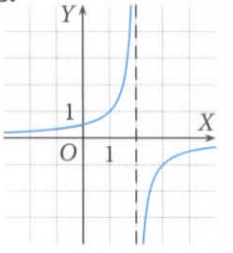
Zadanie 9. (1 pkt)
Równanie $(x+2)^2 = 16$:

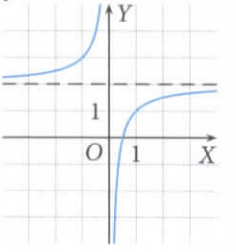
A. nie ma rozwiązań,
B. ma dokładnie 1 rozwiązanie,
C. ma dokładnie 2 rozwiązania,
D. ma dokładnie 4 rozwiązania.

Zadanie 10. (1 pkt)
Jeżeli $f(x) = -\frac{1}{x}$, to wykres funkcji $g(x) = f(x+2)$ przedstawiono na rysunku:

A.


B.


C.


D.


Zadanie 11. (1 pkt)
Rozwiązaniem równania $\frac{(x^2-4)(x^2-16)}{x-4} = 0$ nie jest liczba:

A. 4, **B.** 2, **C.** -2, **D.** -4.

Zadanie 12. (1 pkt)
Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość równą 6 cm i tworzy z krawędzią podstawy kąt 60°. Pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa jest równe:

A. $9\sqrt{3}$ cm^2, **B.** $18\sqrt{3}$ cm^2, **C.** $24\sqrt{3}$ cm^2, **D.** $36\sqrt{3}$ cm^2.

Zadanie 13. (1 pkt)
Jeżeli α jest kątem ostrym i $\sin\alpha = \cos 80°$, to:

A. $\alpha = 80°$, **B.** $\alpha = 40°$, **C.** $\alpha = 20°$, **D.** $\alpha = 10°$.

Zadanie 14. (1 pkt)
Prosta o równaniu $y = -\frac{3}{4}x + 3$ ogranicza, wraz z osiami układu współrzędnych, trójkąt o polu równym:

A. 4, **B.** 6, **C.** 7, **D.** 12.

Zadanie 15. (1 pkt)
Suma $2 + 4 + 6 + \ldots + 102$ jest równa:

A. 2601, **B.** 2580, **C.** 2652, **D.** 2600.

Zadanie 16. (1 pkt)
W ciągu geometrycznym (a_n) o wyrazach dodatnich $a_2 = 2$ oraz $a_4 = \frac{32}{9}$.

A. $a_3 = \frac{8}{3}$ **B.** $a_3 = \frac{8}{9}$ **C.** $a_3 = \frac{16}{9}$ **D.** $a_3 = \frac{64}{9}$

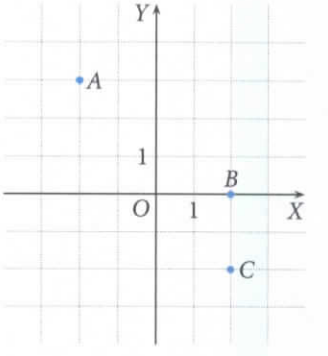
Zadanie 17. (1 pkt)
Dane są dwa prostokąty podobne o polach P_1 i P_2. Jeżeli $\frac{P_1}{P_2} = 2$ i obwód większego prostokąta jest równy 24 cm, to obwód mniejszego prostokąta jest równy:

A. 6 cm, **B.** $6\sqrt{2}$ cm, **C.** 12 cm, **D.** $12\sqrt{2}$ cm.

Zadanie 18. (1 pkt)
Punkt P należy do odcinka o końcach $A(-20, 20)$ i $B(60, 60)$. Jeśli $4|BP| = |AB|$, to punkt P ma współrzędne:

A. $(20, 40)$, **B.** $(30, 45)$, **C.** $(35, 45)$, **D.** $(40, 50)$.

Zadanie 19. (1 pkt)
Punkty: A, B, C są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$ (rysunek obok). Obwód tego równoległoboku jest równy:

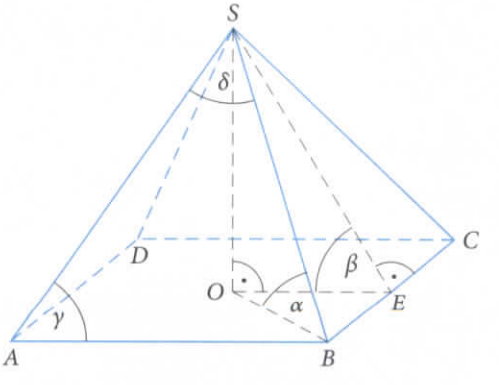


A. 10, **B.** 12, **C.** 14, **D.** 16.

Zadanie 20. (1 pkt)
Krótsza przekątna rombu ma długość 2 cm, a jeden z jego kątów wewnętrznych jest dwukrotnie większy od drugiego. Pole tego rombu jest równe:

A. $\sqrt{3}$ cm^2, **B.** 2 cm^2, **C.** $2\sqrt{3}$ cm^2, **D.** 4 cm^2.

Zadanie 21. (1 pkt)
W ostrosłupie przedstawionym na rysunku kąt między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy to kąt:



A. α, **B.** β, **C.** γ, **D.** δ.

Zadanie 22. (1 pkt)
Przekątna prostopadłościanu jest nachylona do płaszczyzny podstawy, będącej kwadratem o boku 2, pod kątem 45°. Objętość tego prostopadłościanu jest równa:

A. $8\sqrt{2}$, **B.** 8, **C.** $4\sqrt{2}$, **D.** 4.

Zadanie 23. (1 pkt)
Niech $A, B \subset \Omega$. Jeśli $P(A) = P(B) = 0{,}6$ i $P(A \cap B) = 0{,}2$, to $P(A \setminus B)$ jest równe:

A. 0, **B.** 1, **C.** 0,8, **D.** 0,4.

Zadanie 24. (1 pkt)
Punkt $P(x, y)$ należy do wykresu funkcji $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$. Współrzędna y punktu P jest wymierna:

A. dla $x = -2$, **B.** dla $x = -1$, **C.** dla $x = 1$, **D.** dla $x = 3$.

Zadanie 25. (1 pkt)
Równość $\log_2 80 = n + \log_2 10$ jest prawdziwa dla:

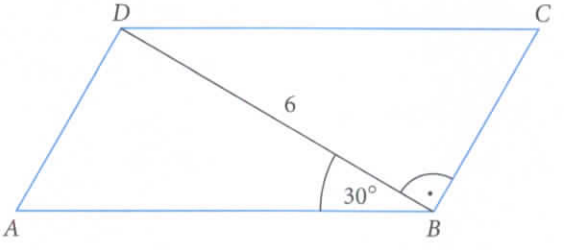
A. $n = 3$, **B.** $n = 8$, **C.** $n = 10$, **D.** $n = 80$.

Zadania otwarte

Zadanie 26. (2 pkt)
Oblicz $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli α jest kątem ostrym, a $\sin^2\alpha = 0{,}64$.

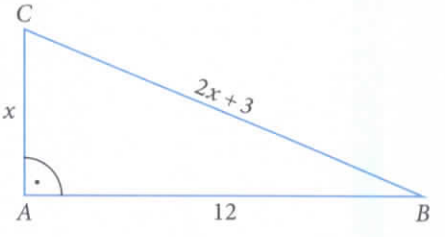
Zadanie 27. (2 pkt)
Dane są zbiory $A = (-5; 1)$ oraz B, do którego należą wszystkie liczby x spełniające nierówność $x(x+2) \leqslant 2(x+2)$. Podaj wszystkie liczby całkowite należące jednocześnie do obu zbiorów.

Zadanie 28. (2 pkt)
Oblicz pole równoległoboku $ABCD$.



Zadanie 29. (2 pkt)
Rozwiąż nierówność $m - 8x \geqslant 0$, jeżeli $m = \log_{\sqrt{3}} 9$.

Zadanie 30. (4 pkt)
Wyznacz x, a następnie oblicz pole trójkąta prostokątnego ABC oraz wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną (rysunek obok).



Zadanie 31. (4 pkt)
Na pewnej loterii jest 120 losów, a prawdopodobieństwo wygranej, jeżeli kupujemy pierwszy los, jest równe 0,05. Ile trzeba dołożyć losów wygrywających, aby prawdopodobieństwo wygranej przy zakupie pierwszego losu wzrosło do 0,24?

Zadanie 32. (4 pkt)
Naczynie w kształcie walca o średnicy podstawy równej 18 cm i wysokości 16 cm napełniono w trzech czwartych wodą. Następnie włożono do niego metalową sześcienną kostkę o krawędzi długości 10 cm. Sprawdź, czy woda wylała się z naczynia. W obliczeniach przyjmij $\pi = 3{,}14$.

Zadanie 33. (5 pkt)
a) Nie korzystając z kalkulatora, wykaż, że:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 > \sqrt{2}.$$

b) Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność:

$$(a+b)^2 \geqslant 4ab.$$

Zestaw 4

odpowiedzi i modele – s. 227

Zadania zamknięte

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Liczba x stanowi 25% liczby y. Zatem liczba y stanowi:

A. 25% liczby x, **B.** 40% liczby x, **C.** 50% liczby x, **D.** 400% liczby x.

Zadanie 2. (1 pkt)
Wyrażenie $(5^5 : 5^2) : (5^3 : 5^2)$ jest równe:

A. 125, **B.** 25, **C.** 5, **D.** $\frac{1}{5}$.

Zadanie 3. (1 pkt)
Jeśli $a = \sqrt{2} - 1$ i $b = \sqrt{2} + 1$, to iloraz $\frac{a}{b}$ jest równy:

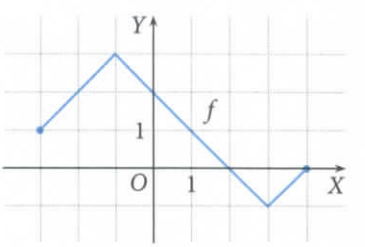
A. 1, **B.** 3, **C.** $3 + 2\sqrt{2}$, **D.** $3 - 2\sqrt{2}$.

Zadanie 4. (1 pkt)
Przedział zaznaczony na osi liczbowej:

zawiera się w zbiorze rozwiązań nierówności:

A. $x^2 \geqslant \frac{1}{4}$, **B.** $x^2 \geqslant 9$, **C.** $x^2 \geqslant 16$, **D.** $x^2 \geqslant 49$.

Zadanie 5. (1 pkt)
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f\colon\langle -3; 4\rangle \to \mathbf{R}$. Jeśli $g(x) = f(-x)$, to zbiorem wartości funkcji g jest przedział:



A. $\langle -3; 1\rangle$, **C.** $\langle -3; 4\rangle$,
B. $\langle -1; 3\rangle$, **D.** $\langle -4; 3\rangle$.

Zadanie 6. (1 pkt)
Wybierz równanie prostej prostopadłej do prostej $4x + y - 5 = 0$.

A. $y = \frac{1}{4}x - 5$ **B.** $y = -\frac{1}{4}x$ **C.** $y = -4x$ **D.** $y = 4x + 5$

Zadanie 7. (1 pkt)
Liczba 2 jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = (m + 4)x + 6$ dla:

A. $m = 6$, **B.** $m = -1$, **C.** $m = -4$, **D.** $m = -7$.

Zadanie 8. (1 pkt)
Funkcja $f(x) = 2x^2 - 6$ przyjmuje wartości ujemne dla wszystkich:

A. $x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$, **B.** $x \in (-3; 3)$, **C.** $x \in (-\infty; \sqrt{3})$, **D.** $x \in (-\infty; 3)$.

Zadanie 9. (1 pkt)
Parabola $y = -2(x-3)^2 + 4$ ma dwa punkty wspólne z prostą o równaniu:
A. $y = 0$, **B.** $y = 4$, **C.** $y = 6$, **D.** $y = 10$.

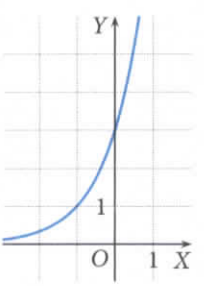
Zadanie 10. (1 pkt)
Najmniejszym pierwiastkiem równania $x^3 + 2x = 3x^2$ jest liczba:
A. -2, **B.** -1, **C.** 0, **D.** 1.

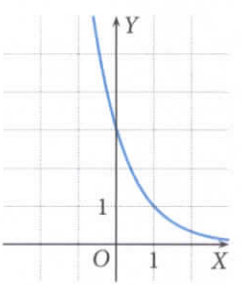
Zadanie 11. (1 pkt)
Jeśli punkt $A\left(\frac{a}{2}, -1\right)$ należy do wykresu funkcji $y = \frac{1}{2x}$, to:
A. $a = -1$, **B.** $a = -\frac{1}{2}$, **C.** $a = \frac{1}{2}$, **D.** $a = 1$.

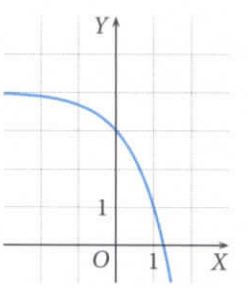
Zadanie 12. (1 pkt)
Jeśli kąt α jest kątem ostrym oraz $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, to:
A. $\alpha = 30°$, **B.** $60° < \alpha < 90°$, **C.** $0° < \alpha < 30°$, **D.** $\alpha = 60°$.

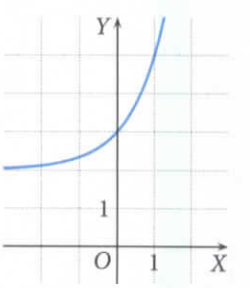
Zadanie 13. (1 pkt)
Liczba $\log_5 250$ jest równa:
A. $1 + \log_5 25$, **B.** $1 + \log_5 10$, **C.** $2 + \log_5 10$, **D.** $2 + \log_5 50$.

Zadanie 14. (1 pkt)
Wykres funkcji $f(x) = 3 \cdot 3^{-x}$ przedstawiono na rysunku:

A.


B.


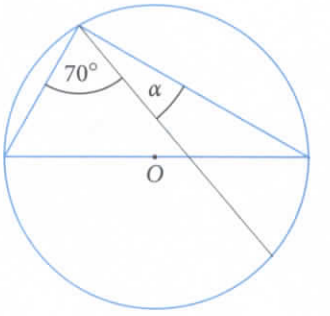
C.


D.


Zadanie 15. (1 pkt)
Jeśli ciąg (a_n) dany jest wzorem ogólnym $a_n = (-1)^n \cdot n$, to różnica $a_5 - 4a_{10}$ jest równa:
A. 45, **B.** 35, **C.** 15, **D.** -45.

Zadanie 16. (1 pkt)
Wskaż ciąg geometryczny o ilorazie -3.
A. $a_n = -3 \cdot 2^n$ **B.** $a_n = 3^{-n}$ **C.** $a_n = 2 \cdot (-3)^n$ **D.** $a_n = -3^n$

Zadanie 17. (1 pkt)
Punkt O jest środkiem okręgu (rysunek obok). Kąt α ma miarę równą:



A. $20°$,
B. $30°$,
C. $35°$,
D. $40°$.

Zadanie 18. (1 pkt)
Dwa boki trójkąta mają długości 8 i 10, a sinus kąta zawartego między nimi wynosi $\frac{3}{4}$. Pole tego trójkąta jest równe:

A. 15,
B. 30,
C. 45,
D. 60.

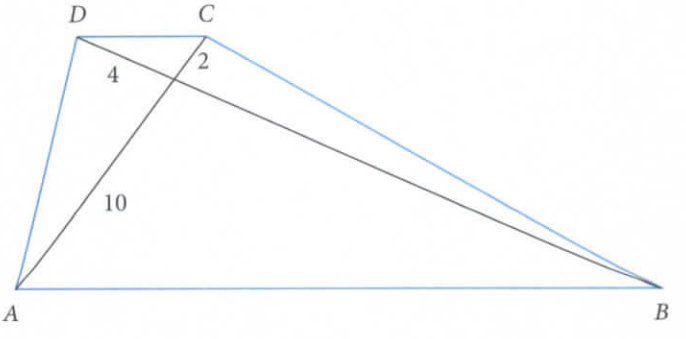
Zadanie 19. (1 pkt)
Punkt $A(4,1)$ należy do okręgu o środku $S(-3,0)$. Średnica tego okręgu jest równa:

A. 8,
B. $2\sqrt{2}$,
C. $5\sqrt{2}$,
D. $10\sqrt{2}$.

Zadanie 20. (1 pkt)
Jeśli w graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym o objętości $96\sqrt{3}$ wszystkie krawędzie mają tę samą długość równą a, to:

A. $a = 4\sqrt[3]{6}$,
B. $a = 6$,
C. $a = 4$,
D. $a = \sqrt[3]{96\sqrt{3}}$.

Zadanie 21. (1 pkt)
Długość przekątnej DB trapezu $ABCD$ przedstawionego na rysunku jest równa:



A. 5,
B. 9,
C. 20,
D. 24.

Zadanie 22. (1 pkt)
Kwadrat o boku długości 4 obracamy wokół przekątnej. Pole powierzchni otrzymanej w ten sposób bryły jest równe:

A. $4\pi(1+4\sqrt{2})$,
B. $8\pi(1+2\sqrt{2})$,
C. $8\sqrt{2}\pi$,
D. $16\sqrt{2}\pi$.

Zadanie 23. (1 pkt)
Wszystkich nieparzystych liczb czterocyfrowych, w których zapisie występują wszystkie cyfry liczby 6521, jest:

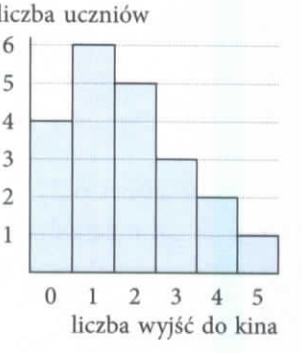
A. 12,
B. 24,
C. 48,
D. 60.

Zadanie 24. (1 pkt)
W urnie zawierającej kule białe i czarne jest razem 30 kul. Losujemy 1 kulę. Jeśli prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe $\frac{2}{5}$, to kul białych w tej urnie jest:

A. 10,
B. 12,
C. 15,
D. 20.

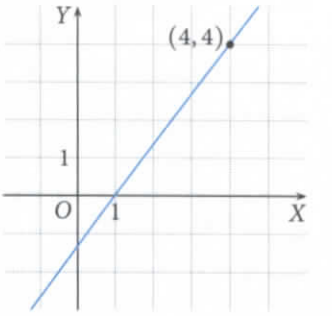
Zadanie 25. (1 pkt)
W grupie 21 uczniów pewnej klasy przeprowadzono sondaż. Każdy z uczniów odpowiedział na pytanie: „Ile razy w ciągu ostatniego miesiąca byłaś/byłeś w kinie?". Wyniki sondażu przedstawiono na diagramie obok. Mediana zebranych danych wynosi:

A. 1,
B. 1,5,
C. 2,
D. 2,5.



Zadania otwarte

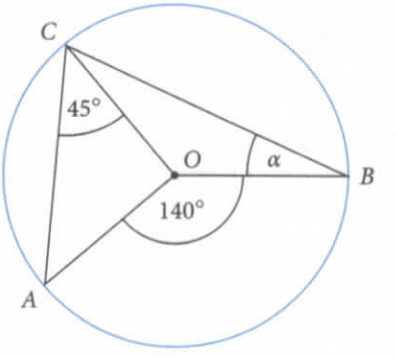
Zadanie 26. (2 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono prostą będącą wykresem funkcji $y = a(x-1)$. Wyznacz współrzędne punktu, w którym ta prosta przecina oś OY.



Zadanie 27. (2 pkt)
Funkcja $f(x) = -x^2 + bx + 4$ przyjmuje największą wartość dla $x = 2$. Oblicz $f(1)$.

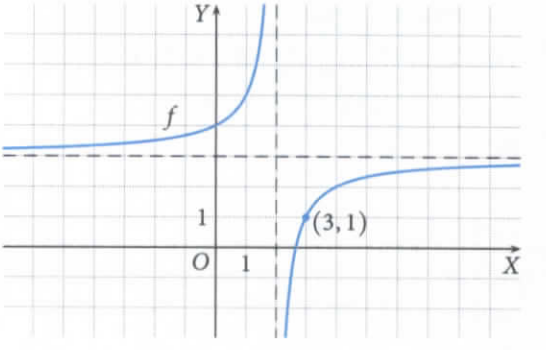
Zadanie 28. (2 pkt)
Rozwiąż równanie $\frac{-6x}{x^2+9} = 1$.

Zadanie 29. (2 pkt)
Dany jest okrąg o środku O (rysunek obok). Oblicz miarę kąta α.



Zadanie 30. (2 pkt)
Punkt $S(a, b)$ jest środkiem odcinka o końcach $A(-4, 4)$, $B(b, 8)$. Wyznacz współrzędne a i b.

Zadanie 31. (4 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x-2} + 3$.



a) Oblicz a.

b) Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 1.

c) Oblicz miejsce zerowe funkcji f.

Zadanie 32. (5 pkt)
Na okręgu o promieniu 2 opisano trójkąt prostokątny o jednej z przyprostokątnych długości 12. Oblicz obwód tego trójkąta.

Zadanie 33. (6 pkt)
Przekrój stożka płaszczyzną zawierającą jego oś jest trójkątem równoramiennym o kącie między ramionami $120°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka, wiedząc, że jego objętość jest równa 27π cm^3.

Zestaw 5

odpowiedzi i modele – s. 229

Zadania zamknięte

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
20% liczby 15 jest równe:

A. 30, **B.** 3, **C.** 4,5, **D.** 45.

Zadanie 2. (1 pkt)
Jeśli $a = \sqrt[4]{27}$ i $b = \sqrt[4]{3}$, to iloczyn $a \cdot b$ jest równy:

A. 3, **B.** 9, **C.** $\sqrt[8]{81}$, **D.** $9\sqrt[4]{3}$.

Zadanie 3. (1 pkt)
Funkcja $f(x) = (m-3)x - 1$ nie ma miejsc zerowych dla:

A. $m < 3$, **B.** $m = 3$, **C.** $m > 3$, **D.** $m \neq 3$.

Zadanie 4. (1 pkt)
Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $-2(x-1)(x+3) > 0$.

A. $(-\infty; -3) \cup (1; \infty)$ **C.** $(-\infty; -1) \cup (3; \infty)$
B. $(-1; 3)$ **D.** $(-3; 1)$

Zadanie 5. (1 pkt)
Jeśli trójkąt o bokach długości: 9, 12 i 16 jest podobny do trójkąta o bokach długości: a, 9 i 12 (gdzie $a < 9$), to:

A. $a = 6$, **B.** $a = 6\frac{2}{3}$, **C.** $a = 6\frac{3}{4}$, **D.** $a = 8$.

Zadanie 6. (1 pkt)
Dwa rozwiązania nieujemne ma równanie:

A. $x^2 - x = 0$, **B.** $x^2 + x = 0$, **C.** $x^2 - 4 = 0$, **D.** $x^2 + 4 = 0$.

Zadanie 7. (1 pkt)
Jeśli do wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x+1} - 2$ należy punkt $P(2, -1)$, to:

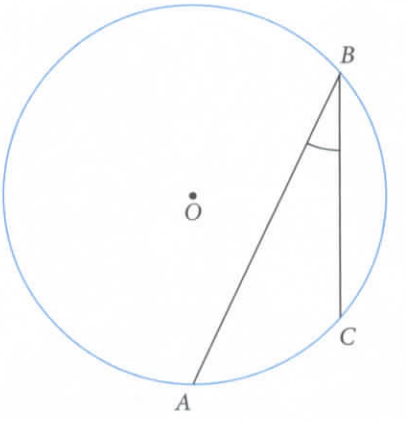
A. $a = -1$, **B.** $a = 1$, **C.** $a = 2$, **D.** $a = 3$.

Zadanie 8. (1 pkt)
Jeśli punkt $A(-3, 7)$ należy do okręgu o środku $O(3, -1)$, to promień tego okręgu jest równy:

A. 6, **B.** 8, **C.** $6\sqrt{2}$, **D.** 10.

Zadanie 9. (1 pkt)
Punkty: A, B, C leżą na okręgu o środku O (rysunek obok). Jeśli kąt ABC ma miarę $25°$, to miara kąta ACO jest równa:

A. $50°$, **B.** $60°$, **C.** $65°$, **D.** $80°$.

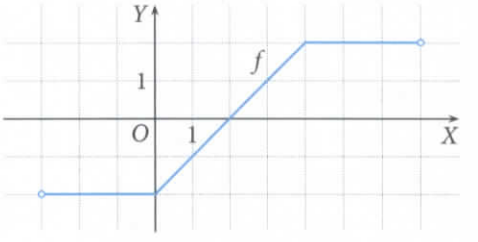


Zadanie 10. (1 pkt)
Przyprostokątne trójkąta prostokątnego są równe 3 i 4. Najkrótsza wysokość w tym trójkącie jest równa:

A. 2,4, **B.** 2,5, **C.** 3, **D.** 3,5.

Zadanie 11. (1 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f:(-3;7) \to \mathbf{R}$. Nierówność $x \cdot f(x) < 0$ jest spełniona przez każdą liczbę:

A. $x \in (-3;0)$, **C.** $x \in (-3;2)$,
B. $x \in (0;2)$, **D.** $x \in (0;7)$.



Zadanie 12. (1 pkt)
Wybierz równanie prostej równoległej do prostej $3x + 2y - 4 = 0$.

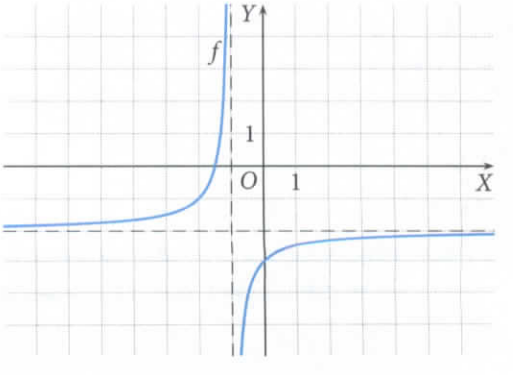
A. $y = -\frac{3}{2}x + 5$ **B.** $y = \frac{3}{2}x - 4$ **C.** $y = -\frac{2}{3}x + 4$ **D.** $y = \frac{2}{3}x + 5$

Zadanie 13. (1 pkt)
W kwadrat o polu 64 wpisano koło. Jego pole jest równe:

A. 64π, **B.** 32π, **C.** 16π, **D.** 8π.

Zadanie 14. (1 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{x+1} - 2$. Do zbioru A należą wszystkie punkty wykresu tej funkcji, których obie współrzędne są całkowite. Zatem do zbioru A:

A. należy 1 punkt,
B. należą 2 punkty,
C. należą 3 punkty,
D. należą 4 punkty.

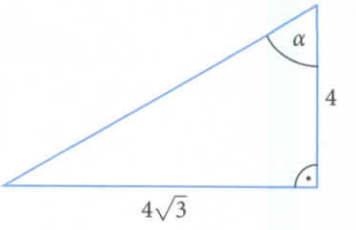


Zadanie 15. (1 pkt)
Promień podstawy walca wynosi 2, a jego pole powierzchni całkowitej jest równe 20π. Wysokość tego walca jest równa:

A. 2, **B.** 3, **C.** 4, **D.** 5.

Zadanie 16. (1 pkt)

Dla trójkąta przedstawionego na rysunku obok:



A. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
B. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
C. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
D. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zadanie 17. (1 pkt)

Okręgi o promieniach 3 cm i 8 cm są styczne wewnętrznie. Najmniejsza możliwa odległość między środkiem większego okręgu i punktem należącym do mniejszego okręgu jest równa:

A. 2 cm, **B.** 3 cm, **C.** 4 cm, **D.** 5 cm.

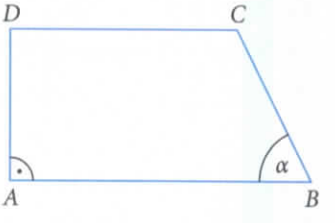
Zadanie 18. (1 pkt)

Dwa boki trójkąta mają długości 2 i 4, a kąt między nimi zawarty ma miarę 60°. Pole tego trójkąta jest równe:

A. 2, **B.** $2\sqrt{3}$, **C.** 4, **D.** $4\sqrt{3}$.

Zadanie 19. (1 pkt)

Wysokość trapezu prostokątnego $ABCD$ przedstawionego na rysunku obok jest dwa razy większa od różnicy długości jego podstaw. Tangens kąta α jest równy:



A. $\frac{1}{2}$,
B. $\sqrt{2}$,
C. $\sqrt{3}$,
D. 2.

Zadanie 20. (1 pkt)

Jeśli drugi wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 7, a piąty 25, to pierwszy wyraz tego ciągu jest równy:

A. 0, **B.** 1, **C.** 2, **D.** 3.

Zadanie 21. (1 pkt)

Ze zbiorów $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{4, 5, 6\}$ losujemy po jednej liczbie. Prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy dwie liczby parzyste, jest równe:

A. $\frac{1}{4}$, **B.** $\frac{1}{3}$, **C.** $\frac{1}{2}$, **D.** $\frac{2}{9}$.

Zadanie 22. (1 pkt)

Uczeń otrzymał z sześciu sprawdzianów z biologii następujące oceny: 3, 2, x, 4, 2, 5. Jeśli średnia arytmetyczna tych ocen jest równa 3,5, to:

A. $x = 2$, **B.** $x = 3$, **C.** $x = 4$, **D.** $x = 5$.

Zadanie 23. (1 pkt)
Niech $A, B \subset \Omega$. Jeśli $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ oraz zdarzenia A i B się wykluczają, to:

A. $P(A \setminus B) = \frac{1}{2}$,
B. $P(A \setminus B) = \frac{1}{3}$,
C. $P(A \setminus B) = \frac{1}{6}$,
D. $P(A \setminus B) = \frac{5}{6}$.

Zadanie 24. (1 pkt)
Jeśli do wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x + a$ należy punkt $P(-2, 3)$, to:

A. $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$,
B. $a = 1$,
C. $a = \sqrt{2}$,
D. $a = 2$.

Zadanie 25. (1 pkt)
Która z poniższych liczb jest równa 2?

A. $\log 0{,}01$
B. $\log_{0,1} 100$
C. $\log_{0,1} 0{,}01$
D. $\log_{100} 10$

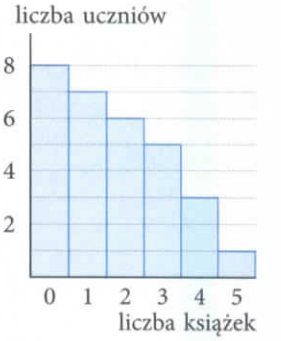
Zadania otwarte

Zadanie 26. (2 pkt)
Wykres funkcji $f(x)=\frac{1}{4}x^2+bx-3$ jest symetryczny względem prostej $x=1$. Oblicz b i wyznacz najmniejszą wartość funkcji f.

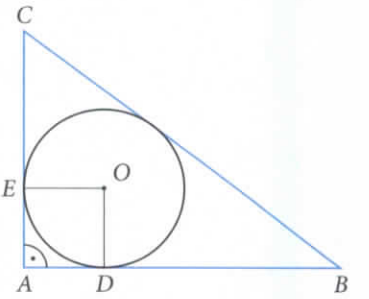
Zadanie 27. (2 pkt)
Uprość wyrażenie $\frac{x-1}{1-x^2}$, gdzie $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$, i oblicz jego wartość dla $x=0,(3)$.

Zadanie 28. (2 pkt)
Oblicz pierwszy i drugi wyraz ciągu $a_n=\log_2\frac{7n-6}{2n}$.

Zadanie 29. (2 pkt)
Uczniom klasy Ia pewnej szkoły zadano pytanie: „Ile książek przeczytałaś/przeczytałeś w poprzednim miesiącu?". Wyniki ankiety przedstawiono na diagramie obok. Oblicz średnią arytmetyczną i podaj medianę zebranych danych.



Zadanie 30. (2 pkt)
Oblicz promień okręgu o środku O wpisanego w trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok). Przeciwprostokątna trójkąta ma długość 5, $|BD|=3$, $|CE|=2$.



Zadanie 31. (5 pkt)
Uzasadnij, że trójkąt o wierzchołkach $A(0,3)$, $B(4,1)$ i $C(6,5)$ jest trójkątem równoramiennym. Wyznacz równanie osi symetrii tego trójkąta.

Zadanie 32. (5 pkt)
Dany jest trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości 13 cm i jednej z przyprostokątnych długości 5 cm. Trójkąt ten podzielono prostą prostopadłą do dłuższej przyprostokątnej i przechodzącą przez jej środek. Oblicz pola figur powstałych w wyniku podziału trójkąta tą prostą.

Zadanie 33. (5 pkt)
Podaj, które liczby spełniające równanie $x^3-x\cdot a^2=0$ należą do zbioru rozwiązań nierówności $(x+1)(x+2a)<0$, jeżeli $a=\log_{\frac{1}{2}}6-\log_{\frac{1}{2}}3$.

Zestaw 6

odpowiedzi i modele – s. 230

Zadania zamknięte

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Liczba $(6 \cdot 10^8) : (15 \cdot 10^{-3})$ jest równa:

A. $9 \cdot 10^6$, **B.** $0{,}4 \cdot 10^5$, **C.** $4 \cdot 10^{10}$, **D.** $0{,}3 \cdot 10^{11}$.

Zadanie 2. (1 pkt)
Liczba $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$ jest:

A. większa od 3, **B.** wymierna, **C.** całkowita, **D.** ujemna.

Zadanie 3. (1 pkt)
Jeżeli liczba x jest o 70% mniejsza od liczby y, to:

A. $x = 0{,}7y$, **B.** $x = y - 0{,}7$, **C.** $x = \frac{1}{3}y$, **D.** $x = 0{,}3y$.

Zadanie 4. (1 pkt)
Wyrażenie $|6 + 3\sqrt{5}| - |6 - 3\sqrt{5}|$ ma wartość:

A. 0, **B.** $6\sqrt{5}$, **C.** 12, **D.** $12 + 6\sqrt{5}$.

Zadanie 5. (1 pkt)
Niech $A = \langle 4; 6\rangle$ i $B = (6; 8\rangle$. Liczba 6 nie należy do zbioru:

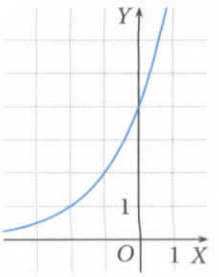
A. $A \cup B$, **B.** $A \setminus B$, **C.** A, **D.** $A \cap B$.

Zadanie 6. (1 pkt)
Jeżeli $\log_2 x = 1 + 2\log_2 6 - \log_2 9$, to:

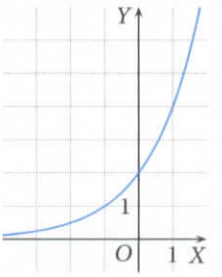
A. $x = 8$, **B.** $x = 3$, **C.** $x = 25$, **D.** $x = 6$.

Zadanie 7. (1 pkt)
Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^{-x}$ przedstawiono na rysunku:

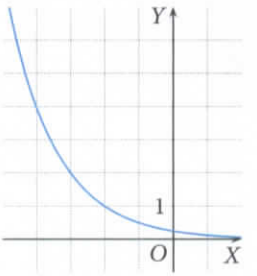
A.



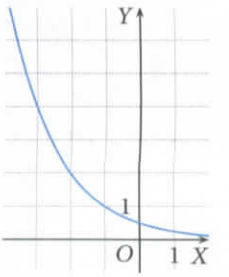
B.



C.



D.



Zadanie 8. (1 pkt)
Jeżeli funkcja $f(x) = (3-m)x + 1$ jest stała, to:

A. $m = 0$, **B.** $m = 3$, **C.** $m = -3$, **D.** $m = 1$.

Zadanie 9. (1 pkt)
Jeżeli $\sqrt{5}x = 1 - 2x$, to:

A. $x = \sqrt{5} + 2$, **B.** $x = \frac{1}{2}$, **C.** $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$, **D.** $x = \sqrt{5} - 2$.

Zadanie 10. (1 pkt)
Zbiorem wartości funkcji $f(x) = -3(x-1)^2 + 2$ jest:

A. $(-\infty; 2\rangle$, **B.** $\langle 2; \infty)$, **C.** $\langle 1; \infty)$, **D.** $(-\infty; -2\rangle$.

Zadanie 11. (1 pkt)
Do zbioru rozwiązań nierówności $9 - x^2 > 0$:

A. należy 10 liczb całkowitych,
B. należy 7 liczb całkowitych,
C. należy 5 liczb całkowitych,
D. należą 3 liczby całkowite.

Zadanie 12. (1 pkt)
Jeżeli $\frac{6x-2}{2+3x} = \frac{4}{3}$, to:

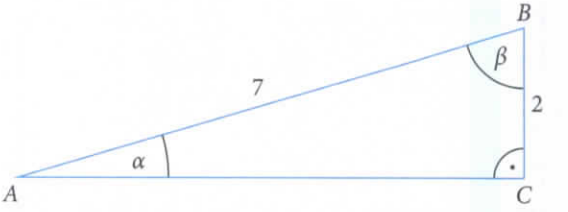
A. $x = \frac{1}{3}$, **B.** $x = \frac{3}{7}$, **C.** $x = 3$, **D.** $x = \frac{7}{3}$.

Zadanie 13. (1 pkt)
Wyrażenie $x^2 + y^2$ można zapisać w postaci:

A. $(x-y)(x+y)$,
B. $(x-y)^2 + 2xy$,
C. $(x+y)^2$,
D. $2xy - (x+y)^2$.

Zadanie 14. (1 pkt)
W trójkącie prostokątnym ABC (rysunek obok) suma $\sin^2\alpha + \cos^2\beta$ jest równa:

A. $\frac{8}{49}$, **C.** 1,
B. $\frac{3\sqrt{5}+2}{7}$, **D.** $\frac{3\sqrt{5}+4}{49}$.



Zadanie 15. (1 pkt)
Siódmy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 16, a różnica ciągu wynosi 2. Trzecim wyrazem tego ciągu jest liczba:

A. 6, **B.** 8, **C.** 10, **D.** 24.

Zadanie 16. (1 pkt)
Ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie równym 5 i ilorazie $q = -2$ jest:

A. $a_n = -5 \cdot 2^n$,
B. $a_n = -10^{n-1}$,
C. $a_n = 5(-2)^{n-1}$,
D. $a_n = 2 \cdot (-5)^{n-1}$.

Zadanie 17. (1 pkt)
Który z podanych punktów jest najbardziej oddalony od początku układu współrzędnych?

A. $(-5,-12)$ **B.** $(-9,9)$ **C.** $(10,8)$ **D.** $(11,-6)$

Zadanie 18. (1 pkt)
Punkty $A(-1,3)$ i $C(2,1)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Pole tego kwadratu jest równe:

A. 13, **B.** 2,5, **C.** 5, **D.** 6,5.

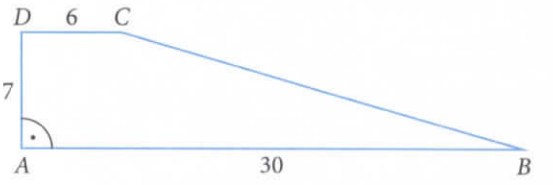
Zadanie 19. (1 pkt)
Do prostej o równaniu $2x + y = 0$ prostopadła jest prosta:

A. $y = 0{,}5x$, **B.** $y = 2x$, **C.** $y = -\frac{1}{2}x$, **D.** $y = x$.

Zadanie 20. (1 pkt)
Miary kątów w trójkącie równoramiennym są równe: 30°, 75° i 75°. Ramię tego trójkąta ma długość 4. Pole trójkąta jest równe:

A. 16, **B.** $16\sqrt{3}$, **C.** 4, **D.** $4\sqrt{3}$.

Zadanie 21. (1 pkt)
Długość ramienia BC trapezu przedstawionego na rysunku jest równa:

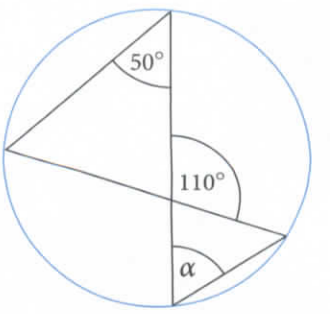


A. $24\sqrt{7}$, **C.** 17,
B. 25, **D.** $\sqrt{373}$.

Zadanie 22. (1 pkt)
Wysokość prostopadłościanu prawidłowego o objętości 36 jest równa 9. Krawędź podstawy tego prostopadłościanu ma długość:

A. 12, **B.** 6, **C.** 4, **D.** 2.

Zadanie 23. (1 pkt)
Kąt α na rysunku obok ma miarę:



A. 50°, **B.** 60°, **C.** 80°, **D.** 110°.

Zadanie 24. (1 pkt)
Rzucamy 4 razy symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że reszka wypadnie trzy lub cztery razy, jest równe:

A. $\frac{7}{16}$, **B.** $\frac{1}{2}$, **C.** $\frac{5}{16}$, **D.** $\frac{1}{4}$.

Zadanie 25. (1 pkt)
Średnia arytmetyczna liczb x, y, z, t jest równa 6. Średnia arytmetyczna liczb x, y, z, t, 11 jest równa:

A. 6,5, **B.** 7, **C.** 8,5, **D.** 9.

Zadania otwarte

Zadanie 26. (2 pkt)
Sinus kąta ostrego α stanowi 80% wartości cosinusa tego kąta. Oblicz $\operatorname{tg}\alpha$.

Zadanie 27. (2 pkt)
Wykaż, że suma trzech kolejnych parzystych liczb naturalnych jest podzielna przez 6.

Zadanie 28. (2 pkt)
Rozwiąż równanie $\left(-\frac{x}{2}+6\right)\left(6+\frac{x}{2}\right)=4-\left(4-\frac{x}{2}\right)^2$.

Zadanie 29. (2 pkt)
Krótsza przekątna rombu ma długość 6 cm, a jeden z jego kątów ma miarę 140°. Oblicz długość drugiej przekątnej. Wynik podaj z dokładnością do części dziesiętnych.

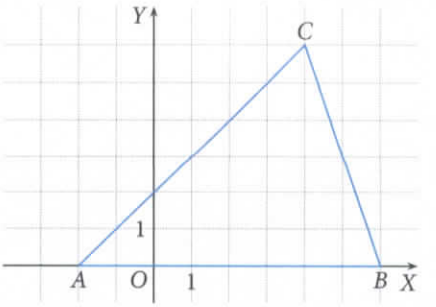
Zadanie 30. (2 pkt)
Rozwiąż nierówność $S-2T\leqslant 0$, jeśli $S=2x^3-3x^2+2$ i $T=x^3-2x^2+x+1$.

Zadanie 31. (2 pkt)
Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą funkcji danej wzorem $f(x)=-\frac{2}{3}x^2+6$ w przedziale $\langle -1;3\rangle$.

Zadanie 32. (4 pkt)
Konrad pożyczył od kolegi 600 zł. Dług spłacał co tydzień w równych ratach bez odsetek. Gdyby wydłużył okres spłaty długu o 3 tygodnie, raty zmalałyby o 10 zł tygodniowo. Oblicz, jak długo Konrad spłacał dług.

Zadanie 33. (5 pkt)
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między jego wysokością a ścianą boczną ma miarę 45°. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupa, jeżeli jego objętość jest równa 4,5.

Zadanie 34. (4 pkt)
Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na trójkącie ABC (rysunek poniżej).



ZESTAW 6

Zestaw 7

odpowiedzi i modele – s. 232

Zadania zamknięte

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Liczba $9 \cdot \sqrt[3]{81}$ jest równa:

A. $3^{\frac{10}{3}}$, **B.** $9^{\frac{5}{2}}$, **C.** 9^5, **D.** 3^3.

Zadanie 2. (1 pkt)
Odwrotnością liczby $\sqrt{2}-1$ jest liczba:

A. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, **B.** $\sqrt{2}+1$, **C.** $1-\sqrt{2}$, **D.** 1.

Zadanie 3. (1 pkt)
Zawartość tłuszczu w mleku obniżono z 3,2% o 1,2 punktu procentowego. O ile procent mniej tłuszczu zawiera odtłuszczone mleko?

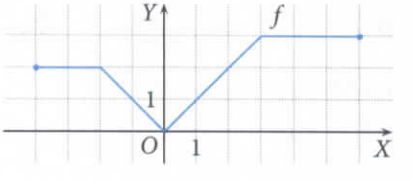
A. 37,5% **B.** 2% **C.** 1,2% **D.** 62,5%

Zadanie 4. (1 pkt)
Jednym z końców odcinka jest punkt $(-1, 2)$. Jeśli długość odcinka jest równa 5, to drugim końcem odcinka może być punkt:

A. $(3, 4)$, **B.** $(-5, 1)$, **C.** $(-4, -2)$, **D.** $(5, 0)$.

Zadanie 5. (1 pkt)
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f\colon \langle -4; 6\rangle \to \mathbf{R}$.
Zbiorem wartości funkcji $g(x) = f(x) - 2$ jest przedział:

A. $\langle 0; 3\rangle$, **B.** $\langle -2; 1\rangle$, **C.** $\langle -4; 2\rangle$, **D.** $\langle 2; 5\rangle$.



Zadanie 6. (1 pkt)
Liczba $\frac{\log 12 - 2\log 2}{\log 9 - \log 3}$ jest równa:

A. $\log\frac{4}{3}$, **B.** 1, **C.** 3, **D.** $\frac{\log 8}{\log 6}$.

Zadanie 7. (1 pkt)
Jeżeli a jest liczbą dodatnią i $a^{-\frac{1}{3}} < a^{-\frac{1}{2}}$, to:

A. $a = 1$, **B.** $a > 1$, **C.** $a < 1$, **D.** $\frac{1}{a} < 1$.

Zadanie 8. (1 pkt)
Jeżeli miejscem zerowym funkcji $f(x) = (m-1)x + 6$ jest liczba 4, to:

A. $m = -\frac{1}{2}$, **B.** $m = 1$, **C.** $m = -6$, **D.** $m = 3$.

Zadanie 9. (1 pkt)
Proste $y = 2x + 2$ i $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ przecinają się w punkcie o rzędnej równej:

A. -1, **B.** 0, **C.** 1, **D.** 2.

Zadanie 10. (1 pkt)
Wskaż przedział, w którym funkcja $f(x) = (x+2)^2 - 4$ maleje.

A. $(-\infty; 2)$ **B.** $(-2; 4)$ **C.** $(-4; \infty)$ **D.** $(-\infty; -2)$

Zadanie 11. (1 pkt)
Liczby 2 i -2 są pierwiastkami równania:

A. $x^2 - 2 = 0$,
B. $x^2 + 4 = 0$,
C. $(x+2)(x-2) = 4$,
D. $(x-2)(x+2) = 0$.

Zadanie 12. (1 pkt)
Wyrażenie $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}$ można zapisać w postaci:

A. $\frac{x+3}{x-3}$, **B.** 0, **C.** $\frac{6}{x^2-9}$, **D.** $\frac{-1}{x^2-9}$.

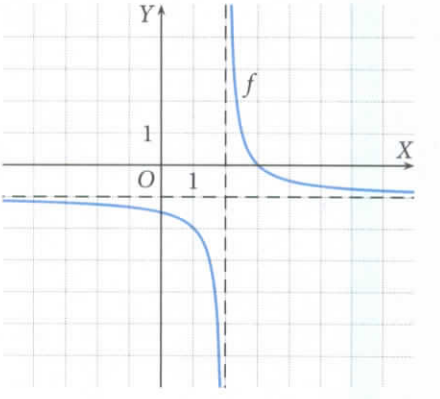
Zadanie 13. (1 pkt)
Jedna z liczb spełniających równanie $x^3 + 100 = 0$ należy do przedziału:

A. $\langle -12; -10)$, **B.** $\langle -10; -8)$, **C.** $\langle -8; -6)$, **D.** $\langle -6; -4)$.

Zadanie 14. (1 pkt)
Jeżeli α jest kątem ostrym i $\frac{3 - 2\cos\alpha}{2} = 1$, to:

A. $\alpha = 75°$,
B. $\alpha = 60°$,
C. $\alpha = 45°$,
D. $\alpha = 30°$.

Zadanie 15. (1 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:



A. $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$,
B. $f(x) = \frac{1}{x+2} - 1$,
C. $f(x) = \frac{1}{x-2} - 1$,
D. $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$.

Zadanie 16. (1 pkt)
Ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = -2$ jest ciąg:

A. $a_n = 2n - 2$,
B. $a_n = 2 + (n-2)$,
C. $a_n = \frac{1-4n}{2}$,
D. $a_n = -2$.

Zadanie 17. (1 pkt)
Piąty wyraz ciągu geometrycznego jest równy 16, a ósmy 54. Iloraz tego ciągu jest równy:

A. $\frac{3}{2}$, **B.** 3, **C.** $\frac{2}{3}$, **D.** 2.

Zadanie 18. (1 pkt)

Prosta k dana jest równaniem $\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}y - 1 = 0$. Prostą prostopadłą do prostej k jest prosta:

A. $y = 4x + 6$, **B.** $y = 2\frac{2}{3}x + 1$, **C.** $y = \frac{1}{4}x - 1$, **D.** $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

Zadanie 19. (1 pkt)

Punkty $A(5, -2)$ i $B(3, 6)$ są końcami przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego ABC. Środek okręgu opisanego na tym trójkącie ma współrzędne:

A. $(8, 4)$, **B.** $(4, 2)$, **C.** $(2, 4)$, **D.** $(4, 4)$.

Zadanie 20. (1 pkt)

Tangens kąta nachylenia przekątnej sześcianu do jego podstawy jest równy:

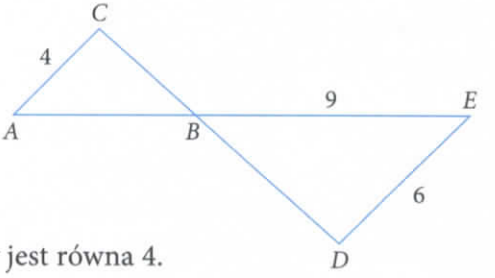
A. 1, **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, **D.** $\sqrt{2}$.

Zadanie 21. (1 pkt)

Odcinki AC i DE na rysunku obok są równoległe.

Długość odcinka AB jest równa:

A. $\frac{8}{3}$, **B.** $\frac{27}{2}$, **C.** 6, **D.** 7.



Zadanie 22. (1 pkt)

Kąt rozwarcia stożka ma miarę $60°$, a średnica podstawy jest równa 4.

Pole powierzchni bocznej tego stożka jest równe:

A. 8π, **B.** 16π, **C.** 12π, **D.** 4π.

Zadanie 23. (1 pkt)

Ile jest liczb czterocyfrowych większych od 5000, w których zapisie mogą wystąpić jedynie cyfry 2, 4 i 6?

A. 8 **B.** 16 **C.** 81 **D.** 27

Zadanie 24. (1 pkt)

Niech $A, B \subset \Omega$. Jeżeli $P(A) = 0{,}4$, $P(B') = 0{,}2$ i $P(A \cup B) = 0{,}9$, to:

A. $P(A \cap B) = 0{,}4$,

B. $P(A \cap B) > 0{,}4$,

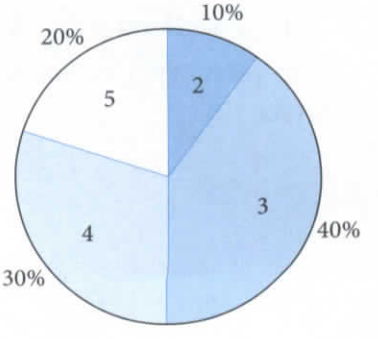
C. $P(A \cap B) = 0{,}3$,

D. $P(A \cap B) < 0{,}3$.

Zadanie 25. (1 pkt)

Na diagramie kołowym przedstawiono wyniki sprawdzianu 10 osób. Mediana ocen jest równa:

A. 3, **B.** 3,5, **C.** 4, **D.** 4,5.



Zadania otwarte

Zadanie 26. (2 pkt)
Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności.

$$\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-3<x-(3-x)(x+1)$$

Zadanie 27. (2 pkt)
Wyznacz wartości m, dla których funkcja $f(x)=(9-4m^2)x+3$ jest malejąca.

Zadanie 28. (2 pkt)
Rozwiąż równanie $x=\frac{3-2x}{x}$.

Zadanie 29. (2 pkt)
Wykaż, że prosta $3x-7y=2$ jest równoległa do prostej przechodzącej przez punkty $A(-1,2)$ i $B(6,5)$.

Zadanie 30. (2 pkt)
Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych podzielnych przez 7.

Zadanie 31. (2 pkt)
Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x)=2x+4$ oraz $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Odczytaj z rysunku argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości mniejsze od wartości funkcji g.

Zadanie 32. (5 pkt)
Liczby a, b, 18 są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Te same liczby są kolejno: pierwszym, drugim i piątym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz a i b.

Zadanie 33. (4 pkt)
W prostokącie o bokach długości 12 i 9 połączono środki boków. Oblicz promień okręgu wpisanego w tak otrzymany romb.

Zadanie 34. (4 pkt)
Rzucamy dwa razy symetryczną kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo każdego ze zdarzeń:

A – za pierwszym razem wypadła parzysta liczba oczek,

B – suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest liczbą parzystą,

C – za pierwszym razem wypadła parzysta liczba oczek, a suma oczek w obu rzutach jest parzysta.

Zestaw 8

odpowiedzi i modele – s. 234

Zadania zamknięte

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Liczba a jest o 20% mniejsza od liczby b, zatem:

A. $a = b - 0{,}2$, **B.** $a = 0{,}8b$, **C.** $a = 0{,}2b$, **D.** $a = 1{,}2b$.

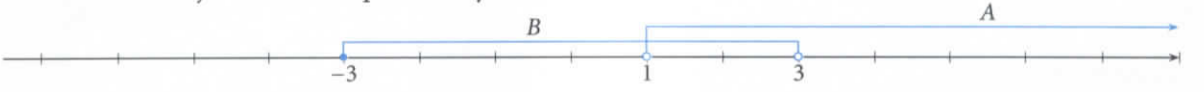
Zadanie 2. (1 pkt)
Dla dowolnej liczby rzeczywistej x wyrażenie $x^{20} \cdot x^{20}$ jest równe:

A. $(2x)^{20}$, **B.** x^{40}, **C.** x^{400}, **D.** $2 \cdot x^{20}$.

Zadanie 3. (1 pkt)
Liczba $-\frac{10}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{5}$ jest:

A. niewymierna, **B.** ujemna, **C.** całkowita, **D.** nieparzysta.

Zadanie 4. (1 pkt)
Na osi liczbowej zaznaczono przedziały A i B.



Przedział $\langle -3; 1\rangle$ jest wynikiem działania:

A. $A \setminus B$, **B.** $B \setminus A$, **C.** $A \cap B$, **D.** $A \cup B$.

Zadanie 5. (1 pkt)
Rozwiązaniem równania $6x - 2(2x - (3 - x)) = 1 - 2x$ jest liczba:

A. $-\frac{5}{2}$, **B.** $\frac{7}{2}$, **C.** $-\frac{5}{4}$, **D.** $\frac{4}{5}$.

Zadanie 6. (1 pkt)
Przedział $(-\infty; 1\rangle$ jest zbiorem rozwiązań nierówności:

A. $x^2 - 1 \leqslant 0$, **C.** $(x-1)^2 \leqslant 0$,
B. $x(x-1) \leqslant 0$, **D.** $x(x-1) \geqslant x^2 - 1$.

Zadanie 7. (1 pkt)
Układ równań $\begin{cases} y = x^2 + 2x + 2 \\ y = 1 \end{cases}$

A. nie ma rozwiązań, **C.** ma dokładnie 2 rozwiązania,
B. ma dokładnie 1 rozwiązanie, **D.** ma dokładnie 4 rozwiązania.

Zadanie 8. (1 pkt)
Wykresem funkcji rosnącej nie jest prosta:

A. $2x - 3y = 6$, **B.** $-6x + y = 2$, **C.** $3x + y = 1$, **D.** $\frac{1}{2}x - y = 10$.

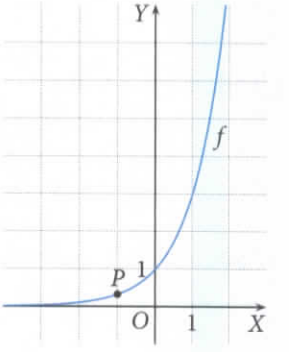
Zadanie 9. (1 pkt)
Wyrażenie $x^4 + ax^2 + \frac{1}{16}$ jest równe $\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2$ dla:

A. $a = -\frac{1}{2}$, **B.** $a = -\frac{1}{4}$, **C.** $a = -\frac{1}{8}$, **D.** $a = \frac{1}{4}$.

Zadanie 10. (1 pkt)
Funkcja $f(x) = \frac{3}{2x-3}$ przyjmuje wartość 1 dla:

A. $x = 3$, **B.** $x = -3$, **C.** $x = 1$, **D.** $x = -1$.

Zadanie 11. (1 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = a^x$, do którego należy punkt $P\left(-1, \frac{1}{3}\right)$. Jeżeli wykres funkcji f przesuniemy o 3 jednostki w dół, to otrzymamy wykres funkcji g wyrażonej wzorem:



A. $g(x) = 3^{x-3}$,
B. $g(x) = 3^{-x-3}$,
C. $g(x) = 3^{-x} - 3$,
D. $g(x) = 3^x - 3$.

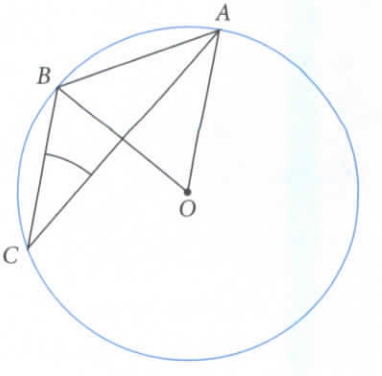
Zadanie 12. (1 pkt)
Jeżeli $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{4}$, to $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$ ma wartość:

A. $\frac{3}{2}$, **B.** $\frac{3}{4}$, **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, **D.** 1.

Zadanie 13. (1 pkt)
Jeżeli liczby: -1, 2, $3 - x$ tworzą ciąg geometryczny, to:

A. $x = 7$, **B.** $x = -7$, **C.** $x = -2$, **D.** $x = -1$.

Zadanie 14. (1 pkt)
Dany jest okrąg o środku O. Trójkąt AOB (rysunek obok) jest równoboczny. Miara kąta ACB jest równa:



A. 25°, **B.** 30°, **C.** 40°, **D.** 60°.

Zadanie 15. (1 pkt)
Do trójkąta o bokach długości 8, 12 i 14 jest podobny trójkąt o bokach długości:

A. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 2,
B. 2, 3, $3\frac{1}{2}$,
C. 4, 6, 8,
D. 4, 8, 10.

Zadanie 16. (1 pkt)
Jeżeli $\log_3 6 = a$, to $\log_3 18$ jest równy:

A. $3a$, **B.** $3 + a$, **C.** $1 + a$, **D.** a^3.

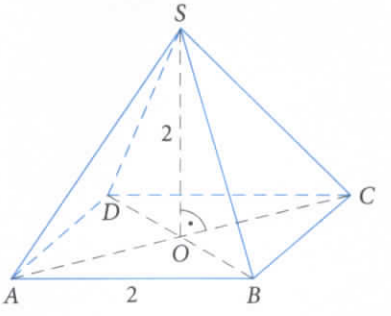
Zadanie 17. (1 pkt)
Prosta o współczynniku kierunkowym równym 2, przechodząca przez punkt $P(-1, 3)$, ma równanie:

A. $y = 2x + 1$, **B.** $y = 2x + 3$, **C.** $y = 2x + 5$, **D.** $y = -2x + 3$.

Zadanie 18. (1 pkt)
Obwód trójkąta równobocznego ABC o wierzchołkach $A(0, -1)$ i $B(-3, 3)$ jest równy:

A. $9\sqrt{2}$, **B.** $12\sqrt{3}$, **C.** 15, **D.** $15\sqrt{3}$.

Zadanie 19. (1 pkt)
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy i wysokość mają długość 2 (rysunek poniżej).



Wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa, opuszczona z wierzchołka S, jest równa:

A. $2\sqrt{5}$, **B.** $\sqrt{5}$, **C.** $\sqrt{6}$, **D.** 4.

Zadanie 20. (1 pkt)
Niech $A, B \subset \Omega$. Jeśli $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}7$ oraz $A \subset B$, to prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cup B$ jest równe:

A. $\frac{1}{5}$, **B.** $\frac{1}{2}$, **C.** $\frac{7}{10}$, **D.** $\frac{4}{5}$.

Zadania otwarte

Zadanie 21. (2 pkt)
Zapisz liczbę $\sqrt[4]{125} \cdot (0{,}04)^{-\frac{1}{2}}$ w postaci potęgi o podstawie 5.

Zadanie 22. (2 pkt)
Funkcje $f(x) = 3x + 4$ oraz $g(x) = -x + 2m$ mają wspólne miejsce zerowe. Oblicz m.

Zadanie 23. (2 pkt)
Test składa się z 20 pytań. Za zaznaczenie poprawnej odpowiedzi zdający otrzymuje 3 punkty, za zaznaczenie błędnej – odejmuje się 1 punkt. Uczeń zakreślił odpowiedzi na wszystkie pytania i otrzymał 36 punktów. Ile błędnych odpowiedzi zakreślił?

Zadanie 24. (2 pkt)
Średnia arytmetyczna liczb naturalnych: 6, 0, 5, 3, 5, 6, x, y jest równa 4, a najczęściej występującą wartością jest liczba 5. Wyznacz x i y, jeśli $y > x$.

Zadanie 25. (2 pkt)
Punkt $C(0, y)$ jest równo oddalony od punktów $A(-2, 5)$ i $B(4, 1)$. Oblicz y.

Zadanie 26. (4 pkt)
Rozwiąż równanie $\frac{x}{4}\left(\frac{x^2}{4} - 9\right) = 0$. Czy któreś rozwiązanie równania należy do zbioru rozwiązań nierówności $(-4 - x)^2 \leqslant 9$?

Zadanie 27. (5 pkt)
Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 2, a suma sześciu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi 57.

a) Oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów ciągu (a_n).

b) Dla jakiego n liczby: a_1, a_3, a_n tworzą ciąg geometryczny?

Zadanie 28. (5 pkt)
W urnie jest 6 kul białych, m kul czarnych i n kul zielonych. Losujemy 1 kulę z tej urny. Wyznacz m i n, wiedząc, że prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej jest dwukrotnie mniejsze niż prawdopodobieństwo wylosowania kuli, która nie jest czarna, a prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest trzykrotnie mniejsze od prawdopodobieństwa wylosowania kuli, która nie jest biała. Ile równe byłoby prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej, gdybyśmy do tej urny wrzucili jeszcze 8 białych kul?

Zadanie 29. (6 pkt)
Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 16. Oblicz wysokość tego graniastosłupa, jeśli wiadomo, że jego pole powierzchni bocznej jest największe z możliwych.

Zestaw 9

odpowiedzi i modele – s. 236

Zadania zamknięte

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Liczba 30 jest o $p\%$ większa od liczby 25, zatem:

A. $p = 5$, **B.** $p = 15$, **C.** $p = 20$, **D.** $p = 25$.

Zadanie 2. (1 pkt)
Niech $A = (-4; 1\rangle$ i $B = (-2; 0\rangle$. Zbiór $A \setminus B$ przedstawiono na rysunku:

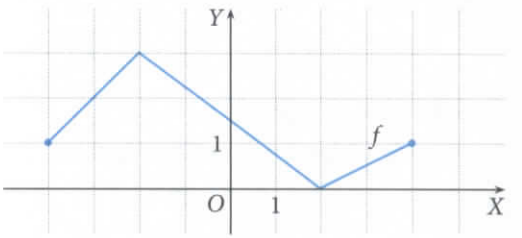
A.

B.

C.

D.

Zadanie 3. (1 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -4; 4\rangle \to \mathbf{R}$. Jeżeli $g(x) = f(x-2)$, to dziedziną funkcji g jest zbiór:



A. $\langle -2; 6\rangle$, **C.** $\langle -6; 2\rangle$,
B. $\langle -4; 4\rangle$, **D.** $\langle -6; 6\rangle$.

Zadanie 4. (1 pkt)
Funkcja $f(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{dla} \quad x \leqslant 3 \\ x+2 & \text{dla} \quad x > 3 \end{cases}$

A. nie ma miejsc zerowych,
B. ma jedno miejsce zerowe,
C. ma dwa miejsca zerowe,
D. ma trzy miejsca zerowe.

Zadanie 5. (1 pkt)
Jeżeli funkcja $f(x) = 3x + b$ przyjmuje wartości dodatnie tylko dla argumentów $x > -4$, to:

A. $b = -4$, **B.** $b = 3$, **C.** $b = 4$, **D.** $b = 12$.

Zadanie 6. (1 pkt)
Liczba $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+2}$ jest równa:

A. $2\sqrt{2} + \sqrt{6}$, **B.** $2\sqrt{2} - \sqrt{6}$, **C.** $-2\sqrt{2} + \sqrt{6}$, **D.** $-2\sqrt{2} - \sqrt{6}$.

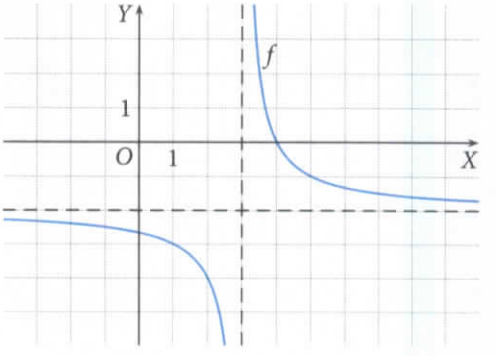
Zadanie 7. (1 pkt)
Wskaż równanie paraboli, której wierzchołek ma obie współrzędne dodatnie.

A. $y = x^2 + x$
B. $y = x^2 + 4$
C. $y = (x+1)^2 + 3$
D. $y = -(x-1)^2 + 3$

Zadanie 8. (1 pkt)
Jeżeli $30^\circ \leqslant \alpha \leqslant 60^\circ$, to najmniejsza wartość wyrażenia $2 \cdot \cos\alpha - 1$ jest równa:

A. $\sqrt{3} - 1$, **B.** 0, **C.** 1, **D.** -1.

Zadanie 9. (1 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{x-3} - 2$. Funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie, gdy:



A. $x \in (-\infty; 2)$,
B. $x \in (3; \infty)$,
C. $x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$,
D. $x \in (3; 4)$.

Zadanie 10. (1 pkt)
Do wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{4}{9}\right)^{-x}$ należy punkt o współrzędnych:

A. $(0,0)$, **B.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$, **C.** $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$, **D.** $\left(-1, \frac{4}{9}\right)$.

Zadanie 11. (1 pkt)
Liczba $\log_{\sqrt{2}} 8 - 1$ jest równa liczbie:

A. 7, **B.** 6, **C.** 5, **D.** 4.

Zadanie 12. (1 pkt)
Suma dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie -2 i różnicy $\frac{1}{3}$ jest równa:

A. $-\frac{10}{3}$,
B. 5,
C. $\frac{10}{3}$,
D. -5.

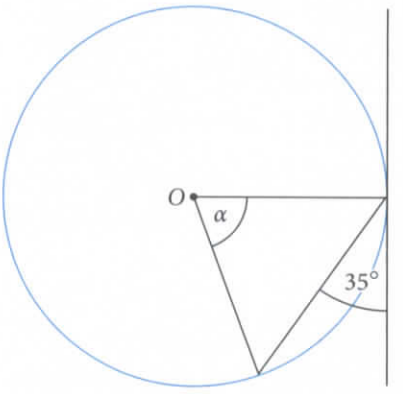
Zadanie 13. (1 pkt)
Ile wyrazów ciągu $a_n = -2n + 14$ $(n \geqslant 1)$ jest większych od zera?

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8

Zadanie 14. (1 pkt)
Pole rombu jest równe 20, a jedna z jego przekątnych jest dwa razy dłuższa od drugiej. Krótsza przekątna tego rombu ma długość:

A. $\sqrt{5}$, **B.** $2\sqrt{5}$, **C.** $3\sqrt{5}$, **D.** $4\sqrt{5}$.

Zadanie 15. (1 pkt)
Punkt O jest środkiem okręgu (rysunek obok).
Kąt α ma miarę:



A. $55°$,
B. $60°$,
C. $70°$,
D. $80°$.

Zadanie 16. (1 pkt)
Prosta $3x + 9y - 5 = 0$ jest prostopadła do prostej:

A. $y = -\frac{1}{3}x$,
B. $y = \frac{1}{3}x + 1$,
C. $y = -3x - 5$,
D. $y = 3x + 5$.

Zadanie 17. (1 pkt)
W grupie 40 uczniów przeprowadzono sondaż. Każdy z uczniów odpowiedział na pytanie: „Ile masz rodzeństwa?". W tabeli przedstawiono wyniki sondażu.

Liczba rodzeństwa	0	1	2	3	4	5
Liczba uczniów	7	20	5	4	2	2

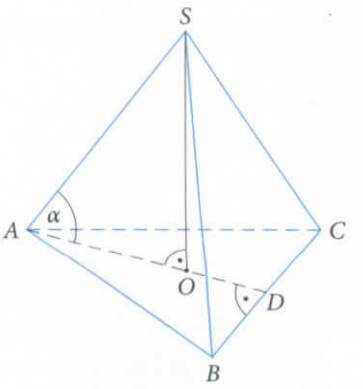
Średnia arytmetyczna otrzymanych danych jest równa:

A. 1,
B. 1,5,
C. 2,
D. 2,5.

Zadanie 18. (1 pkt)
Punkty $A(-2, 1)$ i $C(1, 7)$ są przeciwległymi wierzchołkami prostokąta $ABCD$. Średnica okręgu opisanego na tym prostokącie jest równa:

A. 6,
B. 9,
C. $\frac{3}{2}\sqrt{5}$,
D. $3\sqrt{5}$.

Zadanie 19. (1 pkt)
W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy i wysokość ostrosłupa mają długość 4. Tangens kąta nachylenia krawędzi bocznej do podstawy jest równy:



A. $\sqrt{3}$,
B. $2\sqrt{3}$,
C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$,
D. $4\sqrt{3}$.

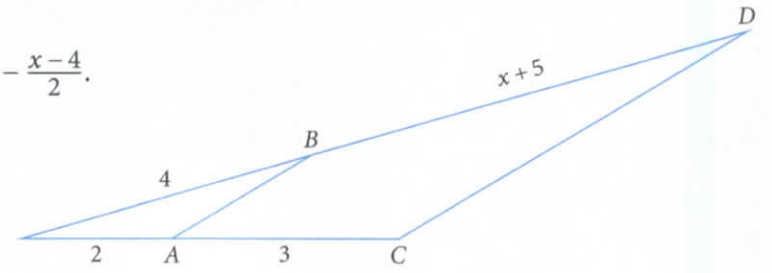
Zadanie 20. (1 pkt)
Spośród liczb naturalnych od 1 do 20 losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo tego, że będzie ona większa od 12, jest równe:

A. 0,3,
B. 0,4,
C. 0,5,
D. 0,6.

Zadania otwarte

Zadanie 21. (2 pkt)
Rozwiąż nierówność $\frac{x-5}{10} \leqslant \frac{x-4}{5} - \frac{x-4}{2}$.

Zadanie 22. (2 pkt)
Odcinki AB i CD są równoległe.
Oblicz x.



Zadanie 23. (2 pkt)
Dla jakiej wartości b wyrażenia $x(x-2b)^2$ i x^3+6x^2+9x są równe dla dowolnej liczby rzeczywistej x?

Zadanie 24. (2 pkt)
Z urny, w której są cztery kule o numerach: 1, 2, 4 i 6, losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że numer drugiej kuli będzie o 2 większy od numeru pierwszej kuli.

Zadanie 25. (2 pkt)
Przekrój stożka płaszczyzną zawierającą jego oś jest trójkątem prostokątnym o polu 2. Oblicz pole podstawy tego stożka.

Zadanie 26. (4 pkt)
Oblicz $(abc)^3$, jeżeli $\log_2 a = 4$, $\log_2 b = -5$ i $\log_c 2 = \frac{1}{2}$.

Zadanie 27. (5 pkt)
Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + 6x + c$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.
a) Oblicz c i zapisz równanie osi symetrii wykresu funkcji f.
b) Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -4; 0 \rangle$.

Zadanie 28. (5 pkt)
Samochód przebył $\frac{3}{4}$ trasy ze średnią prędkością 60 km/h. Średnia prędkość samochodu na całej trasie była równa 64 km/h. Z jaką prędkością samochód przejechał pozostałą część trasy?

Zadanie 29. (6 pkt)
Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD, dłuższym ramieniu o długości $8\sqrt{3}$ oraz kącie ostrym równym 30°. Oblicz pola trójkątów AOB i COD, gdzie O jest punktem przecięcia przekątnych trapezu, jeżeli jego obwód jest równy $12\sqrt{3} + 24$.

Zestaw 10

odpowiedzi – s. 237
modele – s. 238

Zadania zamknięte

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Liczba x to 30% liczby 120, a liczba y to 75% liczby x, zatem:

A. $y = 18$, **B.** $y = 27$, **C.** $y = 30$, **D.** $y = 105$.

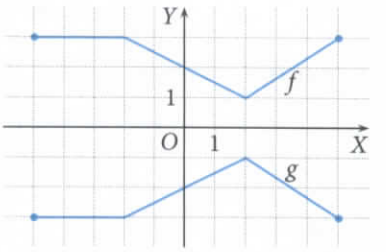
Zadanie 2. (1 pkt)
Wyrażenie $|3 - 2\sqrt{2}| - |2\sqrt{2} - 3|$ jest równe:

A. $6 - 4\sqrt{2}$, **B.** $4\sqrt{2} - 6$, **C.** 0, **D.** 6.

Zadanie 3. (1 pkt)
Jeżeli A jest zbiorem liczb rzeczywistych nie większych od 4, zaś B jest zbiorem liczb rzeczywistych dodatnich, to:

A. $A \cap B = (0;4\rangle$,
B. $A \cap B = (0;4)$,
C. $A \cap B = (-\infty;4\rangle$,
D. $A \cap B = \{1,2,3,4\}$.

Zadanie 4. (1 pkt)
Dla funkcji f i g, których wykresy przedstawiono na rysunku obok, prawdziwa jest równość:



A. $g(x) = f(x)$,
B. $g(x) = f(-x)$,
C. $g(x) = -f(x)$,
D. $g(x) = -f(-x)$.

Zadanie 5. (1 pkt)
Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x}{3} \geqslant \frac{5}{6} - \frac{x}{2}$ jest:

A. $\left(-\infty;\frac{1}{6}\right\rangle$, **B.** $\left\langle\frac{1}{6};\infty\right)$, **C.** $\langle 1;\infty)$, **D.** $(-\infty;5\rangle$.

Zadanie 6. (1 pkt)
Ile punktów wspólnych mają proste $15x - 20y = 10$ i $-9x + 12y = -6$?

A. 0
B. 1
C. 2
D. nieskończenie wiele

Zadanie 7. (1 pkt)
Największa wartość funkcji $f(x) = -x^2 + 4x$ w przedziale $\langle 3;5\rangle$ jest równa:

A. 4, **B.** 3, **C.** 2, **D.** 0.

Zadanie 8. (1 pkt)
Liczba -3 jest pierwiastkiem równania:

A. $(x-3)^2 = 0$, **B.** $(x+3)^2 = 1$, **C.** $(x+2)^2 = 1$, **D.** $x^2 + 9 = 0$.

Zadanie 9. (1 pkt)
Ile pierwiastków wymiernych ma równanie $x(x^2-2)=0$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 10. (1 pkt)
Miejscem zerowym funkcji $f(x)=\frac{5}{x-1}+2$ jest liczba:

A. 1, **B.** -1, **C.** 1,5, **D.** $-1,5$.

Zadanie 11. (1 pkt)
Jeżeli w trójkącie prostokątnym o kątach ostrych α i β jest $\operatorname{tg}\alpha=0,4$, to:

A. $\operatorname{tg}\beta=2,5$, **C.** $\operatorname{tg}\beta=0,4$,
B. $\operatorname{tg}\beta=0,6$, **D.** $\operatorname{tg}\beta=\sqrt{3}$.

Zadanie 12. (1 pkt)
Jeżeli $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$, to:

A. $0<f\left(\frac{1}{4}\right)<1$, **C.** $-1<f\left(-\frac{1}{4}\right)<0$,
B. $f\left(\frac{1}{4}\right)>1$, **D.** $f\left(-\frac{1}{4}\right)<-1$.

Zadanie 13. (1 pkt)
Jeżeli $a=\log_4\frac{1}{2}$ i $b=\log_4 32$, to suma $a+b$ jest równa:

A. 2, **B.** 4, **C.** 6, **D.** 8.

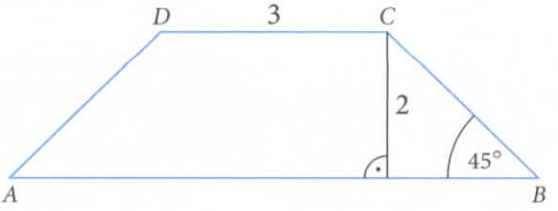
Zadanie 14. (1 pkt)
Różnica ciągu arytmetycznego (a_n), w którym $a_2=8$ i $a_6=-4$, jest równa:

A. 2, **B.** $\frac{12}{5}$, **C.** $-\frac{12}{5}$, **D.** -3.

Zadanie 15. (1 pkt)
Odległość środków okręgów o promieniach 1 i $\sqrt{3}+1$ jest równa 4. Okręgi te:

A. nie mają punktów wspólnych, **C.** są styczne zewnętrznie,
B. są styczne wewnętrznie, **D.** mają dwa punkty wspólne.

Zadanie 16. (1 pkt)
Przedstawiony na rysunku trapez $ABCD$ jest równoramienny.



Długość podstawy AB jest równa:

A. $3+4\sqrt{3}$, **B.** 5, **C.** $3+2\sqrt{3}$, **D.** 7.

Zadanie 17. (1 pkt)
Punkty $A(a+1,-4)$ i $B(2,b+2)$ są symetryczne względem osi OY. Suma $a+b$ jest równa:

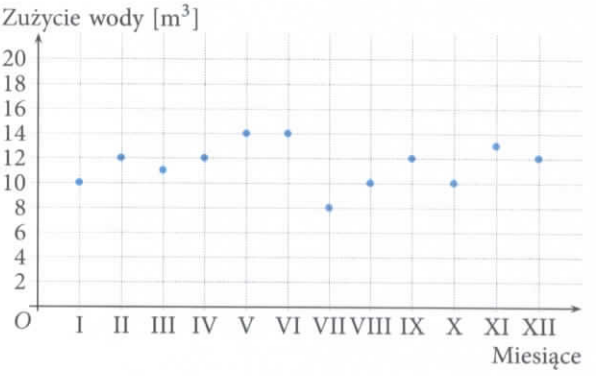
A. -9, **B.** -6, **C.** 5, **D.** 8.

Zadanie 18. (1 pkt)
Pole powierzchni bocznej stożka jest równe 36π, a przekrój płaszczyzną zawierająca jego oś jest trójkątem równoramiennym o ramieniu dwa razy dłuższym od podstawy. Promień podstawy tego stożka jest równy:

A. 9, **B.** 6, **C.** 4, **D.** 3.

Zadanie 19. (1 pkt)
Na wykresie przedstawiono, ile metrów sześciennych wody zużyła w kolejnych miesiącach jednego roku pewna rodzina. Średnie miesięczne zużycie wody w ciągu tego roku jest równe:

A. 10 m^3, **C.** 11 m^3,
B. 10,5 m^3, **D.** 11,5 m^3.



Zadanie 20. (1 pkt)
Niech $A, B \subset \Omega$. Jeżeli $A \cap B = \varnothing$, $P(A) = 0{,}3$ i $P(B) = 0{,}7$, to prawdopodobieństwo różnicy zdarzeń $B \setminus A$ jest równe:

A. 0,3, **B.** 0,4, **C.** 0,7, **D.** 1.

Zadania otwarte

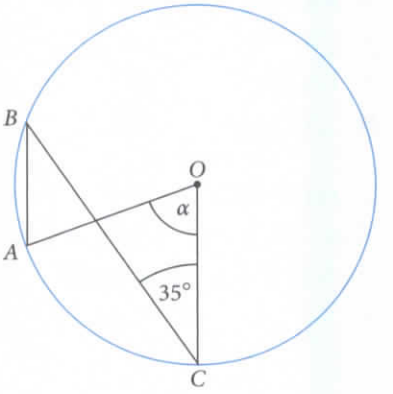
Zadanie 21. (2 pkt)
Uzasadnij, że równość $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5}-2$ jest prawdziwa.

Zadanie 22. (2 pkt)
Rozważmy wszystkie liczby dwucyfrowe, w zapisie których użyto wyłącznie cyfr: 0, 1, 2, 5 i 6, przy czym cyfry mogą się powtarzać. Spośród tych liczb wylosowano jedną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest to liczba podzielna przez 5.

Zadanie 23. (2 pkt)
Kąt α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{3\sin\alpha - 4\cos\alpha}{2\sin\alpha}$.

Zadanie 24. (2 pkt)
Do wykresu funkcji liniowej f należą punkty $A(1,-4)$ i $B(2,-1)$. Sprawdź, czy punkt $C(3,3)$ także należy do wykresu tej funkcji.

Zadanie 25. (2 pkt)
Dany jest okrąg o środku O (rysunek obok). Wyznacz miarę kąta α, jeśli odcinki AB i OC są równoległe.



Zadanie 26. (4 pkt)
Funkcja $f(x) = mx + m^2$ jest malejąca, a jej wykres przechodzi przez punkt $(1,2)$. Wyznacz m oraz oblicz pole trójkąta ograniczonego wykresem tej funkcji i osiami układu współrzędnych.

Zadanie 27. (5 pkt)
Na prostej o równaniu $2x - y - 5 = 0$ znajdź punkt, dla którego suma kwadratów jego odległości od osi układu współrzędnych jest najmniejsza.

Zadanie 28. (6 pkt)
Liczby: a, b, c są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego oraz pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby, jeżeli $2a + b + c = 12$.

Zadanie 29. (5 pkt)
Sinus kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do jego ściany bocznej jest równy $\frac{2}{3}$. Oblicz objętość tego graniastosłupa, jeśli jego podstawą jest kwadrat o boku 4.

Zestaw 11

odpowiedzi – s. 239
modele – s. 240

Zadania zamknięte

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Wyrażenie $8^{12} : 4^{10}$ jest równe:

A. $2 \cdot 4^2$, **B.** $2 \cdot 4^6$, **C.** 4^{14}, **D.** 2^{16}.

Zadanie 2. (1 pkt)
Wyrażenie $\sqrt{\sqrt{17}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{17}+1}$ jest równe:

A. 4, **B.** 16, **C.** $\sqrt{17}$, **D.** $2\sqrt{17}$.

Zadanie 3. (1 pkt)
Niech $A = \langle 1; 3\rangle$ i $B = (3; 5)$. Liczba 3 należy do zbioru:

A. $A \cap B$, **B.** B, **C.** $B \setminus A$, **D.** $A \setminus B$.

Zadanie 4. (1 pkt)
Jeżeli prosta będąca wykresem funkcji liniowej f przecina oś OX w punkcie o odciętej $x = -2$ oraz przechodzi przez punkt $(0, -6)$, to:

A. $f(x) = 3x - 6$,
B. $f(x) = -3x - 6$,
C. $f(x) = 2x - 6$,
D. $f(x) = -2x - 6$.

Zadanie 5. (1 pkt)
Jeżeli wykres funkcji liniowej f jest prostopadły do prostej $x + 2y = 0$ i $f(0) = 0$, to funkcja f dana jest za pomocą wzoru:

A. $f(x) = 2x$, **B.** $f(x) = -2x$, **C.** $f(x) = -\frac{1}{2}x$, **D.** $f(x) = \frac{1}{2}x$.

Zadanie 6. (1 pkt)
Jeżeli zbiorem wartości funkcji $f(x) = -2(x+1)^2 + b$ jest przedział $(-\infty; -1\rangle$, to:

A. $b = 0$, **B.** $b = 1$, **C.** $b = -1$, **D.** $b = 2$.

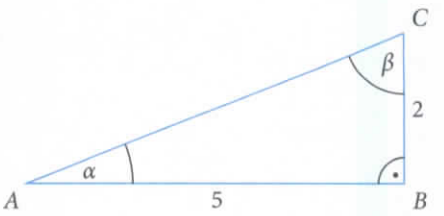
Zadanie 7. (1 pkt)
Jeżeli osią symetrii paraboli o równaniu $y = 3(x + a)^2 - 6$ jest prosta $x = -4$, to:

A. $a = 6$, **B.** $a = 4$, **C.** $a = -6$, **D.** $a = -4$.

Zadanie 8. (1 pkt)
Suma pierwiastków równania $x(x-2) = 3(x-2)$ jest równa:

A. 0, **B.** 1, **C.** 4, **D.** 5.

Zadanie 9. (1 pkt)
Dla trójkąta prostokątnego ABC (rysunek obok) iloczyn $\sin\alpha \cdot \cos\beta$ jest równy:



A. $\frac{4}{29}$, **B.** $\frac{10}{29}$, **C.** $\frac{25}{29}$, **D.** 1.

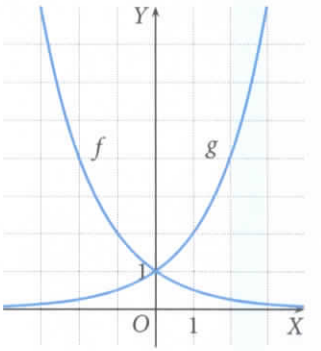
Zadanie 10. (1 pkt)
Równanie $\frac{5-x}{x^2-25}=0$

A. nie ma rozwiązań,
B. ma 1 rozwiązanie,
C. ma 2 rozwiązania,
D. ma 3 rozwiązania.

Zadanie 11. (1 pkt)
Liczba $\log 48$ jest równa:

A. $\log 16 \cdot \log 3$, **B.** $4\log 2 + \log 3$, **C.** $8\log 6$, **D.** $2\log 24$.

Zadanie 12. (1 pkt)
Jeśli wykresy funkcji $f(x) = a^x$ i $g(x) = b^x$ są symetryczne względem osi OY (rysunek obok), to liczby a i b spełniają warunek:

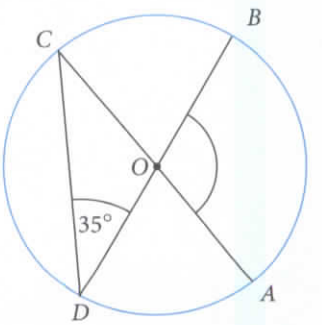


A. $a+b=1$,
B. $a+b=-1$,
C. $a \cdot b = 1$,
D. $a \cdot b = -1$.

Zadanie 13. (1 pkt)
Jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $a_1 = 2$ i ilorazie $q = -\frac{1}{5}$, to:

A. $a_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^n$,
B. $a_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$,
C. $a_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$,
D. $a_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.

Zadanie 14. (1 pkt)
Dany jest okrąg o środku O (rysunek obok). Kąt AOB ma miarę równą:



A. 90°, **B.** 100°, **C.** 110°, **D.** 145°.

Zadanie 15. (1 pkt)
Dany jest okrąg o środku $S(-2,3)$ styczny do osi OY. Promień tego okręgu jest równy:

A. 2, **B.** 3, **C.** 4, **D.** 9.

Zadanie 16. (1 pkt)
Okręgi o promieniach 3 i x^2+1, gdzie $x > 0$, są styczne zewnętrznie. Jeśli odległość między środkami tych okręgów jest równa 13, to:

A. $x = 13$, **B.** $x = 10$, **C.** $x = 9$, **D.** $x = 3$.

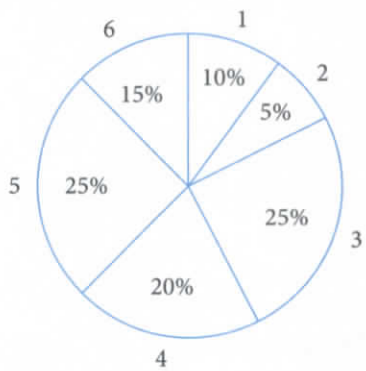
Zadanie 17. (1 pkt)
Jeśli punkt $S(1,3)$ jest środkiem odcinka o końcach $A(-3,2)$ i $B(x,y)$, to:

A. $x \cdot y = -6$, **B.** $x \cdot y = 3$, **C.** $x \cdot y = 12$, **D.** $x \cdot y = 20$.

Zadanie 18. (1 pkt)
Pole powierzchni sześcianu S_2 o krawędzi a_2 jest 36 razy większe od pola powierzchni sześcianu S_1 o krawędzi a_1, zatem:

A. $a_2 = 36^2 a_1$,
B. $a_2 = 36a_1$,
C. $a_2 = 9a_1$,
D. $a_2 = 6a_1$.

Zadanie 19. (1 pkt)
Na diagramie podano wyniki sprawdzianu z matematyki w klasie liczącej 20 osób. Średnia arytmetyczna ocen z tego sprawdzianu wynosi:



A. 3, **B.** 3,4, **C.** 3,9, **D.** 4.

Zadanie 20. (1 pkt)
W urnie są 3 kule białe, 5 kul zielonych i 2 kule niebieskie. Losujemy 1 kulę. Prawdopodobieństwo tego, że nie wylosujemy kuli białej, jest równe:

A. 0,2, **B.** 0,3, **C.** 0,5, **D.** 0,7.

Zadania otwarte

Zadanie 21. (2 pkt)
Stopa bezrobocia w pewnym kraju w 2005 roku wynosiła 17,5%, a w roku 2007 była o 7 punktów procentowych niższa. O ile procent zmalała stopa bezrobocia w tym czasie?

Zadanie 22. (2 pkt)
Oblicz pole figury ograniczonej osią OX i wykresem funkcji f.

$$f(x)=\begin{cases}-2x-4 & \text{dla} \quad x\leqslant 0\\ x-4 & \text{dla} \quad x>0\end{cases}$$

Zadanie 23. (2 pkt)
Dla jakiej wartości współczynnika c funkcja $f(x)=x^2-4x+c$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe?

Zadanie 24. (2 pkt)
Podaj dziedzinę wyrażenia $\frac{4x^2-1}{4x^2-4x+1}$, a następnie je uprość.

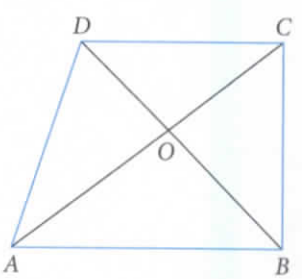
Zadanie 25. (2 pkt)
Wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 3. Oblicz a_{10}, jeśli pierwszym wyrazem tego ciągu jest liczba 3.

Zadanie 26. (4 pkt)
W okręgu o promieniu 6 poprowadzono cięciwę AB. Długość łuku AB jest równa 2π. Oblicz miarę kąta ostrego zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu w punkcie A.

Zadanie 27. (6 pkt)
Przekątne trapezu prostokątnego $ABCD$ przecinają się w punkcie O (rysunek obok). Mając dane $|AB|=8$, $|BC|=6$, $|CD|=6$, oblicz:

a) obwód trójkąta ABO,

b) pole trójkąta DAO.



Zadanie 28. (5 pkt)
Paweł i Agata mają obecnie po trzynaście lat. Rodzice Agaty postanowili wpłacić 4500 zł na pięcioletnią lokatę, oprocentowaną 5% w skali roku z roczną kapitalizacją odsetek. Rodzice Pawła będą wpłacali na konto z takimi samymi warunkami po 1000 zł na początku roku przez kolejne 5 lat. Kto będzie dysponował większą kwotą w wieku osiemnastu lat – Paweł czy Agata?

Zadanie 29. (5 pkt)
Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, w którym stosunek długości boków wynosi 3:4. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają jednakową długość, równą długości dłuższego boku prostokąta będącego podstawą. Oblicz cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

Zestaw 12

odpowiedzi i modele – s. 242

Zadania zamknięte

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Liczba 27 jest o $p\%$ mniejsza od liczby 45, zatem:

A. $p = 40$, **B.** $p = 55$, **C.** $p = 60$, **D.** $p = 66\frac{2}{3}$.

Zadanie 2. (1 pkt)
Wyrażenie $\sqrt[4]{(-8)^2} \cdot 4^{\frac{3}{4}}$ jest równe:

A. -4, **B.** $-2\sqrt{2}$, **C.** $4\sqrt{2}$, **D.** 8.

Zadanie 3. (1 pkt)
Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{3x+6}{-5} < 2 - x$ jest przedział:

A. $(-\infty; 8)$, **B.** $(-\infty; 2)$, **C.** $(2; \infty)$, **D.** $(8; \infty)$.

Zadanie 4. (1 pkt)
W której ćwiartce układu współrzędnych przecinają się proste: $3x + y + 3 = 0$ oraz $2x + y + 1 = 0$?

A. I **B.** II **C.** III **D.** IV

Zadanie 5. (1 pkt)
Osią symetrii paraboli $y = -\frac{3}{4}x^2 - 3x + 2$ jest prosta:

A. $x = -4$, **B.** $x = -2$, **C.** $x = 2$, **D.** $x = 4$.

Zadanie 6. (1 pkt)
Miejscami zerowymi funkcji $f(x) = x^2 + ax + b$ są liczby -4 i 2, zatem:

A. $a + b = -8$, **B.** $a + b = -6$, **C.** $a + b = -2$, **D.** $a + b = 8$.

Zadanie 7. (1 pkt)
Liczba rozwiązań $x^3 = x^2 - 2x$ równania jest równa:

A. 0, **B.** 1, **C.** 2, **D.** 3.

Zadanie 8. (1 pkt)
Wyrażenie $\frac{8x - 12x^2}{4x^2}$, $x \neq 0$, po uproszczeniu ma postać:

A. $2 - 3x$, $x \neq 0$, **B.** $\frac{2-12x}{x}$, $x \neq 0$, **C.** $\frac{2-3x}{4x}$, $x \neq 0$, **D.** $\frac{2-3x}{x}$, $x \neq 0$.

Zadanie 9. (1 pkt)
W zbiorze $(0; \infty)$ rosnąca jest funkcja:

A. $f(x) = \frac{2}{x}$, **B.** $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{x}$, **C.** $f(x) = \frac{2}{3x}$, **D.** $f(x) = \frac{-4}{x}$.

Zadanie 10. (1 pkt)

Jeżeli kąt α jest kątem ostrym oraz $\sin\alpha = \cos 40^\circ$, to:

A. $\alpha = 30^\circ$, **B.** $\alpha = 40^\circ$, **C.** $\alpha = 50^\circ$, **D.** $\alpha = 60^\circ$.

Zadanie 11. (1 pkt)

Do wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ należy punkt o współrzędnych:

A. $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$, **B.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, **C.** $(-6, 128)$, **D.** $\left(10, \frac{1}{1024}\right)$.

Zadanie 12. (1 pkt)

Wyrażenie $\dfrac{\log_{12} 6 + \log_{12} 2}{2\log_{12} 6 - \log_{12} 3}$ jest równe:

A. 1, **B.** $\frac{2}{3}$, **C.** $\frac{4}{9}$, **D.** $\frac{8}{9}$.

Zadanie 13. (1 pkt)

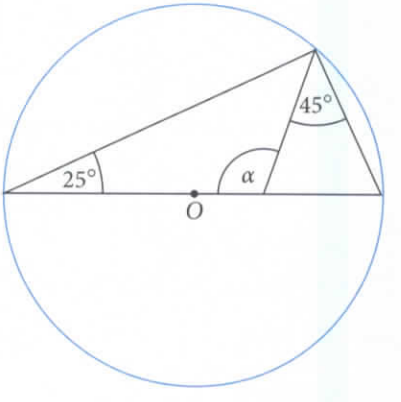
Jeżeli liczby: 4, x, $x-1$ tworzą ciąg arytmetyczny, to:

A. $x = -2$, **C.** $x = 3$,

B. $x = 2$, **D.** $x = 5$.

Zadanie 14. (1 pkt)

Dany jest okrąg o środku w punkcie O (rysunek obok). Kąt α ma miarę:



A. 100°, **C.** 120°,

B. 110°, **D.** 140°.

Zadanie 15. (1 pkt)

Jedna z przekątnych rombu jest dwukrotnie dłuższa od drugiej. Jeśli obwód tego rombu jest równy $8\sqrt{5}$ cm, to jego dłuższa przekątna jest równa:

A. 4 cm, **B.** 8 cm, **C.** 16 cm, **D.** 20 cm.

Zadanie 16. (1 pkt)

Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A(0,1)$ i $B(-2,5)$ jest równy:

A. -2, **B.** $-\frac{1}{2}$, **C.** $\frac{1}{2}$, **D.** 2.

Zadanie 17. (1 pkt)

Sześcian o krawędzi 6 cm i graniastosłup prawidłowy czworokątny o wysokości 9 cm mają taką samą objętość. Pole podstawy tego graniastosłupa jest równe:

A. 4 cm^2, **C.** 24 cm^2,

B. 6 cm^2, **D.** 36 cm^2.

Zadanie 18. (1 pkt)
Mediana danych: 1, 1, 0, 3, 3, 2, 0, 1, 2, 3 jest równa:

A. 1,5, **B.** 1,6, **C.** 2, **D.** 2,5.

Zadanie 19. (1 pkt)
Przekrój walca płaszczyzną zawierającą jego oś jest kwadratem, którego przekątna ma długość $6\sqrt{2}$. Objętość tego walca jest równa:

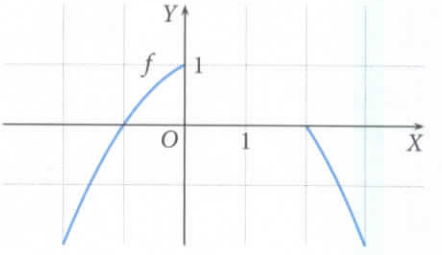
A. 216π, **B.** 54π, **C.** 36π, **D.** 27π.

Zadanie 20. (1 pkt)
Na diagramie słupkowym przedstawiono, ile dni nauki opuścili uczniowie pewnej 28-osobowej klasy w pierwszym tygodniu marca. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń z tej klasy opuścił więcej niż jeden dzień nauki w tym tygodniu, wynosi:

A. $\frac{1}{4}$, **C.** $\frac{3}{7}$,
B. $\frac{3}{4}$, **D.** $\frac{4}{7}$.

Zadania otwarte

Zadanie 21. (2 pkt)
Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej f. Wyznacz wzór tej funkcji w postaci iloczynowej.

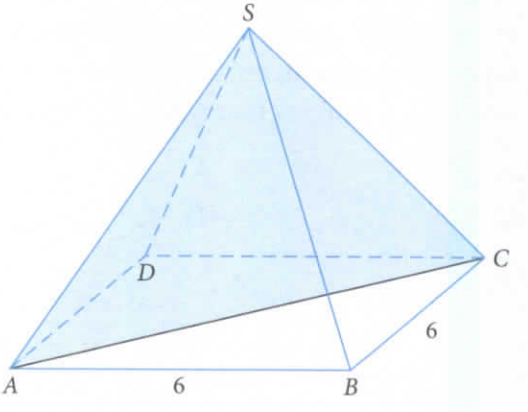


Zadanie 22. (2 pkt)
Rozwiąż równanie $x^3 + 9x - 6x^2 = 0$.

Zadanie 23. (2 pkt)
Dany jest ciąg geometryczny (a_n), którego iloraz jest równy 6 oraz $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 64$. Oblicz a_1.

Zadanie 24. (2 pkt)
Oblicz x, jeżeli $\log x = 2 - 2\log 5 + \log 4$.

Zadanie 25. (2 pkt)
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ (rysunek obok) krawędź podstawy ma długość 6, a kąt ASC jest prosty. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Zadanie 26. (4 pkt)
Wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1. Ile początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby otrzymać liczbę 276?

Zadanie 27. (5 pkt)
Punkty $A(0,0)$, $B(7,1)$ i $C(-1,5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową tego trójkąta wychodzącą z wierzchołka A oraz równanie prostej zawierającej środkową wychodzącą z wierzchołka B. Uzasadnij, że te proste nie są prostopadłe.

Zadanie 28. (5 pkt)
W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości $\frac{3}{2}$ i 2 wpisano okrąg. Oblicz odległość środka okręgu od wierzchołka kąta prostego tego trójkąta.

Zadanie 29. (6 pkt)
Dany jest trójkąt prostokątny o kątach ostrych α i β.

a) Uzasadnij, że $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 1 + 2\sin\alpha \cdot \sin\beta$.

b) Oblicz $\cos\alpha + \cos\beta$, wiedząc, że $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{2}{5}$.

Odpowiedzi i modele rozwiązań

Zadania powtórzeniowe

1. Liczby rzeczywiste

Zestaw A – odpowiedzi

1. **a)** 654321, 654324, 654327
   b) 654320, 654324, 654328
   c) 654320, 654325
   d) 654320, 654328 **e)** 654327
2. **a)** np. $\frac{5}{6}$ **b)** np. $\frac{13}{15}$ **c)** np. $\frac{31}{40}$ **d)** np. $\frac{7}{24}$
3. **a)** $12\sqrt{2}$ **b)** $18\sqrt{3}$ **c)** $\sqrt[3]{2}$ **d)** 8 **e)** 3,5 **f)** 6
4. **a)** $-\frac{5}{4}$ **b)** $-\frac{11}{30}$ **c)** $-\frac{1}{6}$ **d)** -15
5. **a)** 73 **b)** 1025 **c)** 5
6. **a)** $\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{4}{9}$ **c)** 0
7. **a)** $1{,}32 \cdot 10^{20}$ **b)** $3 \cdot 10^{7}$ **c)** $6 \cdot 10^{-1}$
8. **a)** $31 - 12\sqrt{3}$ **b)** $99 + 70\sqrt{2}$ **c)** 77 **d)** 16
   e) $33 - 18\sqrt{2}$ **f)** 50
9. **a)** $2\sqrt{2} + \sqrt{6}$ **b)** $\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 5$
10. **a)** 1 **b)** 4 **c)** 0 **d)** 3
11. **a)** $2x^2 + 4x + 8$ **b)** $4x^2 + 16x + 2$
    c) $2x^2 + 5y^2 - 96xy$
12. **a)** $-4x^6 + x^2 - 2\sqrt{2}x + 3$, -31
    b) $9x^2 + 4x - 2\sqrt{3}x - 3$, $18 + 4\sqrt{3}$
    c) $-4\sqrt{5}x^2 - 4x + 8 + 5\sqrt{5}$, $8 - 11\sqrt{5}$
13. **a)** $\frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}$ **b)** $\frac{4(3-\sqrt{2})}{7}$ **c)** $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ **d)** $-6\sqrt{2} - 4\sqrt{6}$
    e) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ **f)** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ **g)** $-7 - 4\sqrt{3}$ **h)** $\frac{5-3\sqrt{2}}{7}$
14. **a)** $5 + 2\sqrt{5}$ **b)** 5 **c)** 10 **d)** 2
15. 10
16. $a = 7$, $b = 5$ lub $a = 5$, $b = 1$
19. **a)** $x = 20$ **b)** $x = 10$ **c)** $x = 60$
20. **a)** 2346 zł **b)** 2304 zł **c)** 2400 zł
21. 63,36 zł; 62,40 zł
22. **a)** 6% **b)** 150 **c)** 50%
23. **a)** 2,2% **b)** 2,2%
24. **a)** około 4 punkty procentowe **b)** około 7,3%

Zestaw B – odpowiedzi

1. B 2. A 3. D 4. C 5. D 6. C 7. B 8. C

Zestaw C – odpowiedzi

5. $2\sqrt{10}$
6. 7%
7. 108%
8. 2
11. 4

Zestaw D – odpowiedzi

1. $2x^{-1} > y^{-2}$
2. jest liczbą ujemną
3. $c < b < a < d$
4. $a = 0{,}375 \approx 0{,}4$, $b = 0{,}125 \approx 0{,}1$
6. $p = 4$
7. 65
8. W klasie jest 30 osób, w tym 12 chłopców.
9. 4 zł

Zestaw C – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Zapisanie wyrażenia dla $x = 2n + 1$, gdzie $n \in \mathbf{N}$: $2(2n+1)^2 + 4(2n+1) + 10$
	Uproszczenie wyrażenia: $8n^2 + 16n + 16 = 8(n^2 + 2n + 2) = 8y$ i zapisanie wniosku: liczba ta jest podzielna przez 8
2.	Zapisanie liczby w postaci: $4^{12} + 4^{13} + 4^{14} = 4^{12}(1 + 4 + 16) = 21 \cdot 4^{12}$
	Zapisanie liczby w postaci: $21 \cdot 4^{12} = 42 \cdot 2 \cdot 4^{11}$, ponieważ liczba jest wielokrotnością liczby 42, więc dzieli się przez 42

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
3.	Skorzystanie ze wzoru skróconego mnożenia: $\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2 = 8-4\sqrt{3}$
	Obliczenie wartości wyrażenia: 8, zatem jest to liczba naturalna
4.	Zastosowanie własności pierwiastków: $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)}$
	Obliczenie wartości wyrażenia: 1, zatem jest to liczba wymierna
5.	Skorzystanie z twierdzenia Pitagorasa: $x^2 = \left(3\sqrt{3}-1\right)^2 + \left(3+\sqrt{3}\right)^2$, gdzie x jest długością przeciwprostokątnej
	Obliczenie długości przeciwprostokątnej: $x = 2\sqrt{10}$
6.	Zapisanie równania: $3500p = 245$, gdzie p oznacza szukany procent
	Obliczenie p: $p = 7\%$
7.	Zapisanie wzorów na pola prostokątów: $P_1 = ab$, $P_2 = cd = 0{,}9a \cdot 1{,}2b$
	Zapisanie równania: $P_2 = 1{,}08ab = 1{,}08P_1$ i podanie odpowiedzi: 108%
8.	Zapisanie długości boków otrzymanego prostokąta: $0{,}9a$ i $1{,}2b$
	Porównanie obwodów obu prostokątów: $2 \cdot 0{,}9a + 2 \cdot 1{,}2b = 2a + 2b$ i wyznaczenie $\frac{a}{b} = 2$
9.	Zapisanie nierówności: $(x-y)^2 \geqslant 0$ dla dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$
10.	Przekształcenie nierówności do postaci: $2(a^2+1) \geqslant (a+1)^2$
	Przekształcenie nierówności do postaci: $(a-1)^2 \geqslant 0$ i zauważenie, że nierówność ta jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej a
11.	Skorzystanie ze wzoru skróconego mnożenia: $\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)^2 = \frac{1}{a} + 2 + a$
	Obliczenie wartości wyrażenia: $\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{a} + a + 2} = \sqrt{16} = 4$

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Obliczenie x: $x = 27$
	Obliczenie y: $y = 3\sqrt{2}$
	Obliczenie $2x^{-1}$ i y^{-2}: $2x^{-1} = \frac{2}{27}$ i $y^{-2} = \frac{1}{18}$
	Porównanie liczb i podanie odpowiedzi: $2x^{-1} > y^{-2}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
2.	Skorzystanie ze wzoru skróconego mnożenia: $(x^2+6xy+9y^2)-(9y^2-x^2)-(x^2-6xy+9y^2)-(6xy-9y^2)$
	Uporządkowanie wyrazów podobnych: x^2+6xy
	Podstawienie wartości $x=-\sqrt{2}$ i $y=\frac{1}{3}$: $2+6\cdot(-\sqrt{2})\cdot\frac{1}{3}=2-2\sqrt{2}$
	Podanie odpowiedzi: $2\sqrt{2}>2$, zatem $2-2\sqrt{2}<0$ jest liczbą ujemną
3.	Obliczenie a: $a=\frac{3}{4}$
	Obliczenie b: $b=-\frac{3}{4}$
	Obliczenie c: $c=-\frac{4}{3}$
	Obliczenie d: $d=\frac{4}{3}$
	Zapisanie odpowiedzi: $c<b<a<d$
4.	Obliczenie a: $a=0{,}375$
	Podanie przybliżenia liczby a: $a\approx 0{,}4$
	Obliczenie b: $b=0{,}125$
	Podanie przybliżenia liczby b: $b\approx 0{,}1$
5.	Zauważenie, że obie strony danej nierówności są dodatnie, można więc podnieść je do kwadratu
	Przekształcenie nierówności do postaci: $\sqrt{2^{100}-1}<2^{50}$
	Podniesienie obu stron ostatniej nierówności do kwadratu, otrzymanie nierówności: $2^{100}-1<2^{100}$ i zauważnie, że nierówność ta jest zawsze prawdziwa
6.	Zapisanie długości boków prostokąta: $1{,}25x$, qx, gdzie x jest długością boku kwadratu oraz: $q=\left(1-\frac{p}{100}\right)$
	Zapisanie równania: $1{,}25qx^2=1{,}2x^2$
	Obliczenie q: $q=0{,}96$
	Podanie odpowiedzi: $p=4$
7.	Obliczenie liczby telewizorów z usterkami: 96
	Zapisanie nierówności $\frac{96-x}{3200-x}<0{,}01$, gdzie x – liczba telewizorów, które należy usunąć
	Obliczenie x: $x>64{,}(64)$
	Podanie odpowiedzi: Należy usunąć co najmniej 65 telewizorów.

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
8.	Wprowadzenie oznaczeń: x – liczba osób w klasie; $0{,}6x$ – liczba dziewcząt; $0{,}4x$ – liczba chłopców
	Zapisanie równania: $0{,}6x - 6 = 0{,}4x$
	Rozwiązanie równania: $x = 30$
	Podanie odpowiedzi: W klasie jest 30 osób, w tym 12 chłopców.
9.	Wprowadzenie oznaczeń: x – cena jednego litra benzyny przed podwyżkami, $1{,}1x$ – cena jednego litra benzyny po pierwszej podwyżce
	Zapisanie równania: $1{,}05 \cdot 1{,}1x = 4{,}62$
	Rozwiązanie równania: $x = 4$

2. Zbiory, przedziały i nierówności

Zestaw A – odpowiedzi

1. **a)** $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \subset B$
b) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, $B \subset A$

2. zbiory dwuelementowe: A, C; zbiór pusty: D

3. **a)** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \setminus B = \{4, 5\}$, $B \setminus A = \{1, 2\}$
b) $A \cup B = \{3, 4, 8, 9\}$, $A \cap B = \{3, 9\}$, $A \setminus B = \{4, 8\}$, $B \setminus A = \varnothing$

4. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 24, 30\}$, $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$, $A \setminus B = \{4, 8, 12, 24\}$, $B \setminus A = \{5, 10, 15, 30\}$

5. **a)** $\{m, t\}$ **b)** $\{m, n, r, t\}$ **c)** $\{k\}$ **d)** $\{g, k\}$ **e)** $\{n, r\}$

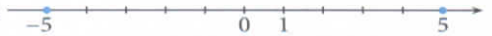
6. **a)** $\{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ **b)** $\{3, 9\}$ **c)** $\{2, 7\}$ **d)** $\{2, 5, 6, 7, 8\}$ **e)** $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ **f)** $\{1, 4\}$

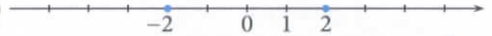
7. **a)** $A \cup B = \langle -1; \infty)$, $A \cap B = (0; 3\rangle$, $A \setminus B = \langle -1; 0\rangle$, $B \setminus A = (3; \infty)$
b) $A \cup B = (-\infty; 2)$, $A \cap B = (-3; 2)$, $A \setminus B = (-\infty; -3\rangle$, $B \setminus A = \varnothing$
c) $A \cup B = (-\infty; 1) \cup \langle 4; \infty)$, $A \cap B = \varnothing$, $A \setminus B = (-\infty; 1)$, $B \setminus A = \langle 4; \infty)$
d) $A \cup B = (-\infty; 2\rangle$, $A \cap B = (-\infty; 0\rangle$, $A \setminus B = (0; 2\rangle$, $B \setminus A = \varnothing$
e) $A \cup B = \mathbf{R}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \setminus B = (-\infty; 3)$, $B \setminus A = (3; \infty)$
f) $A \cup B = \mathbf{R}$, $A \cap B = \varnothing$, $A \setminus B = (-\infty; 5\rangle$, $B \setminus A = (5; \infty)$

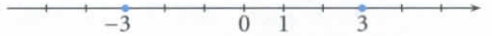
8. **a)** $A \cup B = \langle -3; \infty)$, $A \cup B \cup C = \mathbf{R}$, $A \cap B = (1; 3\rangle$, $A \cap B \cap C = (1; 2)$
b) $A \cup B = \langle 1; \infty)$, $A \cup B \cup C = \langle 1; \infty)$, $A \cap B = (4; 5\rangle$, $A \cap B \cap C = \varnothing$

9. **a)** $A \cup B = \langle -1; 8)$, $A \cap B = (0; 2\rangle \cup (4; 6)$, $A \setminus B = \langle -1; 0\rangle \cup \langle 6; 8)$, $B \setminus A = (2; 4\rangle$
b) $A \cup B = \mathbf{R}$, $A \cap B = \langle 1; 2\rangle \cup (3; 5\rangle$, $A \setminus B = (-\infty; 1) \cup (5; \infty)$, $B \setminus A = (2; 3\rangle$
c) $A \cup B = (-\infty; 0\rangle \cup (2; 4)$, $A \cap B = \langle -3; -1\rangle$, $A \setminus B = (-1; 0) \cup (2; 4)$, $B \setminus A = (-\infty; -3)$
d) $A \cup B = (-2; 5)$, $A \cap B = \langle 0; 1) \cup (2; 3)$, $A \setminus B = \langle 1; 2\rangle \cup \langle 3; 5)$, $B \setminus A = (-2; 0)$
e) $A \cup B = (-\infty; 2\rangle \cup \{3\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = (-\infty; 2)$, $B \setminus A = \{3\}$
f) $A \cup B = \langle -1; 5)$, $A \cap B = \{2, 5\}$, $A \setminus B = (-1; 2) \cup (2; 5)$, $B \setminus A = \{-1\}$

10. **a)** 4 **b)** 5 **c)** 2 **d)** 5

11. **a)**


b)


c)


d)

12. **a)** −1, 0, 1 **b)** −4, −3, 3, 4 **c)** −4, −3, −2, −1, 1, 2, 3, 4 **d)** 0

13. **a)** 0,16 **b)** 0,0025 **c)** $\frac{1}{150}$

14. **a)** 2% **b)** 0,6% **c)** 0,8%

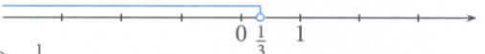
15. **a)** 1,38 **b)** 1,42

16. **a)** 5,8, błąd względny: 3,4%
b) 6,2, błąd względny: 3,2%

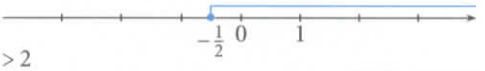
17. **a)** 8 **b)** −3 **c)** −4

18. **a)** $x \leqslant \frac{1}{2}$

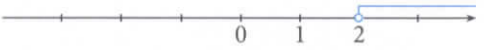
b) $x < \frac{1}{3}$



c) $x \geqslant -\frac{1}{2}$



d) $x > 2$



Zestaw B – odpowiedzi

1. B **2.** A **3.** D **4.** C **5.** D **6.** D **7.** C **8.** B

Zestaw C – odpowiedzi

1. $A_1 \cap A_2 = \langle -2; 4\rangle$

2. $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$,
$A \cap B = \{1, 3, 7, 9\}$

3. 1 do $A \cap B$, 3 do $A \setminus B$

4. $\langle 1; \infty)$

6. $a = -2$

7. $x \geqslant \frac{9}{4}$

8. 6

9. przybliżenie: 3,8, błąd względny: 0,0104

10. 0,88%

11. $a = 3{,}4125$

Zestaw D – odpowiedzi

1. $A \cap B = \langle -4; 2)$, cztery liczby

2. trzy liczby

3. $A \cap B = \langle -5; -2) \cup \{3\}$,
$A \setminus B = (-\infty; -5) \cup (3; \infty)$, dziesięć liczb

4. $x \in \{-2, -1, 0\}$

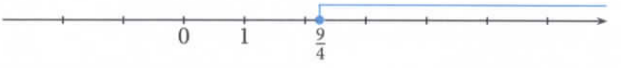
5. 0 rozwiązań dla $m = \sqrt{2}$,
2 rozwiązania dla $m = \frac{1}{2}$

6. *b* i *c*

7. 6,25

Zestaw C – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Wyznaczenie zbiorów A_1 i A_2: $A_1 = \langle -2; 8\rangle$, $A_2 = \langle -6; 4\rangle$
	Wyznaczenie zbioru $A_1 \cap A_2$: $A_1 \cap A_2 = \langle -2; 4\rangle$
2.	Wyznaczenie zbiorów A i B: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$
	Wyznaczenie zbioru $A \cap B$: $A \cap B = \{1, 3, 7, 9\}$
3.	Wyznaczenie zbiorów $A \cap B$ i $A \setminus B$: $A \cap B = (5; 6\rangle$, $A \setminus B = \langle 3; 5\rangle$
	Podanie odpowiedzi: do zbioru $A \cap B$ należy jedna liczba całkowita, a do zbioru $A \setminus B$ – trzy liczby całkowite
4.	Zapisanie warunku: $1 - x \leqslant 0$
	Rozwiązanie nierówności i podanie odpowiedzi: $x \in \langle 1; \infty)$
5.	Zauważenie, że $\lvert 3 - 2\sqrt{3}\rvert = 2\sqrt{3} - 3$
	Zapisanie wniosku: Wyrażenie ma wartość −3, zatem jest to liczba wymierna.
6.	Zauważenie, że nierówności $ax \geqslant -4$ i $x \leqslant 2$ są równoważne, zatem $a < 0$
	Podzielenie obu stron nierówności przez a: $x \leqslant \frac{-4}{a}$ i rozwiązanie równania $\frac{-4}{a} = 2$: $a = -2$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
7.	Pomnożenie obu stron nierówności przez 6: $3x - \frac{9}{2} - x + \frac{5}{2} \geqslant 7 - 2x$
	Zaznaczenie na osi zbioru rozwiązań nierówności: $x \geqslant \frac{9}{4}$: 
8.	Przekształcenie równania do postaci: $x = \frac{4}{2-\sqrt{2}}$
	Usunięcie niewymierności z mianownika i obliczenie sumy $a + b$: $x = 4 + 2\sqrt{2}$, czyli $a + b = 6$
9.	Wykonanie obliczenia $0{,}12 \cdot 32 = 3{,}84$ i podanie przybliżenia: 3,8
	Obliczenie błędu względnego przybliżenia: 0,0104
10.	Zapisanie wyrażenia: $\frac{5{,}7-5{,}65}{5{,}65}$
	Obliczenie błędu względnego przybliżenia: 0,88%
11.	Zapisanie równania: $3{,}425 - a = \frac{1}{80}$
	Obliczenie a: $a = 3{,}4125$

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Wyznaczenie zbioru A: $A = (-\infty; 2)$
	Wyznaczenie zbioru B: $B = \langle -4; \infty)$
	Wyznaczenie zbioru $A \cap B$: $A \cap B = \langle -4; 2)$
	Wyznaczenie zbioru $C \setminus A$: $C \setminus A = \langle 2; 6\rangle$ oraz podanie odpowiedzi: cztery liczby
2.	Zapisanie układu nierówności $1 - \frac{1}{6}x > -\frac{1}{2}$ i $1 - \frac{1}{6}x < \frac{3}{2}$ oraz wyznaczenie zbioru A: $A = (-3; 9)$
	Zapisanie układu nierówności: $3x - 2 \geqslant 1$ i $3x - 2 \leqslant 12$ oraz wyznaczenie zbioru B: $B = \left\langle 1; 4\frac{1}{3}\right\rangle$
	Wyznaczenie zbioru $A \setminus B$: $A \setminus B = (-3; 1) \cup \left(4\frac{1}{3}; 9\right)$, sprawdzenie, ile parzystych liczb naturalnych należy do zbioru $A \setminus B$ oraz podanie odpowiedzi: trzy liczby
3.	Wyznaczenie zbioru $A \cap B$: $A \cap B = \langle -5; -2) \cup \{3\}$
	Wyznaczenie zbioru $A \setminus B$: $A \setminus B = (-\infty; -5) \cup (3; \infty)$
	Wyznaczenie zbioru $B \setminus A$: $B \setminus A = \langle -2; 3)$
	Wyznaczenie liczby k: $k \in \{-2, -1\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}\}$ i podanie odpowiedzi: dziesięć liczb

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
4.	Rozwiązanie pierwszej nierówności: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right\rangle$
	Rozwiązanie drugiej nierówności: $x \in \left(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$
	Wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań: $\left(-2\sqrt{2}; \frac{1}{2}\right\rangle$
	Podanie odpowiedzi: $x \in \{-2, -1, 0\}$
5.	Zapisanie równania w postaci: $\lvert x\rvert = 2 - \sqrt{2} - m$
	Zauważenie, że dla $m = \sqrt{2}$ prawa strona równania jest ujemna
	Zauważenie, że dla $m = \frac{1}{2}$ prawa strona równania jest dodatnia
	Podanie odpowiedzi: dla $m = \sqrt{2}$ równanie nie ma rozwiązań, a dla $m = \frac{1}{2}$ ma dwa rozwiązania
6.	Rozwiązanie pierwszej nierówności: $x \in \langle 2; \infty)$
	Rozwiązanie drugiej nierówności: $x \in (-\infty; 4\rangle$ i wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań: $\langle 2; 4\rangle$
	Obliczenie a: $a = 4\frac{1}{4}$ i zauważenie, że $a \notin \langle 2; 4\rangle$
	Obliczenie b: $b = 4$ i zauważenie, że $b \in \langle 2; 4\rangle$
	Obliczenie c: $c = 3\frac{1}{4}$ i zauważenie, że $c \in \langle 2; 4\rangle$
7.	Zapisanie równania $\frac{\lvert x-5\rvert}{x} = 0{,}2$, gdzie x jest szukaną liczbą
	Przekształcenie równania do postaci: $\lvert x - 5\rvert = 0{,}2x$
	Rozwiązanie równania: $x = 6{,}25$ lub $x = 4\frac{1}{6}$
	Wyznaczenie szukanej liczby: $x = 6{,}25$
8.	Skorzystanie ze wzoru skróconego mnożenia $(2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1) - (8x^2 - 2\sqrt{2}x + \frac{1}{4}) + 6x^2$
	Uporządkowanie wyrazów podobnych i obliczenie wartości wyrażenia: $\frac{3}{4}$
	Podstawienie liczby $\frac{3}{4}$ do równania: $4 \cdot \frac{27}{64} - 3 \cdot \frac{9}{16} + 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$
	Sprawdzenie, że: $L = \frac{27}{16} - \frac{27}{16} + 3 = 3 = P$
9.	Zapisanie pierwszej nierówności w postaci $x < \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ i usunięcie niewymierności z mianownika: $x < \sqrt{2} + 1 \approx 2{,}414$
	Zapisanie drugiej nierówności w postaci $x > \frac{1}{\sqrt{3}-1}$
	Usunięcie niewymierności z mianownika: $x > \frac{\sqrt{3}+1}{2} \approx 1{,}366$
	Zauważenie, że jedyną liczbą całkowitą spełniającą obie nierówności jest 2

3. Funkcje

Zestaw A – odpowiedzi

1. **a)** $f(-2) = f(2) = 0$, wartość najmniejsza: -4, wartość największa: 5, cztery liczby
b) $f(4) = 0$, wartość najmniejsza: -1, wartość największa: 4, sześć liczb

2. **a)**

x	2	4	6	8
y	1	3	5	7

b)

x	2	4	6	8
y	1	2	3	4

c)

x	2	4	6	8
y	-2	-4	-6	-8

d)

x	2	4	6	8
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

3. **a)** $f(x) = 2|x|$, $f(D) = \{0, 2, 4, 6\}$
b) $f(x) = x^2 - 3$, $f(D) = \{-3, -2, 1, 6\}$

4. **a)** $f(x) = 3x + 2$, $f(-\frac{2}{3}) = 0$
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8$, $f(-4) = f(4) = 0$

5. **a)** $f(-\frac{3}{2}) = 2$, $f(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2$
b) $f(-\frac{3}{2}) = 0$, $f(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{4\}$, $(0, -\frac{1}{4})$, $(-2, 0)$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $(0, -\frac{1}{2})$, $(3, 0)$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, 4\}$, $(0, -\frac{1}{16})$, $(-1, 0)$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, $(0, -\frac{1}{3})$
e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-4, 1\}$, $(0, -\frac{3}{2})$, $(-6, 0)$
f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 3\}$, $(0, \frac{3}{2})$

7. **a)** $D = \langle 5; \infty)$, $f(5) = 0$
b) $D = (-\infty; 9\rangle$, $f(9) = 0$
c) $D = (-\infty; \frac{1}{2}\rangle$, $f(\frac{1}{2}) = 0$
d) $D = \langle -12; \infty)$, $f(-12) = 0$
e) $D = \langle 1; \infty)$, $f(1) = 0$
f) $D = \langle 2; \infty)$, $f(2) = 0$

8. **a)** b, c **b)** c
c) d **d)** b

9. **a)** $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = 2$
b) $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = 3x$
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{4\}$, $f(x) = 2$
d) $D = \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $f(x) = x + 3$

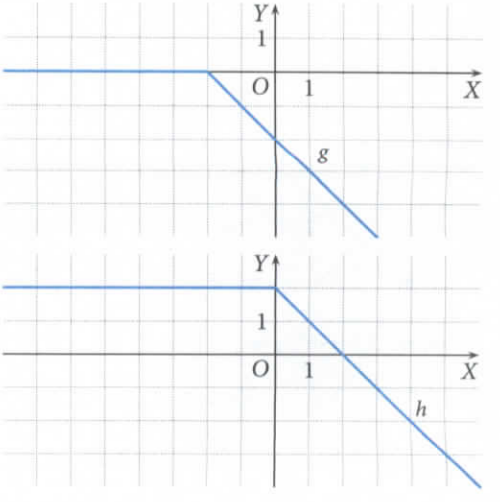
10. **a)** $a = -\frac{1}{2}$ lub $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 1$, $d = \frac{1}{9}$
b) $a = \frac{1}{4}$, $b = 1$, $c = \frac{1}{2}$, $d = \frac{\sqrt{3}}{6}$

11. **a)** $D = \langle -6; 5\rangle$, $f(D) = \langle -2; 2\rangle$,
rośnie w $\langle -6; -3\rangle$ i w $\langle 0; 4\rangle$,
maleje w $\langle -3; 0\rangle$, jest stała w $\langle 4; 5\rangle$,
$f(x) = 1$ dla $x \in \{-3; 3\}$,
$f(x) \geqslant 1$ dla $x \in \{-3\} \cup \langle 3; 5\rangle$
b) $D = \langle -5; 5\rangle$, $f(D) = \langle -2; 2\rangle$, rośnie w $\langle 0; 2\rangle$,
maleje w $\langle -5; 0\rangle$, jest stała w $\langle 2; 5\rangle$,
$f(x) = 1$ dla $x \in \{-3\} \cup \langle 2; 5\rangle$,
$f(x) \geqslant 1$ dla $x \in \langle -5; -3\rangle \cup \langle 2; 5\rangle$

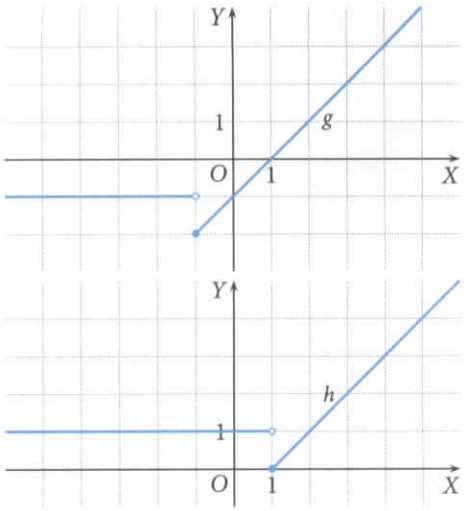
12. **a)** $D_1 = D_2 = \langle -5; 5\rangle$, $D_3 = \langle -4; 6\rangle$,
$D_4 = \langle -7; 3\rangle$, $f(D_1) = \langle -3; 1\rangle$,
$f(D_2) = \langle 2; 6\rangle$, $f(D_3) = f(D_4) = \langle -1; 3\rangle$,
f_1 i f_2 maleją w $\langle -5; -2\rangle$ i w $\langle 2; 5\rangle$,
rosną w $\langle -2; 2\rangle$,
f_3 maleje w $\langle -4; -1\rangle$ i w $\langle 3; 6\rangle$, rośnie w $\langle -1; 3\rangle$,
f_4 maleje w $\langle -7; -4\rangle$ i w $\langle 0; 3\rangle$, rośnie w $\langle -4; 0\rangle$
b) $D_1 = D_2 = \langle -5; -2\rangle \cup \langle -1; 4\rangle$,
$D_3 = \langle -4; -1\rangle \cup \langle 0; 5\rangle$, $D_4 = \langle -7; -4\rangle \cup \langle -3; 2\rangle$,
$f(D_1) = \langle -3; 1\rangle$, $f(D_2) = \langle 2; 6\rangle$,
$f(D_3) = f(D_4) = \langle -1; 3\rangle$,
f_1 i f_2 maleją w $\langle -1; 0\rangle$ i w $\langle 2; 4\rangle$,
rosną w $\langle -5; -2\rangle$ i w $\langle 0; 2\rangle$,
f_3 maleje w $\langle 0; 1\rangle$ i w $\langle 3; 5\rangle$,
rośnie w $\langle -4; -1\rangle$ i w $\langle 1; 3\rangle$,
f_4 maleje w $\langle -3; -2\rangle$ i w $\langle 0; 2\rangle$,
rośnie w $\langle -7; -4\rangle$ i w $\langle -2; 0\rangle$

13. **a)** $g(x) = 2x + 6$, $h(x) = 2x - 2$,
$g(x) = 2$ dla $x = -2$, $h(x) = 2$ dla $x = 2$
b) $g(x) = -|x - 3|$, $h(x) = -|x| + 2$,
g nie przyjmuje wartości 2, $h(x) = 2$ dla $x = 0$

14. **a)**



14. b)



15. a) $D = \langle -4; \infty)$, $g(D) = (1; 7\rangle$
b) $D = \langle -6; \infty)$, $g(D) = (-3; 3\rangle$
c) $D = \langle -4; \infty)$, $g(D) = \langle -3; 3)$
d) $D = (-\infty; 4\rangle$, $g(D) = (-3; 3\rangle$

Zestaw B – odpowiedzi

1. A **2.** B **3.** A **4.** D **5.** D

Zestaw C – odpowiedzi

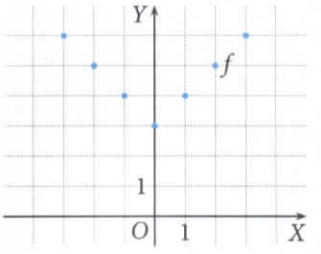
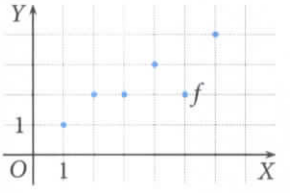
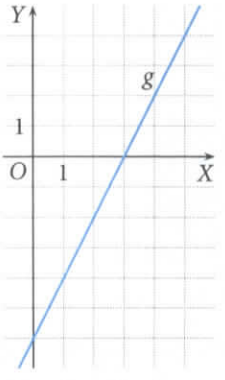
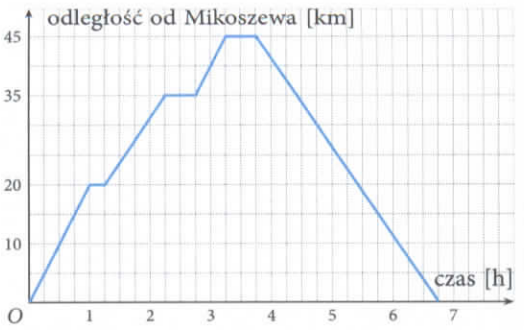
1. $D = \mathbf{R} \setminus \{-5\}$, $f(0) = f(5) = 0$
2. $D = \langle 4; 6\rangle$
3. $f(x) = x^2 - 1$, $f_{\min}(0) = -1$
4. a) $f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$ **b)** $f(2\sqrt{3}) = 24\sqrt{3}$
5. $D_g = (-\infty; 1)$, $g(D_g) = (-5; 1\rangle$
6. $f(x) = |x| + 3$
7. $f(D) = \{1, 2, 3, 4\}$
8. $g(x) = 2x - 6$

Zestaw D – odpowiedzi

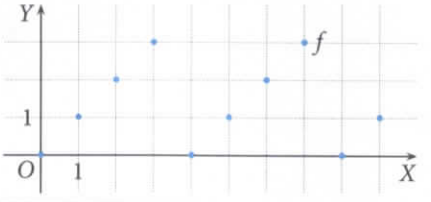
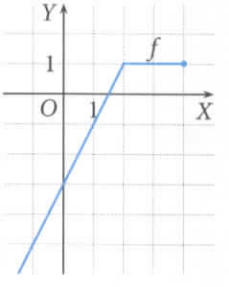
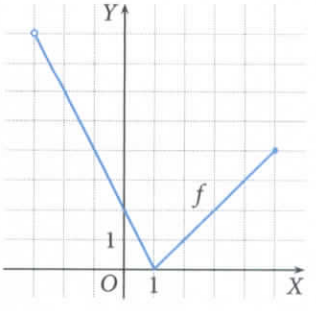
1. a) $f(15) = 3$, $f(93) = 1$, $f(102) = 2$
2. c) -1, 0, 1, 2, 3, 4
3. a) $D = \langle -5; 0\rangle \cup \langle 1; 6\rangle$ **b)** $f(D) = \langle -2; 3\rangle$
c) $x = -1$ lub $x = 2$ **d)** $x \in \langle -5; 0\rangle \cup \langle 1; 5\rangle$
4. $g(D) = \langle -8; 0\rangle$, $g(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 4$
5. $D = \langle -3; 5\rangle$, $g(D) = \langle -1; 2\rangle$,
$g(-1) = g(2) = g(5) = 0$
6. $(-6, 4)$ i $(2, 4)$

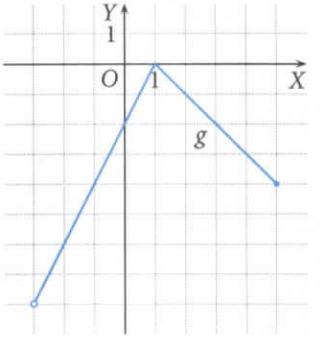
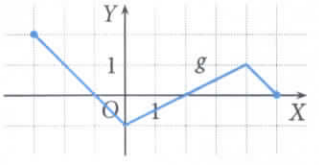
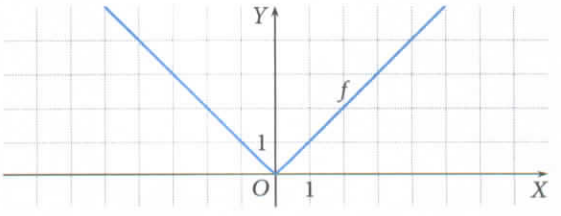
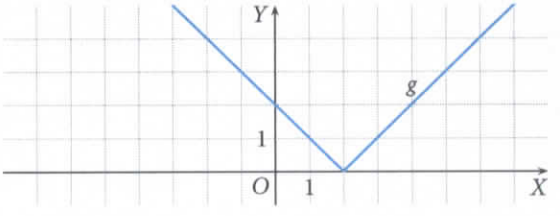
Zestaw C – modele rozwiązań zadań otwartych

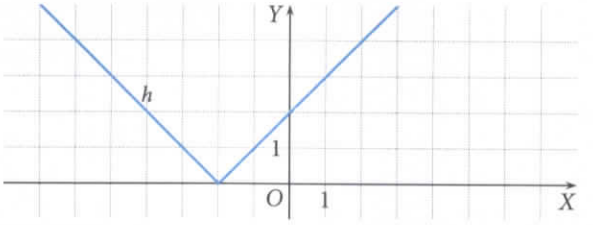
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Wyznaczenie dziedziny funkcji: $D = \mathbf{R} \setminus \{-5\}$
	Wyznaczenie miejsc zerowych: $x = 0$, $x = 5$
2.	Zapisanie układu nierówności: $\begin{cases} x - 4 \geqslant 0 \\ 6 - x \geqslant 0 \end{cases}$
	Rozwiązanie układu nierówności i podanie odpowiedzi: $D = \langle 4; 6\rangle$
3.	Podanie wzoru funkcji f: $f(x) = x^2 - 1$
	Wyznaczenie najmniejszej wartości funkcji f: $f_{\min} = -1$
4. a)	Obliczenie $f(-\sqrt{2})$: $f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$
4. b)	Obliczenie $f(2\sqrt{3})$: $f(2\sqrt{3}) = 24\sqrt{3}$
5.	Wyznaczenie dziedziny funkcji g: $D_g = (-\infty; 1)$
	Wyznaczenie zbioru wartości funkcji g: $g(D_g) = (-5; 1\rangle$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
6.	Podanie wzoru funkcji f: $f(x) = \lvert x \rvert + 3$
	Naszkicowanie wykresu funkcji f 
7.	Naszkicowanie wykresu funkcji f 
	Podanie zbioru wartości funkcji: $f(D) = \{1, 2, 3, 4\}$
8.	Zapisanie wzoru funkcji g: $g(x) = 2x - 6$
	Naszkicowanie wykresu funkcji g 
9.	Naszkicowanie wykresu 

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1. a)	Obliczenie $f(15)$: $f(15) = f(3 \cdot 4 + 3) = 3$
	Obliczenie $f(93)$: $f(93) = f(23 \cdot 4 + 1) = 1$
	Obliczenie $f(102)$: $f(102) = f(25 \cdot 4 + 2) = 2$
1. b)	Naszkicowanie wykresu funkcji f 
2. a)	Wyznaczenie wartości funkcji dla danych argumentów: $f(-3) = -9$, $f(3) = 1$
	Wyznaczenie miejsca zerowego: $f(x) = 0$ dla $x = 1{,}5$
2. b)	Naszkicowanie wykresu funkcji f 
2. c)	Podanie rozwiązania nierówności $f(x) \geqslant -6$: $x \geqslant -1{,}5$
	Wypisanie liczb całkowitych spełniających nierówność: $-1, 0, 1, 2, 3, 4$
3. a)	Odczytanie z wykresu dziedziny funkcji: $D = \langle -5; 0\rangle \cup \langle 1; 6\rangle$
3. b)	Odczytanie z wykresu zbioru wartości funkcji: $f(D) = \langle -2; 3\rangle$
3. c)	Odczytanie z wykresu rozwiązań równania $f(x) = 2$: $x = -1$ lub $x = 2$
3. d)	Odczytanie z wykresu rozwiązań nierówności $f(x) \geqslant -1$: $x \in \langle -5; 0\rangle \cup \langle 1; 5\rangle$
4	Naszkicowanie wykresu funkcji f 

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
4.	Naszkicowanie wykresu funkcji g 
	Wyznaczenie zbioru wartości funkcji g: $g(D) = \langle -8; 0 \rangle$
	Zauważenie, że $\sqrt{2} - 1 \in (-3; 1)$
	Obliczenie $g(\sqrt{2} - 1)$: $g(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 4$
5.	Naszkicowanie wykresu funkcji g 
	Odczytanie z wykresu dziedziny funkcji g: $D_g = \langle -3; 5 \rangle$
	Odczytanie z wykresu zbioru wartości funkcji g: $g(D_g) = \langle -1; 2 \rangle$
	Odczytanie z wykresu miejsc zerowych funkcji g: $x = -1$ lub $x = 2$ lub $x = 5$
6.	Naszkicowanie wykresu funkcji f 
	Naszkicowanie wykresu funkcji g 

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
6.	Naszkicowanie wykresu funkcji h 
	Wyznaczenie współrzędnych punktów przecięcia wykresu funkcji h z prostą o równaniu $y = 4$: $A(-6, 4)$ i $B(2, 4)$

4. Funkcja liniowa

Zestaw A – odpowiedzi

1. **a)** $f(x) \geqslant 0$ dla $x \in \langle -\frac{1}{2}; \infty)$, $P = \frac{3}{4}$
b) $f(x) \geqslant 0$ dla $x \in (-\infty; -6\rangle$, $P = 12$
c) $f(x) \geqslant 0$ dla $x \in \langle 1; \infty)$, $P = \frac{5}{4}$

2. **a)** $b = -6$ **b)** $b = -1$

3. **a)** $b > -2$ **b)** $b > -4$

4. **a)** $\langle -1; 3)$ **b)** $\left(1\frac{1}{4}; 4\frac{1}{6}\right)$ **c)** $\left\langle \frac{3}{2}; 1 + \sqrt{2}\right\rangle$

5. **a)** $f(x) = 3x + 2$ **b)** $f(x) = 6$

6. **a)** $y = -2x + 2$, nie należy **b)** $y = x + 8$, należy

7. **a)** malejąca **b)** rosnąca

8. **a)** dla $m = -2$ stała,
dla $m = -1$ i $m = 0$ malejąca
b) dla $m = -2$ malejąca,
dla $m = -1$ i $m = 0$ rosnąca

9. **a)** $g(x) = 3x - 4$, $g(-6) = -22$
b) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 4$, $g(-6) = 7$
c) $g(x) = -\sqrt{3}x + 3$, $g(-6) = 6\sqrt{3} + 3$
d) $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 7$, $g(-6) = -3\sqrt{3} + 7$

10. **a)** $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$, $g(-4) = 0$
b) $g(x) = -\frac{1}{2}x - 1$, $g(-2) = 0$
c) $g(x) = 3x + 1$, $g(-\frac{1}{3}) = 0$
d) $g(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$, $g(0) = 0$

11. **a)** $m = -\frac{1}{2}$ **b)** $m = -4$

12. **a)** $m = -\frac{1}{2}$ **b)** $m = 2$

13. $f(x) = \frac{4}{3}x + 2$, funkcja rosnąca,
$f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty; -\frac{3}{2})$

14. **a)** $a = -\frac{3}{2}$ **b)** $a = -1$ **c)** $a = 0$ **d)** $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

15. **a), c), d), e)** funkcja rosnąca
b), f) funkcja malejąca

16. **a)** $x_0 = 2{,}5$ **b)** $x_0 = 0$ **c)** $x_0 = -0{,}5$ **d)** $x_0 = -2{,}5$

17. **a)** $(-\infty; 6\rangle$ **b)** $\langle 5\sqrt{3} + 1; \infty)$
c) $(-\infty; \frac{4}{3})$ **d)** $(5; \infty)$

18. **a)** zero dla $a = 1$, jedno dla $a \neq 1$
b) nieskończenie wiele dla $a = 0$, jedno dla $a \neq 0$
c) zero dla $a = \frac{1}{2}$, jedno dla $a \neq \frac{1}{2}$

19. **a)** $g(x) = 2x - 2$, $g(-49) = -100$
b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$, $P = 10\frac{2}{3}$
c) $x \in (1; 8)$

20. **a)** $x = 1$, $y = 2$ **b)** $x = 4$, $y = 2$
c) $x = 2$, $y = -2$ **d)** $x = -2$, $y = 4$
e) $x = 1$, $y = 1$
f) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$, $x \in \mathbf{R}$

21. **a)** 9 **b)** 8

22. 35

23. 93

24. **a)** Sławek – 20 lat, Janek – 15 lat
b) Ania – 18 lat, Basia – 15 lat

25. Marysia – 49 lat, Bogdan – 53 lata

26. $y = 1{,}5x + 200$, 150 wiązanek

27. co najmniej 55 plecaków

Zestaw B – odpowiedzi

1. C **2.** A **3.** D **4.** C **5.** D **6.** D **7.** B **8.** A

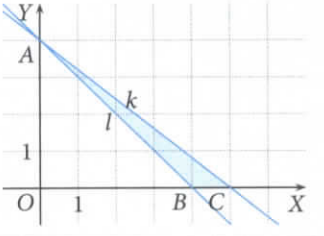
Zestaw C – odpowiedzi

1. $y = -x + 2$
2. $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$
3. funkcja jest rosnąca
4. $y = 2x$
5. $y = -3x - 1$
6. $m = \frac{1}{3}$
7. 2
9. $x = -1$
10. $a = 2$

Zestaw D – odpowiedzi

1. **a)** $a = 3$ **b)** $a = 6$
2. $y = -4x + 2$, $x \in (-2; \infty)$
3. **a)** $f(D) = \langle -4; 3 \rangle$ **b)** $f\left(1 - \sqrt{10}\right) = -4$
   c) $y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$
   d) $|BC| = \sqrt{65}$
4. **a)** $y = -\frac{4}{3}x - 3$
   b) $y = \frac{4}{3}x - 3$ **c)** $P = 24$
5. o godzinie 7.20
6. $m = 80$, $n = 60$

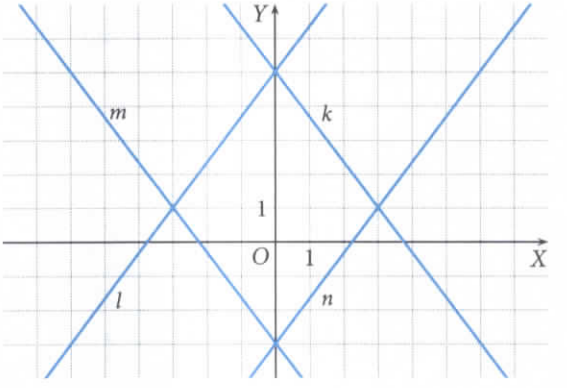
Zestaw C – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Zauważenie, że wykres funkcji przechodzi przez punkt $(2, 0)$
	Podanie wzoru funkcji: $y = -x + 2$
2.	Zapisanie wzoru funkcji w postaci $f(x) = ax + b$ i zapisanie równań: $2 = a + b$ oraz $3 = f(-2) = -2a + b$
	Rozwiązanie układu równań: $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{7}{3}$ i podanie odpowiedzi: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$
3.	Wyznaczenie współczynnika przy x: $a = \sqrt{2} - 1$
	Zauważenie, że $a > 0$ i podanie odpowiedzi: funkcja jest rosnąca
4.	Zapisanie równania szukanej prostej w postaci: $y = 2x + b$
	Zapisanie równania $2 = 2 \cdot 1 + b$, wyznaczenie $b = 0$ i podanie odpowiedzi: $y = 2x$
5.	Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej: $a = -3$
	Podanie równania prostej: $y = -3x - 1$
6.	Zapisanie równania: $\frac{m-1}{2} = -\frac{1}{3}$
	Wyznaczenie wartości m: $m = \frac{1}{3}$
7.	Wykonanie rysunku 
	Zauważenie, że $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ACO} - P_{\triangle ABO} = 10 - 8 = 2$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
8.	Zapisanie wyrażenia: $\sqrt{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)-2\sqrt{3}$
	Obliczenie wartości wyrażenia: -2
9.	Zapisanie równania w postaci $x=\frac{\sqrt{6}-2}{2-\sqrt{6}}$
	Rozwiązanie równania: $x=-1$
10.	Zapisanie równania: $\frac{1-a}{2}\cdot 4+2=0$
	Obliczenie a: $a=2$

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1. a)	Zapisanie równania: $6=(2-a)\cdot(-2)+4$
	Rozwiązanie równania: $a=3$
1. b)	Wyznaczenie miejsca zerowego funkcji g: $x=1$
	Zapisanie równania: $(2-a)\cdot 1+4=0$
	Rozwiązanie równania: $a=6$
2.	Zapisanie równania: $\frac{1}{2}a+2=0$
	Wyznaczenie a: $a=-4$ i zapisanie wzoru funkcji: $y=-4x+2$
	Zapisanie nierówności: $-4x+2<-3x+4$
	Rozwiązanie nierówności: $x\in(-2;\infty)$
3. a)	Wyznaczenie zbioru wartości funkcji f: $f(D)=\langle -4;3\rangle$
3. b)	Zauważenie, że $1-\sqrt{10}\in(-3;-2)$ i podanie wartości funkcji dla argumentu $x=1-\sqrt{10}$: $f\left(1-\sqrt{10}\right)=-4$
3. c)	Wyznaczenie równania prostej BC: $y=\frac{7}{4}x-\frac{1}{2}$
3. d)	Obliczenie długości odcinka BC: $\lvert BC\rvert=\sqrt{65}$
4. a)	Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej m: $a=-\frac{4}{3}$
	Zapisanie równania prostej m: $y=-\frac{4}{3}x-3$
4. b)	Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej n: $a=\frac{4}{3}$
	Wyznaczenie równania prostej n: $y=\frac{4}{3}x-3$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
4. c)	Naszkicowanie w jednym układzie współrzędnych prostych: k, l, m, n 
	Zauważenie, że figura jest rombem i obliczenie jej pola: $P = 24$
5.	Wprowadzenie oznaczeń: s – droga między domem a szkołą, x – droga przebyta przez dziewczynki do momentu spotkania, v_1 – średnia prędkość Ali w km/min, v_2 – średnia prędkość Oli w km/min, t – czas jazdy Ali do momentu spotkania, $s > 0$, $t > 10$ i zapisanie wzorów: $v_1 = \frac{s}{40}$, $v_2 = \frac{s}{20}$
	Zapisanie wzoru na drogę przebytą przez dziewczynki: $v_1 t = x$, $v_2(t-10) = x$
	Ułożenie równania: $\frac{s}{40}t = \frac{s}{20}(t-10)$
	Rozwiązanie równania: $t = 20$ i podanie odpowiedzi: Ola wyprzedzi Alę o godzinie 7.20.
6.	Zapisanie równania: $m + n = 140$
	Zapisanie równania: $m + 15n = 980$
	Rozwiązanie układu równań: $m = 80$, $n = 60$

5. Funkcja kwadratowa

Zestaw A – odpowiedzi

1. **a)** $y = -\frac{1}{3}x^2 + 1$ **b)** $y = -\frac{1}{3}(x-1)^2$
c) $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2 - 2$

2. **a)** $f(x) = -(x-2)^2$, $f(D) = (-\infty; 0\rangle$
b) $f(x) = (x+3)^2 - 9$, $f(D) = \langle -9; \infty)$
c) $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$, $f(D) = \langle 2; \infty)$

3. **a)** $(1,0)$, $(3,0)$, $(0,3)$,
$f(x) = (x-1)(x-3) = (x-2)^2 - 1$
b) $(1,0)$, $(-5,0)$, $(0,5)$,
$f(x) = -(x-1)(x+5) = -(x+2)^2 + 9$
c) $(0,-3)$, $f(x) = -2(x-1)^2 - 1$,
nie ma postaci iloczynowej

4. **a)** f maleje w $(-\infty; 12\rangle$, rośnie w $\langle 12; \infty)$,
$f(D) = \langle -29; \infty)$
b) f rośnie w $(-\infty; -\frac{3}{2}\rangle$, maleje w $\langle -\frac{3}{2}; \infty)$,
$f(D) = (-\infty; 12\frac{1}{4}\rangle$
c) f maleje w $(-\infty; 2\sqrt{2}\rangle$, rośnie w $\langle 2\sqrt{2}; \infty)$,
$f(D) = \langle -10; \infty)$

5. **a)** $b = 0$, $c = 2$, $f_{\min} = 2$ **b)** $b = 0$, $c = 0$, $f_{\min} = 0$
c) $b = -8$, $c = 13$, $f_{\min} = 5$ **d)** $b = 4$, $c = -1$, $f_{\min} = -3$

6. **a)** $c = -3$, $f(x) = -(x-1)^2 - 2$
b) $c = -1$, $f(x) = -(x-1)^2$
c) $c = 3$, $f(x) = -(x-1)^2 + 4$
d) $c = 3\sqrt{2} - 1$, $f(x) = -(x-1)^2 + 3\sqrt{2}$

7. **a)** $f(x)=0$ dla $x=-5$, $x=1$,
$f(x)=(x-1)(x+5)$,
$f(x)\geqslant 0$ dla $x\in(-\infty;-5\rangle\cup\langle 1;\infty)$
b) $f(x)=0$ dla $x=-2$, $x=3$,
$f(x)=-(x-3)(x+2)$,
$f(x)\geqslant 0$ dla $x\in\langle -2;3\rangle$
c) $f(x)=0$ dla $x=-4$, $x=\frac{1}{2}$,
$f(x)=2(x+4)(x-\frac{1}{2})$,
$f(x)\geqslant 0$ dla $x\in(-\infty;-4\rangle\cup\langle\frac{1}{2};\infty)$

8. **a)** $f(x)=(x-2)^2-9=(x+1)(x-5)$
b) $f(x)=(x+1)^2-4=(x+3)(x-1)$
c) $f(x)=(x-3)^2+1$,
nie ma postaci iloczynowej

9. **a)** $f(x)=x^2-4x+1$
b) $a=-2$, $f(x)=-2(x-1)^2+8$

10. **a)** $a=2$ **b)** $a=1$

11. $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2-4\frac{1}{2}$,
$f(x)=0$, gdy $x=-4$, $x=2$

12. **a)** $b=-8$, $c=8$ **b)** $b=-4$, $c=5$
c) $b=-10$, $c=8$ **d)** $b=-4$ lub $b=4$, $c=1$

13. **a)** $a\in(2;\infty)$ **b)** $b\in(-2;2)$ **c)** $c\in(-\infty;-9)$

14. $c=7$, $x=3+\sqrt{2}$

15. **a)** $x=-\frac{2}{3}$, $x=\frac{2}{3}$ **b)** $x=-2$, $x=0$
c) $x=3$ **d)** $x=\frac{1}{2}$

16. **a)** $x=\frac{3}{2}$, $x=-6$ **b)** $x=-2\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$
c) $x=\sqrt{3}$, $x=2\sqrt{3}$

17. **a)** $x\in(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$ **b)** $x\in(-\infty;-\frac{1}{2}\rangle\cup\langle 0;\infty)$
c) $x\in\mathbf{R}$ **d)** $x\in\langle -2;\frac{1}{2}\rangle$ **e)** $x\in(-\infty;-3)\cup(\frac{1}{2};\infty)$
f) $x\in(-\infty;-1\rangle\cup\langle\frac{1}{3};\infty)$

18. **a)** $D=\mathbf{R}\setminus\{-5,2\}$, $f(x)=0$ dla $x=0$
b) $D=(-\infty;-4)\cup(4;\infty)$, nie ma miejsc zerowych
c) $D=(-\infty;-4)\cup(3;\infty)$, $f(x)=0$ dla $x=5$

19. **a)** $x\in(-\infty;1)\cup(4;\infty)$ **b)** $x\in(-\infty;1\rangle$ **c)** $x\in(0;2)$

21. **a)** $m\in(-1;\infty)$ **b)** $m\in(-\infty;\frac{1}{4})$ **c)** $m\in(-\infty;3)$

22. **a)** $(1,-1)$ **b)** $(-5,-2)$, $(4,-2)$
c) $(-2,-3)$, $(-1,-2)$ **d)** $(-3,-7)$, $(3,5)$

23. **a)** $x=1$, $y=0$ lub $x=-3$, $y=4$
b) $x=-2$, $y=5$ lub $x=2$, $y=-3$
c) $x=-1$, $y=\frac{5}{2}$ lub $x=4$, $y=0$

24. **a)** $f_{\min}=1$, $f_{\max}=5$ **b)** $f_{\min}=2$, $f_{\max}=10$
c) $f_{\min}=-5$, $f_{\max}=13$ **d)** $f_{\min}=-15$, $f_{\max}=9$
e) $f_{\min}=2$, $f_{\max}=5$ **f)** $f_{\min}=\frac{1}{2}$, $f_{\max}=25$

25. -15 lub 18

26. $-12{,}5$ i -18 lub 9 i 25

27. 21 i 22

28. 17 i 19

29. 12 i 13

30. **a)** 2 **b)** $4\frac{1}{2}$ **c)** 0 **d)** $\frac{1}{5}$

31. **a)** 9 **b)** 2 **c)** $\frac{1}{32}$ **d)** 0

32. $2\frac{1}{2}$ i $7\frac{1}{2}$

33. 5 cm × 5 cm

34. 15 m × 15 m

35. 2×2

36. 4 cm × 4 cm, $V=48\ \text{cm}^3$

37. 9π

38. **a)** $P(x)=-5x^2+10x$, $D=(0;2)$,
$P_{\max}(1)=5$, wymiary prostokąta: 1×5
b) $P(x)=-\frac{8}{3}x^2+8x$, $D=(0;3)$,
$P_{\max}(1\frac{1}{2})=6$, wymiary prostokąta: 2×3
c) $P(x)=-2\sqrt{3}x^2+8\sqrt{3}x$, $D=(0;4)$,
$P_{\max}(2)=8\sqrt{3}$, wymiary prostokąta: $2\sqrt{3}\times 4$

Zestaw B – odpowiedzi

1. B **2.** C **3.** A **4.** C **5.** A **6.** B **7.** A **8.** C

Zestaw C – odpowiedzi

1. -3, -2, -1, 0 ,1

2. $x\in\langle -7;1\rangle$

3. $x\in(-\infty;-\frac{1}{3})\cup(3;\infty)$

4. $x\in\langle -\frac{3}{4};1\rangle$

5. $b=-8$ lub $b=8$

6. $b=6$

7. $b=4$, $c=8$

8. $a=-\frac{1}{3}$

9. $f_{\min}(-1)=-3$, $f_{\max}(-2)=f_{\max}(0)=-1$

10. $f_{\min}(1)=-4$

11. $m\in(-\infty;3)$

12. $x=-17$ lub $x=16$

Zestaw D – odpowiedzi

1. $m=-2\sqrt{2}$ lub $m=2\sqrt{2}$

2. **a)** $b=1$, $c=4$ **b)** $x\in(-2;2)$

3. **a)** $x\in(-\infty;-\frac{5}{2})\cup(1;\infty)$ **b)** $g(D)=(-\infty;8\rangle$
c) $b=12$, $c=-10$

4. 5 mm

5. $f_{\min}(\frac{3}{4})=-\frac{25}{8}$, $f_{\max}(-2)=12$

6. $3\frac{3}{59}\times 6\frac{6}{59}$ i $2\frac{42}{59}\times 8\frac{8}{59}$

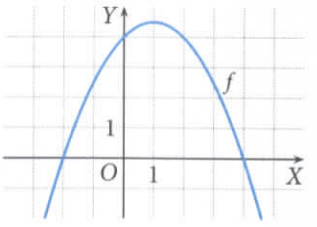
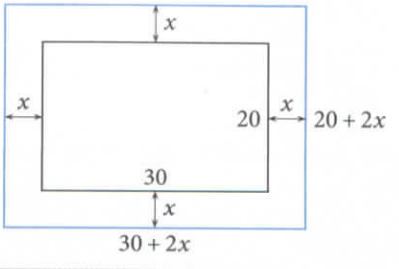
7. 55

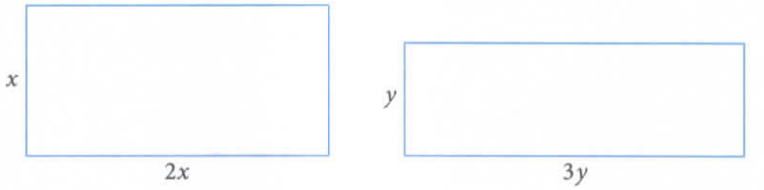
8. $T(n)=\frac{1}{20}n^2+\frac{3}{2}n$, $n\in\mathbf{N}$, 20 kartek

Zestaw C – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Rozwiązanie nierówności: $x \in (-4;2)$
	Podanie odpowiedzi: $-3, -2, -1, 0, 1$
2.	Zapisanie trójmianu w postaci iloczynowej: $x^2+6x-7=(x+7)(x-1)$
	Podanie odpowiedzi: $x \in \langle -7;1\rangle$
3.	Obliczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $3x^2-8x-3$: $x=-\frac{1}{3}$ lub $x=3$
	Podanie odpowiedzi: $x \in \left(-\infty;-\frac{1}{3}\right) \cup (3;\infty)$
4.	Obliczenie miejsc zerowych funkcji f: $x=-\frac{3}{4}$ lub $x=1$
	Zapisanie odpowiedzi: $x \in \left\langle -\frac{3}{4};1\right\rangle$
5.	Zapisanie warunku: $\Delta=b^2-64=0$
	Wyznaczenie wartości współczynnika b: $b=-8$ lub $b=8$
6.	Zapisanie warunku: $x_w=\frac{-b}{-2}=3$
	Wyznaczenie wartości współczynnika b: $b=6$
7.	Zapisanie równania funkcji w postaci kanonicznej: $y=(x+2)^2+4$
	Wyznaczenie wartości współczynników b i c: $b=4$ i $c=8$
8.	Zapisanie warunku: $y_w=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-4-4a}{4a}=2$
	Wyznaczenie wartości współczynnika a: $a=-\frac{1}{3}$
9.	Obliczenie x_w: $x_w=-1 \in \langle -2;0\rangle$
	Obliczenie wartości funkcji: $f(-2)=-1$, $f(-1)=-3$, $f(0)=-1$ i podanie odpowiedzi: $f_{\min}=-3$, $f_{\max}=-1$
10.	Wyznaczenie współrzędnej wierzchołka paraboli: $x_w=-\frac{b}{2a}=3$ i zauważenie, że funkcja f maleje w przedziale $(-\infty;3\rangle$
	Zauważenie, że w przedziale $\langle 0;1\rangle$ funkcja przyjmuje najmniejszą wartość dla $x=1$, czyli $f_{\min}=f(x)-4$
11.	Obliczenie y_w: $y_w=3$
	Zapisanie odpowiedzi: $m \in (-\infty;3)$
12.	Zapisanie równania: $x^2+x=272$
	Rozwiązanie równania: $x=-17$ lub $x=16$

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Zauważenie, że $y_w = -1$
	Zapisanie równania: $\frac{-m^2+4}{4} = -1$
	Doprowadzenie równania do postaci: $m^2 = 8$
	Podanie odpowiedzi: $m = -2\sqrt{2}$ lub $m = 2\sqrt{2}$
2. a)	Zapisanie wzoru funkcji w postaci iloczynowej: $y = -\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$
	Przekształcenie wzoru funkcji do postaci ogólnej: $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ i podanie odpowiedzi: $b = 1$, $c = 4$
	Naszkicowanie wykresu funkcji 
2. b)	Zapisanie nierówności: $-\frac{1}{2}x^2 + x + 4 > x + 2$
	Podanie odpowiedzi: $x \in (-2;2)$
3. a)	Zapisanie nierówności: $-2x^2 - 3x + 5 < 0$
	Rozwiązanie nierówności: $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup (1;\infty)$
3. b)	Podanie zbioru wartości funkcji: $g(D) = (-\infty; 8\rangle$
3. c)	Obliczenie b: $b = 12$
	Obliczenie c: $c = -10$
4.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zapisanie równania: $(20+2x)(30+2x) = 651$, gdzie $x > 0$
	Przekształcenie równania do postaci: $4x^2 + 100x - 51 = 0$
	Rozwiązanie równania: $x = -\frac{51}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$ i podanie odpowiedzi: Szerokość ramki jest równa 5 mm.

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
5.	Zapisanie wzoru funkcji w postaci ogólnej: $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$
	Wyznaczenie x_w: $x_w = \frac{3}{4} \in \langle -2; 2 \rangle$
	Wyznaczenie y_w: $y_w = -\frac{25}{8}$
	Obliczenie wartości funkcji na końcach przedziału: $f(-2) = 12$, $f(2) = 0$
	Podanie odpowiedzi: Wartość najmniejsza: $f_{\min} = -\frac{25}{8}$, wartość największa: $f_{\max} = 12$.
6.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zapisanie równania: $6x + 8y = 40$, gdzie $x, y > 0$
	Zapisanie sumy pól prostokątów w postaci: $P(x) = 2x^2 + 3y^2 = \frac{59}{16}x^2 - \frac{45}{2}x + 75$
	Wyznaczenie współrzędnej wierzchołka x_w: $x_w = 3\frac{3}{59}$
	Obliczenie y: $y = 2\frac{42}{59}$
	Podanie odpowiedzi: Prostokąty mają wymiary $3\frac{3}{59} \times 6\frac{6}{59}$ i $2\frac{42}{59} \times 8\frac{8}{59}$
7.	Oznaczenie przez x obecnego wieku jubilata i zapisanie równania: $(x - 27)(x + 15) = 2015 - x$
	Przekształcenie równania do postaci: $x^2 - 11x - 2420 = 0$
	Obliczenie Δ: $\Delta = 11^2 + 4 \cdot 221 \cdot 20 = 11^2(1 + 80) = 99^2$
	Obliczenie pierwiastków: $x_1 = -44$, $x_2 = 55$
	Podanie odpowiedzi: Jubilat w roku 2015 obchodzi 55. urodziny.
8.	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} 100a + 10b = 20 \\ 900a + 30b = 90 \end{cases}$
	Rozwiązanie układu równań: $a = \frac{1}{20}$, $b = \frac{3}{2}$
	Zapisanie wzoru funkcji: $T(n) = \frac{1}{20}n^2 + \frac{3}{2}n$, $n \in \mathbf{N}$
	Zapisanie równania: $\frac{1}{20}n^2 + \frac{3}{2}n = 50$
	Rozwiązanie równania i wyznaczenie liczby kartek: 20

6. Funkcje wymierne

Zestaw A – odpowiedzi

1. **a)** $S-T=x^6-1\frac{3}{4}x^4+2x^2$; 5
   b) $S-T=x^4+3\sqrt{2}x^3-\frac{1}{2}x^2$; -9
2. **a)** $\frac{1}{4}x^3-x^2+\frac{3}{2}x$ **b)** $18x^3-15x^2+1$
   c) x^3+2x^2-x-3 **d)** $20x^3+4x^2+25$
3. **a)** $5x^2+x-1$ **b)** $-x^6-6x^4-x^3-9x^2-7x-1$
4. **a)** -120 **b)** 11 **c)** -80 **d)** 15
5. **a)** -4 **b)** -2 lub 0
6. **a)** -2 **b)** -3
7. **a)** $x=4$ **b)** $x=-3$ **c)** $x=-6$
8. **a)** 2 **b)** 1 **c)** 3 **d)** 2 **e)** 2 **f)** 3
9. **a)** $x=-5$, $x=0$, $x=5$ **b)** $x=-\frac{1}{2}$, $x=0$, $x=\frac{1}{2}$
   c) $x=-\frac{2}{3}$, $x=0$, $x=\frac{2}{3}$ **d)** $x=0$, $x=3$
   e) $x=-\frac{1}{2}$, $x=0$ **f)** $x=0$, $x=\frac{1}{2}$
   g) $x=-2$, $x=0$, $x=3$ **h)** $x=-3$, $x=-1$, $x=0$
   i) $x=-1$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=0$
10. **a)** $x=-1$, $x=0$, $x=4$ **b)** $x=-3$, $x=-2$, $x=0$,
    c) $x=-2$, $x=-\frac{1}{3}$, $x=0$ **d)** $x=-\frac{2}{3}$, $x=0$, $x=\frac{3}{2}$
    e) $x=0$, $x=\frac{1}{3}$ **f)** $x=-\frac{4}{3}$, $x=-1$, $x=0$
11. **a)** $y=\frac{8}{x}$ **b)** $y=-\frac{3}{x}$ **c)** $y=-\frac{2}{x}$ **d)** $y=\frac{3\sqrt{2}}{x}$
12. **a)** A, B **b)** C **c)** B
13. **a)** $f_{min}(3)=1$, $f_{max}(1)=3$
    b) $f_{min}(1)=-6$, $f_{max}(3)=-2$
14. **a)** $f(x)>-2$ dla $x\in(-2;2)$,
    $f(x)<1$ dla $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;\infty)$
    b) $x=-\frac{2}{3}$
15. **a)** $D=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $f(D)=\mathbf{R}\setminus\{-2\}$,
    maleje w $(-\infty;0)$ i w $(0;\infty)$
    b) $D=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $f(D)=\mathbf{R}\setminus\{1\}$,
    rośnie w $(-\infty;0)$ i w $(0;\infty)$
    c) $D=\mathbf{R}\setminus\{1\}$, $f(D)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$,
    maleje w $(-\infty;1)$ i w $(1;\infty)$
    d) $D=\mathbf{R}\setminus\{2\}$, $f(D)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$,
    rośnie w $(-\infty;2)$ i w $(2;\infty)$
16. **a)** $k=-5$ **b)** $k=7$ **c)** $k=-2{,}5$
17. **a)** $k=-2$ **b)** $k=\frac{5}{3}$ **c)** $k=\frac{1}{5}$
18. **a)** $D=\mathbf{R}\setminus\{-\frac{1}{2},0\}$, $\frac{2x-1}{x^2}$, -3
    b) $D=\mathbf{R}\setminus\{-2,0,2\}$, $\frac{1}{x^2-4}$, $-\frac{1}{3}$
    c) $D=\mathbf{R}\setminus\{1\}$, $\frac{x-1}{x^2+x+1}$, -2
    d) $D=\mathbf{R}\setminus\{2\}$, $\frac{x+4}{x-2}$, -1
19. **a)** $D=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\frac{1}{8x}$
    b) $D=\mathbf{R}\setminus\{-4,4\}$, $\frac{2x}{x^2-16}$
    c) $D=\mathbf{R}\setminus\{-3,-1\}$, $\frac{3x-1}{x^2+4x+3}$
    d) $D=\mathbf{R}\setminus\{-5,2\}$, $\frac{5x^2+12x-2}{x^2+3x-10}$
20. **a)** $D=\mathbf{R}\setminus\{0,2\}$, $\frac{x+2}{2x}$
    b) $D=\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}$, $2x^2-2x$
    c) $D=\mathbf{R}\setminus\{-3,-\frac{1}{5},0,3\}$, $\frac{10x-2}{x^2+3x}$
21. **a)** $x=1$ **b)** $x=\frac{2}{3}$ **c)** $x=\frac{1}{6}$
    d) $x=-1$, $x=\frac{1}{3}$ **e)** $x=-\frac{3}{2}$, $x=\frac{3}{2}$ **f)** $x=-2$, $x=5$
    g) $x=4$ **h)** $x=-1$, $x=\frac{3}{2}$ **i)** $x=1$, $x=\frac{3}{2}$
22. **a)** $a=\frac{3}{2}$ **b)** $f\left(-\frac{1}{2}\right)=1$, $f\left(\sqrt{3}+1\right)=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$
23. 90 km/h
24. 45 km/h i 54 km/h

Zestaw B – odpowiedzi

1. B 2. C 3. C 4. B 5. A 6. B 7. C 8. A

Zestaw C – odpowiedzi

1. $x=-3$, $x=0$, $x=3$
2. $a=-1$
3. $\sqrt{3}$
4. $a=9$, należy
6. $f(3\frac{1}{3})=0$, $f(x)\geqslant 0$ dla $x\in(2;3\frac{1}{3}\rangle$
7. $q=5$
8. $x=\frac{1}{2}$, $x=2$
9. $m=10$
10. $x=\frac{5}{8}$
11. $v=20$ km/h

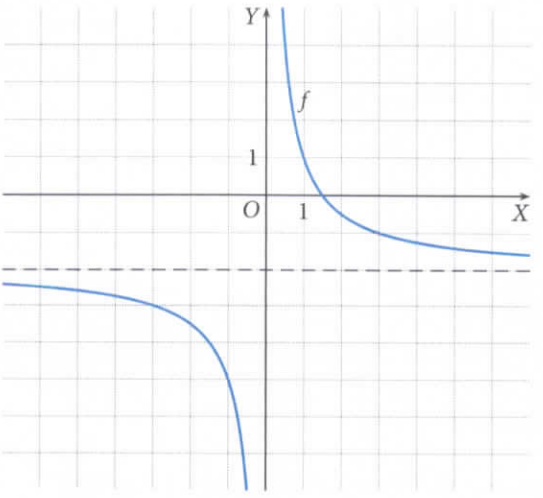
Zestaw D – odpowiedzi

1. $m=2\sqrt{3}-1$
3. **a)** $q=-2$ **b)** $x=2$ **c)** $f(\sqrt{2}-1)=3\sqrt{2}-2$
4. **a)** $f(x)=\frac{3}{x}-2$, $D=\mathbf{R}\setminus\{0\}$ **b)** $f_{min}(3)=-1$
5. 24 osoby
6. 60 km/h
7. Basen w pierwszym hotelu ma wymiary 30 m×8 m, a w drugim – 35 m×10 m lub basen w pierwszym hotelu ma wymiary 20 m×12 m, a w drugim – 25 m×14 m.
8. 15 dni

Zestaw C – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Zapisanie równania w postaci: $2x(x^2-9)=0$
	Rozwiązanie równania: $x=-3$, $x=0$, $x=3$
2.	Podstawienie do równania $x=-3$: $(2a+3)\cdot(-27)-7\cdot(-3)+5-a=0$
	Obliczenie a: $a=-1$
3.	Obliczenie współczynnika a: $a=\frac{3}{2}$
	Wyznaczenie szukanej liczby: $\sqrt{3}$
4.	Obliczenie współczynnika a: $a=9$
	Obliczenie $f(21)$: $f(21)=\frac{1}{2}$ oraz podanie odpowiedzi: punkt Q należy do wykresu funkcji
5.	Obliczenie $f\left(1-\sqrt{2}\right)$: $f\left(1-\sqrt{2}\right)=-2-2\sqrt{2}$
	Obliczenie $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$: $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)=2\sqrt{2}+2$ oraz zapisanie wniosku: $f\left(1-\sqrt{2}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)=0$
6.	Obliczenie miejsca zerowego funkcji: $x=\frac{10}{3}$
	Wyznaczenie argumentów, dla których $f(x)\geqslant 0$: $x\in\left(2;\frac{10}{3}\right\rangle$
7.	Zapisanie równania: $-9+q=-4$
	Obliczenie q: $q=5$
8.	Przekształcenie równania do postaci kwadratowej: $2x^2-5x+2=0$
	Rozwiązanie równania: $x=\frac{1}{2}$, $x=2$
9.	Przekształcenie równania $\frac{1}{4x}=5$ do postaci: $\frac{1}{x}=20$
	Zapisanie równania $2m=20$ oraz obliczenie m: $m=10$
10.	Założenie, że $x\neq\frac{1}{2}$, pomnożenie obu stron równania przez $2(1-2x)$
	Doprowadzenie równania do postaci: $8x=5$ i podanie odpowiedzi: $x=\frac{5}{8}$
11.	Zapisanie równania: $\frac{8}{v}=\frac{32}{v+60}$
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $v=20$ km/h

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Podstawienie do równania $x=\sqrt{3}$: $\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}-3+m\sqrt{3}-3=0$
	Przekształcenie równania do postaci $m\sqrt{3}=6-\sqrt{3}$
	Obliczenie m: $m=2\sqrt{3}-1$
2.	Wyłączenie n^2 przed nawias: $n^2\left(n^2-2n+1\right)$
	Przekształcenie wyrażenia do postaci $n^2(n-1)^2$
	Zauważenie, że jest to iloczyn kwadratów kolejnych liczb całkowitych, czyli jedna liczba jest parzysta, a druga jest nieparzysta
	Zauważenie, że kwadrat liczby parzystej jest podzielny przez $2^2=4$, zatem cały iloczyn jest podzielny przez 4
3. a)	Zapisanie równania: $\frac{6}{-2}+q=-5$
	Obliczenie q: $q=-2$
3. b)	Zapisanie równania: $\frac{6}{x+1}-2=0$
	Obliczenie miejsca zerowego funkcji: $x=2$
3. c)	Obliczenie wartości $f(\sqrt{2}-1)$: $f(\sqrt{2}-1)=3\sqrt{2}-2$
4. a)	Zapisanie równania: $\frac{3}{\frac{3}{2}}-k=0$
	Obliczenie k: $k=2$ oraz zapisanie wzoru funkcji f: $f(x)=\frac{3}{x}-2$, $D=\mathbf{R}\setminus\{0\}$
	Naszkicowanie wykresu funkcji f 

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
4. b)	Odczytanie z wykresu najmniejszej wartości funkcji w podanym przedziale: $f(3) = -1$
5.	Zapisanie równania $xy = 1800$, gdzie x – liczba uczniów, y – cena biletu
	Zapisanie równania $(x-4)(y+15) = 1800$
	Zapisanie równania z jedną niewiadomą: $(x-4)\left(\frac{1800}{x}+15\right) = 1800$
	Przekształcenie równania do postaci: $x^2 - 4x - 480 = 0$
	Obliczenie x: $x = 24$ (osoby)
6.	Wyznaczenie czasu jazdy pierwszego samochodu: $\frac{240}{v+20}$, gdzie v jest szukaną prędkością
	Wyznaczenie czasu jazdy drugiego samochodu: $\frac{240}{v}$
	Zapisanie równania: $\frac{240}{v+20} + 1 = \frac{240}{v}$
	Przekształcenie równania do postaci: $v^2 + 20v - 4800 = 0$
	Obliczenie v i podanie odpowiedzi: $v = 60$ km/h
7.	Zapisanie równania $xy = 240$, gdzie x, y – wymiary basenu w pierwszym hotelu
	Zapisanie równania: $(x+5)(y+2) = 350$
	Zapisanie równania z jedną niewiadomą: $(x+5)\left(\frac{240}{x}+2\right) = 350$
	Przekształcenie równania do postaci $x^2 - 50x + 600 = 0$ i podanie rozwiązania: $x = 20$ lub $x = 30$
	Wyznaczenie y: jeśli $x = 20$, to $y = 12$; jeśli $x = 30$, to $y = 8$ i zapisanie wymiarów basenów: Basen w pierwszym hotelu ma wymiary 30 m × 8 m, a w drugim hotelu – 35 m × 10 m lub basen w pierwszym hotelu ma wymiary 20 m × 12 m, a w drugim hotelu – 25 m × 14 m.
8.	Zapisanie równania: $xy = 480$, gdzie x jest liczbą stron przeczytanych każdego dnia, y – liczbą dni
	Zapisanie równania: $(x+8)(y-3) = 480$
	Zapisanie równania z jedną niewiadomą: $\left(\frac{480}{y}+8\right)(y-3) = 480$
	Przekształcenie równania do postaci: $y^2 - 3y - 180 = 0$
	Obliczenie y: $y = 15$ dni

7. Funkcje trygonometryczne

Zestaw A – odpowiedzi

1. **a)** $a = 9$, $b = 12$ **b)** $b = 48$, $c = 50$
   c) $a = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, $c = 4$ **d)** $a = 3$, $b = 2$
2. **a)** $a = b = 4\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$
   b) $b = 2$, $c = 4$, $\alpha = 60^\circ$
   c) $b = \sqrt{6} - 2$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$
3. **a)** $\operatorname{tg}\alpha = 4$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{4}$ **b)** $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}5$, $\operatorname{tg}\beta = 0{,}4$
4. **a)** $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$ **b)** $\alpha = \beta = 45^\circ$
5. **a)** 1 **b)** 2 **c)** 1 **d)** $\frac{1}{2}$
6. **a)** $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$
   b) $\sin\alpha = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}$
   c) $\sin\alpha = \frac{60}{61}$, $\cos\alpha = \frac{11}{61}$
   d) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$
7. **a)** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ **b)** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$ **c)** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$
8. **a)** $-\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{20}{81}$ **c)** $\frac{9}{5}$
11. **a)** $\alpha = 30^\circ$ **b)** $\alpha = 45^\circ$ **c)** $\alpha = 60^\circ$ **d)** $\alpha = 45^\circ$
12. **a)** $\alpha = 45^\circ$ **b)** $\alpha = 45^\circ$ **c)** $\alpha = 30^\circ$ **d)** $\alpha = 30^\circ$
13. **a)** $\frac{16}{9}$ **b)** $\frac{7}{18}$
14. **a)** 1,96 **b)** 0,48 **c)** 1,4
15. $P = 12 + 9\sqrt{3}$, $Obw = 20 + 6\sqrt{3}$
16. $\alpha \approx 74^\circ$
17. $P \approx 49{,}88$, $Obw \approx 34{,}63$
18. 37 m
19. **a)** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$
    b) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2$
    c) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$
    d) $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = -1$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$
20. **a)** $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$,
    $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha - \cos\beta = -\frac{7}{5}$,
    $\sin\alpha - \sin\beta = -\frac{1}{5}$
    b) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$,
    $\cos\beta = -\frac{12}{13}$, $\cos\alpha - \cos\beta = \frac{7}{13}$,
    $\sin\alpha - \sin\beta = \frac{7}{13}$
21. **a)** -3 **b)** -1 **c)** 1
22. **a)** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$
    b) $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$
    c) $\cos\alpha = -0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}75$
23. **a)** 1,7851 **b)** $-1{,}8473$ **c)** $-0{,}2125$
24. **a)** $\frac{1}{4}$ **b)** 0 **c)** $\sqrt{2}$
    d) $\frac{2}{3}$ **e)** $-6 - 4\sqrt{3}$ **f)** -1

Zestaw B – odpowiedzi

1. D 2. D 3. C 4. A 5. B 6. C 7. D 8. C

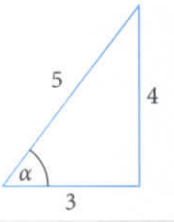
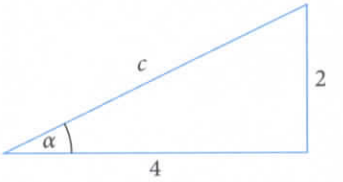
Zestaw C – odpowiedzi

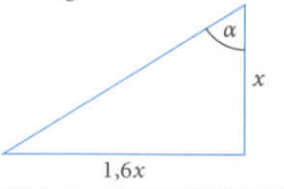
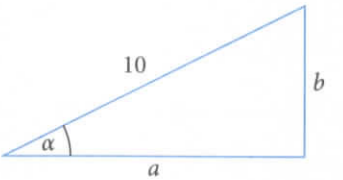
1. $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
2. $\frac{43}{25}$
3. $\frac{7}{5}$
4. $\frac{17}{8}$
5. $\frac{11}{10}$
6. $\frac{2}{5}$
7. $\frac{47}{15}$
8. $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}6$
10. $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$
11. $10 + 6\sqrt{5}$
12. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Zestaw D – odpowiedzi

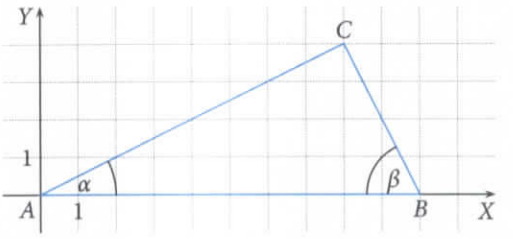
1. $\frac{2}{5}$
2. $\frac{2}{\sin\alpha}$, $\sqrt{3} + 1$
5. $\frac{16}{9}$
6. **b)** $\frac{1}{3}$
7. $\alpha = 60^\circ$
8. $\sin\alpha = \frac{1}{3}$
9. $P = \frac{12 + 8\sqrt{2}}{3}$

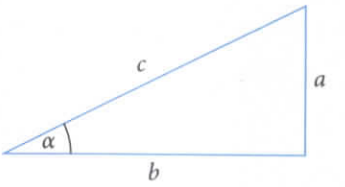
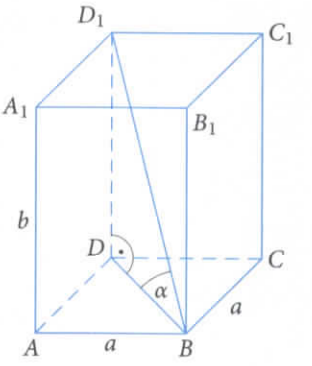
Zestaw C – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Przekształcenie równania $\operatorname{tg}^2\alpha - 8 = 0$ do postaci $\frac{1}{8}\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ i zapisanie równania: $\sin^2\alpha + \frac{1}{8}\sin^2\alpha = 1$
	Obliczenie $\sin\alpha$: $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
2.	Obliczenie $\sin^2\alpha$: $\sin^2\alpha = \frac{16}{25}$
	Obliczenie wartości wyrażenia $3 - 2\sin^2\alpha$: $3 - 2\sin^2\alpha = \frac{43}{25}$
3. I sposób	Przekształcenie równania $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ do postaci $\sin\alpha = \frac{4}{3}\cos\alpha$ i zapisanie równania: $\frac{16}{9}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
	Obliczenie wartości funkcji $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ i obliczenie sumy: $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$
3. II sposób	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Obliczenie sumy $\sin\alpha + \cos\alpha$: $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$
4.	Przekształcenie wyrażenia $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$ do postaci: $\sqrt{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha}$
	Obliczenie wartości wyrażenia $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$: $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{17}{8}$
5. I sposób	Przekształcenie wyrażenia $\operatorname{tg}\alpha = 2$ do postaci $\sin\alpha = 2\cos\alpha$ i obliczenie wartości $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ z wykorzystaniem jedynki trygonometrycznej: $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$
	Podstawienie otrzymanych wartości do wyrażenia $\frac{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$ i obliczenie jego wartości: $\frac{11}{10}$
5. II sposób	Przekształcenie wyrażenia $\operatorname{tg}\alpha = 2$ do postaci $\sin^2\alpha = 4\cos^2\alpha$ i obliczenie wartości $\sin^2\alpha$ i $\cos^2\alpha$: $\sin^2\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos^2\alpha = \frac{1}{5}$
	Przekształcenie wyrażenia $\frac{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$ do postaci $\sin^2\alpha + 3\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$ i obliczenie jego wartości: $\frac{11}{10}$
6.	Wykonanie i opisanie rysunku pomocniczego i obliczenie długości przeciwprostokątnej: $c = 2\sqrt{5}$ 
	Obliczenie wartości iloczynu $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$: $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{2}{c} \cdot \frac{4}{c} = \frac{2}{5}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
7.	Zapisanie wzoru: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
	Obliczenie $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{15}$ i podanie wyniku: $\frac{47}{15}$
8.	Wykonanie i opisanie rysunku pomocniczego 
	Obliczenie tangensa większego z kątów ostrych: $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}6$
9.	Zapisanie lewej strony tożsamości w postaci: $\sin^2\alpha \cdot \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \cos^2\alpha$
	Zapisanie prawej strony tożsamości w postaci: $1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$
10.	Zapisanie warunku $\operatorname{tg}\alpha = 2\sin\alpha$ i przekształcenie go do postaci $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, gdzie α jest jednym z kątów ostrych w trójkącie
	Obliczenie miar kątów ostrych w trójkącie: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$
11.	Wykonanie i opisanie rysunku pomocniczego oraz przekształcenie wyrażenia $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ do postaci: $a = 2b$ 
	Obliczenie długości boków trójkąta z twierdzenia Pitagorasa: $a = 4\sqrt{5}$, $b = 2\sqrt{5}$ i obliczenie obwodu trójkąta: $10 + 6\sqrt{5}$
12.	Wyznaczenie punktu P leżącego na prostej $y = -3x$, np. $P(1, -3)$
	Obliczenie $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$
13.	Wykorzystanie zależności $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ i zapisanie lewej strony tożsamości w postaci: $L = \frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1} = \frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$
	Dalsze przekształcenie wyrażenia: $L = \frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \sin^2\alpha = P$

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Wykonanie rysunku pomocniczego i zauważenie, że kąt przy wierzchołku C jest prosty 
	Obliczenie długości boków trójkąta: $\|AC\| = 4\sqrt{5}$, $\|BC\| = 2\sqrt{5}$, $\|AB\| = 10$
	Obliczenie sinusów kątów ostrych: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
	Obliczenie iloczynu sinusów: $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{2}{5}$
2.	Przekształcenie wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ do postaci: $\frac{2\sin\alpha}{1-\cos^2\alpha}$
	Skorzystanie z jedynki trygonometrycznej i przekształcenie wyrażenia do postaci: $\frac{2}{\sin\alpha}$
	Obliczenie wartości wyrażenia dla $\sin\alpha = \sqrt{3} - 1$: $\frac{2}{\sin\alpha} = \sqrt{3} + 1$
3.	Przekształcenie równania $\operatorname{tg}\alpha = \cos\alpha$ do postaci: $\sin\alpha = \cos^2\alpha$
	Przekształcenie wyrażenia $\sin\alpha(1 + \sin\alpha)$ do postaci: $\sin\alpha + \sin^2\alpha$
	Wykorzystanie związku $\sin\alpha = \cos^2\alpha$ do uzasadnienia równości: $\sin\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
4.	Wykorzystanie związku $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ i zapisanie lewej strony tożsamości w postaci: $(1 + \sin\alpha) \cdot \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha}$
	Przekształcenie lewej strony tożsamości do postaci: $L = \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$
	Wykorzystanie związku $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i przekształcenie lewej strony tożsamości do postaci: $L = \frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha = P$
	Sformułowanie wniosku: Podana równość jest tożsamością.
5.	Przekształcenie wyrażenia $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$ do postaci: $1 - 2\sin\alpha\cos\alpha$
	Obliczenie wartości iloczynu $2\sin\alpha\cos\alpha$: $2\sin\alpha\cos\alpha = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$
	Przekształcenie wyrażenia $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$ do postaci: $1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$
	Obliczenie wartości wyrażenia $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$: $1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + \frac{7}{9} = \frac{16}{9}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
6. a)	Wykonanie rysunku pomocniczego i zapisanie $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$ w postaci: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ 
	Zapisanie różnicy $\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha$ w postaci: $\frac{a\cdot(b-c)}{b\cdot c}$
	Uzasadnienie, że różnica ta jest ujemna, bo w trójkącie prostokątnym długość przyprostokątnej b jest mniejsza od długości przeciwprostokątnej c
6. b)	Obliczenie wartości $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \frac{1}{3}$
	Przekształcenie wyrażenia $\cos^3\alpha + \cos\alpha\cdot\sin^2\alpha$ do postaci $\cos\alpha\cdot(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \cos\alpha$ i obliczenie jego wartości: $\frac{1}{3}$
7.	Wykorzystanie związku $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$ w przekształceniu lewej strony równości
	Zapisanie lewej strony równości w postaci: $1 + 4\sin^2\alpha$
	Obliczenie wartości $\sin\alpha$: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$
	Wyznaczenie miary kąta α: $\alpha = 60^\circ$
8.	Wykonanie i opisanie rysunku pomocniczego 
	Zapisanie pola powierzchni całkowitej P_c i pola podstawy P_p w postaci: $P_c = 2a^2 + 4ab$, $P_p = a^2$ oraz zapisanie związku $P_c = 4P_p$ w postaci: $2a^2 + 4ab = 4a^2$
	Przekształcenie równania do postaci $a(a-2b) = 0$ i zapisanie rozwiązania: $a = 2b$
	Obliczenie długości boków trójkąta DBD_1: $\lvert DB\rvert = 2b\sqrt{2}$, $\lvert BD_1\rvert = 3b$
	Obliczenie sinusa kąta α: $\sin\alpha = \frac{1}{3}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
8.	Zauważenie, że kąty przy wierzchołkach D i B są proste
	Obliczenie pola trójkąta równoramiennego prostokątnego ABC: $P_{\triangle ABC} = 4$
	Wykorzystanie równości $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ do obliczenia długości boku DC: $\lvert DC\rvert = \frac{4\sqrt{3}}{3}$
	Obliczenie długości boku AD: $\lvert AD\rvert = \frac{4}{3}\sqrt{6}$ i pola trójkąta ACD: $P_{\triangle ACD} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$
	Obliczenie pola P czworokąta $ABCD$: $P = \frac{12+8\sqrt{2}}{3}$

8. Funkcje wykładnicze i logarytmy

Zestaw A – odpowiedzi

1. **a)** $2^{\frac{3}{4}}$ **b)** $2^{\frac{7}{5}}$ **c)** 2^3 **d)** $2^{-\frac{2}{3}}$ **e)** $2^{-\frac{3}{4}}$
2. **a)**, **b)**, **d)**, **f)** tak **c)**, **e)** nie
3. **a)** 17 **b)** 2401 **c)** 16
4. **a)** $x = 9$ **b)** $x = 2$
   c) $x = 3$ **d)** $x = 3$
   e) $x = 2$ **f)** $x = 3$
5. **a)** $x < 0$ **b)** $x > -2$ **c)** $x > -4$
6. **a)** $g(x) = 2^{x+3}$ **b)** $g(x) = 2^{x+2}$
   c) $g(x) = 2^{x-1}$
7. **a)** $(1,1)$ **b)** $(1,4)$
   c) $(-1,2)$ **d)** $(1,-2)$
8. **a)** $(0,8)$, funkcja rosnąca
   b) $(0,-1)$, $(2,0)$, funkcja rosnąca
   c) $(0,3)$, funkcja malejąca
   d) $(0,4)$, funkcja malejąca
   e) $(0,16)$, funkcja malejąca
   f) $(0,-1)$, funkcja rosnąca
9. **a)** $a = -1$ **b)** $a = -\frac{4}{9}$
10. **a)**, **c)** należy **b)** nie należy
11. **a)** $a = 8$, $b = -2$
    b) $a = 8$, $b = -\frac{1}{3}$
    c) $a = 1$, $b = -3$
    d) $a = 2$, $b = 2$
12. **a)** $a = 6$ **b)** $a = \frac{1}{5}$
    c) $a = 5$ **d)** $a = 1{,}21$
    e) $a = 9$ **f)** $a = \frac{9}{4}$
13. **a)** $x = 16$ **b)** $x = 8$ **c)** $x = 5$
14. **a)** -2 **b)** 3
15. **a)**, **b)**, **c)** tak
16. **a)**, **c)** nie **b)** tak
17. **a)** $x = 36$ **b)** $x = 2{,}5$ **c)** $x = \frac{1}{3}$ **d)** $x = 3$
18. **a)** 1,301 **b)** 0,903 **c)** −0,699 **d)** −0,602

Zestaw B – odpowiedzi

1. A 2. A 3. C 4. C 5. C 6. B 7. B 8. D

Zestaw C – odpowiedzi

1. 1
2. $\frac{\sqrt{2}}{8}$
3. $32^{50} > 4^{100}$
4. funkcja rosnąca
5. $g(-4) = -\frac{242}{81}$
6. $a = \frac{1}{4}$
7. 1
8. $x = \frac{1}{2}$
9. 1
10. 4
11. a

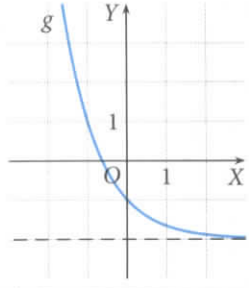
Zestaw D – odpowiedzi

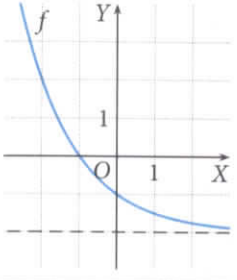
1. $d < b < c < a$
2. $a = -12$, $x = -2$, $x = \frac{1}{3}$, $x = 2$
4. $m = -2$
5. $x = 2^3$
7. $a = -1$, $b = -2$, $f(x) > 0$ dla $x < -1$
8. 27

Zestaw C – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Przekształcenie wyrażenia do postaci: $\frac{2^{\sqrt{3}} \cdot 3^{\sqrt{3}} \cdot 3^{-\sqrt{3}}}{2^{\sqrt{3}}}$
	Obliczenie wartości wyrażenia: 1
2.	Zapisanie odwrotności liczby w postaci: $\left(0{,}125 \cdot \sqrt[4]{128}\right)^2$ i wykonanie działań na potęgach: $2^{-\frac{5}{2}}$
	Obliczenie liczby odwrotnej: $2^{-\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$
3.	Przekształcenie liczb do postaci: np. 2^{200} i 2^{250}
	Podanie odpowiedzi: większa jest liczba 32^{50}
4.	Przekształcenie wzoru funkcji do postaci: $f(x) = (3+2\sqrt{2})^x$
	Zauważenie, że $3+2\sqrt{2} > 1$ i podanie odpowiedzi: funkcja f jest rosnąca
5.	Zapisanie wzoru funkcji g: $g(x) = 3^x - 3$
	Obliczenie wartości funkcji g dla $x = -4$: $g(-4) = -2\frac{80}{81} = -\frac{242}{81}$
6.	Podstawienie współrzędnych punktu do wzoru funkcji: $2 = a^{-\frac{1}{2}}$
	Obliczenie a: $a = \frac{1}{4}$
7.	Obliczenie sumy: $\log_4 12 - \log_4 3 = \log_4 4 = 1$
	Obliczenie średniej: 1
8.	Obliczenie b: $b = -\frac{3}{2}$
	Wyznaczenie miejsca zerowego funkcji f: $x = \frac{1}{2}$
9.	Obliczenie sumy: $\log 3 + \log 4 = \log 12$
	Obliczenie różnicy $\log 24 - \log 2 = \log 12$ i podanie wartości wyrażenia: 1
10.	Obliczenie a, b i c: $a = 2^5$, $b = -2$, $c = -1$
	Obliczenie wartości wyrażenia $(abc)^{\frac{1}{3}}$: $(abc)^{\frac{1}{3}} = 4$
11.	Obliczenie a, b i c: $a = 10$, $b = 6{,}25$, $c = 2$
	Podanie odpowiedzi: największa jest liczba a
12.	Przekształcenie wyrażenia $2\log_{0,1} 3 - \log_{0,1} 27$ do postaci: $-\log_{0,1} 3$ lub $\log_{0,1} \frac{1}{3}$
	Przekształcenie wyrażenia $2\log_{0,1} 6 - \log_{0,1} 12$ do postaci: $\log_{0,1} 3$; obliczenie sumy wyrażeń: 0 i zauważenie, że jest to liczba wymierna
13.	Przekształcenie wyrażenia: $1 + 2a = 1 + 2\log_2 3 = 1 + \log_2 9$
	Przekształcenie wyrażania: $1 + \log_2 9 = \log_2 2 + \log_2 9$ i podanie odpowiedzi

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Zapisanie liczby a w postaci: $\left(\frac{3}{5}\right)^{2,1}$
	Zapisanie liczby b w postaci: $\left(\frac{3}{5}\right)^{3,2}$
	Zapisanie liczby c w postaci: $\left(\frac{3}{5}\right)^{2\sqrt{2}}$
	Zapisanie liczby d w postaci: $\left(\frac{3}{5}\right)^{4,8}$
	Uporządkowanie potęg: $\left(\frac{3}{5}\right)^{4,8} < \left(\frac{3}{5}\right)^{3,2} < \left(\frac{3}{5}\right)^{2\sqrt{2}} < \left(\frac{3}{5}\right)^{2,1}$
2.	Obliczenie wartości wyrażenia: $9^{\sqrt{27}+1} : 27^{2\sqrt{3}+1} = \frac{1}{3}$
	Zapisanie równania: $\frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3}a + 4 = 0$
	Rozwiązanie równania: $a = -12$
	Przekształcenie równania $3x^3 - x^2 - 12x + 4 = 0$ do postaci: $(3x-1)(x-2)(x+2) = 0$
	Podanie rozwiązań równania: $x = \frac{1}{3}$ lub $x = 2$ lub $x = -2$
3.	Odczytanie z wykresu wartości parametru a: $a = -2$
	Naszkicowanie wykresu funkcji: $g(x) = 3^{-x} - 2$ 
	Obliczenie wartości funkcji g dla $x = -\frac{1}{2}$ i $x = \frac{1}{2}$: $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - 2$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - 2$
	Obliczenie różnicy $g\left(-\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ i porównanie jej z wartością $2\operatorname{tg} 30^\circ$: $\frac{2\sqrt{3}}{3} = 2\operatorname{tg} 30^\circ$
4.	Zauważenie, że funkcja f jest malejąca, gdy $0 < 2 - \frac{1}{3}m^2 < 1$
	Rozwiązanie nierówności $2 - \frac{1}{3}m^2 > 0$: $m \in \left(-\sqrt{6}; \sqrt{6}\right)$
	Rozwiązanie nierówności $2 - \frac{1}{3}m^2 < 1$: $m \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; \infty\right)$
	Podanie zbioru rozwiązań układu nierówności: $m \in \left(-\sqrt{6}; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; \sqrt{6}\right)$ i najmniejszej liczby całkowitej m w tym zbiorze: $m = -2$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
5.	Przekształcenie równania do postaci: $2^{46}x - 2^{45}x = 2^{16} \cdot 2^{32}$
	Przekształcenie równania do postaci: $2^{45}x(2-1) = 2^{48}$
	Przekształcenie równania do postaci: $x = 2^{48} : 2^{45}$
	Podanie odpowiedzi: $x = 2^3$
6.	Podstawienie liczby $x = 3^{54}$ do równania: $243^{11} - 81^{14} + 7 \cdot 3^{54} = 9^{27}$
	Przekształcenie lewej strony równania: $3^{55} - 3^{56} + 7 \cdot 3^{54}$
	Wykonanie działania $3^{55} - 3^{56} + 7 \cdot 3^{54} = 3^{54}$ i porównanie z prawą stroną równania $9^{27} = 3^{54}$
7.	Zauważenie, że $b = -2$
	Zapisanie równości: $-\frac{3}{2} = 2^a - 2$
	Obliczenie a: $a = -1$
	Naszkicowanie wykresu funkcji: $f(x) = 2^{-x} - 2$ 
	Odczytanie z wykresu zbioru rozwiązań nierówności $f(x) > 0$: $x < -1$
8.	Obliczenie a: $a = 3^5$
	Obliczenie b: $b = -3$
	Obliczenie c: $c = \sqrt{3}$
	Obliczenie wartości wyrażenia: $\frac{\sqrt{ab^2}}{c} = 27$
9.	Zapisanie warunku, jaki spełniają kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego: $(2 + 2\log_2 6) - (1 + \log_2 24) = (4 + 3\log_2 3) - (2 + 2\log_2 6)$
	Przekształcenie prawej strony równości do postaci: $\log_2 3$
	Przekształcenie lewej strony równości do postaci: $\log_2 3$
	Porównanie obu stron równości
10.	Przekształcenie równości $\log_2 \frac{1}{9} = -2a$ do postaci: $a = \log_2 3$
	Przekształcenie równości $\log_2 \frac{4}{3} = 2 - b$ do postaci: $b = \log_2 4 - \log_2 \frac{4}{3}$
	Obliczenie $b = \log_2 3$ i porównanie obu stron

9. Ciągi

Zestaw A – odpowiedzi

1. **a)** $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = \frac{1}{2}$
   b) $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 27$, $a_4 = 256$
   c) $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$
2. **a)** 4, $a_1 = 10$
   b) 2, $a_1 = 8$
   c) 5, $a_2 = 8$
3. **a)** a_2
   b) wszystkie wyrazy są różne od zera
   c) a_1
4. **a)** $a_n < 10$ dla $n \leqslant 35$
   b) $a_n < 8$ dla $n \leqslant 3$
   c) $a_n < 6$ dla $n \leqslant 5$
5. **a)** $a_{13} = 48$ **b)** $a_{13} = 1 + 6\sqrt{2}$ **c)** $a_{13} = -\frac{11}{3}$
6. **a)**, **c)** tak **b)** nie
7. $a_1 = 1 + \log_2 3$, $r = \log_2 3$
8. **a)** $a_n = 12 - 2n$
   b) $a_n = \frac{1}{3}(n - 19)$
   c) $a_n = \sqrt{3} + (n-1)(1 - \sqrt{3})$
9. $a_{20} = 136$
10. **a)** $a_1 = 3$, $r = 5$
    b) $a_1 = -4$, $r = 3$
11. **a)** $x = 1$
    b) $x = \frac{27}{4}$, $y = \frac{15}{2}$, $z = \frac{33}{4}$
12. 80
13. promień okręgu jest równy r
14. **a)** 1584 **b)** 1326
15. 99
16. 885
17. **a)** $x = 70$
    b) $x = \frac{13}{3}$
18. **a)** -24, 48, -96, $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$
    b) 8, $\frac{16}{3}$, $\frac{32}{9}$, $a_n = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
    c) $5 + 2\sqrt{6}$, $9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$, $49 + 20\sqrt{6}$, $a_n = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{n-1}$
19. **a)** $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
    b) $a_n = \frac{81}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
    c) $a_n = (-3) \cdot (-2)^{n-1}$
20. **a)** $a_1 = -6$, $q = 3$, $a_4 = -162$
    b) $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{16}$
    c) $a_1 = -6$, $q = -2$, $a_4 = 48$
    d) $a_1 = -2$, $q = 2$, $a_4 = -16$
21. **a**, **c)** nie **b)**, **d)** tak
22. **a)** $a_1 = \frac{64}{25}$, $q = \frac{5}{4}$
    b) $a_1 = 3 - 2\sqrt{2}$, $q = \sqrt{2} + 1$
23. **a)** $\frac{211}{4}$ **b)** 85
24. $\frac{1023}{256}\pi$
25. 14 693,28 zł
26. **a)** 26 010 zł **b)** 26 015,10 zł **c)** 26 018,54 zł

Zestaw B – odpowiedzi

1. D **2.** B **3.** B **4.** B **5.** C **6.** B **7.** B **8.** A **9.** C

Zestaw C – odpowiedzi

1. $a_2 = 0$, $a_5 = \frac{3}{25}$
2. pięć wyrazów
3. $x = 1$
5. $x = 7$
6. $a_{15} = 72$
7. $r = -\frac{2}{3}$
8. $a_7 = 21$
9. 1430
10. $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$
11. $a = 9$, $b = 6$
12. $x = 3$ lub $x = 6$

Zestaw D – odpowiedzi

1. dla $n = 4$
2. **a)** 39 **b)** $x = \frac{31}{14}$
3. 36
4. $a_n = 23 - 2n$, $n = 11$
5. **a)** $a_1 = -11$, $r = 2$ **b)** jest **c)** dla $n = 6$
6. $a = 9$, $b = 15$
7. $a = 7$, $b = 11$, $c = 15$ lub $a = 28$, $b = 11$, $c = -6$
8. 8000 zł

Zestaw C – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Obliczenie a_2: $a_2 = 0$
	Obliczenie a_5: $a_5 = \frac{3}{25}$
2.	Zapisanie nierówności $n^2 - 2n - 24 < 0$ i przekształcenie jej do postaci: $(n-6)(n+4) < 0$
	Rozwiązanie tej nierówności dla liczb naturalnych: $n < 6$ i podanie odpowiedzi: 5 wyrazów
3.	Zapisanie zależności między kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego: $3-(x-2) = (x+6)-3$
	Obliczenie x: $x = 1$
4.	Przekształcenie średniej arytmetycznej wyrazów a_1 i a_3 do postaci: $\frac{m+3}{6}$
	Stwierdzenie, że dla każdej wartości m: $\frac{a_1+a_3}{2} = a_2$ i sformułowanie odpowiedzi: Dla każdej wartości m ciąg jest arytmetyczny.
5.	Zapisanie: $a_1 = 2$, $a_2 = x-3$ i wyznaczenie różnicy ciągu: $r = (x-3)-2 = x-5$
	Zapisanie równania: $8 = a_4 = a_1 + 3r = 2 + 3(x-5)$ i obliczenie $x = 7$
6.	Zauważenie, że różnica ciągu jest równa 5 i zapisanie równania: $12 = a_3 = a_1 + 2r = a_1 + 10$
	Wyznaczenie $a_1 = 2$ i obliczenie piętnastego wyrazu ciągu: $a_{15} = a_1 + 14r = 72$
7.	Zapisanie równości $a_5 = a_2 - 2$ z wykorzystaniem pierwszego wyrazu ciągu a_1 i różnicy r: $a_1 + 4r = a_1 + r - 2$
	Obliczenie różnicy ciągu: $r = -\frac{2}{3}$
8.	Zapisanie równania $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 105$ za pomocą siódmego wyrazu ciągu a_7 i różnicy r: $(a_7 - 2r) + (a_7 - r) + a_7 + (a_7 + r) + (a_7 + 2r) = 105$
	Obliczenie siódmego wyrazu ciągu: $a_7 = 21$
9.	Zauważenie, że składniki sumy są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 5$ i różnicy $r = 4$ oraz zapisanie ostatniego składnika sumy w postaci: $105 = 5 + (n-1)\cdot 4$
	Obliczenie liczby składników: $n = 26$ oraz sumy: $S_{26} = 1430$
10.	Obliczenie ilorazu ciągu: $q = \frac{a_3}{a_2} = 5$
	Zapisanie wzoru ogólnego ciągu: $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$
11.	Wykorzystanie wzoru na czwarty wyraz ciągu $a_4 = a_1 \cdot q^3$ do obliczenia ilorazu ciągu: $q = \frac{2}{3}$
	Obliczenie a i b: $a = a_2 = 9$ i $b = a_3 = 6$
12.	Zapisanie zależności między kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego: $x^2 = 9 \cdot (x-2)$
	Rozwiązanie równania: $x = 3$ lub $x = 6$ i zauważenie, że oba rozwiązania spełniają założenie o monotoniczności ciągu

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Zapisanie piątego i ósmego wyrazu ciągu za pomocą wyrazu pierwszego i różnicy: $a_1 + 4r = 2$ oraz $a_1 + 7r = 14$
	Obliczenie a_1 i r: $a_1 = -14$, $r = 4$
	Zapisanie wzoru ogólnego ciągu: $a_n = -14 + 4(n-1)$
	Zapisanie wzoru na n początkowych wyrazów ciągu i przekształcenie go do postaci: $S_n = 2n^2 - 16n$
	Zauważenie, że funkcja $f(n) = 2n^2 - 16n$ osiąga najmniejszą wartość dla $n = 4$
2. a)	Zapisanie i rozwiązanie nierówności $2 - \frac{1}{n} < 1{,}975$: $n < 40$
	Podanie odpowiedzi: 39 wyrazów tego ciągu to liczby mniejsze od 1,975
2. b)	Zapisanie związku między kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego: $a_7 - a_2 = x - a_7$, czyli $x = 2a_7 - a_2$
	Obliczenie drugiego i siódmego wyrazu ciągu (a_n): $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_7 = \frac{13}{7}$
	Obliczenie x: $x = \frac{31}{14}$
3.	Wyrażenie boków trójkąta za pomocą drugiego wyrazu i różnicy ciągu arytmetycznego: $a = a_2 - r$, $b = a_2$, $c = a_2 + r$, gdzie c jest przeciwprostokątną oraz ułożenie równania: $a_2^2 + (a_2 - r)^2 = (a_2 + r)^2$
	Przekształcenie równania do postaci $a_2(a_2 - 4r) = 0$, odrzucenie rozwiązania $a_2 = 0$ i zapisanie zależności $a_2 = 4r$
	Ułożenie równania $\frac{1}{2} \cdot 3r \cdot 4r = 54$ i obliczenie r: $r = 3$
	Obliczenie obwodu trójkąta: 36
4.	Zapisanie sumy dziesięciu początkowych wyrazów za pomocą wyrazu pierwszego i różnicy i ułożenie równania $2a_1 + 9r = 24$
	Ułożenie równania $a_1 + (a_1 + 2r) + (a_1 + 4r) + (a_1 + 6r) + (a_1 + 8r) = 65$ i przekształcenie go do postaci $a_1 + 4r = 13$
	Obliczenie pierwszego wyrazu i różnicy ciągu: $a_1 = 21$, $r = -2$ oraz zapisanie wzoru ogólnego: $a_n = 21 - 2(n-1)$
	Obliczenie a_7 i a_{10}: $a_7 = 9$, $a_{10} = 3$ oraz ilorazu q: $q = \frac{1}{3}$
	Wyznaczenie liczby n takiej, że $a_n = \frac{1}{3} \cdot a_{10}$ z równania $21 - 2(n-1) = 1$: $n = 11$
5. a)	Zapisanie siódmego i jedenastego wyrazu ciągu za pomocą wyrazu pierwszego i różnicy: $a_1 + 6r = 1$ oraz $a_1 + 10r = 9$
	Obliczenie a_1 i r: $a_1 = -11$, $r = 2$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
5. b)	Obliczenie ósmego wyrazu ciągu: $a_8 = 3$
	Sprawdzenie, że $\frac{a_8}{a_7} = 3 = \frac{9}{3} = \frac{a_{11}}{a_8}$ i podanie odpowiedzi: ciąg (a_7, a_8, a_{11}) jest geometryczny
5. c)	Zapisanie sumy n początkowych wyrazów ciągu (a_n) i przekształcenie jej do postaci: $S_n = n^2 - 12n$
	Wykorzystanie właściwości funkcji kwadratowej do sformułowania odpowiedzi: S_n jest najmniejsza dla $n = 6$
6.	Zapisanie zależności między kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego: $2a = b + 3$
	Zapisanie zależności między kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego: $b^2 = 25a$
	Ułożenie równania $4a^2 - 37a + 9 = 0$
	Rozwiązanie równania: $a = \frac{1}{4}$ lub $a = 9$ i wybór prawidłowej odpowiedzi: $a = 9$ i $b = 15$
7.	Zapisanie związku między kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego: $2b = a + c$
	Podstawienie otrzymanej zależności do równania $a + b + c = 33$ i obliczenie b: $b = 11$
	Zapisanie związku między kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego: $(b + 3)^2 = a(c + 13)$ i przedstawienie go w postaci $a(c + 13) = 196$
	Wykorzystanie związku $c = 22 - a$ i przekształcenia równania $a(c + 13) = 196$ do postaci: $a^2 - 35a + 196 = 0$
	Rozwiązanie równania: $a = 7$ lub $a = 28$ oraz podanie odpowiedzi: $a = 7$, $b = 11$, $c = 15$ lub $a = 28$, $b = 11$, $c = -6$
8.	Obliczenie kapitału końcowego: $k_3 = 9 \cdot 1029 = 9261$ zł
	Zapisanie równania: $k_3 = k_0 \cdot (1{,}05)^3$, gdzie k_0 – kapitał początkowy
	Obliczenie k_0: 8000 zł

10. Planimetria

Zestaw A – odpowiedzi

1. $7\sqrt{2}$
2. 1
3. 4,8
4. 10 i 30
5. **a)** $\alpha = 35°$, $\beta = 55°$
   b) $\alpha = 20°$, $\beta = 55°$
6. środkowa: 6, odcinki: 2 i 4
7. 90°
8. $6\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$, $6\sqrt{7}$
9. ramię: 6, wysokość: $\frac{8\sqrt{5}}{3}$
10. $12\sqrt{3}$
11. $R = 5$, $r = 2$
12. $3\sqrt{5} - 5$
13. $\frac{3}{2}$ cm
14. $16 + \frac{28\sqrt{3}}{3}$
15. **a)** 6
    b) $\frac{9}{4}$
    c) $2\sqrt{3} + 2$
16. **a)** tak, $k = 3$
    b) tak, $k = \sqrt{3}$
17. **a)** $4 + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{3}$
    b) 48
18. $2\sqrt{3}$ i $2\sqrt{6}$
19. 1 i 4
20. $|DE| = 2\frac{4}{13}$
21. **a)** 3:4
    b) 9:16
22. $x = 1$, $y = \frac{15}{4}$
24. $6 + 4\sqrt{2}$
25. 32
26. bok: $\frac{5}{2}$, wysokość: $\frac{12}{5}$
27. $3\sqrt{5}$, $P = \frac{36\pi}{5}$
28. $\frac{\sqrt{5}}{3}$
29. **a)** $16\sqrt{3}$ **b)** $27\sqrt{3}$ **c)** 18
30. $P = 12$, $Obw = 8 + 2\sqrt{10}$
31. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
32. **a)** $10\sqrt{2}$ **b)** 20
33. **a)** $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$ **b)** $\alpha = 290°$, $\beta = 35°$
    c) $\alpha = 120°$, $\beta = 30°$
34. **a)** $\alpha = 25°$ **b)** $\alpha = 80°$ **c)** $\alpha = 20°$
35. 70°, 70°, 40°
36. 3π i 9π

Zestaw B – odpowiedzi

1. C 2. A 3. A 4. B 5. A 6. D 7. A

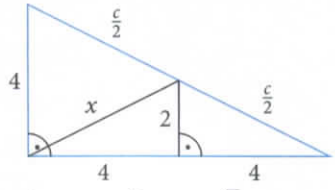
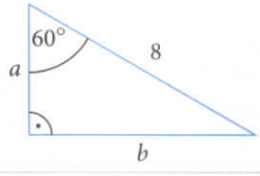
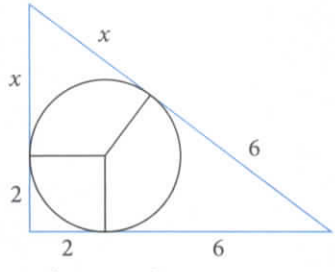
Zestaw C – odpowiedzi

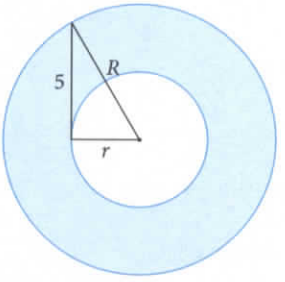
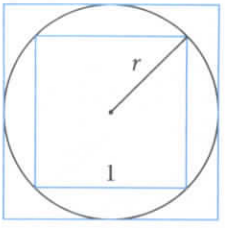
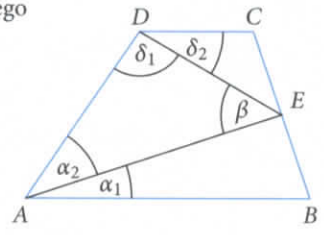
1. 125°
2. $2\sqrt{5}$
3. 4 i $4\sqrt{3}$
5. 24
6. $2\sqrt{3}$ i 6
7. 4
8. $\alpha = 50°$, $\beta = 40°$
9. $R = \frac{\sqrt{15}}{2}$
11. $16\sqrt{2}$ cm^2
12. 2
14. 12
15. 13,5
16. $15 + 3\sqrt{3}$
17. $18\sqrt{3}$
18. $x = 3\sqrt{2}$

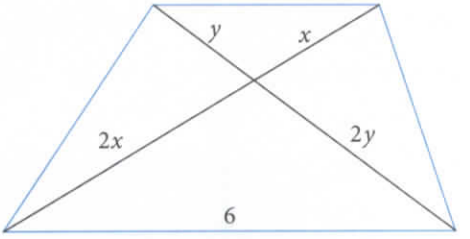
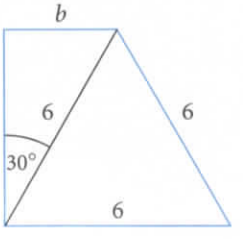
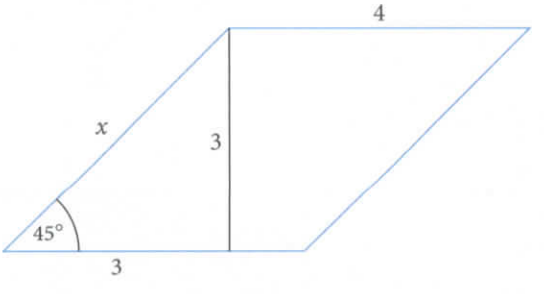
Zestaw D – odpowiedzi

1. $r = \frac{2}{7}\sqrt{21}$
2. 4, $\sqrt{13}$, $\sqrt{13}$
3. $|PB| = 3\sqrt{6}$ cm
4. 20
5. $32\sqrt{2}$
6. $3\sqrt{3} - 3$ cm
7. 4, 4, $4\sqrt{3}$
8. długość boku: 4, wysokość: $2\sqrt{3}$
9. $P = 750$ cm^2, $Obw = (60 + 2\sqrt{661})$ cm
10. $20 + 12\sqrt{3}$
11. $4\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$
13. 96
14. $\alpha = 30°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 120°$
15. $7 - 2\sqrt{5}$
16. $2 + 3\sqrt{2}$

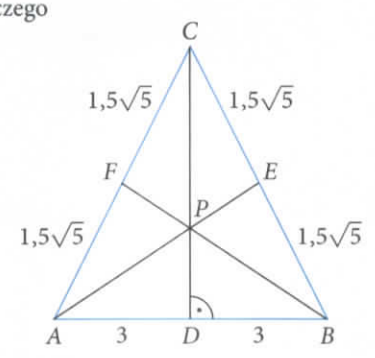
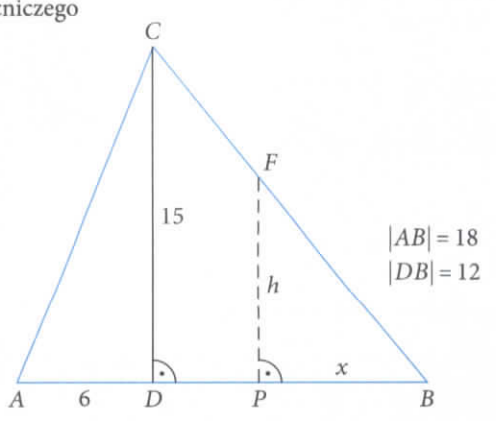
Zestaw C – modele rozwiązań zadań otwartych

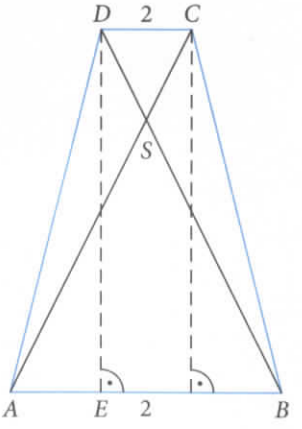
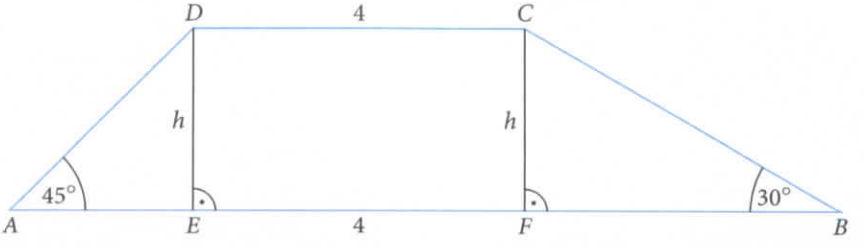
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Wyznaczenie miar kątów BAC i ACB: $\sphericalangle BAC = 25°$, $\sphericalangle ACB = 30°$
	Wyznaczenie miary kąta ABC: $\sphericalangle ABC = 125°$
2.	Wykonanie rysunku pomocniczego  Obliczenie długości przeciwprostokątnej c: dla $c = 4\sqrt{2}$
	Zauważenie, że $x = \frac{1}{2}c$ i obliczenie długości środkowej: $x = 2\sqrt{5}$
3.	Wykonanie rysunku pomocniczego i obliczenie długości krótszej przyprostokątnej: $a = 4$ 
	Obliczenie długości dłuższej przyprostokątnej: $b = 4\sqrt{3}$
4.	Wykazanie równości kątów ACD i BCE
	Zauważenie, że trójkąty ACD i BCE są przystające na podstawie cechy BKB, zatem $\|AD\| = \|BE\|$
5.	Wykonanie rysunku pomocniczego  oraz zapisanie równania $8^2 + (2+x)^2 = (6+x)^2$
	Obliczenie x: $x = 4$ i obliczenie obwodu trójkąta: $Ob = 24$
6.	Obliczenie długości krótszej przyprostokątnej: $2\sqrt{3}$
	Obliczenie długości dłuższej przyprostokątnej: 6
7.	Zauważenie, że przeciwprostokątna trójkąta ma długość 6
	Obliczenie wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną: $h = 4$

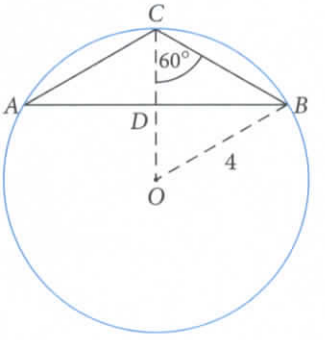
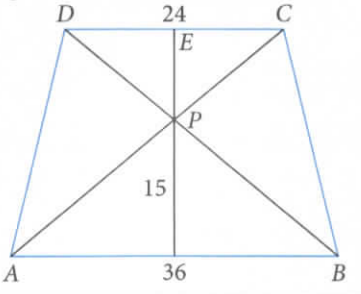
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
8.	Zauważenie, że trójkąt ADC jest równoramienny i wyznaczenie α: $\alpha = 50^\circ$
	Wyznaczenie β: $\beta = 40^\circ$
9.	Zauważenie, że: $(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{8})^2 = (\sqrt{15})^2$, więc trójkąt jest prostokątny o przeciwprostokątnej $\sqrt{15}$
	Obliczenie długości promienia okręgu opisanego na trójkącie: $R = \frac{\sqrt{15}}{2}$
10.	Wyznaczenie pola pierścienia kołowego: $P = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$ 
	Zauważenie, że trójkąt, którego bokami są promienie okręgów i połowa danej cięciwy jest trójkątem prostokątnym, więc: $R^2 = r^2 + 25$, skąd $R^2 - r^2 = 25$ i podstawienie do wzoru na pole pierścienia: $P = \pi(R^2 - r^2) = 25\pi$
11.	Wyznaczenie miary kąta między ramionami trójkąta: $\alpha = 45^\circ$
	Obliczenie pola trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot 8^2 \cdot \sin 45^\circ = 16\sqrt{2}$ [cm^2]
12.	Wykonanie rysunku pomocniczego i wyznaczenie promienia okręgu: $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 
	Obliczenie długości boku kwadratu opisanego na okręgu: $\sqrt{2}$ oraz obliczenie pola tego kwadratu: $P = 2$
13.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zauważenie, że $\alpha_2 + \delta_1 = 180^\circ - \beta$ oraz $\alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1 + \delta_2 = 180^\circ$
	Wykazanie, że $\beta = \alpha_1 + \delta_2$

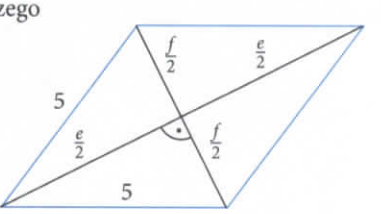
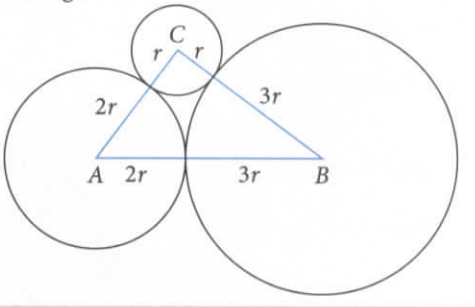
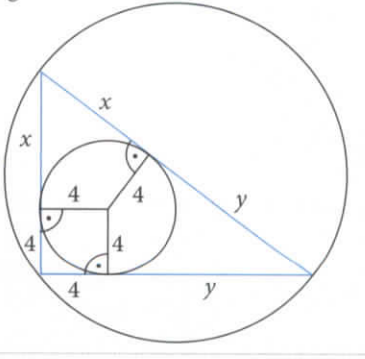
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
14.	Zauważenie, że suma podstaw wynosi 12
	Obliczenie pola trapezu: $P = 12$
15.	Wykonanie rysunku pomocniczego i obliczenie na podstawie podobieństwa trójkątów długości krótszej podstawy: 3 
	Obliczenie pola trapezu: $P = 13{,}5$
16.	Wykonanie rysunku pomocniczego  i obliczenie długości krótszej podstawy trapezu: $b = 6 \sin 30^\circ = 3$
	Obliczenie wysokości trapezu: $3\sqrt{3}$ oraz obliczenie jego obwodu: $15 + 3\sqrt{3}$
17.	Zauważenie, że romb składa się z dwóch trójkątów równobocznych o boku długości 6
	Obliczenie pola rombu: $P = 18\sqrt{3}$
18.	Obliczenie wysokości równoległoboku: $h = 3$ i wykonanie rysunku pomocniczego 
	Obliczenie x: $x = 3\sqrt{2}$

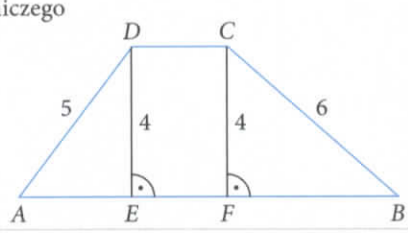
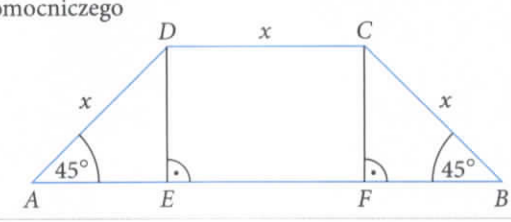
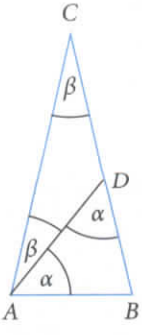
Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Zauważenie, że promień okręgu wpisanego $r = \|OD\| = \|OE\|$ oraz $\|AD\| = \|DB\| = 2$
	Obliczenie wysokości trójkąta CD: $\|CD\| = \sqrt{21}$
	Zauważenie, że $\|OC\| = \|CD\| - \|OD\| = \sqrt{21} - r$
	Skorzystanie z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta OEC i obliczenie promienia: $r = \frac{2}{7}\sqrt{21}$
2.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Obliczenie wysokości trójkąta: $\|CD\| = 6$
	Zauważenie, że punkt P dzieli środkowe w stosunku $2:1$, zatem $\|PC\| = 4$ oraz $\|PD\| = 2$
	Obliczenie z trójkąta ADP długości $\|PA\|$: $\|PA\| = \sqrt{13}$ oraz zapisanie $\|PB\| = \sqrt{13}$
3.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zapisanie równania: $\frac{1}{2}xh = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 15$
	Zapisanie zależności między x i h z wykorzystaniem podobieństwa trójkątów CDB i FPB: $\frac{h}{x} = \frac{15}{12}$
	Obliczenie długości odcinka PB: $\|PB\| = 3\sqrt{6}$ cm

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
4.	Obliczenie $\|AC\| = 5$ oraz zapisanie równania $25 + \|BC\|^2 = (3 + \|DB\|)^2$
	Zapisanie równania: $16 + \|DB\|^2 = \|BC\|^2$
	Obliczenie $\|DB\|$ z podobieństwa trójkątów ADC i CDB: $\|DB\| = 5\frac{1}{3}$
	Obliczenie $\|BC\|$: $\|BC\| = 6\frac{2}{3}$ oraz obliczenie obwodu trójkąta: $Obw = 20$
5.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zauważenie, że trójkąty ABS i CDS są podobne w skali $3:1$
	Obliczenie długości dłuższej podstawy: 6
	Zauważenie, że $\|EB\| = 4$ i obliczenie wysokości trapezu na podstawie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BDE: $h = 8\sqrt{2}$
	Obliczenie pola trapezu: $P = 32\sqrt{2}$
6.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zauważenie, że $\|AE\| = h$ oraz $\|FB\| = h\sqrt{3}$
	Zapisanie równania: $h + h\sqrt{3} + 4 = 10$
	Obliczenie wysokości trapezu: $h = 3\left(\sqrt{3} - 1\right)$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
7.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zauważenie, że trójkąt OBC jest trójkątem równobocznym
	Podanie długości ramion: $\|AC\| = \|BC\| = 4$
	Obliczenie $\|DB\|$: $\|DB\| = 2\sqrt{3}$ oraz podanie długości podstawy: $\|AB\| = 4\sqrt{3}$
8.	Wyznaczenie miary kąta ostrego rombu: $60°$
	Zauważenie, że krótsza przekątna dzieli romb na dwa trójkąty równoboczne, więc długość boku rombu jest równa 4
	Obliczenie wysokości rombu: $2\sqrt{3}$
9.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zauważenie, że trójkąty ABP i CDP są podobne w skali $3:2$
	Obliczenie długości $\|PE\|$: $\|PE\| = 10$ oraz obliczenie pola trapezu: $P = 750$ cm^2
	Obliczenie długości ramienia trapezu: $\sqrt{661}$ oraz obliczenie obwodu trapezu: $Obw = \left(60 + 2\sqrt{661}\right)$ cm
10.	Obliczenie $\|AB\|$: $\|AB\| = 16$
	Obliczenie $\|AD\|$: $\|AD\| = 8\sqrt{3}$
	Zauważenie, że trójkąt BCD ma kąty: $30°$, $60°$, $90°$ oraz obliczenie $\|CD\|$: $\|CD\| = 4$
	Obliczenie $\|BC\|$: $\|BC\| = 4\sqrt{3}$ oraz obliczenie obwodu trapezu: $Obw = 20 + 12\sqrt{3}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
11.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zapisanie równania: $\frac{ef}{2} = 20$
	Zapisanie równania: $\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = 25$
	Obliczenie e: $e = 4\sqrt{5}$
	Obliczenie f: $f = 2\sqrt{5}$
12.	Zauważenie, że promienie okręgów są równe: r, $2r$ i $3r$
	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zapisanie równania: $(3r)^2 + (4r)^2 = (5r)^2$
	Wykazanie, że równość zachodzi dla dowolnego $r \in \mathbf{R}_+$ i zapisanie wniosku: na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąt ABC jest prostokątny
13.	Wykonanie rysunku pomocniczego  $x + y = 20$
	Zapisanie równania: $(4 + x)^2 + (4 + y)^2 = 400$
	Wyznaczenie x i y: $x = 8$, $y = 12$
	Obliczenie długości przyprostokątnych: 16 i 12 oraz pola trójkąta: $P = 96$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
14.	Zauważenie, że $\alpha = 30^\circ$
	Zauważenie, że $\sphericalangle AOD = 2\alpha = 60^\circ$ i stąd $\beta = 90^\circ$
	Zauważenie, że $\gamma = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
15.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Obliczenie $\lvert AE\rvert$: $\lvert AE\rvert = 3$
	Obliczenie $\lvert FB\rvert$: $\lvert FB\rvert = 2\sqrt{5}$
	Obliczenie długości krótszej podstawy: $7 - 2\sqrt{5}$
16.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zauważenie, że $\lvert AE\rvert = \lvert FB\rvert = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ oraz $\lvert EF\rvert = x$
	Zapisanie równania: $4x + x\sqrt{2} = 14$
	Obliczenie x: $x = 4 - \sqrt{2}$ oraz wyznaczenie długości dłuższej podstawy: $\lvert AB\rvert = 2 + 3\sqrt{2}$
17.	Wprowadzenie oznaczeń na rysunku i zauważenie, że $\lvert \sphericalangle CAB\rvert = \lvert \sphericalangle CBA\rvert = \alpha + \beta$ 
	Zauważenie, że $\lvert \sphericalangle ADC\rvert = 180^\circ - 2\beta$ oraz $\lvert \sphericalangle ADC\rvert = 180^\circ - \lvert \sphericalangle ADB\rvert$ i wywnioskowanie, że $\alpha = 2\beta$
	Zapisanie sumy miar kątów trójkąta ABC: $2(\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ$ i otrzymanie równości $7\beta = 180^\circ$
	Zapisanie równości: $\lvert \sphericalangle ADC\rvert = 180^\circ - 2\beta = 7\beta - 2\beta = 5\beta = 5\lvert \sphericalangle ACD\rvert$

11. Geometria analityczna

Zestaw A – odpowiedzi

1. **a)** $y=-3x+5$ **b)** $y=\frac{3}{4}x+6$ **c)** $y=5$
2. **a)** $y=-\frac{1}{2}x-4$ **b)** $y=\sqrt{2}x+1$ **c)** $y=1$
3. **a)** $y=4x-9$ **b)** $y=-1$ **c)** $x=2$
4. **a)** $y=3x+9$ **b)** $y=-4x-5$ **c)** $y=3$
5. **a)** $S(-2,1)$ **b)** $S(0,4)$ **c)** $S(1,\frac{1}{2})$
6. **a)** $a=2$, $b=-2$ **b)** $a=-1$, $b=-2$
7. **a)** $y=3$, $x=-1$
   b) $y=3x+3$, $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$
   c) $y=3x-4$, $y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$
8. **a)** $16+4\sqrt{5}$ **b)** $8\sqrt{5}+8\sqrt{2}$
9. **a)** prostokątny
   b) prostokątny i równoramienny
10. **a)** 5 **b)** $\sqrt{65}$
11. **a)** punkt przecięcia: $(1,1\frac{1}{2})$, $Obw=6+8\sqrt{5}$
    b) punkt przecięcia: $(-1\frac{1}{2},2)$, $Obw=10+6\sqrt{10}$
12. **a)** 10π **b)** 13π
13. **a)** 3 **b)** 8
14. **a)** 8 **b)** 16

Zestaw B – odpowiedzi

1. C 2. A 3. D 4. C 5. A 6. A 7. C 8. B

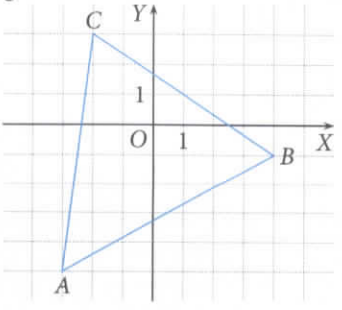
Zestaw C – odpowiedzi

1. $\sqrt{65}$
2. należy
3. $(1,\frac{1}{2})$
5. $S(5,-6)$, $r=2\sqrt{5}$
6. $C(2,4)$
7. dla $a=2-\sqrt{3}$ lub dla $a=2+\sqrt{3}$
8. $(1,4)$
9. 200
10. $y=2x-4$
11. $A(-6,0)$, $B(0,10)$

Zestaw D – odpowiedzi

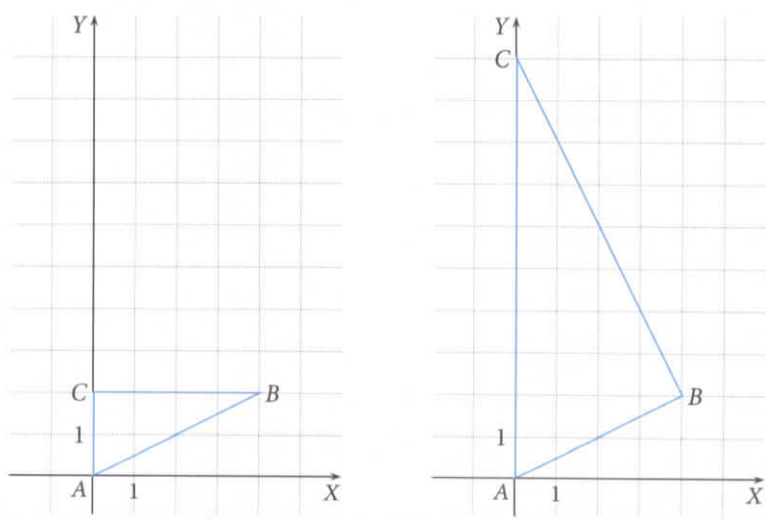
1. $B(-8,0)$ lub $B(10,0)$
2. $C(3,3)$ lub $C(4,4)$
3. $y=-\frac{3}{2}x+14$
4. $C(0,10)$ lub $C(0,2)$
5. $A(4,2)$, $|OA|=2\sqrt{5}$
6. wysokość: $6\sqrt{2}$, $P=36$
7. $y=-8$ lub $y=8$
8. $y=-\frac{2}{3}x+\frac{204}{29}$
9. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

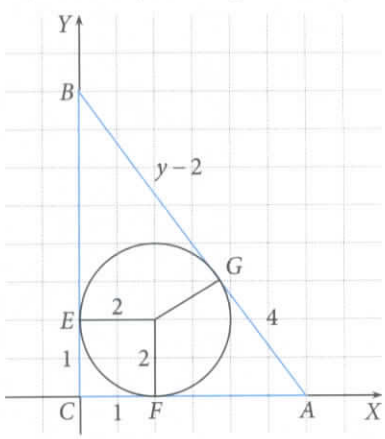
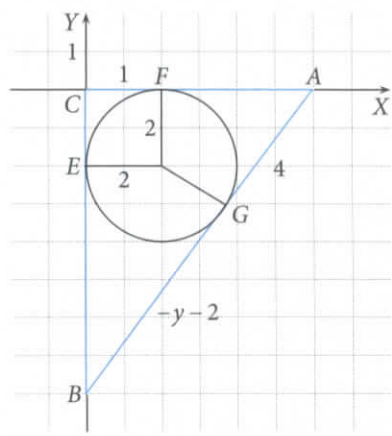
Zestaw C – modele rozwiązań zadań otwartych

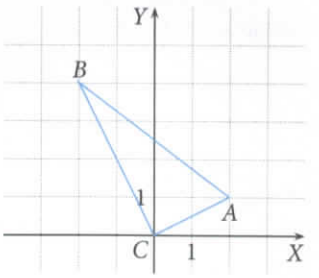
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	i zauważenie, że ramionami są odcinki AB i AC
	Obliczenie długości ramienia: $\|AB\|=\sqrt{65}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
2.	Zapisanie równania prostej AB: $y = 2x - 1$
	Podstawienie współrzędnych punktu C do równania prostej AB i podanie odpowiedzi: Punkt C należy do prostej AB.
3.	Wyznaczenie środka odcinka AB: $S(3,2)$
	Wyznaczenie środka odcinka AS: $P\left(1,\frac{1}{2}\right)$
4.	Obliczenie długości boków AB i AC: $\lvert AB\rvert = \lvert AC\rvert = 3\sqrt{5}$
	Stwierdzenie, że trójkąt CAB jest równoramienny, zatem wysokość trójkąta opuszczona z wierzchołka A jest dwusieczną kąta CAB
5.	Wyznaczenie środka okręgu: $S(5,-6)$
	Obliczenie promienia okręgu: $r = 2\sqrt{5}$
6.	Zapisanie warunku $\lvert AC\rvert = \lvert BC\rvert$ w postaci: $\sqrt{(x+2)^2+(x+1)^2} = \sqrt{(x-6)^2+(x+1)^2}$ gdzie $C(x, x+2)$
	Wyznaczenie współrzędnych punktu C: $C(2,4)$
7.	Zapisanie warunku: $a - 4 = -\frac{1}{a}$
	Obliczenie a: $a = 2 - \sqrt{3}$ lub $a = 2 + \sqrt{3}$
8.	Wyznaczenie równań przekątnych czworokąta: $y = 2x + 2$, $x = 1$
	Obliczenie współrzędnych punktu przecięcia przekątnych czworokąta: $(1,4)$
9.	Obliczenie długości odcinków AS i BS, gdzie S jest punktem przecięcia przekątnych: $\lvert AS\rvert = 20$, $\lvert BS\rvert = 5$
	Obliczenie pola rombu: $P = \frac{2\lvert AS\rvert \cdot 2\lvert BS\rvert}{2} = 200$
10.	Wyznaczenie współrzędnych punktu D jako środka odcinka AB: $D(2,0)$
	Napisanie równania prostej CD: $y = 2x - 4$
11.	Zapisanie współrzędnych punktów A i B w postaci $A(x,0)$, $B(0,y)$
	Wyznaczenie współrzędnych punktów A i B: $A(-6,0)$, $B(0,10)$

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Obliczenie a: $a = 1$
	Zapisanie współrzędnych punktu B w postaci: $B(x, 0)$
	Zapisanie równania: $\sqrt{(x-1)^2+9} = 3\sqrt{10}$
	Obliczenie x: $x = -8$ lub $x = 10$ oraz zapisanie współrzędnych punktu B: $B(-8, 0)$ lub $B(10, 0)$
2.	Obliczenie długości przeciwprostokątnej: $\|AB\| = 10$ i oznaczenie $C(x, x)$
	Zapisanie długości boków trójkąta w postaci: $\|AC\| = \sqrt{(x-2)^2+x^2}$, $\|BC\| = \sqrt{(x-12)^2+x^2}$
	Zapisanie warunku $\|AC\|^2 + \|BC\|^2 = \|AB\|^2$ w postaci: $(x-2)^2 + x^2 + (x-12)^2 + x^2 = 100$
	Obliczenie x: $x = 3$ lub $x = 4$ oraz podanie współrzędnych punktu C: $C(3, 3)$ lub $C(4, 4)$
3.	Wyznaczenie współrzędnych punktu B: $B(6, 5)$
	Obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AB: $a_{AB} = \frac{2}{3}$
	Zauważenie, że szukana prosta ma współczynnik kierunkowy $a = -\frac{3}{2}$
	Zapisanie równania szukanej prostej: $y = -\frac{3}{2}x + 14$
4.	Wykonanie rysunków pomocniczych 
	i rozpatrzenie pierwszego przypadku, gdy kątem prostym jest kąt ACB, wówczas $C(0, 2)$
	Rozpatrzenie drugiego przypadku, gdy kątem prostym jest kąt ABC
	Obliczenie długości odcinków AB i AC: $\|AB\| = 2\sqrt{5}$ oraz $\|AC\| = y$, gdzie $C(0, y)$
	Wyznaczenie długości odcinka BC: $\|BC\| = \sqrt{16 + (y-2)^2}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
4.	Zapisanie warunku $\|AB\|^2+\|BC\|^2=\|AC\|^2$ w postaci: $20+16+(y-2)^2=y^2$
	Obliczenie y: $y=10$ oraz zapisanie współrzędnych punktu C: $C(0,10)$
5.	Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB prostopadłej do prostej OA: $a=-2$
	Zapisanie równania prostej AB: $y=-2x+10$
	Obliczenie współrzędnych punktu A: $A(4,2)$
	Obliczenie długości przyprostokątnej OA: $\|OA\|=2\sqrt{5}$
6.	Obliczenie długości ramion trójkąta: $\|AC\|=\|BC\|=3\sqrt{10}$
	Wyznaczenie środka odcinka AB: $S(4,7)$
	Obliczenie wysokości CS: $\|CS\|=6\sqrt{2}$
	Obliczenie długości podstawy: $\|AB\|=6\sqrt{2}$
	Obliczenie pola trójkąta: $P=36$
7.	Wykonanie rysunków pomocniczych  
	Zapisanie równania do rysunku pierwszego: $y^2+36=(y+2)^2$
	Obliczenie y: $y=8$
	Zapisanie równania do rysunku drugiego: $(-y)^2+36=(-y+2)^2$
	Obliczenie y: $y=-8$ i podanie odpowiedzi: $y=-8$ lub $y=8$
8.	Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB: $a_{AB}=\frac{3}{7}$
	Wyznaczenie równań prostych AB: $y=\frac{3}{7}x+\frac{8}{7}$ i CD: $y=-\frac{7}{3}x+16$
	Wyznaczenie współrzędnych punktu D: $D\left(\frac{156}{29},\frac{100}{29}\right)$
	Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej BC: $a_{BC}=-\frac{2}{3}$
	Wyznaczenie równania szukanej prostej: $y=-\frac{2}{3}x+7\frac{1}{29}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
9.	Wykonanie rysunku pomocniczego i zauważenie, że większym kątem ostrym jest kąt BAC 
	Obliczenie długości przyprostokątnej $\|BC\|$: $\|BC\| = 2\sqrt{5}$
	Obliczenie długości przeciwprostokątnej $\|AB\|$: $\|AB\| = 5$
	Obliczenie sinusa kąta BAC: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
10.	Wyznaczenie promienia okręgu O_2 : $r_2 = 5$
	Wyznaczenie odległości między środkami okręgów: $\|O_1O_2\| = 10$
	Zauważenie, że $r + r_2 = 11 > 10$
	Zapisanie wniosku: okręgi przecinają się, zatem mają dwa punkty wspólne

12. Stereometria

Zestaw A – odpowiedzi

1. **a)** $6 - \frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $\frac{7}{2}$ **c)** $3 - \sqrt{3}$

2. **a)** $40\sqrt{2}$ **b)** 45 **c)** $18\sqrt{10}$

3. $d = \sqrt{3} + \sqrt{6}$, $V = 7 + 5\sqrt{2}$

4. $V = 6\sqrt{3}$, $d_1 = \sqrt{19}$, $d_2 = 2\sqrt{5}$

5. **a)** $72\sqrt{3}$ **b)** $96\sqrt{3}$

6. $16\sqrt{11}$

7. $H = 4$ cm, $d = 4\sqrt{2}$ cm

8. $18 + 6\sqrt{11}$

9. 54 cm^3

10. $8\sqrt{10}$ cm^2

11. $6\sqrt{26}$

12. **a)** $\frac{64}{3}$ **b)** $16\sqrt{3}$ **c)** $\frac{32}{3}\sqrt{3}$

13. $2\sqrt{5}$ cm

14. **a)** $V = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3 \operatorname{tg}\beta$
b) $V = \frac{a^3}{6}\operatorname{tg}\gamma$

15. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$

16. $\frac{48\sqrt{13}}{13}$

17. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

18. **a)** $4\sqrt{2}\pi$ **b)** $\frac{96}{\pi}$ cm^3 lub $\frac{72}{\pi}$ cm^3

19. 6

20. **a)** 60° **b)** 120°

21. **a)** $\sqrt{7}$ **b)** 3

22. 120π

23. **a)** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **b)** $4\operatorname{tg}\alpha$

24. **b)** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{28}}{7}$, $\alpha \approx 41°$

Zestaw B – odpowiedzi

1. A **2.** B **3.** C **4.** A **5.** D **6.** B **7.** A

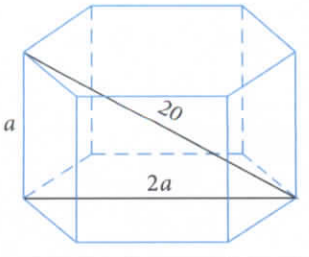
Zestaw C – odpowiedzi

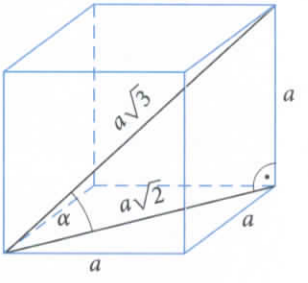
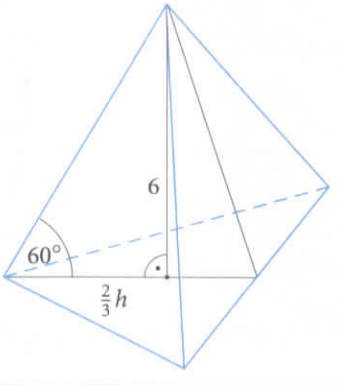
1. 4
2. $9\sqrt{3}$ cm^2
3. $2\sqrt{5}$
4. $4\sqrt{5}$ cm
5. 3 cm
6. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
7. $3\sqrt{3}$
8. tak
9. 10 cm

Zestaw D – odpowiedzi

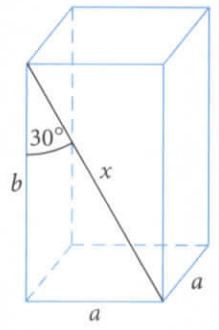
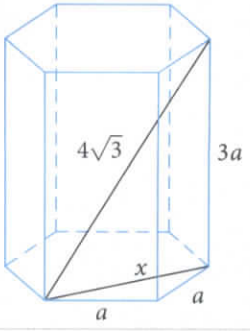
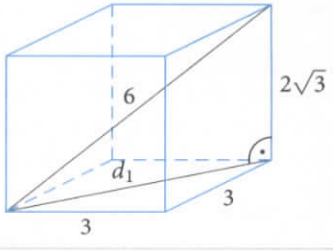
1. $4\sqrt{3}$
2. $36\sqrt{3}$
3. $6\sqrt{2}$ cm^2
6. $\frac{16}{17}$
7. $2\sqrt[3]{2}$ cm
8. $|CS| = 9$
9. $162\sqrt{3}$
11. 48
12. $\frac{12}{125}d^3$
13. $\frac{3}{2}$
14. $\frac{1024}{3\operatorname{tg}^2 40^\circ} \approx 484{,}79$

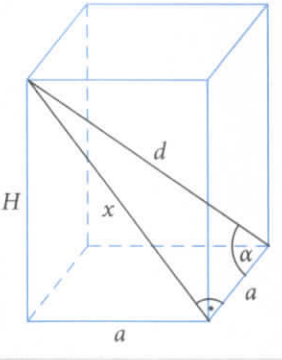
Zestaw C – modele rozwiązań zadań otwartych

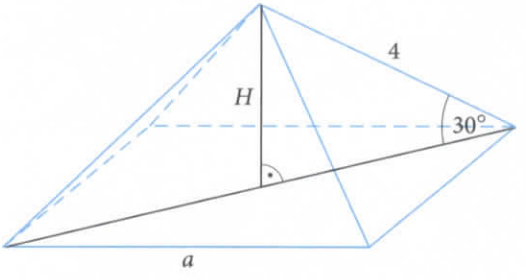
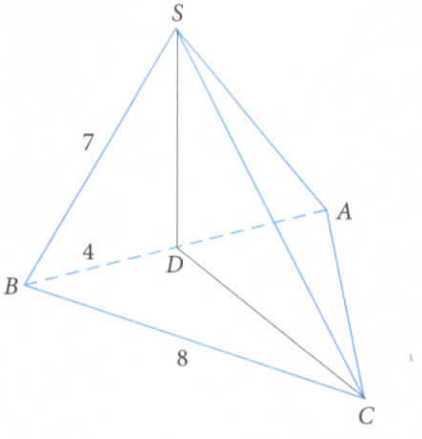
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Oznaczenie przez a długości krawędzi podstawy i zapisanie równania: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 8 = 32\sqrt{3}$
	Obliczenie długości krawędzi podstawy: $a = 4$
2.	Obliczenie wysokości H graniastosłupa: $H = 3\operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3}$ [cm]
	Obliczenie pola powierzchni bocznej graniastosłupa: $P_b = 9\sqrt{3}$ cm^2
3.	Obliczenie długości krótszej przekątnej podstawy graniastosłupa: $d_1 = 4$
	Obliczenie długości krótszej przekątnej graniastosłupa: $d = 2\sqrt{5}$
4.	Wykonanie rysunku pomocniczego, wprowadzenie oznaczeń 
	Ułożenie równania $20^2 = a^2 + (2a)^2$ i obliczenie długości a krawędzi graniastosłupa: $a = 4\sqrt{5}$ cm
5.	Ułożenie równania $a^2 + 4a = 21$, gdzie a oznacza długość krawędzi podstawy ostrosłupa
	Obliczenie a: $a = 3$ cm

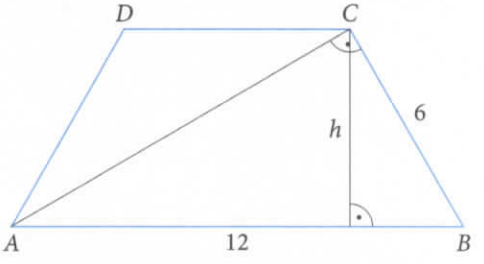
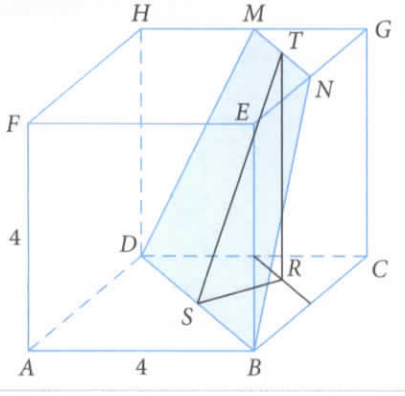
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
6.	Wykonanie rysunku i wprowadzenie oznaczeń 
	Obliczenie: $\sin\alpha = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
7.	Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń 
	Ułożenie równania $\operatorname{tg}60^\circ = \frac{6}{\frac{2}{3}h}$ i obliczenie wysokości podstawy ostrosłupa: $h = 3\sqrt{3}$
8.	Obliczenie objętości szklanki: $V = 160\pi \text{ cm}^3 \approx 503 \text{ ml}$
	Sformułowanie odpowiedzi: Sok z dwóch butelek o łącznej pojemności 500 ml zmieści się w tej szklance.
9.	Obliczenie długości tworzącej stożka: $l = 5\sqrt{2}$ cm
	Obliczenie długości średnicy stożka: $2r = l\sqrt{2} = 10$ cm

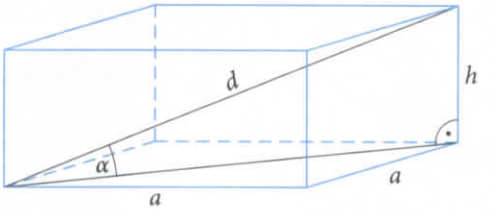
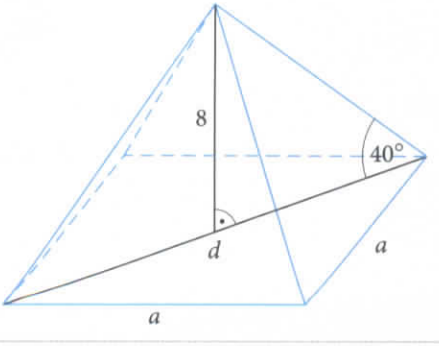
Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń 
	Ułożenie równania $4ab = 48\sqrt{3}$ i przekształcenie go do postaci: $ab = 12\sqrt{3}$
	Przekształcenie równości $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{b}$ do postaci: $a = b\frac{\sqrt{3}}{3}$
	Wykorzystanie otrzymanych równości do obliczenia długości krawędzi: $a = 2\sqrt{3}$, $b = 6$
	Obliczenie długości przekątnej: $x = 4\sqrt{3}$
2.	Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń 
	Wyznaczenie x w zależności od a: $x = a\sqrt{3}$
	Obliczenie długości krawędzi podstawy graniastosłupa: $a = 2$
	Obliczenie objętości graniastosłupa: $V = 36\sqrt{3}$
3.	Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń 
	Obliczenie długości dłuższej przekątnej podstawy: $d_1 = 2\sqrt{6}$ cm

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
3.	Wykorzystanie własności przekątnych rombu i obliczenie długości krótszej przekątnej podstawy: $d_2 = 2\sqrt{3}$
	Obliczenie pola podstawy graniastosłupa: $P = \frac{2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{2}$ cm^2
4.	Wprowadzenie oznaczeń: H – wysokość graniastosłupa, h – wysokość podstawy graniastosłupa i zauważenie, że zaznaczony przekrój jest trójkątem równobocznym
	Zapisanie równości $\sin 30^\circ = \frac{H}{a}$ i wyznaczenie wysokości graniastosłupa: $H = \frac{1}{2}a$
	Obliczenie długości ramienia b podstawy graniastosłupa: $b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
	Obliczenie długości wysokości h podstawy graniastosłupa: $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
	Obliczenie pola podstawy graniastosłupa: $P_p = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$
	Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$ i sformułowanie odpowiedzi
5.	Wykonanie rysunku i wprowadzenie oznaczeń  $\sin\alpha = p$
	Obliczenie długości krawędzi podstawy graniastosłupa: $a = d\cos\alpha$
	Obliczenie długości przekątnej ściany bocznej graniastosłupa: $x = d\sin\alpha$
	Przekształcenie równości $H^2 = x^2 - a^2$ do postaci: $H^2 = d^2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)$
	Podstawienie do powyższej równości wartości $\cos^2\alpha = 1 - p^2$ i $\sin^2\alpha = p^2$
	Obliczenie wysokości H graniastosłupa: $H = d\sqrt{2p^2 - 1}$ i sformułowanie odpowiedzi
6.	Obliczenie liczby klocków: $(8:2)^3 = 64$
	Zauważenie, że jeśli podstawą graniastosłupa byłby kwadrat o boku 2 cm lub 4 cm, to Jacek zużyłby wszystkie klocki. Jeśli podstawą graniastosłupa byłby kwadrat o boku 6 cm, to Jacek zużyłby $3 \cdot 3 \cdot 7 = 63$ klocki i graniastosłup miałby 14 cm wysokości. Zatem druga zbudowana bryła, to prostopadłościan o wymiarach $6 \times 6 \times 14$
	Obliczenie pola powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu: $2 \cdot 6 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot 14 = 408$ [cm^2]
	Obliczenie szukanego stosunku pól: $\frac{384}{408} = \frac{16}{17}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
7.	Wykonanie rysunku pomocniczego i obliczenie wysokości ostrosłupa: $H = 2$ cm 
	Obliczenie długości d przekątnej podstawy ostrosłupa lub długości a krawędzi jego postawy: $d = 4\sqrt{3}$, $a = 2\sqrt{6}$ cm
	Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 16$ cm^3
	Zapisanie równania $a^3 = 16$, gdzie a oznacza długość krawędzi sześcianu
	Obliczenie długości krawędzi sześcianu: $a = 2\sqrt[3]{2}$ cm
8.	Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń 
	Zauważenie, że kąty $\sphericalangle SDB$ i $\sphericalangle SDC$ są proste
	Obliczenie wysokości DS: $\|DS\| = \sqrt{33}$
	Obliczenie długości odcinka DC: $\|DC\| = 4\sqrt{3}$
	Obliczenie długości krawędzi CS: $\|CS\| = 9$
9.	Obliczenie długości ramienia trapezu: $x = 6$
	Obliczenie długości dłuższej podstawy trapezu: $a = 12$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
9.	Wykonanie rysunku pomocniczego podstawy graniastosłupa i wprowadzenie oznaczeń 
	Zauważenie, że trójkąt ABC stanowi połowę trójkąta równobocznego o wysokości AC i kącie przy wierzchołku B o mierze 60°
	Obliczenie wysokości trapezu: $h = 3\sqrt{3}$
	Obliczenie długości krótszej podstawy trapezu: $\|DC\| = 6$
	Obliczenie objętości graniastosłupa: $V = 162\sqrt{3}$
10.	Wykonanie rysunku pomocniczego i zauważenie, że przekrojem sześcianu jest trapez 
	Obliczenie długości BD: $\|BD\| = 4\sqrt{2}$ cm
	Obliczenie długości MN: $\|MN\| = 2\sqrt{2}$ cm
	Obliczenie długości SR: $\|SR\| = \sqrt{2}$ cm
	Obliczenie długości ST: $\|ST\| = 3\sqrt{2}$ cm
	Obliczenie pola przekroju: $P = \frac{(4\sqrt{2}+2\sqrt{2})\cdot 3\sqrt{2}}{2} = 18$ [cm^2]
11.	Obliczenie długości krawędzi AB i AC z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkątów prostokątnych DAB i DAC: $\|AB\| = \|AC\| = 5$
	Obliczenie wysokości h trójkąta równoramiennego ABC, opuszczonej na bok BC: $h = 4$
	Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P_p = 12$
	Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 48$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
12.	Wykonanie rysunku i wprowadzenie oznaczeń 
	Skorzystanie z zależności $\sin\alpha = \frac{h}{d}$ i wyznaczenie h: $h = 0{,}2d$
	Skorzystanie z zależności $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{d}$ i wyznaczenie: $a\sqrt{2} = d\cos\alpha = d\sqrt{1-(0{,}2)^2} = \sqrt{0{,}96}\,d$
	Wyznaczenie wzoru na objętość graniastosłupa: $V = a^2h = \frac{1}{2}\cdot 0{,}96d^2 \cdot 0{,}2d = 0{,}096d^3$
13.	Wprowadzenie oznaczeń, np. r_w, H_w – promień i wysokość walca, r_s, H_s – promień i wysokość stożka, zapisanie równości $\frac{1}{3}\pi r_s^2 \cdot H_s = \pi r_w^2 \cdot H_w$ i przekształcenie jej z wykorzystaniem związku $r_s = 2r_w$ do postaci: $H_s = \frac{3}{4}H_w$
	Zapisanie równości $H_s = H_w - 1$ i obliczenie H_s oraz H_w: $H_s = 3$, $H_w = 4$
	Zapisanie równości $\frac{r_s}{H_s} = \frac{4}{3}$ i obliczenie r_s oraz r_w: $r_s = 4$, $r_w = 2$
	Obliczenie długości l tworzącej stożka: $l = 5$ oraz pola powierzchni stożka P_s: $P_s = 36\pi$
	Obliczenie pola powierzchni walca P_w: $P_w = 24\pi$ i sformułowanie odpowiedzi: Stosunek powierzchni stożka do powierzchni walca jest równy $\frac{3}{2}$
14.	Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń 
	Obliczenie długości d przekątnej podstawy ostrosłupa: $d = \frac{16}{\operatorname{tg}40^\circ}$
	Obliczenie długości a krawędzi podstawy graniastosłupa: $a = \frac{8\sqrt{2}}{\operatorname{tg}40^\circ}$
	Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{1024}{3\operatorname{tg}^2 40^\circ}$
	Odczytanie z tablic przybliżonej wartości $\operatorname{tg}40^\circ = 0{,}8391$ i obliczenie przybliżonej wartości V: $V \approx 484{,}79$

13. Rachunek prawdopodobieństwa

Zestaw A – odpowiedzi

1. wszystkich liczb jest 24 w tym: 12 parzystych i 8 podzielnych przez 3
2. **a)** 6 **b)** 24 **c)** 600
3. **a)** 12 **b)** 48 **c)** 2880
4. **a)** 4082400 **b)** $27 \cdot 10^6$
5. **a)** 60 **b)** 125
6. **a)** 336 **b)** 840 **c)** 27216
7. **a)** 32 **b)** 16 **c)** 162 **d)** 768
8. **a)** 729 **b)** 224 **c)** 4500
9. zdarzenia niemożliwe: $A \cap C$ i $B' \cap A$, zdarzenie pewne: $B \cup C$
10. $A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, $B = \{(1,6),(2,3),(3,2),(6,1)\}$, $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{9}$, $P(A') = \frac{5}{6}$, $P(B') = \frac{8}{9}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{18}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{9}$
11. **a)** $A = \{(O,O,O),(R,O,O),(O,R,O),(O,O,R)\}$, $B = \{(R,R,R),(O,R,R),(R,O,R),(R,R,O),(O,O,R),(O,R,O),(R,O,O)\}$, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{7}{8}$, $P(A \setminus B) = \frac{1}{8}$, $P(B \setminus A) = \frac{1}{2}$
12. **a)** $\frac{2}{5}$ **b)** $\frac{11}{30}$
13. **a)** $\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{2}{5}$
14. $\frac{1}{10}$
15. $P(A \cup B) = P(A) = 0{,}8$, $P(A \cap B) = P(B) = 0{,}5$, $P(A \setminus B) = P(A) - P(B) = 0{,}3$, $P(B \setminus A) = P(\varnothing) = 0$
16. **a)** $P(A \cap B) = 0{,}2$, $P(A \setminus B) = 0{,}1$
    b) $P(A \cap B) = 0{,}3$, $P(B \setminus A) = 0{,}4$
    c) $P(A \cup B) = \frac{11}{12}$, $P(A \setminus B) = \frac{1}{4}$
17. **a)** $P(A) = \frac{1}{3}$ lub $P(A) = \frac{2}{3}$
    b) $P(A) = \frac{3}{4}$
18. $n = 3$

Zestaw B – odpowiedzi

1. A **2.** A **3.** C **4.** B **5.** A **6.** B **7.** D **8.** B

Zestaw C – odpowiedzi

1. 720, 120
2. 20
3. 900
4. 9
5. $\frac{1}{18}$
6. nie są jednakowo prawdopodobne
7. 0,72
8. $\frac{7}{12}$

Zestaw D – odpowiedzi

1. 2125
2. **a)** 12 minut
   b) 60 minut
3. $\frac{3}{8}$
4. $\frac{5}{18}$
5. większe prawdopodobieństwo otrzymamy w przypadku losowania bez zwracania
6. $\frac{19}{54}$
7. **a)** $P(A) = \frac{1}{4}$ **b)** $P(B) = \frac{1}{6}$
   c) $P(C) = \frac{1}{18}$
8. $\frac{9}{56}$
9. $n = 6$
10. prawdopodobieństwo jest większe w klasie Ib
11. $\frac{1}{6}$
12. $\frac{4}{9}$
13. $\frac{7}{10}$
14. 0,1
15. $\frac{2}{9}$

Zestaw C – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Obliczenie liczby sposobów: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$
	Obliczenie liczby sposobów w przypadku, gdy nie wykorzystujemy koszulki z numerem 4: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$
2.	Zauważenie, że przewodniczącego można wybrać na 4 sposoby, a wtedy pozostaje wybór jednej osoby z pozostałych pięciu
	Obliczenie liczby możliwych wyborów: $4 \cdot 5 = 20$
3.	Zauważenie, że wyboru cyfry pierwszej i ostatniej można dokonać na 9 sposobów
	Obliczenie, że wszystkich takich liczb jest $9 \cdot 10^2 = 900$
4.	Obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania kuli białej i ułożenie równania $\frac{1}{3} = \frac{6}{9+n}$, gdzie n oznacza liczbę kul niebieskich
	Rozwiązanie równania: $n = 9$
5.	Zauważenie, że jest 36 zdarzeń elementarnych
	Wypisanie zdarzeń elementarnych sprzyjających: $(1,5)$, $(5,1)$ i obliczenie prawdopodobieństwa: $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
6.	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia B polegającego na tym, że obie kule są białe oraz zdarzenia C – na tym, że obie są czarne: $P(B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{4}$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia $A = B \cup C$: $P(A) = P(B) + P(C) = \frac{7}{12}$ oraz zdarzenia A': $P(A') = \frac{5}{12}$ i podanie odpowiedzi: Zdarzenia A i A' nie są jednakowo prawdopodobne.
7.	Obliczenie liczby wszystkich pracowników firmy: $\overline{\overline{\Omega}} = 150$ oraz liczby osób w każdym z oddziałów, które odpowiedziały w ankiecie twierdząco: 45, 36 i 27
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A, że losowo wybrany pracownik jest zadowolony ze swojej pracy: $P(A) = \frac{45+36+27}{150} = 0{,}72$
8.	Obliczenie $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{6}$
	Obliczenie $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{7}{12}$

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Zauważenie, że 0 nie może wystąpić na pierwszym miejscu i rozpatrzenie dwóch przypadków: a) pierwsza cyfra jest nieparzysta, b) pierwsza cyfra jest parzysta
	Obliczenie liczby możliwości w przypadku a): pierwszą cyfrę można wybrać na 5 sposobów, każda pozostała cyfra musi być parzysta i można ją wybrać na 5 sposobów. Zatem jest 5^4 możliwości
	Obliczenie liczby możliwości w przypadku b): pierwszą cyfrę można wybrać na 4 sposoby. Na pozostałych miejscach należy umieścić jedną cyfrę nieparzystą i dwie cyfry parzyste. Miejsce dla cyfry nieparzystej można wybrać na 3 sposoby. Cyfrę na każdym z trzech miejsc można wybrać na 5 sposobów. Zatem jest $4 \cdot 3 \cdot 5^3 = 12 \cdot 5^3$ możliwości
	Obliczenie sumy wyników otrzymanych w obu przypadkach i podanie odpowiedzi: Jest 2125 liczb spełniających warunki zadania.
2. a)	Obliczenie, ile wersji kodu można otrzymać z 6 ustalonych cyfr: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
	Obliczenie, że 720 sekund to 12 minut
2. b)	Obliczenie, ile wersji kodu można otrzymać, gdy znanych jest 5 cyfr: $5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3600$
	Obliczenie, że 3600 sekund to 60 minut
3.	Obliczenie, ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie występują tylko 0 i 1: $\overline{\overline{\Omega}} = 8$
	Wypisanie tych liczb, które dzielą się przez 3: 1110, 1101, 1011
	Obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania liczby podzielnej przez 3: $\frac{3}{8}$
4.	Obliczenie $\overline{\overline{\Omega}}$: $\overline{\overline{\Omega}} = 36$
	Obliczenie $\overline{\overline{A}}$, gdzie A jest zdarzeniem, że utworzono liczbę większą od 52: $\overline{\overline{A}} = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 6 = 10$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{5}{18}$
5.	Podanie liczby wszystkich możliwych zdarzeń w przypadku losowania bez zwracania: $\overline{\overline{\Omega_1}} = 10 \cdot 9 = 90$ i ze zwracaniem: $\overline{\overline{\Omega_2}} = 10 \cdot 10 = 100$
	Wypisanie wszystkich wyników sprzyjających zdarzeniu A, że druga wylosowana kula ma numer dwa razy większy niż pierwsza: $A = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8),(5,10)\}$ i obliczenie $\overline{\overline{A}} = 5$
	Obliczenie odpowiednich prawdopodobieństw: $P_1(A) = \frac{5}{90}$, $P_2(A) = \frac{5}{100}$ i podanie odpowiedzi: Większe prawdopodobieństwo otrzymamy w przypadku losowania bez zwracania.
6.	Obliczenie $P(B)$, gdzie B oznacza zdarzenie, że wylosowano dwie kule białe: $P(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{27}$
	Obliczenie $P(C)$, gdzie C oznacza zdarzenie, że wylosowano dwie kule czarne: $P(C) = \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
6.	Obliczenie $P(Z)$, gdzie Z oznacza zdarzenie, że wylosowano dwie kule zielone: $P(Z) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}$
	Obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania dwóch kul tego samego koloru: $\frac{4}{27} + \frac{1}{6} + \frac{1}{27} = \frac{19}{54}$
7.	Obliczenie $\overline{\overline{\Omega}}$: $\overline{\overline{\Omega}} = 6 \cdot 6 = 36$
7. a)	Obliczenie $\overline{\overline{A}}$: $\overline{\overline{A}} = 3 \cdot 3 = 9$ i $P(A) = \frac{1}{4}$
7. b)	Obliczenie $\overline{\overline{B}}$: $\overline{\overline{B}} = 6$ oraz $P(B) = \frac{1}{6}$
7. c)	Obliczenie $\overline{\overline{C}}$: $\overline{\overline{C}} = 2$ oraz $P(C) = \frac{1}{18}$
8.	Obliczenie $\overline{\overline{\Omega}}$: $\overline{\overline{\Omega}} = 8 \cdot 7 = 56$
	Obliczenie $\overline{\overline{A}}$, gdzie A jest zdarzeniem, że pierwsza wylosowana kula jest biała, a druga ma numer 1: $\overline{\overline{A}} = 4 \cdot 2 + 1 = 9$
	Obliczenie $P(A) = \frac{9}{56}$
9.	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzeń A_1, A_2, A_3 polegających na wylosowaniu białej kuli odpowiednio z urn I, II i III: $P(A_1) = \frac{2}{n}$, $P(A_2) = \frac{3}{n}$, $P(A_3) = \frac{4}{n}$
	Ułożenie równania $\frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{4}{n} = \frac{1}{9}$
	Obliczenie n: $n = 6$
10.	Obliczenie, ile spośród 20 osób w klasie Ia odpowiedziało pozytywnie: $0{,}25 \cdot 12 + 0{,}75 \cdot 8 = 9$
	Obliczenie $P(A)$, gdzie A oznacza zdarzenie, że losowo wybrana osoba z klasy Ia lubi oglądać mecze: $P(A) = \frac{9}{20}$
	Obliczenie, ile spośród 20 osób w klasie Ib odpowiedziało pozytywnie: $0{,}2 \cdot 5 + 0{,}6 \cdot 15 = 10$
	Obliczenie $P(B)$, gdzie B oznacza zdarzenie, że losowo wybrana osoba z klasy Ib lubi oglądać mecze: $P(B) = \frac{10}{20}$
	Zapisanie odpowiedzi: Prawdopodobieństwo jest większe w klasie Ib.
11.	Obliczenie $\overline{\overline{\Omega}}$: $\overline{\overline{\Omega}} = 36$
	Wypisanie zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A: $(2,6), (4,3), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)$
	Obliczenie $\overline{\overline{A}}$: $\overline{\overline{A}} = 6$
	Obliczenie $P(A)$: $P(A) = \frac{1}{6}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
12.	Wypisanie wyników sprzyjających zdarzeniu A, że liczby oczek otrzymane w obu rzutach różnią się o 1: $(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)$
	Obliczenie prawdopodobieństwa otrzymania wyniku $(1,2)$: $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}$ i zauważenie, że takie samo jest prawdopodobieństwo otrzymania wyniku $(2,1)$
	Obliczenie prawdopodobieństwa otrzymania wyniku $(2,3)$: $\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}$ i zauważenie, że takie samo jest prawdopodobieństwo otrzymania wyniku $(3,2)$
	Obliczenie $P(A)=2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+2\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{4}{9}$
13.	Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementernych: pierwszy los możemy wybrać na 5 sposobów, drugi – na 4 sposoby, zatem wszystkich zdarzeń jest $5\cdot4=20$
	Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu przynajmniej jednego losu wygrywającego. Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A': pierwszy los możemy wybrać na 3 sposoby, drugi – na 2 sposoby, zatem wszystkich zdarzeń jest $3\cdot2=6$
	Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A: $20-6=14$
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A)=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$
14.	Opisanie zdarzeń: A – zdarzenie, że w loterii wygrywa się co najwyżej 5 zł, B – zdarzenie, że w loterii wygrywa się co najmniej 5 zł
	Zauważenie, że $A\cup B$ jest zdarzeniem pewnym, czyli $P(A\cup B)=1$
	Zauważenie, że $A\cap B$ jest zdarzeniem polegającym na wygraniu dokładnie 5 zł i zapisanie wzoru $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$
	Obliczenie $P(A\cap B)=0{,}9+0{,}2-1=0{,}1$
15.	Zauważenie, że $B\setminus A=(A\cup B)\setminus A$ i $A\subset A\cup B$
	Zapisanie wzoru $P(B\setminus A)=P(A\cup B)-P(A)$
	Obliczenie $P(B\setminus A)=\frac{2}{9}$

14. Statystyka

M – mediana, D – dominanta,
$\overline{x}$ – średnia arytmetyczna,
σ – odchylenie standardowe

Zestaw A – odpowiedzi

1. **a)** $\overline{x}=8$ **b)** $\overline{x}=3{,}4$

2. **a)** $M=7$, $D=7$ **b)** $M=7$, $D=6$

3. dla dziewcząt: $\overline{x}=3{,}5$, $M=3{,}5$, $D=3{,}5$,
dla chłopców: $\overline{x}=3{,}5$, $M=3{,}5$, $D=3$,
dla całej klasy: $\overline{x}=3{,}5$, $M=3{,}5$, $D=3{,}5$

4. **a)** $M=1$, $D=1$ **b)** $M=2$, $D=2$

5. $\overline{x}=1{,}65$, $M=1{,}5$, $D=1$

6. **a)** 3805 zł **b)** 80%

7. o 0,4

8. **a)** w grupie I: $\overline{x}=140$, $M=140$,
w grupie II: $\overline{x}=140$, $M=140$
b) w grupie I: $\sigma^2=\frac{800}{7}\approx114{,}29$, $\sigma\approx10{,}69$,
w grupie II: $\sigma^2=600$, $\sigma\approx24{,}49$

9. $\sigma_X\approx273{,}86$ zł, $\sigma_Y\approx921{,}95$ zł

10. **a)** tak **b)** tak
c) w lipcu, wrześniu, październiku i listopadzie

11. **a)** 3,4 **b)** $\frac{50}{9} \approx 5{,}56$

12. Kuba

13. 3,8

14. **a)** 12 **b)** 11,5 **c)** 12,4

Zestaw B – odpowiedzi

1. D **2.** C **3.** B **4.** A **5.** C

Zestaw C – odpowiedzi

1. **a)** 3 **b)** 7

2. $x = 3$, $M = 5{,}5$, $D_1 = 5$, $D_2 = 6$

3. $x = 8$, $y = 20$

4. **a)** 14 tys. **b)** $\sigma \approx 1{,}63$ tys.

5. *B*

Zestaw D – odpowiedzi

1. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29; $\overline{x} = 12{,}9$; $M = 12$

2. IIIa: $\overline{x}_a = 1$ godz. 15 min, $M_a = 1$ godz., $D_a = 1$ godz.
IIIb: $\overline{x}_b = 50$ min, $M_b = 30$ min, $D_b = 30$ min
obie klasy: $\overline{x} = 1$ godz. 4 min, $M = 1$ h, $D = 30$ min

3. **a)** 2900 zł
b) 3075 zł.

4. **a)** tak **b)** tak **c)** nie

5. **a)** 4176 zł
b) 3440 zł

6. 4

7. $n = 3$

8. **a)** 4
b) $\sigma \approx 2{,}43$

9. **a)** 2 **b)** $\frac{63}{145}$

Zestaw C – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1. a)	Obliczenie, ilu uczniów otrzymało daną ocenę: Ocena | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 Liczba uczniów | 2 | 4 | 12 | 6 | 1 Obliczenie średniej oceny: $\overline{x} = 3$
1. b)	Podanie odpowiedzi: Siedmiu uczniów otrzymało ocenę wyższą od średniej.
2.	Ułożenie i rozwiązanie równania: $\frac{7x+27}{8} = 6$; $x = 3$
	Podanie mediany i dominanty: $M = 5{,}5$, $D_1 = 5$, $D_2 = 6$
3.	Ułożenie równania $\frac{35+x+y}{7} = 9$ i obliczenie sumy: $x + y = 28$
	Zauważenie, że medianą jest jedna z szukanych liczb i podanie odpowiedzi: $x = 8$, $y = 20$
4. a)	Obliczenie średniej miesięcznej liczby mieszkań oddanych w II półroczu: $\overline{x} = 14$ tys.
4. b)	Obliczenie odchylenia standardowego: $\sigma \approx 1{,}63$ tys.
5.	Obliczenie średnich ważonych: $\overline{x}_A = 4{,}3$, $\overline{x}_B = 4{,}6$, $\overline{x}_C = 4{,}4$
	Zaokrąglenie wyników i podanie odpowiedzi: Najlepszą oceną była 5 i uzyskał ją uczeń *B*.

Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Wypisanie liczb pierwszych mniejszych od 30: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29
	Obliczenie średniej: $\overline{x} = 12{,}9$
	Podanie mediany: $M = 12$
2.	Obliczenie średniej dziennej liczby godzin spędzanych przed komputerem przez uczniów klasy IIIa: $\overline{x}_a = 1$ godz. 15 min
	Podanie mediany i dominanty w klasie IIIa: $M_a = 1$ godz., $D_a = 1$ godz.
	Obliczenie średniej dziennej liczby godzin spędzanych przed komputerem przez uczniów klasy IIIb: $\overline{x}_b = 50$ min
	Podanie mediany i dominanty w klasie IIIb: $M_b = 30$ min, $D_b = 30$ min
	Obliczenie średniej dziennej liczby godzin spędzanych przed komputerem przez uczniów obu klas łącznie: $\overline{x} = 1$ godz. 4 min
	Podanie mediany i dominanty: $M = 1$ godz., $D = 30$ min
3. a)	Zapisanie stosunku liczby pracowników w oddziałach: $n_1 : n_2 = 2 : 1$
	Obliczenie średniej ważonej: $2700 \cdot \frac{2}{3} + 3300 \cdot \frac{1}{3} = 2900$ [zł]
3. b)	Zapisanie stosunku liczby pracowników w oddziałach: $n_1 : n_2 = 6 : 10$
	Obliczenie średniej ważonej: $2700 \cdot \frac{6}{16} + 3300 \cdot \frac{10}{16} = 3075$ [zł]
4. a)	Obliczenie, ile osób przynajmniej raz było w kinie: 40 i udzielenie twierdzącej odpowiedzi
4. b)	Obliczenie średniej: $\overline{x} = 2$ i udzielenie twierdzącej odpowiedzi
4. c)	Obliczenie, ile osób było w kinie więcej niż 2 razy: 16
	Obliczenie, że 40% z 50 to 20 i stwierdzenie, że nie jest prawdą, że ponad 40% badanych było w kinie więcej niż 2 razy
5.	Obliczenie sumy s_1 miesięcznych zarobków w firmie przed zatrudnieniem nowego pracownika: $s_1 = 15 \cdot 3600 = 54\,000$ [zł]
	Zapisanie równości $x = s_2 - s_1$, gdzie s_2 oznacza sumę miesięcznych zarobków w firmie po zatrudnieniu nowego pracownika, a x – miesięczne zarobki nowego pracownika
	a) Zauważenie, że $s_2 = 16 \cdot 1{,}01 \cdot 3600 = 58\,176$ [zł] i obliczenie x: $x = 4176$ [zł]
	b) Zauważenie, że $s_2 = 16 \cdot (3600 - 10) = 57\,440$ [zł] i obliczenie x: $x = 3440$ [zł]
6.	Obliczenie sumy s wszystkich ocen: $s = 20 \cdot 3{,}6 = 72$
	Zauważenie, że suma ocen wzrosłaby o $4 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 8$
	Obliczenie nowej średniej ocen: $\overline{x} = \frac{72+8}{20} = 4$

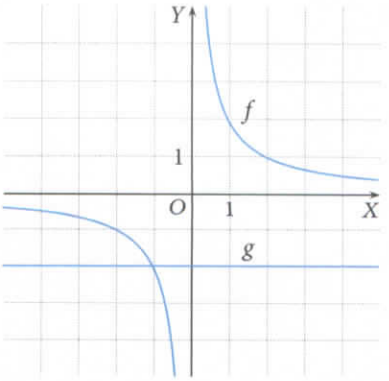
<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Etapy rozwiązania zadania</th></tr>
<tr><td rowspan="3">7.</td><td>Obliczenie sumy n liczb: $s = 50n$</td></tr>
<tr><td>Ułożenie równania: $\frac{70+130+50n}{n+2} = 70$</td></tr>
<tr><td>Rozwiązanie równania i obliczenie n: $n = 3$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">8. a)</td><td>Oznaczenie przez n liczby ankietowanych uczniów i podanie, ilu uczniów udzieliło danej odpowiedzi:
<table>
<tr><td>Liczba obecności na basenie</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Liczba uczniów</td><td>$0{,}1 \cdot n$</td><td>$0{,}1 \cdot n$</td><td>$0{,}05 \cdot n$</td><td>$0{,}55 \cdot n$</td><td>$0{,}2 \cdot n$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Obliczenie średniej miesięcznej liczby obecności na basenie:
$\overline{x} = \frac{0 \cdot 0{,}1 \cdot n + 1 \cdot 0{,}1 \cdot n + 2 \cdot 0{,}05 \cdot n + 4 \cdot 0{,}55 \cdot n + 8 \cdot 0{,}2 \cdot n}{n} = 4$</td></tr>
<tr><td>8. b)</td><td>Obliczenie odchylenia standardowego: $\sigma \approx 2{,}43$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">9. a)</td><td>Obliczenie średniej liczby błędów: $\overline{x} = \frac{57}{30} = 1{,}9$</td></tr>
<tr><td>Zaokrąglenie wyniku do całości: $\overline{x} \approx 2$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">9. b)</td><td>Obliczenie $\overline{\overline{\Omega}}$: $\overline{\overline{\Omega}} = \frac{30 \cdot 29}{2} = 435$</td></tr>
<tr><td>Obliczenie liczby wyników sprzyjających zdarzeniu A, że wśród wybranych dwóch osób jedna uzyskała wynik pozytywny, a druga negatywny: $\overline{\overline{A}} = 21 \cdot 9 = 189$</td></tr>
<tr><td>Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A i zapisanie go w postaci ułamka nieskracalnego: $P(A) = \frac{63}{145}$</td></tr>
</table>

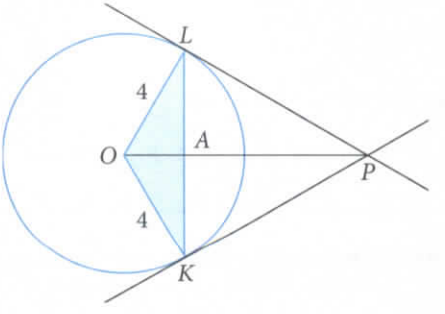
Zestawy maturalne

Zestaw 1 – odpowiedzi

1. D **2.** D **3.** A **4.** A **5.** D **6.** B **7.** A **8.** A **9.** C
10. D **11.** D **12.** C **13.** B **14.** B **15.** B **16.** C
17. C **18.** A **19.** D **20.** C **21.** D **22.** B **23.** C
24. A **25.** C
26. 3 cm
27. $\frac{1}{2}$
28. $y=\frac{1}{4}x+2$
29. $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=0$, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$
30. $x\in(-\infty;-1)\cup(0;\infty)$
31. $32-12\sqrt{3}$
32. $b=9$, $c=27$
33. $4\sqrt{3}$

Zestaw 1 – modele rozwiązań zadań otwartych

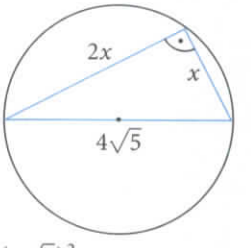
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
26.	Obliczenie wysokości trójkąta BDF lub długości jego boku: $h=9$ cm, $a=6\sqrt{3}$ cm
	Obliczenie promienia koła wpisanego w trójkąt BDF: $r=3$ cm
27.	Obliczenie liczby zdarzeń elementarnych: $\overline{\overline{\Omega}}=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$
	Obliczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, gdzie A oznacza, że wylosowana liczba jest parzysta: $\overline{\overline{A}}=12$; obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A)=\frac{1}{2}$
28.	Obliczenie współczynnika kierunkowego szukanej prostej: $a=\frac{1}{4}$
	Wyznaczenie równania szukanej prostej: $y=\frac{1}{4}x+2$
29.	Zapisanie równań: $x=0$ lub $2x^2-1=0$
	Rozwiązanie równań: $x=0$ lub $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$
30.	Naszkicowanie wykresów funkcji f i g 
	Odczytanie odpowiedzi: $x\in(-\infty;-1)\cup(0;\infty)$

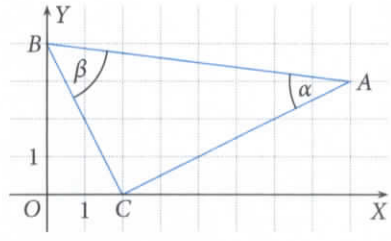
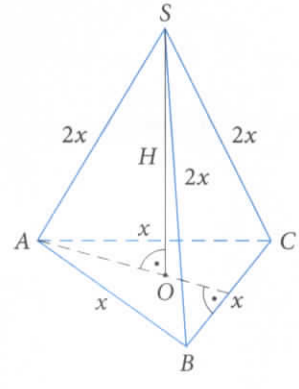
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
31.	Wyznaczenie długości promienia okręgu: $r = 4$
	Zauważenie zależności pomiędzy przekątną kwadratu i średnicą okręgu: $d = 8 = a\sqrt{2}$ oraz obliczenie pola kwadratu: $P = 32$
	Zauważenie zależności pomiędzy wysokością trójkąta równobocznego a promieniem okręgu: $\frac{2}{3}h = r = 4$ oraz wyznaczenie wysokości trójkąta: $h = 6$
	Obliczenie długości boku trójkąta: $a = 4\sqrt{3}$
	Obliczenie pola trójkąta: $P = 12\sqrt{3}$ oraz zapisanie różnicy pomiędzy polami: $32 - 12\sqrt{3}$
32.	Wyrażenie drugiego i trzeciego wyrazu ciągu geometrycznego za pomocą wyrazu pierwszego i ilorazu ciągu q: $b = 3q$, $c = 3q^2$
	Wyrażenie drugiego i piątego wyrazu ciągu arytmetycznego za pomocą różnicy ciągu r i wyrazów ciągu geometrycznego: $b = 3 + r$, $c = 3q + 3r$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} 3q = 3 + r \\ 3q^2 = 3q + 3r \end{cases}$ i doprowadzenie do postaci $q^2 - 4q + 3 = 0$
	Rozwiązanie otrzymanego równania i wybór poprawnej odpowiedzi: $q = 3$
	Obliczenie wartości b i c: $b = 9$, $c = 27$
33.	Zauważenie, że $\lvert\sphericalangle OKP\rvert = \lvert\sphericalangle OLP\rvert = 90^\circ$ oraz, że trójkąty OKP i OLP są przystające 
	Wyznaczenie miary kąta KOP: $\lvert\sphericalangle KOP\rvert = 60^\circ$
	Obliczenie długości odcinków KA i KL: $\lvert KA\rvert = 2\sqrt{3}$, $\lvert KL\rvert = 4\sqrt{3}$
	Obliczenie długości odcinka OA: $\lvert OA\rvert = 2$
	Obliczenie pola trójkąta KOL: $P_{\triangle KOL} = 4\sqrt{3}$

Zestaw 2 – odpowiedzi

1. D **2.** C **3.** B **4.** A **5.** B **6.** C **7.** A **8.** A **9.** D
10. C **11.** B **12.** A **13.** D **14.** C **15.** B **16.** B
17. C **18.** C **19.** A **20.** D **21.** A **22.** A **23.** D
24. B **25.** D
26. tańsze są gruszki
27. $b_n = -\frac{1}{n(n+1)}$
28. 4
30. $k \in (-4;4)$
31. nie jest większa od $10 \cdot 2^{10}$
32. $\frac{2}{3}$
33. $18\sqrt{11}$ cm^3

Zestaw 2 – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
26.	Wyznaczenie cen jabłek i gruszek po obniżkach (x – cena przed obniżkami): gruszki – $0{,}62x$, jabłka – $0{,}64x$
	Porównanie cen i zapisanie wniosku: $0{,}62x < 0{,}64x$, zatem po obniżkach tańsze są gruszki
27.	Wyznaczenie wyrazu a_{n+1}: $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$
	Wyznaczenie wzoru ogólnego ciągu (b_n): $b_n = -\frac{1}{n(n+1)}$
28.	Zauważenie, że przeciwprostokątna trójkąta jest średnicą okręgu  oraz ułożenie równania: $x^2 + (2x)^2 = (4\sqrt{5})^2$
	Rozwiązanie równania: $x = 4$
29.	Wyznaczenie współczynników kierunkowych prostych: $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{4}{5}$
	Zapisanie wniosku: proste nie są prostopadłe, ponieważ $a_1 \cdot a_2 \neq -1$
30.	Zauważenie, że funkcja nie ma miejsc zerowych dla $\Delta < 0$
	Zapisanie warunku w postaci: $k^2 - 16 < 0$ i podanie odpowiedzi: $k \in (-4;4)$
31.	Wyznaczenie sumy pięciu początkowych wyrazów ciągu: $S_5 = \frac{(2+4r)5}{2}$, gdzie r jest różnicą ciągu
	Wyznaczenie sumy dziesięciu początkowych wyrazów ciągu: $S_{10} = \frac{(2+9r)10}{2}$
	Wykorzystanie zależności $S_{10} = 4S_5$ i obliczenie różnicy ciągu r: $r = 2$
	Obliczenie sumy stu początkowych wyrazów ciągu: $S_{100} = 10000$
	Porównanie liczb: $10000 < 10 \cdot 2^{10} = 10240$ i podanie odpowiedzi

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
32.	Wykonanie rysunku pomocniczego oraz wyznaczenie $\sin\alpha$ i $\sin\beta$: $\sin\alpha = \frac{\lvert BC\rvert}{\lvert AB\rvert}$, $\sin\beta = \frac{\lvert AC\rvert}{\lvert AB\rvert}$ 
	Zauważenie, że $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\lvert BC\rvert}{\lvert AC\rvert}$
	Obliczenie długości boków trójkąta: $\lvert BC\rvert = 2\sqrt{5}$, $\lvert AC\rvert = 3\sqrt{5}$
	Obliczenie $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{2}{3}$
33.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Obliczenie długości krawędzi ostrosłupa: krawędź podstawy $x = 6$ cm, krawędź boczna $2x = 12$ cm
	Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P_P = 9\sqrt{3}$ cm^2
	Obliczenie długości odcinka AO: $\lvert AO\rvert = 2\sqrt{3}$ cm
	Obliczenie wysokości ostrosłupa: $H = 2\sqrt{33}$ cm
	Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 18\sqrt{11}$ cm^3

Zestaw 3 – odpowiedzi

1. D **2.** B **3.** C **4.** A **5.** B **6.** D **7.** C **8.** C **9.** C
10. B **11.** A **12.** D **13.** D **14.** B **15.** C **16.** A
17. D **18.** D **19.** C **20.** C **21.** B **22.** A **23.** D
24. A **25.** A
26. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$
27. $\{-2, -1, 0\}$
28. $12\sqrt{3}$
29. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right\rangle$
30. $x = 5$, $P = 30$, $h = 4\frac{8}{13}$
31. należy dołożyć 30 losów
32. woda nie wyleje się z naczynia

Zestaw 3 – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
26.	Obliczenie wartości $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$: $\sin\alpha = 0{,}8$ i $\cos\alpha = 0{,}6$
	Obliczenie $\operatorname{tg}\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{4}{3}$
27.	Wyznaczenie zbioru B: $B = \langle -2; 2\rangle$
	Podanie liczb należących jednocześnie do obu zbiorów: $\{-2, -1, 0\}$
28.	Obliczenie długości boku BC: $\lvert BC\rvert = 2\sqrt{3}$
	Obliczenie pola równoległoboku $ABCD$: $P = 12\sqrt{3}$
29.	Obliczenie m: $m = 4$
	Rozwiązanie nierówności $4 - 8x \geqslant 0$: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right\rangle$
30.	Ułożenie równania na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $x^2 + 12^2 = (2x + 3)^2$, gdzie $x > 0$
	Rozwiązanie równania i wybór poprawnej odpowiedzi: $x = 5$
	Obliczenie pola trójkąta ABC: $P_{\triangle ABC} = 30$
	Obliczenie wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną: $h = 4\frac{8}{13}$
31.	Podanie, że $\overline{\overline{\Omega}} = 120$ oraz zapisanie liczby elementów zbioru A, gdzie A jest zdarzeniem polegającym na wyciągnięciu losu wygrywającego: $\overline{\overline{A}} = w$
	Rozwiązanie równania $\frac{w}{120} = 0{,}05$: $w = 6$
	Ułożenie równania: $\frac{6 + x}{120 + x} = 0{,}24$, gdzie x jest liczbą losów wygrywających, które należy dołożyć
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: Należy dołożyć 30 losów.

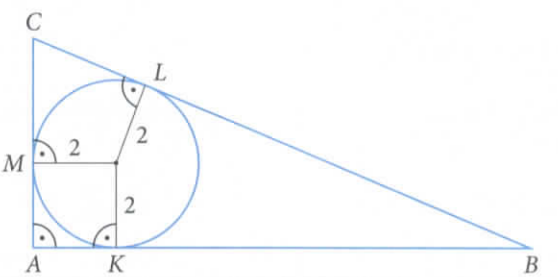
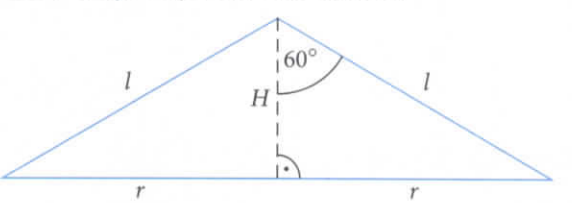
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
32. I sposób	Obliczenie objętości części walca niewypełnionej wodą: $V = 324\pi \text{ cm}^3 \approx 1017{,}36 \text{ cm}^3$
	Obliczenie objętości kostki: $V_k = 1000 \text{ cm}^3$
	Zauważenie, że $V_k < V$ i podanie odpowiedzi: Woda nie wyleje się z naczynia.
32. II sposób	Obliczenie objętości walca: $V = 1296\pi \text{ cm}^3 \approx 4069{,}44 \text{ cm}^3$
	Obliczenie objętości wody: $V_w = 972\pi \text{ cm}^3 \approx 3052{,}08 \text{ cm}^3$
	Obliczenie objętości kostki: $V_k = 1000 \text{ cm}^3$
	Zauważenie, że $3052{,}08 + 1000 = 4052{,}08 < 4069{,}44$ i podanie odpowiedzi: Woda nie wyleje się z naczynia.
33. a)	Przekształcenie lewej strony nierówności: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$
	Zauważenie, że $\frac{3}{4} = \frac{1{,}5}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$
	Dokończenie dowodu: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
33. b)	Zapisanie nierówności $(a+b)^2 \geqslant 4ab$ w postaci $(a+b)^2 - 4ab \geqslant 0$ oraz przekształcenie lewej strony: $(a+b)^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2$
	Zauważenie, że $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geqslant 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b i sformułowanie wniosku

Zestaw 4 – odpowiedzi

1. D **2.** B **3.** D **4.** A **5.** B **6.** A **7.** D **8.** A **9.** A
10. C **11.** A **12.** C **13.** C **14.** B **15.** D **16.** C
17. A **18.** B **19.** D **20.** C **21.** D **22.** D **23.** A
24. B **25.** C
26. $(0, -\frac{4}{3})$
27. $f(1) = 7$
28. $x = -3$
29. $\alpha = 25°$
30. $a = 1$, $b = 6$
31. **a)** $a = -2$
b) $x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$
c) $x = 2\frac{2}{3}$
32. 30
33. $(27 + 18\sqrt{3})\pi \text{ cm}^2$

Zestaw 4 – modele rozwiązań zadań otwartych

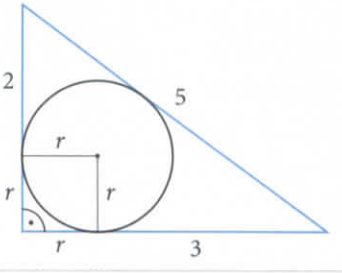
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
26.	Obliczenie a: $a = \frac{4}{3}$
	Wyznaczenie współrzędnych punktu przecięcia prostej z osią OY: $(0, -\frac{4}{3})$
27.	Zauważenie, że $x_w = -\frac{b}{2a} = 2$ oraz obliczenie b: $b = 4$
	Obliczenie $f(1)$: $f(1) = 7$

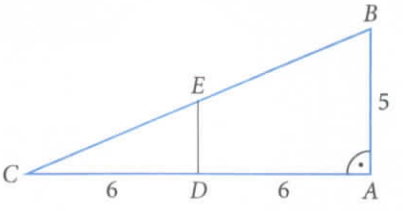
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
28.	Zapisanie równania w postaci: $x^2+6x+9=0$
	Rozwiązanie równania: $x=-3$
29.	Zauważenie, że $\lvert\sphericalangle ACB\rvert=70^\circ$ oraz $\lvert\sphericalangle OCB\rvert=25^\circ$
	Zauważenie, że $\alpha=\lvert\sphericalangle OCB\rvert=25^\circ$
30.	Zauważenie, że $(a,b)=\left(\frac{-4+b}{2},\frac{4+8}{2}\right)$ i napisanie równań: $a=\frac{-4+b}{2}$ oraz $b=\frac{4+8}{2}$
	Wyznaczenie współrzędnych a i b: $a=1$, $b=6$
31. a)	Obliczenie a: $a=-2$
31. b)	Podanie odpowiedzi: $x\in(-\infty;2)\cup(3;\infty)$
31. c)	Zapisanie warunku $f(x)=0$ i ułożenie równania: $-\frac{2}{x-2}+3=0$
	Rozwiązanie równania: $x=2\frac{2}{3}$
32.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zauważenie, że $\lvert AM\rvert=\lvert AK\rvert=2$, $\lvert BK\rvert=\lvert BL\rvert=10$ oraz $\lvert CL\rvert=\lvert CM\rvert=x$
	Ułożenie równania na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $(x+2)^2+12^2=(x+10)^2$
	Rozwiązanie równania: $x=3$
	Obliczenie obwodu trójkąta: $Obw=30$
33.	Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń 
	Zapisanie warunku $V=\frac{1}{3}\pi r^2H=27\pi$ cm^3
	Wyznaczenie r: $r=H\sqrt{3}$ cm
	Podstawienie wyznaczonego r do zapisanego wcześniej warunku i obliczenie wysokości stożka, a następnie promienia jego podstawy: $H=3$ cm, $r=3\sqrt{3}$ cm
	Obliczenie długości tworzącej stożka: $l=6$ cm
	Obliczenie pola powierzchni całkowitej stożka: $P=9\pi(3+2\sqrt{3})$ cm^2

Zestaw 5 – odpowiedzi

1. B **2.** A **3.** B **4.** D **5.** C **6.** A **7.** D **8.** D **9.** C
10. A **11.** B **12.** A **13.** C **14.** B **15.** B **16.** A
17. A **18.** B **19.** D **20.** B **21.** D **22.** D **23.** A
24. B **25.** C
26. $b = -\frac{1}{2}$, $f_{\min} = -3\frac{1}{4}$
27. $\frac{-1}{x+1}$; $-\frac{3}{4}$
28. $a_1 = -1$, $a_2 = 1$
29. $\overline{x} = 1{,}7$, $M = 1{,}5$
30. $r = 1$
31. $y = -3x + 13$
32. 7,5 cm^2 i 22,5 cm^2
33. 0, 1

Zestaw 5 – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
26.	Zauważenie, że pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli $x_w = -\frac{b}{2a} = 1$ i obliczenie współczynnika b: $b = -\frac{1}{2}$
	Wyznaczenie najmniejszej wartości funkcji f: $f_{\min} = -3\frac{1}{4}$
27.	Uproszczenie wyrażenia: $-\frac{1}{x+1}$
	Obliczenie wartości dla $x = \frac{1}{3}$: $-\frac{3}{4}$
28.	Obliczenie pierwszego wyrazu: $a_1 = -1$
	Obliczenie drugiego wyrazu: $a_2 = 1$
29.	Obliczenie średniej arytmetycznej: $\overline{x} = 1{,}7$
	Wyznaczenie mediany: $M = 1{,}5$
30.	Zapisanie równania na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $(2+r)^2 + (r+3)^2 = 25$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego 
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $r = 1$
31.	Obliczenie długości boków BC i AB: $\lvert BC\rvert = \lvert AB\rvert = 2\sqrt{5}$
	Zapisanie wniosku: Boki BC i AB są równe, zatem trójkąt jest równoramienny.
	Wyznaczenie środka odcinka AC: $S(3,4)$
	Obliczenie współczynnika kierunkowego prostej przechodzącej przez punkty B i S (współczynnik kierunkowy osi symetrii): $a = -3$
	Wyznaczenie równania osi symetrii: $y = -3x + 13$

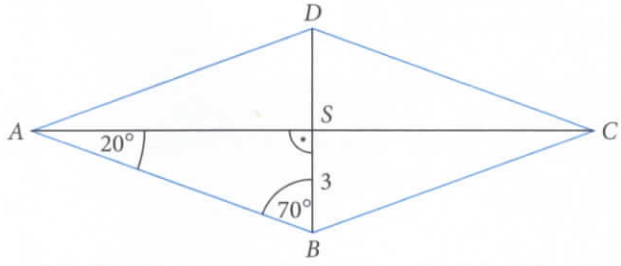
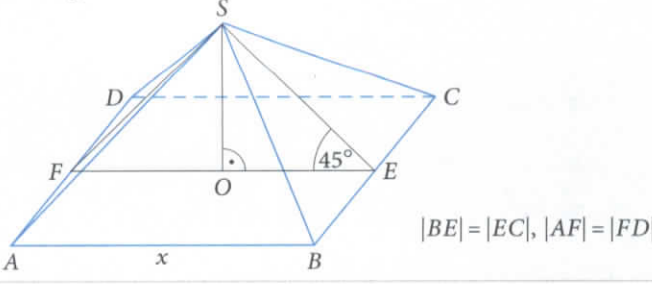
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
32.	Obliczenie długości drugiej przyprostokątnej trójkąta: 12 cm
	Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń 
	Wykorzystanie podobieństwa trójkątów i obliczenie długości odcinka DE: $\|DE\| = 2{,}5$ cm
	Obliczenie pola trójkąta DEC: $P_{DEC} = 7{,}5$ cm^2
	Obliczenie pola trapezu $ABED$: $P_{ABED} = 22{,}5$ cm^2
33.	Przedstawienie a w postaci $a = \log_{\frac{1}{2}} 2$
	Podanie wartości a: $a = -1$
	Rozwiązanie równania: $x = -1$ lub $x = 0$ lub $x = 1$
	Rozwiązanie nierówności: $x \in (-1; 2)$
	Podanie odpowiedzi: 0, 1

Zestaw 6 – odpowiedzi

1. C **2.** B **3.** D **4.** C **5.** D **6.** A **7.** C **8.** B **9.** D
10. A **11.** C **12.** D **13.** B **14.** A **15.** B **16.** C
17. A **18.** D **19.** A **20.** C **21.** B **22.** D **23.** B
24. C **25.** B
26. $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}8$
28. $x = 12$
29. 16,5
30. $x \in \langle 0; 2 \rangle$
31. $f_{\max}(0) = 6$, $f_{\min}(3) = 0$
32. 12 tygodni
33. $12 + 6\sqrt{3}$
34. $(2, 2)$

Zestaw 6 – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
26.	Zapisanie związku: $\sin\alpha = 0{,}8\cos\alpha$
	Obliczenie $\operatorname{tg}\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0{,}8$
27.	Zapisanie sumy: $2n + 2n + 2 + 2n + 4$, $n \in \mathbf{N}$
	Przekształcenie sumy do postaci: $6(n+1) = 6 \cdot k$, gdzie $k \in \mathbf{N}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
28.	Wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia: $36-\frac{x^2}{4}=4-\left(16-4x+\frac{x^2}{4}\right)$
	Rozwiązanie równania: $x=12$
29.	Wykonanie rysunku pomocniczego i zauważenie związku w trójkącie ABS: $\operatorname{tg}20^\circ=\frac{\lvert BS\rvert}{\lvert AS\rvert}$ 
	Odczytanie z tablic wartości $\operatorname{tg}20^\circ=0{,}364$ i obliczenie: $\lvert AC\rvert=2\lvert AS\rvert=2\cdot\frac{\lvert BS\rvert}{\operatorname{tg}20^\circ}=\frac{2\cdot3}{0{,}364}\approx16{,}5$
30.	Zapisanie nierówności w postaci: $2x^3-3x^2+2-2x^3+4x^2-2x-2\leqslant0$
	Rozwiązanie nierówności: $x\in\langle0;2\rangle$
31.	Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli $x_w=\frac{-b}{2a}=0$, $y_w=f(0)=6$ oraz zauważenie, że $0\in\langle-1;3\rangle$
	Obliczenie wartości $f(-1)=5\frac{1}{3}$ i $f(3)=0$ oraz zapisanie odpowiedzi: $f_{max}=6$, $f_{min}=0$
32.	Wprowadzenie oznaczeń, np. t – liczba tygodni, r – wysokość raty oraz ułożenie równań: (1) $600=r\cdot t$ (2) $600=(r-10)(t+3)$
	Przekształcenie równania (2) do postaci: $t^2+3t-180=0$
	Rozwiązanie równania: $t=12$ lub $t=-15$
	Podanie odpowiedzi: $t=12$ tygodni
33.	Wykonanie rysunku pomocniczego  $\lvert BE\rvert=\lvert EC\rvert$, $\lvert AF\rvert=\lvert FD\rvert$
	Zauważenie, że $\lvert OE\rvert=\lvert OS\rvert=\frac{x}{2}$
	Napisanie wzoru na objętość ostrosłupa: $V=\frac{1}{6}x^3$ i obliczenie x: $x=3$

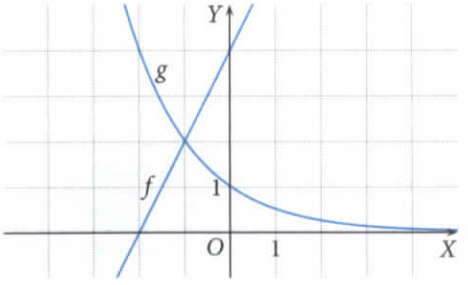
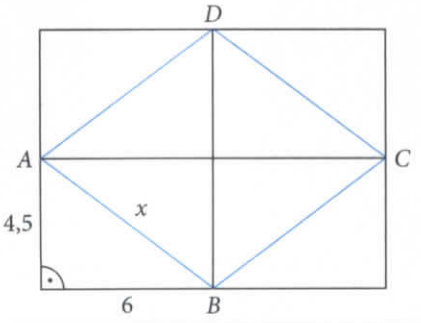
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
33.	Obliczenie długości krawędzi bocznej: $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
	Obliczenie sumy długości wszystkich krawędzi: $4x + 4y = 12 + 6\sqrt{3}$
34.	Wyznaczenie równania symetralnej boku AB: $x = 2$
	Wyznaczenie równania prostej AC: $y = x + 2$
	Wyznaczenie równania symetralnej boku AC: $y = -x + 4$
	Wyznaczenie środka okręgu opisanego jako punktu przecięcia się symetralnych: $(2, 2)$

Zestaw 7 – odpowiedzi

1. A **2.** B **3.** A **4.** C **5.** B **6.** B **7.** C **8.** A **9.** B
10. D **11.** D **12.** C **13.** D **14.** B **15.** C **16.** C
17. A **18.** A **19.** B **20.** B **21.** C **22.** A **23.** D
24. C **25.** B
26. $x \in \left(\frac{9}{8}; \infty\right)$
27. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$
28. $x = -3$, $x = 1$
30. 728
31. dla $x \in (-\infty; -1)$
32. $a = 2$, $b = 6$
33. 3,6
34. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Zestaw 7 – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
26.	Wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia: $x^2 - 3x + \frac{9}{4} - 3 < x - 3x - 3 + x^2 + x$
	Rozwiązanie nierówności: $x > \frac{9}{8}$ oraz zaznaczenie rozwiązania na osi liczbowej
27.	Zapisanie warunku: $9 - 4m^2 < 0$
	Podanie rozwiązania nierówności: $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$
28.	Wyznaczenie dziedziny: $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ i przekształcenie równania do postaci: $x^2 + 2x - 3 = 0$
	Podanie rozwiązania równania: $x = 1$ lub $x = -3$
29.	Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB: $a_{AB} = \frac{3}{7}$
	Przekształcenie danej prostej do postaci kierunkowej $y = \frac{3}{7}x - \frac{2}{7}$ i porównanie współczynników kierunkowych

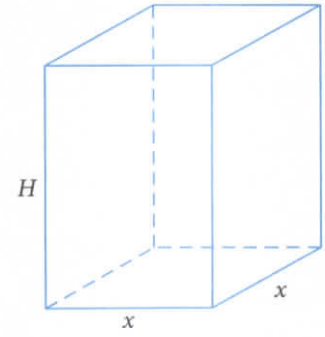
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
30.	Zauważenie, że liczby te tworzą ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 14$, różnicy $r = 7$ i ostatnim wyrazie $a_n = 98$
	Obliczenie liczby wyrazów: $n = 13$ oraz sumy: $S_{13} = 728$
31.	Wykonanie rysunku 
	Odczytanie rozwiązania nierówności: $f(x) < g(x)$: $x \in (-\infty; -1)$
32.	Ułożenie równania wynikającego z założeń o ciągu arytmetycznym: $18 = a + 4(b - a)$
	Zapisanie równania: $\frac{b}{a} = \frac{18}{b}$ i przekształcenie go do postaci: $a = \frac{1}{18}b^2$
	Zapisanie równania z jedną niewiadomą: $b^2 - 24b + 108 = 0$
	Rozwiązanie równania: $b = 6$ lub $b = 18$
	Odrzucenie rozwiązania $b = 18$ ze względu na monotoniczność ciągu i obliczenie a: $a = 2$
33.	Wykonanie rysunku pomocniczego i obliczenie długości boku rombu: $x = 7{,}5$ 
	Obliczenie pola rombu: $P = \frac{\lvert AC\rvert \cdot \lvert DB\rvert}{2} = 54$
	Obliczenie wysokości rombu: $h = \frac{P}{x} = 7{,}2$
	Obliczenie promienia okręgu wpisanego w romb: $r = \frac{1}{2}h = 3{,}6$
34.	Obliczenie $\overline{\overline{\Omega}}$: $\overline{\overline{\Omega}} = 36$
	Obliczenie $\overline{\overline{A}}$: $\overline{\overline{A}} = 3 \cdot 6 = 18$ oraz $P(A) = \frac{1}{2}$
	Obliczenie $\overline{\overline{B}}$: $\overline{\overline{B}} = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$ oraz $P(B) = \frac{1}{2}$
	Obliczenie $\overline{\overline{A \cap B}}$: $\overline{\overline{A \cap B}} = 9$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Zestaw 8 – odpowiedzi

1. B **2.** B **3.** C **4.** B **5.** A **6.** D **7.** B **8.** C **9.** A
10. A **11.** D **12.** A **13.** A **14.** B **15.** B **16.** C
17. C **18.** C **19.** B **20.** C
21. $5^{\frac{7}{4}}$
22. $m=-\frac{2}{3}$
23. 6
24. $x=2,\ y=5$
25. $y=\frac{3}{2}$
26. $x=-6$
27. **a)** $S_{20}=610$ **b)** dla $n=11$
28. $m=8$ i $n=10$; $\frac{7}{16}$
29. 2

Zestaw 8 – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
21.	Zapisanie liczby $\sqrt[4]{125}$ w postaci potęgi o podstawie 5: $5^{\frac{3}{4}}$
	Zapisanie liczby $(0{,}04)^{-\frac{1}{2}}$ w postaci potęgi o podstawie 5 i wykonanie mnożenia: $5^{\frac{3}{4}}\cdot 5=5^{\frac{7}{4}}$
22.	Wyznaczenie miejsc zerowych obu funkcji: $x_f=-\frac{4}{3}$ oraz $x_g=2m$
	Zapisanie równania $-\frac{4}{3}=2m$ i obliczenie m: $m=-\frac{2}{3}$
23.	Ułożenie układu równań: $\begin{cases} x+y=20 \\ 3x-y=36 \end{cases}$ gdzie x jest liczbą poprawnych odpowiedzi, a y – liczbą błędnych odpowiedzi
	Rozwiązanie układu równań i podanie odpowiedzi: Uczeń zakreślił 6 błędnych odpowiedzi.
24.	Ułożenie równania: $\frac{6+0+5+3+5+6+x+y}{8}=4$ i przekształcenie go do postaci: $x+y=7$
	Zauważenie, że $x=5$ lub $y=5$, przy czym $y>x$, i podanie odpowiedzi: $x=2,\ y=5$
25.	Zapisanie warunku $\lvert AC\rvert=\lvert BC\rvert$ w postaci równania z niewiadomą y: $\sqrt{(0+2)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(0-4)^2+(y-1)^2}$
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $y=\frac{3}{2}$
26.	Rozwiązanie pierwszego równania: $x=0$ lub $x=-6$ lub $x=6$
	Zapisanie nierówności w postaci: $x^2+8x+7\leqslant 0$
	Rozwiązanie nierówności: $x\in\langle -7;-1\rangle$
	Podanie odpowiedzi: $x=-6$
27. a)	Zapisanie równania $\frac{(4+5r)\cdot 6}{2}=57$, gdzie r jest różnicą ciągu (a_n)
	Rozwiązanie równania: $r=3$
	Obliczenie sumy dwudziestu początkowych wyrazów ciągu (a_n): $S_{20}=610$

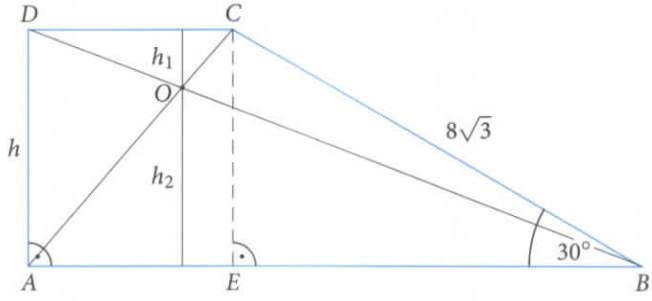
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
27. b)	Zapisanie równania $\frac{3n-1}{8}=\frac{8}{2}$
	Wyznaczenie n: $n=11$
28.	Wyznaczenie prawdopodobieństwa wylosowania kuli czarnej oraz prawdopodobieństwa zdarzenia przeciwnego: $P(A)=\frac{m}{6+m+n}$, $P(A')=\frac{6+n}{6+m+n}$
	Wyznaczenie prawdopodobieństwa wylosowania kuli białej oraz prawdopodobieństwa zdarzenia przeciwnego: $P(B)=\frac{6}{6+m+n}$, $P(B')=\frac{m+n}{6+m+n}$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} 2\cdot\frac{m}{6+m+n}=\frac{6+n}{6+m+n} \\ 3\cdot\frac{6}{6+m+n}=\frac{m+n}{6+m+n} \end{cases}$
	Rozwiązanie układu równań: $m=8$ i $n=10$
	Obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania kuli białej po dodaniu 8 kul białych: $\frac{7}{16}$
29.	Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń 
	Ułożenie równania $8x+4H=16$ oraz wyznaczenie wysokości graniastosłupa: $H=4-2x$
	Zapisanie wzoru funkcji opisującej pole powierzchni bocznej graniastosłupa: $P(x)=4x(4-2x)=-8x^2+16x$
	Podanie dziedziny funkcji P: $D=(0;2)$
	Obliczenie, dla jakiego x funkcja P osiąga największą wartość: $x=1\in D$
	Obliczenie wysokości graniastosłupa: $H=2$

Zestaw 9 – odpowiedzi

1. C **2.** C **3.** A **4.** B **5.** D **6.** B **7.** D **8.** B **9.** D
10. D **11.** C **12.** D **13.** B **14.** B **15.** C **16.** D
17. B **18.** D **19.** A **20.** B
21. $x \leqslant \frac{17}{4}$
22. $x = 1$
23. $b = -\frac{3}{2}$
24. $\frac{1}{6}$
25. 2π
26. 8
27. **a)** $c = 9$, $x = -3$ **b)** $f_{max} = 9$, $f_{min} = 0$
28. 80 km/h
29. $P_{\triangle COD} = 3\sqrt{3}$, $P_{\triangle AOB} = 27\sqrt{3}$

Zestaw 9 – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
21.	Pomnożenie obu stron nierówności przez 10: $x - 5 \leqslant 2x - 8 - 5x + 20$
	Rozwiązanie nierówności: $x \leqslant \frac{17}{4}$
22.	Zauważenie, że $\triangle DAB \sim \triangle PCD$ i ułożenie proporcji, np.: $\frac{4}{x+9} = \frac{2}{5}$
	Obliczenie x: $x = 1$
23.	Wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia dla pierwszego wyrażenia: $x^3 - 4bx^2 + 4b^2x$
	Porównanie współczynników obu wyrażeń oraz obliczenie b: $b = -\frac{3}{2}$
24.	Obliczenie liczby zdarzeń elementarnych: $\overline{\overline{\Omega}} = 4 \cdot 3 = 12$
	Wypisanie wyników sprzyjających zdarzeniu A polegającemu na tym, że numer drugiej kuli jest o 2 większy od numeru pierwszej kuli: $\{(2,4),(4,6)\}$ i obliczenie $P(A) = \frac{1}{6}$
25.	Zauważenie, że wysokość stożka jest równa promieniowi podstawy i obliczenie promienia: $r = \sqrt{2}$
	Obliczenie pola podstawy stożka: $P_p = 2\pi$
26.	Obliczenie a: $a = 16$
	Obliczenie b: $b = \frac{1}{32}$
	Obliczenie c: $c = 4$
	Obliczenie $(abc)^3$: $(abc)^3 = 8$
27. a)	Zauważenie, że funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe, gdy $\Delta = 0$
	Ułożenie równania $36 - 4c = 0$ i rozwiązanie go: $c = 9$
	Wyznaczenie równania osi symetrii wykresu funkcji f: $x = -3$
27. b)	Wyznaczenie największej wartości funkcji f: $f_{max} = 9$
	Wyznaczenie najmniejszej wartości funkcji f: $f_{min} = 0$

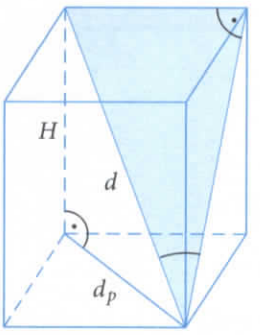
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
28.	Wyznaczenie czasu przejazdu $\frac{3}{4}$ trasy: $\frac{\frac{3}{4}s}{60}$, gdzie s jest długością całej trasy
	Wyznaczenie czasu przejazdu pozostałej $\frac{1}{4}$ trasy: $\frac{\frac{1}{4}s}{v}$, gdzie v jest szukaną prędkością
	Wyznaczenie czasu przejazdu całej trasy: $\frac{s}{64}$, a następnie ułożenie równania: $\frac{s}{64} = \frac{\frac{3}{4}s}{60} + \frac{\frac{1}{4}s}{v}$
	Przekształcenie równania do postaci $\frac{1}{64} = \frac{1}{80} + \frac{1}{4v}$
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $v = 80$ km/h
29.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Obliczenie wysokości trapezu i długości odcinka EB: $h = 4\sqrt{3}$, $\lvert EB\rvert = 12$
	Rozwiązanie równania $12\sqrt{3} + 24 = 2x + 12 + 8\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$, gdzie $x = \lvert CD\rvert$, oraz podanie długości podstaw trapezu: $\lvert AB\rvert = 18$, $\lvert CD\rvert = 6$
	Zapisanie proporcji na podstawie podobieństwa trójkątów COD i AOB: $\frac{6}{18} = \frac{h_1}{4\sqrt{3} - h_1}$
	Obliczenie wysokości trójkątów COD i AOB: $h_1 = \sqrt{3}$, $h_2 = 3\sqrt{3}$
	Obliczenie pól trójkątów COD i AOB: $P_{\triangle COD} = 3\sqrt{3}$, $P_{\triangle AOB} = 27\sqrt{3}$

Zestaw 10 – odpowiedzi

1. B **2.** C **3.** A **4.** C **5.** C **6.** D **7.** B **8.** C **9.** B
10. D **11.** A **12.** A **13.** A **14.** D **15.** A **16.** D
17. A **18.** D **19.** D **20.** C
22. 0,4
23. -1
24. nie należy
25. $\alpha = 70°$
26. $m = -2$, $P = 4$
27. $(2, -1)$
28. $a = \frac{3}{2}$, $b = 3$, $c = 6$
29. 32

Zestaw 10 – modele rozwiązań zadań otwartych

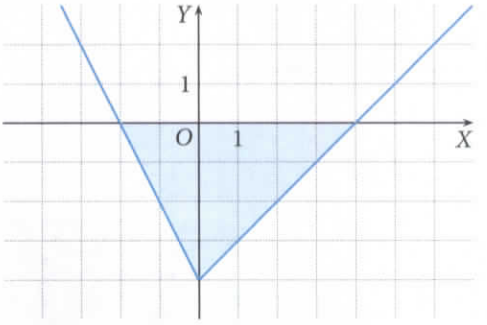
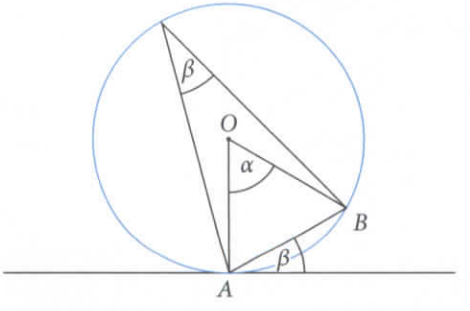
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
21.	Zauważenie, że $\sqrt{5}-2>0$
	Podniesienie obu stron równości do potęgi drugiej i otrzymanie tożsamości: $9-4\sqrt{5}=9-4\sqrt{5}$
22.	Wyznaczenie, ile jest wszystkich takich liczb: $4\cdot 5=20$
	Wyznaczenie, ile jest liczb podzielnych przez 5: $4\cdot 2=8$ i obliczenie prawdopodobieństwa: 0,4
23.	Zapisanie wyrażenia w postaci $\frac{3\operatorname{tg}\alpha-4}{2\operatorname{tg}\alpha}$ lub $\frac{3}{2}-\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}$
	Obliczenie wartości wyrażenia: -1
24.	Wyznaczenie wzoru funkcji f: $f(x)=3x-7$
	Sprawdzenie, czy punkt C należy do wykresu funkcji f i podanie odpowiedzi: Punkt C nie należy do wykresu funkcji f.
25.	Zauważenie, że kąty ABC i BCO są kątami naprzemianległymi, zatem: $\lvert\sphericalangle ABC\rvert=\lvert\sphericalangle BCO\rvert=35^\circ$
	Zauważenie, że kąt α jest dwa razy większy od kąta ABC i podanie odpowiedzi: $\alpha=70^\circ$
26.	Zapisanie równania $m^2+m-2=0$ i rozwiązanie go: $m=-2$ lub $m=1$
	Zauważenie, że $m<0$ i wybór poprawnego rozwiązania: $m=-2$
	Wyznaczenie punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych: $(2,0)$ i $(0,4)$
	Obliczenie pola trójkąta: $P=4$
27.	Przekształcenie równania prostej do postaci kierunkowej $y=2x-5$ i zapisanie współrzędnych szukanego punktu w postaci $(x,2x-5)$
	Zapisanie wzoru funkcji opisującej sumę kwadratów odległości szukanego punktu od osi układu współrzędnych: $f(x)=x^2+(2x-5)^2$
	Przekształcenie wzoru funkcji f: $f(x)=5x^2-20x+25$
	Obliczenie, dla jakiej liczby x funkcja f osiąga najmniejszą wartość: $x_w=\frac{20}{10}=2$
	Obliczenie drugiej współrzędnej szukanego punktu i podanie odpowiedzi: $(2,-1)$
28.	Zapisanie pierwszego, drugiego i czwartego wyrazu ciągu arytmetycznego za pomocą wyrazu pierwszego a_1 i różnicy r: $a=a_1$, $b=a_1+r$, $c=a_1+3r$
	Podstawienie $a=a_1$, $b=a_1+r$, $c=a_1+3r$ do równania $2a+b+c=12$ i otrzymanie zależności $a_1+r=3$

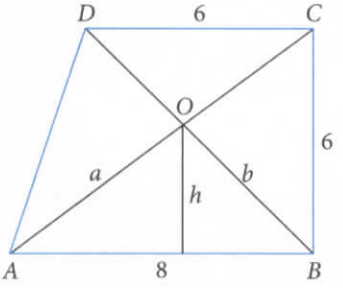
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
28.	Zapisanie pierwszego, drugiego i czwartego wyrazu ciągu arytmetycznego w postaci: $a = 3 - r$, $b = 3$, $c = 3 + 2r$
	Podstawienie $a = 3 - r$, $b = 3$, $c = 3 + 2r$ do zależności $b^2 = ac$: $3^2 = (3 - r)(3 + 2r)$
	Rozwiązanie otrzymanego równania i wybór poprawnej odpowiedzi: $r = \frac{3}{2}$
	Obliczenie wartości a, b, c: $a = \frac{3}{2}$, $b = 3$, $c = 6$
29.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Obliczenie długości przekątnej graniastosłupa: $d = 6$
	Obliczenie przekątnej podstawy graniastosłupa: $d_p = 4\sqrt{2}$
	Obliczenie wysokości graniastosłupa: $H = 2$
	Obliczenie objętości graniastosłupa: $V = 32$

Zestaw 11 – odpowiedzi

1. D **2.** A **3.** D **4.** B **5.** A **6.** C **7.** B **8.** D **9.** A
10. A **11.** B **12.** C **13.** B **14.** C **15.** A **16.** D
17. D **18.** D **19.** C **20.** D
21. o 40%
22. 12
23. $c = 4$
24. $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $\frac{2x+1}{2x-1}$
25. $a_{10} = 48$
26. $30°$
27. **a)** $\frac{24}{7}(4 + \sqrt{2})$ **b)** $\frac{72}{7}$
28. Większą kwotą będzie dysponował Paweł.
29. $\frac{5}{8}$

Zestaw 11 – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
21.	Obliczenie stopy bezrobocia w roku 2007: 10,5%
	Obliczenie, o ile procent zmalała stopa bezrobocia: o 40%
22.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Obliczenie pola trójkąta: $P = 12$
23.	Zauważenie, że funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe, gdy $\Delta = 0$
	Ułożenie równania $16 - 4c = 0$ i podanie odpowiedzi: dla $c = 4$
24.	Wyznaczenie dziedziny wyrażenia: $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$
	Skrócenie wyrażenia do postaci $\frac{2x+1}{2x-1}$
25.	Zauważenie, że różnica ciągu jest równa 5
	Obliczenie dziesiątego wyrazu ciągu: $a_{10} = 48$
26.	Wykonanie rysunku pomocniczego i wprowadzenie oznaczeń 
	Ułożenie równania: $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6 = 2\pi$
	Obliczenie miary kąta α: $\alpha = 60^\circ$
	Zauważenie, że szukany kąt ma miarę równą połowie miary kąta α: $\beta = 30^\circ$

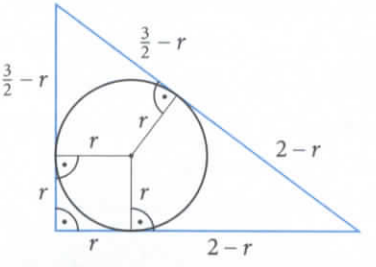
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
27. a)	Zauważenie, że trójkąty ABO i CDO są podobne i obliczenie skali podobieństwa: $\frac{4}{3}$ 
	Wyznaczenie długości przekątnych trapezu: $\|AC\| = 10$, $\|BD\| = 6\sqrt{2}$
	Zapisanie równania: $\|AC\| = a + \frac{3}{4}a = 10$ i wyznaczenia a: $a = \frac{40}{7}$
	Zapisanie równania: $\|BD\| = b + \frac{3}{4}b = 6\sqrt{2}$ i wyznaczenia b: $b = \frac{24\sqrt{2}}{7}$
	Obliczenie obwodu trójkąta ABO: $\frac{24}{7}(4+\sqrt{2})$
27. b)	Wyznaczenie wysokości trójkąta ABO: $\frac{7}{4}h = 6$, czyli $h = \frac{24}{7}$ oraz obliczenie pola trójkąta ADO: $P_{\triangle ADO} = P_{\triangle ABD} - P_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (6-h) = 4(6-h) = 4 \cdot \frac{18}{7} = \frac{72}{7}$
28.	Obliczenie kwoty, do jakiej wzrośnie kapitał Agaty: $4500 \cdot (1{,}05)^5 \approx 5743{,}27$ [zł]
	Zauważenie, że kwotę, do jakiej wzrośnie kapitał Pawła, można zapisać w postaci sumy: $1000 \cdot (1{,}05)^5 + 1000 \cdot (1{,}05)^4 + 1000 \cdot (1{,}05)^3 + 1000 \cdot (1{,}05)^2 + 1000 \cdot 1{,}05$
	Przekształcenie sumy do postaci $1000((1{,}05)^5 + (1{,}05)^4 + (1{,}05)^3 + (1{,}05)^2 + 1{,}05)$ i zauważenie w nawiasie sumy ciągu geometrycznego
	Obliczenie kwoty, do jakiej wzrośnie kapitał Pawła: $1000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1-(1{,}05)^5}{1-1{,}05} \approx 5801{,}91$ [zł]
	Porównanie wyników i podanie odpowiedzi: Większą kwotą będzie dysponował Paweł.
29.	Zauważenie, że spodek wysokości ostrosłupa O leży w punkcie przecięcia przekątnych prostokąta $ABCD$, gdyż krawędzie boczne ostrosłupa są jednakowej długości
	Zaznaczenie na rysunku kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do jego podstawy, np. $\sphericalangle SCO$
	Wyznaczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa: $3x$ i $4x$, gdzie $x > 0$, oraz krawędzi bocznej: $4x$
	Wyznaczenie długości przekątnej AC oraz długości odcinka OC: $\|AC\| = 5x$, $\|OC\| = 2{,}5x$
	Obliczenie $\cos\sphericalangle SCO$: $\cos\sphericalangle SCO = \frac{2{,}5x}{4x} = \frac{5}{8}$

Zestaw 12 – odpowiedzi

1. A **2.** D **3.** A **4.** B **5.** B **6.** B **7.** B **8.** D **9.** D
10. C **11.** C **12.** A **13.** C **14.** B **15.** B **16.** A
17. C **18.** A **19.** B **20.** A
21. $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$
22. $x = 0,\ x = 3$
23. $a_1 = \frac{2}{3}$
24. $x = 16$
25. $36\sqrt{2}$
26. 12
27. $y = x,\ y = -\frac{1}{5}x + 2\frac{2}{5}$
28. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
29. b) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Zestaw 12 – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
21.	Odczytanie z wykresu miejsc zerowych funkcji f i zapisanie jej wzoru w postaci iloczynowej: $f(x) = a(x+1)(x-2)$
	Obliczenie współczynnika a i zapisanie wzoru funkcji f: $a = -\frac{1}{2}$, $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$
22.	Przedstawienie równania w postaci $x(x-3)^2 = 0$
	Podanie odpowiedzi: $x = 0$ lub $x = 3$
23.	Zapisanie równania $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 64$ w postaci $a_1^3 q^3 = 64$, gdzie q jest ilorazem ciągu (a_n)
	Obliczenie pierwszego wyrazu ciągu (a_n): $a_1 = \frac{2}{3}$
24.	Zapisanie równania w postaci $\log x = \log 100 - \log 25 + \log 4$
	Wykonanie działań i podanie odpowiedzi: $x = 16$
25.	Obliczenie wysokości ostrosłupa: $H = 3\sqrt{2}$
	Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 36\sqrt{2}$
26.	Zauważenie, że różnica ciągu (a_n) jest równa 4 i wyznaczenie wyrazu a_n: $a_n = 1 + 4(n-1)$
	Ułożenie równania $\frac{(2 + 4(n-1)) \cdot n}{2} = 276$
	Uproszczenie równania do postaci $2n^2 - n - 276 = 0$
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $n = 12$
27.	Wyznaczenie współrzędnych środka boku BC: $D(3,3)$
	Wyznaczenie równania prostej AD: $y = x$
	Wyznaczenie współrzędnych środka boku AC: $E(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$
	Wyznaczenie równania prostej BE: $y = -\frac{1}{5}x + 2\frac{2}{5}$
	Zauważenie, że proste AD i BE nie są prostopadłe, gdyż $1 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \neq -1$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
28.	Wykonanie rysunku pomocniczego 
	Zapisanie równania $\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2=\left(\frac{3}{2}-r+2-r\right)^2$, gdzie $0<r<\frac{3}{2}$
	Rozwiązanie równania: $r=\frac{1}{2}$ lub $r=3$
	Wybór poprawnej odpowiedzi: $r=\frac{1}{2}$
	Obliczenie odległości środka okręgu od wierzchołka kąta prostego: $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$
29. a)	Zauważenie, że $\sin\alpha=\cos\beta$ i $\sin\beta=\cos\alpha$
	Wykorzystanie równości $\sin\beta=\cos\alpha$ i przekształcenie wyrażenia: $(\sin\alpha+\sin\beta)^2=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=1+2\sin\alpha\sin\beta$
29. b)	Zauważenie, że $(\cos\alpha+\cos\beta)^2=(\sin\beta+\sin\alpha)^2$
	Wykorzystanie własności z podpunktu a) do obliczenia $(\cos\alpha+\cos\beta)^2$: $(\cos\alpha+\cos\beta)^2=(\sin\beta+\sin\alpha)^2=1+2\sin\alpha\sin\beta=\frac{9}{5}$
	Zauważenie, że $\cos\alpha+\cos\beta>0$, ponieważ kąty α i β są ostre
	Obliczenie wartości $(\cos\alpha+\cos\beta)$: $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Schematy oceniania zadań otwartych

Począwszy od egzaminu maturalnego przeprowadzonego w 2015 roku zmienia się sposób oceniania zadań otwartych z oceniania analitycznego na holistyczne. Nowo stosowany sposób polega na całościowym spojrzeniu na rozwiązanie, a ocena zależy od tego, jak daleko zdający je doprowadzi. Sposób ten uwzględnia pokonanie „zasadniczej trudności zadania" oraz kolejne niezbędne czynności, prowadzące do pełnego rozwiązania.
Przedstawiamy kilka przykładów takiego oceniania. W części z nich wykorzystano materiał opublikowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.

Uwaga. Ze względów praktycznych w modelach rozwiązań na stronach 156–243 przedstawiono główne etapy rozwiązania zadania.

Zadanie 1. (5 pkt)
Andrzej i Krzysiek postanowili przebyć na rowerach 95-kilometrową trasę z Rzeszowa do Tarnowa. Andrzej pokonał tę trasę w czasie o 15 minut krótszym niż Krzysiek. Średnia prędkość Andrzeja na tej trasie była o 1 km/h większa od średniej prędkości Krzyśka. Oblicz średnią prędkość każdego z nich na tej trasie.

Rozwiązanie

Niech v oznacza średnią prędkość Andrzeja (w km/h), t – czas przejazdu Andrzeja (w godzinach). Wtedy $v-1$ oznacza średnią prędkość Krzyśka, $t+\frac{1}{4}$ – czas przejazdu Krzyśka.
Zapisujemy układ równań.

$$\begin{cases} v \cdot t = 95 \\ (v-1)\left(t+\frac{1}{4}\right) = 95 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $t = \frac{95}{v}$ i podstawiamy do równania drugiego.
Otrzymujemy równanie z niewiadomą v:

$$(v-1)\left(\frac{95}{v}+\frac{1}{4}\right) = 95$$

$$\frac{1}{4}v - \frac{95}{v} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{1}{4}v^2 - \frac{1}{4}v - 95 = 0 \text{ (lub } v^2 - v - 380 = 0)$$

Równanie ma dwa rozwiązania.

$$v_1 = 20, \quad v_2 = -19 < 0$$

Drugie rozwiązanie odrzucamy (prędkość nie może być ujemna).
Gdy $v = 20$, to $v - 1 = 19$.

Odpowiedź: Średnia prędkość Andrzeja jest równa 20 km/h, średnia prędkość Krzyśka równa się 19 km/h.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt

Zdający zapisze równanie, w którym co najmniej jedna z wielkości (prędkość, czas) jest uzależniona od przyjętej niewiadomej, np.:

$$(v-1)\left(t+\tfrac{1}{4}\right)=95 \text{ albo } (v+1)\left(t-\tfrac{1}{4}\right)=95$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt

Zdający zapisze układ równań z niewiadomymi v i t, np.:

$$v\cdot t=95 \text{ i } (v-1)\left(t+\tfrac{1}{4}\right)=95 \text{ albo } v\cdot t=95 \text{ i } (v+1)\left(t-\tfrac{1}{4}\right)=95$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą v lub t.

$$(v-1)\left(\tfrac{95}{v}+\tfrac{1}{4}\right)=95 \text{ albo } \left(\tfrac{95}{t}-1\right)\left(t+\tfrac{1}{4}\right)=95$$

albo

$$(v+1)\left(\tfrac{95}{v}-\tfrac{1}{4}\right)=95 \text{ albo } \left(\tfrac{95}{t}+1\right)\left(t-\tfrac{1}{4}\right)=95$$

Uwaga. Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. drobne błędy rachunkowe lub wadliwe przepisanie) ... 4 pkt

1. Zdający rozwiąże równanie z niewiadomą v lub t z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze prędkości obu chłopców

albo

2. zdający rozwiąże równanie kwadratowe i zapisze prędkość tylko jednego chłopca.

Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt

Zdający obliczy średnie prędkości obu rowerzystów: średnia prędkość Andrzeja równa się 20 km/h, średnia prędkość Krzyśka równa się 19 km/h.

Uwagi

1. Oceniamy na **0 punktów** rozwiązania, w których ułożone równania zawierają niezgodność typu wielkości po obu stronach: po jednej stronie prędkość, po drugiej czas lub niezgodność jednostek: prędkość w kilometrach na godzinę, czas w minutach, o ile nie są zapisane jednostki.
2. Jeżeli zdający oznaczy średnią prędkość Andrzeja przez v (w km/h), a przez t czas jego przejazdu na tej trasie, a potem zapisze, że prędkość średnia Krzyśka jest równa $v+1$ i czas jego przejazdu na tej trasie jest równy $t-\frac{1}{4}$, a następnie zapisze układ równań:

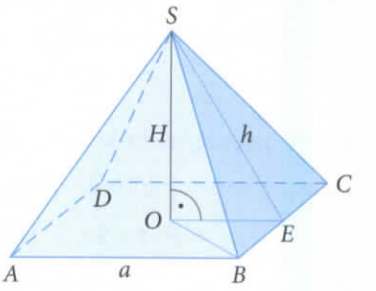
   $$v\cdot t=95 \text{ i } (v+1)\left(t-\tfrac{1}{4}\right)=95$$

   i doprowadzi go do równania z jedną niewiadomą, to otrzymuje **1 punkt**. Jeśli rozwiąże to równanie, to otrzymuje **2 punkty**, a jeśli doprowadzi rozwiązanie zadania do końca konsekwentnie do ułożonego układu równań lub przyjętych oznaczeń, to otrzymuje **3 punkty** (otrzymując odpowiednio $v=19$ i $v-1=18$ albo $v=19$ i $v+1=20$).

Zadanie 2. (4 pkt) – maj 2013

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 100 cm^2, a jego pole powierzchni bocznej – 260 cm^2. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Pole podstawy ostrosłupa $P_p = a^2 = 100$, stąd $a = 10$.

Pole powierzchni bocznej $P_b = 4 \cdot \frac{1}{2}ah = 260$, czyli $2 \cdot 10h = 260$ i stąd $h = 13$.

Trójkąt EOS jest prostokątny, więc:

$$\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 + H^2 = h^2$$
$$5^2 + H^2 = 13^2$$
$$H^2 = 144$$
$$H = 12$$

Objętość ostrosłupa jest równa:

$$V = \tfrac{1}{3}P_pH = \tfrac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa jest równa 400 cm^3.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... **1 pkt**

Zdający obliczy długość krawędzi podstawy ostrosłupa: $a = 10$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... **3 pkt**

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa: $H = 12$.

Uwaga. Jeżeli zdający obliczy wysokość ściany bocznej $h = 13$ i nie traktuje jej jako wysokości ostrosłupa i na tym zakończy, to otrzymuje **2 punkty**. Jeżeli natomiast przyjmuje, że obliczona wysokość ściany bocznej jest wysokością ostrosłupa, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Rozwiązanie pełne ..... **4 pkt**

Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = 400$ cm^3.

Uwagi

1. Nie zwracamy uwagi na jednostki (zdający może je pominąć).
2. Jeżeli zdający przyjmie, że pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest polem powierzchni całkowitej, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający przyjmie, że pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest polem jednej ściany bocznej i konsekwentnie do tego błędu obliczy objętość ostrosłupa, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Zadanie 3. (4 pkt) – maj 2012
Ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x, 42, y, z)$ jest geometryczny. Oblicz x, y oraz z.

I sposób rozwiązania

Ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, więc wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich: $x = \frac{9+19}{2} = 14$.
Ciąg $(14, 42, y, z)$ jest geometryczny, zatem jego iloraz jest równy $q = \frac{42}{14} = 3$.
Wobec tego $y = 3 \cdot 42 = 126$ i $z = 126 \cdot 3 = 378$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt

- Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i zapisanie, np. $x = \frac{9+19}{2}$ lub $2x = 9 + 19$ lub $x = 14$

albo

- wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie, np. $42^2 = xy$ lub $y^2 = 42z$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt

Obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego $q = 3$.

Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt

Obliczenie $x = 14$, $y = 126$, $z = 378$.

II sposób rozwiązania

Ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, zatem $2x = 9 + 19$, $x = 14$.
Ciąg $(14, 42, y, z)$ jest geometryczny, zatem $42^2 = 14 \cdot y$ i $y^2 = 42 \cdot z$,
$y = \frac{1764}{14} = 126$ i $126^2 = 42 \cdot z$, stąd $z = 378$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt

- Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i zapisanie, np. $x = \frac{9+19}{2}$ lub $2x = 9 + 19$ lub $x = 14$

albo

- wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie, np. $42^2 = xy$ lub $y^2 = 42z$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... **2 pkt**

Obliczenie $x = 14$ i zapisanie równania $42^2 = 14y$ lub $1764 = 14y$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... **3 pkt**

Obliczenie $y = 126$ i zapisanie równania $y^2 = 42z$ lub $126^2 = 42z$.

Rozwiązanie pełne ..... **4 pkt**

Obliczenie $x = 14$, $y = 126$, $z = 378$.

Uwaga. Jeśli zdający pomyli własności ciągów, to za całe zadanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 4. (4 pkt) – maj 2010

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb oczek w obu rzutach będzie podzielny przez 12. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Rozwiązanie (model klasyczny)

Ω jest zbiorem wszystkich par (a, b) takich, że $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\overline{\overline{\Omega}} = 36$.
Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$(2,6), (4,3), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)$.

Zatem $\overline{\overline{A}} = 6$ i stąd $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... **1 pkt**

Zdający zapisze, że $\overline{\overline{\Omega}} = 36$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... **2 pkt**

Zdający zapisze, że $\overline{\overline{\Omega}} = 36$ oraz że $A = \{(2,6), (4,3), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... **3 pkt**

Zdający zapisze, że $\overline{\overline{\Omega}} = 36$ oraz obliczy $\overline{\overline{A}} = 6$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Uwaga. Jeżeli zdający wypisze bezbłędnie wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, ale błędnie zapisze ich liczbę (np. $\overline{\overline{A}} = 5$ albo $\overline{\overline{A}} = 7$) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje 3 punkty.

Rozwiązanie bezbłędne ..... **4 pkt**

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{1}{6}$.

Uwaga. Jeśli zdający ograniczy swoje rozwiązanie do zapisu $\overline{\overline{\Omega}} = 36$; $\overline{\overline{A}} = 6$ oraz $P(A) = \frac{1}{6}$, to otrzymuje 1 pkt.

Zadanie 5. (4 pkt)

Punkty $A(-1,4)$ i $B(4,4)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego o kącie prostym w wierzchołku C. Oblicz współrzędne wierzchołka C, wiedząc, że leży on na prostej, która przechodzi przez punkty B i $D(0,8)$.

Rozwiązanie

Wyznaczamy równanie prostej BD: $y = -x + 8$.

Wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej BD i przechodzącej przez punkt A:

$$y = x + 5$$

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = -x + 8 \\ y = x + 5 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań i zapisujemy współrzędne punktu C: $C\left(1\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}\right)$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... **1 pkt**

- Wyznaczenie równania prostej BD: $y = -x + 8$

albo

- obliczenie współczynnika kierunkowego prostej BD: $a = -1$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... **2 pkt**

Wyznaczenie równania prostej AC prostopadłej do prostej BD i przechodzącej przez punkt A:

$$y = x + 5.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... **3 pkt**

Zapisanie układu równań: $\begin{cases} y = -x + 8 \\ y = x + 5 \end{cases}$

Rozwiązanie pełne ..... **4 pkt**

Rozwiązanie układu równań i zapisanie współrzędnych punktu C: $C\left(1\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}\right)$.

Uwagi

1. Jeśli zdający źle wyznaczy równanie prostej BD i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty** (współczynnik kierunkowy prostej BD powinien być jednak liczbą ujemną).
2. Jeśli zdający odczyta współrzędne punktu C na podstawie dokładnie sporządzonego rysunku to otrzymuje **4 punkty**.
3. Jeśli zdający poda współrzędne punktu C bez dokładnego rysunku lub uzasadnienia to otrzymuje **0 punktów**.

Wybrane wzory matematyczne

1. Wartość bezwzględna liczby

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0. W szczególności:

$$|x| \geqslant 0 \qquad |-x| = |x|$$

Dla dowolnych liczb x, y mamy:

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \qquad |x-y| \leqslant |x| + |y| \qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Dla dowolnych liczb a oraz $r \geqslant 0$ mamy warunki równoważne:

$$|x-a| \leqslant r \Leftrightarrow a - r \leqslant x \leqslant a + r$$
$$|x-a| \geqslant r \Leftrightarrow x \leqslant a - r \text{ lub } x \geqslant a + r$$

2. Potęgi i pierwiastki

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy jej n-tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geqslant 0$ nazywamy liczbę $b \geqslant 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla dowolnej liczby a zachodzi równość: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$. Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

* * *

Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

- dla $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oraz $a^0 = 1$
- dla $a \geqslant 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- dla $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \qquad (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

3. Logarytmy

Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Logarytmem $\log_a c$ liczby $c > 0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik b potęgi, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę c:

$$\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a c} = c$$

Dla dowolnych liczb $x > 0$, $y > 0$ oraz r zachodzą wzory:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r \cdot \log_a x \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:

jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ oraz $c > 0$, to

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

$\log x$ oraz $\lg x$ oznacza $\log_{10} x$.

4. Silnia. Współczynnik dwumianowy

Silnią liczby całkowitej dodatniej n nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych od 1 do n włącznie:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że $0! = 1$.

Dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 0$ zachodzi związek:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

* * *

Dla liczb całkowitych n, k spełniających warunki $0 \leqslant k \leqslant n$ definiujemy współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ (symbol Newtona):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zachodzą równości:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$$

5. Wzór dwumianowy Newtona

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dla dowolnych liczb a, b mamy:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

6. Wzory skróconego mnożenia

Dla dowolnych liczb a, b:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb a, b zachodzi wzór:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k}b^{k-1} + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

W szczególności:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \qquad a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \qquad a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$$
$$a^n - 1 = (a-1)(1 + a + \ldots + a^{n-1})$$

7. Ciągi

• **Ciąg arytmetyczny**

Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } n \geqslant 2$$

• **Ciąg geometryczny**

Wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla } n \geqslant 2$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{dla } q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{dla } q = 1 \end{cases}$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego zachodzi związek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla } n \geqslant 2$$

• **Procent składany**

Jeżeli kapitał początkowy K złożymy na n lat w banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi $p\%$ w skali rocznej, to kapitał końcowy K_n wyraża się wzorem:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

8. Funkcja kwadratowa

Postać ogólna funkcji kwadratowej: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in \mathbf{R}$.

Wzór każdej funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q, \text{ gdzie } p = -\frac{b}{2a},\ q = -\frac{\Delta}{4a},\ \Delta = b^2 - 4ac$$

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie o współrzędnych (p, q). Ramiona paraboli skierowane są do góry, gdy $a > 0$, do dołu, gdy $a < 0$.

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ (liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania $ax^2 + bx + c = 0$) zależy od wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$:

- jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych),
- jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek podwójny, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste):

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeśli $\Delta \geqslant 0$, to wzór funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Wzory Viète'a

Jeżeli $\Delta \geqslant 0$, to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

9. Geometria analityczna

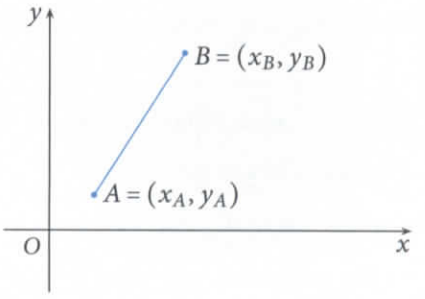
• **Odcinek**

Długość odcinka o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ dana jest wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka AB:

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$



• **Wektory**

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Jeżeli $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$ są wektorami, zaś a jest liczbą, to

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \qquad a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_1, a \cdot u_2]$$

• **Prosta**

Równanie ogólne prostej:

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ (tj. współczynniki A, B nie są równocześnie równe 0).

Jeżeli $A = 0$, to prosta jest równoległa do osi Ox; jeżeli $B = 0$, to prosta jest równoległa do osi Oy; jeżeli $C = 0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

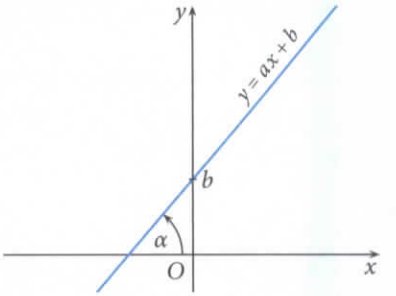
Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi Oy, to ma ona równanie kierunkowe:

$$y = ax + b$$

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej:

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

Współczynnik b wyznacza na osi Oy punkt, w którym dana prosta ją przecina.



Równanie kierunkowe prostej o współczynniku kierunkowym a, która przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0)$:

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

Równanie prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

• **Prosta i punkt**

Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ jest dana wzorem:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

• **Para prostych**

Dwie proste o równaniach kierunkowych

$$y = a_1 x + b_1 \qquad y = a_2 x + b_2$$

spełniają jeden z następujących warunków:

– są równoległe, gdy $a_1 = a_2$

– są prostopadłe, gdy $a_1 a_2 = -1$

– tworzą kąt ostry φ i $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2} \right|$

Dwie proste o równaniach ogólnych:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

- są równoległe, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$
- są prostopadłe, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$
- tworzą kąt ostry φ i $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|$

• **Trójkąt**

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, jest dane wzorem:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)\right|$$

Środek ciężkości trójkąta ABC, czyli punkt przecięcia jego środkowych, ma współrzędne:

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

• **Przekształcenia geometryczne**

- przesunięcie o wektor $\vec{u} = [a, b]$ przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (x + a, y + b)$
- symetria względem osi Ox przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (x, -y)$
- symetria względem osi Oy przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (-x, y)$
- symetria względem punktu (a, b) przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (2a - x, 2b - y)$
- jednokładność o środku w punkcie $(0, 0)$ i skali $s \neq 0$ przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (sx, sy)$

• **Równanie okręgu**

Równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$:

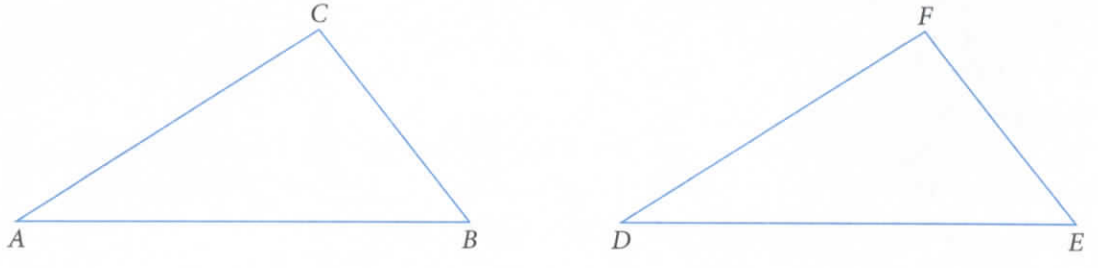
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

lub

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \text{ gdy } r^2 = a^2 + b^2 - c > 0$$

10. Planimetria

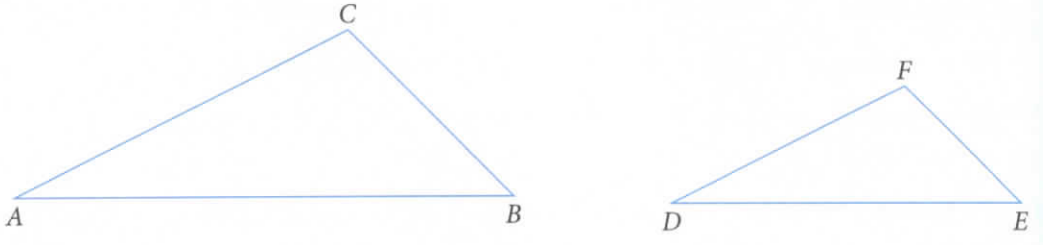
• **Cechy przystawania trójkątów**



To, że dwa trójkąty ABC i DEF są przystające ($\triangle ABC \equiv \triangle DEF$), możemy stwierdzić na podstawie każdej z następujących **cech przystawania trójkątów**:

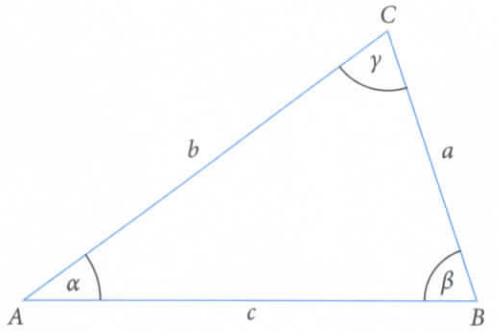
- cecha przystawania „bok – bok – bok":
  odpowiadające sobie boki obu trójkątów mają te same długości:
  $|AB| = |DE|, |AC| = |DF|, |BC| = |EF|$
- cecha przystawania „bok – kąt – bok":
  dwa boki jednego trójkąta są równe odpowiadającym im bokom drugiego trójkąta oraz kąt zawarty między tymi bokami jednego trójkąta ma taką samą miarę jak odpowiadający mu kąt drugiego trójkąta, np.
  $|AB| = |DE|, |AC| = |DF|, |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$
- cecha przystawania „kąt – bok – kąt":
  jeden bok jednego trójkąta ma tę samą długość, co odpowiadający mu bok drugiego trójkąta oraz miary odpowiadających sobie kątów obu trójkątów, przyległych do boku, są równe, np.
  $|AB| = |DE|, |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|, |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$

• **Cechy podobieństwa trójkątów**



To, że dwa trójkąty ABC i DEF są podobne ($\triangle ABC \sim \triangle DEF$), możemy stwierdzić na podstawie każdej z następujących **cech podobieństwa trójkątów**:

- cecha podobieństwa „bok – bok – bok":
  długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości boków drugiego trójkąta, np.
  $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$
- cecha podobieństwa „bok – kąt – bok":
  długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków drugiego trójkąta i kąty między tymi parami boków są przystające, np.
  $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|}, \ |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$
- cecha podobieństwa „kąt – kąt – kąt":
  dwa kąty jednego trójkąta są przystające do odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta (więc też i trzecie kąty obu trójkątów są przystające):
  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|, \ |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|, \ |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DFE|$



Przyjmujemy oznaczenia w trójkącie *ABC*:

a, b, c – długości boków, leżących odpowiednio naprzeciwko wierzchołków A, B, C

$2p = a + b + c$ – obwód trójkąta

α, β, γ – miary kątów przy wierzchołkach A, B, C

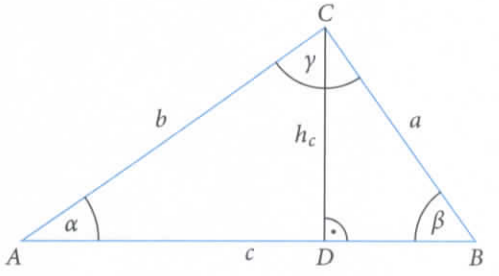
h_a, h_b, h_c – wysokości opuszczone z wierzchołków A, B, C

R, r – promienie okręgów opisanego i wpisanego

• **Twierdzenie Pitagorasa** (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

W trójkącie ABC kąt γ jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 = c^2$.

• **Związki miarowe w trójkącie prostokątnym**



Załóżmy, że kąt γ jest prosty. Wówczas:

$h_c^2 = |AD| \cdot |DB|$

$h_c = \frac{ab}{c}$

$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta$

$a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha = b \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$

$R = \frac{1}{2}c \qquad r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$

• **Twierdzenie sinusów**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

• **Twierdzenie cosinusów**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

• **Wzory na pole trójkąta**

$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$

$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$

$P_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R} = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

• **Trójkąt równoboczny**

a – długość boku

h – wysokość trójkąta

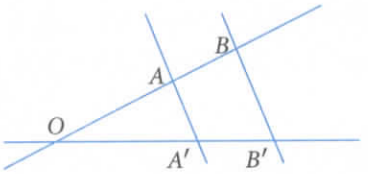
$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

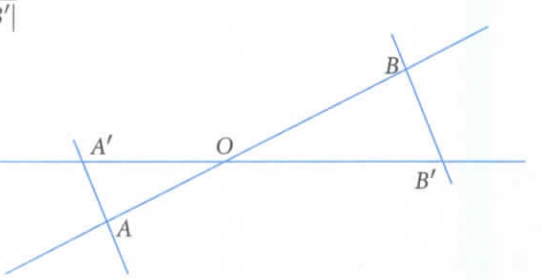
$P_{\triangle} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

- **Twierdzenie Talesa**

Jeżeli proste równoległe AA' i BB' przecinają dwie proste, które przecinają się w punkcie O, to

$$\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|OB|}{|OB'|}$$

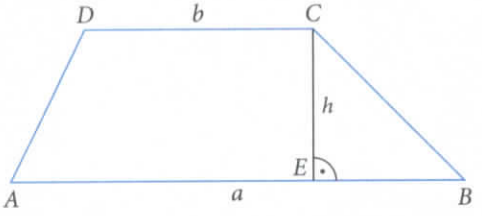




- **Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa**

Jeżeli proste AA' i BB' przecinają dwie proste, które przecinają się w punkcie O oraz $\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|OB|}{|OB'|}$, to proste AA' i BB' są równoległe.

- **Czworokąty**

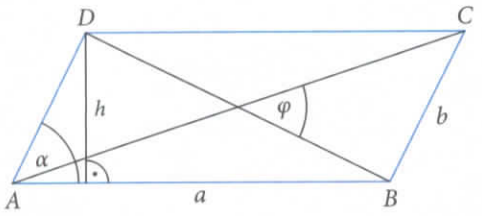


Trapez

Czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Wzór na pole trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

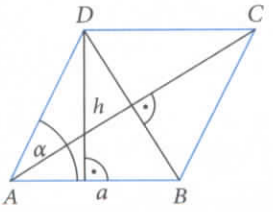


Równoległobok

Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Wzory na pole równoległoboku:

$$P = ah = a \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\varphi$$

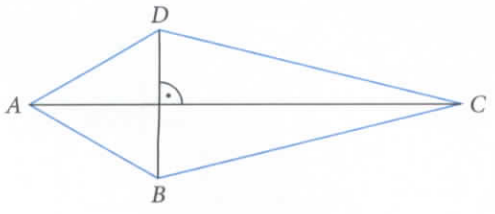


Romb

Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych jednakowej długości.

Wzory na pole rombu:

$$P = ah = a^2 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



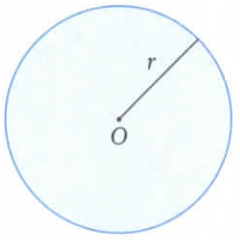
Deltoid

Czworokąt, który ma oś symetrii, zawierającą jedną z przekątnych.

Wzór na pole deltoidu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$

- **Koło**



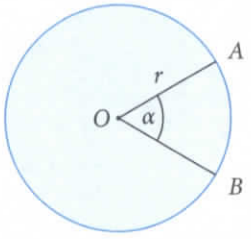
Wzór na pole koła o promieniu r:

$$P = \pi r^2$$

Obwód koła o promieniu r:

$$Ob = 2\pi r$$

- **Wycinek koła**



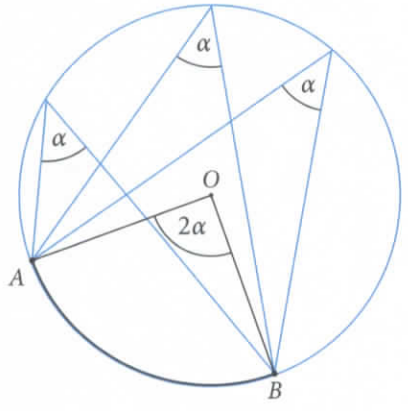
Wzór na pole wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach:

$$P = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Długość łuku wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach:

$$l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

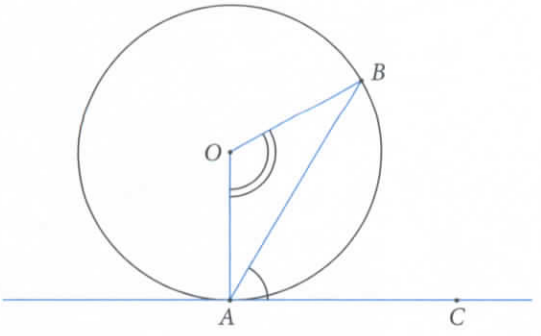
- **Kąty w okręgu**

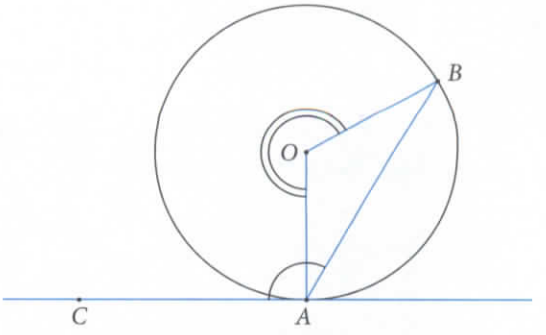


Miara kąta wpisanego w okrąg jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na tym samym łuku, są równe.

- **Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą**



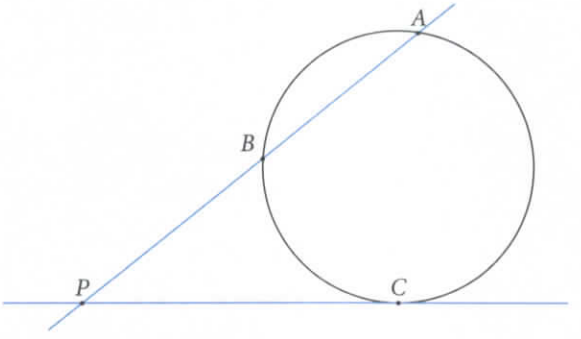


Dany jest okrąg o środku w punkcie O i jego cięciwa AB. Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A. Wtedy $|\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$, przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB, który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta CAB.

• **Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej**

Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C. Jeżeli proste te przecinają się w punkcie P, to

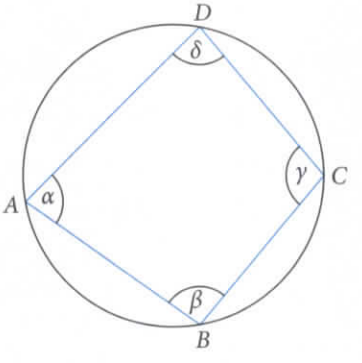
$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$



• **Okrąg opisany na czworokącie**

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180°:

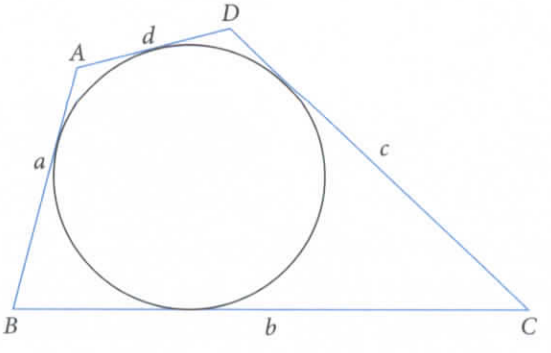
$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$



• **Okrąg wpisany w czworokąt**

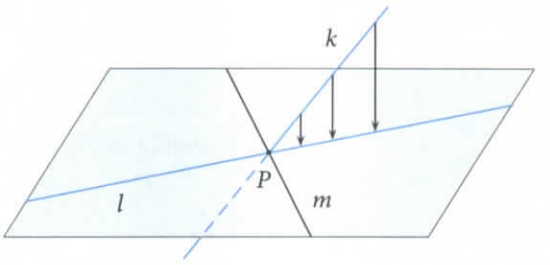
W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:

$$a + c = b + d$$



11. Stereometria

- **Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych**

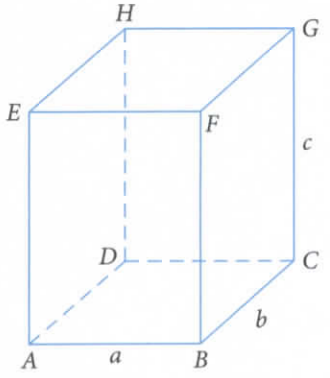


Prosta k przebija płaszczyznę w punkcie P. Prosta l jest rzutem prostokątnym prostej k na tę płaszczyznę. Prosta m leży na tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt P. Wówczas prosta m jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej l.

- **Oznaczenia**

P – pole powierzchni całkowitej
P_p – pole powierzchni podstawy
P_b – pole powierzchni bocznej
V – objętość

- **Prostopadłościan**

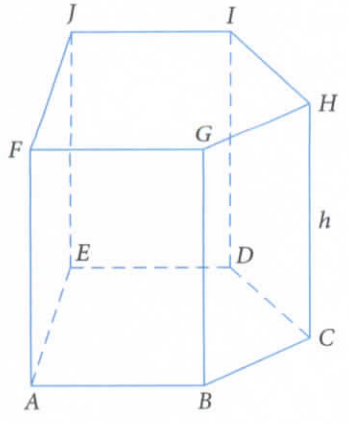


$P = 2(ab + bc + ac)$

$V = abc$

gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu

- **Graniastosłup prosty**

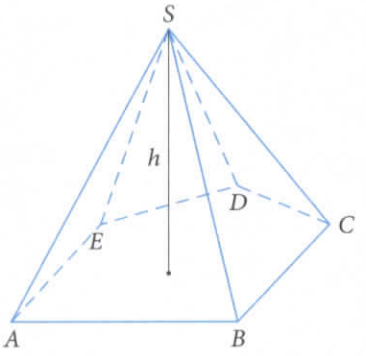


$P_b = 2p \cdot h$

$V = P_p \cdot h$

gdzie $2p$ jest obwodem podstawy graniastosłupa

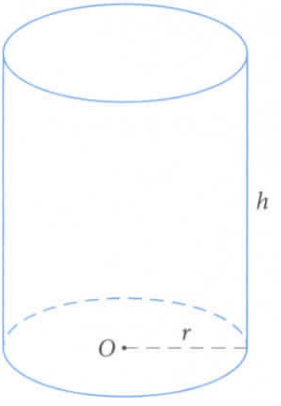
- **Ostrosłup**



$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa

- **Walec**



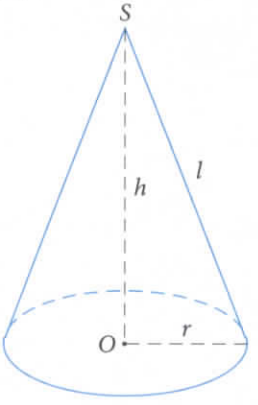
$P_b = 2\pi rh$

$P = 2\pi r(r + h)$

$V = \pi r^2 h$

gdzie r jest promieniem podstawy, h wysokością walca

- **Stożek**



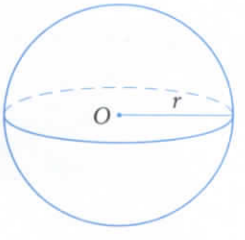
$P_b = \pi rl$

$P = \pi r(r + l)$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

gdzie r jest promieniem podstawy, h wysokością, l długością tworzącej stożka

- **Kula**



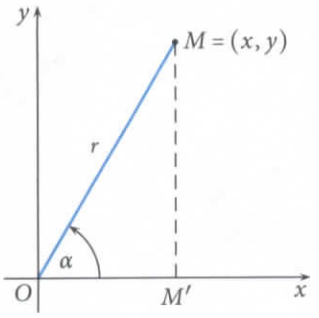
$P = 4\pi r^2$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

gdzie r jest promieniem kuli

12. Trygonometria

• Definicje funkcji trygonometrycznych



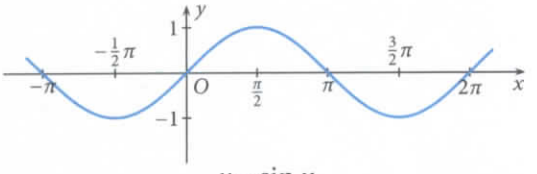
$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

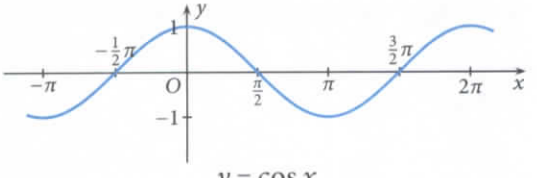
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \text{ gdy } x \neq 0$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ jest promieniem wodzącym punktu M

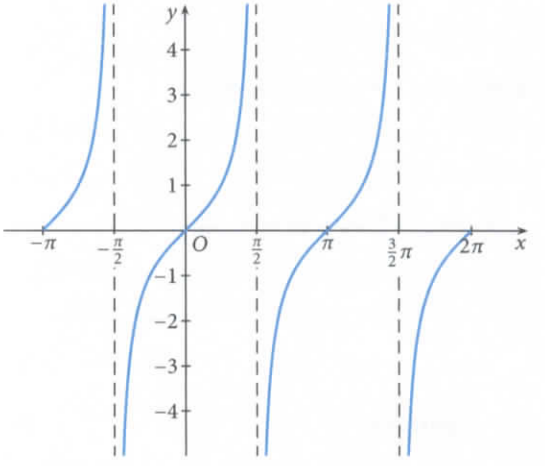
• Wykresy funkcji trygonometrycznych



$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \operatorname{tg} x$

• Związki między funkcjami tego samego kąta

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{dla} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k - \text{całkowite}$$

• Niektóre wartości funkcji trygonometrycznych

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

- **Funkcje sumy i różnicy kątów**

Dla dowolnych kątów α, β zachodzą równości:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Ponadto mamy równości:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

które zachodzą zawsze, gdy są określone i mianownik prawej strony nie jest zerem.

- **Funkcje podwojonego kąta**

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

13. Kombinatoryka

- **Wariacje z powtórzeniami**

Liczba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k niekoniecznie różnych wyrazów, jest równa n^k.

- **Wariacje bez powtórzeń**

Liczba sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k $(1\leqslant k\leqslant n)$ różnych wyrazów, jest równa

$$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Permutacje**

Liczba sposobów, na które $n\geqslant 1$ różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

- **Kombinacje**

Liczba sposobów, na które spośród n różnych elementów można wybrać k $(0\leqslant k\leqslant n)$ elementów, jest równa $\binom{n}{k}$.

14. Rachunek prawdopodobieństwa

- **Własności prawdopodobieństwa**

$0\leqslant P(A)\leqslant 1$ dla każdego zdarzenia $A\subset\Omega$

$P(\Omega)=1$ $\quad\Omega$ – zdarzenie pewne

$P(\emptyset)=0$ $\quad\emptyset$ – zdarzenie niemożliwe (pusty podzbiór Ω)

$P(A)\leqslant P(B)$ gdy $A\subset B\subset\Omega$

$P(A')=1-P(A)$, gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, dla dowolnych zdarzeń $A, B\subset\Omega$

$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$, dla dowolnych zdarzeń $A, B\subset\Omega$

• **Twierdzenie: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa**

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A, zaś $|\Omega|$ – liczbę elementów zbioru Ω.

15. Parametry danych statystycznych

• **Średnia arytmetyczna**

Średnia arytmetyczna n liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa:

$$\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

• **Średnia ważona**

Średnia ważona n liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, którym przypisano odpowiednio dodatnie wagi $w_1, w_2, \ldots, w_n$ jest równa:

$$\frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \ldots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

• **Średnia geometryczna**

Średnia geometryczna n nieujemnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

• **Mediana**

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ jest:

– dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)

– dla n parzystych: $\frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ (średnia arytmetyczna środkowych wyrazów ciągu)

• **Wariancja i odchylenie standardowe**

Wariancją n danych liczbowych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o średniej arytmetycznej $\overline{a}$ jest liczba:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \overline{a})^2 + (a_2 - \overline{a})^2 + \ldots + (a_n - \overline{a})^2}{n} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} - (\overline{a})^2$$

Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji.

16. Tablica wartości funkcji trygonometrycznych

$\alpha[^\circ]$	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\beta[^\circ]$
0	**0,0000**	**0,0000**	**90**
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	**0,1736**	**0,1763**	**80**
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	**0,3420**	**0,3640**	**70**
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	**0,5000**	**0,5774**	**60**
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	**0,6428**	**0,8391**	**50**
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

$\alpha[^\circ]$	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\beta[^\circ]$
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	**0,7660**	**1,1918**	**40**
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	**0,8660**	**1,7321**	**30**
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	**0,9397**	**2,7475**	**20**
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13
78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
80	**0,9848**	**5,6713**	**10**
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
90	**1,0000**	–	**0**

Wybrane wzory matematyczne zostały przygotowane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną. Są dostępne pod adresem: http://www.cke.edu.pl/images/stories/Tablice/tablice_matematyczne.pdf

Uzupełnienie zestawu wybranych wzorów matematycznych

Granica ciągu

Dane są ciągi (a_n) i (b_n), określone dla $n \geqslant 1$.
Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Jeżeli ponadto $b_n \neq 0$ dla $n \geqslant 1$ oraz $b \neq 0$, to:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla $n \geqslant 1$, o ilorazie q.
Niech S_n oznacza ciąg sum początkowych wyrazów ciągu (a_n), tzn. ciąg określony wzorem $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg S_n ma granicę

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Tę granicę nazywamy sumą wszystkich wyrazów ciągu (a_n).

Pochodna funkcji

$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$ dla $c \in \mathbf{R}$

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \text{ gdy } g(x) \neq 0$$

- **Pochodne niektórych funkcji**

Niech a, b, c będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi, $n \geqslant 2$ dowolną liczbą naturalną.

funkcja	pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = \frac{a}{x}$	$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$

- **Równanie stycznej**

Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ dane jest wzorem:

$$y = ax + b$$

gdzie współczynnik kierunkowy stycznej jest równy wartości pochodnej funkcji f w punkcie x_0, tzn. $a = f'(x_0)$, natomiast $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

Trygonometria

- **Sumy, różnice i iloczyny funkcji trygonometrycznych**

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

Rachunek prawdopodobieństwa

- **Prawdopodobieństwo warunkowe**

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, przy czym $P(B) > 0$.
Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A|B)$ nazywamy liczbę:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- **Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym**

Jeżeli zdarzenia losowe $B_1, B_2, \ldots, B_n$ zawarte w Ω spełniają warunki:
1. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są parami rozłączne, tzn. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$,
2. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$,
3. $P(B_i) > 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$,

to dla każdego zdarzenia losowego A zawartego w Ω zachodzi równość

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$$

http://www.cke.edu.pl/files/file/Matura-2015/Informatory-2015/Matematyka-Uzupelnienie-zestawu-wzorow.pdf