

Środek dydaktyczny
zalecany przez MEN.
Nr 0770/1999.

TABLICE

matematyczne
fizyczne
chemiczne
astronomiczne



Li

Pb

$$P(x, y) = \int \gamma(t, \phi) e^{-i\omega t} dt =$$

Su

$$\iint f(x, y) e^{-i\omega(x, y)}$$

$$A(x)$$

$$B(x)$$

$$P(x, y)$$

$$P(x, y)$$

$$P(x, y)$$

Tomasz Szymczyk
Stanisław Rabiej
Anna Pielesz
Jan Desselberger

Wartości przybliżone niektórych stałych

$\sqrt{2}$	1,414213562	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,707106781
$\sqrt{3}$	1,732050808	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0,577350269
$\sqrt{5}$	2,236067978	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	0,447213595
$\sqrt{10}$	3,16227766	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	0,316227766
π	3,141592654	$\frac{1}{\pi}$	0,318309886
2π	6,283185307	$\frac{1}{2\pi}$	0,159154943
π^2	9,869604401	$\frac{1}{\pi^2}$	0,101321184
$\frac{\pi}{180}$	0,017453293	$\sqrt{\pi}$	1,772453851
$\frac{\pi}{2}$	1,570796327	$\frac{\pi}{4}$	0,785398163
$\frac{\pi}{3}$	1,047197551	$\frac{\pi}{6}$	0,523598776
e	2,718281828	$\frac{1}{e}$	0,367879441
e^2	7,389056099	$\frac{1}{e^2}$	0,135335283
$\log e$	0,434299482	$\ln 10$	2,302585093

TABLICE

matematyczne
fizyczne
chemiczne
astronomiczne

Tomasz Szymczyk
Stanisław Rabiej
Anna Pielesz
Jan Desselberger

Autorzy:

Tomasz Szymczyk:

matematyka.

Stanisław Rabiej:

fizyka.

Anna Pielesz:

chemia.

Jan Desselberger:

astronomia.

Projekt stron śródtytułowych:

Krzysztof Pietrasik.

Projekt układu typograficznego:

Krzysztof Rostek, zespół wydawnictwa „Park”.

Ilustracje:

Alicja Babicka – matematyka, Rafał Bojdys – fizyka, chemia, Jan Desselberger – astronomia.

Redakcja techniczna:

Luba Ristujczina.

Skład, łamanie, wyciągi barwne:

Elżbieta Olma.

Wydanie wspólne PPU „PARK” i Świata Książki

Świat Książki, Warszawa 2003

ISBN 83-7391-162-6, Nr 4403.

© Copyright by PPU „PARK” Sp. z o.o., Bielsko-Biała 2003, Wydanie VIII, ISBN 83-7266-161-8

PPU „PARK” Sp. z o.o.

ul. 1 Maja 5/5, 43-300 Bielsko-Biała

tel./faks (0-33) 810 56 00, 816 82 35

e-mail: zamowienia@park.pl

www.park.pl

Druk i oprawa: Białostockie Zakłady Graficzne SA

Spis treści

MATEMATYKA

Elementy logiki	17
Algebra zbiorów	19
Funkcje zdaniowe i zbiory	21
Zbiory liczbowe	22
Działania arytmetyczne w zbiorze liczb rzeczywistych	23
Potęgowanie i pierwiastkowanie	25
Wartości średnie	27
Nierówność Cauchy'ego-Schwarza	28
Zbiory ograniczone. Kresy zbiorów	28
Wartość bezwzględna liczby	29
Funkcje	30
Ogólne własności funkcji	30
Funkcje monotoniczne	31
Funkcje parzyste i nieparzyste	32
Funkcje okresowe	32
Funkcje ograniczone	33
Przekształcenia wykresów funkcji	33
Funkcje złożone i odwrotne	34
Funkcja liniowa	35
Równania i nierówności liniowe	37
Równania i nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi	38
Układy równań liniowych o dwóch niewiadomych	39
Wyznacznik stopnia trzeciego	40
Funkcja kwadratowa	41
Równania i nierówności kwadratowe	43
Wielomiany jednej zmiennej	45
Równania i nierówności algebraiczne n -tego stopnia	47
Funkcje i wielomiany dwóch zmiennych rzeczywistych	49
Funkcje wymierne	49
Równania i nierówności wymierne	51
Funkcje potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne	52

Funkcje trygonometryczne	56
Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym	56
Kąt skierowany i jego miara	57
Funkcje trygonometryczne kąta dowolnego	58
Funkcje cyklometryczne (odwrotne do funkcji trygonometrycznych)	69
Ciągi liczbowe	71
Zasada indukcji matematycznej (zupełnej)	71
Ciągi liczbowe	71
Ciąg arytmetyczny	72
Ciąg geometryczny	72
Elementy kombinatoryki	74
Ciągi zbieżne	77
Ciągi rozbieżne do nieskończoności	78
Granica i ciągłość funkcji	80
Definicja I (Heinego) granicy funkcji	80
Definicja II (Cauchy'ego) granicy funkcji	80
Granice jednostronne	82
Granice niewłaściwe	82
Granica funkcji w nieskończoności	83
Funkcje ciągłe	84
Własności funkcji ciągłych	84
Twierdzenie Weierstrassa	84
Własność Darboux	84
Pochodna funkcji	86
Ekstrema funkcji	92
Reguła de l'Hospitala. Wyrażenia nieoznaczone	93
Asymptoty	93
Wklęsłość i wypukłość krzywej. Punkt przegięcia	95
Badanie przebiegu zmienności funkcji	96
Całki nieoznaczone i całki oznaczone	97
Geometryczne zastosowanie całki oznaczonej	101
Liczby zespolone	103
Planimetria (geometria płaszczyzny)	106
Półprosta, odcinek, łamana	107
Okrag i kolo. Figury ograniczone, nieograniczone, otwarte, domknięte	109

Wielokąty i kąty	110
Wektory	112
Przekształcenia geometryczne na płaszczyźnie	116
Przekształcenia izometryczne	116
Przekształcenia nieizometryczne	119
Wzajemne położenie prostej i okręgu oraz dwóch okręgów	121
Kąty w kole	123
Koło i jego części	124
Wielokąty	126
Trójkąty	126
Związki w trójkącie dowolnym	129
Związki w trójkącie prostokątnym	132
Związki w trójkącie równobocznym	132
Czworokąty	133
Wielokąty foremne	135
Stereometria	136
Wielościany	138
Wielościany foremne	140
Bryły obrotowe	142
Geometria analityczna	145
Punkty i wektory	145
Linia prosta	148
Przekształcenia płaszczyzny	151
Zmiana układu współrzędnych	154
Krzywe stopnia drugiego (krzywe stożkowe)	155
Rachunek prawdopodobieństwa	161
Prawdopodobieństwo warunkowe	163
Zdarzenia niezależne	164
Zmienna losowa	164
Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej	165

FIZYKA

TABLICE

Podstawowe stałe fizyczne	171
Podstawowe jednostki układu SI	173
Uzupełniające jednostki układu SI	174
Jednostki pochodne wybranych wielkości układu SI	174
Jednostki pozaukładowe dopuszczone do użytku w fizyce	179
Wybrane jednostki spoza układu SI	180
Przedrostki do tworzenia nazw jednostek wtórnych	184
Jednostki niemetryczne stosowane w krajach anglosaskich	185
Własności mechaniczne substancji	
Prędkość w przyrodzie	188
Prędkość w astronomii i kosmonautyce	188
Przyspieszenie spadku swobodnego na różnych wysokościach nad powierzchnią Ziemi	189
Przyspieszenie spadku swobodnego na różnych szerokościach geograficznych na poziomie morza	189
Przyspieszenie spadku swobodnego na powierzchni różnych ciał niebieskich	189
Własności sprężyste i wytrzymałościowe ciał stałych	190
Gęstość ciał stałych w warunkach normalnych	192
Gęstość cieczy	194
Gęstość gazów i par w warunkach normalnych	195
Lepkość cieczy	196
Lepkość wody w różnych temperaturach	196
Lepkość gazów i par	197
Napięcie powierzchniowe cieczy	198
Skład chemiczny powietrza	198
Cisnienie atmosferyczne na różnych wysokościach nad powierzchnią Ziemi	199
Gęstość atmosfery na różnych wysokościach nad powierzchnią Ziemi	199
Gęstość wody w różnych temperaturach pod ciśnieniem 101 325 Pa	199
Współczynnik tarcia ślizgowego	200
Prędkość rozchodzenia się dźwięku w ciałach stałych w temperaturze 20 °C	200
Prędkość rozchodzenia się dźwięku w cieczach	201
Prędkość rozchodzenia się dźwięku w gazach w warunkach normalnych	201
Budowa molekularna i własności cieplne substancji	
Liczba cząsteczek w 1 cm ³ substancji	202
Średnia prędkość cząsteczek gazów w warunkach normalnych	202
Średnia prędkość cząsteczek gazów w różnych temperaturach (przy 101 325 Pa)	202
Rozkład prędkości cząsteczek tlenu w warunkach normalnych	203

Średnia droga swobodna cząsteczek gazów w warunkach normalnych	203
Współczynnik przewodnictwa cieplnego ciał stałych	204
Współczynnik przewodnictwa cieplnego cieczy	205
Współczynnik przewodnictwa cieplnego gazów pod ciśnieniem 101 325 Pa	205
Współczynnik rozszerzalności liniowej ciał stałych	206
Współczynnik rozszerzalności objętościowej cieczy w temperaturze 20 °C	206
Ciepło właściwe ciał stałych	207
Ciepło właściwe cieczy	207
Ciepło właściwe gazów i par	208
Temperatura topnienia i ciepło topnienia niektórych substancji pod ciśnieniem 101 325 Pa	208
Temperatura wrzenia i ciepło parowania niektórych substancji pod ciśnieniem 101 325 Pa	209
Ciśnienie i gęstość nasyconej pary wodnej w różnych temperaturach	210
Niskie temperatury	211
Temperatura krytyczna i ciśnienie krytyczne wybranych substancji	211

Własności elektryczne i magnetyczne

Opór właściwy przewodników w temperaturze 20 °C	212
Współczynnik temperaturowy oporu przewodników	212
Opór właściwy niektórych materiałów izolacyjnych	212
Równoważniki elektrochemiczne	213
Temperatura przejścia metali w stan nadprzewodnictwa	214
Przenikalność elektryczna względna (stała dielektryczna)	214
Przenikalność magnetyczna względna	215
Temperatura Curie	216
Prąd elektryczny w metalach	216
Wyładowania atmosferyczne	216

Własności optyczne

Współczynnik załamania światła dla ciał stałych i cieczy (dla długości fali $\lambda = 589,3$ nm)	217
Współczynnik załamania światła dla gazów i pary wodnej	217
Prędkość światła w niektórych ośrodkach	218
Kąt graniczny całkowitego odbicia wewnętrznego	218
Długość fal świetlnych i odpowiadająca im barwa światła	219
Granica długofalowa zjawiska fotoelektrycznego	219
Widmo fal elektromagnetycznych	220

Budowa atomu i jądra atomowego

Defekt masy niektórych jąder	221
Okres połowicznego rozpadu niektórych izotopów	221
Masa atomowa niektórych izotopów	222
Izotopy niektórych pierwiastków	223
Niektóre cząstki elementarne	225
Typy przemian promieniotwórczych	227

WZORY I ZALEŻNOŚCI

I. Elementy rachunku wektorowego	231
Rozkład wektora na wektory składowe w kartezjańskim układzie współrzędnych	231
Dodawanie wektorów	231
Odejmowanie wektorów	232
Mnożenie wektorów	232
II. Mechanika	233
Kinematyka	233
Przemieszczenie, prędkość średnia, prędkość chwilowa	233
Przyspieszenie	233
Klasyfikacja ruchów postępowych	234
Składanie prędkości	234
Ruch jednostajny, prostoliniowy	234
Ruch jednostajnie przyspieszony, prostoliniowy	235
Ruch jednostajnie opóźniony, prostoliniowy	236
Ruch niejednostajnie zmienny, prostoliniowy	236
Ruch po okręgu	237
Ruch jednostajny po okręgu	237
Ruch zmienny po okręgu, jednostajnie przyspieszony	238
Ruch zmienny po okręgu, jednostajnie opóźniony	238
Przyspieszenie całkowite w ruchu po okręgu	238
Wektor prędkości kątovej	239
Rzut poziomy	239
Rzut ukośny	240
Dynamika	241
Zasady dynamiki	241
Dynamika ruchu po okręgu	242
Siły bezwładności w układach nieinercjalnych	242
Siła Coriolisa	243
Praca, moc, energia	244
Praca	244
Moc	245
Energia	245
Zderzenia ciał	246
Maszyny proste	248

Dynamika ruchu obrotowego bryły sztywnej	252
Moment bezwładności bryły	252
Twierdzenie Steinera	252
Momenty bezwładności niektórych brył	253
Moment siły	254
Moment pędu	254
Podstawowe prawo dynamiki ruchu obrotowego	255
Energia kinetyczna ruchu obrotowego wokół osi nieruchomej	256
Energia kinetyczna bryły toczącej się po płaszczyźnie	256
Zasada zachowania momentu pędu	256
Grawitacja	257
Prawo powszechnego ciężenia	257
Natężenie pola grawitacyjnego	257
Zasada superpozycji pól	257
Energia potencjalna grawitacyjna	258
Praca w polu grawitacyjnym	258
Potencjał pola grawitacyjnego	258
Związek między natężeniem i potencjałem pola	258
Pierwsza prędkość kosmiczna	259
Druga prędkość kosmiczna	259
Ciężar ciała	259
Przyspieszenie ziemskie	259
Szczególna teoria względności	260
Transformacja Galileusza	260
Transformacja Lorentza	261
Interwał przestrzenno-czasowy	261
Skrócenie Lorentza	262
Dylatacja czasu	262
Nierównoczesność zdarzeń	262
Pęd ciała	263
Przyspieszenie	263
Energia całkowita	263
Energia kinetyczna	263
Związek między pędem i energią	263

III. Termodynamika i fizyka cząsteczkowa	264
Pierwsza zasada termodynamiki	264
Ciepło	264
Procesy termodynamiczne w gazie doskonałym	265
Równanie stanu gazu doskonałego (równanie Clapeyrona)	265
Przemiana izobaryczna	265
Przemiana izochoryczna	266
Przemiana izotermiczna	267
Przemiana adiabatyczna	267
Teoria kinetyczno-molekularna gazów	269
Podstawowy wzór teorii kinetyczno-molekularnej	269
Rozkład Maxwella prędkości cząsteczek	269
Zamiana ciepła na pracę	270
Cykl Carnota	270
Druga zasada termodynamiki	270
Entropia. Zasada wzrostu entropii	271
Interpretacja statystyczna entropii	271
IV. Elektryczność i magnetyzm	272
Elektrostatyka	272
Prawo Coulomba	272
Natężenie pola elektrostatycznego	272
Zasada superpozycji pól	273
Dipol elektryczny	274
Strumień natężenia pola elektrycznego	274
Prawo Gaussa	275
Praca w polu elektrostatycznym	275
Energia potencjalna	276
Potencjał pola elektrostatycznego	276
Pole elektryczne w dielektrykach	277
Pojemność elektryczna przewodnika	278
Pojemność kondensatora	278
Łączenie kondensatorów	279
Energia naelektryzowanego przewodnika	280
Energia naładowanego kondensatora	280
Gęstość energii pola elektrostatycznego	280

Stały prąd elektryczny	281
Natężenie prądu	281
Gęstość prądu	281
Opór elektryczny	281
Prawo Ohma dla przewodników	281
Przewodnictwo właściwe	282
Prawo Ohma w postaci lokalnej (różniczkowej)	282
Zależności oporu przewodnika od temperatury	282
Siła elektromotoryczna źródła prądu	282
Prawo Ohma dla obwodu zamkniętego	282
Napięcie użyteczne źródła prądu	283
Prawa Kirchoffa	283
Łączenie oporników	284
Praca prądu	284
Moc prądu	284
Prawo Joule'a-Lenza	285
Prawa elektrolizy	285
 Pole magnetyczne prądów stałych	 286
Prawo Biota-Savarta	286
Pole magnetyczne nieskończenie długiego przewodnika prostoliniowego	287
Pole magnetyczne kołowego przewodnika z prądem	287
Pole magnetyczne solenoidu (zwojnicy)	287
Prawo Ampere'a	288
Siła Lorentza	288
Ruch cząstki naładowanej w polu magnetycznym	289
Siła elektrodynamiczna	290
Oddziaływanie wzajemne przewodników z prądem	291
Moment magnetyczny obwodu z prądem	291
Działanie pola magnetycznego na obwód z prądem	291
Pole magnetyczne w ośrodkach materialnych	292
Strumień wektora indukcji magnetycznej (strumień pola magnetycznego)	293
 Indukcja elektromagnetyczna	 294
Prawo Faradaya	294
Samoi indukcja	294
Energia pola magnetycznego	295
Indukcja wzajemna	295
Transformator	295
Prawa Maxwella	296
Obwody prądu przemiennego RLC	298
Moc w obwodzie prądu przemiennego	299

V. Drgania i fale sprężyste	300
Drgania harmoniczne swobodne (nietłumione)	300
Energia w drganiach swobodnych	301
Okres drgań harmonicznych	301
Wahadło matematyczne	301
Wahadło fizyczne	302
Wahadło sprężynowe (liniowy oscylator harmoniczny)	302
Drgania harmoniczne w elektrycznym obwodzie drgającym (drżania elektromagnetyczne)	302
Drgania tłumione	303
Drgania wymuszone. Rezonans	304
Fale sprężyste	305
Równanie fali harmonicznej (sinusoidalnej)	305
Prędkość fazowa	306
Natężenie fali harmonicznej (sinusoidalnej)	307
Prędkość grupowa	307
Interferencja fal	308
Fale stojące	308
Odbicie fali na granicy dwóch ośrodków	309
Załamanie fali na granicy dwóch ośrodków	309
Akustyka	310
Natężenie dźwięku	310
Efekt Dopplera	310
VI. Optyka	312
Odbicie światła	312
Zwierciadło płaskie	312
Zwierciadło kuliste wklęsłe (skupiające)	312
Zwierciadło kuliste wypukłe (rozpraszające)	313
Załamanie światła	314
Całkowite odbicie wewnętrzne	315
Przechodzenie światła jednobarwnego przez pryzmat	315
Soczewki	316
Przyrządy optyczne	317
Zdolność skupiająca soczewki	318
Interferencja światła	318
Siatka dyfrakcyjna	319
Polaryzacja światła przez odbicie	319

VII. Fizyka atomowa i jądrowa	320
Promieniowanie termiczne	320
Zdolność emisyjna	320
Zdolność absorpcyjna	320
Prawo Kirchhoffa	320
Promieniowanie ciała doskonale czarnego	321
Kwantowe własności promieniowania elektromagnetycznego	322
Zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne	322
Zjawisko Comptona	322
Promieniowanie rentgenowskie	323
Własności fotonu	323
Model Bohra atomu wodoru	324
Postulaty Bohra	324
Promienie orbit stacjonarnych	324
Energia elektronu	325
Emisja promieniowania przez atom	325
Fale materii	326
Wzór de Broglie'a	326
Równanie Schrödingera	326
Zasada nieoznaczoności	327
Liczby kwantowe	327
Fizyka jądrowa	329
Promień jądra atomowego	329
Energia wiązania jądra	329
Rozpady promieniotwórcze	329
Prawo rozpadu promieniotwórczego	330

CHEMIA

Pierwiastki chemiczne	333
Niektóre pierwiastki i związki nieorganiczne	336
Podział głównych typów wiązań chemicznych	339
Budowa elektronowa pierwiastków chemicznych	340
Modele orbitali s, p, d, f	343
Struktury przestrzenne wybranych cząsteczek i jonów	344
Stałe dysocjacji niektórych elektrolitów w temperaturze 18° – 25° C	348
Rozpuszczalność niektórych soli i zasad w wodzie	350
Wartość iloczynów rozpuszczalności (L) w 25 °C	351
PH soków owocowych	353
Wskaźniki – Indykatory	354
Potencjały standardowe niektórych elektrod redoks	355

Szereg elektrochemiczny metali	357
Grupy związków organicznych	359
Niektóre związki organiczne	361
Temperatura zamarzania roztworów niektórych soli	367
Podstawowe typy reakcji chemicznych	368
Skład niektórych paliw gazowych	378

ASTRONOMIA

Astronomiczne jednostki odległości	381
Zakres rozmiarów i odległości astronomicznych	381
Astronomiczna skala jasności	382
Zakres jasności obiektów astronomicznych	382
Podstawowe układy współrzędnych astronomicznych	383
Ruch dzienny Słońca	384
Ruch roczny Słońca	385
Czas	386
Prawa ruchu planet	387
Konfiguracje planet	387
Parametry fizyczne planet	388
Parametry fizyczne Księżyca	391
Księżyce planet	392
Wybrane planetoidy	394
Komety i meteoroidy	395
Parametry fizyczne Słońca	396
Podstawowe parametry fizyczne gwiazd	397
Rozkład gwiazd pod względem jasności	397
Podstawowa klasyfikacja widmowa gwiazd	398
Najjaśniejsze gwiazdy nocnego nieba	399
Najbliższe gwiazdy	400
Typy gwiazd zmiennych	401
Wybrane gwiazdy zmienne	402
Wybrane gwiazdy podwójne i wielokrotne	403
Gwiazdozbiory	404
Wybrane gromady gwiazd	407
Wybrane mgławice	407
Klasyfikacja galaktyk	408
Najbliższe galaktyki	408
Nasza Galaktyka	409
Ewolucja gwiazd	410
Ewolucja Wszechświata	410
Teleskopy	411
Symbole astronomiczne	412

WKLEJKI

Układ okresowy pierwiastów

Niebo okołobiegunowe północne/Niebo równikowe/Niebo okołobiegunowe południowe

TABLICE matematyczne

$$x^2 \left(\frac{c^2}{a^2} - 1 \right) - y^2 = c^2$$

... $|F| = 2c$ and $|F| = |F| = 2a$, we have

... $(x-c)^2 + y^2 = a^2$ and $(x+c)^2 + y^2 = a^2$ is the equation of a circle only if $(x-c)^2 + y^2 = a^2$ and $(x+c)^2 + y^2 = a^2$ we solve

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a \\ & \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a \\ & x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 \\ & x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 \\ & 4cx = 4a^2 - 4c^2 \\ & cx = a^2 - c^2 \\ & y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2} x^2 \\ & \frac{y^2}{a^2} = 1 - 2\frac{c}{a} \frac{x}{a} + \frac{c^2}{a^2} \frac{x^2}{a^2} \\ & \frac{y^2}{a^2} = 1 - 2\frac{c}{a} \frac{x}{a} + \frac{c^2}{a^2} \frac{x^2}{a^2} \\ & \frac{y^2}{a^2} = 1 - 2\frac{c}{a} \frac{x}{a} + \frac{c^2}{a^2} \frac{x^2}{a^2} \\ & \frac{y^2}{a^2} = 1 - 2\frac{c}{a} \frac{x}{a} + \frac{c^2}{a^2} \frac{x^2}{a^2} \end{aligned}$$

Zdaniem w logice nazywamy każde zdanie oznajmujące (orzekające), o którym możemy jednoznacznie powiedzieć, że jest prawdziwe albo fałszywe. Zdanie prawdziwe ma wartość logiczną 1, a zdanie fałszywe wartość logiczną 0. Zdania na ogół oznaczamy literami: p , q , r , ...

Zaprzeczenie (negacja) zdania p – zdanie „nieprawda, że p ”, symbolicznie $\sim p$ (czasem $\neg p$).

Koniunkcja zdań p i q – zdanie „ p i q ”, symbolicznie $p \wedge q$.

Alternatywa zdań p i q – zdanie „ p lub q ”, symbolicznie $p \vee q$.

Implikacja (wynikanie) zdań p i q – zdanie „jeżeli p , to q ”, symbolicznie $p \Rightarrow q$.

Równoważność zdań p i q – zdanie „ p wtedy i tylko wtedy, gdy q ”, symbolicznie $p \Leftrightarrow q$.

Prawem logiki nazywamy zdanie, które jest prawdziwe dla każdej wartości logicznej zdań składowych.

Wartości logiczne zdań złożonych

p	$\sim p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	1	1

Niektóre prawa rachunku zdań:

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

prawo przemienności koniunkcji

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

prawo przemienności alternatywy

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

prawo łączności koniunkcji

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

prawo łączności alternatywy

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji
$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	prawo przechodności implikacji
$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$	prawo podwójnego przeczenia
$[(p \wedge (p \Rightarrow q))] \Rightarrow q$	prawo odrywania
$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$	prawo zaprzeczenia implikacji
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$	prawo kontrapozycji
$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$	prawa De Morgana
$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$	

Funkcją zdaniową (formą zdaniową) zmiennej x określoną na zbiorze M , nazywamy wyrażenie zawierające zmienną x , które staje się zdaniem, gdy w miejsce tej zmiennej wstawimy dowolny element ze zbioru M . Mówimy, że **element spełnia funkcję zdaniową**, jeżeli po podstawieniu tego elementu w miejsce zmiennej otrzymujemy zdanie prawdziwe.

$\varphi(x)$: x jest liczbą naturalną

$\varphi(2)$: 2 jest liczbą naturalną
— zdanie prawdziwe

$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$: $\frac{1}{2}$ jest liczbą naturalną
— zdanie fałszywe

$\bigwedge_x x^2 + 2 > 0$ — zdanie prawdziwe

$\bigvee_x x^2 + 2 < 0$ — zdanie fałszywe

Zwrot „dla każdego x należącego do X ” nazywamy **kwantyfikatorem ogólnym** i zapisujemy

$\bigwedge_{x \in X}$. Zwrot „istnieje takie x należące

do X ” nazywamy **kwantyfikatorem szczególnym** i zapisujemy $\bigvee_{x \in X}$.

Prawa De Morgana dla zdań z kwantyfikatorami:

$$\sim\left(\bigwedge_x p(x)\right) \Leftrightarrow \bigvee_x \sim p(x),$$

$$\sim\left(\bigvee_x q(x)\right) \Leftrightarrow \bigwedge_x \sim q(x).$$

Algebra zbiorów

W matematyce zbioru nie definiuje się. Jest to tzw. pojęcie pierwotne. Zbiory na ogół oznaczamy literami wielkimi: A, B, C, \dots , a elementy zbiorów literami małymi: a, b, c, \dots . Zdanie „ a jest elementem zbioru A ” zapisujemy $a \in A$, natomiast zdanie „ a nie jest elementem zbioru A ” zapisujemy $a \notin A$. Zbiór, który nie zawiera żadnego elementu, nazywamy **zbiorem pustym** i oznaczamy symbolem \emptyset .

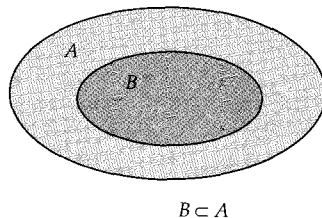
Zbiór możemy określić dwoma sposobami:

1. wymieniając wszystkie jego elementy,
2. podając własność, jaką mają spełniać wszystkie elementy tego zbioru i tylko one.

Mówimy, że zbiór B jest **podzbiorem** zbioru A (B zawiera się w A), jeżeli każdy element zbioru B jest elementem zbioru A . Piszemy wtedy $B \subset A$. Oczywiście $\emptyset \subset A$ i $A \subset A$ dla dowolnego zbioru A . Jeżeli zbiory A i B mają te same elementy, to mówimy, że są **równe** i piszemy $A = B$.

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 2 \wedge x^2 - 4 = 0\}$$



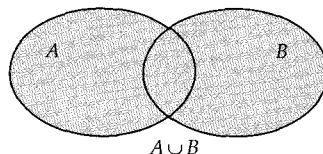
Prawdziwe są zależności:

$$A = B \Leftrightarrow [A \subset B \wedge B \subset A]$$

$$[A \subset B \wedge B \subset C] \Rightarrow A \subset C$$

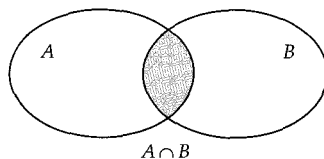
Sumą (złączeniem) zbiorów A i B ($A \cup B$) nazywamy zbiór tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A lub do zbioru B .

$$A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$$



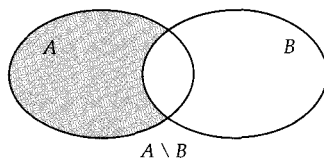
Iloczynem (częścią wspólną) zbiorów A i B ($A \cap B$) nazywamy zbiór tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A i do zbioru B .

$$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$$



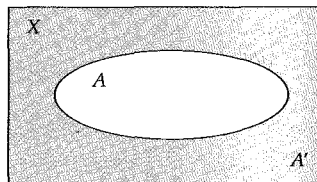
Różnicą zbiorów A i B ($A \setminus B$ lub $A - B$) nazywamy zbiór tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B .

$$A \setminus B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$$



Dopelnieniem zbioru A do zbioru X (A') nazywamy zbiór tych wszystkich elementów, które należą do zbioru X i nie należą do zbioru A .

$$A' = \{x: x \in X \wedge x \notin A\}$$



$$\begin{aligned} A &= \{1, 3, 4, 5, 8\}, \\ B &= \{2, 4, 6, 8\}, \\ A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}, \\ A \cap B &= \{4, 8\}, \\ A \setminus B &= \{1, 3, 5\}, \\ B \setminus A &= \{2, 6\}. \end{aligned}$$

Prawa działań na zbiorach

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A, & A \cup A &= A, & A \cup \emptyset &= A, \\ A \cap B &= B \cap A, & A \cap A &= A, & A \cap \emptyset &= \emptyset, \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), & (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C), \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C), & (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C). \end{aligned}$$

Prawa De Morgana

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

$$\{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \emptyset$$

Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to zbiory A i B nazywamy **rozłącznymi**.

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3\} \times \{a, b\} &= \\ &= \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\} \end{aligned}$$

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B ($A \times B$) nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (x, y) , gdzie x jest elementem zbioru A i y jest elementem zbioru B .

$$A \times B = \{(x, y): x \in A \wedge y \in B\}$$

Przez 2^A oznacza się zbiór wszystkich podzbiorów (w tym A i \emptyset) zbioru A :

$$2^A = \{B: B \subset A\}.$$

Niekóre prawa rachunku zbiorów i prawa rachunku zdań

Zbiory	Zdania
$A \cup B = B \cup A$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
$A \cap B = B \cap A$	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$(A \cap B)' = A' \cup B'$	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$

Funkcje zdaniowe i zbiory

Zdanie „ A jest zbiorem wszystkich elementów x , które spełniają funkcję zdaniową $\varphi(x)$ ” zapisujemy

$$A = \{x: \varphi(x)\}.$$

Jeżeli funkcje zdaniowe $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ określone są na tym samym zbiorze X , to prawdziwe są zależności:

$$\{x \in X: \varphi(x) \vee \psi(x)\} = \{x \in X: \varphi(x)\} \cup \{x \in X: \psi(x)\},$$

$$\{x \in X: \varphi(x) \wedge \psi(x)\} = \{x \in X: \varphi(x)\} \cap \{x \in X: \psi(x)\},$$

$$\{x \in X: \varphi(x)\} = M \Rightarrow \{x \in X: \sim \varphi(x)\} = M'$$

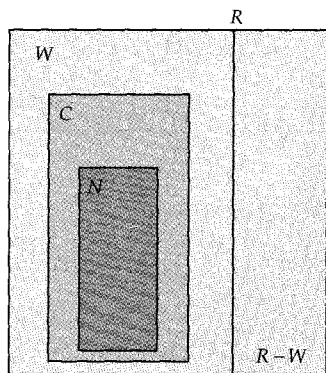
$$\{x \in X: \varphi(x)\} = \{x \in X: \psi(x)\} \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in X} (\varphi(x) \Leftrightarrow \psi(x))$$

$$\{x \in X: \varphi(x)\} \subset \{x \in X: \psi(x)\} \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in X} (\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))$$

Zbiory liczbowe

Liczby 0, 1, 2, 3, ... nazywamy **liczbami naturalnymi** (czasem do liczb naturalnych nie zalicza się liczby 0). Zbiór liczb naturalnych oznaczamy symbolem N .

Liczbami całkowitymi nazywamy liczby: 0, 1, -1, 2, -2, ... Zbiór liczb całkowitych oznaczamy symbolem C (czasem Z). Możemy napisać $C = \{x: x \in N \vee -x \in N\}$.



$$\begin{aligned} N &\subset C \subset W \subset R \\ R \setminus W &\subset R \\ (R \setminus W) \cup W &= R \\ (R \setminus W) \cap W &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} = 0,25,$$

$$\frac{11}{8} = 1,375,$$

$$\frac{5}{6} = 0,8333... = 0,8(3),$$

$$\frac{2}{7} = 0,(285714).$$

Można również określić zbiory:

$R_+ = \{x \in R: x > 0\}$ – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich,

$R_- = \{x \in R: x < 0\}$ – zbiór liczb rzeczywistych ujemnych.

Podobnie określa się zbiory: W_+ , W_- , C_+ , C_- .

Liczby, które możemy przedstawić w postaci $\frac{m}{n}$, gdzie m, n są liczbami całkowitymi i $n \neq 0$, nazywamy **liczbami wymiernymi**. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy symbolem W (czasem Q). Możemy napisać

$$W = \left\{ x: x = \frac{m}{n} \wedge m, n \in C \wedge n \neq 0 \right\}.$$

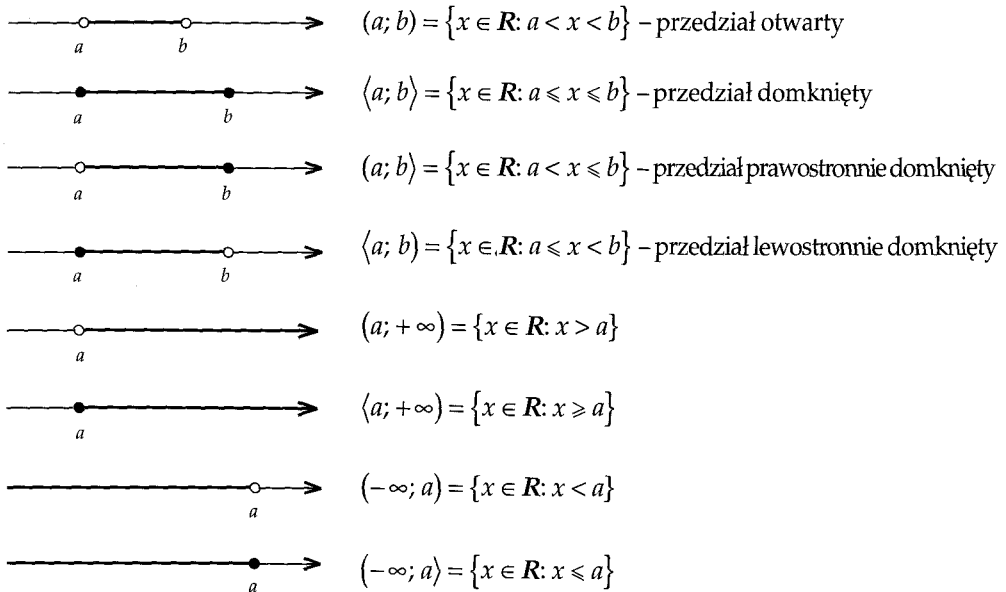
Istnieją liczby, których nie da się przedstawić w postaci $\frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in C$.

Liczby takie nazywamy **niewymiernymi**. Przykładowe liczby niewymierne: π ,

$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $1 + \sqrt{3}$, itp. Sumę zbioru liczb wymiernych i niewymiernych nazywamy zbiorem **liczb rzeczywistych** i oznaczamy symbolem R . Zbiór liczb niewymiernych oznaczamy $R \setminus W$.

Każdą liczbę wymierną można przedstawić w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub nieskończonego okresowego.

Szczególnymi podzbiórmi zbioru \mathbf{R} są **przedziały liczbowe**. Jeżeli $a < b$, to zbiory te określamy:



Działania arytmetyczne w zbiorze liczb rzeczywistych

Mówimy, że w zbiorze A wykonalne jest działanie \otimes , jeżeli dla dowolnych elementów $a, b \in A$ wynik $a \otimes b$ tego działania również należy do zbioru A .

W zbiorze liczb naturalnych wykonalne jest dodawanie i mnożenie.

W zbiorze liczb całkowitych wykonalne są: dodawanie, mnożenie, odejmowanie.

W zbiorze liczb wymiernych (rzeczywistych) wykonalne są działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie (z wyjątkiem dzielenia przez 0).

Własności działań w zbiorze liczb rzeczywistych

$a + b = b + a$	przemienność dodawania
$a \cdot b = b \cdot a$	przemienność mnożenia
$(a + b) + c = a + (b + c)$	łączność dodawania
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	łączność mnożenia
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	rozdzielność mnożenia względem dodawania

Ponadto dla dowolnych liczb rzeczywistych prawdziwa jest:

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 1 = a$$

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$$

$$a = b \Leftrightarrow \bigwedge_{c \in \mathbb{R}} a + c = b + c$$

$$(a \cdot c = b \cdot c \wedge c \neq 0) \Rightarrow a = b$$

$$(a = b \wedge c = d) \Rightarrow a + c = b + d$$

$$a < b \Leftrightarrow \bigwedge_{c \in \mathbb{R}} a + c < b + c$$

$$(a < b \wedge c > 0) \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$$

$$(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$

$$(a < b \wedge c < d) \Rightarrow a + c < b + d$$

$$a \cdot b > 0 \Leftrightarrow [(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)]$$

$$a \cdot b < 0 \Leftrightarrow [(a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)]$$

Niech liczby m, n będą liczbami całkowitymi. Mówimy, że liczba m jest **podzielna** przez $n \neq 0$, co zapisujemy $n \mid m$, jeżeli istnieje liczba całkowita k taka, że $m = k \cdot n$

$$n \mid m \Leftrightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{C}} m = k \cdot n.$$

Dla $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ prawdziwe są zależności:

$$1 \mid a$$

$$a \mid b \Rightarrow a \mid b \cdot c$$

$$a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$$

$$a \mid b \Rightarrow a \cdot c \mid b \cdot c$$

$$a \mid b \wedge c \mid d \Rightarrow a \cdot c \mid b \cdot d.$$

Jeżeli liczba naturalna $n > 1$ jest podzielna tylko przez 1 i n , to nazywamy ją **liczbą pierwszą**.

Potęgowanie i pierwiastkowanie

Niech $a \in \mathbf{R}$ i $n \in \mathbf{N}_+$.

n -tą **potęgą** liczby a (zapisujemy a^n) nazywamy iloczyn

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

n czynników

Liczba a nazywa się **podstawą** potęgi, a liczba n – **wykładnikiem** potęgi.

Własności potęg o wykładnikach naturalnych

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (\text{dla } m > n \text{ i } a \neq 0)$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (\text{dla } b \neq 0)$$

Pierwiastek n -tego stopnia z liczby nieujemnej a jest to taka liczba nieujemna b , że $b^n = a$.

Dla $a \geq 0$ i $b \geq 0$ i $n \in \mathbf{N}$ i $n \geq 2$

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a.$$

Pierwiastek stopnia 2 oznaczamy \sqrt{a} i nazywamy również pierwiastkiem kwadratowym.

Własności działań na pierwiastkach

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (\text{dla } b \neq 0)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

$$\sqrt{0,01} = 0,1$$

Pojęcie potęgi można rozszerzyć

$$\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{9}$$

$$a^0 = 1 \quad \text{dla } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{dla } a \neq 0 \text{ i } n \in \mathbb{N}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{dla } a > 0 \text{ i } m, n \in \mathbb{N} \text{ i } n \geq 2$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad \text{dla } a > 0 \text{ i } m, n \in \mathbb{N} \text{ i } n \geq 2$$

Jeżeli $a \neq b$, to

$$\frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}, \quad \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}.$$

Jeżeli $c^2 = a^2 - b^2$, to

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}},$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

Jeżeli $a > b > 0$, to

$$\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}} = \sqrt{a+b},$$

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}} = \sqrt{a-b}.$$

Wzory przybliżone

Jeżeli $a^2 > |b| \geq 0$, to

$$\sqrt{103} \approx 10 + \frac{3}{20} = 10,15$$

$$\sqrt{a^2 + b} \approx |a| + \frac{b}{2|a|}.$$

Jeżeli $|a|^3 > |b| \geq 0$, to

$$\sqrt[3]{128} \approx 5 + \frac{3}{75} = 5,04$$

$$\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + \frac{b}{3a^2}.$$

Jeżeli $a > b > 0$, to

$$\sqrt{8^2 + 5^2} \approx \frac{7}{8} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 5 = 9,5$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \approx \frac{7}{8}a + \frac{1}{2}b.$$

Wartości średnie

Jeżeli a_1, a_2, \dots, a_n są liczbami rzeczywistymi, to liczbę

$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ nazywamy **średnią arytmetyczną** tych liczb.

Jeżeli $\frac{1}{H_n}$ – jest średnią arytmetyczną liczb $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$,

to H_n nazywamy **średnią harmoniczną** liczb a_1, a_2, \dots, a_n .

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Jeżeli a_1, a_2, \dots, a_n są liczbami nieujemnymi, to liczbę

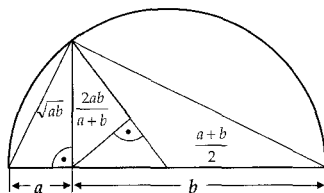
$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ nazywamy **średnią geometryczną** tych liczb.

Średnią kwadratową liczb a_1, a_2, \dots, a_n nazywamy liczbę

$$K_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Jeżeli a_1, a_2 są dodatnie, to

$$\frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} \leq \sqrt{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}}$$



Ważne nierówności

Jeżeli a_1, a_2, \dots, a_n są liczbami dodatnimi, to zachodzą nierówności

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq K_n,$$

przy czym równość zachodzi tylko wtedy, gdy wszystkie liczby a_1, a_2, \dots, a_n są równe.

Nierówność $G_n \leq A_n$ nosi nazwę **nierówności Cauchy'ego**.

Nierówność Cauchy'ego-Schwarza

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a_1, a_2, \dots, a_n i b_1, b_2, \dots, b_n zachodzi

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Zbiory ograniczone. Kresy zbiorów

$$\sup \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} = 1$$

$$\sup \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

– nie istnieje

Zbiór $Z \subset \mathbf{R}$ nazywamy **ograniczonym z góry**, jeżeli istnieje liczba M taka, że dla każdego $x \in Z$ spełniona jest nierówność $x \leq M$. Mówimy wtedy, że liczba M **ogranicza** zbiór Z z góry. Najmniejszą liczbę ograniczającą zbiór Z z góry nazywamy **kresem górnym** zbioru Z i oznaczamy $\sup Z$.

$$\inf \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} = 0$$

Zbiór $Z \subset \mathbf{R}$ nazywamy **ograniczonym z dołu**, jeżeli istnieje liczba m taka, że dla każdego $x \in Z$ spełniona jest nierówność $m \leq x$. Mówimy wtedy, że liczba m **ogranicza** zbiór Z z dołu. Największą liczbę ograniczającą zbiór Z z dołu nazywamy **kresem dolnym** zbioru Z i oznaczamy $\inf Z$.

$$|\pi| = \pi,$$

$$\left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$|0| = 0.$$

Wartość bezwzględna liczby

Wartością bezwzględną (modułem) liczby nieujemnej jest ta sama liczba, wartością bezwzględną liczby ujemnej jest liczba do niej przeciwna.

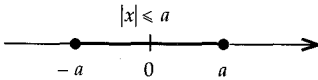
$$|a| = \begin{cases} a & \text{jeżeli } a \geq 0 \\ -a & \text{jeżeli } a < 0 \end{cases}$$

Własności wartości bezwzględnej liczby

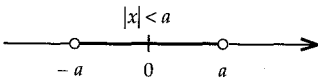
Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y :

1. $|x| \geq 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
4. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$, dla $y \neq 0$
5. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$
6. $\sqrt{x^2} = |x|$
7. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (tzw. nierówność trójkąta)

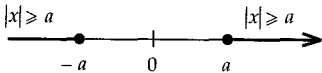
Jeżeli $a > 0$, to prawdziwe są związki:



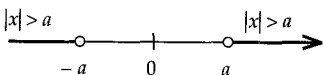
$$|x| \leq a \Leftrightarrow x \in \langle -a; a \rangle$$



$$|x| < a \Leftrightarrow x \in (-a; a)$$

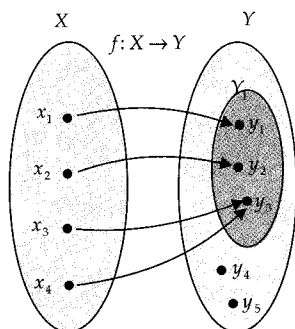


$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \in \langle -\infty; -a \rangle \cup \langle a; +\infty \rangle$$

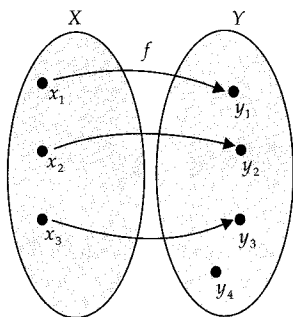


$$|x| > a \Leftrightarrow x \in \langle -\infty; -a \rangle \cup \langle a; +\infty \rangle$$

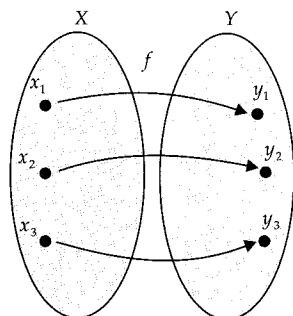
Funkcje



X – dziedina funkcji (zbiór argumentów) f
 Y – przeciwdziedzina funkcji f
 Y_f – zbiór wartości funkcji f
 x_1, x_2, x_3, x_4 – argumenty funkcji f
 y_1, y_2, y_3 – wartości funkcji f



Funkcja różnowartościowa.



Funkcja wzajemnie jednoznaczna.

Ogólne własności funkcji

Funkcją (odwzorowaniem) f odwzorowującą zbiór X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi x ze zbioru X dokładnie jednego elementu y ze zbioru Y .

Mówimy, że funkcja f jest określona na zbiorze X (**dziedzina funkcji**) i przyjmuje wartości w zbiorze Y (**przeciwdziedzina funkcji**) i zapisujemy $f: X \rightarrow Y$.

Zbiór $Y_1 = \left\{ y \in Y: \bigvee_{x \in X} y = f(x) \right\} \subset Y$ nazywamy **zbiorem wartości funkcji f** .

Jeżeli $Y_1 = Y$, to funkcja f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y .

Jeżeli $Y_1 = \{c\}$, to funkcję f nazywamy **funkcją stałą**.

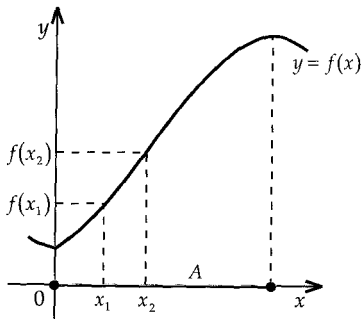
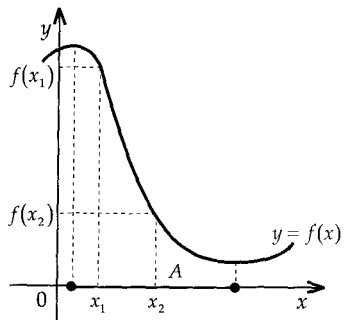
Jeżeli $\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$, to funkcję f nazywamy **różnowartościową**.

Jeżeli f jest funkcją różnowartościową i odwzorowuje zbiór X na zbiór Y , to mówimy, że f jest **wzajemnie jednoznaczna**.

Funkcję $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej.

Jeżeli dana jest funkcja $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $X \subset \mathbf{R}$, to zbiór $W_f = \{(x, y): x \in X \wedge y = f(x)\}$ nazywamy **wykresem** funkcji f .

Miejscem zerowym funkcji $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy tę wartość argumentu, dla której wartość funkcji jest równa zero. x_0 – miejsce zerowe funkcji f , jeżeli $f(x_0) = 0$.

Funkcja rosnąca w zbiorze A .Funkcja malejąca w zbiorze A .

Funkcje monotoniczne

Funkcja $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ jest **rosnąca** w zbiorze $A \subset X$, jeżeli

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

Funkcja $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ jest **malejąca** w zbiorze $A \subset X$, jeżeli

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

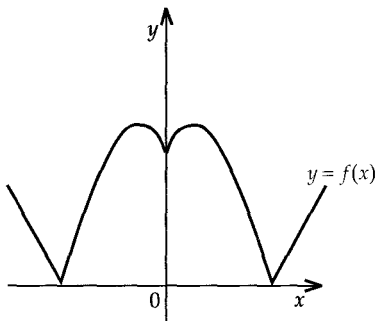
Funkcja $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ jest **nierosnąca** w zbiorze $A \subset X$, jeżeli

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)).$$

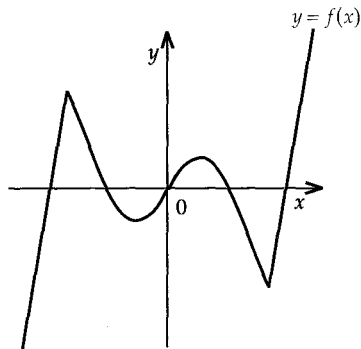
Funkcja $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ jest **niemalejąca** w zbiorze $A \subset X$, jeżeli

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)).$$

Funkcje parzyste i nieparzyste



Wykres funkcji parzystej.



Wykres funkcji nieparzystej.

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **parzystą**, jeżeli $\bigwedge_{x \in X} (-x \in X \wedge f(-x) = f(x))$.

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi y .

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **nieparzystą**, jeżeli $\bigwedge_{x \in X} (-x \in X \wedge f(-x) = -f(x))$.

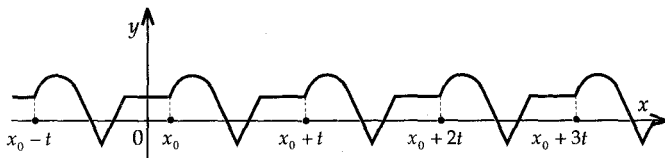
Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem punktu $(0,0)$.

Funkcje okresowe

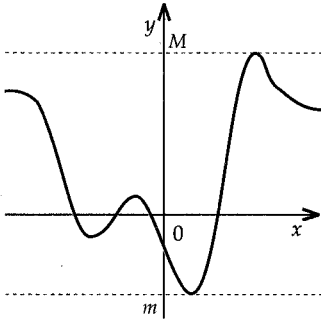
Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **okresową**, jeżeli istnieje liczba $t \neq 0$ taka, że dla dowolnego $x \in X$ również $x+t \in X$ i $x-t \in X$ oraz $f(x+t) = f(x)$.

Liczbę t nazywamy **okresem funkcji** f .

Jeżeli istnieje najmniejsza dodatnia liczba t , spełniająca ten warunek, to nazywamy ją **okresem zasadniczym (podstawowym) funkcji**.



Wykres funkcji okresowej.



Wykres funkcji ograniczonej.

Funkcje ograniczone

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **ograniczoną z góry**, jeżeli

$$\bigvee_{M \in \mathbf{R}} \bigwedge_{x \in X} f(x) \leq M.$$

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **ograniczoną z dołu**, jeżeli

$$\bigvee_{m \in \mathbf{R}} \bigwedge_{x \in X} m \leq f(x).$$

Funkcję $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ nazywamy **ograniczoną**, jeżeli

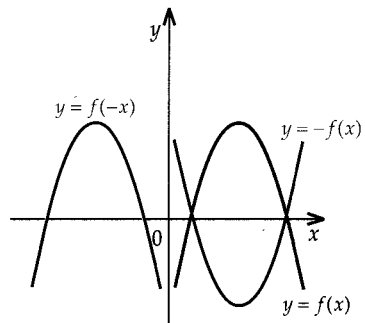
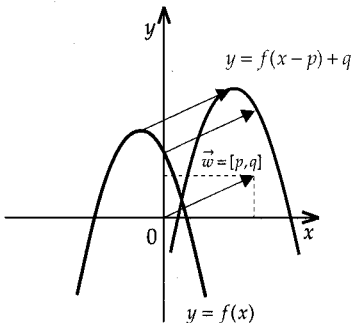
$$\bigvee_{\substack{m, M \in \mathbf{R} \\ m \leq M}} \bigwedge_{x \in X} m \leq f(x) \leq M.$$

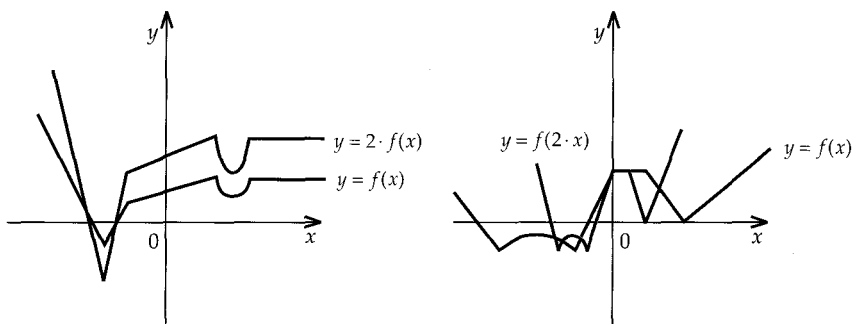
Przekształcenia wykresów funkcji

Przesuwając wykres funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{w} = [p, q]$ otrzymujemy wykres funkcji $y = f(x - p) + q$.

Krzywa symetryczna do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi x jest wykresem funkcji $y = -f(x)$.

Krzywa symetryczna do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi y jest wykresem funkcji $y = f(-x)$.





Przekształcając wykres funkcji $y = f(x)$ przez powinowactwo prostokątne o osi x i skali $k \neq 0$, otrzymujemy wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$.

Przekształcając wykres funkcji $y = f(x)$ przez powinowactwo prostokątne o osi y i skali $s \neq 0$, otrzymujemy wykres funkcji $y = f\left(\frac{x}{s}\right)$.

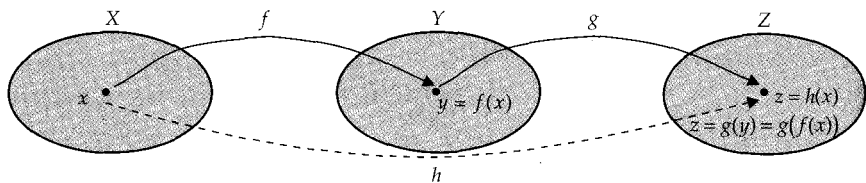
Funkcje złożone i odwrotne

Jeżeli dane są dwie funkcje $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow Z$, to możemy określić trzecią funkcję

$$h: X \rightarrow Z \text{ taką, że } \bigwedge_{x \in X} h(x) = g(f(x)).$$

Funkcję h nazywamy **złożeniem funkcji** f i g i oznaczamy $h = g \circ f$, czyli

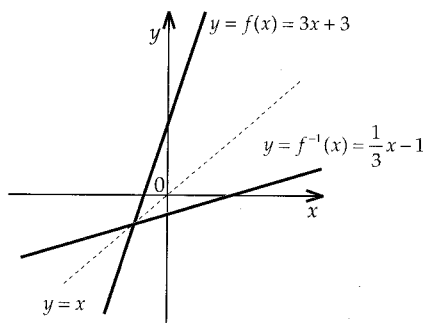
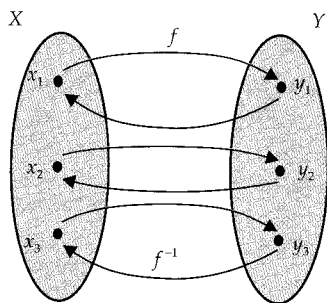
$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



$$\begin{aligned} \text{Jeżeli } f(x) &= 3x + 2 \text{ i } g(x) = x^2 - 2, \\ \text{to } (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(3x + 2) = \\ &= (3x + 2)^2 - 2 = 9x^2 + 12x + 2 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2 - 2) = \\ &= 3(x^2 - 2) + 2 = 3x^2 - 4 \end{aligned}$$

Funkcję f nazywa się funkcją **wewnętrzną**, a funkcję g funkcją **zewnętrzną**.

Złożenia $f \circ g$ i $g \circ f$, o ile oba są określone, są na ogół różnymi funkcjami.



Jeżeli $f(x) = 3x + 3$, to $f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \cdot x - 1$

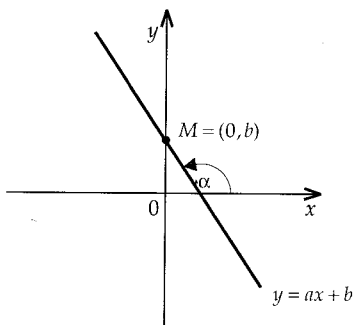
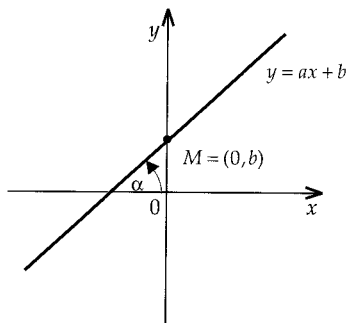
Jeżeli funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczną, to możemy określić nową funkcję f^{-1} (wzajemnie jednoznaczną), która odwzorowuje zbiór Y na zbiór X i dla każdego $x \in X$ spełniony jest warunek $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Funkcję f^{-1} nazywamy **funkcją odwrotną** do funkcji f . Jeżeli $f^{-1}: Y \rightarrow X$ jest funkcją odwrotną do funkcji

$$f: X \rightarrow Y, \text{ to: } \bigwedge_{x \in X} (f^{-1} \circ f)(x) = x \text{ i } \bigwedge_{y \in Y} (f \circ f^{-1})(y) = y.$$

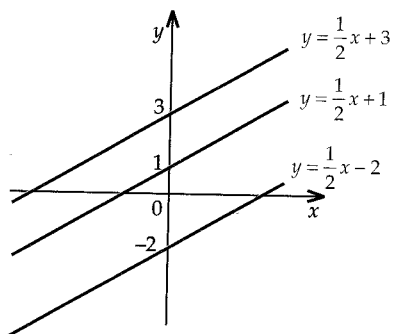
Wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = f^{-1}(x)$ są symetryczne do siebie względem prostej $y = x$.

Funkcja liniowa

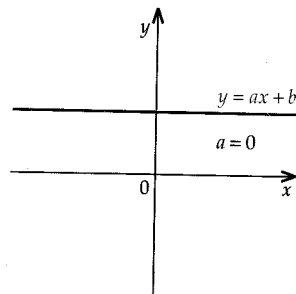
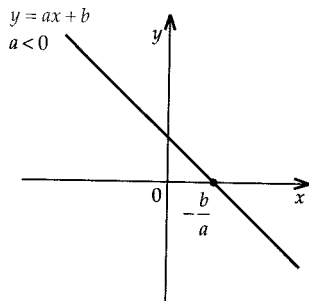
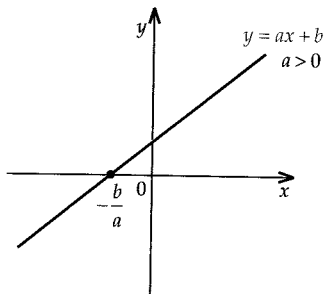
Funkcją liniową nazywamy funkcję $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ określoną wzorem $f(x) = ax + b$.



Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym**, a liczbę b – **wyrazem stałym**. Wykresem funkcji $y = ax + b$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, jest linia prosta nachylona do osi x pod takim kątem α , że $a = \operatorname{tg} \alpha$ i przecinająca oś y w punkcie, którego rzędna jest równa b .



Funkcje liniowe, których wykresy są prostymi równoległymi, mają taki sam współczynnik kierunkowy a .



Jeżeli $a > 0$, to funkcja liniowa jest rosnąca.

Jeżeli $a < 0$, to funkcja liniowa jest malejąca.

Jeżeli $a = 0$, to funkcja liniowa jest stała.

Jeżeli $a \neq 0$, to funkcja liniowa ma tylko jedno miejsce zerowe $x_0 = -\frac{b}{a}$.

Równania i nierówności liniowe

Równaniem liniowym z jedną niewiadomą x nazywamy równanie postaci $ax + b = 0$, gdzie a i b są liczbami danymi.

Jeżeli $a \neq 0$, to równanie jest **oznaczone** i posiada dokładnie jedno rozwiązanie $x = -\frac{b}{a}$.

Jeżeli $a = 0 \wedge b \neq 0$, to równanie jest **sprzeczne**.

Jeżeli $a = 0 \wedge b = 0$, to równanie jest **tożsamościowe** i spełnia je każda liczba rzeczywista.

Nierówność postaci $ax + b > 0$ albo $ax + b < 0$, albo $ax + b \geq 0$, albo $ax + b \leq 0$ nazywamy **nierównością liniową z jedną niewiadomą** x .

Jeżeli $a > 0$, to

$$ax + b > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{b}{a}, +\infty \right)$$

$$ax + b < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a} \right)$$

$$ax + b \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{b}{a}, +\infty \right)$$

$$ax + b \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a} \right]$$

Jeżeli $a < 0$, to

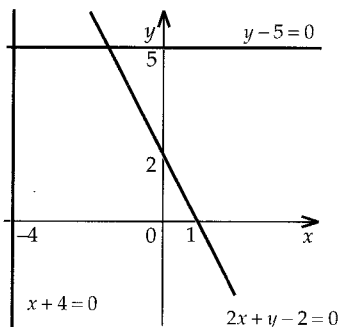
$$ax + b > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a} \right)$$

$$ax + b < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{b}{a}, +\infty \right)$$

$$ax + b \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a} \right]$$

$$ax + b \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{b}{a}, +\infty \right)$$

Równania i nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi



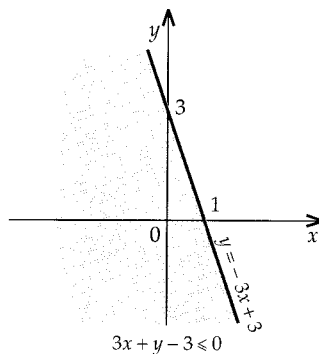
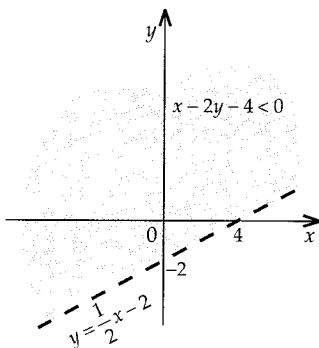
Równanie postaci $ax + by + c = 0$, gdzie a, b, c są danymi liczbami rzeczywistymi nazywamy **równaniem liniowym z dwiema niewiadomymi** x i y .

Każdą **parę liczb** (x, y) spełniającą to równanie nazywamy **rozwiązaniem** tego równania. Jeżeli co najmniej jedna z liczb a, b jest różna od zera ($a^2 + b^2 > 0$), to równanie to na płaszczyźnie przedstawia linię prostą.

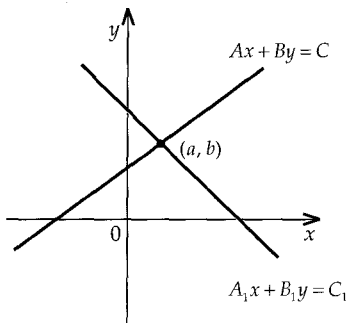
Jeżeli $a = b = c = 0$, to równanie jest tożsamościowe – spełnione przez każdą parę liczb rzeczywistych.

Jeżeli $a = b = 0 \wedge c \neq 0$, to równanie jest sprzeczne – nie ma pary liczb rzeczywistych spełniającej to równanie.

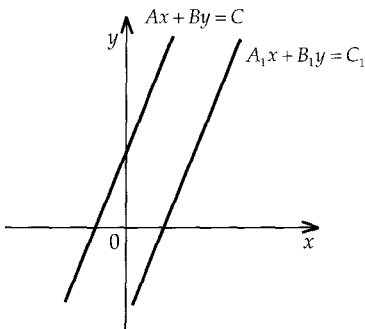
Nierówność postaci $ax + by + c > 0$ albo $ax + by + c < 0$, albo $ax + by + c \geq 0$, albo $ax + by + c \leq 0$, gdzie a, b, c są danymi liczbami rzeczywistymi, nazywamy **nierównością liniową z dwiema niewiadomymi** x i y . Rozwiązaniem takiej nierówności jest każda para (x, y) spełniająca tę nierówność.



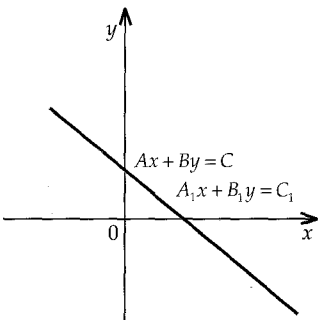
Układy równań liniowych o dwóch niewiadomych



Układ oznaczony.
Jedynym rozwiązaniem jest para (a, b) .



Układ sprzeczny. Brak rozwiązań.



Układ nieoznaczony.
Nieskończenie wiele rozwiązań.

Rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ A_1x + B_1y = C_1 \end{cases} \text{ jest każda para } (x, y)$$

spełniająca jednocześnie oba równania tego układu. Zakładamy dalej, że

$$A^2 + B^2 > 0 \wedge A_1^2 + B_1^2 > 0.$$

Układ równań nazywamy **układem oznaczonym (równań niezależnych)**, jeżeli ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Układ równań nazywamy **układem sprzeczny**, jeśli nie posiada rozwiązań.

Układ równań nazywamy **układem nieoznaczonym (równań zależnych)**, jeżeli posiada nieskończenie wiele rozwiązań.

Jeżeli dane są liczby a, b, c, d , to wyrażenie $ad - bc$ nazywamy **wyznacznikiem stopnia drugiego** i oznaczamy

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Dla danego układu równań

$$\begin{cases} Ax + By = C \\ A_1x + B_1y = C_1 \end{cases} \text{ tworzymy wyznaczniki:}$$

$$W_y = \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}, \quad W_x = \begin{vmatrix} C & B \\ C_1 & B_1 \end{vmatrix},$$

$$W_y = \begin{vmatrix} A & C \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix}.$$

Niech co najmniej jedna z liczb A, B, A_1, B_1 jest różna od zera. Wtedy

$$W \neq 0 \Rightarrow \text{układ jest oznaczony oraz } x = \frac{W_x}{W}, y = \frac{W_y}{W}.$$

$$W = 0 \wedge (W_x = 0 \wedge W_y = 0) \Rightarrow \text{układ nieoznaczony}$$

$$W = 0 \wedge (W_x \neq 0 \vee W_y \neq 0) \Rightarrow \text{układ sprzeczny}$$

Wyznacznik stopnia trzeciego

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \text{ można obliczyć według schematu Sarrusa:}$$

$$= aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb.$$

Jeżeli dany jest układ równań

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \end{cases}$$

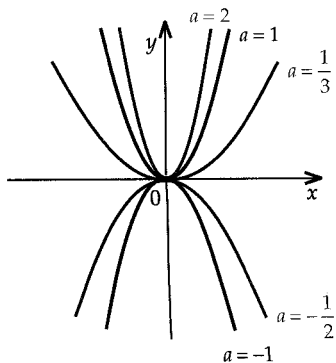
to możemy określić wyznaczniki

$$W = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, W_x = \begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, W_y = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}, W_z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}.$$

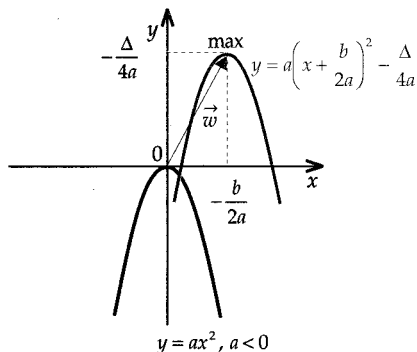
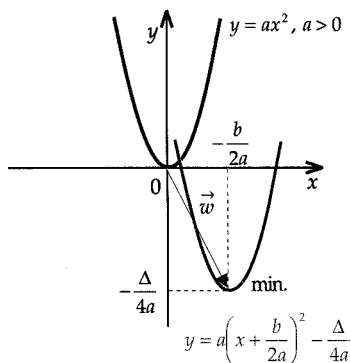
Jeżeli $W \neq 0$, to układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie oraz

$$x = \frac{W_x}{W}, y = \frac{W_y}{W}, z = \frac{W_z}{W}.$$

Funkcja kwadratowa



Wykresy funkcji $y = ax^2$.



Funkcję $f(x) = ax^2$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$, nazywamy **jednomianem stopnia drugiego**. Wykresem jednomianu stopnia drugiego jest krzywa zwana **parabolą**.

Jeżeli $a > 0$, to parabola zwrócona jest ramionami do góry, jeżeli $a < 0$, to zwrócona jest ramionami do dół.

Funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

nazywamy **funkcją kwadratową (trójmianem kwadratowym) w postaci ogólnej**.

Liczbę $\Delta = b^2 - 4ac$ (delta) nazywamy **wyróżnikiem funkcji kwadratowej**.

Funkcję $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ nazywamy **funkcją kwadratową (trójmianem kwadratowym) w postaci kanonicznej**.

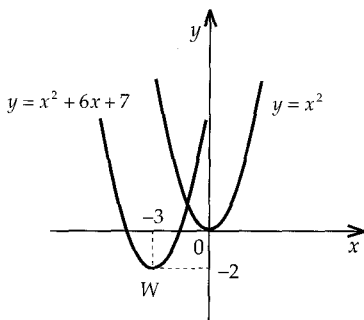
Wykresem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej jest parabola, która powstaje z przesunięcia wykresu jednomianu $y = ax^2$ o wektor $\vec{w} = \left[-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right]$. Wierzchołek

tej paraboli ma współrzędne $x_w = -\frac{b}{2a}$,

$y_w = -\frac{\Delta}{4a}$. W punkcie $x_0 = -\frac{b}{2a}$ funkcja kwadratowa osiąga ekstremum równe

$y_0 = -\frac{\Delta}{4a}$. Jeżeli $a > 0$, jest to najmniejsza wartość funkcji (**minimum**), jeżeli $a < 0$, jest to największa wartość funkcji (**maksimum**).

$$y = x^2 + 6x + 7 = (x + 3)^2 - 2$$



Ponieważ

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad \text{więc}$$

wykresem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej jest parabola.

Funkcję postaci $f(x) = x^2 + px + q$ nazywamy **funkcją kwadratową w postaci unormowanej**.

Istnienie miejsc zerowych (pierwiastków) funkcji kwadratowej zależy od znaku wyróżnika.

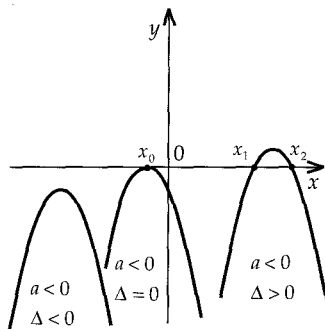
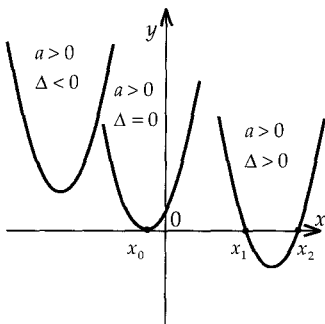
Jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa różne pierwiastki

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma jeden (dwukrotny) pierwiastek

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma pierwiastków rzeczywistych.



W przypadku gdy funkcja kwadratowa ma pierwiastki, to można ją zapisać w postaci iloczynowej:

$$\Delta > 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

Jeżeli funkcja kwadratowa ma pierwiastki, to zachodzą następujące wzory Viete'a:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Równania i nierówności kwadratowe

Równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, nazywamy **równaniem kwadratowym**.

Istnienie i liczba rozwiązań tego równania zależy od znaku wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$.

Jeżeli $\Delta > 0$, to równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Jeżeli $\Delta = 0$, to równanie kwadratowe ma jedno rozwiązanie (podwójne) $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Jeżeli $\Delta < 0$, to równanie kwadratowe nie ma rozwiązań.

Jeżeli $b = 0 \vee c = 0$, to równanie nazywamy **równaniem kwadratowym niepełnym**.

1. $b = 0 \wedge c \neq 0$.

$$ax^2 + c = 0$$

Jeżeli $-\frac{c}{a} < 0$, to równanie nie ma rozwiązań.

Jeżeli $-\frac{c}{a} > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

2. $c = 0 \wedge b \neq 0$.

$$ax^2 + bx = 0$$

Równanie ma dwa rozwiązania: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

$$3x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = \frac{4}{3}$$

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$2x^2 - 5x = 0$$

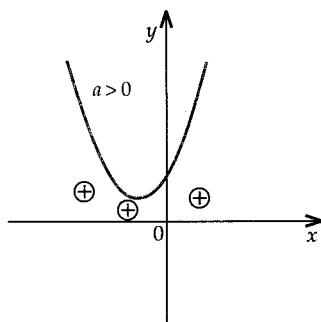
$$x(2x - 5) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{5}{2}$$

Nierównością kwadratową nazywamy każdą z nierówności: $ax^2 + bx + c > 0$,
 $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$.

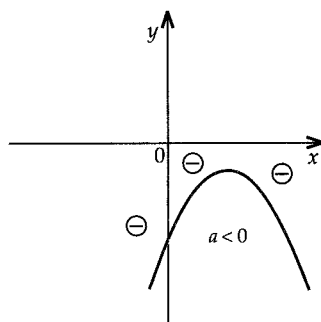
Rozwiązanie nierówności kwadratowej sprowadza się do badania znaku trójmianu kwadratowego występującego w lewej stronie nierówności.

$$\Delta < 0$$



$$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}$$

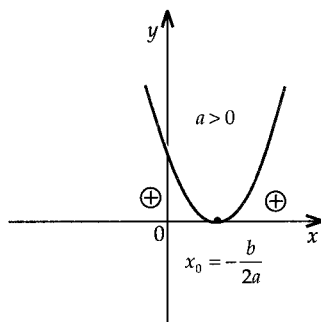
$$ax^2 + bx + c \leq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$



$$ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}$$

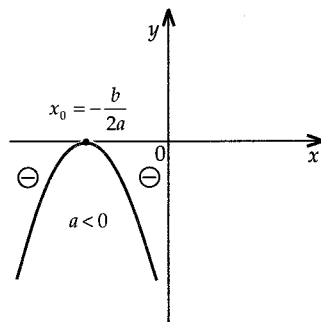
$$\Delta = 0$$



$$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}$$

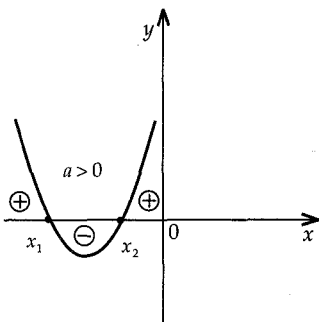


$$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}$$

$$\Delta > 0$$



$$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow x \in (x_1; x_2)$$

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

$$t = x^2, \quad t \geq 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$t_1 = 2, \quad t_2 = 3$$

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}, \quad x_3 = \sqrt{3}, \quad x_4 = -\sqrt{3}$$

Wielomiany jednej zmiennej

$$F(x) = 3 - 2x + x^2$$

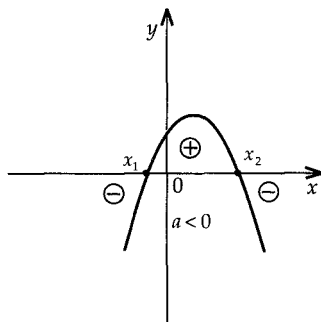
wielomian stopnia 2. st. $F(x) = 2$.

$$G(x) = 3x + 1$$

wielomian stopnia 1. st. $G(x) = 1$.

$$H(x) = 5$$

wielomian stopnia 0. st. $H(x) = 0$.



$$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow x \in (x_1; x_2)$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$$

Równania dwukwadratowe to równania postaci $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Równania dwukwadratowe rozwiązujemy wprowadzając pomocniczą niewiadomą $t = x^2$, $t \geq 0$.

Wielomianem stopnia n jednej zmiennej rzeczywistej x nazywamy funkcję

$$W(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

gdzie

$$n \in \mathbf{N}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}, \quad a_n \neq 0.$$

Liczby a_0, a_1, \dots, a_n nazywamy **współczynnikami** wielomianu, ponadto a_0 nazywamy **wyrazem wolnym**. Funkcją stałą $W(x) = c$, gdzie $c \neq 0$, jest wielomianem stopnia zerowego.

Wielomianem zerowym nazywamy funkcję stale równą zero, tzn. $\bigwedge_{x \in \mathbf{R}} W(x) = 0$.

Wielomian zerowy nie ma określonego stopnia.

Wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ są równe, jeżeli $\bigwedge_{a \in \mathbf{R}} P(a) = W(a)$.

Dwa wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy jednakowych potęgach zmiennej.

Funkcję $J(x) = a_n x^n$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, $a_n \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, nazywamy **jednomianem** stopnia n . Jednomiany tego samego stopnia nazywamy **podobnymi**. Wielomian jest sumą jednomianów, które nazywamy **wyrazami wielomianu**.

Jeżeli wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ są niezerowe i st. $W(x) \leq \text{st. } P(x)$, to:

$$\text{st. } (W(x) \cdot P(x)) = \text{st. } W(x) + \text{st. } P(x)$$

$$\text{st. } (W(x) + P(x)) \leq \text{st. } P(x) \quad \text{lub} \quad W(x) + P(x) = 0$$

Dla dowolnych wielomianów $W(x)$ i $P(x)$, gdzie $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym i st. $W(x) \geq \text{st. } P(x)$, istnieją wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$ takie, że

$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$ i st. $R(x) < \text{st. } P(x)$ lub $R(x)$ jest wielomianem zerowym.

$$2x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x = \underbrace{(x^2 + 1)}_{P(x)} \cdot \underbrace{(2x^2 - x + 1)}_{Q(x)} + \underbrace{(3x - 1)}_{R(x)}$$

$$x^5 - 5x^3 + x^2 + 4x - 4 = \underbrace{(x^2 - 4)}_{P(x)} \cdot \underbrace{(x^3 - x + 1)}_{Q(x)}$$

Jeżeli $R(x)$ jest wielomianem zerowym, tzn.

$W(x) = P(x) \cdot Q(x)$, to mówimy, że $W(x)$ jest **podzielny** przez $P(x)$. Wielomian $P(x)$ nazywamy wtedy **dzielnikiem** wielomianu $W(x)$.

Liczbę a nazywamy **pierwiastkiem wielomianu** $W(x)$, jeżeli $W(a) = 0$.

$$W(x) = x^4 - 3x^2 + x - 2$$

$$W(-2) = 0$$

$$W(x) = (x + 2) \cdot Q(x)$$

$$W(x) = (x + 2) \cdot (x^3 - 2x^2 + x - 1)$$

Twierdzenie Bézout

Liczba r jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - r$.

$$W(r) = 0 \Leftrightarrow W(x) = (x - r) \cdot Q(x),$$

gdzie $Q(x)$ jest wielomianem.

Wielomian jednej zmiennej stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

Liczbę r nazywamy **k -krotnym pierwiastkiem wielomianu** $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x - r)^k$, a nie jest podzielny przez $(x - r)^{k+1}$. Liczbę k nazywamy **krotnością pierwiastka**.

Jeżeli wielomian $W(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ o współczynnikach całkowitych ma **pierwiastek wymierny** w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{p}{q}$, to p jest dzielnikiem

wyrazu wolnego a_0 , a q jest dzielnikiem współczynnika a_n przy najwyższej potędze zmiennej.

Jeżeli wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych ma **pierwiastek całkowity**, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

Każdy wielomian $W(x)$ można przedstawić jako iloczyn czynników, które są wielomianami stopnia co najwyżej drugiego.

Wzory Viete'a dla wielomianu stopnia trzeciego

Jeżeli x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, to

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

Równania i nierówności algebraiczne n -tego stopnia

Jeżeli $W(x)$ jest wielomianem stopnia n ($n \geq 1$), to równanie $W(x) = 0$ nazywamy **równaniem algebraicznym n -tego stopnia**.

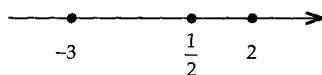
$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 &= 0 \\ (x^2 - 4)(x + 3)(x - 1) &= 0 \\ x^2 - 4 = 0 \vee x + 3 = 0 \vee x - 1 = 0 \\ x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = -3, x_4 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jeżeli } W(x) &= Q_1(x) \cdot Q_2(x) \cdot \dots \cdot Q_m(x), \text{ to} \\ W(x) = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Q_1(x) = 0 \vee Q_2(x) = 0 \vee \dots \vee Q_m(x) = 0. \end{aligned}$$

Jeżeli $W(x)$ jest wielomianem stopnia n ($n \geq 1$), to nierówność $W(x) > 0$ albo $W(x) < 0$, albo $W(x) \geq 0$, albo $W(x) \leq 0$ nazywamy **nierównością algebraiczną n -tego stopnia**.

$$2x^5 + x^4 - 11x^3 + 7x^2 - 13x + 6 > 0$$

$$(x^2 + 1)(2x - 1)(x + 3)(x - 2) > 0$$



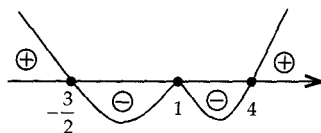
Aby rozwiązać nierówność algebraiczną n -tego stopnia, rozkładamy wielomian $W(x)$ na czynniki. Pierwiastki wielomianu dzielimy liczbową na przedziały. Ustalamy znak poszczególnych czynników w tych przedziałach, a następnie znak całego wielomianu. Najlepiej to wykonać w tabelce zwanej **siatką znaków**.

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$x^2 + 1$	+	+	+	+	+	+	+
$2x - 1$	-	-	-	0	+	+	+
$x + 3$	-	0	+	+	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	-	-	0	+
$W(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$$x \in \left(-3; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$$

$$2x^4 - 9x^3 + 19x - 12 < 0$$

$$(x - 1)^2(2x + 3)(x - 4) < 0$$



$$x \in \left(-\frac{3}{2}; 1\right) \cup (1; 4)$$

Można też rozwiązać nierówność posługując się inną metodą. Należy pamiętać, że:

- wartości wielomianu $W(x)$ dla x większych od największego pierwiastka tego wielomianu są tego samego znaku, co współczynnik przy niewiadomej w najwyższej potędze;
- w otoczeniu pierwiastka, którego krotność jest nieparzysta, wielomian $W(x)$ zmienia znak;
- w otoczeniu pierwiastka, którego krotność jest parzysta, wielomian $W(x)$ nie zmienia znaku.

Funkcje i wielomiany dwóch zmiennych rzeczywistych

$f(x, y) = x^2 \cdot y$ – funkcja dwóch zmiennych

Stopniem jednomianu $ax^n y^p$ nazywamy liczbę $n + p$.

$$\text{st. } 3x^3 y = 4$$

$$\text{st. } (-2x^2 y^3) = 5$$

$W(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10$
– wielomian dwóch zmiennych

$$W(x, y) = x^2 + y^2 - 5xy - 6$$

$$W(y, x) = y^2 + x^2 + 5yx - 6 = W(x, y)$$

Funkcje wymierne

$$F(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 6}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$$

Jeżeli $W(x)$ i $G(x)$ są wielomianami i $G(x)$ jest wielomianem niezerowym, to funkcję $F(x) = \frac{W(x)}{G(x)}$ nazywamy **funkcją wymierną**.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $D = \{x \in \mathbb{R} : G(x) \neq 0\}$. W zbiorze funkcji wymiernych wykonalne są działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie (z wyjątkiem dzielenia przez funkcję zerową).

Niech $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. **Funkcją dwóch zmiennych** określoną na zbiorze A nazywamy przyporządkowanie f , które każdej parze $(x, y) \in A$ przyporządkowuje dokładnie jeden element $z = f(x, y)$.

Zbiór A nazywamy **dziedziną** funkcji f , a zbiór tych wszystkich elementów z , które zostały przyporządkowane elementom zbioru A , nazywamy **zbiorem wartości** funkcji f .

Funkcję postaci $J(x, y) = ax^n y^p$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, $n, p \in \mathbb{N}$, nazywamy **jednomianem dwóch zmiennych** x i y . Liczba a nazywa się **współczynnikiem** tego jednomianu. Jednomiany różniące się tylko współczynnikiem nazywamy **podobnymi**.

Wielomianem dwóch zmiennych rzeczywistych x i y nazywamy jednomian lub sumę jednomianów dwóch zmiennych rzeczywistych x i y . **Stopniem wielomianu dwóch zmiennych** nazywamy największy ze stopni jego wyrazów.

Jeżeli dla dowolnych x i y zachodzi równość $W(x, y) = W(y, x)$, to wielomian nazywamy **symetrycznym**.

$f(x) = \frac{3x}{2x+4}$
 – funkcja
 homograficzna

$$D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$$

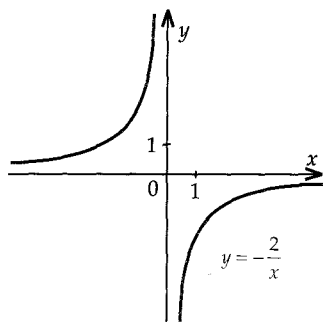
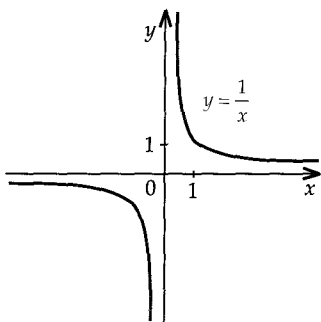
Funkcję wymierną określoną wzorem $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie
 $ad - bc \neq 0 \wedge c \neq 0$, nazywamy **funkcją homograficzną**.

Dziedziną funkcji homograficznej jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

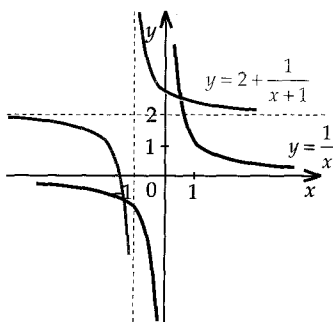
Szczególnym przypadkiem funkcji homograficznej jest funkcja postaci $f(x) = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$.

Wykres tej funkcji nazywa się **hiperbolą**.

Prosta $y = 0$ jest **asymptotą poziomą** wykresu tej funkcji, a prosta $x = 0$ jest **asymptotą pionową**.



$$y = \frac{2x+3}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$$



Wykres każdej funkcji homograficznej otrzymujemy przesuwając wykres funkcji $y = \frac{k}{x}$ o pewien wektor.

Równania i nierówności wymierne

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x + 2} = 0$$

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \wedge x + 2 \neq 0$$

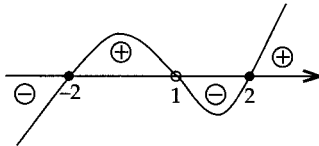
$$(x + 2)(x^2 - 1) = 0 \wedge x \neq -2$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

$$\frac{x^2 - 4}{x - 1} \leq 0$$

$$(x^2 - 4)(x - 1) \leq 0 \wedge x - 1 \neq 0$$

$$(x - 2)(x + 2)(x - 1) \leq 0 \wedge x \neq 1$$



$$x \in (-\infty; -2) \cup (1; 2)$$

Równanie postaci $\frac{W(x)}{P(x)} = 0$, gdzie $W(x)$

i $P(x)$ są wielomianami, nazywamy **równaniem wymiernym**.

Aby rozwiązać równanie wymierne, korzystamy z równoważności:

$$\frac{W(x)}{P(x)} = 0 \Leftrightarrow W(x) = 0 \wedge P(x) \neq 0.$$

Nierówność postaci $\frac{W(x)}{P(x)} > 0$ albo

$$\frac{W(x)}{P(x)} < 0, \text{ albo } \frac{W(x)}{P(x)} \geq 0, \text{ albo } \frac{W(x)}{P(x)} \leq 0$$

nazywamy **nierównością wymierną**.

Przy rozwiązywaniu nierówności wymiernych korzystamy z równoważności:

$$\frac{W(x)}{P(x)} > 0 \Leftrightarrow W(x) \cdot P(x) > 0$$

$$\frac{W(x)}{P(x)} \geq 0 \Leftrightarrow W(x) \cdot P(x) \geq 0 \wedge P(x) \neq 0$$

$$\frac{W(x)}{P(x)} < 0 \Leftrightarrow W(x) \cdot P(x) < 0$$

$$\frac{W(x)}{P(x)} \leq 0 \Leftrightarrow W(x) \cdot P(x) \leq 0 \wedge P(x) \neq 0$$

Funkcje potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne

Jeżeli $a > 1$ i $x \in \mathbf{R}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, gdzie $x_n \in \mathbf{W}$, to $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$.

Dla $a, b \in \mathbf{R}_+$ i $x, y \in \mathbf{R}$ prawdziwe są zależności:

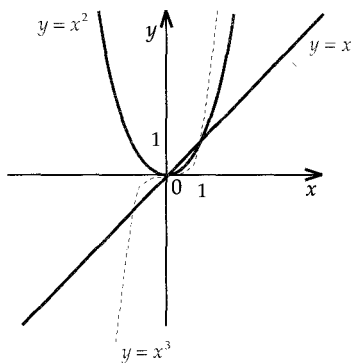
$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

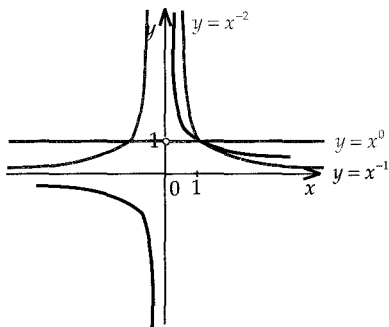


Prawdziwe są również implikacje:

$$(a > 1 \wedge x < y) \Rightarrow a^x < a^y$$

$$(0 < a < 1 \wedge x < y) \Rightarrow a^x > a^y.$$

Funkcję określoną wzorem $f(x) = x^p$ nazywamy **funkcją potęgową** o wykładniku p . Dziedzina D i zbiór wartości Z_x takiej funkcji zależą od wykładnika p .



($p \in \mathbf{N}_+$ \wedge p – parzysta), to $D = \mathbf{R}$, $Z_w = \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$;

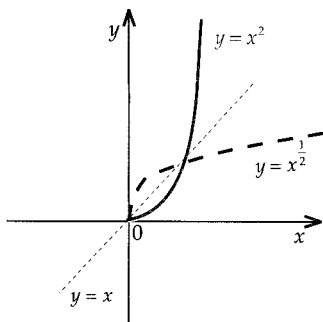
($p \in \mathbf{N}_+$ \wedge p – nieparzysta), to $D = \mathbf{R}$, $Z_w = \mathbf{R}$;

$p = 0$, to $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $Z_w = \{1\}$

($p \in \mathbf{C}_-$ \wedge p – parzysta), to $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $Z_w = \mathbf{R}_+$

($p \in \mathbf{C}_-$ \wedge p – nieparzysta), to $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $Z_w = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

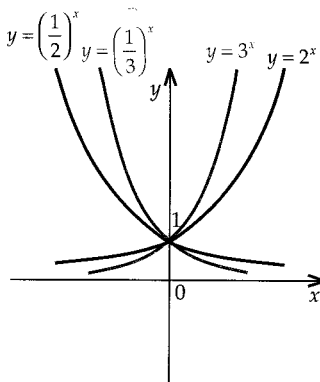
($p \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{C}$), to $D = \mathbf{R}_+$, $Z_w = \mathbf{R}_+$



Jeżeli $p \in \mathbb{C}$ i p – parzysta, to funkcja jest parzysta,
jeżeli $p \in \mathbb{C}$ i p – nieparzysta, to funkcja jest nieparzysta.

Funkcje $y = x^n$ i $y = x^{\frac{1}{n}}$

są w zbiorze $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ funkcjami wzajemnie odwrotnymi.



Jeżeli $a > 0$ i $a \neq 1$, to funkcję $f(x) = a^x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, nazywamy **funkcją wykładniczą**. Wykres funkcji wykładniczej nazywa się **krzywą wykładniczą**.

Jeżeli $a > 1$, to funkcja wykładnicza jest rosnąca, jeżeli $a < 1$, to funkcja wykładnicza jest malejąca.

Wykresy funkcji $y = a^x$ i $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ są symetryczne do siebie względem osi y .

$$4^{-2x+3} = \frac{1}{2} \cdot 2^{x-2}$$

$$2^{4x+6} = 2^{x-3}$$

$$4x + 6 = x - 3$$

$$x = -3$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} < 27 \cdot 9^{x+2}$$

$$3^{-x-1} < 3^{3+2x+4}$$

$$-x - 1 < 2x + 7$$

$$x > -\frac{8}{3}$$

Równaniem wykładniczym (nierównością wykładniczą) nazywamy takie równanie (nierówność), w którym niewiadoma występuje w wykładniku potęgi.

Przy rozwiązywaniu równań i nierówności wykładniczych korzystamy z następujących twierdzeń:

$$\bigwedge_{\substack{a>0 \\ a \neq 1}} (a^x = a^y \Leftrightarrow x = y)$$

$$\bigwedge_{a>1} (a^x < a^y \Leftrightarrow x < y)$$

$$\bigwedge_{0<a<1} (a^x < a^y \Leftrightarrow x > y)$$

Uwaga. Czasem zamiast zapisu a^x można spotkać zapis $\exp_a(x)$.

$$\log_2 16 = 4, \text{ bo } 2^4 = 16$$

$$\log_{32} 2 = \frac{1}{5}, \text{ bo } 32^{\frac{1}{5}} = 2$$

$$\log_4 \frac{1}{64} = -3, \text{ bo } 4^{-3} = \frac{1}{64}$$

Jeżeli $a > 0$ i $a \neq 1$ i $b > 0$, to rozwiązanie równania $a^x = b$ nazywamy **logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie a** .

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Własności logarytmów

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad a^{\log_a x} = x,$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

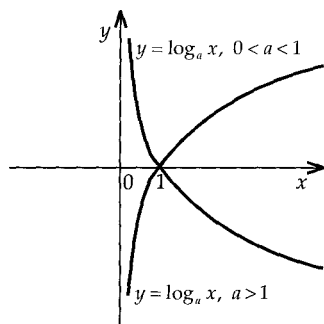
$$\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x,$$

$$\log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \cdot \log_a x,$$

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b},$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

We wszystkich wzorach zakładamy, że podstawy logarytmów są dodatnie i różne od 1, a liczby logarytmowane są dodatnie.



Funkcję określoną wzorem $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$ i $x > 0$, nazywamy **funkcją logarytmiczną** o podstawie a .

Jeżeli $a > 1$, to funkcja logarytmiczna jest rosnąca, jeżeli $0 < a < 1$, to funkcja logarytmiczna jest malejąca. Wykres funkcji logarytmicznej nazywa się **krzywą logarytmiczną**.

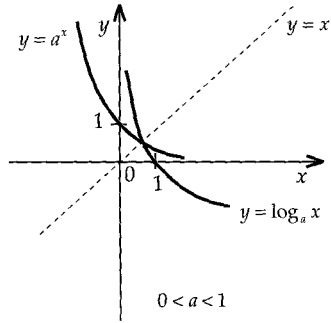
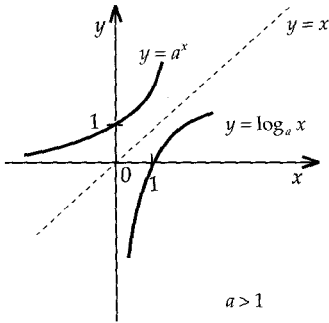
Uwaga. Przyjęto zapisy: $\log_{10} x = \log x$; $\log_e x = \ln x$, gdzie

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,7182.$$

$\log x$ – logarytm dziesiętny,

$\ln x$ – logarytm naturalny.

Funkcje $y = a^x$ i $y = \log_a x$ są funkcjami wzajemnie odwrotnymi, ich wykresy są symetryczne do siebie względem prostej $y = x$.



Równaniem logarytmicznym (nierównością logarytmiczną) nazywamy takie równanie (nierówność), w którym niewiadoma występuje w wyrażeniu logarytmowanym lub w podstawie logarytmu.

$$\log(x-1) + \log(2x+8) = 2$$

Zal.: $x-1 > 0 \wedge 2x+8 > 0; \quad x > 1 \wedge x > -4$
stąd $x > 1$.

$$\log(x-1) + \log(2x+8) = 2$$

$$\log(x-1) \cdot (2x+8) = \log 100$$

$$(x-1) \cdot (2x+8) = 100$$

$$x^2 + 3x - 54 = 0$$

$$x_1 = -9, \quad x_2 = 6$$

Tylko x_2 spełnia warunek zadania, więc $x = 6$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \log_{\frac{1}{2}}(3-x)$$

Zal.: $x+1 > 0 \wedge 3-x > 0; \quad x > -1 \wedge x < 3$
stąd $x \in (-1; 3)$.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \log_{\frac{1}{2}}(3-x)$$

$$x+1 < 3-x$$

$$x < 2$$



odp. $x \in (-1; 2)$.

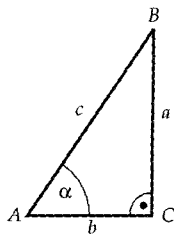
Przy rozwiązywaniu równań i nierówności logarytmicznych korzysta się z następujących twierdzeń:

$$\bigwedge_{\substack{a > 0 \\ a \neq 1}} \bigwedge_{x, y \in \mathbb{R}_+} (\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y)$$

$$\bigwedge_{a > 1} \bigwedge_{x, y \in \mathbb{R}_+} (\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x < y)$$

$$\bigwedge_{0 < a < 1} \bigwedge_{x, y \in \mathbb{R}_+} (\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y)$$

Funkcje trygonometryczne

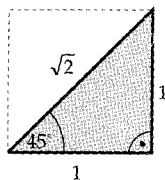


$$\sin \alpha = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{b}{a}$$



$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym

Niech α będzie kątem ostrym w trójkącie prostokątnym ABC .

Sinusem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej trójkąta leżącej naprzeciw kąta α do długości przeciwprostokątnej.

Cosinusem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej trójkąta leżącej przy kącie α do długości przeciwprostokątnej.

Tangensem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej trójkąta leżącej naprzeciw kąta α do długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie.

Cotangensem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej trójkąta leżącej przy kącie α do długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta.

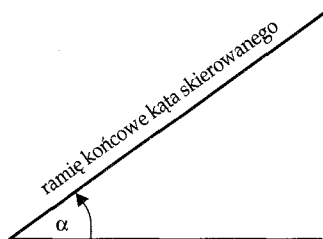
$$\sin \alpha = \frac{\text{przyprostokątna przeciwległa}}{\text{przeciwprostokątna}} = \frac{|BC|}{|AB|}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{przyprostokątna przyległa}}{\text{przeciwprostokątna}} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

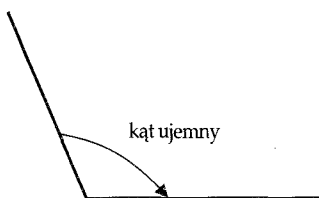
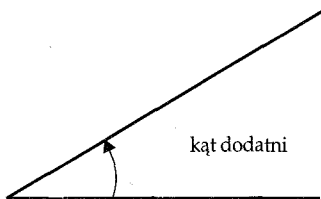
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{przyprostokątna przeciwległa}}{\text{przyprostokątna przyległa}} = \frac{|BC|}{|AC|}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{przyprostokątna przyległa}}{\text{przyprostokątna przeciwległa}} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

Kąt skierowany i jego miara



ramię początkowe kąta skierowanego

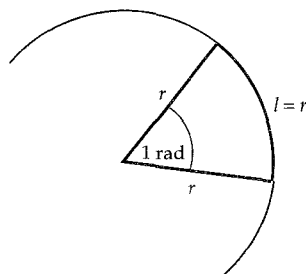
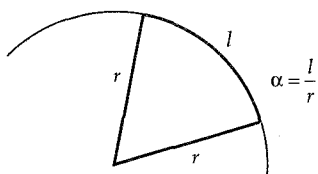


Kątem skierowanym na płaszczyźnie nazywamy uporządkowaną parę półprostych o wspólnym początku – **wierzchołku kąta**. Pierwszą z tych półprostych nazywamy **ramieniem początkowym**, a drugą – **ramieniem końcowym kąta**.

Miara kąta skierowanego to miara kąta obrotu ruchomego ramienia dokoła wierzchołka kąta od położenia ramienia początkowego do położenia ramienia końcowego. Jeżeli kierunek obrotu jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara, to miara kąta jest **dodatnia**, jeżeli kierunek obrotu jest zgodny z ruchem wskazówek zegara, to miara kąta jest **ujemna**.

Jednostką miary stopniowej kąta skierowanego jest stopień ($1^\circ = \frac{1}{90} D$, D – kąt prosty). Miarę dowolnego kąta można przedstawić w postaci $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{C}$ i $0^\circ \leq \alpha_0 < 360^\circ$. Liczbę α_0 nazywamy **miarą główną** kąta skierowanego.

Miarą łukową kąta środkowego w okręgu nazywamy stosunek długości łuku, na którym ten kąt jest oparty, do długości promienia tego okręgu. Jednostką miary łukowej jest **radian**.



$$180^\circ = \pi \text{ rad.}$$

$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

$$\frac{3}{2}\pi \text{ rad} = 270^\circ$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ$$

Zamiana miary stopniowej (α°) na miarę łukową (α):

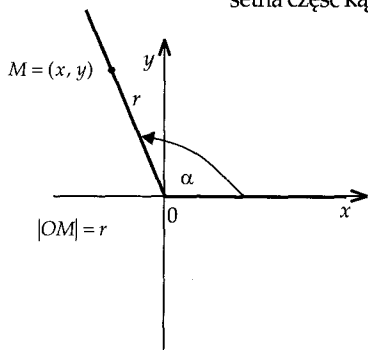
$$\alpha = \frac{\alpha^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \text{ radiana}$$

Zamiana miary łukowej (α) na miarę stopniową (α°):

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi}$$

$$1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 44''$$

W niektórych krajach, obok stopni i radianów, stosowanymi jednostkami miary kąta są tzw. gradusy. Gradus jest to jedna setna część kąta prostego.



Funkcje trygonometryczne kąta dowolnego

Jeżeli mamy dany kąt skierowany α , to można wybrać układ współrzędnych tak, aby wierzchołek kąta był początkiem układu, dodatnia półoś Ox była ramieniem początkowym kąta, a punkt $M \neq O$ leżał na ramieniu końcowym kąta.

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

Sinusem dowolnego kąta α nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu tego kąta do długości promienia wodzącego tego punktu.

Cosinusem dowolnego kąta α nazywamy stosunek odciętej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu tego kąta do długości promienia wodzącego tego punktu.

Tangensem dowolnego kąta $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{C}$, nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu tego kąta do odciętej tego punktu.

Cotangensem dowolnego kąta $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{C}$, nazywamy stosunek odciętej dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu tego kąta do rzędnej tego punktu.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla niektórych kątów

Miara kąta α		$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
stopniowa	łukowa				
0°	0	0	1	0	nie istnieje
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$
$22^\circ 30'$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2} - 1$	$\sqrt{2} + 1$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$67^\circ 30'$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2} + 1$	$\sqrt{2} - 1$
75°	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	nie istnieje	0
180°	π	0	-1	0	nie istnieje
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	nie istnieje	0
360°	2π	0	1	0	nie istnieje

Znaki poszczególnych funkcji trygonometrycznych zależą od ćwiartki, w której zawiera się końcowe ramię kąta.

Znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach

Funkcja	Ćwiartka			
	I	II	III	IV
	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	$\left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-	+	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	-	+	-

Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \text{dla każdego } \alpha,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \text{gdy } \cos \alpha \neq 0,$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \text{gdy } \sin \alpha \neq 0,$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad \text{gdy } \sin \alpha \neq 0 \wedge \cos \alpha \neq 0,$$

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1, \quad \text{dla każdego } \alpha,$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1, \quad \text{dla każdego } \alpha.$$

Wzory redukcyjne

$\varphi =$	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$	$360^\circ + \alpha$
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
$\sin \varphi$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\cos \varphi$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \varphi$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 105^\circ &= \operatorname{tg}(60^\circ + 45^\circ) = \\ &= \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \\ \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} &= \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$$

Funkcje trygonometryczne kąta podwojonego

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{2}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\sin 4\alpha = 4 \sin \alpha \cos \alpha - 8 \sin^3 \alpha \cos \alpha$$

$$\sin 5\alpha = 5 \sin \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 16 \sin^5 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$$

$$\cos 5\alpha = 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha - 4 \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$$

$$\operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^4 \alpha - 6 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{4 \operatorname{ctg}^3 \alpha - 4 \operatorname{ctg} \alpha}$$

Funkcje trygonometryczne połowy kąta

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\sin \alpha = (\pm) \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = (\pm) \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = (\pm) \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = (\pm) \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = (\pm) \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = (\pm) \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = (\pm) \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} =$$

$$= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} =$$

$$= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = (\pm) \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} =$$

$$= \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} =$$

$$= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Funkcje trygonometryczne kąta α wyrażone przez $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

Jeżeli $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t$, to

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1-t^2},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1-t^2}{2t}$$

Suma funkcji trygonometrycznych

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

Różnica funkcji trygonometrycznych

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha$$

Iloczyn funkcji trygonometrycznych

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = -\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = -\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$$

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{1}{4} [\sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\alpha - \beta + \gamma) + \sin(-\alpha + \beta + \gamma) - \sin(\alpha + \beta + \gamma)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4} [\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\alpha - \beta + \gamma) + \cos(-\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta + \gamma)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = \frac{1}{4} [-\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\alpha - \beta + \gamma) + \cos(-\alpha + \beta + \gamma) - \cos(\alpha + \beta + \gamma)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4} [\sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\alpha - \beta + \gamma) - \sin(-\alpha + \beta + \gamma) + \sin(\alpha + \beta + \gamma)]$$

Wzory przybliżone

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad \operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \quad \operatorname{ctg} x \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{3}$$

Potęgi funkcji trygonometrycznych

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$$

$$\cos^4 \alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3)$$

Wzory różne

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta - \alpha)$$

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = \operatorname{ctg} \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$$

$$\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta - \alpha)}$$

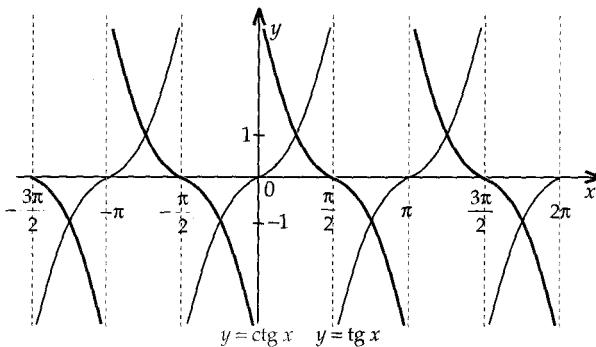
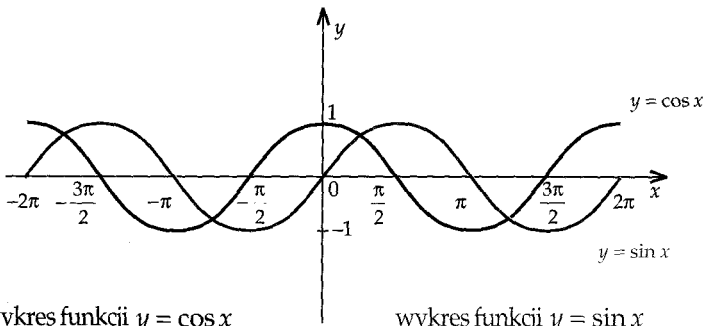
$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \alpha), \text{ gdzie}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha \wedge \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha$$

Ze wzorów redukcyjnych wynika okresowość funkcji trygonometrycznych.

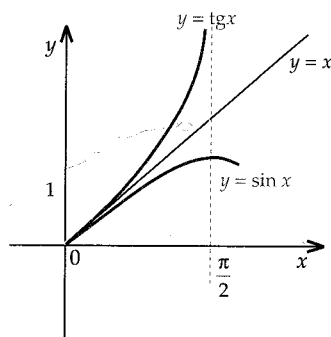
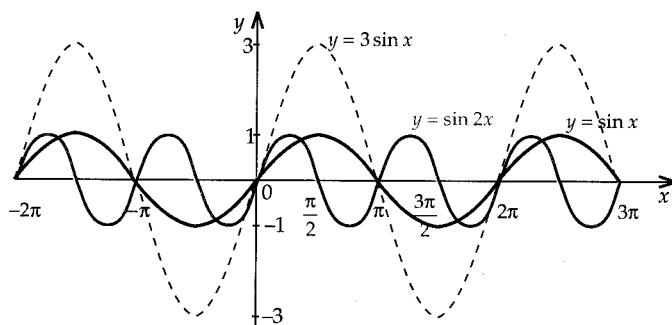
$$\left. \begin{array}{l} \sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha \end{array} \right\} \text{okresem zasadniczym jest } t = 2\pi$$

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha \end{array} \right\} \text{okresem zasadniczym jest } t = \pi$$



wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$

wykres funkcji $y = \operatorname{ctg} x$



Dla $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ zachodzą nierówności:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Równaniem trygonometrycznym nazywamy równanie, w którym niewiadoma występuje wyłącznie pod znakiem funkcji trygonometrycznej.

Szczególne przypadki równań trygonometrycznych

Równanie	Rozwiązanie
$\sin x = 0$	$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{C}$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{C}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{C}$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{C}$
$\cos x = 1$	$x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{C}$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{C}$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

$$\sin x = a, \quad |a| \leq 1$$

$$2a^2 + 3a - 2 = 0$$

$$\Delta = 25$$

$a_1 = -2$ nie spełnia warunków zadania

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{C}$$

Ogólne rozwiązania równań trygonometrycznych

Równanie	Rozwiązanie
$\sin x = \sin x_0$	$x = x_0 + 2k\pi \vee x = \pi - x_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{C}$
$\cos x = \cos x_0$	$x = x_0 + 2k\pi \vee x = -x_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{C}$
$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$	$x = x_0 + k\pi, \quad k \in \mathbb{C}$
$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0$	$x = x_0 + k\pi, \quad k \in \mathbb{C}$

Równania $\sin x = a$ i $\cos x = a$ mają rozwiązania tylko wtedy, gdy $|a| \leq 1$.

Funkcje cyklometryczne (odwrotne do funkcji trygonometrycznych)

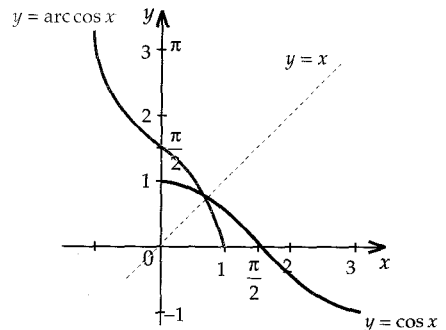
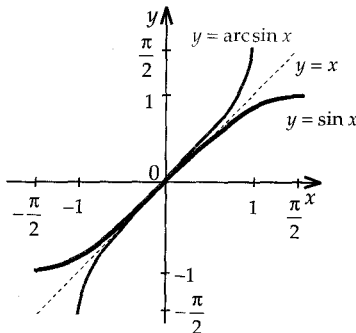
Funkcje cyklometryczne można określić jednoznacznie tylko w tych przedziałach, w których funkcje trygonometryczne są wzajemnie jednoznaczne.

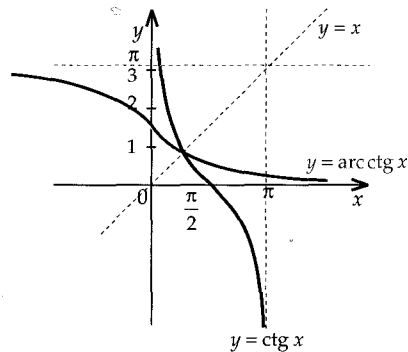
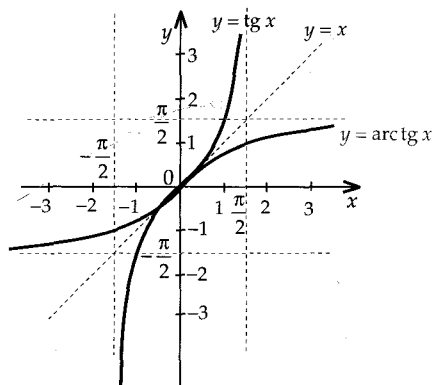
Zgodnie z ogólną umową przyjmujemy:

$$\bigwedge_{x \in (-1; 1)} \bigwedge_{y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)} [y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y]$$

$$\bigwedge_{x \in (-1; 1)} \bigwedge_{y \in (0; \pi)} [y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y]$$

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigwedge_{y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)} [y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y]$$

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigwedge_{y \in (0; \pi)} [y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y]$$




Podstawowe związki między funkcjami cyklometrycznymi

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \text{ dla } x \in \langle -1; 1 \rangle,$$

$$\arctg x + \operatorname{arctctg} x = \frac{\pi}{2}, \text{ dla } x \in \mathbf{R},$$

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2},$$

$$\arccos x = \arcsin \sqrt{1 - x^2},$$

$$\operatorname{arctctg} x = \arctg \frac{1}{x},$$

$$\arctg x = \operatorname{arctctg} \frac{1}{x}.$$

Wzory przybliżone

$$\arcsin x \approx x + \frac{x^3}{3}; \quad \operatorname{arctctg} x \approx x - \frac{x^3}{3}$$

Zasada indukcji matematycznej (zupełnej)

Niech $T(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, oznacza twierdzenie o liczbach naturalnych. Jeżeli:

1° $T(n_0)$ jest prawdziwe,

2° dla każdej liczby naturalnej $k \geq n_0$ z prawdziwości twierdzenia $T(k)$ wynika prawdziwość twierdzenia $T(k+1)$,

to twierdzenie $T(n)$ jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$.

Ciągi liczbowe

Ciągiem liczbowym (nieskończonym) nazywamy funkcję $a: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Przyjęto zapisy: $a(1) = a_1, a(2) = a_2, \dots, a(n) = a_n$.

Ciągiem skończonym k -wyrazowym nazywamy funkcję $a: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ciąg (a_n) nazywamy **rosnącym**, jeżeli $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}_+} a_{n+1} > a_n$,

ciąg (a_n) nazywamy **malejącym**, jeżeli $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}_+} a_{n+1} < a_n$,

ciąg (a_n) nazywamy **nierosnącym**, jeżeli $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}_+} a_{n+1} \leq a_n$,

ciąg (a_n) nazywamy **niemalejącym**, jeżeli $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}_+} a_{n+1} \geq a_n$,

ciąg (a_n) nazywamy **stałym**, jeżeli $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}_+} a_{n+1} = a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ograniczonym z góry**, jeżeli $\bigvee_{M \in \mathbb{R}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}_+} a_n \leq M$,

ciąg (a_n) nazywamy **ograniczonym z dołu**, jeżeli $\bigvee_{m \in \mathbb{R}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}_+} a_n \geq m$,

ciąg (a_n) nazywamy **ograniczonym**, jeżeli $\bigvee_{m, M \in \mathbb{R}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}_+} m \leq a_n \leq M$.

Ciąg arytmetyczny

Ciąg (a_n) nazywamy **arytmetycznym**, jeżeli istnieje taka liczba r , że dla każdego n (gdy ciąg jest nieskończony), zaś dla każdego $n \leq k - 1$ (gdy ciąg jest skończony, k -wyrazowy) spełniony jest warunek $a_{n+1} = a_n + r$. Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu arytmetycznego. Ciąg arytmetyczny ma co najmniej 3 wyrazy.

Jeżeli $r > 0$, to ciąg arytmetyczny jest rosnący,

jeżeli $r < 0$, to ciąg arytmetyczny jest malejący,

jeżeli $r = 0$, to ciąg arytmetyczny jest stały.

n -ty wyraz ciągu arytmetycznego wyraża się wzorem

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Każdy wyraz a_n ciągu arytmetycznego, oprócz pierwszego (i ostatniego, jeżeli ciąg jest skończony), jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wyraża się wzorem

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$$

Ciąg geometryczny

Ciąg (a_n) nazywamy **geometrycznym**, jeżeli istnieje taka liczba q , że dla każdego n (gdy ciąg jest nieskończony), zaś dla każdego $n \leq k - 1$ (gdy ciąg jest skończony, k -wyrazowy) spełniony jest warunek $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu geometrycznego. Ciąg geometryczny ma co najmniej 3 wyrazy.

Jeżeli $q < 0$, to ciąg geometryczny jest naprzemienny,

jeżeli $q = 1$, to ciąg geometryczny jest stały,

jeżeli $0 < q < 1 \wedge a_1 > 0$, to ciąg geometryczny jest malejący,

jeżeli $0 < q < 1 \wedge a_1 < 0$, to ciąg geometryczny jest rosnący,

jeżeli $q > 1 \wedge a_1 > 0$, to ciąg geometryczny jest rosnący,

jeżeli $q > 1 \wedge a_1 < 0$, to ciąg geometryczny jest malejący.

n -ty wyraz ciągu geometrycznego wyraża się wzorem

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Każdy wyraz a_n ciągu geometrycznego, oprócz pierwszego (i ostatniego, gdy ciąg jest skończony), spełnia warunek

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wyraża się wzorem

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & \text{dla } q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{dla } q = 1. \end{cases}$$

Jeżeli (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym, w którym $|q| < 1$, to istnieje suma $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, zwana sumą szeregu geometrycznego lub sumą nieskończonego ciągu geometrycznego, oraz

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{a_1}{1-q}.$$

Niektóre sumy skończone

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$k + (k+1) + (k+2) + \dots + n = \frac{(n+k)(n-k+1)}{2}$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n \cdot (n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2 \cdot (2n^2 - 1)$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \cdot (3n^2 + 3n - 1)}{30}$$

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n^2 + 2n - 1)}{12}$$

Elementy kombinatoryki

Niech $n \in \mathbb{N}$. Symbol $n!$ (n silnia) określamy następująco

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Symbol $n!$ spełnia wzór rekurencyjny

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = n! \cdot (n+1) \end{cases}$$

Dla dużych n silnie możemy obliczać w przybliżeniu za pomocą **wzoru Stirlinga**

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}.$$

Niech $n, k \in \mathbb{N}$ i $n \geq k$. **Symbolem Newtona** nazywamy wyrażenie

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Własności symbolu Newtona

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \quad \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Permutacją zbioru n -elementowego nazywamy każdy n -wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów danego zbioru. Liczbę permutacji zbioru n -elementowego obliczamy ze wzoru $P_n = n!$.

Kombinacją k -elementową ze zbioru n -elementowego nazywamy dowolny podzbiór k -elementowy danego zbioru n -elementowego. Liczbę takich kombinacji obliczamy ze wzoru

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

k -wyrazową **wariacją bez powtórzeń** ze zbioru n -elementowego nazywamy każdy k -wyrazowy ciąg o wyrazach różnych należących do danego zbioru n -elementowego. Liczbę takich wariacji obliczamy ze wzoru

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

Prawdziwe są zależności: $V_n^k = C_n^k \cdot P_n$, $V_n^n = P_n$.

k -wyrazową **wariacją z powtórzeniami** ze zbioru n -elementowego nazywamy każdy k -wyrazowy ciąg o wyrazach należących do danego zbioru n -elementowego. Liczbę takich wariacji obliczamy ze wzoru

$$W_n^k = n^k.$$

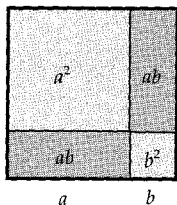
Wzór dwumianowy Newtona

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n$$

lub

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k, \text{ jeżeli } a \cdot b \neq 0 \text{ i } a+b \neq 0.$$

Przyjmując w tym wzorze szczególne wartości n , otrzymujemy **wzory skróconego mnożenia**



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Inne wzory skróconego mnożenia

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac,$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) + 3bc(b+c) + 3ac(a+c) + 6abc,$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

$$a^4 - b^4 = (a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$$

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{2} + \binom{6}{4} + \binom{6}{6} = \binom{6}{1} + \binom{6}{3} + \binom{6}{5}$$

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4} = \binom{5}{1} + \binom{5}{3} + \binom{5}{5}$$

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4 = 16$$

$$(3-2x)^4 = 1 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^3 \cdot (-2x) + 6 \cdot 3^2 \cdot (-2x)^2 + 4 \cdot 3 \cdot (-2x)^3 + 1 \cdot (-2x)^4 = 81 - 216x + 216x^2 - 96x^3 + 16x^4$$

Jeżeli n jest liczbą naturalną parzystą, to

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 - a^{n-4} \cdot b^3 + \dots + a \cdot b^{n-2} - b^{n-1})$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

Jeżeli n jest liczbą naturalną nieparzystą, to

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 - a^{n-4} \cdot b^3 + \dots - a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

Własności współczynników rozwinięcia dwumianu Newtona.

Jeżeli n jest liczbą naturalną parzystą, to

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{n-1}$$

Jeżeli n jest liczbą naturalną nieparzystą, to

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{n}$$

Dla dowolnego naturalnego n jest

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Współczynniki w rozwinięciach dwumianu Newtona różnych potęg możemy zapisać w tablicy zwanej **trójkątem Pascala**.

$$(a+b)^0$$

$$(a+b)^1$$

$$(a+b)^2$$

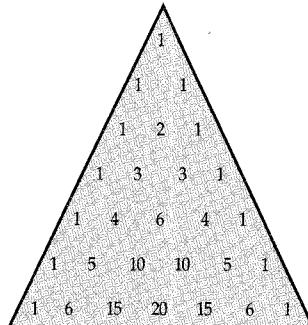
$$(a+b)^3$$

$$(a+b)^4$$

$$(a+b)^5$$

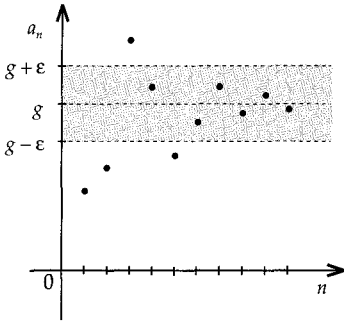
$$(a+b)^6$$

...



Ciągi zbieżne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_M \bigwedge_{n > M} |a_n - g| < \varepsilon$$



Liczbę g nazywamy **granicą ciągu** (a_n) , a ciąg (a_n) nazywamy **zbieżnym** do liczby g . Zamiast $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ piszemy również $a_n \rightarrow g$.

W szczególnym przypadku ($g = 0$) mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_M \bigwedge_{n > M} |a_n| < \varepsilon.$$

Twierdzenia o granicach ciągów zbieżnych

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 - 3n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$\begin{matrix} \nearrow 0 & \nearrow 0 \\ \searrow 0 & \searrow 0 \end{matrix}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \quad b_n \neq 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$$

$$a_n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$$

$$a_n \leq b_n \leq c_n \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$$

Zakładamy, że wszystkie granice w tych twierdzeniach istnieją.

Granice niektórych ciągów:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad (e \approx 2,718281828)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \text{ dla } a > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0, \text{ jeżeli } |a| < 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

$$4^n < 2^n + 3^n + 4^n < 3 \cdot 4^n$$

$$\sqrt[n]{4^n} < \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} < \sqrt[n]{3 \cdot 4^n}$$

$$4 < \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} < 4 \cdot \sqrt[n]{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} = 4$$

Ciągi rozbieżne do nieskończoności

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{A \in \mathbb{R}} \bigvee_{M} \bigwedge_{n > M} a_n > A$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{A \in \mathbb{R}} \bigvee_{M} \bigwedge_{n > M} a_n < A$$

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$,

jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \wedge a_n > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$,

jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \wedge a_n < 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.

Twierdzenia o ciągach rozbieżnych do nieskończoności możemy zapisać symbolicznie:

$$1. (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$2. (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$3. (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$4. (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$5. (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$6. (+\infty) + a = +\infty$$

$$7. (-\infty) + a = -\infty$$

$$8. a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{gdy } a > 0 \\ -\infty, & \text{gdy } a < 0 \end{cases}$$

$$9. a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{gdy } a > 0 \\ +\infty, & \text{gdy } a < 0 \end{cases}$$

Twierdzenia te należy rozumieć następująco:

np. 1.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$

np. 8.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$

Granica i ciągłość funkcji

Niech będzie dana funkcja $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, gdzie $X = (x_0 - \varepsilon; x_0) \cup (x_0; x_0 + \varepsilon)$ oraz $\varepsilon > 0$ (funkcja f może być również określona w punkcie x_0).

Definicja I (Heinego) granicy funkcji

Jeżeli dla każdego ciągu (x_n) argumentów funkcji f , o wyrazach różnych od x_0 , zbieżnego do x_0 , ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji jest zbieżny do g , to liczbę g nazywamy **granica funkcji f w punkcie x_0** .

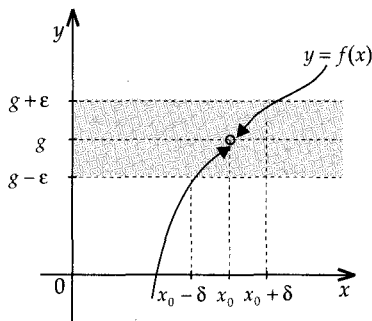
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{(x_n) \\ x_n \in X \\ x_n \rightarrow x_0}} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

Definicja II (Cauchy'ego) granicy funkcji

Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że jeżeli $x \in X$ i $|x - x_0| < \delta$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in X} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

Uwaga. Obie definicje są równoważne.



Twierdzenia o granicach funkcji

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \text{jeżeli } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

Zakładamy, że wszystkie granice występujące w tych twierdzeniach istnieją.

Ważne granice

$\lim_{x \rightarrow a} W(x) = W(a)$, jeżeli $W(x)$ jest wielomianem

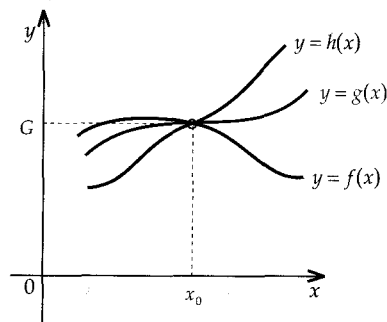
$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, jeżeli $a \geq 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{nx} = \frac{m}{n}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$, jeżeli $a > 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$, jeżeli $a > 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$



Jeżeli $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

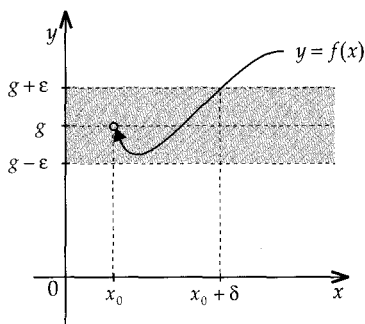
dla $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0) \cup (x_0; x_0 + \varepsilon)$

i $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = G$,

to $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = G$.

(twierdzenie o trzech funkcjach)

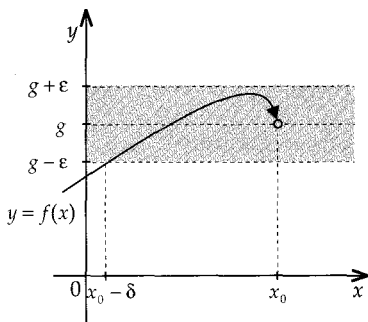
Granice jednostronne

Granica prawostronna funkcji f w punkcie x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{(x_n) \\ x_n \in D_f \\ x_n > x_0 \\ x_n \rightarrow x_0}} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in D_f} x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon$$

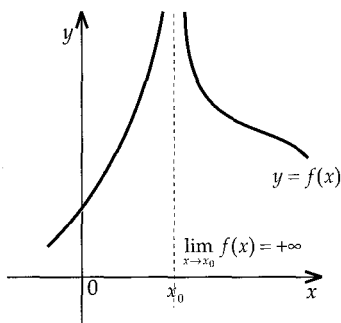
Granica lewostronna funkcji f w punkcie x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{(x_n) \\ x_n \in D_f \\ x_n < x_0 \\ x_n \rightarrow x_0}} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in D_f} x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon$$

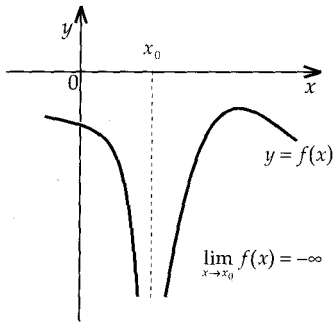
Granice niewłaściwe



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{(x_n) \\ x_n \in D_f \\ x_n \rightarrow x_0 \\ x_n \neq x_0}} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_E \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{\substack{x \in D_f \\ x \neq x_0}} |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > E$$

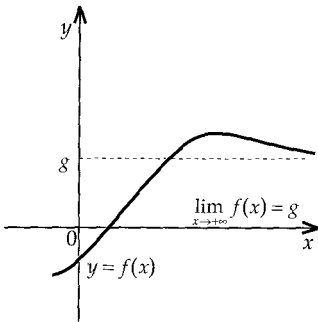


$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{(x_n) \\ x_n \in D_f \\ x_n \rightarrow x_0 \\ x_n \neq x_0}} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{E, \delta > 0} \bigvee_{x \in D_f} \bigwedge_{x \neq x_0} |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < E$$

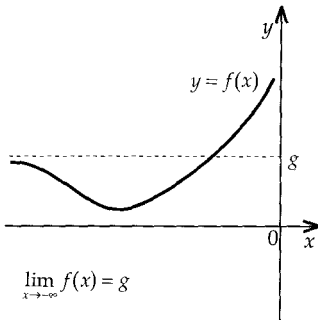
Granica funkcji w nieskończoności



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{(x_n) \\ x_n \in D_f \\ x_n \rightarrow +\infty}} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{x \in D_f} x > \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{(x_n) \\ x_n \in D_f \\ x_n \rightarrow -\infty}} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{x \in D_f} x < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

Funkcje ciągłe

Niech f będzie funkcją określoną w zbiorze $A \subset \mathbf{R}$ i $x_0 \in A$.

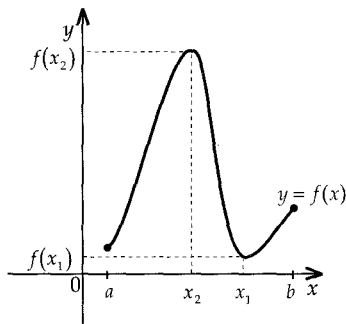
Funkcję f nazywamy **ciągłą w x_0** , jeżeli posiada ona granicę w punkcie x_0 równą swej wartości w tym punkcie, tzn.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Jeżeli funkcja jest ciągła w każdym punkcie zbioru A , to nazywamy ją **funkcją ciągłą w zbiorze A** .

Własności funkcji ciągłych

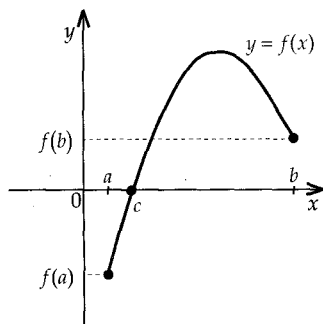
Suma, różnica i iloczyn funkcji ciągłych w punkcie x_0 (zbiorze A) jest funkcją ciągłą w tym punkcie (zbiorze A). Iloraz funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą w każdym punkcie, w którym dzielnik jest funkcją różną od zera. Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.



Twierdzenie Weierstrassa

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a; b \rangle$, to istnieją takie punkty

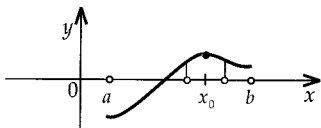
$x_1, x_2 \in \langle a; b \rangle$, że $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ dla każdego $x \in \langle a; b \rangle$.



Własność Darboux

Funkcja ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b \rangle$ przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między $f(a)$ i $f(b)$.

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a; b \rangle$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje takie $c \in (a; b)$, że $f(c) = 0$.



Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale otwartym $(a; b)$ i w punkcie $x_0 \in (a; b)$ przyjmuje wartość dodatnią (ujemną), to istnieje otoczenie punktu x_0 , w którym funkcja f jest dodatnia (ujemna).

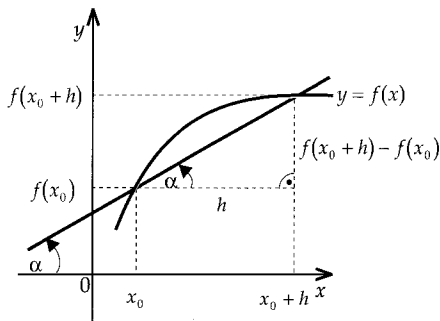
Jeżeli istnieje skończona granica

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ i funkcja $g(y)$ jest ciągła w punkcie y_0 , to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right) = g(y_0).$$

Jeżeli funkcja f w przedziale $\langle a; b \rangle$ jest ciągła i różnowartościowa, to jest w tym przedziale ściśle monotoniczna.

Pochodna funkcji



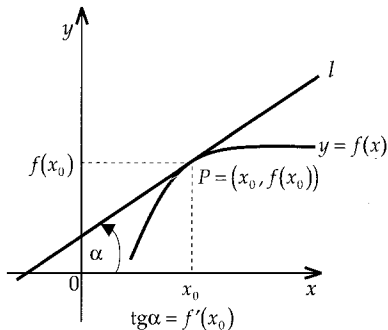
Niech f będzie funkcją określoną na przedziale $(a; b)$ i niech $x_0 \in (a; b)$. Weźmy taką liczbę $h \neq 0$, że $x_0 + h \in (a; b)$.

Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu h nazywamy wyrażenie

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Jeżeli istnieje skończona granica ilorazu różnicowego dla $h \rightarrow 0$, to granicę tę nazywamy **pochodną funkcji f** w punkcie x_0 .

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



$$l: y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Jeżeli istnieje $f'(x_0)$, to mówimy, że funkcja f jest **różniczkowalna** w punkcie x_0 .

Pochodna $f'(x_0)$ jest równa tangensowi kąta α , jaki tworzy z dodatnim kierunkiem osi Ox styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie o odciętej x_0 .

Styczna do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $P = (x_0, f(x_0))$ ma równanie

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w x_0 , to jest w tym punkcie ciągła. Jeżeli funkcja jest ciągła w x_0 , to nie musi być w tym punkcie różniczkowalna. Np. funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła w $x_0 = 0$, ale nie jest w tym punkcie różniczkowalna.

Zamiast f' możemy pisać: y' , $\frac{df}{dx}$, $D_x f$.

Podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w pewnym zbiorze D , to dla $x \in D$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \text{ jeżeli } g(x) \neq 0$$

Jeżeli $y = g(f(x))$ i funkcje $u = f(x)$ i $y = g(u)$ są różniczkowalne odpowiednio w zbiorach D i $f(D)$, to dla $x \in D$

$$y' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad \text{lub} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Jeżeli funkcja $y = g(x)$ jest silnie monotoniczna i różniczkowalna w pewnym zbiorze X oraz $g'(x) \neq 0$ dla $x \in X$, to funkcja do niej odwrotna $x = g^{-1}(y)$ jest różniczkowalna na zbiorze Y wartości funkcji g , przy czym

$$[g^{-1}(y)]' = \frac{1}{g'(x)}$$

Pochodne funkcji elementarnych

$f(x)$	$f'(x)$	Uwagi
c	0	
x	1	$x \in \mathbf{R}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$n \in \mathbf{N}_+, n \geq 2, x \in \mathbf{R}$
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}_+$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in \mathbf{R}_+$
$\frac{a}{x}$	$-\frac{a}{x^2}$	$x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}, x \in \mathbf{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbf{R}$
$\log_a x $	$\frac{1}{x \ln a}$	$a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}, x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbf{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbf{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{C}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$	$x \neq k\pi, k \in \mathbf{C}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1; 1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1; 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbf{R}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbf{R}$

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w zbiorze D i $f(x) \neq 0$ dla $x \in D$, to

$$\left(\ln|f(x)|\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ lub } f'(x) = f(x) \cdot \left(\ln|f(x)|\right)'.$$

Pochodne wyższych rzędów

Jeżeli funkcja $y = f'(x)$ jest różniczkowalna, to jej pochodną oznaczamy $f''(x)$ lub $f^{(2)}(x)$ i nazywamy **pochodną rzędu drugiego** funkcji f lub **drugą pochodną** funkcji f . Podobnie określamy pochodne wyższych rzędów:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

$$f'''(x) = (f''(x))'$$

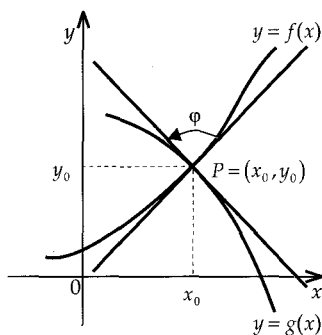
$$f^{(4)}(x) = (f'''(x))'$$

...

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Pochodne rzędu n niektórych funkcji

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
$\sin x$	$\sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot (\ln a)^n$
$\frac{1}{x}$	$(-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$
$\ln(1+x)$	$(-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$

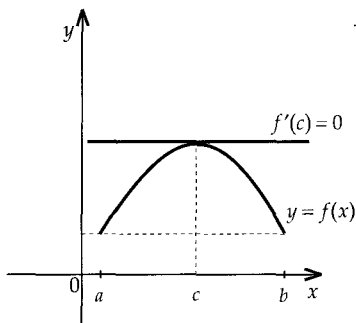


Kąt przecięcia krzywych

Dane są dwie funkcje f i g różniczkowalne, których wykresy przecinają się w punkcie $P = (x_0, y_0)$.

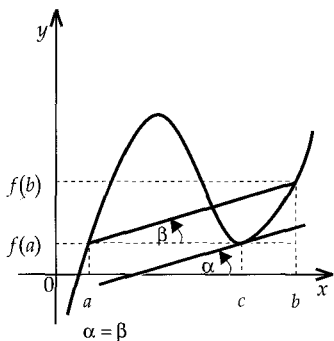
Kątem przecięcia się krzywych nazywamy kąt wypukły między stycznymi do tych krzywych w punkcie ich przecięcia. Jeżeli φ jest kątem ostrym, to

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0)} \right|$$



Twierdzenie Rolle'a

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a; b \rangle$, różniczkowalna w przedziale $(a; b)$ i $f(a) = f(b)$, to istnieje w przedziale $(a; b)$ taki punkt c , że $f'(c) = 0$.



Twierdzenie Lagrange'a (o wartości średniej)

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a; b \rangle$, różniczkowalna w przedziale $(a; b)$, to istnieje w przedziale $(a; b)$ taki punkt c ,

$$\text{że } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Związek między monotonicznością funkcji i znakiem pochodnej

Zakładamy, że funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(a; b)$

Jeżeli $y = f(x)$ jest rosnąca w $(a; b)$, to $\bigwedge_{x \in (a; b)} f'(x) \geq 0$,

jeżeli $y = f(x)$ jest malejąca w $(a; b)$, to $\bigwedge_{x \in (a; b)} f'(x) \leq 0$,

jeżeli $\bigwedge_{x \in (a; b)} f'(x) > 0$, to $y = f(x)$ jest rosnąca w $(a; b)$,

jeżeli $\bigwedge_{x \in (a; b)} f'(x) < 0$, to $y = f(x)$ jest malejąca w $(a; b)$,

jeżeli $\bigwedge_{x \in (a; b)} f'(x) = 0$, to $y = f(x)$ jest stała w $(a; b)$.

Wzór Taylora i Maclaurina

Jeżeli funkcja f jest n -krotnie różniczkowalna w przedziale $(a; b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a; b)$, że prawdziwa jest równość zwana **wzorem Taylora**:

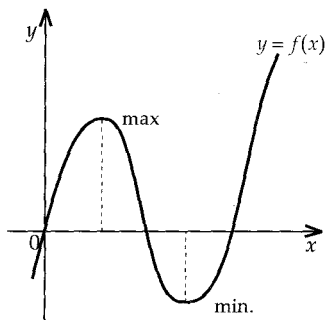
$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (b-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot (b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot (b-a)^n.$$

Przyjmując $b = x$, $a = 0$, otrzymujemy równość zwaną **wzorem Maclaurina**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot x^n,$$

gdzie c leży między 0 i x .

Ekstrema funkcji



Funkcja f określona w otoczeniu punktu x_0 ma w punkcie x_0 **maksimum lokalne**, jeżeli istnieje taki przedział $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, że $f(x) \leq f(x_0)$, dla $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Funkcja f określona w otoczeniu punktu x_0 ma w punkcie x_0 **minimum lokalne**, jeżeli istnieje taki przedział $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, że $f(x) \geq f(x_0)$, dla $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Jeżeli funkcja f osiąga w punkcie x_0 ekstremum lokalne (maksimum lub minimum) i jest w tym punkcie różniczkowalna, to $f'(x_0) = 0$.

Pierwszy warunek wystarczający ekstremum

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0 , przy czym:

	$x < x_0$	x_0	$x > x_0$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	$f(x_0)$	↘

max

	$x < x_0$	x_0	$x > x_0$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$f(x_0)$	↗

min.

$$1^{\circ} \quad f'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x < x_0$$

$$f'(x_0) = 0$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{dla} \quad x > x_0$$

to funkcja f osiąga w punkcie x_0 maksimum lokalne,

$$2^{\circ} \quad f'(x) < 0 \quad \text{dla} \quad x < x_0$$

$$f'(x_0) = 0$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x > x_0$$

to funkcja f osiąga w punkcie x_0 minimum lokalne.

Drugi warunek wystarczający ekstremum

Jeżeli funkcja f ma w pewnym otoczeniu punktu x_0 pochodną f' i drugą pochodną f'' ciągłą w punkcie x_0 , a ponadto $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) \neq 0$, to funkcja f ma w punkcie x_0

maksimum, gdy $f''(x_0) < 0$,

minimum, gdy $f''(x_0) > 0$.

Reguła de l'Hospitala. Wyrażenia nieoznaczone

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w sąsiedztwie punktu x_0 i są spełnione warunki

$$1^\circ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ lub } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$$

$$2^\circ \text{ istnieje granica } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k,$$

$$\text{to istnieje również granica } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

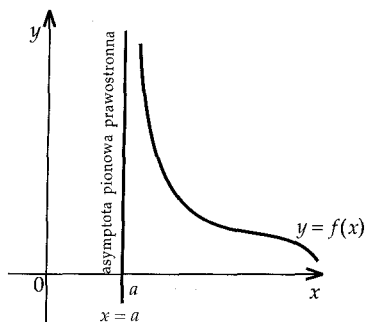
Reguła de l'Hospitala pozostaje prawdziwa w przypadku:

- granic w nieskończoności,
- granic niewłaściwych,
- granic jednostronnych.

Stosuje się tę regułę do wyznaczania nieoznaczoności typów: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

Nieoznaczoności typów: $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ przekształca się tak, aby otrzy-

mać nieoznaczoność typu $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$.

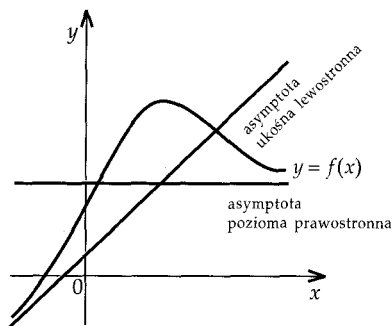
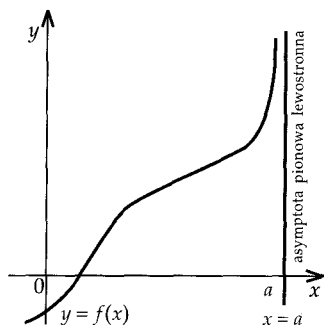


Asymptoty

Prostą o równaniu $x = a$ nazywamy **asymptotą pionową prawostronną** krzywej $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest określona w pewnym przedziale $(a; a + \delta)$

$$\text{i } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \text{ lub } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0 \end{aligned}$$



Prostą o równaniu $x = a$ nazywamy **asymptotą pionową lewostronną** krzywej $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest określona w pewnym przedziale $(a - \delta; a)$

$$\text{i } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \text{ lub } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty.$$

Jeżeli prosta $x = a$ jest jednocześnie asymptotą pionową prawostronną i lewostronną krzywej $y = f(x)$, to nazywamy ją **asymptotą pionową obustronną** tej krzywej.

Prostą o równaniu $y = mx + k$ nazywamy **asymptotą ukośną** (gdy $m \neq 0$) albo **asymptotą poziomą** (gdy $m = 0$) **prawostronną** krzywej $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f określona jest w pewnym przedziale $(a; +\infty)$

$$\text{i } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + k)] = 0.$$

Prostą o równaniu $y = mx + k$ nazywamy **asymptotą ukośną** (gdy $m \neq 0$) albo **asymptotą poziomą** (gdy $m = 0$) **lewostronną** krzywej $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f określona jest w pewnym przedziale $(-\infty; a)$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + k)] = 0$.

Jeżeli prosta $y = mx + k$ jest jednocześnie asymptotą ukośną (poziomą, gdy $m = 0$) prawostronną i lewostronną krzywej $y = f(x)$, to nazywamy ją **asymptotą ukośną obustronną** tej krzywej.

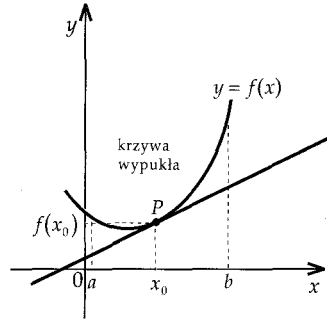
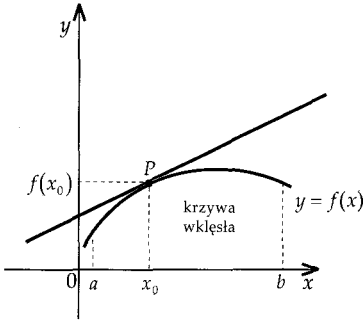
Jeżeli istnieją granice właściwe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = k$

$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ i } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = k \right)$, to prosta $y = mx + k$ jest asymptotą ukośną prawostronną (lewostronną) krzywej $y = f(x)$.

Wklęsłość i wypukłość krzywej. Punkt przegięcia

Załóżmy, że funkcja $y = f(x)$ jest różniczkowalna w przedziale $(a; b)$.

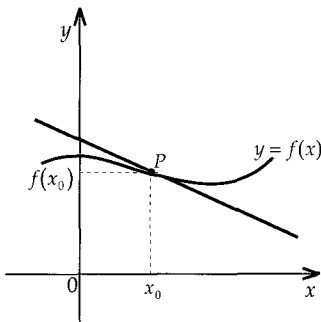
Krzywa $y = f(x)$ jest **wklęsła (wypukła)** na przedziale $(a; b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest położona pod (nad) styczną do niej w punkcie $P = (x_0, f(x_0))$ dla każdego $x_0 \in (a; b)$.



Załóżmy, że funkcja $y = f(x)$ jest dwukrotnie różniczkowalna w przedziale $(a; b)$.

Jeżeli $\bigwedge_{x \in (a; b)} f''(x) > 0$, to krzywa $y = f(x)$ jest wypukła na przedziale $(a; b)$.

Jeżeli $\bigwedge_{x \in (a; b)} f''(x) < 0$, to krzywa $y = f(x)$ jest wklęsła na przedziale $(a; b)$.



Punkt $P = (x_0, f(x_0))$ nazywamy **punktem przegięcia** krzywej $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $\delta > 0$, że krzywa jest wklęsła na przedziale $(x_0 - \delta; x_0)$ i wypukła na przedziale $(x_0; x_0 + \delta)$ lub odwrotnie.

Jeżeli punkt $P = (x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$, i istnieje $f''(x_0)$, to $f''(x_0) = 0$.

Warunek wystarczający punktu przegięcia.

Jeżeli istnieje taka liczba $\delta > 0$, że funkcja f ma drugą pochodną w przedziale $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ oraz

$$1^\circ \quad f''(x) < 0 \quad \text{dla } x \in (x_0 - \delta; x_0)$$

$$f''(x_0) = 0$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{dla } x \in (x_0; x_0 + \delta)$$

albo

$$2^\circ \quad f''(x) > 0 \quad \text{dla } x \in (x_0 - \delta; x_0)$$

$$f''(x_0) = 0$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{dla } x \in (x_0; x_0 + \delta)$$

to punkt $P = (x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$.

Badanie przebiegu zmienności funkcji

Badanie przebiegu funkcji obejmuje:

I. Analizę ogólnych własności funkcji.

1. Wyznaczenie dziedziny funkcji.
2. Wyznaczenie granic funkcji na końcach przedziałów określoności.
3. Wyznaczenie (o ile istnieją) asymptot wykresu funkcji.
4. Wyznaczenie punktów przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych.
5. Określenie szczególnych własności funkcji (parzystość, nieparzystość, okresowość).

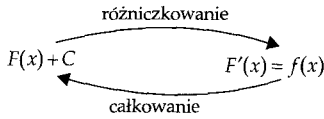
II. Analizę pierwszej pochodnej funkcji.

6. Obliczenie pierwszej pochodnej funkcji.
7. Wyznaczenie miejsc zerowych pierwszej pochodnej i przedziałów, gdzie pochodna jest dodatnia i ujemna (przedziałów monotoniczności funkcji).
8. Wyznaczenie ekstremów funkcji.

III. Analizę drugiej pochodnej funkcji.

9. Obliczenie drugiej pochodnej funkcji.
10. Wyznaczenie miejsc zerowych drugiej pochodnej i przedziałów, gdzie druga pochodna jest dodatnia i ujemna (przedziałów wypukłości i wklęsłości wykresu funkcji).
11. Wyznaczenie punktów przegięcia.
12. Sporządzenie wykresu funkcji.

Całki nieoznaczone i całki oznaczone



Funkcją pierwotną funkcji f , określonej na pewnym przedziale X , nazywamy każdą funkcją F określoną na tym przedziale i spełniającą warunek

$$\bigwedge_{x \in X} F'(x) = f(x).$$

Jeżeli funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale X , to każda funkcja $G(x) = F(x) + c$, gdzie c jest dowolną liczbą rzeczywistą, jest też funkcją pierwotną funkcji f .

Każda funkcja ciągła w przedziale X ma w tym przedziale funkcję pierwotną.

Całką nieoznaczoną funkcji f na przedziale X nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f na tym przedziale i oznaczamy

$$\int f(x) dx.$$

Jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f , to

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Jeżeli funkcje f i g są funkcjami całkowanymi na przedziale X , a k jest liczbą rzeczywistą, to

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

Podstawowe wzory na całki nieoznaczone

Poniższe wzory są prawdziwe w każdym przedziale ciągłości odpowiedniej funkcji podcałkowej.

Funkcje potęgowe

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Funkcje trygonometryczne

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

Funkcje wymierne

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

Funkcje wykładnicze

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$$

Funkcje niewymierne

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + C$$

Całkowanie przez części

Jeżeli f i g mają ciągłe pierwsze pochodne, to

$$\int \overset{f}{x} \cdot \overset{g'}{\cos x} dx = \overset{f}{x} \cdot \overset{g}{\sin x} - \int \overset{f'}{1} \cdot \overset{g}{\sin x} dx = x \cdot \sin x + \cos x + C$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Całkowanie przez podstawienie (zamiannę zmiennych)

Jeżeli $f(x) = g(h(x)) \cdot h'(x)$, gdzie $t = h(x)$ jest funkcją, która ma ciągłą pochodną, to

$$\int f(x) dx = \int g(h(x)) \cdot h'(x) dx = \int g(t) dt$$

$$\int (2x-3)^5 dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x-3 \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{2} t^5 dt = \frac{t^6}{12} + C = \frac{(2x-3)^6}{12} + C$$

w szczególności

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C,$$

$$\int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} \cdot [f(x)]^2 + C.$$

Wzory rekurencyjne na całki niektórych funkcji

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx, \quad n \geq 2$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx, \quad n \geq 2$$

$$\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx$$

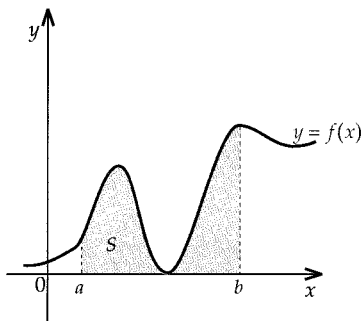
$$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx$$

$$\int (\ln x)^n dx = x \cdot (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$$

Całką oznaczoną funkcji f na przedziale $\langle a; b \rangle$ nazywamy różnicę $F(b) - F(a)$, gdzie F jest funkcją pierwotną funkcji f .

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Wygodnie jest pisać $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$ lub $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$.



Jeżeli f jest funkcją ciągłą i nieujemną na przedziale $\langle a; b \rangle$, to pole figury ograniczonej osią Ox , wykresem funkcji $y = f(x)$ i prostymi $x = a$, $x = b$ wyraża się wzorem

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Podstawowe własności całki oznaczonej

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

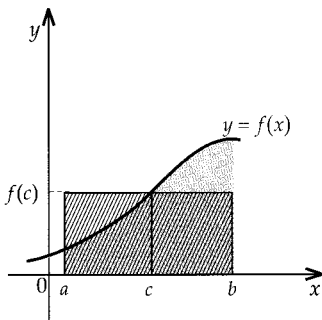
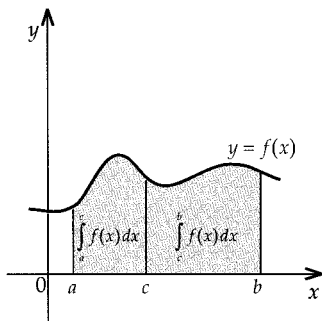
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

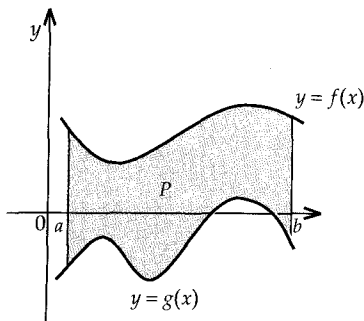
gdzie $a < c < b$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx &= \\ &= [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx \end{aligned}$$

Jeżeli f jest funkcją ciągłą w przedziale $\langle a; b \rangle$, to istnieje taki punkt $c \in (a; b)$, że

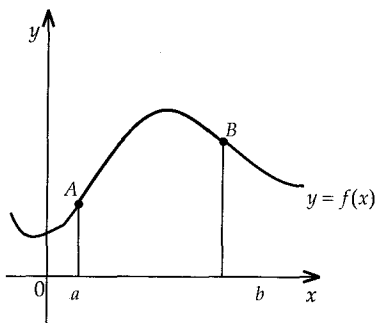
$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c).$$



Geometryczne zastosowanie całki oznaczonej

Pole figury płaskiej

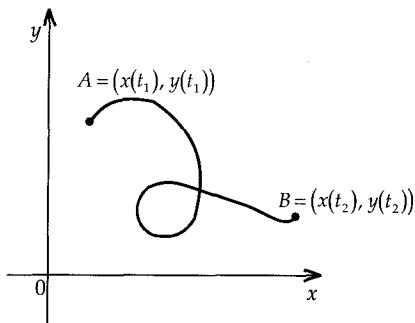
Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w przedziale $\langle a; b \rangle$ i $f(x) \geq g(x)$ dla $x \in \langle a; b \rangle$, to

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$


Długość łuku krzywej

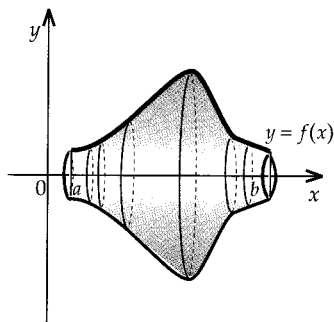
Jeżeli funkcja f ma ciągłą pochodną w przedziale $\langle a; b \rangle$, to

$$L_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$



Jeżeli krzywa określona jest równaniami parametrycznymi: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \langle t_1; t_2 \rangle$, to jej długość wyraża się wzorem

$$L_{AB} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$



Objętość bryły obrotowej

Jeżeli dana jest krzywa $y = f(x)$, gdzie $x \in \langle a; b \rangle$, to obszar ograniczony tą krzywą, osią Ox i prostymi $x = a$ i $x = b$ po obrocie dokoła osi Ox wyznacza bryłę obrotową.

Jej objętość wyraża się wzorem

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Pole powierzchni bryły obrotowej

Jeżeli krzywa $y = f(x)$, gdzie $x \in \langle a; b \rangle$ i $f(x) \geq 0$, obraca się dokoła osi Ox , i f ma ciągłą pochodną w przedziale $\langle a; b \rangle$, to pole powstałej powierzchni obrotowej wyraża się wzorem

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Jednostką urojoną nazywamy taką liczbę i , że $i^2 = -1$.

Liczby postaci $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$, nazywamy **liczbami zespolonymi**.

Zbiór liczb zespolonych oznaczamy przez \mathbf{Z} (czasem \mathbf{C}). W zbiorze liczb zespolonych wykonalne są cztery podstawowe działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie (z wyjątkiem dzielenia przez zero).

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

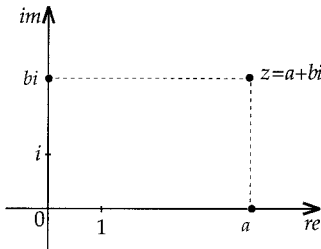
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \quad (c + di \neq 0)$$

Jeżeli $z = a + bi$, to a nazywamy **częścią rzeczywistą**, a b – **częścią urojoną** liczby zespolonej z i oznaczamy: $a = \operatorname{rez}$, $b = \operatorname{imz}$.

Dwie liczby zespolone są równe, jeżeli mają takie same części rzeczywiste i urojone

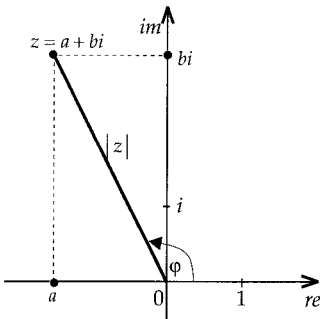
$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$



Liczby zespolone możemy interpretować jako punkty płaszczyzny.

Liczbie $z = a + bi$ odpowiada wzajemnie jednoznacznie punkt (a, b) .

Płaszczyznę taką nazywamy **płaszczyzną Gaussa**.



Modułem liczby zespolonej $z = a + bi$

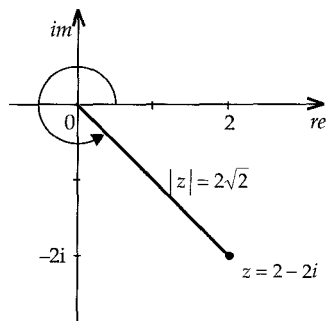
nazywamy liczbę $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Własności modułu liczby zespolonej:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \text{ jeżeli } z_2 \neq 0$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$



$$2 - 2i = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

Argumentem liczby zespolonej $z = a + bi \neq 0$ nazywamy taki kąt φ , że

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} \wedge \sin \varphi = \frac{b}{|z|}.$$

Piszemy wtedy $\varphi = \arg z$.

Jeżeli $0 \leq \varphi < 2\pi$, to φ nazywamy **argumentem głównym** liczby z i piszemy

$$\varphi = \text{Arg } z.$$

Liczbę $z = a + bi$ możemy przedstawić w postaci $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, którą nazywamy **postacią trygonometryczną** liczby zespolonej z .

Jeżeli

$$z_1 = |z_1| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

$$z_2 = |z_2| \cdot (\cos \psi + i \cdot \sin \psi),$$

to

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi - \psi) + i \cdot \sin(\varphi - \psi)).$$

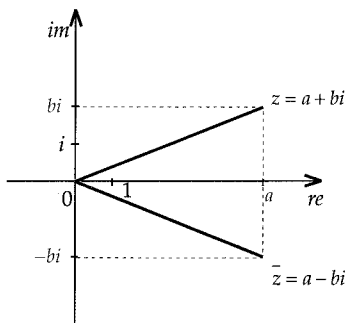
Wzór Moivre'a

Jeżeli $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, to $z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$.

Pierwiastkiem n -tego stopnia ($n \in N_+$) z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w , że $w^n = z$.

Jeżeli $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \neq 0$ i $n \in N_+$, to istnieje dokładnie n różnych pierwiastków n -tego stopnia z liczby z :

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \text{ gdzie } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$



Liczbą sprzężoną z liczbą $z = a + bi$ nazywamy liczbę $\bar{z} = a - bi$.

Własności sprzężenia:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{(\bar{z})} = z$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow \operatorname{im} z = 0$$

Planimetria (geometria płaszczyzny)

Punkt, prosta, płaszczyzna są pojęciami pierwotnymi.

Figurą nazywamy dowolny podzbiór płaszczyzny.

Prosta jest figurą, do której należy nieskończenie wiele punktów. Każdy punkt płaszczyzny należy do nieskończenie wielu prostych. Przez dwa różne punkty przechodzi zawsze tylko jedna prosta.

Prosta a **przecina** prostą b ($a \nparallel b$), jeżeli zbiór $a \cap b$ jest zbiorem jednoelementowym.

$$a \nparallel b \Leftrightarrow \bigvee_P a \cap b = \{P\}.$$

Prosta a jest **równoległa** do prostej b ($a \parallel b$), jeżeli prosta a nie przecina prostej b .

$$a \parallel b \Leftrightarrow a \cap b = \emptyset \vee a = b.$$

Własności relacji równoległości prostych:

$$a \parallel a$$

$$a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$$

$$a \parallel b \wedge b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$$

Aksjomat Euklidesa. Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do danej prostej.

Jeżeli proste są równoległe, to mówimy, że mają ten sam **kierunek**.

Mówimy, że na płaszczyźnie została określona **odległość**, jeżeli każdej parze (A, B) punktów płaszczyzny została przyporządkowana liczba $|AB|$ – zwana odległością punktów A, B – tak, że spełnione są warunki:

$$1^\circ \bigwedge_{A,B} |AB| = 0 \Leftrightarrow A = B$$

$$2^\circ \bigwedge_{A,B} |AB| = |BA|$$

$$3^\circ \bigwedge_{A,B,C} |AC| \leq |AB| + |BC|$$

Oczywiście spełniony jest warunek $\bigwedge_{A,B} |AB| \geq 0$.

Na płaszczyźnie możemy określić taką odległość, że spełnione są warunki:

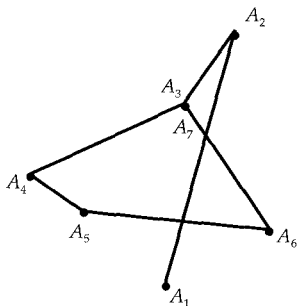
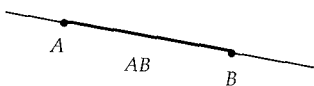
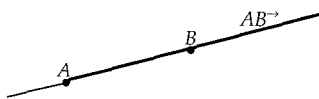
a) Punkty A, B, C są **współliniowe** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|AC| = |AB| + |BC| \vee |AC| = \left| |AB| - |BC| \right|.$$

b) Punkty A, B, C są **niewspółliniowe** wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\left| |AB| - |BC| \right| < |AC| < |AB| + |BC|.$$

Półprosta, odcinek, łamana



łamana $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7$

Półprostą $AB \rightarrow$ nazywamy zbiór złożony z punktu A oraz tych punktów prostej AB , które następują po A w zwrocie od A do B . Punkt A nazywamy **początkiem** półprostej.

Odcinkiem AB nazywamy zbiór złożony z punktów A i B oraz wszystkich punktów prostej AB leżących między punktami A i B .

Odległość $|AB|$ końców A, B odcinka nazywamy **długością odcinka**.

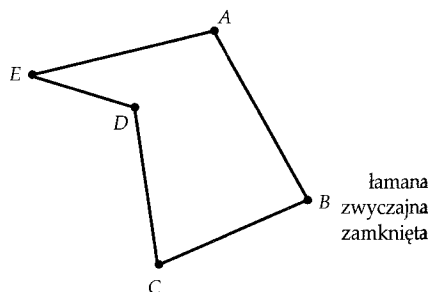
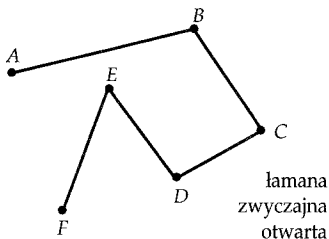
Jeżeli końce odcinka pokrywają się, to odcinek nazywamy **odcinkiem zerowym**.

Jeżeli dany jest ciąg punktów A_1, A_2, \dots, A_n , to ciąg odcinków $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n$ nazywamy **łańcuchem odcinków**.

Jeżeli dwa dowolne odcinki łańcucha odcinków mają co najwyżej jeden punkt wspólny, to sumę odcinków tego łańcucha nazywamy **łamaną** $A_1 A_2 \dots A_n$.

Łamaną nazywamy **zwyczajną**, jeżeli:

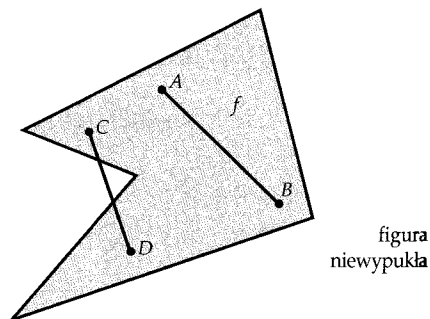
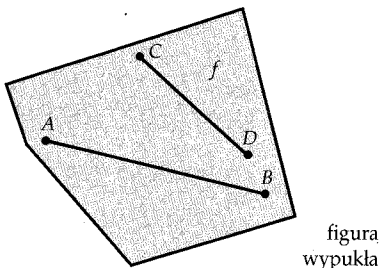
- 1° dwa odcinki mające wspólny koniec nie zawierają się w jednej prostej,
- 2° dwa odcinki nie mające wspólnego końca są rozłączne,
- 3° koniec dowolnego odcinka może być końcem tylko jeszcze jednego odcinka.



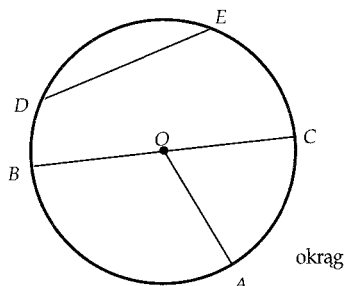
Figurę f nazywamy **wypukłą**, jeżeli dowolny odcinek, którego końce należą do tej figury, zawiera się w tej figurze.

$$f\text{-wypukła} \Leftrightarrow \bigwedge_{A, B \in f} AB \subset f.$$

Część wspólna figur wypukłych jest figurą wypukłą.

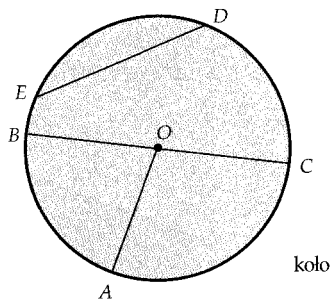


Okrąg i koło. Figury ograniczone, nieograniczone, otwarte, domknięte

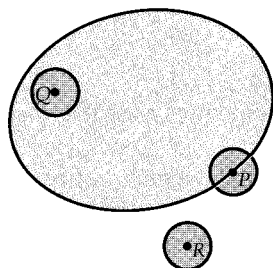


OA – promień
BC – średnica
DE – cięciwa

okrąg



koło



Okręgiem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r .

$$o(O, r) = \{X : |OX| = r\}$$

Kołem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O nie jest większa od r .

$$k(O, r) = \{X : |OX| \leq r\}$$

Figurę nazywamy **ograniczoną**, jeżeli zawiera się w pewnym kole.

Jeżeli figura nie zawiera się w żadnym kole, to nazywamy ją **nieograniczoną**.

Punkt P nazywamy **brzegowym** figury f , jeżeli w każdym kole o środku P znajdują się punkty należące do figury f i punkty do tej figury nie należące.

Punkt Q nazywamy **wewnętrzny** figury f , jeżeli istnieje koło o środku Q zawierające się w figurze f .

Punkt R nazywamy **zewnątrzny** figury f , jeżeli istnieje koło o środku R rozłączne z figurą f .

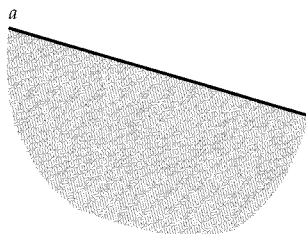
Figurę nazywamy **domkniętą**, jeżeli zawiera wszystkie swoje punkty brzegowe.

Figurę nazywamy **otwartą**, jeżeli nie zawiera żadnego swojego punktu brzegowego.

Wielokąty i kąty

Obszarem nazywamy figurę otwartą, której dwa dowolne punkty można połączyć łamaną zawartą w tej figurze.

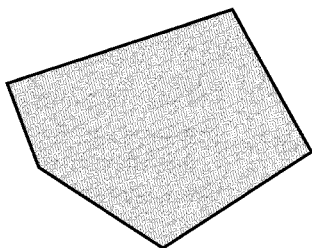
Mówimy, że figura f **rozcina płaszczyznę**, jeżeli jest wspólnym brzegiem dwóch obszarów rozłącznych, które wraz z f dają w sumie całą płaszczyznę.



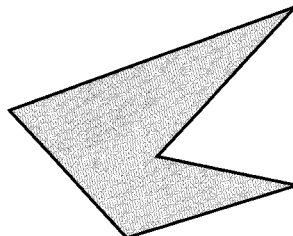
Półpłaszczyzna o krawędzi a .

Prosta rozcina płaszczyznę na dwa obszary wypukłe i nieograniczone (zwane **stronami** tej prostej). Sumę prostej a i jednej ze stron tej prostej nazywamy **półpłaszczyzną** o krawędzi a .

Łamana zwyczajna zamknięta rozcina płaszczyznę na dwa obszary, z których jeden jest ograniczony. Sumę łamanej zwyczajnej zamkniętej i obszaru ograniczonego wyciętego z płaszczyzny przez tę łamaną nazywamy **wielokątem**.



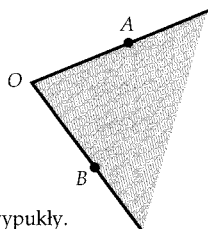
Wielokąt wypukły.



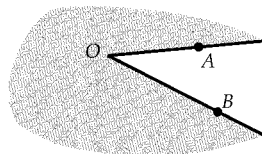
Wielokąt niewypukły.

Suma dwóch różnych półprostych o wspólnym początku rozcina płaszczyznę na dwa obszary nieograniczone.

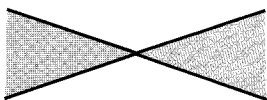
Kątem nazywamy sumę dwóch półprostych o wspólnym początku i jednego z obszarów wyciętych z płaszczyzny przez te dwie półproste. Półproste te nazywamy **ramionami kąta**, a ich wspólny początek – **wierzchołkiem kąta**.



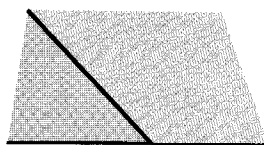
Kąt wypukły.



Kąt wklęsły.



Kąty wierzchołkowe.

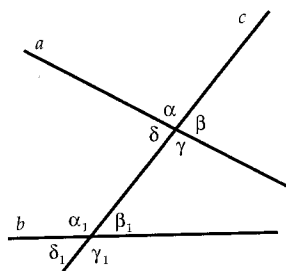


Kąty przyległe.

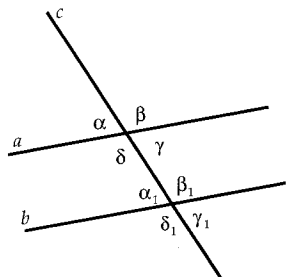
Kątem wierzchołkowym do danego kąta wypukłego nazywamy taki kąt wypukły, którego ramiona są półprostymi uzupełniającymi ramiona danego kąta.

Kąty wypukłe nazywamy **przyległymi**, jeżeli mają jedno ramię wspólne, a drugie ich ramiona są półprostymi uzupełniającymi się.

Jeżeli dwie różne proste a i b przetniemy trzecią prostą c , to powstają pary kątów wypukłych:



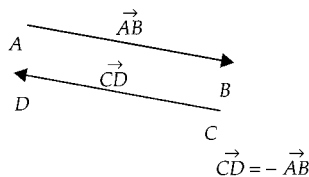
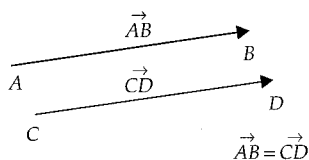
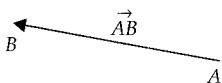
- $(\sphericalangle \alpha, \sphericalangle \gamma_1), (\sphericalangle \beta, \sphericalangle \delta_1)$ — kąty naprzemianległe zewnętrzne,
- $(\sphericalangle \delta, \sphericalangle \beta_1), (\sphericalangle \gamma, \sphericalangle \alpha_1)$ — kąty naprzemianległe wewnętrzne,
- $(\sphericalangle \alpha, \sphericalangle \delta_1), (\sphericalangle \beta, \sphericalangle \gamma_1)$ — kąty jednostronne zewnętrzne,
- $(\sphericalangle \delta, \sphericalangle \alpha_1), (\sphericalangle \gamma, \sphericalangle \beta_1)$ — kąty jednostronne wewnętrzne,
- $(\sphericalangle \alpha, \sphericalangle \alpha_1), (\sphericalangle \beta, \sphericalangle \beta_1)$ } — kąty odpowiadające.
- $(\sphericalangle \gamma, \sphericalangle \gamma_1), (\sphericalangle \delta, \sphericalangle \delta_1)$ }



Jeżeli $a \parallel b$, to prawdziwe są zależności:

$\alpha = \gamma_1$	$\beta = \beta_1$
$\beta = \delta_1$	$\gamma = \gamma_1$
$\alpha = \alpha_1$	$\alpha + \delta_1 = \beta + \gamma_1 = 180^\circ$
$\delta = \delta_1$	$\delta + \alpha_1 = \gamma + \beta_1 = 180^\circ$

Wektory



Wektorem \vec{AB} nazywamy uporządkowaną parę punktów (A, B) . Punkt A nazywamy **początkiem wektora**, a punkt B – **końcem wektora**.

Jeżeli $A = B$, wektor nazywamy **wektorem zerowym** i oznaczamy $\vec{0}$.

Długością wektora \vec{AB} (ozn. $|\vec{AB}|$) nazywamy odległość punktów A i B .

Kierunkiem wektora \vec{AB} nazywamy kierunek prostej AB .

Zwrotem wektora \vec{AB} nazywamy zwrot prostej AB , w którym punkt A poprzedza punkt B .

Dwa niezerowe **wektory** są **równe**, jeżeli mają ten sam kierunek, ten sam zwrot i tę samą długość.

Wektorem przeciwnym do wektora \vec{AB} (ozn. $-\vec{AB}$) nazywamy każdy wektor równy wektorowi \vec{BA} .

Własności relacji równości wektorów

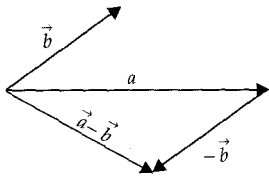
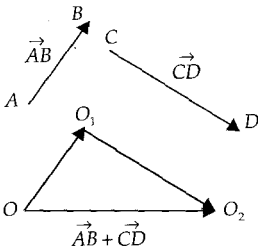
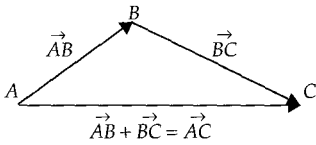
$$\vec{a} = \vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{b} = \vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{a} = \vec{c}$$

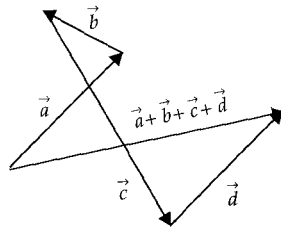
$$\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow \text{środek } BC = \text{środek } AD$$

$$\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{BD}$$



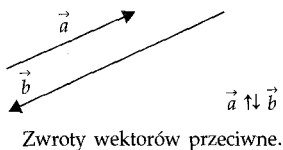
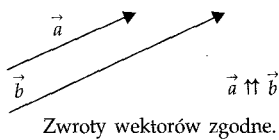
Sumą wektorów \vec{AB} i \vec{BC} nazywamy wektor \vec{AC} .

Sumą wektorów \vec{AB} i \vec{CD} zaczepioną w punkcie O nazywamy sumę wektorów \vec{OO}_1 i $\vec{O}_1\vec{O}_2$ takich, że $\vec{OO}_1 = \vec{AB}$ i $\vec{O}_1\vec{O}_2 = \vec{CD}$. Podobnie określa się sumę większej liczby wektorów.



Różnicą wektorów \vec{a} i \vec{b} nazywamy sumę $\vec{a} + (-\vec{b})$.

Własności sumy wektorów



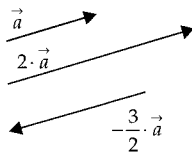
$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{a} \not\parallel \vec{b} \Rightarrow \left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

$$\vec{a} \uparrow \vec{b} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

$$\vec{a} \downarrow \vec{b} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right|$$



Iloczynem wektora \vec{a} przez liczbę rzeczywistą λ nazywamy taki wektor \vec{b} , że

$$1^\circ |\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|,$$

$$2^\circ \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a} \text{ jeżeli } \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \lambda > 0,$$

$$3^\circ \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a} \text{ jeżeli } \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \lambda < 0.$$

Jeżeli $\lambda = 0 \vee \vec{a} = \vec{0}$, to $\vec{b} = \vec{0}$.

Własności iloczynu wektora przez liczbę

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{a} \qquad \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \vec{a}) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \vec{a}$$

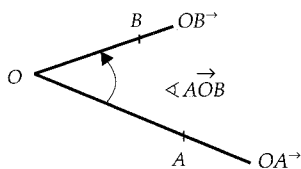
$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$$

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \qquad -1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$$

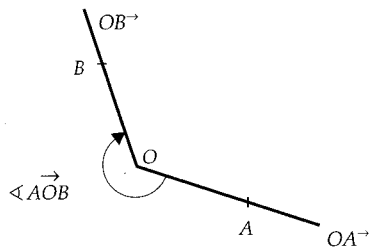
$$\text{Jeżeli } \vec{b} \neq \vec{0}, \text{ to } \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \bigvee_{\lambda \in \mathbb{R}} \vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$$

Jeżeli $\vec{a} = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n$, to mówimy, że wektor \vec{a} jest **kombinacją liniową** wektorów $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

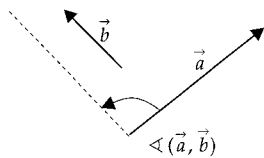
Kątem skierowanym nazywamy uporządkowaną parę półprostych o wspólnym początku. Początek tych półprostych nazywamy **wierzchołkiem**, pierwszą z tych półprostych – **ramieniem początkowym**, drugą – **ramieniem końcowym**.



Kąt skierowany dodatni.



Kąt skierowany ujemny.



Niech \vec{a} i \vec{b} będą wektorami niezerowymi.

Kątem pary wektorów \vec{a} i \vec{b} ,

(ozn. $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$)

nazywamy kąt skierowany, którego wierzchołkiem jest początek wektora \vec{a} , ramię początkowe ma kierunek i zwrot wektora \vec{a} , a ramię końcowe – kierunek i zwrot wektora \vec{b} .

Iloczynem skalarnym $\vec{a} \circ \vec{b}$ wektorów \vec{a} i \vec{b} nazywamy:

1° liczbę 0, gdy $\vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0}$,

2° liczbę $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, gdy $\vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \neq \vec{0}$.

Własności iloczynu skalarnego wektorów

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}$$

$$(\lambda \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = \vec{a} \circ (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$$

$$\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \vee \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0}$$

$$|\vec{a} \circ \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$|\vec{a} \circ \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Przekształcenia geometryczne na płaszczyźnie

Jeżeli każdemu punktowi figury f został przyporządkowany dokładnie jeden punkt figury f_1 , to mówimy, że zostało określone **przekształcenie** figury f w figurę f_1 (zobacz określenie funkcji).

Jeżeli $P(f) = f_1$, to mówimy, że figura f_1 jest obrazem figury f w przekształceniu P . Punkt A nazywamy **punktem stałym** przekształcenia P figury f w figurę f_1 , jeżeli $P(A) = A$.

Składanie przekształceń (tak jak funkcji) jest łączne i na ogół nie jest przemienne.

Przekształcenie P figury f na figurę f nazywamy **tożsamościowym**, jeżeli $P(A) = A$ dla każdego punktu A .

Przekształcenia izometryczne

Przekształcenie P płaszczyzny na płaszczyznę nazywamy **izometrią**, jeżeli dla dowolnych punktów odległość ich obrazów jest równa odległości tych punktów.

$$P\text{-izometria} \Leftrightarrow \bigwedge_{A, B} P(A) = A' \wedge P(B) = B' \Rightarrow |AB| = |A'B'|$$

Własności izometrii:

- izometria jest przekształceniem różnowartościowym,
- do każdej izometrii istnieje przekształcenie odwrotne, które jest izometrią,
- złożenie izometrii jest izometrią,
- izometria zachowuje współliniowość punktów, ich uporządkowanie na prostej oraz wypukłość figury; zachowuje również równoległość i prostopadłość prostych,
- jeżeli izometria ma dwa różne punkty stałe, to każdy punkt prostej wyznaczonej przez te punkty jest punktem stałym tej izometrii,
- jeżeli izometria ma trzy niewspółliniowe punkty stałe, to jest przekształceniem tożsamościowym.

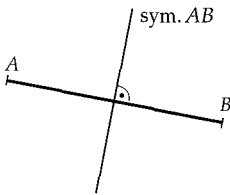
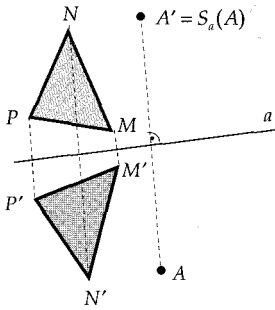
Jeżeli istnieje izometria przekształcająca figurę f na figurę g , to mówimy, że figury f i g są **przystające** i piszemy $f \equiv g$.

Własności relacji przystawania figur:

$$1^\circ f \equiv f$$

$$2^\circ f \equiv g \Rightarrow g \equiv f$$

$$3^\circ f \equiv g \wedge g \equiv h \Rightarrow f \equiv h$$



Symetrią osiową względem prostej a (ozn. S_a) nazywamy przekształcenie płaszczyzny na płaszczyznę, izometryczne, nie-
tożsamościowe, w którym wszystkie punkty prostej a są punktami stałymi.

Symetria osiowa jest **inwolucją**, tzn. takim przekształceniem, że $S_a^{-1} = S_a$.

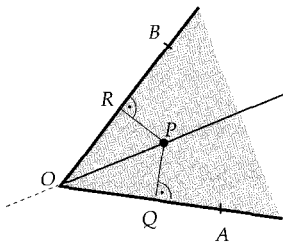
Jeżeli istnieje taka prosta a , że $S_a(f) = f$, to figurę f nazywamy **osiowosymetryczną**, a prostą a – **osią symetrii** figury f . Oś symetrii odcinka, do niego prostopadła nazywa się **symetralną odcinka**. Symetralna odcinka jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny jednakowo oddalonych od końców odcinka.

Jeżeli proste a i b są różne i każda z nich jest osią symetrii drugiej, to mówimy, że proste a i b są **prostopadłe**.

$$a \perp b \Leftrightarrow (a \neq b \wedge S_a(b) = b)$$

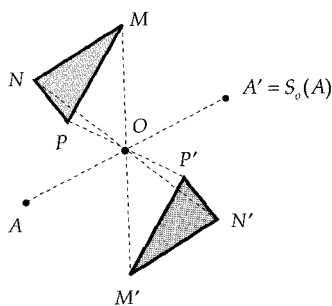
- $(a \perp b \wedge b \parallel c) \Rightarrow a \perp c$
- $(a \perp b \wedge b \perp c) \Rightarrow a \parallel c$

Kąty wypukłe utworzone przez proste prostopadłe nazywamy **kątaami prostymi**.



$$|PQ| = |PR|$$

Część wspólną kąta i jego osi symetrii nazywamy **dwusieczną kąta**. Dwusieczna kąta dzieli ten kąt na dwa kąty przystające. Dwusieczna kąta wypukłego (różnego od półpełnego) jest zbiorem wszystkich punktów tego kąta jednakowo oddalonych od jego ramion.

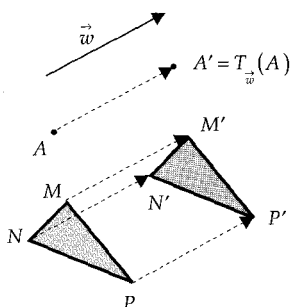


Niech O będzie ustalonym punktem płaszczyzny. Przekształcenie płaszczyzny na płaszczyznę, które punktowi A przyporządkowuje taki punkt A' , że O jest środkiem odcinka AA' nazywamy **symetrią środkową** o środku O .

$$S_O(A) = A' \Leftrightarrow O = \text{śr. } AA'$$

Symetria środkowa jest izometrią i inwolucją.

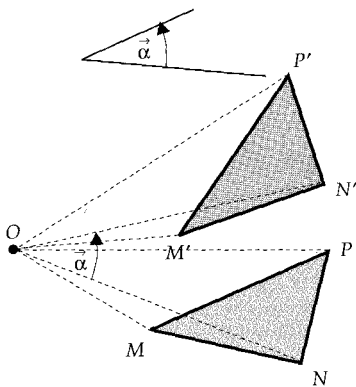
Jeżeli istnieje taki punkt O , że $S_O(f) = f$, to figurę f nazywamy **środkowosymetryczną**, a punkt O – **środkiem symetrii** figury f .



Translacja o wektor \vec{w} jest to przekształcenie płaszczyzny na płaszczyznę, w którym obrazem punktu A jest taki punkt A' , że $\vec{AA'} = \vec{w}$.

$$T_{\vec{w}}(A) = A' \Leftrightarrow \vec{AA'} = \vec{w}$$

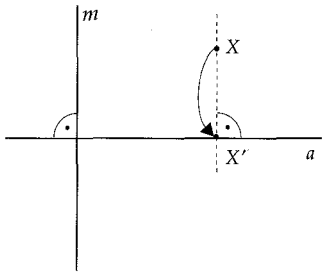
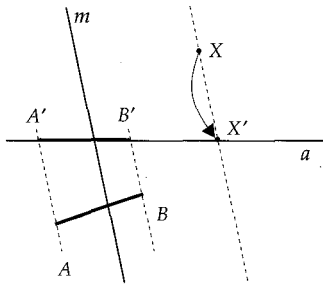
Translacja jest przekształceniem izometrycznym. Przekształceniem odwrotnym do translacji o wektor \vec{w} jest translacja o wektor $-\vec{w}$. Złożeniem translacji o wektor \vec{w}_1 z translacją o wektor \vec{w}_2 jest translacja o wektor $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$.



Obrót dookoła punktu O o kąt skierowany $\vec{\alpha}$ jest to przekształcenie płaszczyzny, w którym punkt O (środek obrotu) jest punktem stałym, a obrazem punktu $A \neq O$ jest taki punkt A' , że

$$|OA'| = |OA| \wedge \sphericalangle AOA' = \vec{\alpha}.$$

Obrót jest izometrią. Przekształceniem odwrotnym do obrotu o środku O i kącie $\vec{\alpha}$ jest obrót o środku O i kącie $-\vec{\alpha}$. Złożeniem dwóch obrotów o środku O i kątach $\vec{\alpha}$ i $\vec{\beta}$ jest obrót o środku O i kącie $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

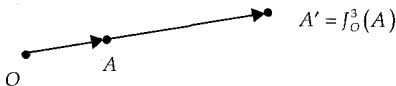


Przekształcenia nieizometryczne

Rzutem równoległym na prostą a w kierunku prostej $m \parallel a$ nazywamy przekształcenie płaszczyzny na prostą a określone następująco:

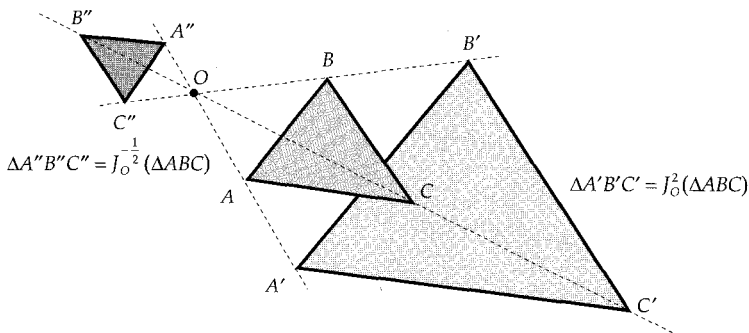
jeżeli X jest dowolnym punktem płaszczyzny, to przez punkt X prowadzimy prostą $m' \parallel m$ i punktowi X przyporządkowujemy punkt X' przecięcia prostej m' z prostą a .

Rzut równoległy w kierunku prostopadłym nazywamy **rzutem prostokątnym**.



Jednokładnością o środku O i skali $s \neq 0$ nazywamy przekształcenie płaszczyzny na płaszczyznę, które punktowi A przyporządkowuje taki punkt A' , że $\vec{OA}' = s \cdot \vec{OA}$.

$$J_O^s(A) = A' \Leftrightarrow \vec{OA}' = s \cdot \vec{OA}$$



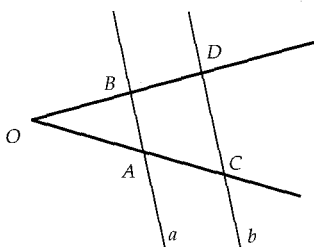
Własności jednokładności:

$$J_O^1 = id \quad J_O^{-1} = S_O$$

$$J_O^{S_1} \circ J_O^{S_2} = J_O^{S_1 \cdot S_2} \quad (J_O^S)^{-1} = J_O^{\frac{1}{S}}$$

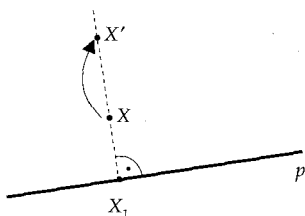
- jednokładność zachowuje współliniowość punktów,
- w jednokładności obrazem prostej jest prosta do niej równoległa,
- w jednokładności obrazem okręgu $o(A, r)$ jest okrąg $o(A', |s| \cdot r)$,
- jednokładność zachowuje stosunek długości odcinków,
- jednokładność zmienia odległość punktów w skali $|s|$,
- w jednokładności obrazem kąta jest kąt do niego przystający.

Dwie figury nazywamy **jednokładnymi**, jeżeli istnieje jednokładność, która przekształca jedną figurę na drugą.



$$a \parallel b \Rightarrow \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AC|}{|BD|}$$

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AC|}{|BD|} \Rightarrow a \parallel b$$



Twierdzenie Talesa. Jeżeli ramiona kąta przetniemy dwiema prostymi równoległymi a i b , to odcinki wyznaczone na ramionach kąta przez te proste są proporcjonalne.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa. Jeżeli ramiona kąta przetniemy dwiema prostymi a i b oraz odcinki wyznaczone na ramionach kąta przez te proste a i b są proporcjonalne, to proste a i b są równoległe.

Powinowactwo prostokątne o osi p i skali $s \neq 0$ jest to przekształcenie P_p^s płaszczyzny na płaszczyznę, w którym obrazem punktu X jest taki punkt X' , że

$$\vec{X_1 X'} = s \cdot \vec{X_1 X},$$

gdzie X_1 jest rzutem prostokątnym punktu X na oś p .

$$P_p^s(X) = X' \Leftrightarrow \vec{X_1 X'} = s \cdot \vec{X_1 X}$$

Podobieństwem o skali $s > 0$ nazywamy przekształcenie P płaszczyzny na płaszczyznę o takiej własności, że jeśli $X' = P(X)$ i $Y' = P(Y)$, to $|X'Y'| = s \cdot |XY|$.

Podobieństwo zachowuje stosunek długości odcinków. Każde podobieństwo jest złożeniem pewnej jednokładności i pewnej izometrii.

Mówimy, że figura f jest **podobna** do figury g (ozn. $f \sim g$), jeżeli istnieje podobieństwo, które przekształca figurę f na figurę g .

Własności relacji podobieństwa figur:

$$f \sim f$$

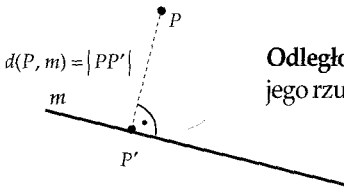
$$f \sim g \Rightarrow g \sim f$$

$$f \sim g \wedge g \sim h \Rightarrow f \sim h$$

Wzajemne położenie prostej i okręgu oraz dwóch okręgów

Odległością punktu P od figury niepustej f (ozn. $d(P, f)$) jest kres dolny zbioru odległości punktu P od punktów figury f .

$$d(P, f) = \inf \{ |PX| : X \in f \}$$

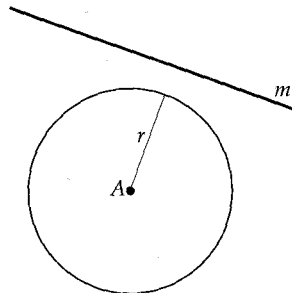
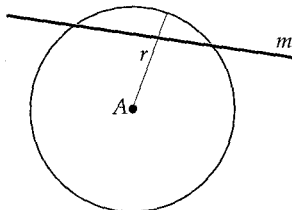
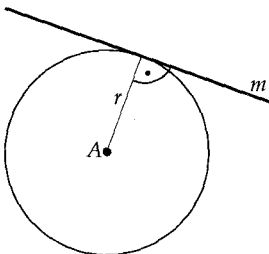


Odległość punktu od prostej jest równa odległości tego punktu od jego rzutu prostokątnego na tę prostą.

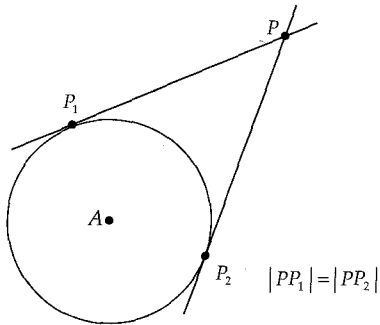
prosta m jest **styczną** do okręgu $o(A, r) \Leftrightarrow d(A, m) = r$

prosta m jest **sieczną** okręgu $o(A, r) \Leftrightarrow d(A, m) < r$

prosta m jest **zewnętrzna** okręgu $o(A, r) \Leftrightarrow d(A, m) > r$



Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia okręgu poprowadzonego do punktu styczności.

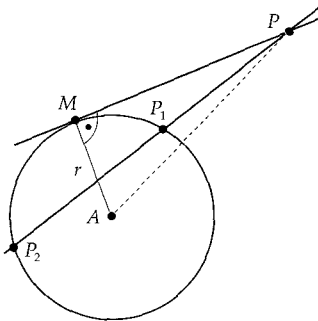


Niech P będzie punktem zewnętrznym koła, którego brzegiem jest okrąg $o(A, r)$. Jeżeli przez punkt P poprowadzimy styczne do tego okręgu, to odcinki łączące ten punkt z punktami styczności są równe.

Jeżeli przez punkt P poprowadzimy styczną do tego okręgu w punkcie M i sieczną przecinającą ten okrąg w punktach P_1 i P_2 , to

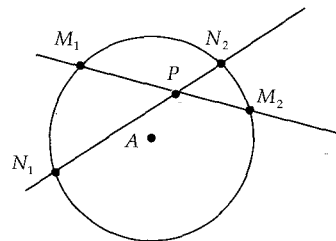
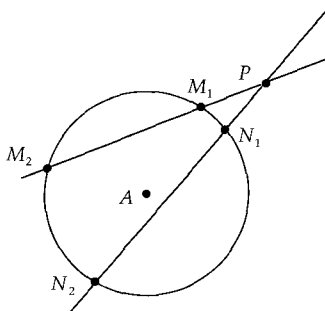
$$|PP_1| \cdot |PP_2| = |PM|^2 = |AP|^2 - r^2.$$

Liczbę $|AP|^2 - r^2$ nazywamy **potęgą punktu P względem okręgu $o(A, r)$** .



Jeżeli przez punkt P nie należący do okręgu $o(A, r)$ poprowadzimy dwie sieczne przecinające ten okrąg odpowiednio w punktach M_1, M_2 i N_1, N_2 , to

$$|PM_1| \cdot |PM_2| = |PN_1| \cdot |PN_2|.$$



Niech będą dane dwa różne okręgi $o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$.

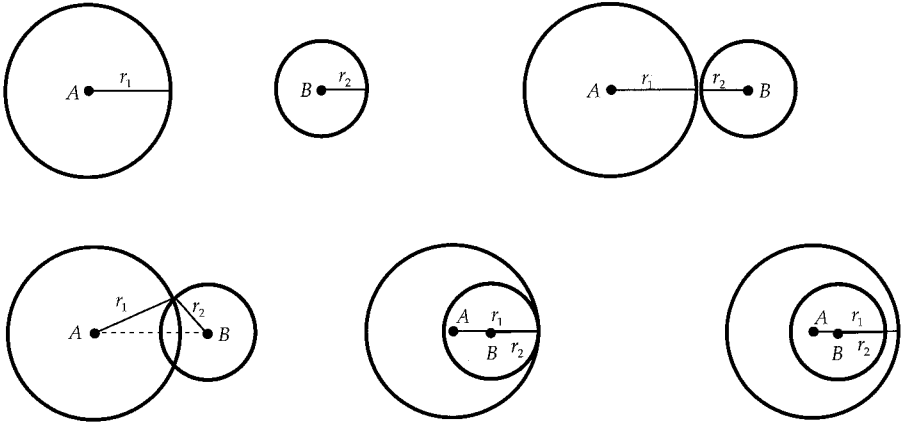
$o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$ są **wzajemnie zewnętrzne** $\Leftrightarrow |AB| > r_1 + r_2$

$o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$ są **styczne zewnętrznie** $\Leftrightarrow |AB| = r_1 + r_2$

$o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$ są **przecinające się** $\Leftrightarrow |r_1 - r_2| < |AB| < r_1 + r_2$

$o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$ są **styczne wewnętrznie** $\Leftrightarrow |AB| = |r_1 - r_2|$

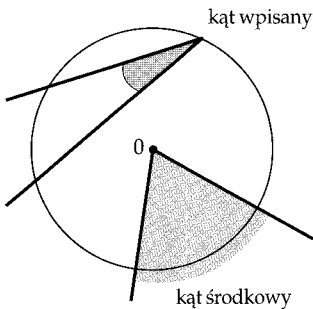
$o(B, r_2) \subset k(A, r_1) \Leftrightarrow |AB| \leq r_1 - r_2$

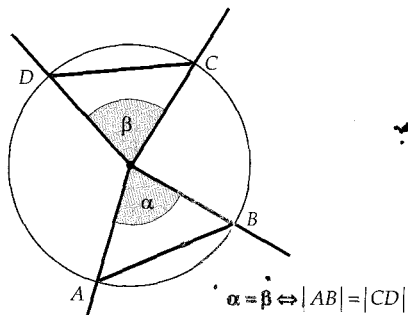


Kąty w kole

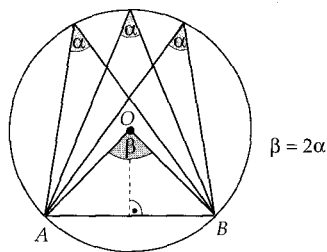
Kątem środkowym nazywamy kąt, którego wierzchołek jest środkiem danego koła.

Kątem wpisanym w okrąg nazywamy kąt wypukły, którego wierzchołkiem jest punkt P okręgu, a ramionami półproste zawierające cięciwy przecinające się w punkcie P .

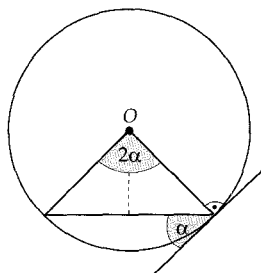




W okręgu równym kątom środkowym odpowiadają równe cięciwy.



Kąty wpisane w okrąg i oparte na tym samym łuku są równe i każdy z nich jest równy połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku co kąty wpisane.



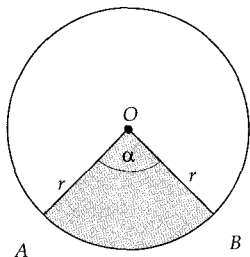
Kąt ostry między cięciwą a styczną przechodzącą przez koniec tej cięciwy jest równy połowie kąta środkowego odpowiadającego tej cięciwie.

Koło i jego części

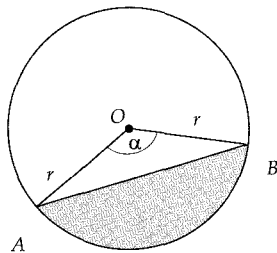
Pole P koła i długość L okręgu o promieniu r obliczamy według wzorów:

$$P = \pi r^2$$

$$L = 2\pi r$$



Wycinek koła o kącie środkowym α .



Odcinek koła o kącie środkowym α .

Pole części koła

Część koła	Miara kąta środkowego	
	α°	φ rad
wycinek	$\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360}$	$\frac{r^2}{2} \cdot \varphi$
odcinek	$\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360} - \frac{r^2}{2} \cdot \sin \alpha$	$\frac{r^2}{2} \cdot \varphi - \frac{r^2}{2} \cdot \sin \varphi$

Długość łuku \widehat{AB} , na którym oparty jest kąt środkowy α° , obliczamy według wzoru

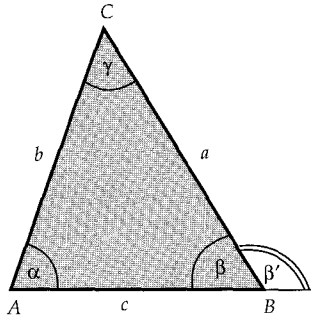
$$L_{AB} = \pi r \cdot \frac{\alpha}{180}$$

Jeżeli kąt środkowy ma φ radianów, to

$$L_{AB} = r \cdot \varphi$$

Wielokąty

Trójkąty



Trójkątem nazywamy wielokąt o trzech bokach.

Jeden z tych boków – wybrany dowolnie – nazywamy **podstawą** trójkąta, a dwa pozostałe – **ramionami** trójkąta.

Jeżeli trójkąt ma dwa boki równe, nazywamy go **równoramiennym**, jeżeli wszystkie boki trójkąta są równe, to trójkąt nazywamy **równobocznym**.

Podstawowe związki w dowolnym trójkącie:

α, β, γ – kąty wewnętrzne trójkąta

β' – kąt zewnętrzny trójkąta przyległy do kąta β

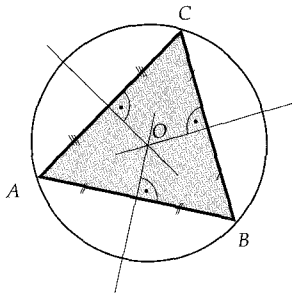
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta + \beta' = 180^\circ, \beta' = \alpha + \gamma$$

$$a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

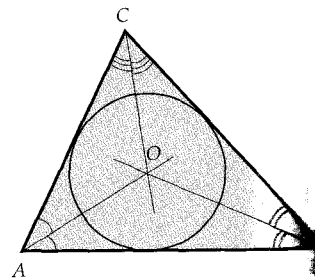
$$a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$$

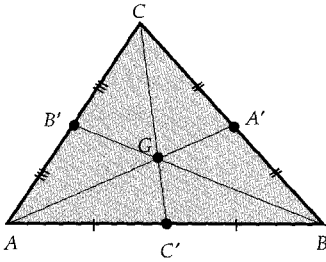
$$|a - b| < c < a + b \wedge |b - c| < a < b + c \wedge |c - a| < b < c + a$$



Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest **środkiem okręgu opisanego** na tym trójkącie.

Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest **środkiem okręgu wpisanego** w ten trójkąt.



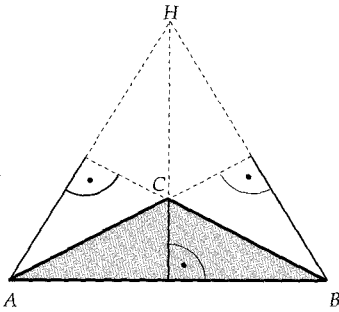


Środkową w trójkącie nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

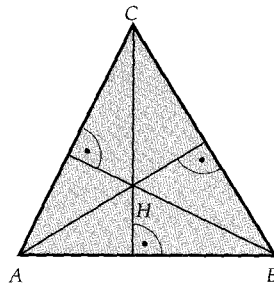
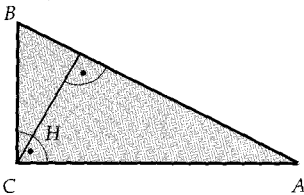
W każdym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie, który jest **środkiem ciężkości** trójkąta.

Środek ciężkości trójkąta dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2:1, licząc od wierzchołka trójkąta.

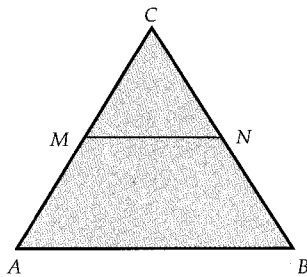
$$|AG| : |GA'| = |BG| : |GB'| = |CG| : |GC'| = 2 : 1.$$



Odcinek łączący wierzchołek trójkąta z jego rzutem prostokątnym na prostą zawierającą przeciwległy bok nazywamy **wysokością** trójkąta.

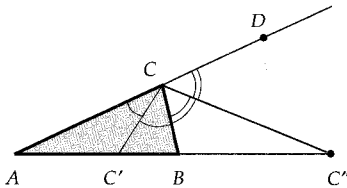


Proste, w których zawierają się wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który nazywamy **ortocentrum** trójkąta.



$$MN \parallel AB \wedge |MN| = \frac{1}{2}|AB|$$

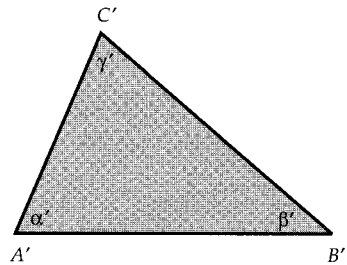
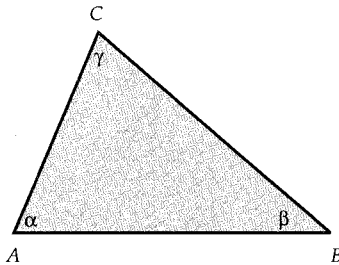
Odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i jego długość jest połową długości trzeciego boku trójkąta.



Twierdzenie o dwusiecznej. Jeżeli CC' zawiera się w dwusiecznej kąta ACB , a CC'' w dwusiecznej kąta zewnętrznego BCD , to

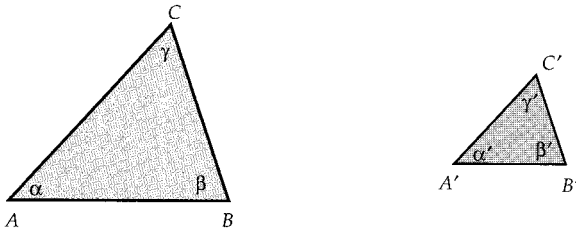
$$\frac{|AC'|}{|AC|} = \frac{|BC'|}{|BC|} \text{ i } \frac{|AC''|}{|AC|} = \frac{|BC''|}{|BC|}.$$

Cechy przystawania trójkątów



1. $|AB| = |A'B'| \wedge |BC| = |B'C'| \wedge |AC| = |A'C'| \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$
2. $|AB| = |A'B'| \wedge |AC| = |A'C'| \wedge \alpha = \alpha' \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$
3. $|AB| = |A'B'| \wedge \alpha = \alpha' \wedge \beta = \beta' \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$

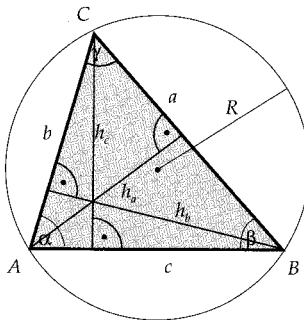
Cechy podobieństwa trójkątów



1. $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
2. $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} \wedge \beta = \beta' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
3. $\alpha = \alpha' \wedge \beta = \beta' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

W trójkątach podobnych odpowiednie kąty są przystające, a odpowiednie boki są proporcjonalne.

a, b, c – długości boków
 h_a, h_b, h_c – długości wysokości
 R – promień okręgu opisanego



Związki w trójkącie dowolnym

Twierdzenie sinusów. W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta przeciwległego temu bokowi jest wielkością stałą, równą długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

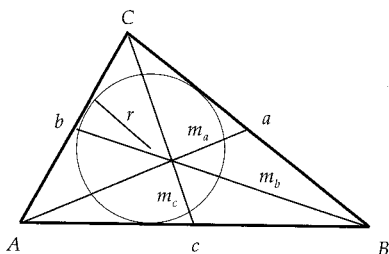
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Twierdzenie cosinusów. W dowolnym trójkącie kwadrat długości boku jest równy sumie kwadratów długości boków pozostałych zmniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków przez cosinus kąta między tymi bokami.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



m_a, m_b, m_c – środkowe trójkąta
 r – promień okręgu wpisanego
 w trójkąt

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$$

$$h_a = b \sin \gamma = c \sin \beta$$

P – pole trójkąta

$$P = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c$$

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{wzór Herona})$$

$$P = \frac{1}{2} a b \sin \gamma = \frac{1}{2} b c \sin \alpha = \frac{1}{2} a c \sin \beta$$

$$P = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$P = p^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

$$P = \frac{abc}{4R}, \quad P = p \cdot r$$

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha}$$

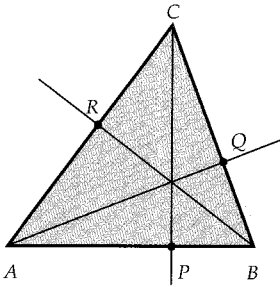
$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}} \quad (\text{wzór tangensów})$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

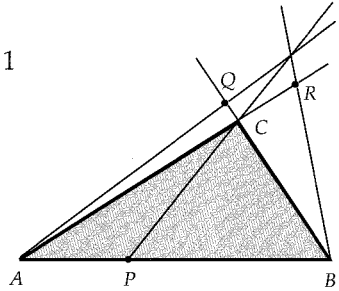
$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{bc}}$$

Twierdzenie Cevy. Jeżeli punkt P leży na prostej AB , punkt Q – na prostej BC , a punkt R – na prostej AC , to proste AQ , BR , CP przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = 1.$$



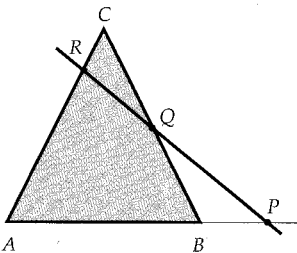
$$\frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = 1$$



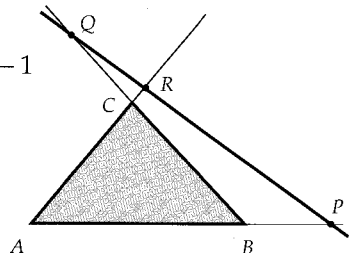
Uwaga. $\frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} = \lambda$, jeżeli $\vec{AP} = \lambda \cdot \vec{PB}$.

Twierdzenie Menelaosa. Jeżeli punkt P leży na prostej AB , punkt Q – na prostej BC , a punkt R – na prostej AC , to punkty P, Q, R są współliniowe wtedy i tylko wtedy,

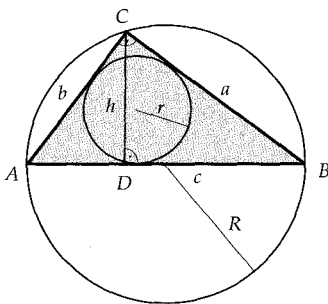
$$\text{gdy } \frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -1.$$



$$\frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -1$$



Związki w trójkącie prostokątnym



Twierdzenie Pitagorasa. Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa. Jeżeli w trójkącie kwadrat długości jednego boku równa się sumie kwadratów długości boków pozostałych, to trójkąt jest prostokątny.

$$c = 2R, \quad c^2 = a^2 + b^2$$

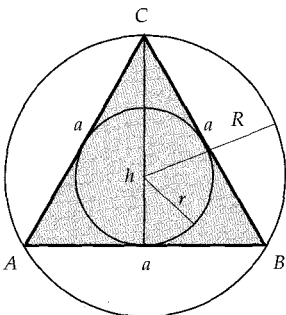
$$|BD| = \frac{a^2}{c}, \quad |AD| = \frac{b^2}{c}, \quad h^2 = |AD| \cdot |BD|$$

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

$$P = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$h = \frac{a \cdot b}{c}$$

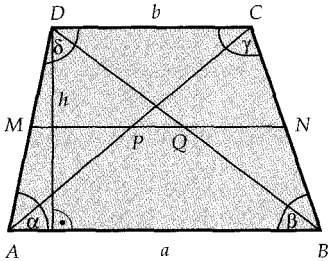
Związki w trójkącie równobocznym



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Czworokąty



Czworokątem (czworobokiem) nazywamy wielokąt o czterech bokach.

Czworokąt, który ma przynajmniej jedną parę boków równoległych, nazywamy **trapezem**. Boki równoległe w trapezie nazywamy **podstawami trapezu**.

$$\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180^\circ$$

MN – odcinek łączący środki nierównoległych boków trapezu (linia środkowa trapezu)

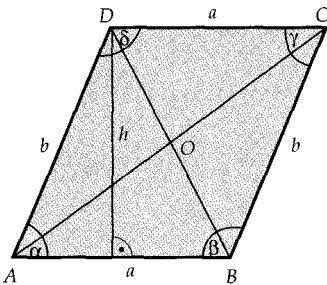
$$|MN| = \frac{a+b}{2}, MN \parallel AB$$

P, Q – środki przekątnych trapezu

$$|PQ| = \frac{a-b}{2}$$

$$|AC|^2 + |BD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2 + 2 \cdot |AB| \cdot |CD|$$

$$P = \text{pole trapezu} = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



Czworokąt, w którym każde dwa przeciwległe boki są równoległe, nazywamy **równoległobokiem**.

$$\alpha = \gamma \wedge \beta = \delta$$

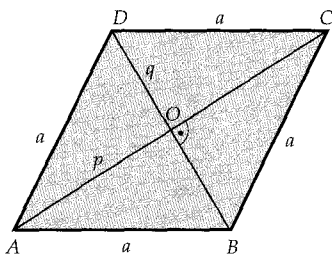
$$\alpha + \beta = \alpha + \delta = 180^\circ$$

$$|AB| = |CD| \wedge |BC| = |AD|$$

$$|AO| = |OC| \wedge |BO| = |OD|$$

$$P = \text{pole równoległoboku} = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$|AC|^2 + |BD|^2 = 2 \cdot (|AB|^2 + |AD|^2)$$



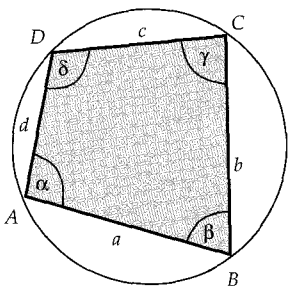
Równoległobok, którego wszystkie boki są równe nazywamy **rombem**.

$$AC \perp BD$$

proste AC i BD są osiami symetrii rombu $ABCD$

$$P = \text{pole rombu} = \frac{p \cdot q}{2}$$

Równoległobok, który ma wszystkie kąty proste, nazywamy **prostokątem**.
Romb, który ma wszystkie kąty proste, nazywamy **kwadratem**.



Czworokąt wpisany w okrąg

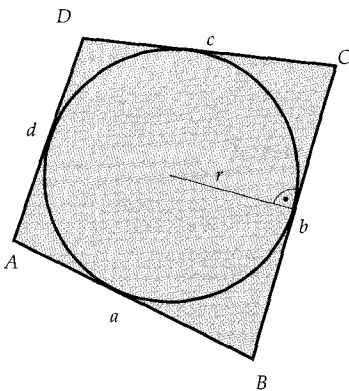
Czworokąt wypukły można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar kątów przeciwległych są równe i wynoszą 180° .

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

$$P = \text{pole czworokąta wpisanego} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

$$\text{gdzie } p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$$

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \quad \text{– twierdzenie Ptolemeusza}$$



Czworokąt opisany na okręgu

Czworokąt wypukły można opisać na okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków są równe.

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$$

P = pole czworokąta opisanego na okręgu

$$\text{o promieniu } r = \frac{1}{2}r \cdot (a+b+c+d)$$

Wielokąty foremne

Wielokątem foremnym nazywamy wielokąt, którego każde dwa boki są równe i każde dwa kąty są równe. Na każdym wielokącie foremnym możemy opisać okrąg i w każdy wielokąt foremny możemy wpisać okrąg. Okręgi te są współśrodkowe.

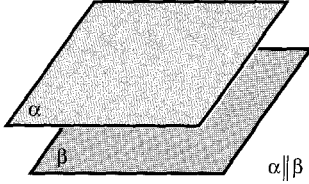
Zależności w niektórych wielokątach foremnym

- a – długość boku wielokąta
 R – długość promienia okręgu opisanego
 r – długość promienia okręgu wpisanego
 P – pole wielokąta

Wielokąt foremny	R	r	P
trójkąt (równoboczny)	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
czworokąt (kwadrat)	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{2}$	a^2
pięciokąt	$\frac{2a}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}$	$\frac{a}{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$	$\frac{a^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$
sześciokąt	a	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$
ośmiokąt	$\frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}(1+\sqrt{2})$	$2a^2(1+\sqrt{2})$
dziesięciokąt	$\frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$	$\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{5}{2}a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
dwunastokąt	$\frac{a}{2}\sqrt{2(1+\sqrt{3})}$	$\frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$	$3a^2(2+\sqrt{3})$

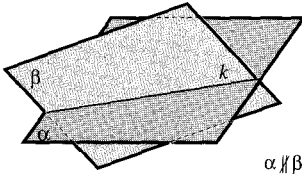
Stereometria

Pojęciami pierwotnymi są: punkt, prosta, płaszczyzna i przestrzeń.



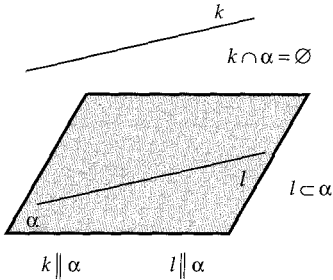
Mówimy, że dwie **płaszczyzny** α i β są **równoległe**, jeżeli nie mają punktów wspólnych lub się pokrywają.

$$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset \vee \alpha = \beta$$



Płaszczyzny, które nie są równoległe, nazywamy **przecinającymi się**. Jeżeli płaszczyzny α i β przecinają się, to ich częścią wspólną jest prosta zwana **krawędzią** przecięcia płaszczyzn.

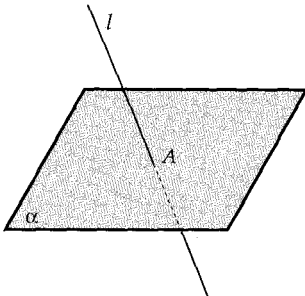
$$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \bigvee_{\text{prosta } k} \alpha \cap \beta = k$$



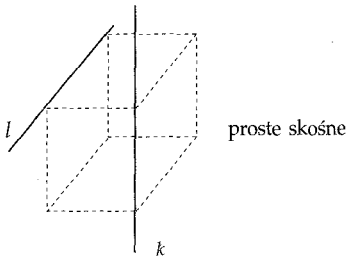
Prosta l jest **równoległa do płaszczyzny** α , jeżeli nie ma z nią punktów wspólnych lub się w niej zawiera.

$$l \parallel \alpha \Leftrightarrow l \cap \alpha = \emptyset \vee l \subset \alpha$$

Jeżeli prosta l ma dwa różne punkty wspólne z płaszczyzną α , to $l \subset \alpha$.

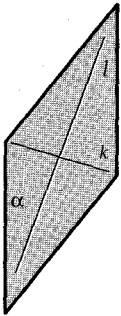


Jeżeli prosta nie jest równoległa do płaszczyzny, to ma z tą płaszczyzną dokładnie jeden punkt wspólny. Mówimy wtedy, że **prosta przebija płaszczyznę**.



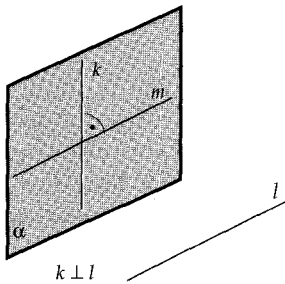
Dwie proste, które nie są zawarte w jednej płaszczyźnie, nazywamy **skośnymi**.

Dwie **proste** są **równoległe**, jeżeli zawarte są w jednej płaszczyźnie i w tej płaszczyźnie są równoległe.



Każde dwie proste przecinające się wyznaczają płaszczyznę.

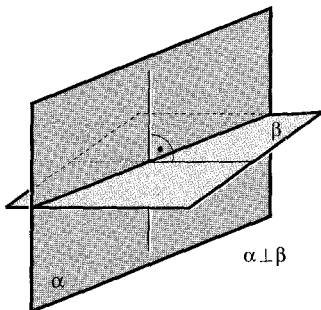
Sumą płaszczyzny i jednej jej strony nazywamy **półprzestrzeń**.



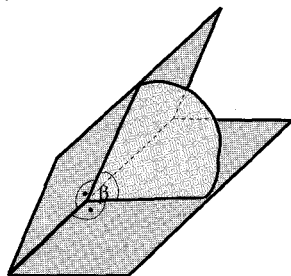
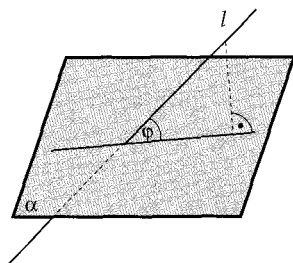
Proste l i k są prostopadłe, jeżeli:

- są zawarte w jednej płaszczyźnie i w tej płaszczyźnie są prostopadłe;
- są skośne i istnieją prosta m i płaszczyzna α takie, że prosta m leży w płaszczyźnie α i jest równoległa do prostej l oraz prosta k leży w płaszczyźnie α i jest prostopadła do prostej m .

Prosta jest prostopadła do płaszczyzny, jeżeli jest prostopadła do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie.



Płaszczyzny α i β nazywamy prostopadłymi, jeżeli istnieje prosta zawarta w płaszczyźnie α i prostopadła do płaszczyzny β .



Niech prosta l przebija płaszczyznę α i nie jest do tej płaszczyzny prostopadła.

Kątem nachylenia prostej l do płaszczyzny α nazywamy kąt ostry między tą prostą a jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę α .

Kątem dwuściennym nazywamy sumę dwóch półpłaszczyzn o wspólnej krawędzi i jednego z obszarów wyciętych z przestrzeni przez te półpłaszczyzny. Kąt płaski otrzymany przez przecięcie kąta dwuściennego płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi nazywamy **kątem liniowym kąta dwuściennego**.

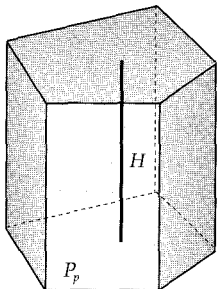
Miarą kąta dwuściennego jest miara jego kąta liniowego.

Bryłą nazywamy figurę ograniczoną, domkniętą, mającą co najmniej jeden punkt wewnętrzny.

Wielościany

Wielościannem nazywamy bryłę, której brzeg jest sumą skończonej liczby wielokątów. Jeżeli wielościann jest figurą wypukłą, to nazywamy go **wypukłym**. Wielokąty tworzące brzeg wielościannu nazywamy **ścianami wielościannu**. **Krawędzią** wielościannu nazywamy bok jego ściany. **Wierzchołkiem wielościannu** nazywamy wierzchołek jego ściany.

Twierdzenie Eulera. Jeżeli wielościann wypukły ma w wierzchołków, k krawędzi i s ścian, to $w - k + s = 2$.

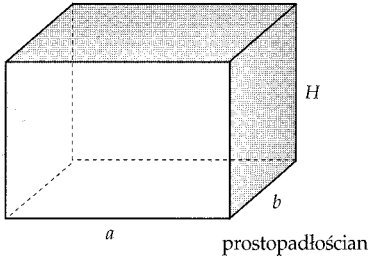


graniastosłup

Graniastosłup jest to wielościann, którego dwie ściany, zwane **podstawami**, zawarte są w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany, zwane **ścianami bocznymi**, są równoległobokami. Podstawy graniastosłupa są wielokątami przystającymi. Krawędzie graniastosłupa, które nie są bokami podstaw, nazywamy **krawędziami bocznymi**. Jeżeli krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, to graniastosłup na-

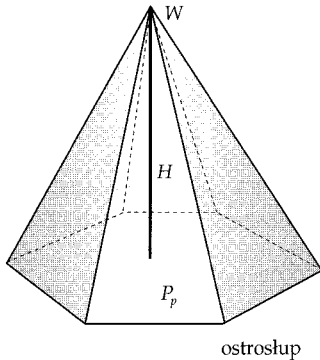
zywamy **prostym**, w przeciwnym przypadku – **pochyłym**. Graniastosłup prosty, którego podstawy są wielokątami foremnymi, nazywamy **prawidłowym**.

Graniastosłup, którego podstawy są równoległobokami nazywamy **równoległościaniem**.



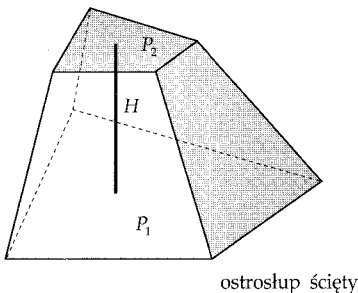
Graniastosłup prosty, którego podstawy są prostokątami nazywamy **prostopadłościaniem**.

Prostopadłościan, którego wszystkie krawędzie mają tę samą długość nazywamy **sześcianem**.



Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego jedna ściana, zwana **podstawą ostrosłupa**, jest wielokątem, a pozostałe ściany, zwane **ścianami bocznymi**, są trójkątami o wspólnym wierzchołku, zwanym **wierzchołkiem ostrosłupa**. Odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa z jego rzutem prostokątnym na płaszczyznę podstawy (**spodkiem wysokości**) nazywamy **wysokością ostrosłupa**.

Ostrosłup nazywamy **prawidłowym**, jeżeli jego podstawa jest wielokątem foremnym, a jego spodek wysokości jest środkiem tego wielokąta. Ostrosłup trójkątny nazywamy **czworościanem**.



Ostrosłup ścięty jest to część ostrosłupa zawarta między jego podstawą i przekrojem poprzecznym równoległym do płaszczyzny podstawy. Podstawy ostrosłupa ściętego są wielokątami jednokładnymi względem wierzchołka ostrosłupa. Ściany boczne są trapezami.

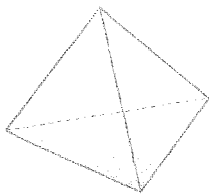
Objętości i pola powierzchni niektórych wielościanów

Wielościan	Objętość	Pole powierzchni
Ganiastosłup	$P_p \cdot H$	$2P_p + P_b$
Prostopadłościan	$a \cdot b \cdot H$	$2ab + 2bH + 2aH$
Sześcian	a^3	$6a^2$
Ostrosłup	$\frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$	$P_p + P_b$
Ostrosłup ścięty o podstawach P_1 i P_2	$\frac{1}{3} \cdot (P_1 + \sqrt{P_1 \cdot P_2} + P_2) \cdot H$	$P_1 + P_2 + P_b$

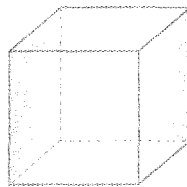
Wielościany foremne

Wielościanem foremnym nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i wszystkie kąty dwuścienne wyznaczone przez sąsiednie ściany są równe.

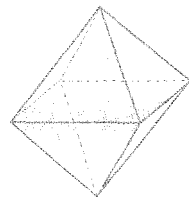
Istnieje tylko pięć wielościanów foremnych: czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan, dwudziestościan.



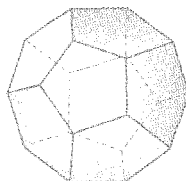
czworościan



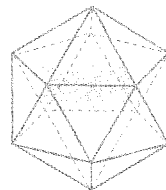
sześcian



ośmiościan



dwunastościan



dwudziestościan

Niektóre dane o wielościanach foremnych

Wielościan	R	ρ	r	Pole powierzchni	Objętość	w	k	s	Rodzaj ściany
czworościan (tetraedr)	$\frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\frac{a\sqrt{2}}{4}$	$\frac{a\sqrt{6}}{12}$	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	4	6	4	trójkąt
sześcian (hexaedr)	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{2}$	$6a^2$	a^3	8	12	6	kwadrat
ośmiościan (oktaedr)	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$	6	12	8	trójkąt
dwunastościan (dodekaedr)	$\frac{a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$	$\frac{a(3+\sqrt{5})}{4}$	$\frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{4}$	$3a^2\sqrt{5}(5+2\sqrt{5})$	$\frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$	20	30	12	pięciokąt
dwudziestościan (ikosaedr)	$\frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$	$\frac{a(1+\sqrt{5})}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$	12	30	20	trójkąt

a – długość krawędzi wielościanu

R – długość promienia kuli opisanej na wielościanie

ρ – długość promienia kuli stycznej do krawędzi wielościanu

r – długość promienia kuli wpisanej w wielościan

w – liczba wierzchołków wielościanu

k – liczba krawędzi wielościanu

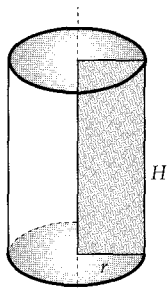
s – liczba ścian wielościanu

Bryły obrotowe

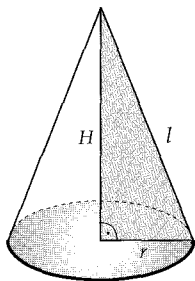
Figurą obrotową powstałą przez obrót figury płaskiej f wokół prostej k , zawartej w płaszczyźnie zawierającej figurę f , nazywamy zbiór wszystkich punktów przestrzeni, które są obrazami punktów figury f w obrotach wokół prostej k o kąty o mierze α , gdzie $\alpha \in (0; 2\pi)$.

Prosta k nazywa się **osią figury obrotowej**.

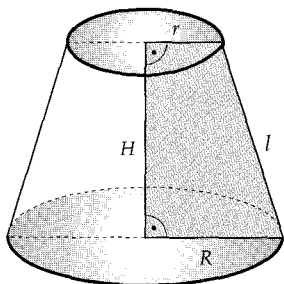
Bryłą obrotową nazywamy bryłę, która jest figurą obrotową.



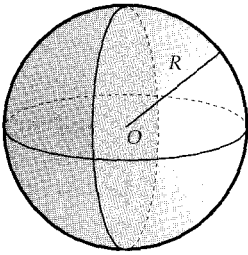
Walec jest to bryła obrotowa, która powstaje przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej jeden z jego boków. **Podstawami walca** nazywamy dwa koła powstałe przez obrót tych boków prostokąta, które są prostopadłe do osi obrotu. Promień podstawy walca nazywamy **promieniem walca**, zaś odcinek prostopadły do podstaw, którego końce należą do tych podstaw – **wysokością walca**.



Stożek (kołowy prosty) jest to bryła obrotowa, która powstaje przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych. **Podstawą stożka** jest koło powstałe przez obrót przyprostokątnej nie zawartej w osi obrotu. Wierzchołek obracanego trójkąta nie należący do podstawy nazywamy **wierzchołkiem stożka**. Odcinek łączący wierzchołek stożka z jego rzutem prostokątnym na podstawę nazywamy **wysokością stożka**. **Tworzącą stożka** nazywamy każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej stożka i łączący wierzchołek z podstawą. **Przekrój osiowy** stożka to część wspólna stożka i płaszczyzny zawierającej oś stożka. Kąt przy wierzchołku przekroju osiowego nazywamy **kątem rozwarcia stożka**.



Stożek ścięty jest to część stożka zawarta między jego podstawą i przekrojem płaszczyzną równoległą do podstawy. **Wysokością stożka ściętego** nazywamy odcinek łączący podstawy i prostopadły do nich.



Kula jest bryłą obrotową, która powstaje przez obrót koła wokół osi zawierającej średnicę koła. Powierzchnię kuli nazywamy **sferą**. Promień kuli (sfery) jest równy promieniowi obracającego się koła.

Kołem wielkim kuli nazywamy przekrój kuli, do którego należy jej środek.

Sfera o środku O i promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest równa r .

$$S(O, r) = \{X: |OX| = r\}$$

Kula o środku O i promieniu $r > 0$ jest zbiorem wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od punktu O nie jest większa od r .

$$K(O, r) = \{X: |OX| \leq r\}.$$

Odległość w przestrzeni określamy tak samo jak na płaszczyźnie (patrz str. 106).

Wielościan jest wpisany w kulę, jeżeli wszystkie jego wierzchołki należą do powierzchni kuli.

Walec jest wpisany w kulę, jeżeli okręgi jego podstaw są zawarte w powierzchni tej kuli.

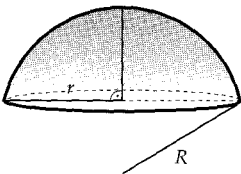
Stożek jest wpisany w kulę, jeżeli jego wierzchołek należy do powierzchni kuli i okrąg jego podstawy zawiera się w powierzchni kuli.

Wielościan jest opisany na kuli, jeżeli wszystkie ściany wielościanu są styczne do powierzchni tej kuli.

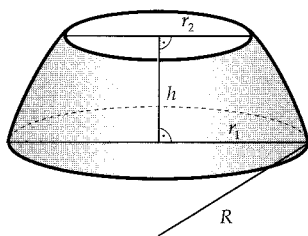
Walec jest opisany na kuli, jeżeli jego podstawy i tworzące są styczne do kuli.

Stożek jest opisany na kuli, jeżeli jego podstawa i tworzące są styczne do kuli.

Odcinek kuli jest to część wspólna kuli i półprzestrzeni domkniętej wyznaczonej przez płaszczyznę przecinającą tę kulę.



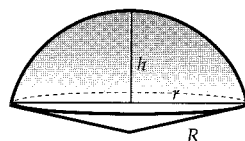
Czasza kuli jest to część wspólna sfery i półprzestrzeni domkniętej wyznaczonej przez płaszczyznę przecinającą tę sferę.



Warstwa kuli jest to zbiór punktów kuli znajdujących się między dwiema równoległymi przecinającymi kulę płaszczyznami lub na tych płaszczyznach.

Pas kulisty jest to zbiór punktów sfery znajdujących się między dwiema równoległymi przecinającymi sferę płaszczyznami lub na tych płaszczyznach.

Wycinek kuli jest sumą odcinka kuli i stożka, którego wierzchołek jest środkiem kuli, a podstawa stożka jest podstawą odcinka kuli.

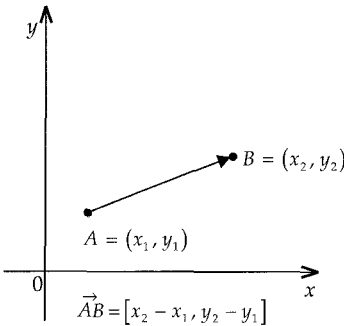
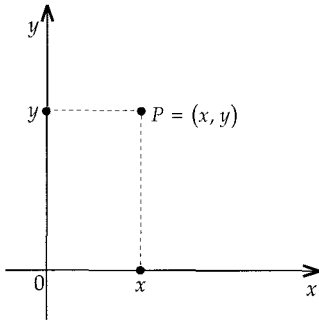


Objętości i pola powierzchni niektórych brył i figur obrotowych

Figura	Objętość	Pole powierzchni bocznej	Pole powierzchni całkowitej
Walec	$\pi r^2 H$	$2\pi r H$	$2\pi r (r + H)$
Stożek	$\frac{1}{3} \pi r^2 H$	$\pi r l$	$\pi r (r + l)$
Stożek ścięty	$\frac{1}{3} \pi (R^2 + Rr + r^2) H$	$\pi (R + r) l$	$\pi (R^2 + r^2 + (R + r) l)$
Kula	$\frac{4}{3} \pi R^3$	-	$4\pi R^2$
Odcinek kuli	$\frac{1}{2} \pi r^2 h + \frac{1}{6} \pi h^3 = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h)$	-	-
Czasza kuli	-	-	$2\pi r h$
Warstwa kuli	$\frac{1}{2} \pi r_1^2 h + \frac{1}{2} \pi r_2^2 h + \frac{1}{6} \pi h^3$	$2\pi R h$	$\pi (r_1^2 + r_2^2 + 2R h)$
Pas kulisty	-	-	$2\pi R h$
Wycinek kuli	$\frac{2}{3} \pi R^2 h$	-	$\pi R (r + 2h)$

Geometria analityczna

Prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie to dwie osie liczbowe przecinające się pod kątem prostym w punktach 0.



Punkty i wektory

Każdemu punktowi P na płaszczyźnie odpowiada wzajemnie jednoznacznie uporządkowana para liczb (x, y) zwana **współzrędnymi punktu P** , co zapisujemy $P = (x, y)$.

Pierwszą z tych współzrędnymi nazywamy **odciętą**, a drugą **rzędną** punktu P .

Jeżeli dane są punkty

$A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, to **odległość** tych **punktów** obliczamy według wzoru:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Współzrędnymi wektora \vec{AB} nazywamy różnicę odciętych i różnicę rzędnych końca B i początku A .

Jeżeli $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, to

$$\vec{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$$

Wektory $\vec{AB} = [a_1, a_2]$ i $\vec{CD} = [b_1, b_2]$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają odpowiednie współzrędnymi równe

$$\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2.$$

Działania na wektorach w układzie współzrędnymi

Niech $\vec{a} = [a_1, a_2]$, $\vec{b} = [b_1, b_2]$, $k \in \mathbb{R}$.

$$\vec{a} + \vec{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

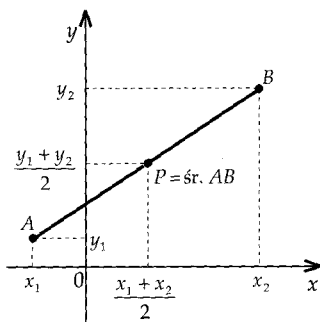
$$\vec{a} - \vec{b} = [a_1 - b_1, a_2 - b_2]$$

$$k \cdot \vec{a} = [k \cdot a_1, k \cdot a_2]$$

Mówimy, że punkt P dzieli odcinek AB w stosunku k , jeżeli $\vec{AP} = k \cdot \vec{PB}$. Liczba k nazywa się **stosunkiem podziału odcinka** AB punktem P .

Jeżeli $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ i punkt $P = (x, y)$ dzieli odcinek AB w stosunku

$$k \neq -1, \text{ to } x = \frac{x_1 + k \cdot x_2}{1 + k}, \quad y = \frac{y_1 + k \cdot y_2}{1 + k}.$$



Jeżeli $k = 1$, to punkt P jest środkiem odcinka AB . Współrzędne **środk**a odcinka są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych jego końców.

Jeżeli $P = (x, y)$ jest środkiem odcinka AB , gdzie $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, to

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Jeżeli $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ i $P = (x, y)$ jest **środk**iem ciężkości trójkąta ABC , to

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Długość wektora:

$$\vec{a} = [a_1, a_2] \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$A = (x_1, y_1), \quad B = (x_2, y_2) \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Iloczyn skalarny wektorów

$$\text{Jeżeli } \vec{a} = [a_1, a_2], \quad \vec{b} = [b_1, b_2], \text{ to } \vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Warunek prostopadłości dwóch niezerowych wektorów

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0$$

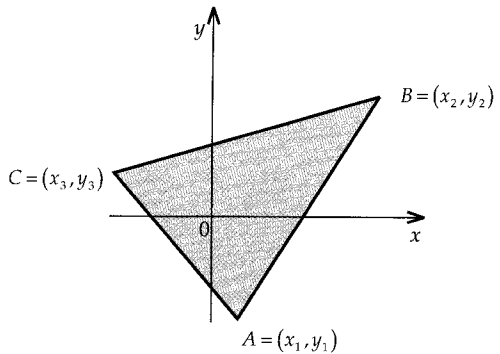
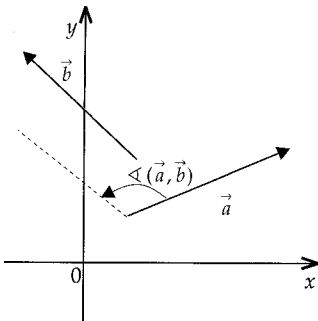
Dla wektorów $\vec{a} = [a_1, a_2]$, $\vec{b} = [b_1, b_2]$ wyrażenie $d(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ nazywamy **wyznacznikiem pary wektorów** \vec{a} , \vec{b} .

Warunek równoległości dwóch niezerowych wektorów

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow d(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = 0$$

Kąt dwóch wektorów. Jeżeli $\vec{a} = [a_1, a_2]$ i $\vec{b} = [b_1, b_2]$ są niezerowymi wektorami, to

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \quad \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{d(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$



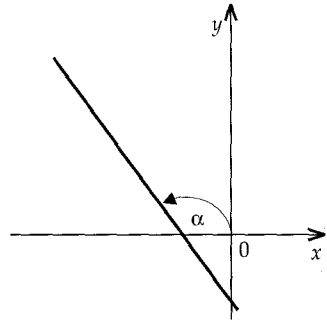
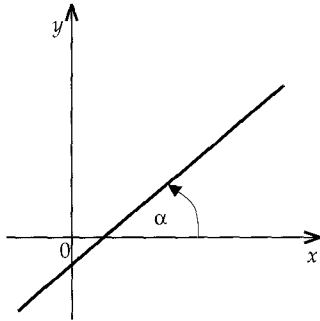
Jeżeli dane są punkty $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, to **pole trójkąta ABC** obliczamy ze wzorów:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| d(\vec{AB}, \vec{AC}) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| (x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) \right|$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D|, \quad \text{gdzie } D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Linia prosta

Kątem nachylenia prostej do osi Ox nazywamy ten kąt skierowany, dodatni, wypukły, którego ramię początkowe, zawarte w osi Ox , ma zwrot dodatni, a ramię końcowe, zawarte w prostej, leży nad osią Ox . Jeżeli prosta jest równoległa do osi Ox , to mówimy, że tworzy z tą osią kąt $\alpha = 0^\circ$.



Współczynnikiem kierunkowym (kątowym) prostej (nieprostopadłej do osi Ox) nazywamy tangens kąta nachylenia tej prostej do osi Ox .

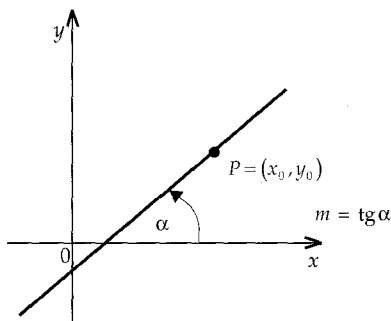
$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

Prosta prostopadła do osi Ox nie ma współczynnika kierunkowego.

Równania prostej

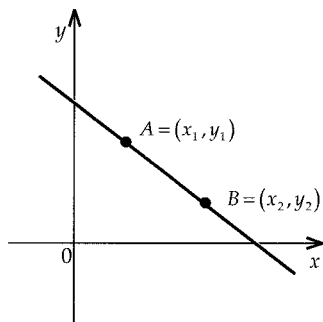
$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0 \quad - \text{równanie ogólne.}$$

$$y = mx + k \quad - \text{równanie kierunkowe.}$$



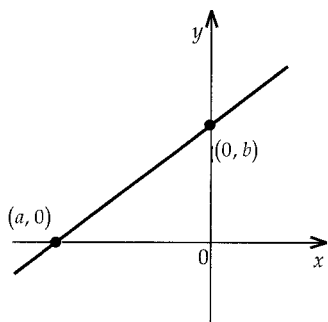
$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

- równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0)$, która ma współczynnik kierunkowy m .



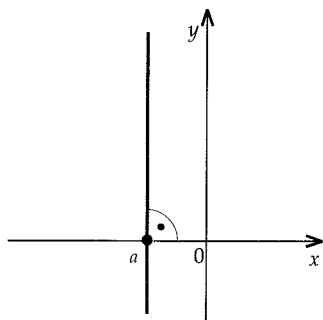
$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$
 – równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

$$A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2).$$



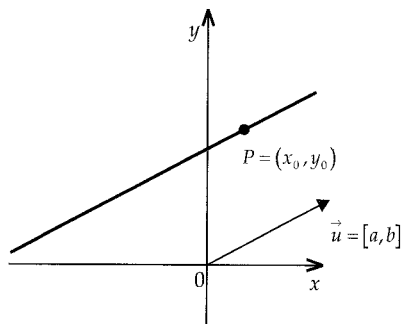
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad a \cdot b \neq 0$$

– równanie odcinkowe.



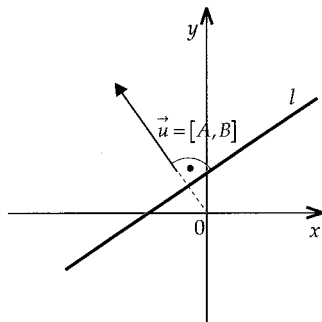
$$x = a$$

– równanie prostej prostopadłej do osi Ox.



$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot a \\ y = y_0 + t \cdot b \end{cases}$$

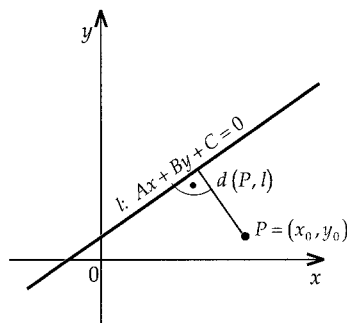
– układ równań parametrycznych prostej przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0)$ równoległej do wektora $\vec{u} = [a, b]$.



Jeżeli dana jest prosta l o równaniu $Ax + By + C = 0$, to wektor $\vec{u} = [A, B]$ jest wektorem prostopadłym do prostej l .

Warunek równoległości i prostopadłości prostych

proste	$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$	$l_1: y = m_1x + k_1$ $l_2: y = m_2x + k_2$
$l_1 \parallel l_2$	$A_1B_2 - A_2B_1 = 0$	$m_1 = m_2$
$l_1 \perp l_2$	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$	$m_1 \cdot m_2 = -1$

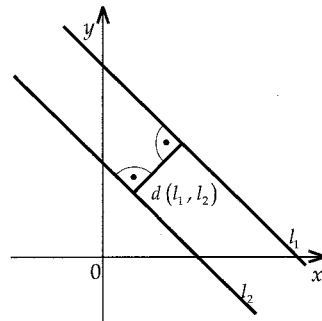


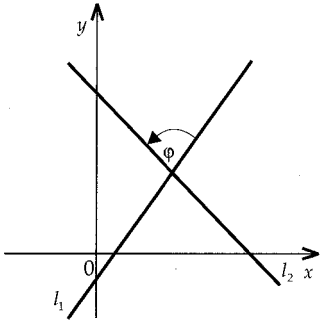
Jeżeli dana jest prosta $l: Ax + By + C = 0$ i punkt $P = (x_0, y_0)$, to **odległość** $d(P, l)$ punktu P od prostej l obliczamy ze wzoru

$$d(P, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Jeżeli proste $l_1: Ax + By + C_1 = 0$ i $l_2: Ax + By + C_2 = 0$ są równoległe, to **odległość** $d(l_1, l_2)$ między tymi prostymi obliczamy ze wzoru

$$d(l_1, l_2) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$





Jeżeli $l_1: y = m_1x + k_1$,

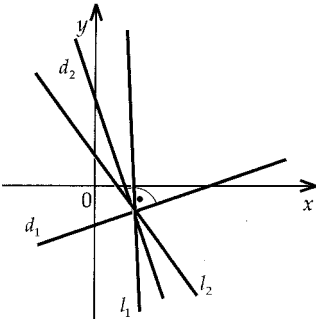
$l_2: y = m_2x + k_2$ nie są prostopadłe, to **kąt φ między prostymi l_1 i l_2** wyznaczamy ze wzoru

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|.$$

Jeżeli $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$,

$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, to kąt φ między prostymi wyznaczamy ze wzoru

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

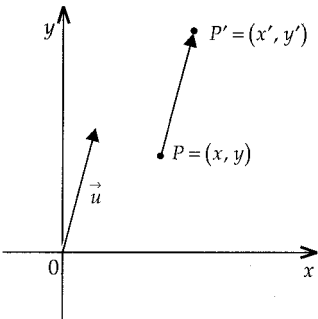


Jeżeli proste $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$

i $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ nie są równoległe, to **dwusieczne d_1 i d_2 kątów utworzonych przez te proste** spełniają równanie

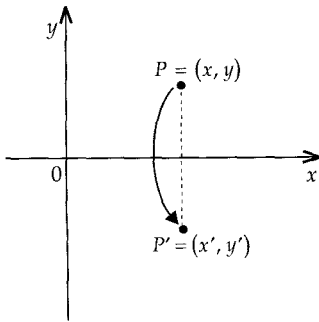
$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Przekształcenia płaszczyzny



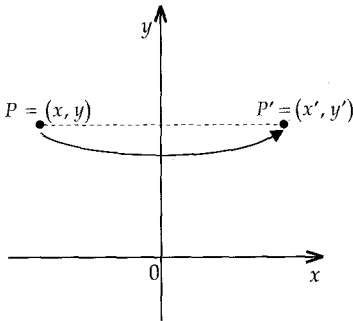
Translacja o wektor $\vec{u} = [a, b]$

$$T_{\vec{u}}: \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \quad T_{\vec{u}}^{-1}: \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$$



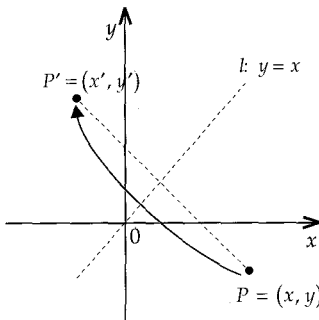
Symetria osiowa o osi Ox

$$S_x: \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \quad S_x^{-1}: \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$$



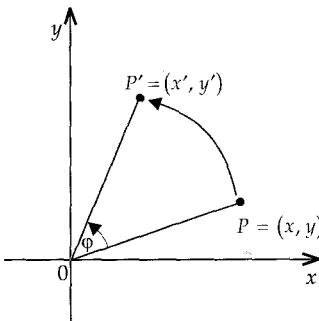
Symetria osiowa o osi Oy

$$S_y: \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \quad S_y^{-1}: \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$$



Symetria osiowa o osi $l: y = x$

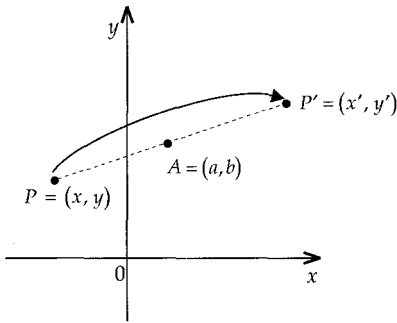
$$S_l: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad S_l^{-1}: \begin{cases} x = y' \\ y = x' \end{cases}$$



Obrót dookoła punktu $O = (0,0)$ o kąt skierowany φ

$$R_{(0,0)}^\varphi: \begin{cases} x' = x \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi \\ y' = x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi \end{cases}$$

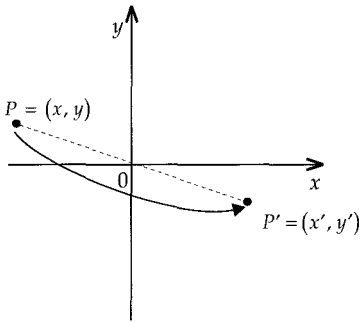
$$\left(R_{(0,0)}^\varphi\right)^{-1}: \begin{cases} x = x' \cdot \cos \varphi + y' \cdot \sin \varphi \\ y = -x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi \end{cases}$$



Symetria środkowa o środku $A = (a, b)$

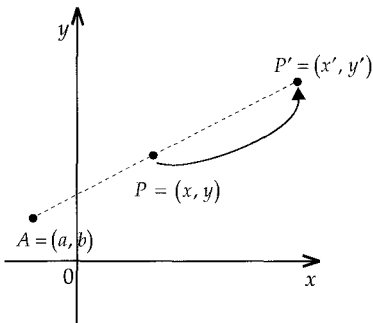
$$S_A: \begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b \end{cases}$$

$$S_A^{-1}: \begin{cases} x = -x' + 2a \\ y = -y' + 2b \end{cases}$$



Symetria środkowa o środku $0 = (0, 0)$

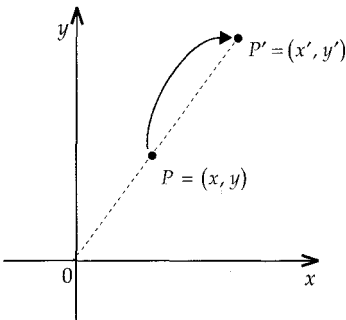
$$S_0: \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \quad S_0^{-1}: \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$$



Jednokładność o środku $A = (a, b)$ i skali $s \neq 0$.

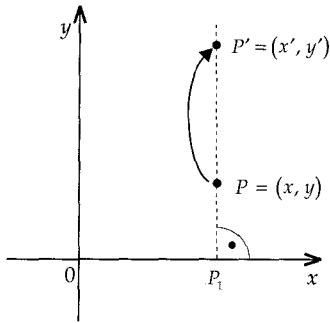
$$J_A^s: \begin{cases} x' = s \cdot x + (1 - s) \cdot a \\ y' = s \cdot y + (1 - s) \cdot b \end{cases}$$

$$(J_A^s)^{-1}: \begin{cases} x = \frac{1}{s} \cdot x' + \left(1 - \frac{1}{s}\right) \cdot a \\ y = \frac{1}{s} \cdot y' + \left(1 - \frac{1}{s}\right) \cdot b \end{cases}$$



Jednokładność o środku $0 = (0, 0)$ i skali $s \neq 0$.

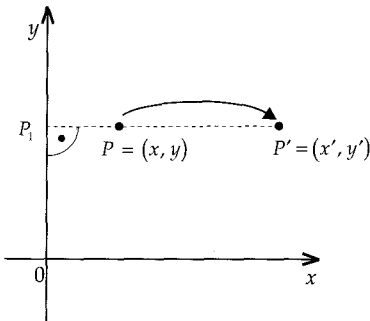
$$J_0^s: \begin{cases} x' = s \cdot x \\ y' = s \cdot y \end{cases} \quad (J_0^s)^{-1}: \begin{cases} x = \frac{1}{s} \cdot x' \\ y = \frac{1}{s} \cdot y' \end{cases}$$



Powinowactwo prostokątne o osi Ox i skali $s \neq 0$.

$$P_x^s: \begin{cases} x' = x \\ y' = s \cdot y \end{cases}$$

$$(P_x^s)^{-1}: \begin{cases} x = x' \\ y = \frac{1}{s} \cdot y' \end{cases}$$



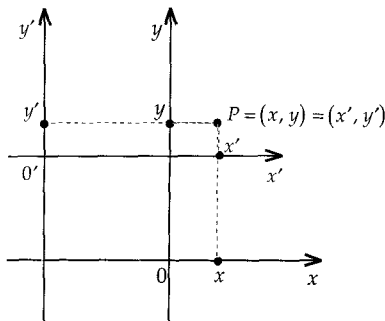
Powinowactwo prostokątne o osi Oy i skali $s \neq 0$.

$$P_y^s: \begin{cases} x' = s \cdot x \\ y' = y \end{cases}$$

$$(P_y^s)^{-1}: \begin{cases} x = \frac{1}{s} \cdot x' \\ y = y' \end{cases}$$

Zmiana układu współrzędnych

Przesunięcie układu współrzędnych. Układ $X'O'Y'$ powstał przez przesunięcie układu XOY o wektor $\vec{OO'} = [a, b]$.

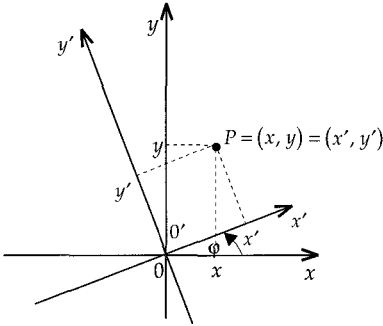


Jeżeli w układzie XOY :

$$O' = (a, b), \quad P = (x, y).$$

a w układzie $X'O'Y'$: $P = (x', y')$, to

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$



Obrót układu współrzędnych.

Układ $X'O'Y'$ powstał przez obrót układu XOY dokoła punktu $O = (0,0)$ o kąt skierowany φ .

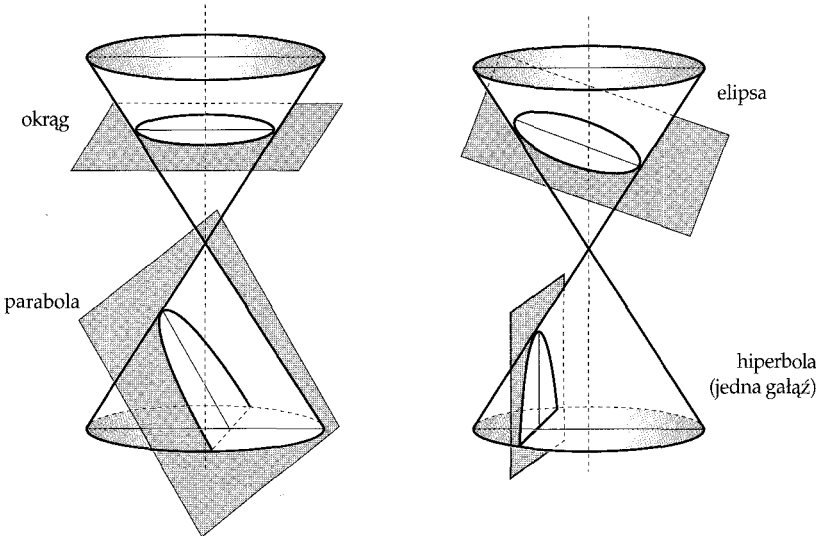
Jeżeli w układzie XOY : $P = (x, y)$,

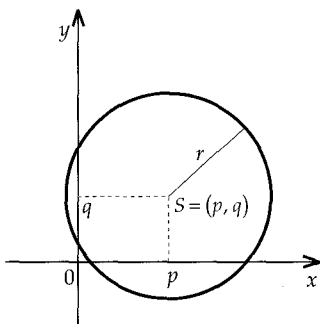
a w układzie $X'O'Y'$: $P' = (x', y')$, to

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi \\ y' = -x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi \\ y = x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi \end{cases}$$

Krzywe stopnia drugiego (krzywe stożkowe)

Okrąg, elipsa, parabola i hiperbola są **krzywymi stożkowymi**, tzn. możemy je otrzymać jako przekrój powierzchni stożkowej odpowiednio dobraną płaszczyzną.





Okrąg o środku S i promieniu r jest to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r .

Równania okręgu

$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ – równanie okręgu o środku $S = (p, q)$ i promieniu r .

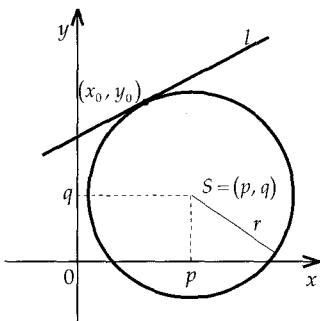
$x^2 + y^2 = r^2$ – równanie okręgu o środku $S = (0, 0)$ i promieniu r .

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ – równanie ogólne okręgu (równanie przedstawia okrąg, jeżeli $a^2 + b^2 - 4c > 0$).

współrzędne środka okręgu

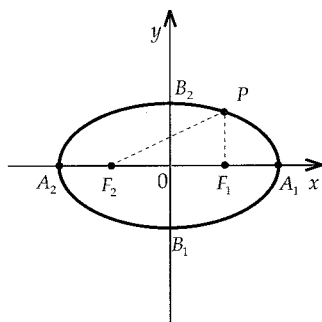
$$\begin{cases} p = -\frac{a}{2} \\ q = -\frac{b}{2} \end{cases}$$

promień okręgu

$$r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$


Jeżeli do okręgu $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ poprowadzimy w punkcie (x_0, y_0) należącym do tego okręgu styczną l , to ma ona równanie

$$(x_0 - p) \cdot (x - p) + (y_0 - q) \cdot (y - q) = r^2.$$



$$|PF_1| + |PF_2| = 2a = \text{const}$$

Elipsą nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których suma odległości od dwóch danych punktów, zwanych **ogniskami elipsy**, jest ustaloną liczbą (większą niż odległość ognisk). Odcinek A_1A_2 , którego końcami są punkty przecięcia elipsy z prostą przechodzącą przez jej ogniska, nazywamy **osią wielką** elipsy.

Osią małą elipsy nazywamy odcinek B_1B_2 , którego końcami są punkty przecięcia elipsy z symetralną osi wielkiej.

Odległość $|F_1F_2|$ ognisk elipsy nazywamy **ogniskową**.

– równanie elipsy, której środkiem jest jest punkt $(0,0)$, a osiami symetrii są osie układu współrzędnych i $a > b$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

– długość osi wielkiej

$$|A_1A_2| = 2a$$

$$|A_1A_2| = 2a$$

– długość osi małej

$$|B_1B_2| = 2b$$

$$|B_1B_2| = 2b$$

– współrzędne ognisk F_1, F_2 elipsy

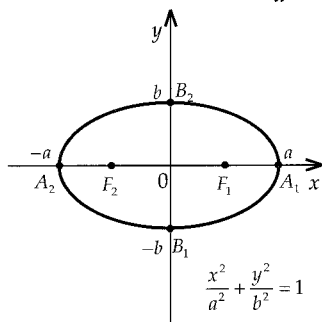
$$F_1 = (c, 0), F_2 = (-c, 0)$$

$$F_1 = (0, c), F_2 = (0, -c)$$

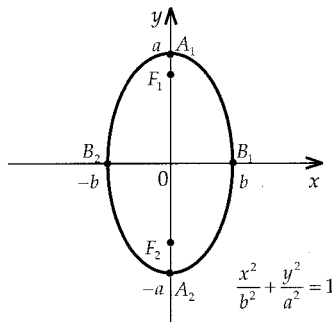
$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

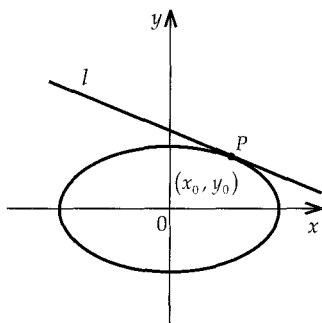
Liczbę $\varepsilon = \frac{c}{a}$ nazywamy **mimośrodem elipsy**.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



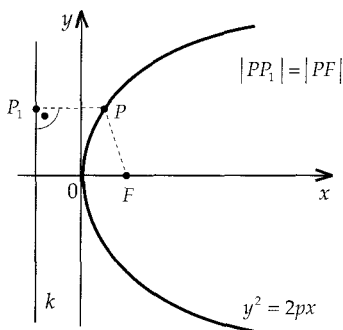
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



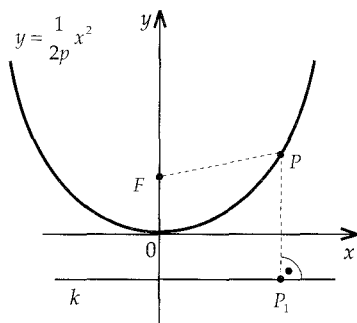
Elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ jest obrazem okręgu $x^2 + y^2 = a^2$ w powinowactwie prostokątnym o osi Ox i skali $s = \frac{b}{a}$.

Jeżeli do elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ poprowadzimy w punkcie $P = (x_0, y_0)$ należącym do tej elipsy styczną l , to ma ona równanie

$$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1.$$

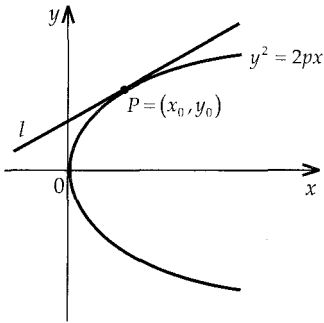


Parabola jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od ustalonego punktu F , zwanego **ogniskiem**, jest równa odległości od ustalonej prostej k (nie przechodzącej przez punkt F), zwanej **kierownicą**.



Parabola

o osi Oy	o osi Ox
$y = \frac{1}{2p} x^2$	$y^2 = 2px$
$F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$	$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$
$k: y = -\frac{p}{2}$	$k: x = -\frac{p}{2}$



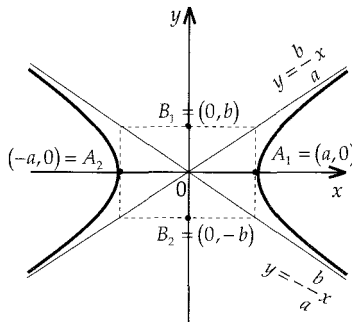
Liczbę $p = d(F, k)$ nazywamy **parametrem paraboli**.

Jeżeli do paraboli $y^2 = 2px$ poprowadzimy w punkcie $P = (x_0, y_0)$, należącym do tej paraboli, styczną l , to ma ona równanie $y_0 \cdot y = p \cdot (x + x_0)$.

Hiperbola jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, dla których wartość bezwzględna z różnicy odległości od dwóch różnych, ustalonych punktów, zwanych **ogniskami**, jest wielkością stałą.

Hiperbola składa się z dwóch krzywych zwanych **gałęziami** hiperboli.

Punkty przecięcia hiperboli z prostą przechodzącą przez ogniska nazywamy **wierzchołkami** hiperboli, a odcinek łączący wierzchołki – **osią rzeczywistą** hiperboli.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

– równanie hiperboli, której oś rzeczywista zawiera się w osi Ox

$$2a$$

– długość osi rzeczywistej

$$2b$$

– długość osi urojonej

$$A_1 = (a, 0), A_2 = (-a, 0)$$

– wierzchołki hiperboli

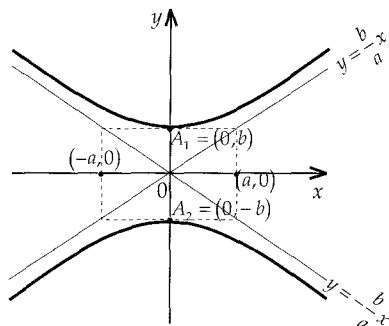
$$F_1 = (c, 0), F_2 = (-c, 0)$$

– ogniska hiperboli

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$$

– asymptoty hiperboli



$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

– równanie hiperboli, której oś rzeczywista zawiera się w osi Oy

$$2a$$

– długość osi urojonej

$$2b$$

– długość osi rzeczywistej

$$A_1 = (0, b), A_2 = (0, -b)$$

– wierzchołki hiperboli

$$F_1 = (0, c), F_2 = (0, -c)$$

– ogniska hiperboli

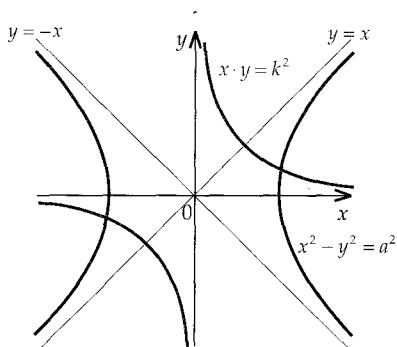
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$$

– asymptoty hiperboli

Odległość $|F_1F_2| = 2c$ nazywamy **ogniskową** hiperboli.

Jeżeli $a = b$, to hiperbolę nazywamy **równoosiową**.



Obracając hiperbolę $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ dookoła

punktu $(0,0)$ o kąt $\varphi = 45^\circ$, otrzymujemy

hiperbolę o równaniu $x \cdot y = \frac{a^2}{2} = k^2$,

której osiami symetrii są proste $y = x$, $y = -x$, a asymptotami są osie układu współrzędnych.

Rachunek prawdopodobieństwa

Pojęciem pierwotnym rachunku prawdopodobieństwa jest **zdarzenie elementarne**. Zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych dla danego doświadczenia nazywamy **przestrzenią zdarzeń elementarnych** i oznaczamy symbolem Ω . **Zdarzeniem losowym** nazywamy dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Oznaczenia i terminologia rachunku prawdopodobieństwa

Oznaczenie	Terminologia
$\omega \in A$	zdarzenie elementarne ω sprzyja zdarzeniu losowemu A
Ω	zdarzenie pewne
\emptyset	zdarzenie niemożliwe
$A = B$	zdarzenie identyczne
$A \subset B$	zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B
$A \cup B$	suma zdarzeń
$A \cap B$	iloczyn zdarzeń
$A \setminus B$	różnica zdarzeń
$A' = \Omega \setminus A$	zdarzenia przeciwne do A
$A \cap B = \emptyset$	zdarzenia wykluczające się

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych. Jeżeli istnieje funkcja

$P: 2^\Omega \rightarrow \mathbf{R}$ spełniająca warunki:

$$1^\circ \bigwedge_{A \subset \Omega} P(A) \geq 0$$

$$2^\circ \bigwedge_{A, B \subset \Omega} A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$3^\circ P(\Omega) = 1$$

to mówimy, że w zbiorze Ω zostało określone **prawdopodobieństwo**, a liczbę $P(A)$ nazywamy **prawdopodobieństwem** zdarzenia A .

Jeżeli P jest prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach w zbiorze Ω , to parę (Ω, P) nazywamy **przestrzenią probabilistyczną**.

Własności prawdopodobieństwa

$$1. P(\emptyset) = 0$$

$$2. \bigwedge_{A, B \subset \Omega} A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$3. \bigwedge_{A \subset \Omega} P(A) \leq 1$$

$$4. \bigwedge_{A \subset \Omega} P(A) + P(A') = 1$$

$$5. \bigwedge_{A, B \subset \Omega} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

6. Jeżeli $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$ wykluczają się parami ($A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$), to

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$.

Jeżeli $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_N\}) = \text{const}$, to przestrzeń (Ω, P) nazywamy **przestrzenią klasyczną**.

Twierdzenie Laplace'a. W przestrzeni klasycznej prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe ilorazowi liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu losowemu A przez liczbę zdarzeń elementarnych przestrzeni Ω .

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\Omega}.$$

Treść twierdzenia Laplace'a przyjmuje się jako tzw. **klasyczną definicję prawdopodobieństwa**.

Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech $A, B \subset \Omega$. Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B , nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ gdzie } P(B) > 0.$$

Z definicji tej otrzymujemy **wzór na prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń**

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B).$$

Mówimy, że zdarzenia B_1, B_2, \dots, B_n tworzą **zupełny układ zdarzeń** w przestrzeni Ω , jeżeli:

- 1° $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$
- 2° $P(B_i) > 0$ dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- 3° $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Jeżeli B_1, B_2, \dots, B_n tworzą zupełny układ zdarzeń w przestrzeni Ω , to dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ zachodzi wzór

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

Jest to tzw. **wzór na prawdopodobieństwo całkowite**.

Twierdzenie Bayesa. Jeżeli B_1, B_2, \dots, B_n tworzą zupełny układ zdarzeń w przestrzeni Ω i $A \subset \Omega$ i $P(A) > 0$, to

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)}.$$

Zdarzenia niezależne

Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ nazywamy **niezależnymi**, jeżeli $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Zdarzenia, które nie są niezależne, nazywamy **zależnymi**.

Jeżeli zdarzenia A i B są niezależne, to pary zdarzeń: A i B' , A' i B , A' i B' też są niezależne.

Zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$ są niezależne, jeżeli prawdopodobieństwo iloczynu dowolnych k ($k \leq n$) zdarzeń spośród nich jest równe iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń.

Schemat Bernoulliego

Próba Bernoulliego nazywamy doświadczenie, w którym otrzymujemy jeden z dwóch możliwych wyników. Jeden z tych wyników, o prawdopodobieństwie $p \in (0, 1)$, nazywamy **sukcesem**, a drugi, o prawdopodobieństwie $q = 1 - p$ – **porażką**.

Schematem Bernoulliego nazywamy ciąg niezależnych powtórzeń prób Bernoulliego.

Jeżeli $n \in \mathbb{N}_+$ i $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, to **prawdopodobieństwo $P_n(k)$ uzyskania dokładnie k sukcesów** w schemacie n prób Bernoulliego wyraża się wzorem

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

gdzie p jest prawdopodobieństwem sukcesu w jednej próbie Bernoulliego, a $q = 1 - p$ jest prawdopodobieństwem porażki.

Liczbę k , dla której prawdopodobieństwo $P_n(k)$ jest największe, nazywamy **najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów** w schemacie n prób Bernoulliego.

Jeżeli $(n+1) \cdot p \notin \mathbb{C}$, to najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów jest liczba $k_0 = \lfloor (n+1) \cdot p \rfloor$, gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby x .

Jeżeli $(n+1) \cdot p \in \mathbb{C}$, to najbardziej prawdopodobne są wartości: $(n+1) \cdot p - 1$, $(n+1) \cdot p$.

Zmienna losowa

Niech Ω oznacza skończony zbiór zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia.

Każdą funkcją $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **zmienną losową**.

Niech $P(X = x_i) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) = x_i\})$.

Rozkładem zmiennej losowej X nazywamy zbiór wszystkich par (x_i, p_i) , gdzie x_i jest wartością zmiennej losowej X , a $p_i = P(X = x_i)$.

$$RX = \{(x_i, p_i): p_i = P(X = x_i)\}$$

Zmienna losowa X ma **rozkład jednostajny**, jeżeli przyjmuje wszystkie swoje wartości z tym samym prawdopodobieństwem.

Zmienna losowa X ma **rozkład dwupunktowy**, jeżeli przyjmuje tylko dwie wartości.

Zmienna losowa X ma **rozkład Bernoulliego (dwumianowy)**, jeżeli przyjmuje wartości $0, 1, 2, \dots, n$ oraz

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ gdzie } p \in (0, 1) \text{ i } q = 1 - p.$$

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej

Wartością oczekiwaną (wartością średnią, nadzieją matematyczną) zmiennej losowej X o rozkładzie $RX = \{(x_i, p_i): i = 1, 2, \dots, n\}$ nazywamy liczbę

$$EX = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n.$$

Własności wartości oczekiwanej

$E(cX) = cEX$, gdzie $c \in \mathbf{R}$

$E(I) = 1$, gdzie I jest funkcją tożsamościowo równą 1,

$E(X + Y) = EX + EY$, gdzie X i Y są zmiennymi losowymi określonymi na tym samym zbiorze Ω .

Jeżeli X jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym

$$RX = \left\{ \left(x_1, \frac{1}{n} \right), \left(x_2, \frac{1}{n} \right), \dots, \left(x_n, \frac{1}{n} \right) \right\}, \text{ to } EX = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

Jeżeli X jest zmienną losową o rozkładzie Bernoulliego, to $EX = n \cdot p$.

Wariancją (dyspersją) zmiennej losowej X

o rozkładzie $RX = \{(x_i, p_i): i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ nazywamy liczbę

$$D^2X = E(X - EX)^2, \text{ czyli}$$

$$D^2X = (x_1 - m)^2 \cdot p_1 + (x_2 - m)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - m)^2 \cdot p_n, \text{ gdzie } m = EX.$$

Własności wariancji

$$D^2X = E(X^2) - (EX)^2, \text{ gdzie } E(X^2) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \dots + x_n^2 \cdot p_n$$

$$D^2(cX) = c^2 \cdot D^2X, \text{ gdzie } c \in \mathbf{R}$$

$$D^2X = 0 \Leftrightarrow X \text{ jest funkcją stałą.}$$

Jeżeli X jest zmienną losową o rozkładzie Bernoulliego, to $D^2X = n \cdot p \cdot q$.

Liczbę $DX = \sqrt{D^2X}$ nazywamy **odchyleniem standardowym** zmiennej losowej X .

TABLICE fizyczne



Literatura

1. *Encyklopedia fizyki* PWN, Warszawa 1972
2. *Encyklopedia fizyki współczesnej* PWN, Warszawa 1983
3. A.S. Jenochowicz, *Kratkij sprawocznik po fizikie*, Wysszaja Szkoła, Moskwa 1976
4. B.M. Jaworski, A.A. Dietlaf, *Fizyka – poradnik encyklopedyczny* PWN, Warszawa 1996
5. F. Kohlraush, *Fizyka laboratoryjna* PWN, Warszawa 1961
6. A. Mercik, S. Mercik, *Słownik pierwiastków chemicznych* R.A.F. Racibórz 1994
7. *Poradnik fizykochemiczny* WNT, Warszawa 1970
8. R. Resnick, D. Halliday *Fizyka* PWN, Warszawa 1970
9. S. Szczeniowski *Fizyka doświadczalna* PWN, Warszawa 1972
10. H. Szydłowski *Pracownia fizyczna* PWN, Warszawa 1961

Podstawowe stałe fizyczne

Nazwa	Oznaczenie	Wartość	Jednostka
1. Stała Boltzmana	k	$1,380622 \cdot 10^{-23}$	J/K
2. Stała grawitacji	G	$6,67259 \cdot 10^{-11}$	$\text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
3. Stała Faradaya	F	$9,648530 \cdot 10^4$	C/mol
4. Stała Plancka	h	$6,626169 \cdot 10^{-34}$	J · s
5. Stała Rydberga	R	$1,0973731 \cdot 10^7$	m^{-1}
6. Stała Stefana-Boltzmana	σ	$5,669 \cdot 10^{-8}$	W/ m^2
7. Stała struktury subtelnej	α	1/137,04	
8. Liczba Avogadro	N_A	$6,022169 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
9. Liczba Loschmidta	L	$2,687789 \cdot 20^{25}$	m^{-3}
10. Masa elektronu	m_e	$9,109558 \cdot 10^{-31}$ $5,485930 \cdot 10^{-4}$	kg u
11. Masa protonu	m_p	$1,672614 \cdot 10^{-27}$ 1,007276	kg u
12. Masa neutronu	m_n	$1,674920 \cdot 10^{-27}$ 1,008665	kg u
13. Energia spoczynkowa elektronu	$m_e \cdot c^2$	0,511	MeV
14. Energia spoczynkowa protonu	$m_p \cdot c^2$	938,256	MeV
15. Energia spoczynkowa neutronu	$m_n \cdot c^2$	939,550	MeV

Nazwa	Oznaczenie	Wartość	Jednostka
16. Ładunek elementarny	e	$1,602191 \cdot 10^{-19}$	C
17. Ładunek właściwy elektronu	$\frac{e}{m_e}$	$1,758802 \cdot 10^{11}$	C/kg
18. Komptonowska długość fali elektronu	λ_c	$2,4263096 \cdot 10^{-12}$	m
19. Jednostka momentu pędu w mechanice kwantowej	\hbar	$1,0545919 \cdot 10^{-34}$	J · s
20. Magneton Bohra	μ_B	$9,274096 \cdot 10^{-24}$	J/T
21. Magneton jądrowy	μ_N	$5,050951 \cdot 10^{-27}$	J/T
22. Promień Bohra	r_1	$0,52917 \cdot 10^{-10}$	m
23. Atomowa jednostka masy	u	$1,660531 \cdot 10^{-27}$	kg
24. Przenikalność elektryczna próżni	ϵ_0	$8,854187 \cdot 10^{-12}$	F/m
25. Przenikalność magnetyczna próżni	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ $1,256637 \cdot 10^{-6}$	H/m V · s/(A · m)
26. Prędkość światła w próżni	c	$2,997925 \cdot 10^8$	m/s
27. Objętość mola gazu doskonałego w warunkach normalnych $T = 273,15 \text{ K}$, $p = 101325 \text{ Pa}$	V_0	$22,4136 \cdot 10^{-3}$	m ³ /mol
28. Standardowe przyspieszenie ziemskie	g	9,80665	m/s ²
29. Uniwersalna stała gazowa	R	8,31434	J/(K · mol)

Podstawowe jednostki układu SI

Nazwa wielkości fizycznej	Jednostka		
	Nazwa	Oznaczenie	Definicja
Długość	metr	m	metr jest to droga, jaką światło przebywa w próżni w czasie $1/299792458$ sekundy metr to długość równa $1650763,73$ długości fali w próżni promieniowania odpowiadającego przejściu między poziomami $2p_{10}$ i $5d_5$ atomu kryptonu $^{86}_{30}\text{Kr}$
Masa	kilogram	kg	kilogram jest to masa wzorca kilograma, wykonanego ze stopu platyny (90%) z irydem (10%) w kształcie walca o średnicy podstawy równej jego wysokości
Czas	sekunda	s	sekunda jest to czas równy $9\,192\,631\,770$ okresów promieniowania odpowiadającego przejściu między dwoma nadsubtelnymi poziomami stanu podstawowego atomu cezu ^{133}Cs
Prąd elektryczny	amper	A	amper to natężenie prądu elektrycznego stałego, który płynąc w dwóch równoległych, prostoliniowych, nieskończenie długich przewodach o znikomo małym okrągłym przekroju, znajdujących się w próżni w odległości 1 m od siebie; powoduje powstanie między tymi przewodami siły równej $2 \times 10^{-7}\text{N}$ na każdy metr długości tych przewodów
Temperatura	kelwin	K	kelwin jest to $1/273,16$ część temperatury termodynamicznej punktu potrójnego wody
Liczność materii	mol	mol	mol jest to liczność materii występująca wtedy, gdy liczba cząsteczek jest równa liczbie atomów zawartych w masie $0,012\text{ kg}$ izotopu węgla ^{12}C , tj. $6,022169 \times 10^{23}$ cząsteczek
Światłość	kandela	cd	kandela to światłość, jaką ma w określonym kierunku źródło emitujące promieniowanie monochromatyczne o częstotliwości $5,4 \times 10^{14}\text{ Hz}$ i wydajności energetycznej w tym kierunku równej $1/683\text{ W/sr}$. kandela to również światłość, jaką ma w kierunku prostopadłym powierzchnia $1/600000\text{ m}^2$ ciała doskonale czarnego w temperaturze krzepnięcia platyny pod ciśnieniem $101\,325\text{ Pa}$

Uzupełniająca jednostki układu SI

Nazwa wielkości fizycznej	Jednostka		
	Nazwa	Oznaczenie	Definicja
Kąt płaski	radian	rad	radian to kąt płaski zawarty między dwoma promieniami koła, wycinającymi z okręgu tego koła łuk o długości równej jego promieniowi $1 \text{ rad} = 180/\pi \approx 57^\circ 17' 44,8''$
Kąt bryłowy	steradian	sr	steradian jest to kąt bryłowy o wierzchołku w środku kuli, wycinający z jej powierzchni obszar o polu równym polu kwadratu, którego bok jest równy promieniowi kuli

Jednostki pochodne wybranych wielkości układu SI

Nazwa wielkości fizycznej	Nazwa jednostki	Oznaczenie	Związek z jednostkami podstawowymi	Zależności
I. Wielkości mechaniczne				
Prędkość liniowa	metr na sekundę	m/s	$1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	
Prędkość kąтова	radian na sekundę	rad/s	$1 \text{ s}^{-1} \cdot \text{rad}$	
Przyspieszenie liniowe	metr na kwadrat sekundy	m/s^2	$1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	
Przyspieszenie kątowe	radian na kwadrat sekundy	rad/s^2	$1 \text{ s}^{-2} \cdot \text{rad}$	
Pęd	kilogramometr na sekundę	$\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}$	$1 \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$	
Siła	niuton	N	$1 \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$	$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$

Nazwa wielkości fizycznej	Nazwa jednostki	Oznaczenie	Związek z jednostkami podstawowymi	Zależności
Moment siły	niutonometr	$N \cdot m$	$1m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$	
Moment bezwładności	kilogram razy metr kwadratowy	$kg \cdot m^2$	$1kg \cdot m^2$	
Popęd siły	niutonosekunda	$N \cdot s$	$1m \cdot kg \cdot s^{-1}$	
Ciśnienie, naprężenie	paskal	Pa	$1m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$	$1Pa = 1N/m^2$
Napięcie powierzchniowe	niuton na metr	N/m	$1kg \cdot s^{-2}$	
Gęstość	kilogram na metr sześcienny	kg/m^3	$1m^{-3} \cdot kg$	
Objętość właściwa	metr sześcienny na kilogram	m^3/kg	$1m^3 \cdot kg^{-1}$	
Ciążar właściwy	niuton na metr sześcienny	N/m^3	$1m^{-2} \cdot kg \cdot s^{-2}$	
Lepkość dynamiczna	paskalosekunda	$Pa \cdot s$	$1m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-1}$	
Lepkość kinematyczna	metr kwadratowy na sekundę	m^2/s	$1m^2 \cdot s^{-1}$	
Energia, praca	dżul	J	$1m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$	$1J = 1N \cdot m$
Moc	wat	W	$1m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$	$1W = 1J/s$
Częstość kołowa, częstotliwość	herc	Hz	$1 \cdot s^{-1}$	$1Hz = 1/s$

Nazwa wielkości fizycznej	Nazwa jednostki	Oznaczenie	Związek z jednostkami podstawowymi	Zależności
II. Wielkości cieplne				
Ciepło, energia wewnętrzna	dżul	J	$1\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$	
Pojemność cieplna	dżul na kelwin	J/K	$1\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$	
Ciepło molowe	dżul na mol i kelwin	J/(mol · K)	$1\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$	
Ciepło właściwe	dżul na kilogram i kelwin	J/(kg · K)	$1\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$	
Przewodność cieplna	wat na metr i kelwin	W/(m · K)	$1\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$	
III. Wielkości elektryczne i magnetyczne				
Ładunek elektryczny	kulomb	C	$1\text{s} \cdot \text{A}$	$1\text{C} = 1\text{A} \cdot \text{s}$
Gęstość prądu elektrycznego	amper na metr kwadratowy	A/m ²	$1\text{m}^{-2} \cdot \text{A}$	
Napięcie elektryczne, potencjał elektryczny, siła elektromotoryczna	wolt	V	$1\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$	$1\text{V} = 1\text{J}/\text{C}$
Natężenie pola elektrycznego	wolt na metr	V/m	$1\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$	$1\text{V}/\text{m} = 1\text{N}/\text{C}$
Indukcja elektryczna	kulomb na metr kwadratowy	C/m ²	$1\text{m}^{-2} \cdot \text{s} \cdot \text{A}$	
Pojemność elektryczna	farad	F	$1\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$	$1\text{F} = 1\text{C}/\text{V}$

Nazwa wielkości fizycznej	Nazwa jednostki	Oznaczenie	Związek z jednostkami podstawowymi	Zależności
Opór elektryczny	om	Ω	$1\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}$	$1\Omega = 1\text{V}/\text{A}$
Opór elektryczny właściwy	om razy metr	$\Omega \cdot \text{m}$	$1\text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}$	
Przewodność elektryczna	simens	S	$1\text{m}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{A}^2$	$1\text{S} = 1/\Omega$
Przewodność elektryczna właściwa	simens na metr	S/m	$1\text{m}^{-3} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{A}^2$	
Indukcja magnetyczna	tesla	T	$1\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$	$1\text{T} = 1\text{N}/(\text{A} \cdot \text{m})$
Strumień magnetyczny	weber	Wb	$1\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}$	$1\text{Wb} = 1\text{T} \cdot \text{m}^2$
Natężenie pola magnetycznego	amper na metr	A/m	$1\text{m}^{-1} \cdot \text{A}$	
Indukcyjność	henr	H	$1\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$	$1\text{H} = 1\text{V} \cdot \text{s}/\text{A}$
Moc prądu	wat	W	$1\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3}$	$1\text{W} = 1\text{A} \cdot \text{V}$
Przenikalność magnetyczna	henr na metr	H/m	$1\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$	

IV. Wielkości świetlne

Natężenie oświetlenia	luks	lx	$1\text{m}^{-2} \cdot \text{cd} \cdot \text{sr}$	$1\text{lx} = 1\text{lm}/\text{m}^2$
Strumień świetlny	lumen	lm	$1\text{cd} \cdot \text{sr}$	
Luminancja (blask, jaskrawość)	kandela na metr kwadratowy	cd/m^2	$1\text{m}^{-2} \cdot \text{cd}$	

Nazwa wielkości fizycznej	Nazwa jednostki	Oznaczenie	Związek z jednostkami podstawowymi	Zależności
V. Parametry promieniowania jonizującego				
Dawka pochłonięta	grej	Gy	$1\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$	$1\text{Gy} = 1\text{J}/\text{kg}$
Natężenie napromieniowania	wat na metr kwadratowy	W/m^2	$1\text{kg} \cdot \text{s}^{-3}$	
Dawka ekspozycyjna	kulomb na kilogram	C/kg	$1\text{s} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{A}$	
Moc dawki pochłoniętej	grej na sekundę	Gy/s	$1\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$	$1\text{Gy}/\text{s} = 1\text{W}/\text{kg}$
Moc dawki ekspozycyjnej	amper na kilogram	A/kg	$1\text{kg}^{-1} \cdot \text{A}$	
Równoważnik dawki pochłoniętej	siwert	Sv	$1\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$	1Sv odpowiada dawce pochłoniętej 1 Gy przy działaniu promieniowania rentgenowskiego lub promieniowania γ
Aktywność	jeden na sekundę	$1/\text{s}$	s^{-1}	

Jednostki pozaukładowe dopuszczone do użytku w fizyce

Nazwa wielkości fizycznej	Nazwa jednostki	Oznaczenie	Związek z jednostką SI
Masa	tona jednostka masy atomowej	t u	$1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$ $1 \text{ u} = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Czas	minuta godzina doła	min h d	$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$ $1 \text{ d} = 86400 \text{ s}$
Długość	jednostka astronomiczna rok świetlny parsek angstrom	AU r. św. ps Å	$1 \text{ AU} = 1,4960 \cdot 10^{11} \text{ m}$ $1 \text{ r. św.} = 9,4605 \cdot 10^{15} \text{ m}$ $1 \text{ ps} = 3,084 \cdot 10^{16} \text{ m}$ $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$
Kąt płaski	stopień minuta sekunda	° ' "	$1^\circ = \pi/180 \text{ rad} = 1,745 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$ $1' = \pi/10800 \text{ rad} = 2,909 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ $1'' = \pi/648000 \text{ rad} = 4,848 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$
Pole powierzchni	barn	b	$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$
Objętość	litr	l	$1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3$
Temperatura Celsjusza	stopień Celsjusza	°C	temp. Celsjusza $t = T - 273,15$, gdzie T – temperatura termodynamiczna. Wielkość stopnia Celsjusza jest taka sama jak Kelwina: $1 \text{ deg} = 1^\circ\text{C} = 1\text{K}$
Energia	elektronowolt	eV	$1 \text{ eV} = 1,60217 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
Zdolność skupiająca	dioptria	D	$1 \text{ D} = 1 \text{ m}^{-1}$

Wybrane jednostki spoza układu SI

Nazwa wielkości	Nazwa jednostki	Oznaczenie	Związek z jednostką SI
Wielkości geometryczne i czas			
Długość	mila morska		1 mila morska = 1852m
	kabel		1 kabel = 0,1 mili morskiej = 185,2m
	punkt typograficzny		1 punkt typograficzny $= \frac{1}{2660} \text{ m} \approx 3,76 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
	cycero		1 cycero = $\frac{12}{2660} \text{ m} \approx 4,51 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
	kwadrat		1 kwadrat = $\frac{48}{2660} \text{ m} \approx 1,80 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
Pole powierzchni	ar	a	1 a = 100m ²
	hektar	ha	1 ha = 100 a = 10000 m ²
Kąt płaski	grad	g	1 ^g = $\frac{2\pi}{400} \text{ rad} \approx 15,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$
	rumb		1 rumb = $\frac{2\pi}{32} \text{ rad} \approx 19,6 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$
Wielkości mechaniczne			
Prędkość liniowa	kilometr na godzinę	km/h	1 km/h = $\frac{1}{3,6} \text{ m/s} \approx 0,28 \text{ m/s}$
	węzeł		1 węzeł = 1 mila morska/h = $= \frac{1852}{3600} \text{ m/s} \approx 0,514 \text{ m/s}$
Prędkość kątowna	obrót na sekundę	obr/s	1 obr/s = 2π rad/s
	obrót na minutę	obr/min	1 obr/min = $\frac{2\pi}{60} \text{ rad/s}$

Nazwa wielkości	Nazwa jednostki	Oznaczenie	Związek z jednostką SI
Masa	kwintal karat	q ct	1 q = 100kg 1 ct = $2 \cdot 10^{-4}$ kg
Gęstość	gram na centymetr sześcienny gram na mililitr	g/cm ³ g/ml	1 g/cm ³ = 1kg/dm ³ = 1000kg/m ³ 1 g/ml = 1000kg/m ³
Siła	kilogram-siła	1kG	1 kG = 9,80665 N
Moment siły	kilogram-siła razy metr	kG · m	1 kG · m = 9,80665 N · m
Praca, energia	kilogram-siła razy metr	kG · m	1 kG · m = 9,80665 J
Ciśnienie	atmosfera techniczna bar atmosfera fizyczna tor milimetr słupa rtęci milimetr słupa wody	at bar atm Tr mmHg mmH ₂ O	1 at = 98066,5 Pa 1 bar = 10 ⁵ Pa 1 atm = 101325 Pa 1 Tr = 133,322 Pa 1 mm Hg = 133,322 Pa 1 mm H ₂ O = 9,80665 Pa
Lepkość kinematyczna	stokes	St	1 St = 10 ⁻⁴ m ² /s
Lepkość dynamiczna	puaz	P	1 P = 10 ⁻¹ Pa·s
Naprężenie mechaniczne	kilogram-siła na centymetr kwadratowy kilogram-siła na milimetr kwadratowy	kG/cm ² kG/mm ²	1 kG/cm ² = 98066,5 Pa 1 kG/mm ² = 100 kG/cm ² = 9806650 Pa
Moc	koń mechaniczny	KM	1 KM = 735,49875 W

Nazwa wielkości	Nazwa jednostki	Oznaczenie	Związek z jednostką SI
Wielkości cieplne			
Ciepło	kaloria	cal	1 cal = 4,1868 J
Ciepło właściwe	kaloria na gram i stopień Celsjusza	cal/(g · °C)	1 cal/(g · °C) = 4186,8 J/(kg · °C)
Wielkości elektryczne i magnetyczne			
Energia	watosekunda kilowatogodzina	W · s kW · h	1 W · s = 1J 1 kWh = 3,6 · 10 ⁶ J
Ładunek elektryczny	amperogodzina	A · h	1 A · h = 3600C
Gęstość prądu elektrycznego	amper na milimetr kwadratowy	A/mm ²	1 A/mm ² = 10 ⁶ A/m ²
Opór właściwy	Om razy milimetr kwadratowy na metr	$\Omega \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$	10 ⁻⁶ Ω · m
Indukcja manetyczna	gaus	Gs	1 Gs = 10 ⁻⁴ T
Wielkości akustyczne			
Poziom natężenia dźwięku	decybel	dB	1 dB odpowiada natężeniu dźwięku I takiemu, że $10 \log \frac{I}{I_0} = 1$, $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$
Poziom głośności	fon	fon	1 fon jest to poziom głośności dźwięku słyszanego tak jak dźwięk o częstotliwości 1kHz i poziomie natężenia 1 dB

Nazwa wielkości	Nazwa jednostki	Oznaczenie	Związek z jednostką SI
Parametry promieniowania jonizującego			
Dawka pochłonięta	rad	rad	$1 \text{ rad} = 10^{-2} \text{ Gy}$
Dawka ekspozycyjna	rentgen	R	$1 \text{ R} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ C/kg}$
Moc dawki pochłoniętej	rad na sekundę rad na minutę rad na godzinę	rad/s rad/min rad/h	$1 \text{ rad/s} = 10^{-2} \text{ Gy/s}$ $1 \text{ rad/min} \approx 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ Gy}$ $1 \text{ rad/h} \approx 2,78 \cdot 10^{-6} \text{ Gy}$
Moc dawki ekspozycyjnej	rentgen na sekundę rentgen na minutę rentgen na godzinę	R/s R/min R/h	$1 \text{ R/s} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ A/kg}$ $1 \text{ R/min} \approx 4,30 \cdot 10^{-6} \text{ A/kg}$ $1 \text{ R/h} \approx 7,17 \cdot 10^{-8} \text{ A/kg}$
Równoważnik dawki pochłoniętej	rem	rem	$1 \text{ rem} = 10^{-2} \text{ Sv}$

Przedrostki do tworzenia nazw jednostek wtórnych

Nazwa przedrostka	Skrót przedrostka	Mnożnik	Przykłady
eksa	E	$10^{18} = 1000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$	Eg – Eksagram
peta	P	$10^{15} = 1000\ 000\ 000\ 000\ 000$	Pm – Petametr
tera	T	$10^{12} = 1000\ 000\ 000\ 000$	Ts – Terasekunda
giga	G	$10^9 = 1000000000$	GHz – gigaherc
mega	M	$10^6 = 1000\ 000$	MW – megawat
kilo	k	$10^3 = 1000$	kΩ – kiloom
hekto	h	$10^2 = 100$	hl – hektolitr
deka	da	$10^1 = 10$	dag – dekagram
jednostka	–	$10^0 = 1$	–
decy	d	$10^{-1} = 0,1$	dm – decymetr
centy	c	$10^{-2} = 0,01$	cm – centymetr
mili	m	$10^{-3} = 0,001$	mg – miligram
mikro	u	$10^{-6} = 0,000\ 001$	μC – mikrokolumb
nano	n	$10^{-9} = 0,0000\ 000\ 01$	nm – nanometr
piko	p	$10^{-12} = 0,000\ 000\ 000\ 001$	pf – pikofarad
femto	f	$10^{-15} = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 001$	fs – femtosekunda
atto	a	$10^{-18} = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001$	ag – attogram

Jednostki niemetryczne stosowane w krajach anglosaskich

Nazwa wielkości	Nazwa jednostki		Skrót	Zależności
	polska	angielska		
Długość				
	cal	inch	in	1 in = 10 li = 1/36 yd = 2,54 cm 1 cm = 0,3937 in
	stopa	foot	ft	1 ft = 12 in = 30,48 cm 1 m = 3,281 ft
	jard	yard	yd	1 yd = 3 ft = 36 in = 0,9144 m
	sążęń	fathom	fm	1 fm = 2 yd = 6 ft = 72 in = 1,8288 m
	staje	furlong	fur	1 fur = 10 chain = 40 rod = 220 yd = 201,168 m
	mila lądowa angielska	statute mile = British mile	mile	1 M = 8 fur = 1760 yd = 5280 ft = 1609,344 m 1 km = 0,62139 M
	mila morska angielska	British nautical mile	NM	1 NM = 2027 yd = 6080 ft = 1852,184 m 1 km = 0,5396 NM
Powierzchnia				
	cal kwadratowy	square inch	sq in	1 sq in = 100 sq li = 6,4516 cm ² 1 cm ² = 0,155 sq in
	stopa kwadratowa	square foot	sq ft	1 sq ft = 144 sq in = 0,0929 m ² 1 m ² = 10,763 sq ft
	jard kwadratowy	square yard	sq yd	1 sq yd = 9 sq ft = 0,8361 m ² 1 m ² = 1,196 sq yd
	akr	acre	ac	1 ac = 4840 sq yd = 0,4047 ha 1 ha = 2,471 ac
	mila kwadratowa	mile of land = square mile	sq M	1 sq M = 640 ac = 2,5899 km ² 1 km ² = 0,3861 sq M
Objętość (ciała stałe)				
	cal sześcienny	cubic inch	cu in	1 cu in = 1000 cu li = 16,387 cm ³ 1 cm ³ = 0,061 cu in
	stopa sześcienna	cubic foot	cu ft	1 cu ft = 1728 cu in = 28,317 dm ³ 1 dm ³ = 0,0353 cu ft
	jard sześcienny	cubic yard	cu yd	1 cu yd = 27 cu ft = 0,7646 m ³ 1 m ³ = 1,3079 cu yd

Nazwa wielkości	Nazwa jednostki		Skrót	Zależności
	polska	angielska		
	sążen sześcienny	cubic fathom	cu fm	1 cu fm = 216 cu ft = 6,116 m ³ 1 m ³ = 0,1635 cu fm
	tona rejestrowa	register ton	RT	1 RT = 100 cu ft = 2,8317 m ³ 1 m ³ = 0,3531 RT
Objętość (cieczy)				
	półkwarta	liquid pint	pt	1 pt = 4 gills = 0,568 l 1 l = 1,7606 pt
	kwarta	liquid quart	qt	1 qt = 2 pt = 1,136 l 1 l = 0,8795 qt
	galon	liquid imperial gallon	imp gal	1 imp gal = 2 bottles = 4,5459 l 1 l = 0,22 imp gal
	butla	bottle	-	1 bottle = 2 qt = 2,274 l 1 l = 0,4398 bottle
	beczka (baryłka)	barrel	bbl	1 bbl = 36 imp gal = 163,656 l 1 l = 0,00611 bbl
Objętość (ciała sypkie)				
	galon	dry gallon	gal	1 gal = 0,5 pk = 4,546 l 1 l = 0,2201 gal
	garniec	peck	pk	1 pk = 2 gal = 0,25 bu = 9,092 l 1 l = 0,11 pk
	buszel	bushel	bu	1 bu = 4 pk = 8 gla = 36,368 l 1 l = 0,0275 bu
Masa (jednostki wag stosowane w handlu)				
	gran	grain	gr (av)	1 gr (av) = 1/7000 lb (av) = 0,0648 g 1 g = 15,432 gr (av)
	drachma	dram	dr (av)	1 dr (av) = 1/16 oz (av) = 1,722 g 1 g = 0,5808 dr (av)
	uncja	ounce	oz (av)	1 oz (av) = 16 dr (av) = 28,3495 g 1 g = 0,03527 oz (av)
	funt	pound	lb (av)	1 lb (av) = 16 oz (av) = 256 dr (av) = = 7000 gr (av) = 0,45359 kg 1 kg = 2,2046 lb (av)

Nazwa wielkości	Nazwa jednostki		Skrót	Zależności
	polska	angielska		
-		stone	stn (av)	1 stn (av) = 14 lb (av) = 6,3503 kg 1 kg = 0,1575 stn (av)
ćwiartka		quater	qr (av)	1 qr (av) = 28 lb (av) = 12,7 kg 1 kg = 0,0787 qr (av)
cetnar		hundred weight	cwt	1 cwt = 4 qr = 112 lb (av) = 50,8023 kg 1 kg = 0,0197 cwt
tona angielska		long ton	l tn	1 l tn = 20 cwt = 80 qr = 2240 lb (av) = 1,016 t 1 t = 0,9843 l tn

Masa (jednostki wag stosowane w farmacji i jubilerstwie)

funt jubilerski	troy pound	lb (tr)	1 lb (tr) = 12 oz (tr) = 0,3732 kg 1 kg = 2,6795 lb (tr)
uncja jubilerska	troy ounce	oz (tr)	1 oz (tr) = 20 pwt = 1/12 lb (tr) = 31,103 g 1 g = 0,0322 oz (tr)
-	penny weight	pwt	1 pwt = 24 gr (av) = 1,555 g 1 g = 0,643 pwt
drachma apteczna	dram (ap)	dr ap	1 dr ap = 60 gr (av) = 1/8 oz (tr) = 3,888 g 1 g = 0,2572 dr ap
uncja apteczna	ounce (ap)	oz ap	1 oz ap = 480 gr (av) = 20 pwt = 31,103 g 1 g = 0,0322 oz ap
funt apteczny	pound (ap)	lb ap	1 lb ap = 5760 gr (av) = 0,3732 kg 1 kg = 2,6795 lb ap

Temperatura

stopień Fahrenheita		°F, deg F	$1 \text{ deg F} = \frac{5}{9} \text{ deg} = \frac{5}{9} \text{ K} = \frac{5}{9} \text{ K}$ (deg oznacza różnicę temperatur lub działkę skali) $t_F = \frac{9}{5} (T - 255,37) = \frac{9}{5} t + 32$ (T – temperatura w skali Kelwina, t – temperatura w skali Celsjusza, t _F – temperatura w skali Fahrenheita)
---------------------	--	-----------	--

Prędkość w przyrodzie

Włosy na głowie	1 cm/miesiąc
Lodowiec	25 m/miesiąc
Ślimak	2 mm/s
Piechur	1,5 m/s
Mucha	18 km/h
Rekin	30 km/h
Słoń	40 km/h
Żyrafa	50 km/h
Wilk	55-60 km/h
Gołąb pocztowy	60-70 km/h
Delfin	70 km/h
Orzeł	90 km/h
Ryba miecz	95 km/h
Gepard	110 km/h

Prędkość w astronomii i kosmonautyce

Punkt na równiku Ziemi w obrocie wokół osi	0,464 km/s
Księżyc wokół Ziemi	1 km/s
Ziemia wokół Słońca	30 km/s
Słońce wokół centrum galaktyki	250 km/s
I prędkość kosmiczna	7,91 km/s
II prędkość kosmiczna	11,2 km/s
III prędkość kosmiczna	16,7 km/s
Światło	300 000 km/s

Przyspieszenie spadku swobodnego ($g, \text{m/s}^2$) na różnych wysokościach ($h, \text{m/s}^2$) nad powierzchnią Ziemi

h, km	$g, \text{m/s}^2$	h, km	$g, \text{m/s}^2$
0	9,8066	20	9,7452
1	9,8036	50	9,6542
2	9,8005	80	9,5644
3	9,7974	100	9,505
4	9,7943	120	9,447
5	9,7912	500	8,45
6	9,7882	1 000	7,36
8	9,7820	10 000	1,50
10	9,7759	50 000	0,125
15	9,7605	400 000	0,0025

Przyspieszenie spadku swobodnego ($g, \text{m/s}^2$) na różnych szerokościach geograficznych na poziomie morza

Szerokość geograficzna °	Przyspieszenie $g, \text{m/s}^2$	Szerokość geograficzna °	Przyspieszenie $g, \text{m/s}^2$
0°	9,78049	45°	9,80616
10	9,78204	60	9,81924
20	9,78652	70	9,82614
30	9,79338	80	9,83065
40	9,80180	90	9,83235

Przyspieszenie spadku swobodnego ($g, \text{m/s}^2$) na powierzchni różnych ciał niebieskich

Ciało niebieskie	$g, \text{m/s}^2$	Ciało niebieskie	$g, \text{m/s}^2$
Księżyc	1,62	Saturn	9,74
Merkury	3,68-3,74	Ziemia	9,81
Mars	3,86	Neptun	11,0
Uran	7,51	Jowisz	23,95
Wenus	8,88	Słońce	273,8

Własności sprężyste i wytrzymałościowe ciał stałych

Material	Moduł sprężystości podłużnej Younga E , GPa	Moduł sprężystości poprzecznej (postaciowej) G , GPa	Wytrzymałość na zerwanie R_r , MPa
Metale i stopy			
Antymon	76	20	100
Bizmut	33	–	5
Brąz odlewany	100 ÷ 110	37	150 ÷ 250
Cyna odlewana	42	–	30 ÷ 40
Cynk walcowany	87	32	190 ÷ 250
Glin odlewany	63	27	90 ÷ 120
Glin walcowany	75	27	120 ÷ 180
Kadm	51	–	60
Mosiądz	90 ÷ 100	32 ÷ 36	150 ÷ 450
Miedź walcowana	115	40	210 ÷ 240
Miedź przeciągana	130	49	450 ÷ 500
Nikiel walcowany	210	–	800 ÷ 1000
Ołów	15 ÷ 17	7	13
Platyna	160 ÷ 170	62	200
Srebro	80	29	180 ÷ 220
Stal niskowęglowa	200	81	
Stal wysokowęglowa	210	81	
Stal niklowo-chromowa	209	81	900 ÷ 1200
Wolfram	410	–	730-1500
Złoto	76 ÷ 81	28	100
Żeliwo	90 ÷ 115	35 ÷ 45	120 ÷ 330
Żelazo α	210	81	350
Materiały niemetaliczne			
Bakelit	6	–	50 ÷ 60
Beton	10 ÷ 30	–	–
Celuloid	ok. 2	–	60

Material	Moduł sprężystości podłużnej Younga E , GPa	Moduł sprężystości poprzecznej (postaciowej) G , GPa	Wytrzymałość na rozzerwanie R_r , MPa
Dąb (wzdłuż włókien)	14	–	80
Drewno (wzdłuż włókien)	10 ÷ 18	–	75 ÷ 180
Guma miękka	0,0015 ÷ 0,005	0,0005 ÷ 0,0015	–
Jedwab naturalny	6,50	1,30	260
Kwarcowa nitka	51,80	30	–
Lód	5 ÷ 10	2,80 ÷ 30,00	4
Nylon	2,30 ÷ 3,80	–	460 ÷ 820
Plexi	2,80 ÷ 4,20	–	40 ÷ 70
Porcelana	0,80	–	ok. 2000
Skóra	0,25 ÷ 0,35	–	–
Sosna (wzdłuż włókien)	12	–	5
Szkło	47 ÷ 79	ok. 27	28 ÷ 60

Właściwości wytrzymałościowe materiałów zależą w znacznym stopniu od czystości materiału, jego struktury i uprzedniej obróbki. Liczby podane w tabeli są więc przybliżone i należy traktować je jako dane orientacyjne.

**Gęstość ciał stałych (ρ , 10^3 kg/m^3)
w warunkach normalnych**

Substancja	ρ , 10^3 kg/m^3
Pierwiastki w stanie czystym	
Antymon	6,618
Bar	3,50
Beryl	1,84
Bismut	9,747
Cez	1,873
Chrom	7,19
Cyna (szara)	7,29
Cynk	7,13
Fosfor (biały)	1,83
German	5,32
Glin	2,70
Jod	4,94
Krzem	2,33
Lit	0,534
Magnez	1,741
Mangan	7,43
Miedź	8,96
Molibden	10,22
Nikiel	8,91
Olów	11,342
Platyna	21,41
Potas	0,862
Rod	12,44
Siarka	1,96-2,07
Sód	0,9712
Tal	11,86
Tor	11,78
Uran	19,07
Wapń	1,55
Węgiel (diament)	3,52
Węgiel (grafit)	2,10-2,30
Wolfram	19,27
Złoto	19,32
Żelazo	7,87

Substancja	ρ , 10^3 kg/m ³
Stopy metali	
Braź (90% Cu, 10% Sn)	8,8-8,9
Konstantan (60% Cu; 40% Ni)	8,88
Manganin (84% Cu; 12% Mn; 4% Ni)	8,5
Nikielina (67% Cu; 30% Ni; 3% Mn)	8,6-8,85
Stal	7,7-7,9
Żeliwo	6,6-7,7
Drewno	
Dąb	0,60-1,00
Lipa	0,32-0,59
Sosna	0,40-0,70
Jesion	0,65-0,85
Topola	0,30-0,50
Minerały	
Bazalt	2,4-3,1
Gips	2,31-2,33
Granit	2,64-2,76
Węgiel (antracyt)	1,4-1,8
Inne substancje	
Beton	1,8-2,4
Ebonit	1,2
Lód	0,917
Szkło	2,4-2,8
Wosk	0,965

Gęstość cieczy (ρ , 10^3 kg/m^3)

Ciecz	t °C	ρ , 10^3 kg/m^3
Aceton	20	0,792
Alkohol etylowy	20	0,7893
Alkohol metylowy	20	0,7928
Benzen	0	0,899
Benzyna	20	0,68-0,72
Bromek etylu	20	1,430
Chlorek etylu	0	0,9214
Chlorobenzen	20	1,066
Chloroform	20	1,489
Czterochlorek węgla	20	1,595
Dwusiarczek węgla	0	1,293
Eter	0	0,736
Gliceryna	20	1,26
Jodek etylu	20	1,933
Kwas azotowy	20	1,502
Kwas mrówkowy	20	1,22
Kwas octowy	20	1,049
Kwas siarkowy	20	1,83
Kwas solny	20	1,19
Mleko	20	1,03
Morska woda	20	1,01-1,05
Nafta	20	0,82
Octan metylu	25	0,9274
Olej maszynowy	20	0,90-0,92
Olej parafinowy	20	0,87-0,88
Terpentyna	20	0,87
Ropa naftowa	20	0,81-0,85
Rtęć	0	13,596
Toluen	20	0,866
Woda	4	0,99997
Woda (ciężka)	20	1,1086

Gęstość gazów i par (ρ , 10^3 kg/m^3) w warunkach normalnych

Pierwiastek lub związek	Wzór	ρ , kg/m^3
Acetylen	C_2H_2	1,1709
Amoniak	NH_3	0,7714
Argon	Ar	1,7839
Azot	N_2	1,2505
Bromowodór	HBr	3,664
Butan	C_4H_{10}	2,703
Chlor	Cl_2	3,22
Chlorowodór	HCl	1,6391
Dwutlenek siarki	SO_2	2,93
Dwutlenek węgla	CO_2	1,9768
Etan	C_2H_6	1,356
Etylen	C_2H_4	1,2605
Fluor	F_2	1,695
Hel	He	0,1785
Jodowodór	HJ	5,789
Krypton	Kr	3,745
Ksenon	Xe	5,851
Metan	CH_4	0,7168
Neon	Ne	0,8999
Ozon	O_3	2,22
Podtlenek azotu	N_2O	1,978
Powietrze	-	1,2928
przy 20 °C	-	1,206
przy 100 °C	-	0,945
przy 1000 °C	-	0,277
Propan	C_3H_8	2,0037
Propylen	C_3H_6	1,915
Radon	Rn	9,73
Siarkowodór	H_2S	1,5392
Tlen	O_2	1,42904
Tlenek azotu	NO	1,3402
Tlenek węgla	CO	1,2500
Wodór	H_2	0,08987

Lepkość cieczy (η , 10^{-3} Pa·s)

Substancja	Przy temperaturze t , °C				
	0	10	20	50	100
Alkohol etylowy	1,78	1,41	1,19	0,701	0,326
Alkohol metylowy	0,817	0,68	0,584	0,396	–
Anilina	10,2	6,5	4,40	1,80	0,80
Aceton	0,395	0,356	0,322	0,246	–
Benzen	0,91	0,76	0,65	0,436	0,261
Brom	1,253	1,107	0,992	0,746	–
Chloroform	0,70	0,63	0,57	0,426	–
Czterochlorek węgla	1,35	1,13	0,97	0,65	0,387
Gliceryna	12100	3950	1499	180	–
Kwas octowy	–	–	1,22	0,74	0,46
Rtęć	1,685	1,615	1,554	1,407	1,240

Lepkość wody (η , 10^{-6} Pa·s) w różnych temperaturach (t , °C)

t , °C	η	t , °C	η	t , °C	η	t , °C	η
0	1797	25	895	70	407	120	232
5	1518	30	803	80	357	130	212
10	1307	40	655	90	317	140	196
15	1140	50	551	100	284	150	184
20	1004	60	470	110	256	160	174

Lepkość (η , 10^{-6} Pa·s) gazów i par w różnych temperaturach (t , °C)

Gaz, para	t °C	η 10^{-6} Pa·s
Argon	23	22,1
Azot	0	16,7
	15	17,4
	23	17,7
Chlor	20	13,2
Dwutlenek węgla	0	13,7
	23	14,7
Hel	0	18,6
	23	19,8
Metan	17	10,9
Neon	0	29,7
Para eteru	14,2	7,2
Para rtęci	0	16,2
	300	53,2
Para wodna	0	8,7
	100	12,3
Powietrze	0	17,2
	16	18,1
	21,6	18,4
Tlen	0	19,2
	14,2	19,7
	23,0	20,4
Tlenek węgla	0	16,6
	15	17,4
Wodór	0	8,4
	28,1	8,9

Napięcie powierzchniowe cieczy (σ , 10^{-3} N/m)

Substancja	Wzór	t , °C	σ , 10^{-3} N/m
Aceton	CH_3COOH_3	16,8	23,35
Alkohol etylowy	$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$	20,0	22,03
Alkohol metylowy	CH_3OH	20,0	23,02
Anilina	$\text{C}_6\text{H}_5\text{NH}_2$	19,5	40,84
Benzen	C_6H_6	17,5	29,16
Chloroform	CHCl_3	25,0	26,2
Czterochlorek węgla	CCl_4	20,0	25,68
Eter etylowy	$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$	25,3	16,7
Gliceryna	$\text{C}_3\text{H}_5(\text{OH})_3$	18,0	64,7
Heksan	C_6H_{14}	8,2	18,54
Nafta	-	0	28,9
Rtęć	Hg	20,0	471,6
Toluen	C_7H_8	17,5	28,52
Woda	H_2O	20,0	72,58

Skład chemiczny powietrza

Gaz	Udział objętościowy %	Udział masowy %
Azot	78,09	75,53
Tlen	20,95	23,14
Argon	0,93	1,28
Dwutlenek węgla	0,03	0,045
Neon	0,0018	0,0012
Hel	0,00053	0,000073
Metan	0,00015	0,000084
Krypton	0,0001	0,003
Podtlenek azotu	0,00005	0,000008
Wodór	0,00005	0,000003
Ozon	0,00004	0,00007
Ksenon	0,000008	0,00004

Cisnienie atmosferyczne (p , kPa) na różnych wysokościach (h , km) nad powierzchnią Ziemi

h , km	p , kPa	h , km	p , kPa	h , km	p , kPa
0	101,325	5	54,048	10	26,500
1	89,876	6	47,218	20	5,5
2	79,501	7	41,105	30	1,2
3	70,120	8	35,652	50	$8,0 \cdot 10^{-1}$
4	61,660	9	30,801	100	$3,2 \cdot 10^{-5}$
				120	$2,6 \cdot 10^{-6}$

Gęstość atmosfery (ρ , kg/m³) na różnych wysokościach (h , km) nad powierzchnią Ziemi

h , km	ρ , kg/m ³	h , km	ρ , kg/m ³	h , km	ρ , kg/m ³
0	1,225	10	0,414	50	$1,027 \cdot 10^{-3}$
1	1,112	12	0,312	60	$3,097 \cdot 10^{-4}$
2	1,007	16	0,166	70	$8,285 \cdot 10^{-5}$
4	0,819	20	$8,891 \cdot 10^{-2}$	80	$1,846 \cdot 10^{-5}$
6	0,660	30	$1,841 \cdot 10^{-2}$	90	$3,418 \cdot 10^{-6}$
8	0,526	40	$4,000 \cdot 10^{-3}$	100	$5,550 \cdot 10^{-7}$
				120	$2,440 \cdot 10^{-8}$

Gęstość wody (ρ , kg/m³) w różnych temperaturach (t , °C) (pod ciśnieniem 101 325 Pa)

t , °C	ρ , kg/m ³	t , °C	ρ , kg/m ³	t , °C	ρ , kg/m ³
0	999,84	10	999,70	20	998,20
1	999,90	11	999,60	25	997,04
2	999,94	12	999,49	30	995,64
3	999,96	13	999,37	40	992,21
4	999,97	14	999,24	50	998,04
5	999,96	15	999,10	60	983,21
6	999,94	16	998,94	70	977,78
7	999,90	17	998,77	80	971,80
8	999,85	18	998,59	90	965,31
9	999,78	19	998,40	100	958,35

Współczynnik tarcia ślizgowego

Materiał	Współczynnik tarcia statycznego		Współczynnik tarcia kinetycznego	
	na sucho	ze smarem	na sucho	ze smarem
Drewno po drewnie	0,4- 0,6	0,1	0,2-0,5	0,07-0,15
Metal po drewnie	0,5- 0,6	0,1-0,2	0,3-0,6	0,1-0,20
Metal po metalu	0,15-0,30	0,1-0,2	0,15-0,20	0,05-0,20
Skóra po drewnie	0,4- 0,6	-	0,3-0,5	-
Skóra po metalu	0,3- 0,5	0,15	0,25	0,12-0,15
Stal po lodzie	0,02-0,03	-	0,015	-

Prędkość rozchodzenia się dźwięku (v , m/s) w ciałach stałych w temperaturze 20 °C

gdzie

 v – prędkość rozchodzenia się drgań podłużnych w cienkich prętach v_1 – prędkość rozchodzenia się drgań podłużnych w ośrodku nieskończenie rozciąglwym.

Metale	v m/s	v_1 m/s	Inne substancje	v m/s	v_1 m/s
Cyna	2730	3320	Bazalt		5930
Cynk	3810	4170	Lód (-4 °C)	3280	3980
Glin	5080	6260	Marmur		6150
Miedź	3710	4700	Polistyren		2350
Mosiądz	3490	4430	Porcelana	4880	5340
Nikiel	4790	5630	Szko flint	4000	4260
Ółów	1200	2160	Szko kwarcowe	5370	5570
Platyna	2800	3960	Szko plexi		2670
Srebro	2640	3600			
Złoto	2030	3240			
Żelazo	5170	5850			

Prędkość rozchodzenia się dźwięku (v , m/s) w cieczach

Ciecze	Temperatura °C	v , m/s
Aceton	20	1 190
Alkohol etylowy	20	1 180
Azot	-200	898
Benzen	20	1 330
Oliwa	20	1 450
Rtęć	20	1 450
Tlen	-200	960
Woda	20	1 480

Prędkość rozchodzenia się dźwięku (v , m/s) w gazach w warunkach normalnych

Gazy	v , m/s
Argon	308
Azot	336
Etan	301
Hel	981
Metan	418
Powietrze	331
Tlen	313
Tlenek węgla	254
Wodór	1 300

Liczba cząsteczek w 1 cm³ substancji

Gaz przy ciśnieniu:	
133,3 · 10 ⁻¹² Pa (10 ⁻¹² mmHg)	10 ⁵
133,3 · 10 ⁻¹⁰ Pa (10 ⁻¹⁰ mmHg)	10 ⁷
133,3 · 10 ⁻⁶ Pa (10 ⁻⁶ mmHg) atmosfera na wysokości 200 km	10 ⁵
Gaz w warunkach normalnych	10 ¹⁹
Ciecz	10 ²²
Ciała stałe	10 ²³

Średnia prędkość cząsteczek (v_s , m/s) gazów w warunkach normalnych

Gaz lub para	v_s , m/s	Gaz	v_s , m/s
Argon	380,8	Neon	535,1
Azot	454,3	Para wodna	566,5
Chlor	285,6	Tlen	425,1
Hel	1204,0	Tlenek węgla	454,5
Ksenon	210,8	Wodór	1692,0

Średnia prędkość (v_s , m/s) cząsteczek gazów w różnych temperaturach t , °C (pod ciśnieniem 101 325 Pa)

Gaz	v_s , m/s			
	0 °C	25 °C	100 °C	200 °C
Dwutlenek węgla CO ₂	362	379	422	475
Tlen O ₂	425	444	496	556
Wodór H ₂	1692	1770	1980	2232

Rozkład prędkości cząsteczek tlenu w warunkach normalnych

Zakres prędkości m/s	Udział procentowy cząsteczek o prędkościach w wybranym zakresie
100	1,4
100-200	8,1
200-300	16,7
300-400	21,5
400-500	20,3
500-600	15,1
600-700	9,2
>700	7,7

Liczba zderzeń na sekundę (n , $10^9/s$) i średnia droga swobodna (l , 10^{-8} m)

Gaz	n , $10^9/s$	l , 10^{-8} m
O ₂	6,7	6,3
CO ₂	9,4	3,9
N ₂	7,8	5,9
CO	7,8	5,9
H ₂	15,3	11,1
He	6,9	17,5
CH ₄	12,6	4,8

Współczynnik przewodnictwa cieplnego ciał stałych (λ , W/(m·K))

Substancja	t , °C	λ	Substancja	t , °C	λ
Pierwiastki w stanie czystym					
Antymon	20	19,0	Niob	27	53,0
Arsen	20	36,8	Ołów	20	34,75
Beryl	27	159,0	Osm	20	58,6
Bizmut	20	8,0	Pallad	20	71,0
Bor	27-87	1,5	Platyna	20	70,0
Cez	20	18,5	Potas	7	100,0
Chrom	27	77,0	Rod	18	88,0
Cyna	20	65,0	Rtęć	20°	8,2
Cynk	20	113,0	Selen	25	0,33-2,5
Cyrkon	20	21,4	Siarka	0	0,17-0,26
Gal	27	33,0	Sód	27	133,0
German	0	60,3	Srebro	27	418,0
Glin	27	218,0	Tal	27	39,0
Ind	20	25,0	Tantal	27	54,4
Iryd	20	58,6	Tellur	20	5,9
Jod	24,4	0,419	Tor	27	35,6
Kadm	20	44,0	Tytan	20	15,5
Kobalt	17	70,9	Uran	27	26,0
Krzem	0	84,0	Wanad	20	35,6
Lit	182	71,0	Wapń	0	125,0
Magnez	0	155,0	Węgiel	20	23,8
Miedź	20	395,0	Wolfram	27	167,0
Molibden	27	147,0	Złoto	0	310,0
Nikiel	20	88,0	Żelazo	0	75,0
Inne substancje					
Azbest	20°	0,16-0,37	Drewno	-	0,1-0,17
Lód	0°	2,22	Papier	-	0,06-0,13
Guma			Jedwab	0°	0,04-0,05
wulkanizowana	20°	0,22-0,29	Marmur	-	1,05
Szkoło crown	20°	1	Beton	20°	0,84-1,30
Szkoło flint	0°	0,79	Nichrom	-	12,2-17,1

Współczynnik przewodnictwa cieplnego cieczy (λ , W/(m·K))

Ciecz	t , °C	λ
Aceton	0	0,177
Alkohol etylowy	15	0,184
Alkohol metylowy	12	0,207
Benzen	12	0,139
Chloroform	12	0,121
Czterochlorek węgla	12	0,106
Dwuchloroetan	-	0,147
Gliceryna	12	0,281
Heksan	4	0,152
Kwas siarkowy 90%	32	0,354
Kwas solny 38%	32	0,440
Nafta	13	0,149
Toluen	0	0,0146
Woda	4,1	0,54
Woda ciężka	0	0,559

Współczynnik przewodnictwa cieplnego gazów (λ , W/(m·K)) pod ciśnieniem 101 325 Pa

Gaz	t , °C	λ
Amoniak	0	0,022
Argon	0	0,016
Azot	0	0,024
Chlor	0	0,007
Hel	0	0,143
Krypton	0	0,009
Ksenon	0	0,005
Neon	0	0,046
Powietrze	- 191,1	0,008
	0	0,024
	200	0,037
Siarkowodór	0	0,013
Tlen	0	0,024
Woda (para)	100	0,024
	300	0,043
	500	0,069
	700	0,098
Wodór	0	0,168

Współczynnik rozszerzalności liniowej ciał stałych (α , $10^{-6} \cdot K^{-1}$)

Substancja	t , °C	α	Substancja	t , °C	α
Antymon	0	9,2	Lit	20	56,0
Arsen	0	5,0	Lód	-10 ÷ 0	50,7
Bar	0 ÷ 300	19,45	Magnez	20 ÷ 100	25,9
Beryl	20	12,3	Mangan	20 ÷ 100	18,1
Bizmut	20 ÷ 100	13,45	Miedź	20	16,61
Bor	20	2,0	Molibden	0 ÷ 100	5,19
Braź	20	14,9 ÷ 20,4	Mosiądz	20	17 ÷ 22,7
Diament	0 ÷ 78	1,2	Nichrom	20	13,0
Gadolin	30 ÷ 950	9,7	Nikiel	0 ÷ 200	14,0
Gal	20	18,1	Potas	0	84,0
German	27	5,75	Siarka	0	74,0 ÷ 80
Glin	0 ÷ 100	23,1	Sód	0 ÷ 95	72,0
Grafit	0	7,1	Stal	20 ÷ 700	11,1 ÷ 15,1
Granit	20	8,3	Stront	0 ÷ 230	20,6
Ind	20 ÷ 100	30,5	Szkoło	0 ÷ 100	3,8 ÷ 9
Iryd	0	6,5	Tal	20	28,0
Jod	0	93,0	Teflon	20	6 ÷ 220
Kadm	0	29,0	Wapń	30	22,5
Kauczuk	20	66,0	Wolfram	0 ÷ 200	4,3
Kobalt	0	12,0	Wosk	0 ÷ 100	240,0
Konstantan	20	14,4	Złoto	20	14,0
Krzem	27	2,33	Żelazo	0 ÷ 100	11,9

Współczynnik rozszerzalności objętościowej cieczy (α , K^{-1}) w temperaturze 20 °C

Substancja	α , K^{-1}
Aceton	0,00143
Brom	0,00111
Woda	0,000208
Gliceryna	0,000505
Nafta	0,000955
Rtęć	0,000181
Alkohol etylowy	0,00110
Alkohol metylowy	0,00126
Olej transformatowy	0,0006
Eter etylowy	0,00166
Chloroform	0,00127

Ciepło właściwe ciał stałych (c, kJ/(kg·K))

Substancja	t, °C	c, kJ/(kg·K)
Beton	20	0,92
Brąz	14-98	0,38
Cynk	0	0,38
Drewno	0-100	2,4-27
Glin	16-100	0,88
Krzem	0-100	0,71
Lód	-40-0	2,09
Miedź	18-100	0,38
Nikiel	15-100	0,46
Olów	18-100	0,13
Parafina	18	3,20
Platyna	0-100	0,13
Sód	0-20	1,20
Sól kamienna	0-100	0,92
Srebro	15-100	0,23
Stal	0-100	0,46
Szkoło	10-50	0,67-0,83
Węgiel (grafit)	0-20	0,46-0,71
Wolfram	20-100	0,14
Złoto	0-100	0,13
Żelazo	18-100	0,46

Ciepło właściwe cieczy (c, kJ/(kg·K))

Substancja	t, °C	c, kJ/(kg·K)
Alkohol etylowy	15-30	2,38
Benzyna	20	2,09
Chloroform	20	0,98
Eter etylowy	18	2,34
Gliceryna	15-50	2,43
Nafta	20	2,21
Olej transformatorowy	20	2,09
Rtęć	20	0,14
Woda	20	4,18

Ciepło właściwe w stałym ciśnieniu (c_p , J/(kg · K)) i w stałej objętości (c_v , J/(kg · K)) gazów i par

Substancja	c_p , J/(kg · K)	c_v , J/(kg · K)	$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$
Amoniak (NH ₃)	2140	1630	1,31
Argon (Ar)	532	320	1,66
Dwutlenek węgla (CO ₂)	848	654	1,30
Hel (He)	5240	3140	1,66
Metan (CH ₄)	2373	1854	1,28
Para wodna (H ₂ O)	1820	1380	1,32
Powietrze	1020	729	1,40
Tlen (O ₂)	913	649	1,40

Temperatura topnienia (t , °C) i ciepło topnienia (q_t , kJ/kg) niektórych substancji (pod ciśnieniem 101 325 Pa)

Nazwa substancji	t , °C	q_t , kJ/kg
Ciała stałe		
Cynk	419,6	118,0
Glin	660,4	400,0
Miedź	1084,5	213,0
Ołów	327,5	25,0
Platyna	1772,0	101,0
Srebro	961,9	105,0
Stal	1300-1500	83,7
Stearyna	72,0	201,0
Wolfram	3 387,0	184,6
Ciecze		
Alkohol etylowy	- 114,2	108,0
Eter etylowy	- 116,0	96,5
Gliceryna	- 17,9	199,0
Rtęć	- 38,86	12,0
Woda	0,00	332,0

Nazwa substancji	t , °C	q_v , kJ/kg
Gazy		
Azot	-210,00	25,0
Chlor	-100,98	96,3
Tlen	-218,40	14,0
Wodór	-259,14	58,6

**Temperatura wrzenia (t , °C) i ciepło parowania (q_p , kJ/kg) niektórych substancji
(pod ciśnieniem 101 325 Pa)**

Nazwa substancji	t , °C	q_p , kJ/kg
Ciała stałe		
Cynk	907	1754
Glin	2467	9210
Miedź	2567	4800
Ółów	1740	860
Platyna	4170	2291
Srebro	2155	2357
Stearyna	370	-
Wolfram	5660	4960
Żelazo	2750	6300
Ciecze		
Alkohol etylowy	78,5	963
Eter etylowy	34,6	355
Gliceryna	290,0	-
Rtęć	356,7	290
Woda	100,0	2260
Gazy		
Azot	-195,8	198,2
Chlor	-34,6	288,0
Tlen	-162,96	214,0
Wodór	-252,87	452,0

Ciśnienie (p , Pa) i gęstość (ρ , 10^{-3} kg/m³) nasyconej pary wodnej w różnych temperaturach (t , °C)

t , °C	p , Pa	ρ , 10^{-3} kg/m ³
-20	106	0,9
-10	253	2,1
-5	400	3,2
-1	560	4,5
0	613	4,8
1	653	5,2
2	707	5,6
3	760	6,0
4	813	6,4
5	867	6,8
6	933	7,3
7	1000	7,8
8	1067	8,3
9	1147	8,8
10	1226	9,4
11	1306	10,0
12	1400	10,7
13	1493	11,4
14	1600	12,1
15	1707	12,8
16	1813	13,6
17	1933	14,5
18	2066	15,4
19	2200	16,3
20	2333	17,3
25	3173	23,0
30	4240	30,3
50	12330	83,0
80	47343	293,0
100	101325	598,0

Niskie temperatury

	°C	K
Zamarzanie wody	0	273
Krzepnięcie bromu	-7	266
Wrzenie amoniaku	-33	240
Krzepnięcie rtęci	-39	234
Wrzenie ksenonu	-107	166
Krzepnięcie ksenonu	-122	161
Wrzenie kryptonu	-152	121
Wrzenie tlenu	-183	90
Wrzenie argonu	-186	87
Wrzenie azotu	-196	77
Krzepnięcie azotu	-210	63
Krzepnięcie tlenu	-218	55
Punkt krytyczny wodoru	-240	33
Wrzenie neonu	-246	27
Wrzenie wodoru	-253	20
Wrzenie helu	-269	4
Krzepnięcie helu pod ciśnieniem	-272	1
Zero absolutne	-273,15	0

**Temperatura krytyczna (t_{kr} , °C), ciśnienie krytyczne (p_{kr} , MPa)
i gęstość (d , kg/m³) wybranych substancji**

Substancja	t_{kr} , °C	p_{kr} , MPa	d , kg/m ³
Argon	-122,5	4,86	531
Azot	-147,1	3,39	311
Chlor	144,0	7,45	573
Dwutlenek węgla	31,1	7,38	468
Hel	-267,9	0,23	69
Metan	-82,1	4,64	162
Powietrze	-140,7	3,75	350
Tlen	-118,8	5,04	430
Woda	374,15	22,13	307
Wodór	-239,9	1,27	31

Opór właściwy ($\rho, \mu \Omega \cdot m$) przewodników w temperaturze 20 °C

Substancja	$\rho, \mu \Omega \cdot m$	Substancja	$\rho, \mu \Omega \cdot m$
Aluminium	0,028	Ółów	0,21
Bizmut	1,06	Platyna	0,105
Cyna	0,12	Rtęć	0,958
Cynk	0,059	Sód	0,049
Grafit	8,0-20,0	Srebro	0,016
Magnez	0,047	Stal	0,10-0,14
Miedź	0,017	Wolfram	0,055
Molibden	0,057	Złoto	0,024
Nikiel	0,073	Żelazo	0,098

Współczynnik temperaturowy oporu ($\alpha, 1/K$) przewodników

Substancja	$\alpha, 1/K$	Substancja	$\alpha, 1/K$
Aluminium	0,0042	Nikiel	0,0068
Cyna	0,0042	Wolfram	0,0046
Miedź	0,0043	Złoto	0,0039
Molibden	0,0046	Żelazo	0,0065

Opór właściwy ($\rho, \Omega \cdot m$) niektórych materiałów izolacyjnych

Nazwa ciała	$\rho, \Omega \cdot m$	Nazwa ciała	$\rho, \Omega \cdot m$
Bakelit	$10^8 \div 10^{10}$	Mika	$10^{13} \div 10^{14}$
Bitum	$10^{13} \div 10^{14}$	Olej transformatorowy	$10^{10} \div 10^{11}$
Bursztyń	$5 \cdot 10^{14}$	Parafina	10^{14}
Celuloid	$2 \cdot 10^8$	Polistyren	$10^{13} \div 10^{15}$
Drewno	$10^8 \div 10^{10}$	Polietylen	$10^{13} \div 10^{15}$
Ebonit	10^{15}	Porcelana elektrotech.	$7 \cdot 10^8 \div 4 \cdot 10^9$
Głina palona	10^9	Szkło	$10^6 \div 10^{15}$
Guma elektroizolacyjna	$\approx 10^{13}$	Winidur	$(1 \div 50) \cdot 10^{14}$
Kalafonia	$5 \cdot 10^{14}$	Wosk pszczeli	$10^{11} \div 10^{12}$

Równoważniki elektrochemiczne (k, kg/C)

Kationy		<i>k</i> , kg/C
Bizmut	(Bi ³⁺)	0,719·10 ⁻⁶
Chrom	(Cr ³⁺)	0,180·10 ⁻⁶
Cynk	(Zn ²⁺)	0,338·10 ⁻⁶
Glin	(Al ³⁺)	0,093·10 ⁻⁶
Lit	(Li ⁺)	0,072·10 ⁻⁶
Magnez	(Mg ²⁺)	0,126·10 ⁻⁶
Miedź	(Cu ¹⁺)	0,660·10 ⁻⁶
Miedź	(Cu ²⁺)	0,329·10 ⁻⁶
Nikiel	(Ni ²⁺)	0,304·10 ⁻⁶
Nikiel	(Ni ³⁺)	0,203·10 ⁻⁶
Ołów	(Pb ²⁺)	1,074·10 ⁻⁶
Potas	(K ⁺)	0,405·10 ⁻⁶
Rtęć	(Hg ²⁺)	2,079·10 ⁻⁶
Srebro	(Ag ¹⁺)	1,118·10 ⁻⁶
Srebro	(Ag ⁺)	1,118·10 ⁻⁶
Sód	(Na ⁺)	0,238·10 ⁻⁶
Wapń	(Ca ²⁺)	0,208·10 ⁻⁶
Wodór	(H ⁺)	0,01045·10 ⁻⁶
Złoto	(Au ¹⁺)	2,043·10 ⁻⁶
Złoto	(Au ²⁺)	0,681·10 ⁻⁶
Żelazo	(Fe ²⁺)	0,289·10 ⁻⁶
Żelazo	(Fe ³⁺)	0,193·10 ⁻⁶
Aniony		<i>k</i> , kg/C
Bor	B ⁻	0,828·10 ⁻⁶
Chlor	Cl ⁻	0,367·10 ⁻⁶
Jod	I ⁻	1,315·10 ⁻⁶
[NO ₃] ⁻		0,643·10 ⁻⁶
Tlen	O ²⁻	0,0829·10 ⁻⁶
[OH] ⁻		0,177·10 ⁻⁶
[SO ₄] ²⁻		0,499·10 ⁻⁶
[CO ₃] ²⁻		0,311·10 ⁻⁶

Temperatura przejścia metali w stan nadprzewodnictwa (T_c , K)

Materiał	Temperatura przejścia T_c , K	Materiał	Temperatura przejścia T_c , K
Cyna	3,72	Ołów	7,19
Cynk	0,86	Osm	0,71
Cyrkon	0,55	Ren	1,70
Gal	1,09	Ruten	0,49
Glin	1,19	Tal	2,38
Hafn	0,35	Tantal	4,46
Ind	3,14	Technet	8,00
Iryd	0,14	Tor	1,37
Kadm	0,56	Tytan	0,40
Nb_3Si_2	18,00	Uran	0,68
Niob	9,28	Wanad	5,30

Przenikalność elektryczna względna (stała dielektryczna) ϵ_r

Nazwa ciała	ϵ_r	Nazwa ciała	ϵ_r
Ciała stałe			
Bakelit	4,8-5,3	Papier kondens.	4-5,8
Bursztyn	2,8	Papier suchy	2,0-2,5
Celuloza	5,9	Papier wosk.	2,7
Drewno	2,2-3,7	Parafina	1,9-2,2
Ebonit	2,5-3,5	Plexi	3,0-3,6
Granit	7-9	Polietylen	2,2-2,4
Guma	2,6-3,0	Porcelana	6,0-8,0
Igelit	4,7	Siarka	3,5
Kauczuk	2,2-3	Sól kamienna	5,6
Kwarc	4,5	Szkoło	5,0-10,0
Marmur	8,3	Tytanian baru	1200
Mika	7,4-7,85	Wosk pszczeli	2,8-2,9
Ciecze			
Alkohol etylowy	24,3	Chloroform	4,8
Benzen	2,3	Nafta	2,0
Benzyna	1,9-2,0	Nitrobenzen	35,7

Nazwa ciała	ϵ_r	Nazwa ciała	ϵ_r
Ciecze			
Olej rycynowy	4,5-4,8	Woda	81,0
Olej transformatorowy	2,3-4,5	Woda destylowana	80,4
Terpentyna	2,3	Żywica epoksydowa	2,6
Winidur	3,4	Żywica melaminowa	4,7
Gazy			
Azot	1,00060	Powietrze	1,00059
Dwutlenek węgla	1,00096	Tlen	1,00055
Chlorowodór	1,003	Wodór	1,00027
Metan	1,00094		

Przenikalność magnetyczna względna μ_r

Diamagnetyki	μ_r
Bizmut	0,999824
Miedź	0,999990
Szkoło	0,999987
Woda	0,999991
Wodór	0,999999937
Paramagnetyki	μ_r
Aluminium	1,000023
Powietrze	1,00000038
Tlen	1,0000019
Wolfram	1,000176
Feromagnetyki (przenikalność maksymalna)	μ_r
Permaloj (78% Ni, 22% Fe)	8000
Żelazo miękkie	800
Żelazo transformatorowe	15000

Temperatura Curie (T_c , °C)

Material	T_c , °C
Kobalt	1120
Nikiel	358
Permaloj (78% nikiel i 22% żelazo)	550
Żelazo	770

Prąd elektryczny w metalach

Liczba elektronów swobodnych w 1 cm^3 przeciętnego przewodnika metalicznego	10^{22} - 10^{23}
Średnia prędkość chaotycznego ruchu cieplnego w temperaturze pokojowej	$\approx 10^7 \text{ m/s}$
Średnia prędkość ruchu uporządkowanego elektronów pod wpływem pola elektrycznego o natężeniu 1 V/m	$\approx 10^{-3} \text{ m/s}$
Liczba elektronów przepływająca w ciągu 1 s przez przekrój przewodnika, w którym płynie prąd o natężeniu 1 A	$6,25 \cdot 10^{18}$

Wyładowania atmosferyczne

Maksymalne natężenie prądu wyładowania	$2 \cdot 10^4$ - $4 \cdot 10^4 \text{ A}$
Różnica potencjałów między chmurą a Ziemią przed wyładowaniem	do 10^9 V
Ładunek elektryczny przenoszony w wyładowaniu	10 - 50 C
Długość wyładowania między chmurą a Ziemią	3 - 4 km
Czas trwania wyładowania (przeciętny)	$0,2 \text{ s}$
Przeciętna średnica kanału wyładowania	16 cm

**Współczynnik załamania światła n dla ciał stałych i cieczy
(dla długości fali $\lambda = 589,3 \text{ nm}$)**

Substancje	n	Substancje	n
Ciała stałe			
Beryl	1,581	Lód	1,31
Chlorek sodu	1,5443	Sól kamienna	1,544
Cukier	1,56	Szkło flint	1,60-1,80
Diament	2,417	Szkło crown	1,56-1,60
Korund	1,769	Szpat islandski	1,659
(szafir, rubin)	1,31	Topaz	1,63
Kwarc krystaliczny	1,544	Turmalin	1,669
Kwarc topiony	1,458		
Ciecze			
Aceton	1,36	Kwas siarkowy	1,43
Alkohol metylowy	1,33	Kwas solny	1,254
Alkohol etylowy	1,362	olej rycynowy	1,48
Anilina	1,586	olej lniany	1,47
Balsam kanadyjski	1,530	olej parafinowy	1,440
Benzen	1,501	olej słonecznikowy	1,47
Bursztyn	1,546	Parafina płynna	1,480
Chloroform	1,449	Siarkowódór	1,885
Czterochlorek węgla	1,460	Terpentyna	1,470
Eter etylowy	1,354	Toluen	1,497
Gliceryna	1,470	Woda	1,333

**Współczynnik załamania światła n dla gazów i pary wodnej
(dla długości fali $\lambda = 589,3 \text{ nm}$)**

Azot	1,000297	Powietrze	1,000292
Hel	1,000035	Tlen	1,000272
Ksenon	1,000702	Tlenek węgla	1,000334
Neon	1,000067	Wódór	1,000138
Para wodna	1,000252		

Prędkość światła (v , km/s) w niektórych ośrodkach

Ciała stałe	v , km/s
Bursztyn	194000
Diament	123600
Kwarc	194000
Lód	229000
Szko optyczne (flint)	169000
Szko optyczne (crown)	190000
Próżnia	299793
Ciecze	v , km/s
Benzyna	214000
Gliceryna	203000
Woda	224840
Gazy	v , km/s
Azot	299700
Powietrze	299705
Tlen	299710
Wodór	299750

Kąt graniczny (φ , °) całkowitego odbicia wewnętrznego

Substancja	φ , °	Substancja	φ , °
Alkohol etylowy	47	Gliceryna	43
Diament	24	Szko	40
Dwusiarczek węgla	38	Woda	49
Eter etylowy	47		

W tabelce przedstawiono kąt przy odbiciu na granicy z powietrzem (dla długości fali $\lambda = 589,3$ nm).

Długość fal świetlnych (λ , nm) i odpowiadająca im barwa światła

λ , nm	Barwa światła
760÷620	Czerwona
620÷590	Pomarańczowa
590÷560	Żółta
560÷500	Zielona
500÷480	Błękitna
480÷450	Niebieska
450÷380	Fioletowa

Granica długofalowa (λ_g , nm) zjawiska fotoelektrycznego

Metal	λ_g , nm
Bizmut	287
Cer	480
Cez	662
Chrom	284
German	272
Kadm	292
Magnez	335
Molibden	285
Nikiel	255
Platyna	200
Srebro	261
Tantal	308
Tor	365
Tytan	315
Uran	340
Wapń	385
Wolfram	270
Żelazo	268

Widmo fal elektromagnetycznych

Częstotliwość (w Hz)	Długość fali (w m)	Rodzaj fal	Występowanie i zastosowanie	
10^1	10^7	fale elektryczne	prąd zmienny	
10^2	10^6			wytwarzane przez techniczny prąd zmienny
10^3	10^5		częstotliwość akustyczna	przekazywanie mowy i muzyki, telegrafia
10^4	10^4		prąd zmienny	
10^5	10^3		fale długie	radio
10^6	10^2		fale średnie	
10^7	10^1		fale krótkie	
10^8	10^0		fale ultrakrótkie	telewizja
10^9	10^{-1}		kosmiczne	radar
10^{10}	10^{-2}		fale radiowe mikrofale	
10^{11}	10^{-3}	zakres optyczny	ciepło	
10^{12}	10^{-4}			podczerwień
10^{13}	10^{-5}		światło widzialne	naturalne i sztuczne źródła światła
10^{14}	10^{-6}			
10^{15}	10^{-7}	ultrafiolet	lampy kwarcowe	
10^{16}	10^{-8}			
10^{17}	10^{-9}	miękkie promienie Rentgena	lampy rentgenowskie	
10^{18}	10^{-10}			
10^{19}	10^{-11}	twarde promienie Rentgena	rozpad promieniotwórczy	
10^{20}	10^{-12}			
10^{21}	10^{-13}	promienie gamma	uderzenie materii kosmicznej	
10^{22}	10^{-14}			
10^{23}	10^{-15}	promieniowanie kosmiczne i gamma	uderzenie materii kosmicznej	
10^{24}	10^{-16}			promieniowanie kosmiczne wtórne
10^{25}	10^{-17}			

Defekt masy niektórych jąder

Element	Skład jądra (p-protonów, n-neutronów)	Masa jądra u	Suma mas protonów i neutronów, u	Defekt masy u
Deuter	1p + 1n	2,01355	2,01594	0,00239
Hel	2p + 2n	4,00150	4,03188	0,03038
Lit	3p + 4n	7,01584	7,05649	0,04065
Tlen	8p + 8n	15,99051	16,12753	0,13702
Uran	92p + 146n	238,002	239,935	1,933
Węgiel	6p + 6n	11,09670	12,09565	0,09895

Okres połowicznego rozpadu niektórych izotopów

Element	Symbol radioaktywnego izotopu	Okres rozpadu	Element	Symbol radioaktywnego izotopu	Okres rozpadu
Azot	${}_{7}^{13}\text{N}$	10,1 minut	Rtęć	${}_{80}^{205}\text{Hg}$	5,5 minut
Beryl	${}_{4}^{7}\text{Be}$	53 doby	Sód	${}_{11}^{24}\text{Na}$	15 godzin
Bizmut	${}_{83}^{210}\text{Bi}$	5,02 dni	Stront	${}_{38}^{90}\text{Sr}$	27,7 lat
Cez	${}_{55}^{137}\text{Cs}$	26,6 lat	Tor	${}_{90}^{232}\text{Th}$	$1,39 \cdot 10^{11}$ lat
Chlor	${}_{17}^{36}\text{Cl}$	$3,1 \cdot 10^5$ lat	Uran	${}_{92}^{235}\text{U}$	$7,1 \cdot 10^8$ lat
Iryd	${}_{77}^{192}\text{Ir}$	75 dni	Uran	${}_{92}^{238}\text{U}$	$4,5 \cdot 10^9$ lat
Jod	${}_{53}^{131}\text{I}$	8,08 doby	Wapń	${}_{20}^{45}\text{Ca}$	164 doby
Lit	${}_{3}^{8}\text{Li}$	0,8 sekund	Węgiel	${}_{6}^{14}\text{C}$	5600 lat
Polon	${}_{84}^{210}\text{Po}$	138 dni	Wodór	${}_{1}^{3}\text{H}$	12,3 lat
Potas	${}_{19}^{40}\text{K}$	$25 \cdot 10^9$ lat	Wolfram	${}_{74}^{185}\text{W}$	78,5 doby
Rad	${}_{88}^{226}\text{Ra}$	1600 lat	Złoto	${}_{79}^{198}\text{Au}$	2,7 doby
Radon	${}_{86}^{222}\text{Rn}$	3,825 dni			

Masa atomowa niektórych izotopów

Symbol		Liczba elektronów	Liczba neutronów	Liczba protonów	Liczba masowa	Masa u
pierwiastek	izotop					
H	${}^1_1\text{H}$	1	–	1	1	1,00782
H	${}^2_1\text{H}$ (D)	1	1	1	2	2,01410
H	${}^3_1\text{H}$ (T)	1	2	1	3	3,01605
He	${}^3_2\text{He}$	2	1	2	3	3,01603
He	${}^4_2\text{He}$	2	2	2	4	4,00260
Li	${}^6_3\text{Li}$	3	3	3	6	6,01513
Li	${}^7_3\text{Li}$	3	4	3	7	7,01600
Be	${}^9_4\text{Be}$	4	5	4	9	9,01219
B	${}^{10}_5\text{B}$	5	5	5	10	10,01294
B	${}^{11}_5\text{B}$	5	6	5	11	11,00931
C	${}^{12}_6\text{C}$	6	6	6	12	12,00000
C	${}^{13}_6\text{C}$	6	7	6	13	13,00335
N	${}^{14}_7\text{N}$	7	7	7	14	14,00307
N	${}^{15}_7\text{N}$	7	8	7	15	15,00011
O	${}^{16}_8\text{O}$	8	8	8	16	15,99491
O	${}^{17}_8\text{O}$	8	9	8	17	16,99913
O	${}^{18}_8\text{O}$	8	10	8	18	17,99916
U	${}^{234}_{92}\text{U}$	92	142	92	234	234,0409
U	${}^{235}_{92}\text{U}$	92	143	92	235	235,0439
U	${}^{238}_{92}\text{U}$	92	146	92	238	238,0508

Izotopy niektórych pierwiastków

Symbol		Porządkowy numer pierwiastka	Liczba masowa izotopu	Udział izotopu w pierwiastku %
pierwiastek	izotop			
H	${}^1_1\text{H}$	1	1	99,985
	D		2	0,015
He	${}^3_2\text{He}$	2	3	0,0001
	${}^4_2\text{He}$		4	99,9999
Li	${}^6_3\text{Li}$	3	6	7,42
	${}^7_3\text{Li}$		7	92,58
Be	${}^9_4\text{Be}$	4	9	100,00
B	${}^{10}_5\text{B}$	5	10	19,60
	${}^{11}_5\text{B}$		11	80,40
C	${}^{12}_6\text{C}$	6	12	98,89
	${}^{13}_6\text{C}$		13	1,11
N	${}^{14}_7\text{N}$	7	14	99,63
	${}^{15}_7\text{N}$		15	0,37
O	${}^{16}_8\text{O}$	8	16	99,759
	${}^{17}_8\text{O}$		17	0,037
	${}^{18}_8\text{O}$		18	0,204
F	${}^{19}_9\text{F}$	9	19	100,00
Ne	${}^{20}_{10}\text{Ne}$	10	20	90,92
	${}^{21}_{10}\text{Ne}$		21	0,26
	${}^{22}_{10}\text{Ne}$		22	8,82
Na	${}^{23}_{11}\text{Na}$	11	23	100,00
Mg	${}^{24}_{12}\text{Mg}$	12	24	78,70
	${}^{25}_{12}\text{Mg}$		25	10,13
	${}^{26}_{12}\text{Mg}$		26	11,17
Al	${}^{27}_{13}\text{Al}$	13	27	100,00

Symbol		Porządkowy numer pierwiastka	Liczba masowa izotopu	Udział izotopu w pierwiastku %
pierwiastek	izotop			
Si	$^{28}_{14}\text{Si}$	14	28	9221,00
	$^{30}_{14}\text{Si}$		29	4,70
P	$^{31}_{15}\text{P}$	15	30	3,09
	$^{31}_{15}\text{P}$		31	100,00
S	$^{32}_{16}\text{S}$	16	32	95,00
	$^{33}_{16}\text{S}$		33	0,76
	$^{34}_{16}\text{S}$		34	4,22
	$^{36}_{16}\text{S}$		36	0,014
Cl	$^{35}_{17}\text{Cl}$	17	35	75,53
	$^{37}_{17}\text{Cl}$		37	24,47
Ar	$^{36}_{18}\text{Ar}$	18	36	0,337
	$^{38}_{18}\text{Ar}$		38	0,063
	$^{40}_{18}\text{Ar}$		40	99,60
K	$^{39}_{19}\text{K}$	19	39	93,10
	$^{40}_{19}\text{K}$		40	0,0118
	$^{41}_{19}\text{K}$		41	6,88
Ca	$^{40}_{20}\text{Ca}$	20	40	96,97
	$^{42}_{20}\text{Ca}$		42	0,64
	$^{43}_{20}\text{Ca}$		43	0,145
	$^{44}_{20}\text{Ca}$		44	2,06
	$^{46}_{20}\text{Ca}$		46	0,0033
	$^{48}_{20}\text{Ca}$		48	0,185

Niektóre cząstki elementarne

Nazwa		Symbol		Masa spoczynkowa w MeV/c ²	Ładunek	Spin w jednostce h/2π	Średni czas życia w s	
		cząstki	antycząstki					
Foton		γ		0	0	1	–	
Leptyny	Neutrino elektronowe	ν_e	$\tilde{\nu}_e$	} 0	0	1/2	trwale	
	Antyneutrino elektronowe							
	Neutrino mionowe	ν_μ						
	Antyneutrino mionowe	$\tilde{\nu}_\mu$						
	Elektron	e^-		0,5	– e	1/2	trwale	
Pozyton		e^+	0,5	+ e				
Mion		μ^-	μ^+	105,66	± e	1/2	$2,2 \cdot 10^{-6}$	
Hadrony	Mezony	Pion		π^0	135,0	0	$0,84 \cdot 10^{-16}$	
		π^-	π^+	139,58	± e	0	$2,6 \cdot 10^{-8}$	
		Mezon η		η^0	548,8	0	0	$2,4 \cdot 10^{-19}$
		Mezon ρ		ρ^0	765	0	1	10^{-23}
		ρ^+	ρ^-	± e				
Mezon ω		ω^0		783,7	0	1	10^{-22}	
Kaon K ⁰		K^0	\tilde{K}^0	497,8	0	0	rozpad złożony, $10^{-10} - 5 \cdot 10^{-8}$	
		K^+	K^-	493,8	± e		$1,24 \cdot 10^{-8}$	

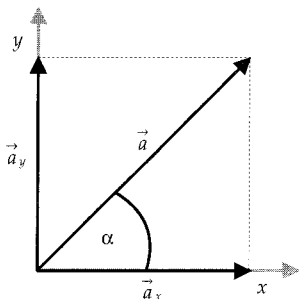
Nazwa		Symbol		Masa spoczynkowa w MeV/c ²	Ładunek	Spin w jednostce h/2π	Średni czas życia w s		
		cząstki	antycząstki						
Foton		γ		0	0	1	-		
Hadrony	Bariony	Nukleony	Proton	p ⁺		+ e	1/2	trwale	
			Antyproton		p ⁻	938,3			- e
			Neutron	n					
		Antyneutron		\tilde{n}	939,5	0	1/2	932	
		Hiperon Λ	Λ ⁰	$\tilde{\Lambda}^0$	1115,6	0	1/2	2,5 · 10 ⁻¹⁰	
		Hiperony	Hiperon Σ		Σ ⁺	$\tilde{\Sigma}^+$	1189,4	± e	0,8 · 10 ⁻¹⁰
				Σ ⁰	$\tilde{\Sigma}^0$	1192,5	0	1/2	1,0 · 10 ⁻¹⁴
				Σ ⁻	$\tilde{\Sigma}^-$	1197,3	∓ e		1,49 · 10 ⁻¹⁰
	Hiperon Ξ		Ξ ⁰	$\tilde{\Xi}^0$	1314,7	0		3,0 · 10 ⁻¹⁰	
			Ξ ⁻	$\tilde{\Xi}^-$	1321,3	∓ e	1/2	1,74 · 10 ⁻¹⁰	
Hiperon Ω	Ω ⁻	$\tilde{\Omega}^-$	1672	∓ e	1/2	1,3 · 10 ⁻¹⁰			

Typy przemian promieniotwórczych

Typ przemiany	Ładunek jądra po przemianie	Liczba masowa jądra po przemianie	Charakterystyka procesu
Rozpad α	$Z - 2$	$A - 4$	emisja cząstki α , która jest układem dwóch protonów i dwóch neutronów związanych w jedną całość
Rozpad β	$Z \pm 1$	A	wzajemna przemiana w jądrze protonu i neutronu
Rozpad β_-	$Z + 1$	A	$n \rightarrow p + (e^- + \tilde{\nu}_e)$
Rozpad β_+	$Z - 1$	A	$p \rightarrow n + (e^+ + \nu_e)$
Wychwył elektronu	$Z - 1$	A	$p + e^- \rightarrow n + \nu_e$
Rozszczepienie samorzutne	$\sim \frac{1}{2} Z$	$\sim \frac{1}{2} A$	podział jądra, zazwyczaj na dwie części, w przybliżeniu o jednakowych masach i ładunkach
Rozpad γ	Z	A	przejście jądra ze stanu wzbudzonego do stanu podstawowego lub jednego z niższych stanów wzbudzonych z emisją kwantu γ

I. Elementy rachunku wektorowego

Rozkład wektora na wektory składowe w kartezjańskim układzie współrzędnych



a) na płaszczyźnie

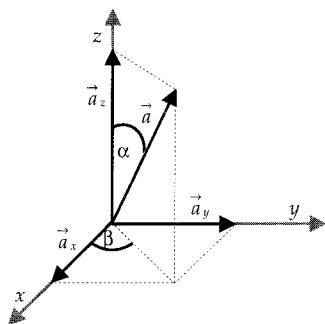
$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad a - \text{długość wektora } \vec{a}$$

$$a_x = a \cdot \cos \alpha \quad a_y = a \cdot \sin \alpha$$

a_x, a_y – składowe wektora \vec{a}

\vec{a}_x, \vec{a}_y – wektory składowe



b) w przestrzeni trójwymiarowej

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

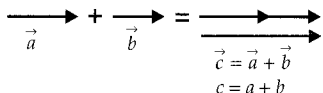
$$a_x = a \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

$$a_y = a \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

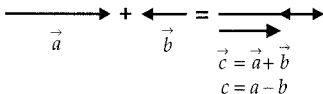
$$a_z = a \cdot \cos \alpha$$

$\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ – wektory składowe

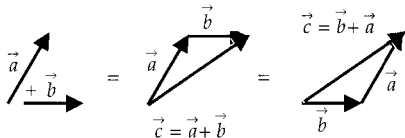
Dodawanie wektorów



a) wektory o zgodnych kierunkach i zwrotach



b) wektory o zgodnych kierunkach i przeciwnych zwrotach

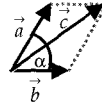


c) wektory o różnych kierunkach

• dodawanie przez przesunięcie równoległe wektorów

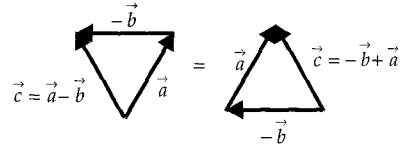
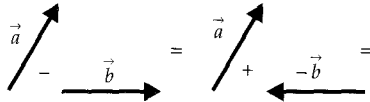
- reguła równoległoboku

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$$

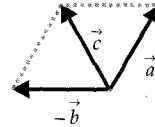


Odejmowanie wektorów

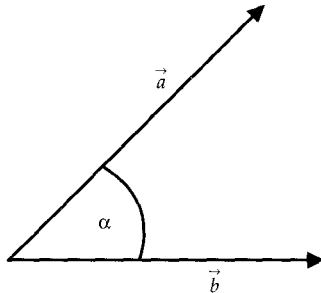
- odejmowanie przez przesunięcie równoległe wektorów



- reguła równoległoboku



Mnożenie wektorów



Iloczyn skalarny

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = c = a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

Wynikiem mnożenia skalarnego jest skalar

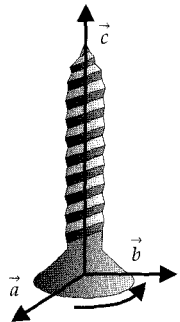
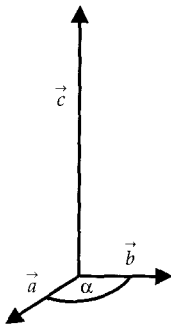
Iloczyn wektorowy

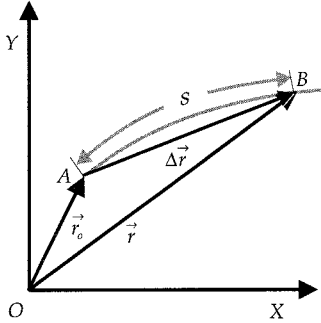
$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

Wynikiem mnożenia jest wektor \vec{c} o długości $c = a \cdot b \cdot \sin \alpha$. Jest on prostopadły do płaszczyzny, na której leżą wektory \vec{a} i \vec{b} , a jego zwrot wyznacza reguła śruby prawoskrętnej.

Iloczyn wektorowy jest nieprzemiennej

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$



II. Mechanika
Kinematyka
Przemieszczenie, prędkość średnia, prędkość chwilowa


Ruch ciała od punktu A do B w układzie odniesienia XOY

\vec{r}_0 – wektor wodzący w chwili początkowej

\vec{r} – wektor wodzący po czasie Δt

$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ – przemieszczenie ciała

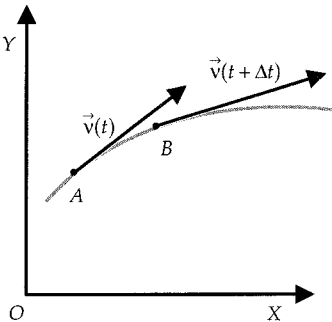
s – droga przebyta od A do B

Prędkość średnia

$$\vec{v}_s = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Prędkość chwilowa

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Przyspieszenie


$\vec{v}(t)$ – prędkość ciała w punkcie A w chwili t

$\vec{v}(t + \Delta t)$ – prędkość ciała w punkcie B w chwili $t + \Delta t$

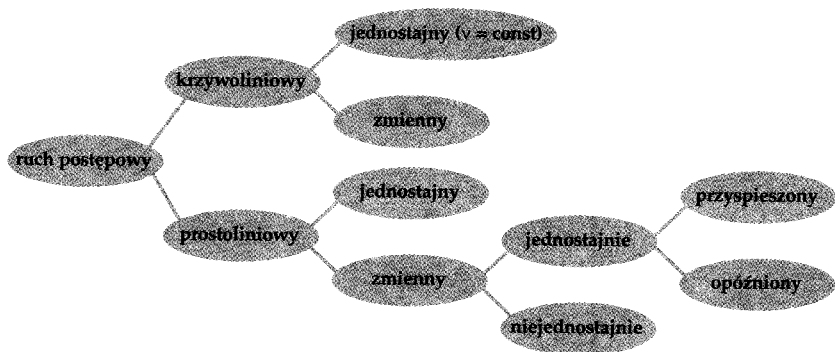
Przyspieszenie średnie

$$\vec{a}_s = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

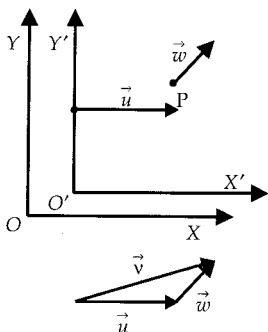
Przyspieszenie chwilowe

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Klasyfikacja ruchów postępowych



Składanie prędkości



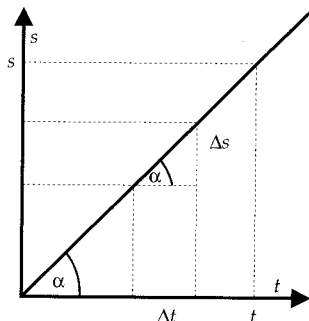
\vec{w} – prędkość punktu P względem układu odniesienia $Y'O'X'$

\vec{u} – prędkość układu $Y'O'X'$ względem układu odniesienia YOX

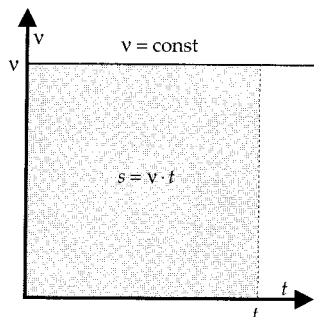
\vec{v} – prędkość punktu P względem układu odniesienia YOX

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \rightarrow \begin{matrix} v_x = u_x + w_x \\ v_y = u_y + w_y \end{matrix}$$

Ruch jednostajny, prostoliniowy; $\vec{v} = \text{const}$, $\vec{a} = 0$



$$\text{tg} \alpha = \frac{s}{t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v = \text{const}$$

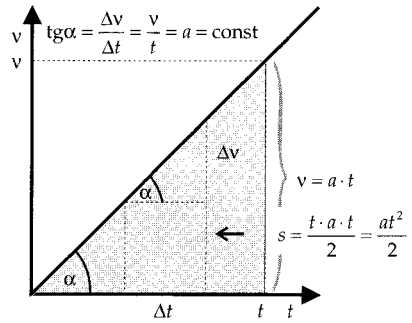
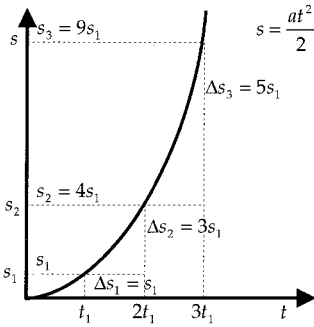


Wartość przemieszczenia jest równa drodze przebytej przez ciało: $\Delta r = \Delta s$

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s}{t}$$

$$s = v \cdot t$$

Ruch jednostajnie przyspieszony, prostoliniowy $\vec{a} = \text{const}$

 1) Prędkość początkowa ciała $v_0 = 0$

 Droga przebyta przez ciało po czasie t :

$$s = \frac{at^2}{2}$$

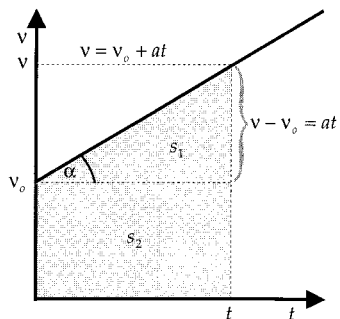
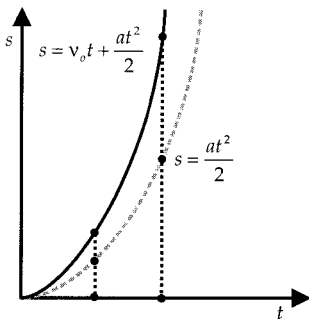
 Przyspieszenie ciała $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t}$

 Prędkość po czasie t : $v = a \cdot t$

 Drogi po kolejnych jednostkach czasu: $s_1 : s_2 : s_3 : s_4 : \dots = 1 : 4 : 9 : 16 : \dots$

 Drogi w kolejnych jednostkach czasu: $\Delta s_1 : \Delta s_2 : \Delta s_3 : \Delta s_4 : \dots = 1 : 3 : 5 : 7 : \dots$

Pole pod wykresem prędkości względem czasu jest równe drodze przebytej przez ciało

 2) Prędkość początkowa ciała $v_0 \neq 0$

 Droga po czasie t : $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$

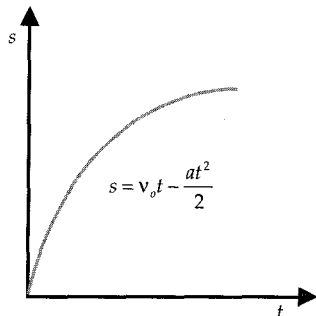
 Prędkość po czasie t : $v = v_0 + at$

$$s_1 = \frac{t \cdot at}{2} = \frac{at^2}{2}, \quad s_2 = v_0 \cdot t$$

$$s = s_1 + s_2 = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Ruch jednostajnie opóźniony, prostoliniowy

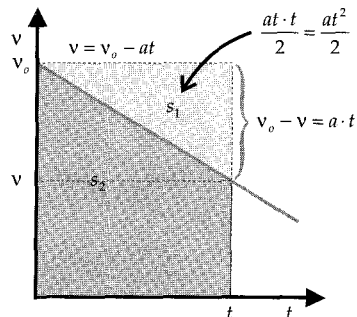
Opóźnienie $a = \frac{v_0 - v}{t}$, $a = \text{const}$



Droga przebyta przez ciało po czasie t :

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2}$$

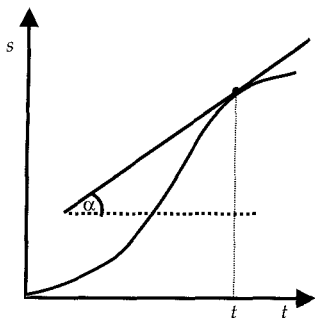
Prędkość ciała po czasie t : $v = v_0 - at$



$$s_1 = \frac{at^2}{2}, \quad s_2 = v_0 \cdot t$$

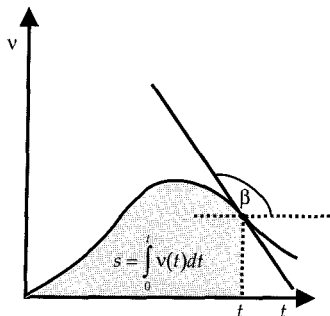
$$s = s_2 - s_1 = v_0 t - \frac{at^2}{2}$$

Ruch niejednostajnie zmienny, prostoliniowy



α – kąt nachylenia stycznej do wykresu $s(t)$ w chwili czasu t
 $v(t)$ – prędkość chwilowa

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \text{tg} \alpha$$



β – kąt nachylenia stycznej do wykresu $v(t)$

$a(t)$ – przyspieszenie chwilowe

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \text{tg} \beta$$

pole pod wykresem $v(t)$ w przedziale czasu $0 - t$ jest równe drodze przebytej w tym

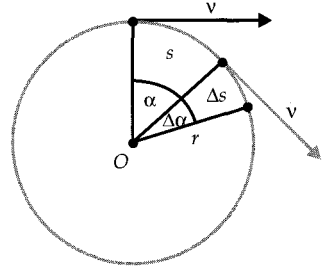
$$\text{przedziale czasu } s = \int_0^t v(t) dt$$

Ruch po okręgu

droga przebyta przez ciało wzdłuż okręgu s

promień okręgu r

kąt zatoczony przez ciało



(w mierze łukowej) $\alpha = \frac{s}{r} [\text{rad}]$

średnia prędkość kątowa $\omega_s = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$

chwilowa prędkość kątowa $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt}$

średnia prędkość liniowa $v_s = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta\alpha \cdot r}{\Delta t} = \omega_s \cdot r$

chwilowa prędkość liniowa $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(\alpha \cdot r)}{dt} = r \frac{d\alpha}{dt} = \omega r$

średnie przyspieszenie kątowe $\epsilon_s = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

chwilowe przyspieszenie kątowe $\epsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$

Ruch jednostajny po okręgu $v = \text{const}$, $\omega = \text{const}$

T – okres, czas pełnego obrotu ciała po okręgu

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

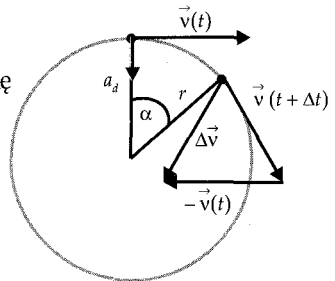
f – częstotliwość, ilość obrotów ciała po okręgu na sekundę

$$f = \frac{1}{T} \quad \omega = 2\pi f, \quad v = 2\pi r f$$

kąt zatoczony po czasie t : $\alpha = \omega \cdot t$

przyspieszenie dośrodkowe $\vec{a}_d = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

$$a_d = \frac{v^2}{r}$$



Ruch zmienny po okręgu, jednostajnie przyspieszony $\varepsilon = \text{const}$ a) Początkowa prędkość kątowa $\omega_o = 0$

Kąt zatoczony po czasie t $\alpha = \frac{\varepsilon t^2}{2}$

Prędkość kątowa po czasie t $\omega = \varepsilon t$

a_t – przyspieszenie liniowe styczne $a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \varepsilon \cdot r$

b) Początkowa prędkość kątowa $\omega_o \neq 0$

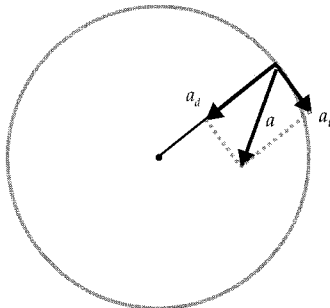
$$\alpha = \omega_o t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad \omega = \omega_o + \varepsilon t$$

Ruch zmienny po okręgu, jednostajnie opóźniony

Opóźnienie kątowe $\varepsilon = \frac{\omega_o - \omega}{t}$, $\varepsilon = \text{const}$

Kąt zatoczony po czasie t $\alpha = \omega_o t - \frac{\varepsilon t^2}{2}$

Prędkość kątowa po czasie t $\omega = \omega_o - \varepsilon t$

Przyspieszenie całkowite w ruchu po okręgu

$$a = \sqrt{a_d^2 + a_t^2}$$

 a_d – przyspieszenie dośrodkowe

$$a_d = \frac{v^2}{r}$$

 a_t – przyspieszenie liniowe styczne

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Wektor prędkości kątowej

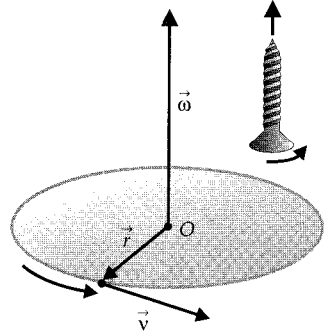
$\vec{\omega}$ – wektor prędkości kątowej ciała krążącego po okręgu

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

\vec{v} – prędkość liniowa ciała

\vec{r} – wektor wodzący ciała

Zwrot wektora $\vec{\omega}$ pokrywa się ze zwrotem ruchu śruby prawoskrętnej, obracającej się wraz z ciałem.



Wektor przyspieszenia kątowego: $\vec{\varepsilon} \quad \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

Wektor przyspieszenia liniowego stycznego: \vec{a}_t

$$\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$

Rzut poziomy

h – wysokość wyrzutu ciała

v_o – prędkość początkowa wyrzutu

v_x – składowa pozioma prędkości $v_x = v_o$

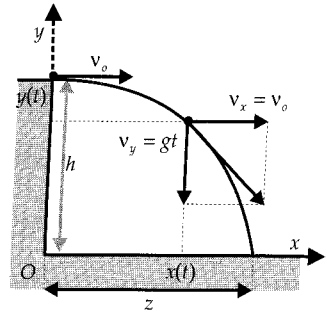
v_y – składowa pionowa prędkości w chwili t

$$v_y = g \cdot t$$

g – przyspieszenie ziemskie

v – prędkość ciała w chwili t

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_o^2 + (gt)^2}$$

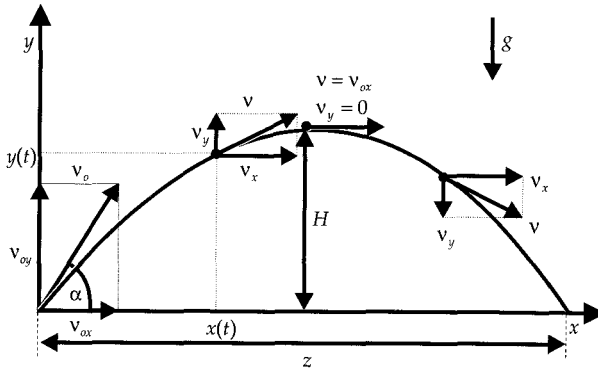


Współrzędne ciała w chwili t ; $x(t) = v_o \cdot t$; $y(t) = h - \frac{gt^2}{2}$

Czas trwania rzutu $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Zasięg rzutu $z = v_o \cdot t_c = v_o \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Rzut ukośny



α – kąt wyrzutu ciała

v_0 – prędkość początkowa

v_{ox} – składowa pozioma prędkości początkowej

$v_{ox} = v_0 \cdot \cos \alpha$

v_{oy} – składowa pionowa prędkości początkowej

$v_{oy} = v_0 \cdot \sin \alpha$

v – prędkość ciała w chwili t

v_x – składowa pozioma prędkości w chwili t

$$v_x = v_{ox} = v_0 \cdot \cos \alpha$$

v_y – składowa pionowa prędkości w chwili t

$$v_y = v_0 \cdot \sin \alpha - gt$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}$$

Współrzędne ciała w chwili t

$$x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \quad y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

$$\text{Równanie toru lotu} \quad y(x) = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$\text{Czas trwania lotu} \quad t_c = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$\text{Zasięg rzutu ukośnego} \quad z = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

$$\text{Maksymalna wysokość} \quad H = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}$$

Zasady dynamiki

Pierwsza zasada dynamiki Newtona:

Jeżeli na ciało nie działają żadne siły lub działające siły równoważą się, to w inercyjnym układzie odniesienia pozostaje ono w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

m – masa ciała

\vec{v} – jego prędkość

Związek między zmianą pędu ciała i wypadkową siłą działającą na ciało:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_w : \text{ jest to druga zasada dynamiki Newtona}$$

Szybkość zmiany pędu ciała jest równa wypadkowej sile działającej na to ciało.

Zmiana pędu ma kierunek i zwrot zgodny z kierunkiem i zwrotem siły wypadkowej.

dla $m = \text{const}$ (mechanika klasyczna), przyjmuje postać:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_w : \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m}$$

Jeżeli na ciało działa nie zrównoważona siła \vec{F}_w , to w inercyjnym układzie odniesienia ciało to, uzyskuje przyspieszenie \vec{a} o kierunku i zwrocie zgodnym z kierunkiem i zwrotem siły i o wartości wprost proporcjonalnej do wartości siły. Współczynnikiem proporcjonalności jest odwrotność masy ciała.

$\vec{F}_w = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$ – siła wypadkowa to suma wektorowa sił działających na ciało

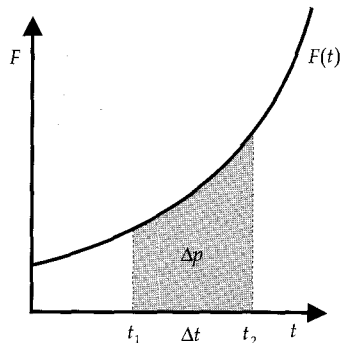
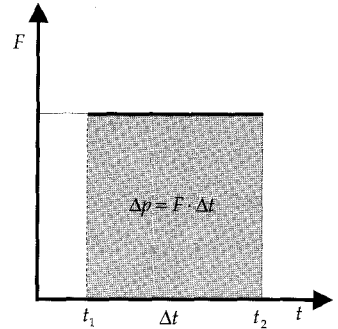
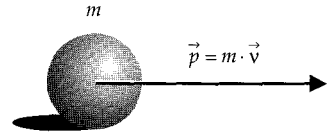
Popęd siły stałej: $\vec{F} \cdot \Delta t$, Δt – czas działania siły

$$\vec{F}_w \cdot \Delta t = \Delta \vec{p}$$

$\Delta \vec{p}$ – zmiana pędu wywołana działaniem siły

\vec{F}_w – wypadkowa siła

$$\text{Popęd siły zmiennej: } \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt \quad \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_w dt = \Delta \vec{p}$$



Całkowity pęd układu ciał

$$\vec{p} = \sum_{i=0}^n \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_n - \text{suma wektorowa pędów ciał tworzących układ}$$

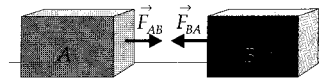
Zasada zachowania pędu:

$$\text{Gdy } \vec{F}_w = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \text{const}$$

Jeżeli w inercjalnym układzie odniesienia na układ ciał nie działają żadne siły zewnętrzne lub działające siły równoważą się wzajemnie, to całkowity pęd układu nie ulega zmianie.

Oddziaływanie wzajemne ciał

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} : \text{trzecia zasada dynamiki Newtona}$$



Jeżeli ciało A działa na ciało B pewną siłą \vec{F}_{AB} , to ciało B działa na ciało A siłą \vec{F}_{BA} o tej samej wartości i kierunku lecz o przeciwnym zwrocie.

Dynamika ruchu po okręgu

Siła dośrodkowa działająca na ciało

$$\vec{F}_d = m \cdot \vec{a}_d \quad F_d = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

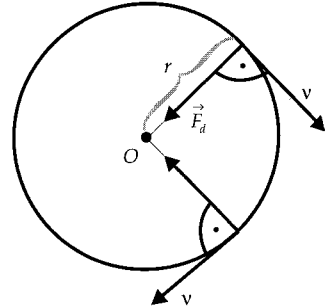
$$F_d = m\omega^2 r = 4\pi^2 m f^2 r$$

ω – prędkość kątowa

v – prędkość liniowa

f – częstotliwość

r – promień okręgu



Siły bezwładności w układach nieinercjalnych

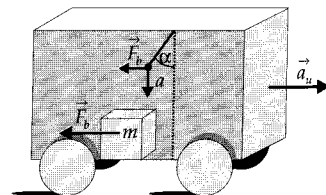
a) Ruch postępowy układu odniesienia

$$\vec{F}_b = -m \cdot \vec{a}_u$$

F_b – siła bezwładności działająca na ciało

m – masa ciała

\vec{a}_u – przyspieszenie układu



b) Ruch obrotowy układu odniesienia

$$\vec{F}_o = -m \cdot \vec{a}_d$$

\vec{F}_o – siła odśrodkowa bezwładności

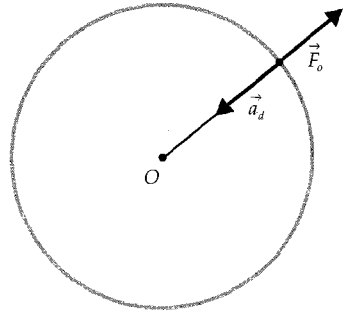
m – masa ciała

\vec{a}_d – przyspieszenie dośrodkowe

$$F_o = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$

ω – prędkość kątowna

r – promień okręgu



Siła Coriolisa

$$\vec{F}_c = 2m(\vec{v}_w \times \vec{\omega})$$

\vec{F}_c – siła Coriolisa

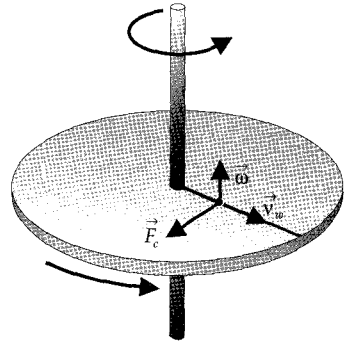
m – masa ciała

\vec{v}_w – prędkość ciała poruszającego się względem obracającego się układu odniesienia

$\vec{\omega}$ – prędkość kątowna obrotów układu

\vec{a}_c – przyspieszenie Coriolisa

$$\vec{a}_c = -2(\vec{v}_w \times \vec{\omega})$$

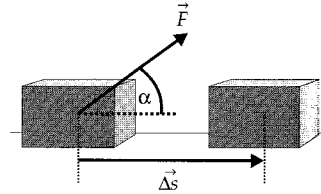


Praca, moc, energia

Praca

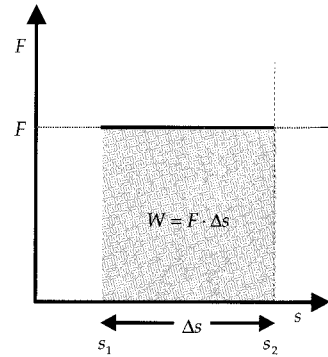
Praca siły stałej

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta s} = F \cdot \Delta s \cdot \cos \alpha$$

 \vec{F} – siła, $\vec{\Delta s}$ – przemieszczenie ciała α – kąt między wektorami \vec{F} i $\vec{\Delta s}$ 

$$\text{Gdy } \vec{F} \parallel \vec{\Delta s} \Rightarrow W = F \cdot \Delta s$$

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

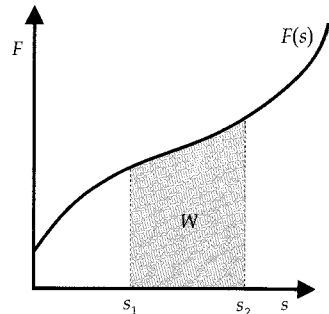
 s_1, s_2 – współrzędne początkowe i końcowe ciała

Praca siły zmiennej:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s) \cdot \cos \alpha \, ds$$

Praca siły zmiennej równoległej do przemieszczenia ciała:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s) \cdot ds$$



Moc

Moc średnia

$$P = \frac{W}{t}$$

W – praca,
 t – czas wykonania pracy

Moc chwilowa

$$P = \frac{dW}{dt} \quad W = \int_{t_1}^{t_2} P \cdot dt \quad t_2 - t_1 = \text{czas wykonania pracy}$$

Dla stałej mocy P : $W = P \cdot t$

$$P = F \cdot v$$

F – siła działająca na ciało
 v – prędkość ciała

Energia

a) Energia kinetyczna ciała

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

m – masa ciała,
 v – prędkość

$$\Delta E_k = E_{k_2} - E_{k_1} = W$$

W – praca wykonana nad ciałem przez siły zewnętrzne

ΔE_k – zmiana energii kinetycznej ciała

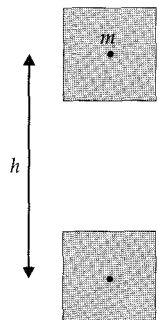
b) Energia potencjalna grawitacyjna ciała w jednorodnym polu grawitacyjnym

$$E_p = mgh$$

m – masa ciała,

g – przyspieszenie grawitacyjne

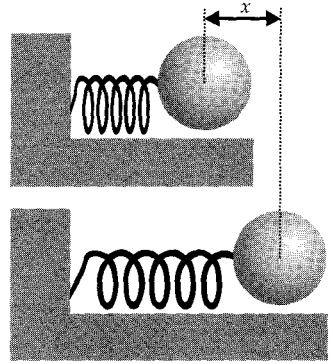
h – wysokość ciała nad poziomem odniesienia



c) Energia potencjalna sprężystości

$$E_p = \frac{kx^2}{2}$$

x – odkształcenie ciała sprężystego
 k – współczynnik charakteryzujący własności sprężyste ciała



d) Ogólna definicja energii potencjalnej

$$E_p = E_{p_0} + W$$

E_p – energia potencjalna układu oddziałujących ciał w danej ich konfiguracji (położeniu wzajemnym)

E_{p_0} – energia potencjalna tego układu ciał w konfiguracji przyjętej umownie jako konfiguracja odniesienia. Wartość E_{p_0} jest również ustalona umownie, zwykle przyjmuje się

$$E_{p_0} = 0$$

W – praca sił zewnętrznych niezbędna do przemieszczania ciał z konfiguracji odniesienia do konfiguracji danej (tej dla której obliczamy energię potencjalną)

e) Energia mechaniczna ciała lub układu ciał

$$E = E_p + E_k$$

E_p – energia potencjalna

E_k – energia kinetyczna

Całkowita energia mechaniczna odizolowanego układu ciał, w którym jedynymi działającymi siłami, są siły zachowawcze jest wielkością stałą, niezależną od czasu.

Siły zachowawcze to siły, których praca nie zależy od kształtu toru ciała, ani od rodzaju ruchu ciała po tym torze, a jedynie od początkowego i końcowego położenia ciała.

Praca siły zachowawczej wykonana na drodze zamkniętej wynosi zero.

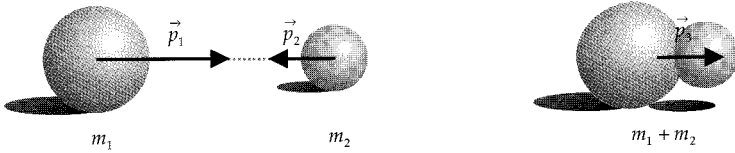
Zderzenia ciał

a) Zderzenia idealnie niesprężyste

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 \quad (\text{zasada zachowania pędu})$$

\vec{p}_1, \vec{p}_2 – pędy poszczególnych ciał przed zderzeniem

\vec{p}_3 – pęd połączonych ciał po zderzeniu



$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_3 \Rightarrow \vec{v}_3 = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

m_1, m_2 – masy ciał

\vec{v}_1, \vec{v}_2 – prędkości ciał przed zderzeniem

\vec{v}_3 – prędkość połączonych ciał po zderzeniu

b) Zderzenia idealnie sprężyste

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \quad (\text{zasada zachowania pędu})$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$$

\vec{p}_1, \vec{p}_2 – pędy ciał przed zderzeniem,

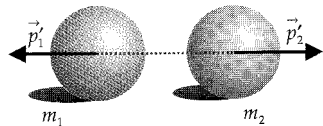
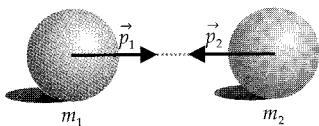
\vec{v}_1, \vec{v}_2 – prędkości przed zderzeniem

\vec{p}'_1, \vec{p}'_2 – pędy ciał po zderzeniu

\vec{u}_1, \vec{u}_2 – prędkości ciał po zderzeniu

$$E_{k_1} + E_{k_2} = E'_{k_1} + E'_{k_2} \quad (\text{zasada zachowania energii kinetycznej})$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$



$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1(m_1 - m_2) + 2m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2(m_2 - m_1) + 2m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$

Maszyny proste

Dźwignia dwustronna

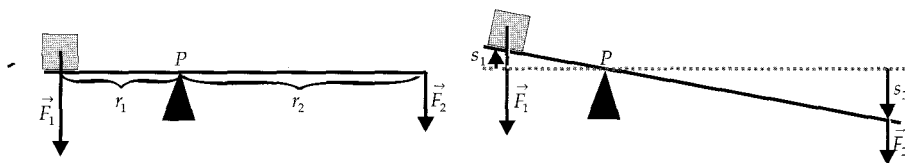
F_1 – siła oporu (np. ciężar ciała)

F_2 – siła pokonująca opór

r_1 – ramię siły F_1

r_2 – ramię siły F_2

P – punkt podparcia dźwigni



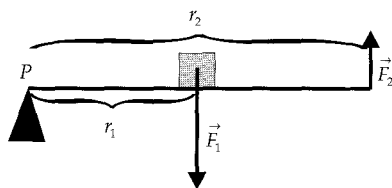
$$F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$$

Warunek równowagi dźwigni: $F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$

s_1 – droga działania siły F_1

s_2 – droga działania siły F_2

Dźwignia jednostronna



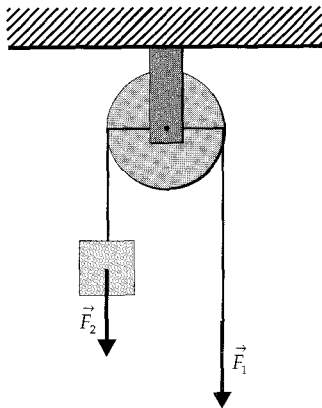
$$F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$$

Warunek równowagi dźwigni: $F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$

s_1 – droga działania siły F_1

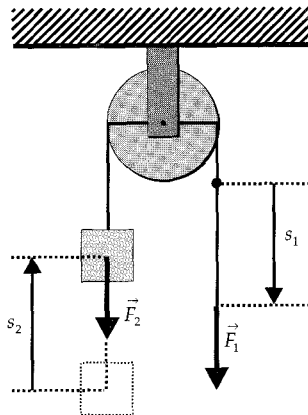
s_2 – droga działania siły F_2

Blok nieruchomy



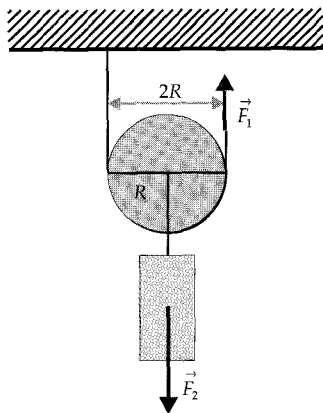
Warunek równowagi bloku

$$F_1 = F_2$$



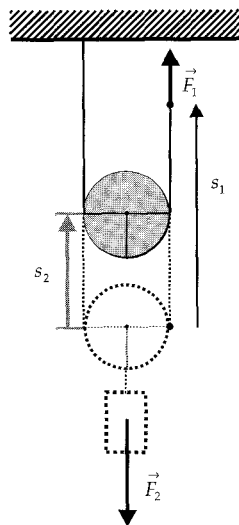
$$F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$$

Blok ruchomy



Warunek równowagi bloku

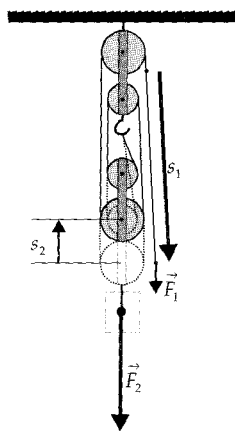
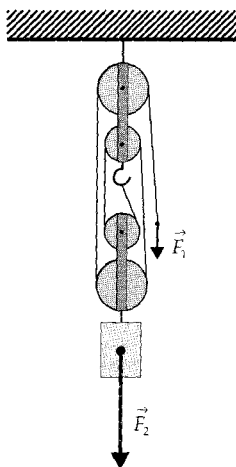
$$F_1 \cdot 2R = F_2 \cdot R \Rightarrow F_1 = \frac{F_2}{2}$$



$$2s_2 = s_1$$

$$F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$$

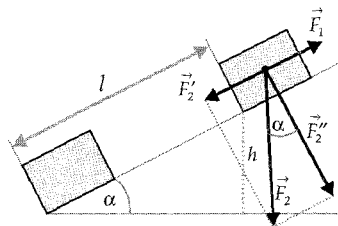
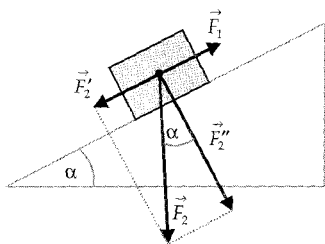
Wielokrążek



Warunek równowagi wielokrążka: $F_1 = \frac{F_2}{n}$ $F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$

n – liczba krążków

Równia pochyła



Warunek równowagi ciała na równi:

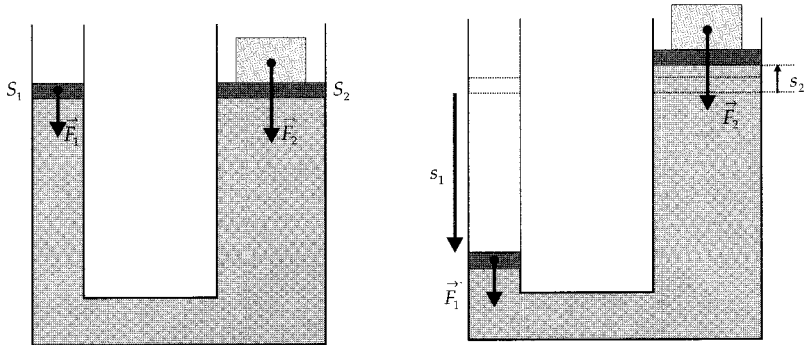
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{F_2'}{F_2} = \frac{h}{l}$$

$$F_1 = F_2'$$

$$F_1 \cdot l = F_2 \cdot h$$

$$F_1 = F_2 \sin \alpha$$

Prasa hydrauliczna



Warunek równowagi dla prasy:

$$F_1 / S_1 = F_2 / S_2$$

$$F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$$

S_1, S_2 – pola powierzchni tłoków

s_1, s_2 – drogi działania sił F_1, F_2

Dla wszystkich maszyn prostych spełniona jest następująca zasada: praca wykonana przez siłę napędzającą maszynę (pokonującą opór) jest ściśle równa pracy jaką należy wykonać przeprowadzając daną czynność bezpośrednio, bez użycia maszyny prostej.

Dynamika ruchu obrotowego bryły sztywnej

Moment bezwładności bryły

I – moment bezwładności bryły względem osi OO

$$I = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2$$

m_i – masa i -tego punktu materialnego, na jakie podzielono bryłę

r_i – odległość tego punktu od osi obrotu

n – liczba punktów

Przy ciągłym rozkładzie masy: $I = \int_V r^2 \cdot \rho dV$

V – objętość bryły

dV – objętość nieskończenie małego fragmentu bryły

r – odległość fragmentu dV od osi bryły

ρ – gęstość materiału bryły w danym fragmencie objętości dV

Dla bryły jednorodnej $\rho = \text{const}$

$$I = \rho \cdot \int_V r^2 dV$$

Twierdzenie Steinera

OO – oś przechodząca przez środek masy bryły

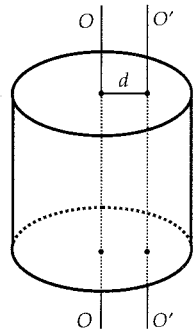
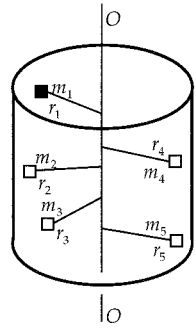
$O'O'$ – dowolna oś obrotu równoległa do osi OO

I – moment bezwładności względem osi $O'O'$

I_o – moment bezwładności względem osi OO

d – odległość między osiami

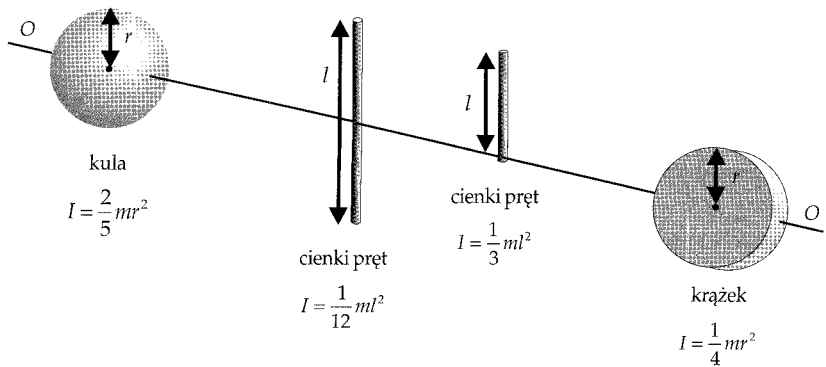
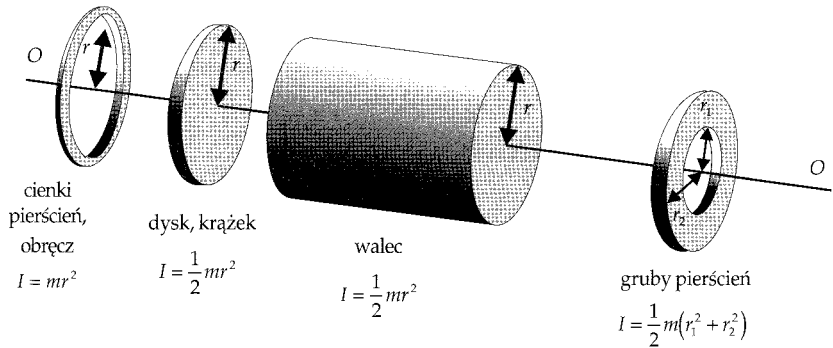
$$I = I_o + md^2$$



Momenty bezwładności niektórych brył

 m – masa bryły, r – promień

OO – oś obrotu



Moment siły

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha = d \cdot F$$

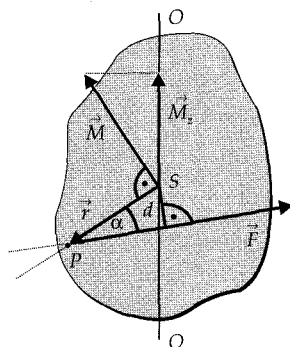
\vec{M} – moment siły \vec{F} względem punktu S

\vec{r} – promień wodzący poprowadzony z punktu S do punktu przyłożenia siły P

d – odległość punktu S od linii działania siły F czyli ramię siły F względem punktu S

\vec{M}_z – wektor składowy wektora \vec{M} w kierunku ustalonej osi obrotu bryły OO

\vec{M}_z – nazywamy momentem siły \vec{F} względem osi OO



Moment pędu

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

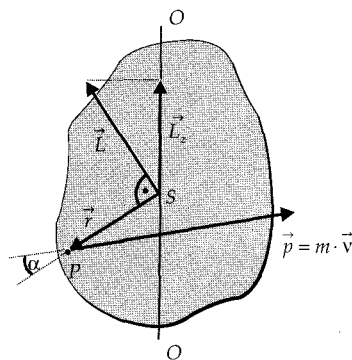
$$L = r \cdot m \cdot v \cdot \sin \alpha$$

\vec{L} – moment pędu punktu materialnego względem punktu S

\vec{p} – pęd punktu materialnego P

\vec{r} – promień wodzący poprowadzony od punktu S do punktu materialnego P

m, \vec{v} – masa i prędkość punktu materialnego



Moment pędu bryły sztywnej względem punktu S

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

\vec{r}_i, \vec{p}_i – promień wodzący oraz pęd i -tego punktu materialnego, na jakie podzielono bryłę

n – liczba punktów,

Przy ciągłym rozkładzie masy

$$\vec{L} = \int_V (\vec{r} \times \vec{v}) \rho \cdot dV$$

ρ – gęstość bryły,

dV – nieskończenie mały fragment objętości bryły

\vec{L}_z – wektor składowy wektora \vec{L} w kierunku ustalonej osi obrotu bryły sztywnej nazywamy momentem pędu bryły względem tej osi

$$\vec{L}_z = I \cdot \vec{\omega}$$

I – moment bezwładności bryły względem osi obrotu

$\vec{\omega}$ – prędkość kątowa obrotów

Podstawowe prawo dynamiki ruchu obrotowego

- obroty względem nieruchomego punktu

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

\vec{L} – moment pędu bryły względem dowolnego punktu S

\vec{M} – wypadkowy moment sił zewnętrznych działających na bryłę względem tego samego punktu S

- obroty względem nieruchomej osi

$$\vec{\epsilon} = \frac{\vec{M}_z}{I}$$

$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ – przyspieszenie kątowe bryły

\vec{M}_z – wypadkowy moment sił zewnętrznych względem osi obrotów

I – moment bezwładności bryły względem tej osi

Energia kinetyczna ruchu obrotowego wokół osi nieruchomej

$$E_k = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

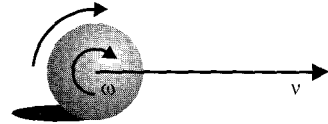
Energia kinetyczna bryły toczącej się po płaszczyźnie

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

v – prędkość ruchu postępowego środka masy bryły

I – moment bezwładności względem osi obrotów bryły przechodzącej przez jej środek masy

ω – prędkość kątowa obrotów

*Zasada zachowania momentu pędu*

$$\vec{L} = \text{const}, \text{ jeżeli } \vec{M} = 0$$

Jeżeli na układ punktów materialnych nie działają żadne zewnętrzne momenty sił lub wypadkowy moment siły jest równy zero, to całkowity moment pędu układu pozostaje stały.

\vec{L} – całkowity moment pędu układu punktów materialnych (ciał) względem dowolnego punktu nieruchomego

Całkowity moment pędu układu, to suma wektorów momentu pędu poszczególnych elementów układu.

\vec{M} – wypadkowy moment sił zewnętrznych względem tego punktu

Dla obrotów układu wokół nieruchomej osi

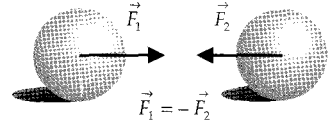
$$L_z = I \cdot \vec{\omega} = \text{const}, \text{ gdy } \vec{M}_z = 0$$

I – moment bezwładności układu względem nieruchomej osi

\vec{M}_z – wypadkowy moment sił zewnętrznych względem osi obrotów

Grawitacja*Prawo powszechnego ciążenia*

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$



F_g – siła wzajemnego przyciągania się punktów materialnych (siła grawitacji)

m_1, m_2 – masy punktów materialnych (ciała o rozmiarach pomijalnych w porównaniu z odległością między nimi)

G – stała grawitacji

r – odległość między oddziałującymi punktami

Prawo jest spełnione dla ciał o dowolnych rozmiarach pod warunkiem sferyczno-symetrycznego rozkładu masy wewnątrz tych ciał.

Natężenie pola grawitacyjnego

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}_g}{m}$$

$\vec{\gamma}$ – natężenie pola grawitacyjnego

\vec{F}_g – siła grawitacji działająca na punkt materialny umieszczony w polu grawitacyjnym

m – masa tego punktu

Zasada superpozycji pól

$$\vec{\gamma} = \sum_{i=1}^n \vec{\gamma}_i$$

$\vec{\gamma}$ – wypadkowe natężenie pola wytworzonego przez kilka ciał

$\vec{\gamma}_i$ – natężenie pola wytworzonego przez i -te ciało

Energia potencjalna w centralnym polu grawitacyjnym

$$E_p = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$$

E_p – energia potencjalna grawitacyjna dwóch punktów materialnych

m_1, m_2 – masy tych punktów

r – odległość między punktami

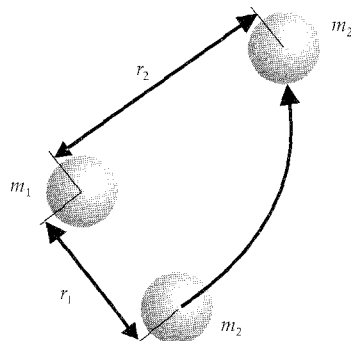
Praca w centralnym polu grawitacyjnym

$$W_{(r_1 \rightarrow r_2)} = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$W_{(r_1 \rightarrow r_2)}$ – praca wykonana przez siłę zewnętrzną równoważącą siłę grawitacji przy przemieszczaniu mas punktowych m_1, m_2 z odległości wzajemnej r_1 na odległość r_2

$$W_{(r_1 \rightarrow r_2)} = E_p(r_2) - E_p(r_1)$$

$E_p(r_2), E_p(r_1)$ – energie potencjalne mas punktowych przy ich odległościach wzajemnych r_2 i r_1



Potencjał pola grawitacyjnego

$$V = \frac{E_p}{m}$$

E_p – energia potencjalna punktu materialnego w danym punkcie pola grawitacyjnego

m – masa punktu materialnego w centralnym polu grawitacyjnym

W centralnym polu grawitacyjnym:

$$V = -\frac{GM}{r}$$

M – masa źródła pola grawitacyjnego

r – odległość od źródła do punktu, w którym obliczany jest potencjał

Związek między natężeniem i potencjałem pola

$$\vec{\gamma} = -\vec{\text{grad}}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \vec{k} \right)$$

Pierwsza prędkość kosmiczna

$$v_I = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}}$$

v_I – prędkość satelity Ziemi poruszającego się wokół niej po orbicie kołowej o promieniu niewiele większym od promienia Ziemi

M – masa Ziemi

R – promień Ziemi

Druga prędkość kosmiczna

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

v_{II} – prędkość jaką należy nadać ciału aby mogło ono oddalić się na nieskończenie dużą odległość od Ziemi

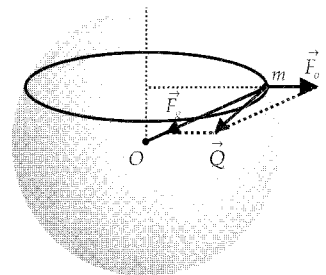
Ciężar ciała

$$\vec{Q} = \vec{F}_g + \vec{F}_o$$

\vec{Q} – ciężar ciała

\vec{F}_g – siła grawitacyjna działająca na ciało

\vec{F}_o – siła odśrodkowa działająca na ciało wywołana dobowym obrotem Ziemi

*Przyspieszenie ziemskie*

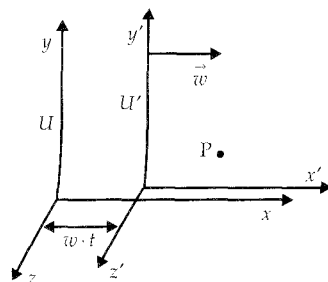
$$\vec{g} = \frac{\vec{Q}}{m}$$

m – masa ciała

\vec{Q} – ciężar ciała

Szczególna teoria względności

Relacje pomiędzy współzrędnymi przestrzennymi i czasowymi ciała P obserwowanego w dwóch inercjalnych układach odniesienia U i U' , gdy układ U' porusza się z prędkością \vec{w} względem U (\vec{w} równoległe do osi OX).



Transformacja Galileusza

$$x' = x - w \cdot t \quad x = x' + w \cdot t$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

(x', y', z', t') – współrzędne ciała P w układzie U'

(x, y, z, t) – współrzędne ciała P w układzie U

\vec{w} – prędkość układu U' względem U

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{w}$$

\vec{v}' – prędkość ciała w układzie U'

\vec{v} – prędkość ciała w układzie U

Transformacja Lorentza

$$x' = \gamma(x - w \cdot t)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{w \cdot x}{c^2}\right)$$

$$\text{gdzie } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

$$v'_x = \frac{v_x - w}{1 - \frac{v_x \cdot w}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{v_x \cdot w}{c^2}\right)}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{v_x \cdot w}{c^2}\right)}$$

$$x = \gamma(x' + w \cdot t')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{w \cdot x'}{c^2}\right)$$

c – prędkość światła w próżni

$$v_x = \frac{v'_x + w}{1 + \frac{v'_x \cdot w}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v'_x \cdot w}{c^2}\right)}$$

$$v_z = \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v'_x \cdot w}{c^2}\right)}$$

(v'_x, v'_y, v'_z) – składowe prędkości \vec{v}' ciała w układzie U'

(v_x, v_y, v_z) – składowe prędkości \vec{v} ciała w układzie U

Dla $w \ll c$ transformacja Lorentza przechodzi w transformację Galileusza.

Interwał przestrzenno-czasowy

$$s_{12} = \sqrt{(t_2 - t_1)^2 \cdot c^2 - \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]}$$

s_{12} – interwał przestrzenno-czasowy między dwoma zdarzeniami mierzony w inercjalnym układzie odniesienia U

(x_1, y_1, z_1, t_1) – współrzędne zdarzenia 1

(x_2, y_2, z_2, t_2) – współrzędne zdarzenia 2

interwał między dwoma zdarzeniami jest niezmienniczy względem układu odniesienia

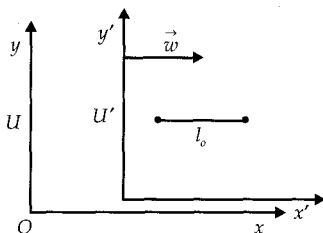
Skrócenie Lorentza

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}} \quad l \leq l_0$$

l_0 – długość pręta będącego w spoczynku względem układu U' poruszającego się

z prędkością \vec{w} względem układu U

l – długość tego pręta mierzona w układzie U



Dylatacja czasu

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \quad \Delta t \geq \Delta t_0$$

Δt_0 – odstęp czasu między dwoma zdarzeniami zachodzącymi w tym samym, spoczywającym względem układu U' punkcie

Δt – odstęp czasu między tymi samymi zdarzeniami mierzony w układzie „nieruchomym” U

Nierównoczesność zdarzeń

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{w}{c^2 \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} (x_1 - x_2)$$

x_1, x_2 – współrzędne dwóch zdarzeń w układzie „nieruchomym” U , które w układzie tym zaszły jednocześnie ($t_2 = t_1$)

$\Delta t' = t'_2 - t'_1$ – odstęp czasu między tymi samymi zdarzeniami mierzony w układzie „ruchomym” U' , poruszającym się z prędkością \vec{w} względem układu U

Pęd ciała

$$p = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m \cdot \gamma \cdot \vec{v}, \quad m - \text{masa ciała} \quad \vec{v} - \text{prędkość ciała}$$

Przyspieszenie

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\vec{F} - \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{F} \cdot \vec{v}) \right] \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{m} \quad \vec{F} - \text{siła działająca na ciało}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Energia całkowita ciała

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m \cdot \gamma \cdot c^2$$

Dla ciała spoczywającego w danym układzie odniesienia $E = E_0 = mc^2$
 E_0 – energia spoczynkowa

Energia kinetyczna ciała

$$E_k = E - E_0 = m\gamma c^2 - mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Związek między pędem i energią

$$E = \sqrt{p^2 \cdot c^2 + m^2 \cdot c^4}$$

III. Termodynamika i fizyka cząsteczkowa

Pierwsza zasada termodynamiki

$$\Delta U = W + Q$$

ΔU – przyrost energii wewnętrznej układu termodynamicznego

W – praca wykonana nad układem przez siły zewnętrzne

Q – ciepło dostarczone do układu

W przypadku gdy układ wykonuje pracę lub oddaje ciepło do otoczenia, wielkości W i Q są ujemne.

Przyrost energii wewnętrznej układu termodynamicznego w dowolnym procesie jest równy sumie pracy wykonanej nad układem przez siły zewnętrzne i dostarczonego do układu ciepła.

Ciepło

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T \quad \text{lub} \quad Q = C \cdot n \cdot \Delta T$$

Q – ilość ciepła dostarczonego ciału powodująca zmianę jego temperatury o ΔT

m – masa ciała

c – ciepło właściwe substancji

C – ciepło molowe substancji

n – ilość moli

$$C = \mu \cdot c \quad n = \frac{m}{\mu}$$

μ – masa cząsteczkowa (molowa) substancji

Procesy termodynamiczne w gazie doskonałym

Równanie stanu gazu doskonałego (równanie Clapeyrona)

$$p \cdot V = n \cdot RT = \frac{m}{\mu} \cdot RT$$

p – ciśnienie gazu

V – objętość gazu

T – temperatura w skali bezwzględnej (Kelwina)

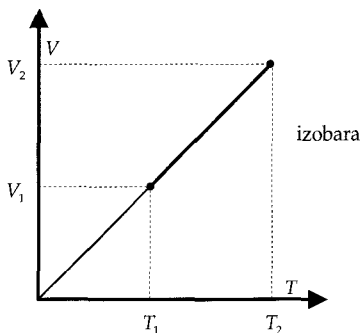
R – uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

n – liczba moli gazu

m – masa gazu

μ – masa cząsteczkowa gazu

Przemiana izobaryczna

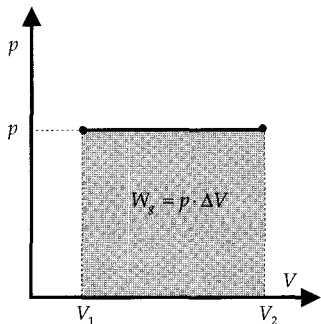


Dla stałej masy gazu m pod stałym ciśnieniem p

$$\frac{V}{T} = \text{const}$$

Praca gazu w przemianie izobarycznej

$$W_g = p \cdot (V_2 - V_1) = p \cdot \Delta V$$



Praca sił zewnętrznych w przemianie izobarycznej

$$W = -W_g = -p \cdot \Delta V$$

I zasada termodynamiki w przemianie izobarycznej

$$\Delta U = -p \cdot \Delta V + Q = -p\Delta V + C_p \cdot n \cdot \Delta T = C_V \cdot n \cdot \Delta T$$

Q – ciepło pobrane przez gaz w przemianie izobarycznej

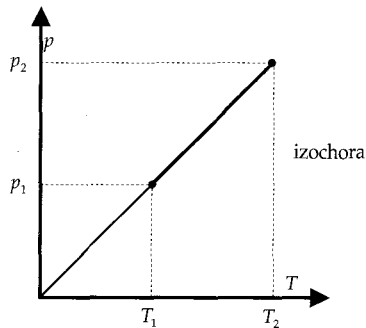
C_p – ciepło molowe gazu przy stałym ciśnieniu

C_V – ciepło molowe gazu w stałej objętości

ΔT – przyrost temperatury gazu, $\Delta T = T_2 - T_1$

n – ilość moli (indeksy $_1$ i $_2$ oznaczają odpowiednio stan początkowy i końcowy)

Przemiana izochoryczna



Dla stałej masy gazu m zamkniętej w stałej objętości V

$$\frac{p}{T} = \text{const}$$

Praca w przemianie izochorycznej

$$W = -W_g = 0$$

Ciepło pobrane przez gaz

$$Q = C_V \cdot n \cdot \Delta T$$

C_V – ciepło molowe gazu przy stałej objętości

I zasada termodynamiki w przemianie izochorycznej

$$\Delta U = Q = C_V \cdot n \cdot \Delta T = C_V \cdot n \cdot (T_2 - T_1)$$

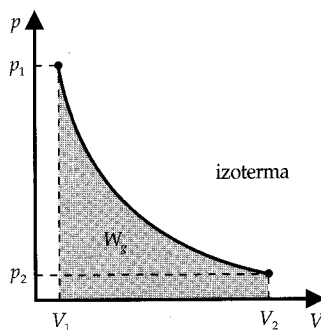
Przemiana izotermiczna

Dla stałej masy gazu m w stałej temperaturze T :

$$p \cdot V = \text{const}$$

Praca rozprężania gazu w przemianie izotermicznej

$$W_g = \int_{V_1}^{V_2} p dV = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$



Praca sił zewnętrznych przy izotermicznym sprężaniu gazu

$$W = -W_g = nRT \ln \frac{V_1}{V_2}$$

(indeksy $_1$ i $_2$ oznaczają odpowiednio stan początkowy i końcowy gazu)

Izasada termodynamiki w przemianie izotermicznej

$$\Delta U = 0 = W + Q = -W_g + Q$$

$$W_g = Q$$

Przemiana adiabatyczna

Dla stałej masy gazu m przy braku wymiany ciepła z otoczeniem ($Q = 0$)

$$p \cdot V^\kappa = \text{const}$$

κ – wykładnik adiabaty

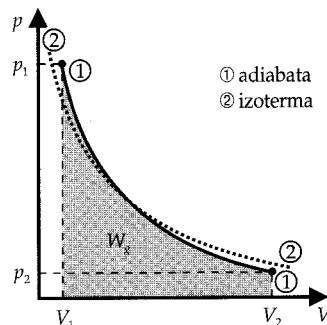
$$\kappa = \frac{C_p}{C_V}$$

C_p – ciepło molowe gazu w stałym ciśnieniu

C_V – ciepło molowe gazu w stałej objętości

R – uniwersalna stała gazowa

$$C_p - C_V = R$$



Praca rozprężania gazu w przemianie adiabatycznej

$$W_g = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \cdot \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1} \right]$$

Praca sił zewnętrznych przy sprężaniu adiabatycznym

$$W_g = -W_g = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \cdot \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1} - 1 \right]$$

(indeksy $_1$ i $_2$ oznaczają odpowiednio stan początkowy i końcowy gazu)

I zasada termodynamiki w przemianie adiabatycznej

$$\Delta U = W = -W_g = C_V \cdot n(T_2 - T_1)$$

Teoria kinetyczno-molekularna gazów

Podstawowy wzór teorii kinetyczno-molekularnej

$$p \cdot V = \frac{2}{3} N \cdot E_{ks}$$

p , V – ciśnienie i objętość gazu doskonałego

N – liczba cząsteczek gazu

E_{ks} – średnia energia kinetyczna ruchu postępowego pojedynczej cząsteczki

$$E_{ks} = \frac{mv_s^2}{2} = \frac{3}{2} kT$$

m – masa cząsteczki

v_s^2 – średni kwadrat prędkości cząsteczki

k – stała Boltzmana, $k = R / N_A$

N_A – liczba Avogadro

R – uniwersalna stała gazowa

Rozkład Maxwella prędkości cząsteczek

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot dv$$

$\frac{dN}{N}$ – względna liczba cząsteczek, których prędko-

ści zawarte są w przedziale od v do $v + dv$

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

v_p – prędkość najbardziej prawdopodobna cząsteczek gazu

T – temperatura gazu

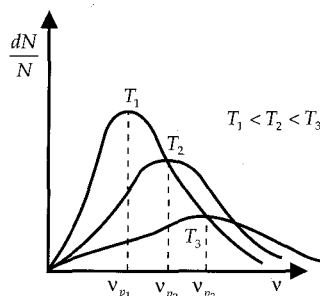
m – masa cząsteczki

$$v_m = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

v_m – prędkość średnia arytmetyczna cząsteczek

$$v_s = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

v_s – prędkość średnia kwadratowa cząsteczek



Zamiana ciepła na pracę

Cykl Carnota

Sprawność idealnego cyklu Carnota

$$\eta_i = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

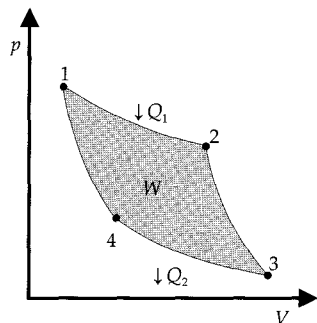
W – praca wykonana przez silnik Carnota w jednym cyklu

Q_1 – ciepło pobrane przez gaz od grzejnicy w trakcie izotermicznego rozprężania się gazu (proces $1 \rightarrow 2$)

Q_2 – ciepło oddane do chłodnicy w trakcie izotermicznego sprężania gazu (proces $3 \rightarrow 4$)

T_1 – temperatura grzejnicy

T_2 – temperatura chłodnicy



Sprawność rzeczywistego silnika cieplnego

$$\eta < \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

T_1, T_2 – temperatury odpowiednio grzejnicy i chłodnicy rzeczywistego silnika cieplnego

Druga zasada termodynamiki

Nie jest możliwe zbudowanie silnika cieplnego pracującego cyklicznie, którego jednym rezultatem działania byłoby pobieranie ciepła ze źródła i wykonywanie równoważnej mu pracy.

Entropia. Zasada wzrostu entropii

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

dS – przyrost entropii układu odizolowanego, który w odwracalnym procesie nieskończonej małej zmiany stanu pobiera ciepło δQ w temperaturze T

Dla każdego odizolowanego układu, w którym zachodzi dowolny proces termodynamiczny, entropia nie maleje.

$$\Delta S \geq 0$$

(Dla procesów odwracalnych występuje znak równości.)

Interpretacja statystyczna entropii

$$S = k \cdot \ln P$$

S – entropia układu

k – stała Boltzmana

P – prawdopodobieństwo termodynamiczne stanu układu – jest to liczba wszystkich możliwych położeń i prędkości cząsteczek odpowiadających danemu stanowi układu opisanemu parametrami makroskopowymi p, V, T, n

P jest liczbą całkowitą ($P \geq 1$)

IV. Elektryczność i magnetyzm

Elektrostatyka

Prawo Coulomba

$$F = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

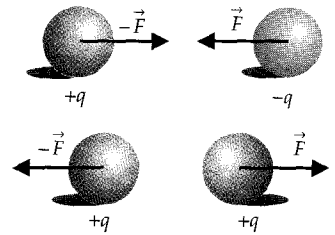
F – siła wzajemnego oddziaływania dwóch ładunków punktowych umieszczonych w próżni dla ładunków jednoimiennych jest to siła odpychania, a dla różnoimiennych, siła przyciągania

q_1, q_2 – wartości ładunków

r – odległości między nimi

ϵ_0 – przenikalność elektryczna próżni $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$

k – współczynnik proporcjonalności $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$



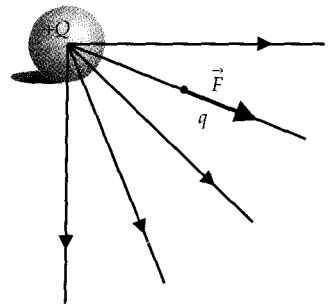
Natężenie pola elektrostatycznego

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

\vec{E} – natężenie pola elektrostatycznego w danym punkcie przestrzeni

\vec{F} – siła działająca na próbny ładunek dodatni q umieszczony w tym punkcie

q – wartość ładunku próbnego



Dla źródła pola elektrostatycznego będącego ładunkiem punktowym

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Q – wartość ładunku wytwarzającego pole

r – odległość od ładunku do miejsca, w którym obliczamy natężenie

Wzór obowiązuje również dla ciał makroskopowych o symetrii kulistej.

Dla dodatniego źródła wektory \vec{E} są we wszystkich punktach przestrzeni zwrócone od ładunku, natomiast dla ujemnego źródła wektory są zwrócone w jego stronę.

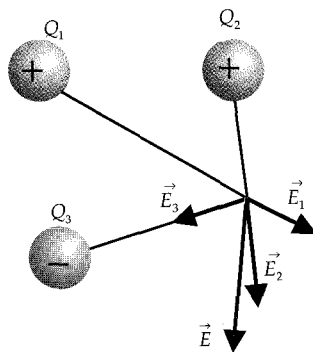
Zasada superpozycji pól

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

\vec{E}_i – natężenie pola elektrostatycznego w danym punkcie przestrzeni wytworzone przez ładunek nr i

\vec{E} – wypadkowe natężenie pola

n – liczba ładunków

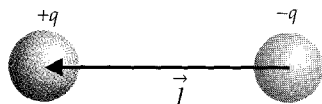


Dipol elektryczny

$$\vec{m} = q \cdot \vec{l}$$

\vec{m} – moment elektryczny dipola
 q – wartość pojedynczego ładunku punktowego

\vec{l} – wektor zwrócony od ładunku ujemnego do dodatniego o długości równej odległości między ładunkami

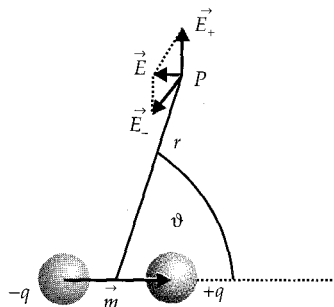


$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

\vec{E} – natężenie pola elektrostatycznego dipola w dowolnym punkcie przestrzeni

\vec{E}_+ ; \vec{E}_- – natężenia pól pochodzących od ładunku dodatniego i ujemnego

r – odległość od środka dipola do punktu P, w którym obliczamy natężenie pola
 $r \gg l$



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{m}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \vartheta + 1}$$

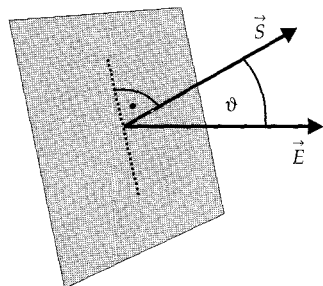
Strumień natężenia pola elektrostatycznego

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = E \cdot S \cdot \cos \vartheta$$

Φ – strumień natężenia pola elektrostatycznego

\vec{E} – natężenie pola elektrostatycznego w obrębie płaszczyzny o polu powierzchni S

\vec{S} – wektor powierzchni;
 jest to wektor prostopadły do płaszczyzny, a jego długość jest równa polu powierzchni tej płaszczyzny

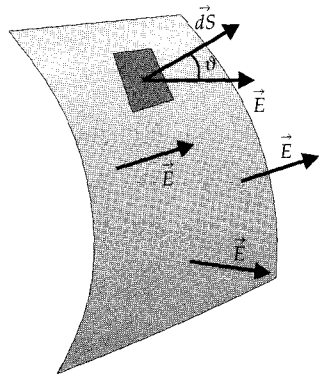


Strumień natężenia pola przez powierzchnię zakrzywioną

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$d\vec{S}$ – wektor powierzchni nieskończenie małego fragmentu płaszczyzny o polu dS

\vec{E} – natężenie pola elektrostatycznego w obrębie tego fragmentu

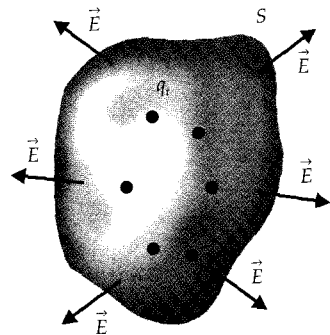


Pravo Gaussa

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n q_i$$

Φ – całkowity strumień natężenia pola przenikający przez powierzchnię zamkniętą

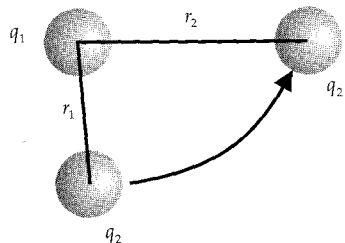
$Q = \sum_{i=1}^n q_i$ – suma algebraiczna ładunków zamkniętych w tej powierzchni



Praca w polu elektrostatycznym

$$W_{(r_1 \rightarrow r_2)} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$W_{(r_1 \rightarrow r_2)}$ – praca wykonana przez siłę zewnętrzną równoważącą siłę pola elektrostatycznego wykonana przy przemieszczeniu ładunków z odległości wzajemnej r_1 na odległość r_2



Energia potencjalna

$$E_p = W_{(\infty \rightarrow r)}$$

E_p – energia potencjalna ładunku q w danym punkcie pola elektrostatycznego
 $W_{(\infty \rightarrow r)}$ – praca siły zewnętrznej równoważącej siłę pola elektrostatycznego wykonana przy przemieszczeniu ładunku q z nieskończoności do danego punktu

Dla układu ładunków punktowych lub kulisto-symetrycznych

$$E_p = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}$$

q_1, q_2 – oddziałujące ładunki
 r – odległość między nimi

Potencjał pola elektrostatycznego

$$V = \frac{E_p}{q}$$

V – potencjał w danym punkcie pola elektrostatycznego
 E_p – energia potencjalna próbnego ładunku punktowego umieszczonego w tym punkcie
 q – wartość ładunku próbnego

$$W_{(1 \rightarrow 2)} = q [V_2 - V_1]$$

$W_{(1 \rightarrow 2)}$ – praca wykonana przez siłę zewnętrzną równoważącą siłę pola przy przemieszczeniu ładunku q z punktu 1 do punktu 2 pola elektrostatycznego

V_1, V_2 – potencjały w punkcie 1 i 2

Potencjał pola wytworzonego przez ładunek punktowy lub kulisto-symetryczny

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

r – odległość od ładunku do miejsca, w którym obliczamy potencjał

Pole elektrostatyczne w dielektrykach

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r}$$

\vec{E} – natężenie pola elektrostatycznego w dielektryku

\vec{E}_0 – natężenie pola elektrostatycznego w próżni

ϵ_r – stała dielektryczna ośrodka

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

\vec{D} – indukcja pola elektrostatycznego

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

\vec{P} – polaryzacja dielektryka

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \cdot \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$$

V – objętość małego fragmentu dielektryka

\vec{p}_i – moment dipolowy i -tej cząsteczki dielektryka

n – liczba cząsteczek w objętości V

$$\vec{P} = \chi \cdot \vec{E}$$

χ – podatność elektryczna dielektryka

$$\epsilon_r = 1 + \chi$$

Pojemność elektryczna przewodnika

$$C = \frac{Q}{V}$$

C – pojemność przewodnika

Q – ładunek wprowadzony na przewodnik

V – potencjał przewodnika

Dla kuli $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \cdot R$

R – promień kuli

ϵ_r – stała dielektryczna ośrodka, w którym umieszczona jest kula

Pojemność kondensatora

$$C = \frac{Q}{U}$$

Q – wartość ładunku zgromadzonego na okładce kondensatora

U – różnica potencjałów między okładkami

Dla kondensatora płaskiego: $C = \epsilon_r\epsilon_0 \cdot \frac{S}{d}$

S – pole powierzchni okładki kondensatora

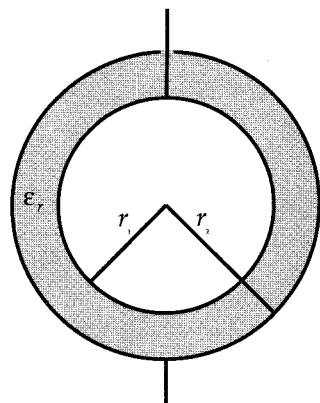
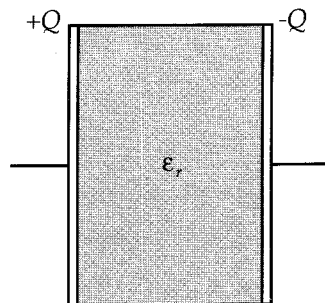
d – odległość między okładkami

ϵ_r – stała dielektryczna ośrodka między okładkami

Dla kondensatora kulistego

$$C = \frac{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

$$\frac{C}{C_0} = \epsilon_r$$



C – pojemność kondensatora z dielektrykiem między okładkami

ϵ_r – stała dielektryczna

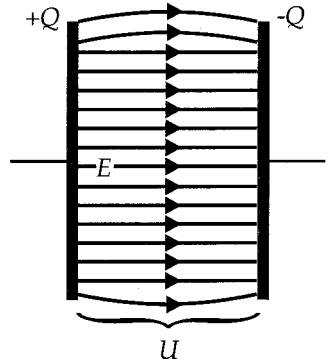
C_o – pojemność tego samego kondensatora bez dielektryka

$$E = \frac{U}{d}$$

E – natężenie pola w kondensatorze płaskim

U – różnica potencjałów między okładkami

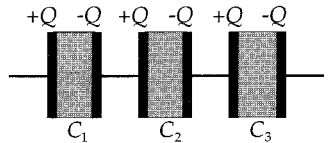
d – odległość między okładkami



Łączenie kondensatorów

a) Połączenie szeregowe

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$



C – pojemność układu kondensatorów połączonych szeregowo

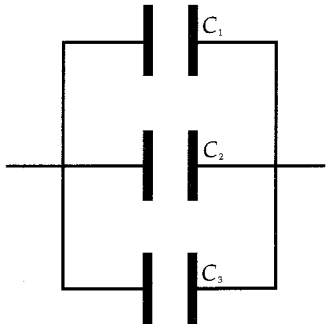
C_i – pojemność i -tego kondensatora w szeregu

n – liczba kondensatorów

b) Połączenie równoległe

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

C – pojemność układu kondensatorów połączonych równoległe



Energia naelektryzowanego przewodnika

$$W = \frac{1}{2} Q \cdot V = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

W – energia przewodnika

Q – ładunek zgromadzony na przewodniku

V – potencjał przewodnika

C – jego pojemność

Energia naładowanego kondensatora

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

U – różnica potencjałów między okładkami kondensatora

Q – ładunek na okładce kondensatora

Gęstość energii pola elektrostatycznego

$$\rho_e = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 E^2}{2}$$

E – natężenie pola

ϵ_r – stała dielektryczna ośrodka, w którym wytworzone jest pole elektrostatyczne

Stały prąd elektryczny**Natężenie prądu**

$$I = \frac{Q}{t}$$

I – natężenie prądu stałego

Q – ładunek przepływający w czasie t przez przekrój poprzeczny przewodnika

Gęstość prądu

$$j = \frac{I}{S}$$

j – gęstość prądu

S – pole powierzchni przekroju poprzecznego przewodnika

Opór elektryczny

$$R = \frac{U}{I}$$

R – opór elektryczny odcinka obwodu elektrycznego

U – napięcie na końcach odcinka

I – natężenie prądu przepływającego przez ten odcinek

Prawo Ohma dla przewodników

$$\frac{U}{I} = R = \text{const}$$

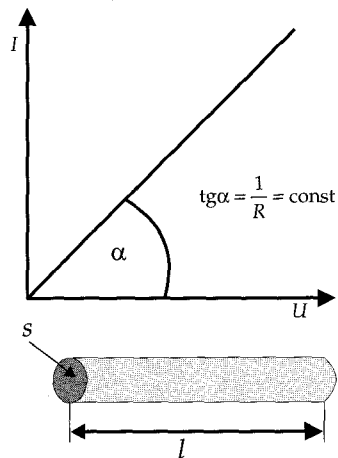
Opór elektryczny przewodnika (w stałej temperaturze) jest stały niezależnie od przyłożonego napięcia

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

R – opór przewodnika

ρ – opór właściwy materiału, z którego wykonano przewodnik

l, S – długość i pole przekroju poprzecznego przewodnika



Przewodnictwo właściwe

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

σ – przewodnictwo właściwe materiału

ρ – opór właściwy

Prawo Ohma w postaci lokalnej (różniczkowej)

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

\vec{j} – gęstość prądu w danym punkcie obwodu

\vec{E} – natężenie pola elektrycznego w tym punkcie

σ – przewodnictwo właściwe

Zależności oporu przewodnika od temperatury

$$\Delta R = \alpha \cdot R_1 \cdot \Delta T$$

ΔR – przyrost oporu elektrycznego przewodnika

α – współczynnik temperaturowy oporu

R_1 – początkowy opór przewodnika (np. w temperaturze $T = 273\text{K}$)

ΔT – przyrost temperatury

Siła elektromotoryczna źródła energii elektrycznej

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q}$$

W – praca wykonana przez źródło kosztem innych form energii (w zależności od źródła jest to energia chemiczna, mechaniczna itd.) przy przepływie przez źródło ładunku q

Prawo Ohma dla obwodu zamkniętego

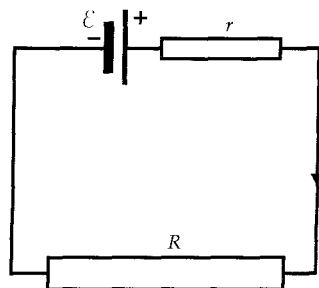
$$\mathcal{E} = I(R + r)$$

\mathcal{E} – siła elektromotoryczna źródła energii elektrycznej

r – opór wewnętrzny źródła

R – całkowity opór zewnętrzny obwodu

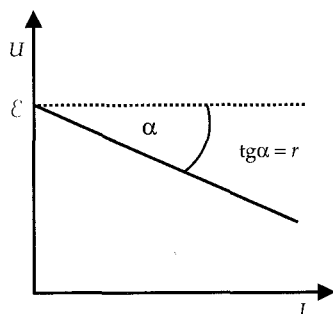
I – natężenie prądu w obwodzie



Napięcie użyteczne źródła energii elektrycznej

$$U = I \cdot R = \mathcal{E} - I \cdot r$$

U – napięcie użyteczne źródła (napięcie na biegunach źródła)



Prawa Kirchhoffa

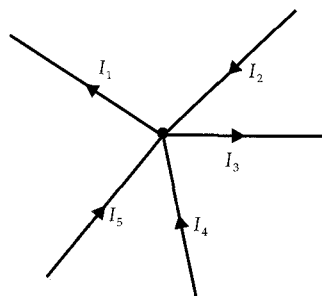
Pierwsze prawo Kirchhoffa

$$I_1 + I_2 + I_3 + \dots = \sum_{i=1}^n I_i = 0$$

I_i – natężenie prądu w i -tym przewodniku węzła sieci

n – liczba przewodników w węzle

Natężenia prądów wpływających do węzła przyjmowane są jako dodatnie, a wypływające z węzła, jako ujemne.



Drugie prawo Kirchhoffa

$$\sum_{i=1}^n I_i \cdot R_i + \sum_{i=1}^k \mathcal{E}_i = 0$$

R_i – opór elektryczny i -tego opornika

I_i – natężenie prądu płynącego przez ten opornik

$I_i \cdot R_i = U_i$ – zmiana potencjału (napięcie) na oporniku R_i

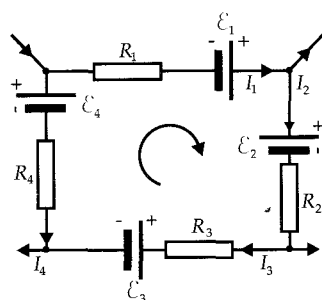
n – liczba oporników w oczku sieci

\mathcal{E}_i – siła elektromotoryczna i -tego źródła energii elektrycznej

k – liczba źródeł w oczku sieci

Natężenia prądów płynących w kierunku zgodnym z wybranym kierunkiem obiegu oczka sieci przyjmowane są jako ujemne.

Siły elektromotoryczne źródeł powodujących przepływ prądu w kierunku zgodnym z kierunkiem obiegu oczka przyjmowane są jako dodatnie.



Łączenie oporników

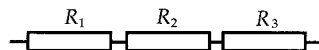
a) Połączenie szeregowe

$$R = R_1 + R_2 + \dots = \sum_{i=1}^n R_i$$

R – opór zastępczy układu oporników połączonych szeregowo

R_i – opór i -tego opornika w szeregu

n – liczba oporników



b) Połączenie równoległe

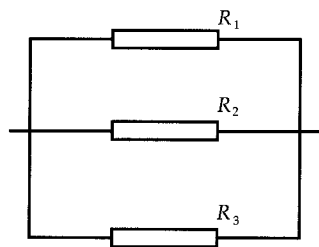
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

R – opór zastępczy układu oporników

połączonych równoległe

R_i – opór i -tego opornika

n – liczba oporników



Praca prądu

$$W = U \cdot I \cdot t$$

W – praca prądu elektrycznego o natężeniu I płynącego przez czas t przez element obwodu (urządzenie) na końcach którego różnica potencjałów (napięcie) wynosi U

Moc prądu

$$P = \frac{W}{t} = U \cdot I$$

P – moc prądu elektrycznego o natężeniu I płynącego przez odbiornik pod napięciem U

Prawo Joule'a-Lenza

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t$$

Q – ilość energii cieplnej wydzielonej w przewodniku o oporze R

I – natężenie prądu

U – napięcie występujące na przewodniku

t – czas przepływu prądu

Prawa elektrolizy**Pierwsze prawo Faradaya**

$$m = k \cdot I \cdot t = kQ$$

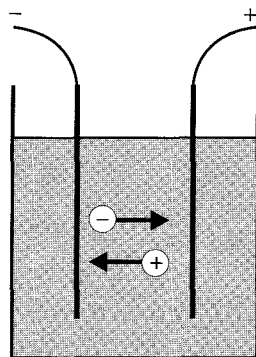
m – masa substancji wydzielonej na elektrodzie

I – natężenie prądu płynącego przez elektrolit

t – czas przepływu prądu

Q – ładunek elektryczny, jaki przepłynął przez elektrolit

k – równoważnik elektrochemiczny substancji

**Drugie prawo Faradaya**

$$\frac{R}{k} = F$$

R – gramorównoważnik chemiczny substancji

F – stała Faradaya

$$R = \frac{\mu}{W}$$

μ – masa molowa substancji

W – wartościowość

$$F = N_A \cdot e \approx 96500 \text{ C}$$

N_A – liczba Avogadro

e – ładunek elementarny

Pole magnetyczne prądów stałych

Prawo Biota-Savarta

$$\vec{\Delta B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{\vec{\Delta l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\Delta B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \Delta l \cdot \sin \alpha}{4\pi r^2}$$

Δl – długość bardzo małego fragmentu przewodnika, przez który płynie prąd stały o natężeniu I

Wektor $\vec{\Delta l}$ ma zwrot zgodny ze zwrotem prądu.

$\vec{\Delta B}$ – wektor indukcji pola magnetycznego wytworzonego w próżni przez fragment przewodnika $\vec{\Delta l}$ w punkcie P odległym od tego fragmentu o r

Wektor \vec{r} ma zwrot od fragmentu $\vec{\Delta l}$ do punktu P

α – kąt pomiędzy wektorami $\vec{\Delta l}$ i \vec{r}

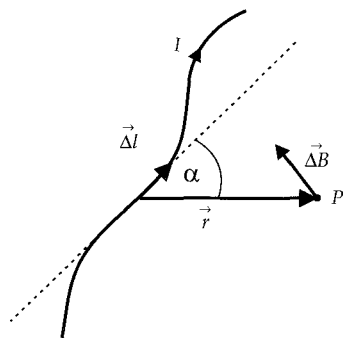
μ_0 – przenikalność magnetyczna próżni, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A} \cdot \text{m}}$

Dla całego przewodnika z prądem o skończonej długości l , znajdującego się w próżni:

$$\vec{B} = \int_l \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

\vec{B} – wypadkowy wektor indukcji pola magnetycznego pochodzący od całego przewodnika

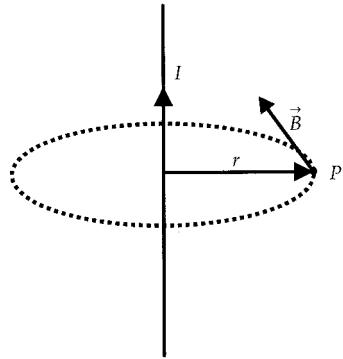
$d\vec{l}$ – nieskończenie mały fragment długości przewodnika



Pole magnetyczne nieskończenie długiego przewodnika prostoliniowego

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r}$$

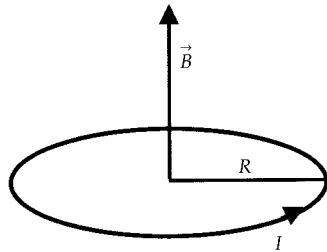
B – indukcja pola magnetycznego wytworzonego przez nieskończenie długi, prostoliniowy przewodnik z prądem stałym o natężeniu I , w punkcie P odległym o r od przewodnika



Pole magnetyczne kołowego przewodnika z prądem

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2R}$$

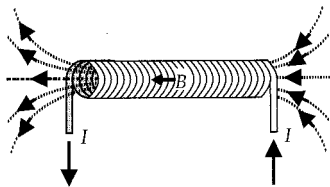
B – indukcja pola magnetycznego w środku kołowego zwoju o promieniu R , przez który płynie prąd o natężeniu I



Pole magnetyczne solenoidu (zwojnicy)

$$B = \mu_0 \cdot nI$$

B – indukcja pola magnetycznego wewnątrz nieskończenie długiego solenoidu, przez który płynie prąd o natężeniu I
 n – ilość zwojów na jednostkę długości solenoidu



Prawo Ampere'a

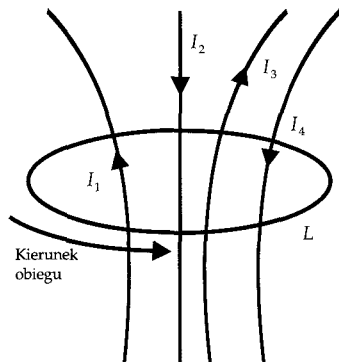
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum_{i=1}^n I_i$$

$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ – krążenie wektora indukcji magnetycznej wzdłuż krzywej zamkniętej L

$d\vec{l}$ – nieskończenie mały fragment krzywej o zwrocie zgodnym z umownie przyjętym kierunkiem obiegu krzywej

$\sum_{i=1}^n I_i$ – suma algebraiczna natężeń prądów przenikających przez powierzchnię rozpiętą na krzywej L

Natężenie prądu przyjmujemy za dodatnie, jeżeli płynie w tę stronę, w którą przesuwalaby się śruba prawoskrętna obracana zgodnie z przyjętym kierunkiem obiegu krzywej.



Siła Lorentza

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha$$

\vec{F} – siła Lorentza działająca na cząstkę o ładunku q poruszającą się w polu magnetycznym o indukcji \vec{B}

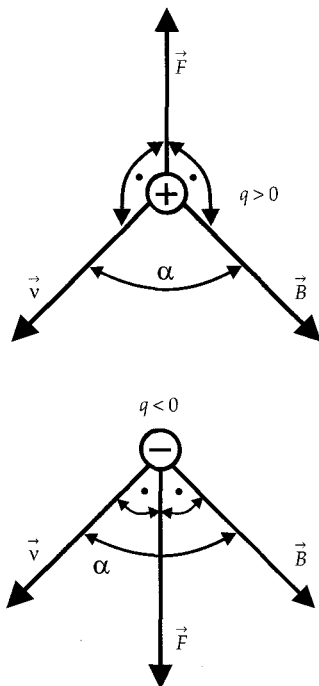
\vec{v} – prędkość cząsteczki

α – kąt między wektorami \vec{v} i \vec{B}

Maksymalna wartość siły Lorentza

występuje dla $\vec{v} \perp \vec{B}$ ($\alpha = 90^\circ$)

$$F_m = q \cdot v \cdot B$$



Ruch cząstki naładowanej w polu magnetycznym

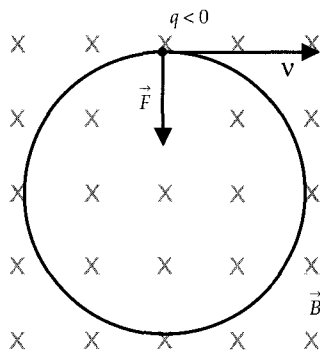
a) Cząstka poruszająca się w jednorodnym polu magnetycznym z prędkością \vec{v} prostopadłą do wektora indukcji \vec{B}

Torem cząstki jest okrąg o promieniu R

$$R = \frac{mv}{qB}$$

m, q – masa i ładunek cząstki

$$\text{okres obiegu okręgu } T = \frac{2\pi m}{qB}$$



(„x” oznacza linię jednorodnego pola magnetycznego prostopadłą do płaszczyzny rysunku i zwróconą w stronę tej płaszczyzny)

b) Wektor prędkości cząstki \vec{v} tworzy kąt α z kierunkiem wektora \vec{B} jednorodnego pola magnetycznego

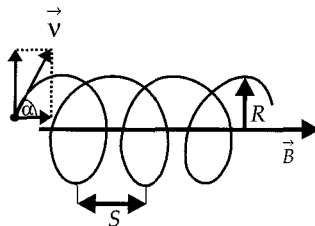
Torem cząstki jest linia śrubowa

Promień linii śrubowej

$$R = \frac{mv \cdot \sin \alpha}{qB}$$

Skok linii śrubowej

$$S = \frac{2\pi mv \cdot \cos \alpha}{qB}$$



Siła elektrodynamiczna

$$\vec{\Delta F} = I \cdot \vec{\Delta l} \times \vec{B}$$

$$\Delta F = I \cdot \Delta l \cdot B \cdot \sin \alpha$$

$\vec{\Delta l}$ – wektor długości małego fragmentu przewodnika, w którym płynie prąd o natężeniu I

Zwrot wektora jest zgodny ze zwrotem natężenia prądu.

\vec{B} – indukcja pola magnetycznego w miejscu fragmentu $\vec{\Delta l}$

α – kąt między wektorami $\vec{\Delta l}$ i \vec{B}

$\vec{\Delta F}$ – siła elektrodynamiczna działająca na fragment $\vec{\Delta l}$

Siła elektrodynamiczna działająca na przewodnik o skończonej długości l , przez który płynie prąd o natężeniu I .

$$\vec{F} = \int_l I d\vec{l} \times \vec{B}$$

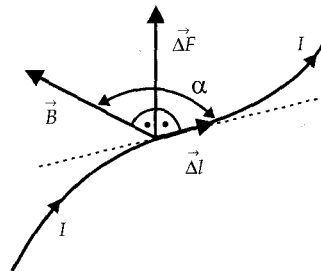
$d\vec{l}$ – nieskończenie mały fragment przewodnika

Dla przewodnika prostoliniowego długości l :

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

$$F = I \cdot l \cdot B \cdot \sin \alpha$$

α – kąt między wektorami \vec{l} i \vec{B}



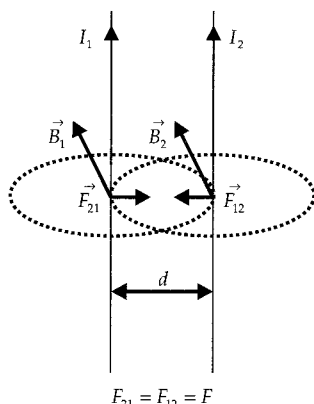
Oddziaływanie wzajemne przewodników z prądem

$$F = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi d}$$

F – siła działająca na jednostkę długości (1 m) każdego z dwóch nieskończenie długich, prostoliniowych przewodników umieszczonych w odległości d

I_1, I_2 – natężenie prądów płynących w przewodnikach

Przewodniki, w których prądy płyną w tych samych kierunkach, przyciągają się, a przewodniki z prądami o przeciwnych kierunkach odpychają się.



Moment magnetyczny obwodu z prądem

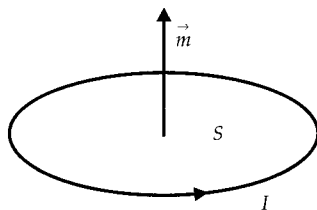
$$m = I \cdot S$$

m – moment magnetyczny obwodu

I – natężenie prądu w obwodzie

S – pole powierzchni obwodu

Zwrot wektora \vec{m} jest zgodny z kierunkiem ruchu śruby prawoskrętnej obracanej zgodnie z kierunkiem przepływu prądu.

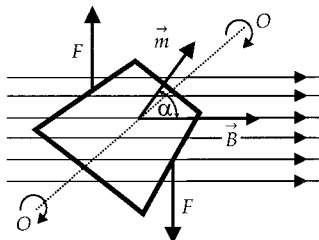


Działanie pola magnetycznego na obwód z prądem

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$M = m \cdot B \cdot \sin \alpha$$

\vec{M} – wypadkowy moment siły działający na obwód z prądem o momencie magnetycznym \vec{m} , umieszczony w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \vec{B}



Pole magnetyczne w ośrodkach materialnych

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_i$$

\vec{B} – indukcja pola magnetycznego w ośrodku materialnym

\vec{B}_0 – indukcja pola magnetycznego w próżni (pole zewnętrzne, pierwotne)

\vec{B}_i – indukcja pola magnetycznego wytworzonego przez ośrodek materialny pod wpływem pola pierwotnego \vec{B}_0

$$\vec{B}_i = \chi \cdot \vec{B}_0$$

χ – podatność magnetyczna ośrodka

$$\vec{B} = (1 + \chi) \vec{B}_0$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

\vec{H} – natężenie pola magnetycznego

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}_i}{\mu_0}$$

\vec{M} – namagnesowanie ośrodka

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \cdot \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu_r \vec{B}_0$$

μ_r – względna przenikalność magnetyczna ośrodka

$$\mu_r = \chi + 1$$

$$\vec{B} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}$$

Strumień wektora indukcji magnetycznej (strumień pola magnetycznego)

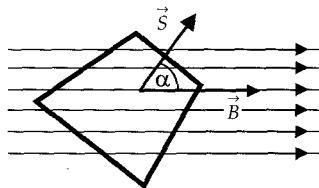
a) Strumień wektora indukcji przez płaską powierzchnię w jednorodnym polu magnetycznym

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \alpha$$

\vec{B} – indukcja pola magnetycznego

\vec{S} – wektor powierzchni – wektor normalny do powierzchni, o długości równej polu tej powierzchni S

α – kąt między wektorami \vec{B} i \vec{S}



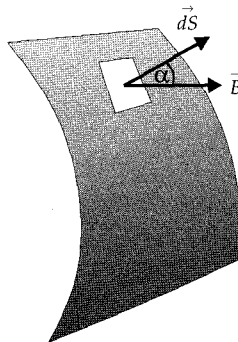
b) Strumień wektora indukcji przez dowolną powierzchnię

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cdot dS \cdot \cos \alpha$$

$d\vec{S}$ – nieskończenie mały fragment powierzchni

\vec{B} – indukcja pola magnetycznego w obrębie tego fragmentu

Całkowanie odbywa się po całej powierzchni S .



Indukcja elektromagnetyczna

Prawo Faradaya

$$\mathcal{E}_i = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

\mathcal{E}_i – siła elektromotoryczna indukcji powstająca w obwodzie, przez który przenika zmienny strumień pola magnetycznego

$\Delta\Phi$ – zmiana strumienia pola magnetycznego

Δt – czas, w którym nastąpiła ta zmiana

Wzór obowiązuje, gdy strumień jest liniową funkcją czasu lub gdy Δt jest bardzo małe.

Ogólnie:
$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Samoindukcja

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

\mathcal{E}_{si} – siła elektromotoryczna samoindukcji powstająca w obwodzie na skutek zmian natężenia prądu płynącego przez ten obwód

ΔI – zmiana natężenia prądu

Δt – czas, w którym nastąpiła zmiana

L – współczynnik samoindukcji obwodu (indukcyjność)

Wzór obowiązuje, gdy natężenie jest liniową funkcją czasu lub gdy Δt jest bardzo małe.

Ogólnie:
$$\mathcal{E}_{si} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Dla bardzo długiego solenoidu
$$L = \frac{\mu_r \mu_o N^2 \cdot S}{l} = \mu_r \mu_o \cdot n^2 \cdot V$$

μ_r – względna przenikalność magnetyczna ośrodka wypełniającego solenoid

μ_o – przenikalność magnetyczna próżni

N – ilość zwojów solenoidu

l – jego długość

- n – ilość zwojów na jednostkę długości solenoidu
 S – pole powierzchni jednego zwoju
 V – objętość solenoidu

Energia pola magnetycznego

$$W = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

- W – energia pola magnetycznego
 L – indukcyjność obwodu
 I – natężenie prądu w obwodzie

Indukcja wzajemna

$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{\Delta I_2}{\Delta t}$$

\mathcal{E}_1 – siła elektromotoryczna powstająca w jednym obwodzie elektrycznym wskutek zmian natężenia prądu w drugim obwodzie

ΔI_2 – zmiana natężenia prądu w obwodzie drugim

Δt – czas, w którym nastąpiła zmiana

M – współczynnik indukcji wzajemnej

Wzór obowiązuje, gdy natężenie prądu w obwodzie drugim jest liniową funkcją czasu lub gdy Δt jest bardzo małe.

Ogólnie:
$$\mathcal{E}_1 = -M \cdot \frac{dI_2}{dt}$$

Transformator

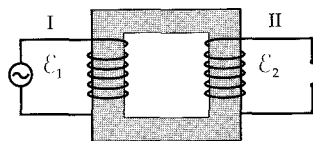
$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

\mathcal{E}_1 – siła elektromotoryczna źródła w uzwojeniu pierwotnym I

\mathcal{E}_2 – siła elektromotoryczna indukowana w uzwojeniu wtórnym II

n_1 – liczba zwojów uzwojenia pierwotnego

n_2 – liczba zwojów uzwojenia wtórnego



Prawa Maxwella

Podano prawa Maxwella dla pól istniejących w próżni w obecności ładunku elektrycznego o gęstości objętościowej ρ oraz prądu elektrycznego o gęstości \vec{j} .

I prawo Maxwella

a) postać całkowa
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ – krążenie wektora indukcji pola magnetycznego wzdłuż dowolnej krzywej

zamkniętej L

I – całkowite natężenie prądu elektrycznego przepływającego przez powierzchnię rozpiętą na tej krzywej – suma algebraiczna natężeń prądów składowych

$\frac{d\Phi_E}{dt}$ – szybkość zmian strumienia pola elektrycznego przez powierzchnię rozpiętą na tej krzywej

$\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ – prąd przesunięcia

b) postać różniczkowa
$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{d\vec{E}}{dt}$$

\vec{j} – gęstość prądu elektrycznego w danym punkcie przestrzeni

$\epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$ – gęstość prądu przesunięcia w tym punkcie

II prawo Maxwella

a) postać całkowa
$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$ – krążenie wektora natężenia pola elektrycznego wzdłuż dowolnej krzywej

zamkniętej L

$\frac{d\Phi_B}{dt}$ – szybkość zmian strumienia pola magnetycznego przez powierzchnię rozpiętą na tej krzywej

b) postać różniczkowa $\text{rot } \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$

III prawo Maxwella

a) postać całkowa $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q$

$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ – strumień natężenia pola elektrycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą S

Q – całkowity ładunek zawarty w tej powierzchni

b) postać różniczkowa $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

ρ – gęstość objętościowa ładunku w danym punkcie przestrzeni

IV prawo Maxwella

a) postać całkowa $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ – strumień indukcji pola magnetycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą S

b) postać różniczkowa $\text{div } \vec{B} = 0$

Obwody prądu przemiennego RLC

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_o \cdot \sin \omega t$$

\mathcal{E} – siła elektromotoryczna źródła (SEM)

\mathcal{E}_o – amplituda SEM

ω – częstość kołowa zmian SEM

t – czas

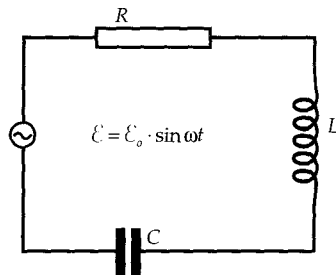
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

T – okres zmian siły elektromotorycznej

R – opór omowy obwodu (opór czynny)

L – indukcyjność

C – pojemność



Natężenie prądu w obwodzie

$$I = I_o \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

I_o – amplituda natężenia prądu

φ – kąt przesunięcia fazowego między siłą elektromotoryczną i natężeniem prądu

$$I_o = \frac{\mathcal{E}_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Zawada obwodu $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

Opór pojemnościowy $R_C = \frac{1}{\omega C}$

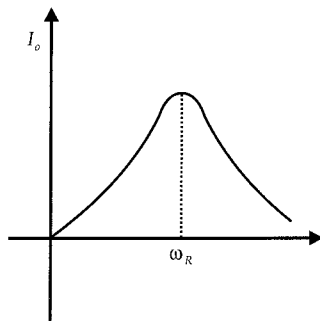
Opór indukcyjny $R_L = \omega L$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

częstość rezonansowa $\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Dla $\omega = \omega_R$ zachodzi $Z = R$, $\varphi = 0$,

$$I_o = \frac{\mathcal{E}_o}{R}.$$



Moc w obwodzie prądu przemiennego

Moc średnia w obwodzie prądu przemiennego sinusoidalnego, w którym występuje tylko

opór omowy $P_s = \frac{\mathcal{E}_o \cdot I_o}{2} = I_{sk} \cdot \mathcal{E}_{sk}$

\mathcal{E}_o – amplituda siły elektromotorycznej źródła

I_o – amplituda natężenia prądu

I_{sk} – natężenie skuteczne prądu przemiennego

\mathcal{E}_{sk} – skuteczna wartość siły elektromotorycznej

$$I_{sk} = \frac{I_o}{\sqrt{2}}$$

$$\mathcal{E}_{sk} = \frac{\mathcal{E}_o}{\sqrt{2}}$$

Zależności powyższe są słuszne tylko dla prądu przemiennego sinusoidalnego.

\mathcal{E}_{sk} i I_{sk} są to wartości siły elektromotorycznej i natężenia takiego prądu stałego, którego moc jest równa średniej mocy prądu przemiennego, w którym amplitudy siły elektromotorycznej i natężenia wynoszą odpowiednio \mathcal{E}_o i I_o .

W ogólnym przypadku dla obwodów zawierających dowolne rodzaje oporów

$$P_s = \mathcal{E}_{sk} \cdot I_{sk} \cdot \cos \varphi$$

φ – kąt przesunięcia fazowego między siłą elektromotoryczną i natężeniem prądu

V. Drgania i fale sprężyste

Drgania harmoniczne swobodne (nietlumione)

Równanie drgań

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

x – wychylenie ciała z położenia równowagi
w chwili czasu t

A – amplituda drgań (maksymalne wychylenie)

$(\omega t + \varphi)$ – faza drgań

ω – częstość kołowa drgań

φ – faza początkowa dla $t = 0$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad f = \frac{1}{T}, \quad \omega = 2\pi f$$

T – okres drgań, czas jednego pełnego drgania

f – częstotliwość, ilość drgań na sekundę

$$v = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

v – prędkość drgającego ciała

$$a = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

a – przyspieszenie drgającego ciała

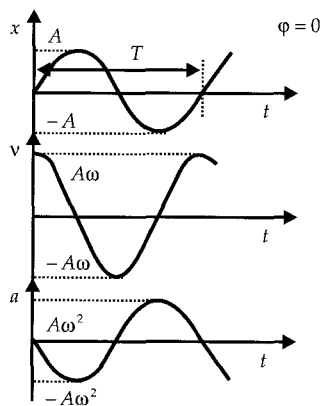
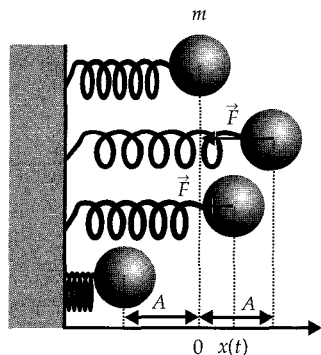
$$F = ma = -mA\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

m – masa ciała

F – siła wywołująca drgania harmoniczne

$$F = -k \cdot x, \quad k = m\omega^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

k – współczynnik proporcjonalności między siłą i wychyleniem



Energia w drganiach swobodnych

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cdot \cos^2(\omega t + \varphi)$$

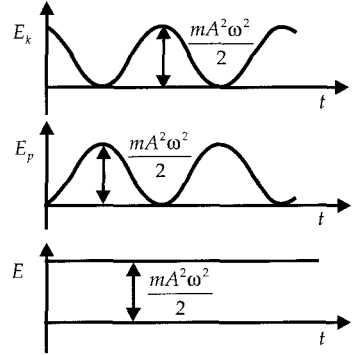
E_k – energia kinetyczna

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cdot \sin^2(\omega t + \varphi)$$

E_p – energia potencjalna

$$E = E_k + E_p = \frac{mA^2\omega^2}{2}$$

E – energia całkowita



Całkowita energia mechaniczna ciała wykonującego drgania harmoniczne przy braku sił tłumiących jest wielkością stałą, niezależną od czasu.

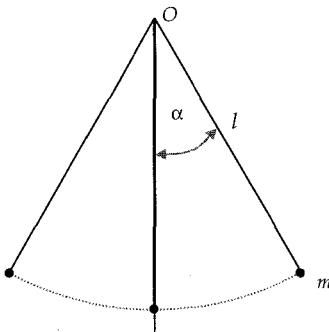
Okres drgań harmonicznyc

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

m – masa ciała

k – współczynnik proporcjonalności między siłą a wychyleniem

Wahadło matematyczne



Okres drgań wahadła matematycznego

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

l – długość wahadła

g – przyspieszenie ziemskie

Masa wahadła jest skoncentrowana w jednym punkcie.

Wzór obowiązuje dla małych wychyleń z położenia równowagi ($\sin \alpha \approx \alpha$).

Wahadło fizyczne

Wahadłem fizycznym jest bryła sztywna zawieszona na osi równoległej do powierzchni ziemi.

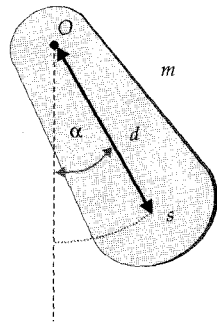
Okres drgań wahadła fizycznego

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

I – moment bezwładności bryły względem osi wahań O

m – masa wahadła

d – długość od osi wahadła do środka ciężkości wahadła s



Wzór obowiązuje dla małych wychyleń i położenia równowagi: $\sin \alpha \approx \alpha$.

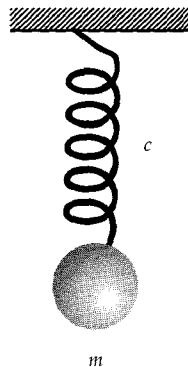
Wahadło sprężynowe (liniowy oscylator harmoniczny)

Okres wahań wahadła sprężynowego

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$$

c – współczynnik sprężystości sprężyny

m – masa ciała



Drgania harmoniczne w elektrycznym obwodzie drgającym (drgania elektromagnetyczne)

Okres drgań

$$T = 2\pi \sqrt{LC}$$

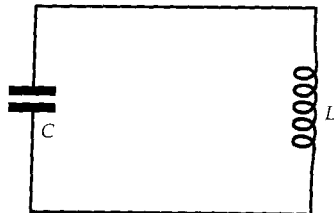
C – pojemność kondensatora

L – indukcyjność cewki

$$Q = Q_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Q – ładunek na okładce kondensatora

Q_0 – amplituda zmian ładunku



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$I = I_o \cdot \cos(\omega t \cdot \varphi)$$

I – natężenie prądu w obwodzie

I_o – amplituda zmian natężenia

$$U = \frac{Q}{C} = U_o \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

U – napięcie na okładkach kondensatora

U_o – amplituda zmian napięcia

Energia pola elektrycznego kondensatora

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q_o^2}{2C} \cdot \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Energia pola magnetycznego w cewce indukcyjnej

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} LI_o^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Energia całkowita

$$W = W_e + W_m = \frac{Q_o^2}{2C} = \frac{LI_o^2}{2}$$

Energia całkowita drgań elektromagnetycznych w obwodzie o zerowym oporze elektrycznym jest wielkością stałą, niezależną od czasu.

Drgania tłumione

$$\text{Równanie różniczkowe drgań tłumionych} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 \cdot x = 0$$

x – wychylenie z położenia równowagi

β – współczynnik tłumienia

ω_o – częstość kołowa drgań nietłumionych, $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Jeżeli siła oporu (tłumienia) $\vec{F} = -b \cdot \vec{v}$,

(gdzie b – współczynnik oporu, \vec{v} – prędkość ciała), to $\beta = \frac{b}{2m}$ (m – masa ciała).

Rozwiązanie równania

1) Słabe tłumienie $\beta < \omega_0$

$$x = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

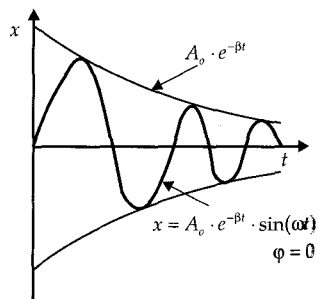
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

ω – częstość kołowa drgań tłumionych

A_0, φ – stałe zależne od warunków początkowych

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t}$$

$A(t)$ – amplituda w chwili t



Logarytmiczny dekrement tłumienia

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta \cdot T$$

T – okres drgań tłumionych

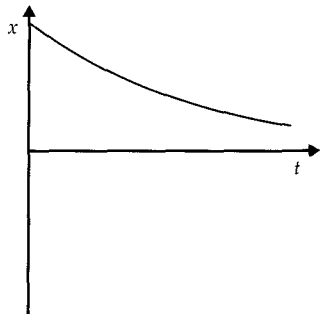
2) Silne tłumienie – ruch aperiodyczny $\beta > \omega_0$

$$x = c_1 \cdot e^{-\alpha_1 t} + c_2 \cdot e^{-\alpha_2 t}$$

$$\alpha_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

C_1, C_2 – stałe zależne od warunków początkowych



Drgania wymuszone. Rezonans

$$\text{Równanie różniczkowe drgań wymuszonych} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = \frac{1}{m} \cdot F(t)$$

$F(t)$ – siła wymuszająca

Jeżeli $F(t) = F_0 \cdot \cos \Omega t$, gdzie F_0 – amplituda siły wymuszającej, a Ω – częstość kołowa tej siły, to: $x = A \cdot \cos(\Omega t + \varphi)$

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad \text{tg} \varphi = -\frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Maksymalna wartość amplitudy drgań występuje przy częstości rezonansowej

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad A_{\max} = \frac{F_0}{2m\beta\omega}$$

Wzrost amplitudy drgań zachodzący wtedy, gdy częstość siły wymuszającej osiąga wartość Ω , nazywamy rezonansem mechanicznym.

Dla słabego tłumienia ($\beta \ll \omega_0$) rezonans zachodzi przy $\Omega_r \approx \omega_0$.

Równanie fali harmonicznej (sinusoidalnej)

Równanie fali harmonicznej jednowymiarowej

$$y = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

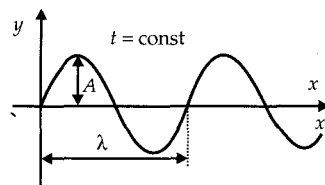
y – wychylenie punktu ośrodka z położenia
równowagi w chwili t

A – amplituda fali (maksymalne wychylenie)

T – okres drgań

x – odległość punktu od źródła fali

λ – długość fali



Równanie powyższe obowiązuje również dla fal płaskich

$$\lambda = v \cdot T; \quad v = \lambda \cdot \nu; \quad \nu = \frac{1}{T}$$

v – prędkość fali (prędkość fazowa)

ν – częstotliwość fali

Równanie fali harmonicznej kulistej

$$w = \frac{A_o}{r} \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) \right]$$

w – wychylenie punktu ośrodka z położenia
równowagi w chwili t

A_o – amplituda fali w odległości jednostkowej od źródła fali

r – odległość od źródła fali

Równanie różniczkowe fali jednowymiarowej

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Równanie różniczkowe fali w izotropowej przestrzeni trójwymiarowej

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Prędkość fazowa

Prędkość fazowa fal sprężystych podłużnych

$$v = \sqrt{\frac{Q}{\rho}}$$

Q - moduł ściśliwości środowiska

ρ - gęstość środowiska

a) dla gazów i cieczy

$$Q = -V \frac{dp}{dV}$$

V - objętość,

p - ciśnienie

b) dla ciał stałych (cienki pręt)

$$Q = E,$$

E - moduł Younga

Prędkość fazowa fal poprzecznych w izotropowym ośrodku stałym

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

G - moduł sprężystości ośrodka na ścinanie

Prędkość fazowa fal poprzecznych biegnących wzdłuż struny

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}$$

F - siła naciągu struny

S - pole przekroju poprzecznego struny

ρ - gęstość materiału struny

Natężenie fali harmoniczej (sinusoidalnej)

Natężenie fali harmoniczej kulistej i płaskiej

$$I = \frac{1}{2} \rho \cdot v \cdot \omega^2 \cdot A^2$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ - częstość kołowa fali}$$

A - amplituda fali

ρ - gęstość ośrodka

v - prędkość transportu energii (dla fal harmoniczych jest równa prędkości fazowej)

Prędkość grupowa

Prędkość transportu energii przez falę niesinusoidalną to prędkość grupowa.

$$u = \frac{d\omega}{dk}$$

u - prędkość grupowa fali

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ - częstość kołowa}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ - liczba falowa}$$

$$u = v - \lambda \cdot \frac{dv}{d\lambda}$$

v - prędkość fazowa

λ - długość fali

$\frac{dv}{d\lambda}$ - współczynnik dyspersji ośrodka

Interferencja fal

Interferencja to zjawisko nakładania się fal spójnych (o stałej niezależnej od czasu różnicy faz) prowadzące do powstania w ośrodku, trwałego w czasie rozkładu obszarów wzmocnień i wygaszeń.

Maksimum interferencyjne

Warunek wzmocnienia się fal spójnych (o stałej niezależnej od czasu różnicy faz) nakładających się w danym punkcie P ośrodka:

$$\Delta r = (r_2 - r_1) = n \cdot \lambda \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$$

λ – długość fali

Δr – wartość różnicy dróg przebytych przez fale od ich źródeł (z_1, z_2) do miejsca nałożenia

Minimum interferencyjne

Warunek osłabienia się fal

$$\Delta r = (r_2 - r_1) = (2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$$

Fale stojące

Fala stojąca to wynik nałożenia się dwóch fal sinusoidalnych o jednakowych amplitudach i częstościach biegnących w przeciwnych kierunkach.

Równanie fali stojącej jednowymiarowej

$$y = 2A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\alpha}{2}\right)$$

A – amplituda pojedynczej fali składowej

α – przesunięcie fazowe fal składowych dla $x = 0$

λ – długość fali składowej

Amplituda fali stojącej

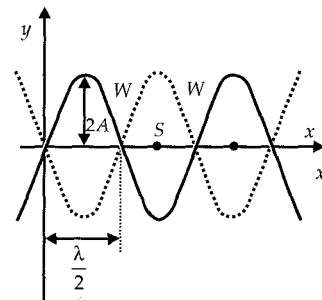
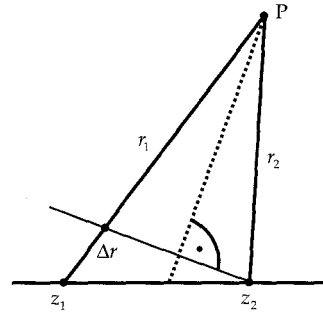
$$A(t) = 2A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + \frac{\alpha}{2}\right)$$

Długość fali stojącej

$$\lambda_s = \frac{1}{2} \lambda$$

W – węzeł fali stojącej

S – strzałka fali stojącej



Położenie strzałek fali stojącej (miejsca o maksymalnej amplitudzie)

$$\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\alpha}{2} = n \cdot \pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Położenie węzłów fali stojącej (miejsca o zerowej amplitudzie)

$$\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\alpha}{2} = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Odbicie fali na granicy dwóch ośrodków

Kąt padania fali α_1 jest równy kątowi odbicia α_2

AB – płaszczyzna odbicia

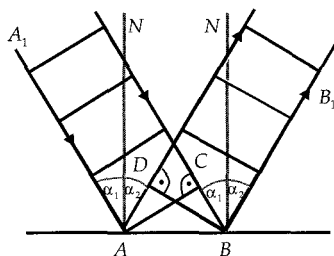
AC – czoło fali padającej

BD – czoło fali odbitej

N – normalna wystawiona w miejscu padania fali

AA_1 – promień fali padającej

BB_1 – promień fali odbitej



Załamanie fali na granicy dwóch ośrodków

Prawo załamania fali

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$$

α – kąt padania fali

β – kąt załamania fali

v_1 – prędkość fali w ośrodku, z którego wychodzi

v_2 – prędkość fali w ośrodku, do którego wchodzi

n_{21} – względny współczynnik załamania ośrodka drugiego względem pierwszego

AB – granica ośrodków 1 i 2

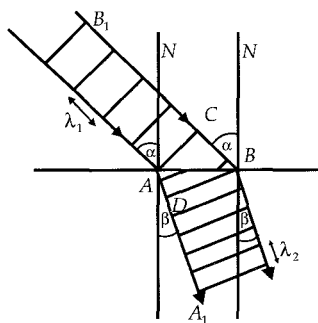
AC – czoło fali padającej

BD – czoło fali załamanej

B_1B – promień fali padającej

AA_1 – promień fali załamanej

N – normalna do płaszczyzny granicznej



Akustyka

Natężenie dźwięku

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta S \cdot \Delta t}$$

ΔE – energia przenoszona przez fale dźwiękowe w czasie Δt przez płaszczyznę o polu powierzchni ΔS , prostopadłą do kierunku rozchodzenia się fali

Poziom natężenia dźwięku

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \text{ dB (decybele)}$$

I – natężenie dźwięku

I_0 – natężenie odniesienia – granica (próg) słyszalności dźwięku o częstotliwości 1000 Hz

$$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

Efekt Dopplera

Efekt Dopplera to pozorna zmiana częstotliwości dźwięku odbieranego przez obserwatora zachodząca w wyniku względnego ruchu obserwatora i źródła dźwięku

a) źródło dźwięku jest nieruchome, obserwator porusza się z prędkością v_o w stronę źródła

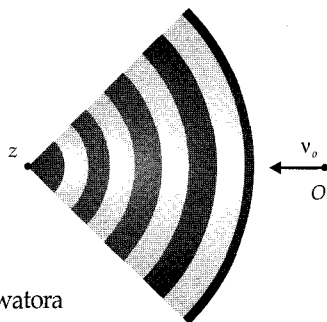
$$v' = v \cdot \frac{v + v_o}{v}$$

v' – częstotliwość dźwięku rejestrowana przez obserwatora

v – częstotliwość dźwięku wysyłanego przez źródło

v – prędkość dźwięku

v_o – prędkość obserwatora, przy oddalaniu się obserwatora od źródła $v_o < 0$



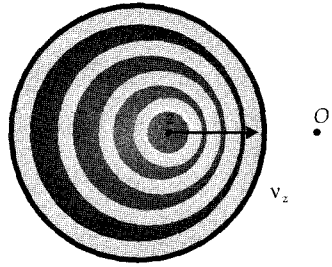
b) źródło dźwięku porusza się w stronę obserwatora, który jest nieruchomy

$$\nu'' = \nu \frac{v}{v - v_z}$$

ν'' – częstotliwość dźwięku rejestrowana przez obserwatora

v_z – prędkość źródła przy oddalaniu się źródła od obserwatora $v_z < 0$

znaczenie pozostałych symboli jest takie jak powyżej



c) obserwator i źródło dźwięku poruszają się, zbliżając się do siebie, ich prędkości są przeciwnie zwrócone

$$\nu''' = \nu \cdot \frac{v + v_o}{v - v_z}$$

ν''' – częstotliwość dźwięku rejestrowana przez obserwatora

Gdy zwrot wektora prędkości obserwatora v_o lub źródła v_z jest przeciwny do założonego wyżej, należy znak prędkości zmienić na przeciwny.

VI. Optyka

Odbicie światła

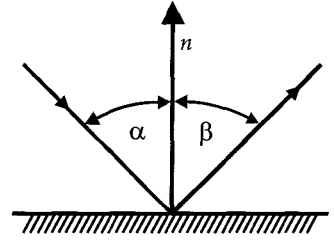
Prawo odbicia światła

$$\alpha = \beta$$

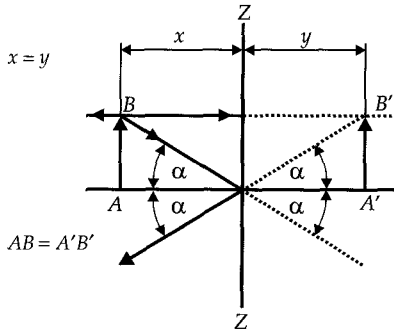
α – kąt padania

β – kąt odbicia

n – normalna do płaszczyzny odbicia



Zwierciadło płaskie



Konstrukcja obrazu tworzonego przez zwierciadło płaskie

AB – przedmiot

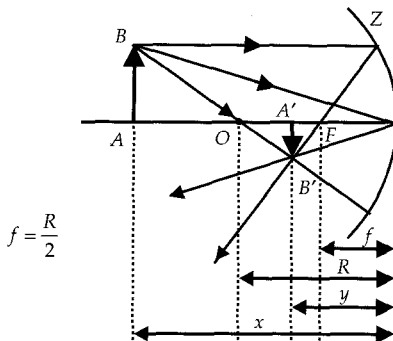
$A'B'$ – obraz

ZZ – zwierciadło

x – odległość przedmiotu od zwierciadła

y – odległość obrazu od zwierciadła

Zwierciadło kuliste wklęsłe (skupiające)



Konstrukcja obrazu $A'B'$ przedmiotu AB tworzonego przez zwierciadło wklęsłe

F – ognisko zwierciadła

O – środek krzywizny

R – promień krzywizny

y – odległość przedmiotu

x – odległość obrazu

f – ogniskowa zwierciadła

Równanie zwierciadła $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$

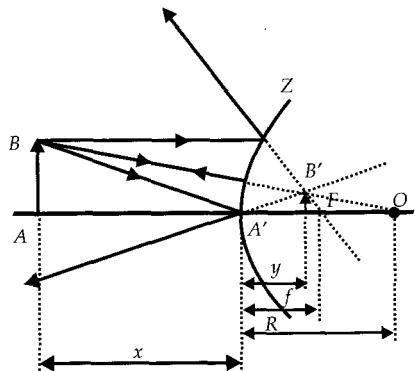
powiększenie obrazu $p = \left| \frac{y}{x} \right| = \frac{A'B'}{AB}$

Odległość		Powiększenie p	Rodzaj obrazu
przedmiotu	obrazu		
$x > 2f$	$f < y < 2f$	$0 < p < 1$	rzeczywisty, zmniejszony, odwrócony
$x = 2f$	$y = 2f$	$p = 1$	rzeczywisty, równy, odwrócony
$f < x < 2f$	$y > 2f$	$p > 1$	rzeczywisty, powiększony, odwrócony
$0 < x < f$	$y < 0$	$p > 1$	pozorny, powiększony, prosty

Zwierciadło kuliste wypukłe (rozpraszające)

Konstrukcja obrazu $A'B'$ przedmiotu AB tworzonego przez zwierciadło wypukłe

- AB – przedmiot
- $A'B'$ – obraz
- F – ognisko pozorne
- R – promień krzywizny
- O – środek krzywizny zwierciadła
- x – odległość przedmiotu
- y – odległość obrazu



Ogniskowa zwierciadła $f = -\frac{R}{2}$

Obrazy tworzone przez zwierciadło wypukłe są zawsze pomniejszone, pozorne i proste.

Załamanie światła

Prawo załamania

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$$

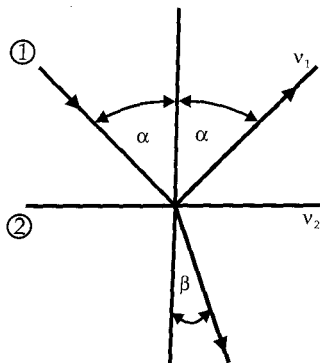
α – kąt padania

β – kąt załamania

v_1 – prędkość światła w ośrodku, z którego promień wychodzi

v_2 – prędkość światła w ośrodku, do którego promień wchodzi

n_{21} – względny współczynnik załamania ośrodka drugiego względem pierwszego



Bezwzględny współczynnik załamania dla ośrodka materialnego

$$n = \frac{c}{v}$$

c – prędkość światła w próżni

v – prędkość światła w danym ośrodku

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

n_{21} – względny współczynnik załamania ośrodka drugiego względem pierwszego

n_2 – bezwzględny współczynnik załamania ośrodka drugiego

n_1 – bezwzględny współczynnik załamania ośrodka pierwszego

λ_1 – długość fali świetlnej w ośrodku pierwszym

λ_2 – długość fali świetlnej w ośrodku drugim

Całkowite odbicie wewnętrzne

Zjawisko to zachodzi, gdy światło wychodzące z ośrodka optycznie gęstszego pada na granicę z ośrodkiem rzadszym pod kątem większym od kąta granicznego.

1 - ośrodek optycznie gęstszy

2 - ośrodek optycznie rzadszy

α_g - kąt graniczny

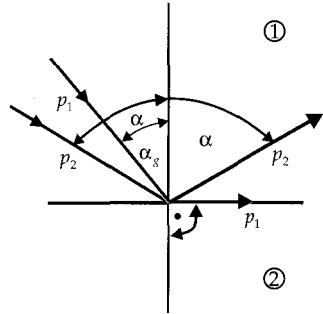
Kąt graniczny to taki kąt padania przy którym kąt załamania wynosi 90°

p_1 - promień padający pod kątem granicznym

p_2 - promień padający pod kątem większym od kąta granicznego

$$\sin \alpha_g = \frac{1}{n_{12}}$$

n_{12} - względny współczynnik załamania ośrodka optycznie gęstszego (1) względem ośrodka optycznie rzadszego (2)



Przechodzenie światła jednobarwnego przez pryzmat

φ - kąt łamiący pryzmatu

ϑ - kąt odchylenia promienia przez pryzmat

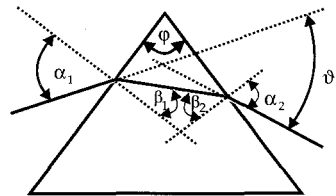
Dla małych kątów α , β , φ :

$$\vartheta = (n - 1)\varphi$$

n - współczynnik załamania materiału pryzmatu względem otoczenia

$$n = \frac{\sin \frac{\vartheta_{\min} + \varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$$

ϑ_{\min} - kąt minimalnego odchylenia biegu promienia w pryzmacie, jest to kąt występujący wtedy gdy $\alpha_1 = \alpha_2$ i $\beta_1 = \beta_2$



Soczewki

$$\text{Równanie soczewki} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

x – odległość przedmiotu od soczewki

y – odległość obrazu od soczewki

f – ogniskowa soczewki

n – współczynnik załamania materiału soczewki względem otoczenia

r_1, r_2 – promienie krzywizny powierzchni soczewki

dla powierzchni wypukłych $r > 0$

dla powierzchni wklęsłych $r < 0$

dla powierzchni płaskich $r \rightarrow \infty$

Konstrukcja obrazu tworzonego przez
soczewkę skupiającą ($f > 0$)

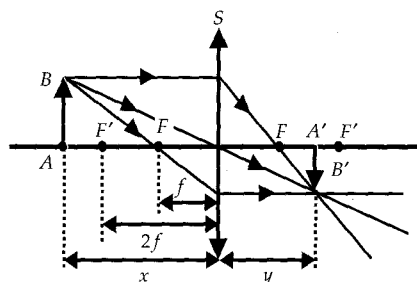
$$\text{powiększenie } p = \frac{A'B'}{AB} = \left| \frac{y}{x} \right|$$

F – ognisko soczewki

S – soczewka skupiająca

AB – przedmiot

$A'B'$ – obraz przedmiotu



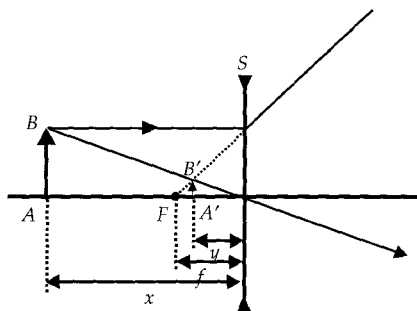
Konstrukcja obrazu tworzonego przez
soczewkę rozpraszającą ($f < 0$)

F – ognisko pozorne soczewki

S – soczewka rozpraszająca

AB – przedmiot

$A'B'$ – obraz przedmiotu

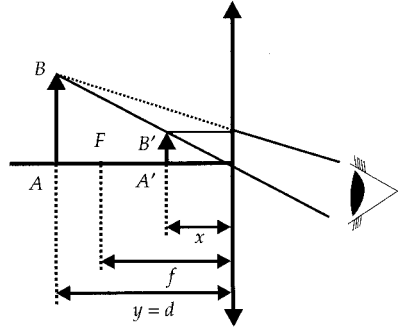


Przyrządy optyczne

1) Lupa

powiększenie lupy

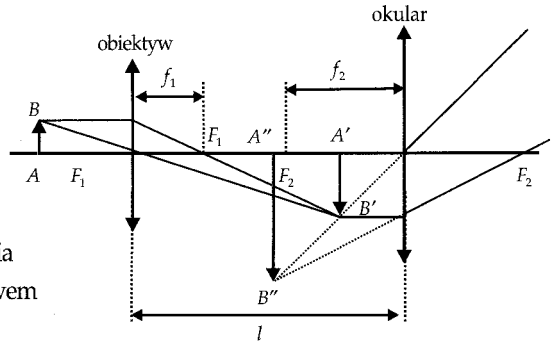
$$p = 1 + \frac{d}{f}$$

 d – odległość dobrego widzenia

2) Mikroskop

powiększenie mikroskopu

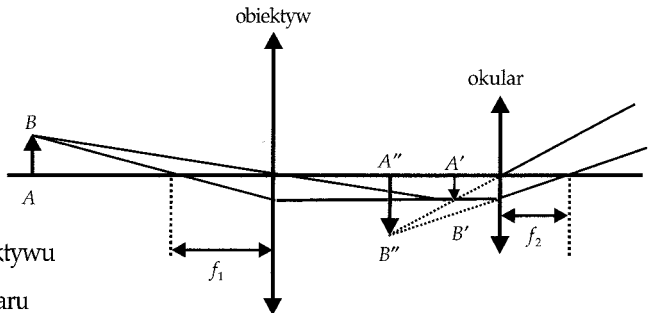
$$p = \frac{l \cdot d}{f_1 \cdot f_2}$$

 d – odległość dobrego widzenia l – odległość między obiektywem i okulem f_1 – ogniskowa obiektywu f_2 – ogniskowa okularu

3) Luneta

powiększenie lunety

$$p = \frac{f_1}{f_2}$$

 f_1 – ogniskowa obiektywu f_2 – ogniskowa okularu

Zdolność skupiająca soczewki

$$z = \frac{1}{f}$$

z – zdolność skupiająca

f – ogniskowa soczewki

Dla układu cienkich soczewek umieszczonych w niewielkiej odległości od siebie

$$z = z_1 + z_2 + \dots + z_n = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \dots + \frac{1}{f_n}$$

z – zdolność skupiająca układu

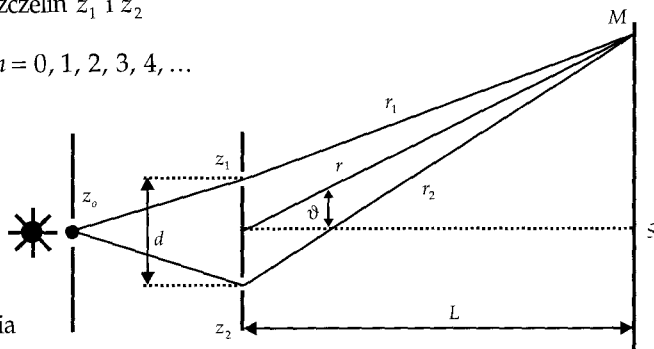
f_i – ogniskowa pojedynczej soczewki

Interferencja światła

Metoda Younga

Warunek wzmocnienia fal świetlnych wychodzących ze szczelin z_1 i z_2

$$|r_2 - r_1| = n \cdot \lambda \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$



Warunek wygaszania

$$|r_2 - r_1| = (2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

r_1, r_2 – drogi przebyte przez fale do miejsca nałożenia

λ – długość fali świetlnej

Dla $d \ll L$ położenie maksimum interferencyjnych określa zależność

$$d \cdot \sin \vartheta = n \cdot \lambda \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

ϑ – kąt pomiędzy osią symetrii układu a kierunkiem, pod którym występuje maksimum

Siatka dyfrakcyjna

Równanie siatki dyfrakcyjnej

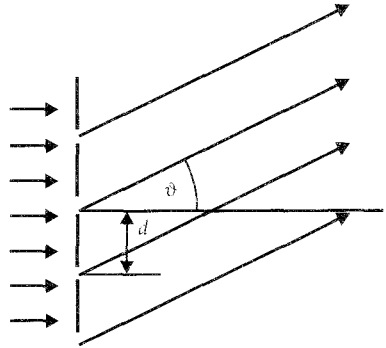
$$d \sin \vartheta = n \cdot \lambda$$

d – stała siatki

n – rząd maksimum głównego

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

ϑ – kąt, pod którym występuje maksimum danego rzędu



Zdolność rozdzielcza siatki dyfrakcyjnej

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = n \cdot N$$

$\Delta\lambda$ – minimalna różnica między długościami fal λ i $\lambda + \Delta\lambda$ rozdzielonych przez siatkę

n – rząd widma

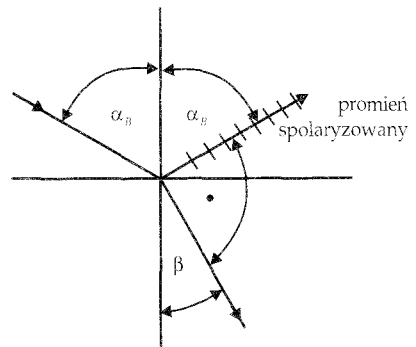
N – ilość rys w siatce

Polaryzacja światła przez odbicie

$$\operatorname{tg} \alpha_B = n$$

α_B – kąt Brewstera; kąt padania, przy którym promień odbity jest całkowicie spolaryzowany liniowo

n – współczynnik załamania ośrodka odbijającego światło względem otoczenia



VII. Fizyka atomowa i jądrowa

Promieniowanie termiczne

Zdolność emisyjna

$$e(\nu, T) = \frac{\Delta P}{\Delta S}$$

$e(\nu, T)$ – zdolność emisyjna ciała w temperaturze T dla promienia o częstotliwości z przedziału od ν do $\nu + d\nu$ (nieskończenie wąski przedział)

ΔP – moc promieniowania o częstotliwości z tego przedziału emitowana przez fragment powierzchni ciała

ΔS – pole powierzchni tego fragmentu

Zdolność absorpcyjna

$$a(\nu, T) = \frac{P_a}{P}$$

$a(\nu, T)$ – zdolność absorpcyjna ciała w temperaturze T dla promieniowania o częstotliwości z przedziału od ν do $\nu + d\nu$ (nieskończenie wąski przedział)

P_a – moc promieniowania pochłoniętego przez ciało

P – moc promieniowania padającego na ciało

Prawo Kirchoffa

Niezależnie od rodzaju ciała słuszny jest związek:

$$\frac{e(\nu, T)}{a(\nu, T)} = \zeta_c(\nu, T)$$

$\zeta_c(\nu, T)$ – zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego w temperaturze T dla przedziału częstotliwości od ν do $\nu + d\nu$

Promieniowanie ciała doskonale czarnego

Wzór Plancka

$$\xi_c(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}$$

$\xi_c(\nu, T)$ – zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego w temperaturze T dla przedziału częstotliwości od ν

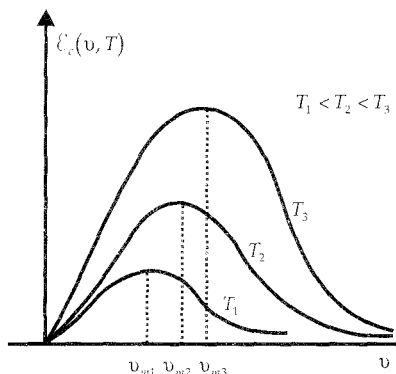
do $\nu + d\nu$

c – prędkość światła

h – stała Plancka

k – stała Boltzmanna

e – podstawa logarytmu naturalnego



Prawo Wiena

$$\frac{\nu_m}{T} = (\text{const})$$

ν_m – częstotliwość odpowiadająca maksymalnej zdolności emisyjnej w danej temperaturze T

Prawo Stefana-Boltzmanna

$$E_T = \sigma \cdot T^4$$

σ – współczynnik proporcjonalności $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$

E_T – całkowita zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego w danej temperaturze T

$$E_T = \int_0^{\infty} \xi_c(\nu, T) d\nu$$

Kwantowe własności promieniowania elektromagnetycznego

Zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne

Równanie Einsteina

$$E_{k_m} = h\nu - W$$

$$E_{k_m} = \frac{mv^2}{2} - \text{maksymalna energia kinetyczna}$$

na elektronów emitowanych z fotokatody
 ν – częstotliwość padającego promieniowania

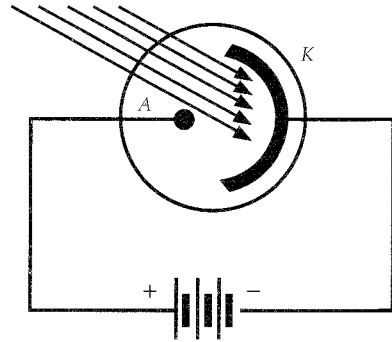
h – stała Plancka

$h\nu$ – energia fotonu

W – praca wyjścia dla metalu fotokatody

$$W = h \cdot \nu_g$$

ν_g – częstotliwość graniczna dla metalu fotokatody



Zjawisko Comptona

Wzór Comptona

$$\Delta\lambda = K \cdot (1 - \cos \vartheta)$$

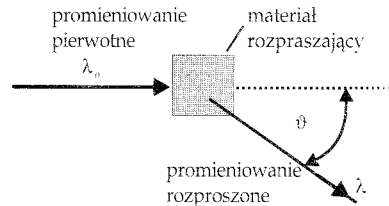
$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ – przyrost długości fali promieniowania rentgenowskiego rozproszonego pod kątem ϑ

ϑ – kąt rozproszenia

$$K = \frac{h}{mc} - \text{komptonowska długość fali elektronu, } K = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

m – masa elektronu

c – prędkość światła



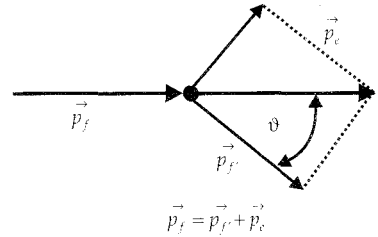
Interpretacja Comptona:

zderzenie sprężyste fotonu i elektronu

$$\vec{p}_f \text{ - pęd fotonu przed zderzeniem } p_f = \frac{h}{\lambda_o}$$

$$\vec{p}_{f'} \text{ - pęd fotonu po zderzeniu } p_{f'} = \frac{h}{\lambda}$$

$$\vec{p}_e \text{ - pęd elektronu}$$

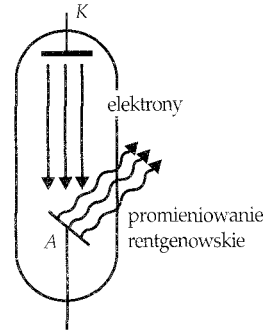


Promieniowanie rentgenowskie

Energia kwantu promieniowania rentgenowskiego

$$h\nu = \Delta E_k = \frac{mv_o^2}{2} - \frac{mV^2}{2}$$

ΔE_k - ubytek energii kinetycznej elektronu hamowanego w materiale anody



Granica krótkofalowa widma ciągłego promieniowania rentgenowskiego

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU}$$

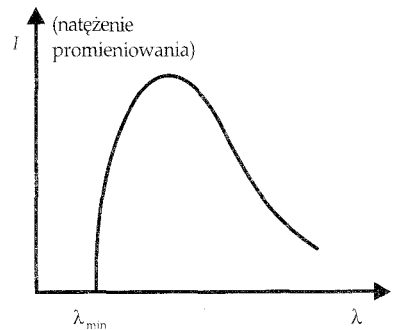
λ_{\min} - najmniejsza długość fali w widmie ciągłym

h - stała Plancka

c - prędkość światła

e - ładunek elementarny

U - napięcie przyspieszające elektrony między katodą a anodą



Własności fotonu

Energia

masa

pęd

$$E = h \cdot \nu$$

$$m = \frac{h\nu}{c^2}$$

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

ν - częstotliwość promieniowania

λ - długość fali promieniowania

Model Bohra atomu wodoru

Postulaty Bohra

I. Orbita stacjonarne (dozwolone) spełniają warunek

$$mvr = n \cdot \frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

mvr – moment pędu elektronu na orbicie

h – stała Plancka

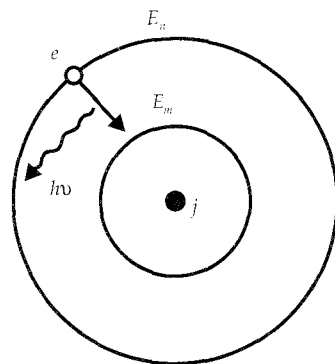
II. Emisja i absorpcja promieniowania przez atom

$$h\nu = |E_n - E_m|$$

$h\nu$ – energia kwantu promieniowania emitowanego (bądź absorbowanego) przy przejściu elektronu z orbity o numerze n na orbitę o numerze m

E_m, E_n – energia elektronu na orbitach, między którymi następuje przejście

Emisja występuje, gdy $n > m$, natomiast absorpcja, gdy $m > n$



Promienie orbit stacjonarnych

Promień orbity stacjonarnej:

$$r_n = \frac{\epsilon_0 \cdot h^2}{\pi \cdot m \cdot e^2} \cdot n^2 = n^2 \cdot r_1 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ϵ_0 – przenikalność elektryczna próżni

m – masa elektronu

e – ładunek elementarny

h – stała Plancka

r_1 – promień Bohra, $r_1 \approx 0,53 \cdot 10^{-10}$ m

Energia elektronu

Energia elektronu na n -tej orbicie stacjonarnej

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 \cdot h^2} = \frac{1}{n^2} \cdot E_1 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

E_1 – energia stanu podstawowego $E_1 \approx -13,6$ eV

Energia jonizacji $E_j = |E_1| = 13,6$ eV

Emisja promieniowania przez atom

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n > m$$

λ – długość fali promieniowania emitowanego przez atom przy przeskoku elektronu z orbity o numerze n na orbitę o numerze m

R – stała Rydberga, $R \approx 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

Seria Lymana

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Seria Balmera

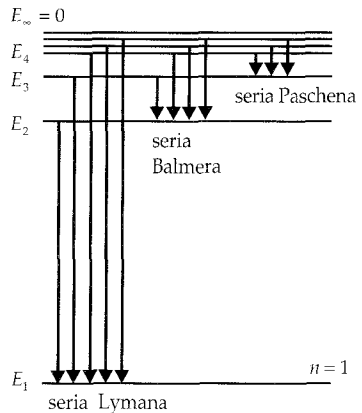
$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

Seria Paschena

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 4, 5, 6, \dots$$

Seria Bracketta

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 5, 6, 7, \dots$$



Fale materii

Wzór de Broglie'a

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

λ – długość fali materii związanej z poruszającą się cząstką materialną
 p – pęd cząstki

Równanie Schrödingera

Równanie Schrödingera (postać stacjonarna – niezależna od czasu)

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \cdot (E - U) \cdot \psi = 0$$

$\psi(x, y, z)$ – funkcja falowa określająca położenie cząstki w przestrzeni

(x, y, z) – współrzędne położenia cząstki

E – energia całkowita cząsteczki

$U(x, y, z)$ – energia potencjalna pola sił, którym podlega cząstka

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

h – stała Plancka

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \text{ – operator Laplace'a } (\Delta)$$

Prawdopodobieństwo dp znajdowania się cząstki w otoczeniu o objętości dV wokół punktu o współrzędnych (x, y, z) wynosi:

$$dp = |\psi|^2 \cdot dV$$

$$|\psi|^2 = \psi \cdot \psi^*$$

ψ^* – oznacza funkcję zespoloną sprzężoną z funkcją ψ

Zasada nieoznaczoności

$$\Delta x \cdot p_x \geq h \qquad \Delta y \cdot p_y \geq h \qquad \Delta z \cdot p_z \geq h$$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – przedziały współrzędnych w otoczeniu danego punktu przestrzeni (x, y, z) , w których może znajdować się cząstka

$\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$ – przedziały nieoznaczoności składowych wektora pędu cząstki

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h$$

ΔE – przedział nieoznaczoności energii cząstki, której czas przebywania w danym stanie energetycznym wynosi Δt .

Liczby kwantowe

Energia elektronu

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{Z^2 \cdot m e^4}{8 h^2 \epsilon_0^2}$$

n – główna liczba kwantowa $n = 1, 2, 3, \dots$

Z – ilość protonów w jądrze

m – masa elektronu

e – ładunek elementarny

Orbitalny moment pędu elektronu

$$L = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar$$

l – orbitalna liczba kwantowa $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

Orbitalny moment magnetyczny elektronu

$$\vec{\mu}_L = -\frac{e}{2m} \cdot \vec{L}$$

$$\mu_L = \frac{e \cdot \hbar}{2m} \cdot \sqrt{l(l+1)} = \mu_B \cdot \sqrt{l(l+1)}$$

μ_B – magneton Bohra $\mu_B \approx 9,27 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}}$

Rzut wektora orbitalnego momentu pędu elektronu na kierunek zewnętrznego pola magnetycznego

$$L_z = m_l \cdot \hbar$$

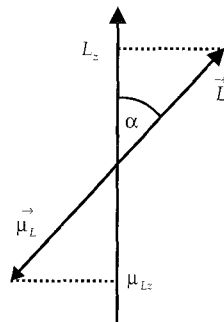
m_l – magnetyczna liczba kwantowa m_l przyjmuje wartości całkowite z przedziału:

$$-l, -(l-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, (l-1), l$$

$$\mu_{Lz} = -m_l \cdot \mu_B$$

μ_{Lz} – rzut wektora orbitalnego momentu magnetycznego na kierunek pola magnetycznego

$$\cos \alpha = \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}$$



Własny moment pędu elektronu (spin)

$$L_s = \sqrt{s(s+1)} \cdot \hbar \quad s - \text{spinowa liczba kwantowa, } s = \frac{1}{2}$$

$$L_s = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar$$

Spinowy moment magnetyczny elektronu

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m} \cdot \vec{L}_s$$

$$\mu_s = \frac{e \cdot \hbar}{m} \cdot L_s = 2\mu_B \cdot \sqrt{s(s+1)}$$

Rzut własnego momentu pędu (spinu) na kierunek pola magnetycznego

$$L_{sz} = m_s \cdot \hbar$$

m_s – spinowa magnetyczna liczba kwantowa m_s przyjmuje dwie wartości

$$m_s = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$$

$$\mu_{sz} = -m_s \cdot \frac{e\hbar}{m} = \pm\mu_B$$

μ_{sz} – rzut spinowego momentu magnetycznego elektronu na kierunek pola magnetycznego

Fizyka jądrowa

Promień jądra atomowego

$$R = r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}$$

R – promień jądra

$$r_0 = 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

A – liczba masowa jądra – suma liczb protonów i neutronów w jądrze

Energia wiązania jądra

$$E_w = \Delta M \cdot c^2$$

E_w – energia wiązania jądra

ΔM – niedobór masy jądra

$$\Delta M = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - M$$

Z – liczba protonów w jądrze (liczba porządkowa)

m_p – masa protonu

$(A - Z)$ – liczba neutronów w jądrze

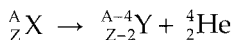
m_n – masa neutronu

M – masa jądra atomowego

Rozpady promieniotwórcze

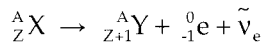
Schematy rozpadów promieniotwórczych

1) Rozpad α



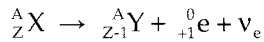
X – symbol chemiczny jądra przed rozpadem

Y – symbol chemiczny jądra po rozpadzie

2) Rozpad β_- 

${}^0_{-1} e$ – elektron (cząstka β_-)

$\tilde{\nu}_e$ – antyneutrino elektronowe

3) Rozpad β_+ 

${}^0_{+1} e$ – pozyton

ν_e – neutrino elektronowe

Prawo rozpadu promieniotwórczego

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} = N_0 \cdot 2^{-\left(\frac{t}{T}\right)}$$

N – liczba jąder promieniotwórczych
po czasie t

N_0 – początkowa liczba jąder

λ – stała rozpadu

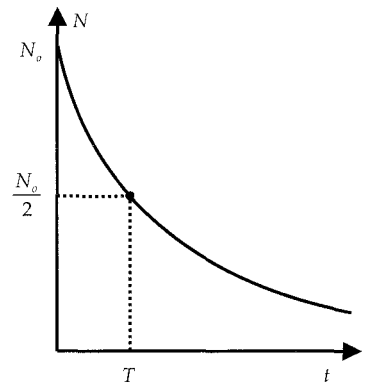
$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

T – okres połowicznego zaniku

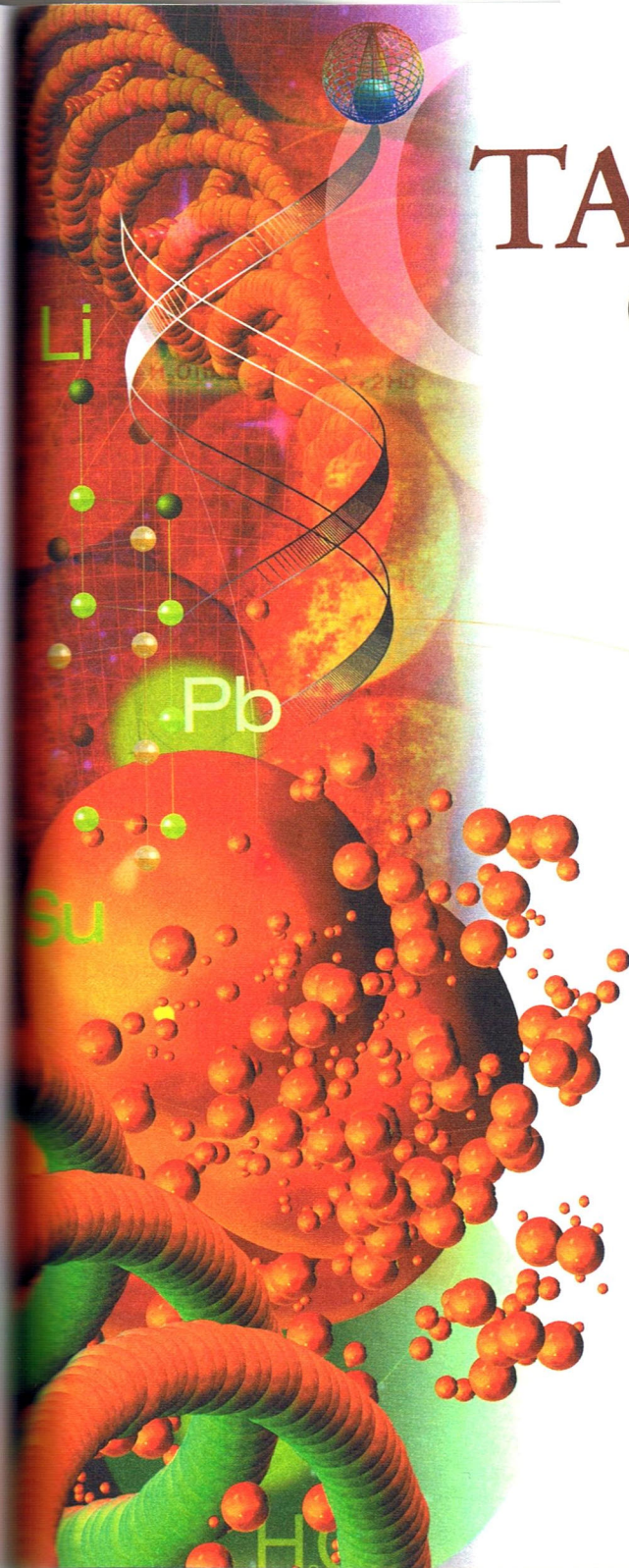
$$A = \frac{\Delta N}{\Delta t}$$

A – aktywność źródła promieniotwórczego – ilość rozpadów na sekundę

$$A = \lambda \cdot N$$



TABLICE chemiczne



Pierwiastki chemiczne

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa	Masa molowa [g]	Stopień utlenienia	Elektroujemność
Aktyl	Ac	89	(227)	+ III	1,1
Ameryk	Am	95	(243)	+ III	1,3
Antymon	Sb	51	122	+ III, + V	1,9
Argon	Ar	18	40	-	-
Arsen	As	33	75	+ III, + V	2,0
Astat	At	85	(210)	+ VII, + I, + V	2,2
Azot	N	7	14	+ III, + III	3,04
Bar	Ba	56	137	+ II	0,9
Berkel	Bk	97	(249)	+ III	
Beryl	Be	4	9	+ II	1,5
Bizmut	Bi	83	209	+ III, - III	1,9
Bor	B	5	11	+ III	2,0
Brom	Br	35	80	+ I	2,8
Cer	Ce	58	140	+ III, + IV	1,1
Cez	Cs	55	133	+ I	0,7
Chlor	Cl	17	35,5	+ VII, + I	3,0
Chrom	Cr	24	52	+ III, + VI	1,6
Cyna	Sn	50	119	+ IV	1,8
Cynk	Zn	30	65	+ II	1,6
Cyrkon	Zr	40	91	+ IV	1,4
Dysproz	Dy	66	162,5	+ III	1,1
Einstein	Es	99	(254)	+ III	~ 1,2
Erb	Er	68	167	+ III	1,2
Europ	Eu	63	152	+ III, + II	1,0
Ferm	Fm	100	(257)	+ III	~ 1,2
Fluor	F	9	19	+ I	4,0
Fosfor	P	15	31	+ III, + V	2,1
Frans	Fr	87	(223)	+ I	0,7
Gadolin	Gd	64	157	+ III	1,1
Gal	Ga	31	70	+ III	1,6
German	Ge	32	72,5	+ IV	1,8
Glin	Al	13	27	+ III	1,5
Hafn	Hf	72	178,5	+ IV	1,3
Hahn	Ha	105	(260)	+ V	
Hel	He	2	4	-	
Holm	Ho	67	165	+ III	1,2
Ind	In	49	115	+ III	1,7

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa	Masa molowa [g]	Stopień utlenienia	Elektroujemność
Iryd	Ir	77	192	+ III, + IV	2,2
Iterb	Yb	70	173	+ III	1,1
Itr	Y	39	89	+ III	1,3
Jod	J	53	127	+ I	2,5
Kadm	Cd	48	112,5	+ II	1,7
Kaliforn	Cf	98	(251)	+ III	~ 1,2
Kiur	Cm	96	(247)	+ III	~ 1,2
Kobalt	Co	27	59	+ II	1,8
Krypton	Kr	36	84	+ II	-
Krzem	Si	14	28	+ IV, - IV	1,8
Ksenon	Xe	54	131	+ VI	-
Kurczatow	Ku	104	(257)	+ IV	-
Lantan	La	57	139	+ III	1,1
Lorens	Lr	103	(251)	+ III	-
Lit	Li	3	7	+ I	1,0
Lutet	Lu	71	175	+ III	1,2
Magnez	Mg	12	24	+ II	1,2
Mangan	Mn	25	55	+ II, + VII	1,5
Mendelejew	Md	101	(256)	+ III	~ 1,2
Miedź	Cu	29	63,5	+ II	1,9
Molibden	Mo	42	96	+ VI	1,8
Neodym	Nd	60	144	+ III	1,2
Neon	Ne	10	20	-	-
Neptun	Np	93	(237)	+ V	1,3
Nikiel	Ni	28	59	+ II	1,8
Niob	Nb	41	93	+ V	1,6
Nobel	No	102	(254)	+ II	-
Ołów	Pb	82	201	+ II, + IV	1,8
Osm	Os	76	190	+ VI, + VIII	2,2
Pallad	Pd	46	106	+ II	2,2
Platyna	Pt	78	195	+ II, + IV	2,2
Pluton	Pu	94	(244)	+ IV	1,3
Polon	Po	84	209	+ IV, + II	2,0
Potas	K	19	39	+ I	0,8
Prazeodym	Pr	59	141	+ III	1,1
Promet	Pm	61	(145)	+ III	1,1
Protaktyn	Pa	91	(231)	+ V	1,5
Rad	Ra	88	(226)	+ II	0,9
Radon	Rn	86	(222)	+ II	-

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa	Masa molowa [g]	Stopień utlenienia	Elektroujemność
Ren	Re	75	186	+ VII, + IV	1,46
Rod	Rh	45	103	+ III	2,2
Rtęć	Hg	80	200,5	+ II	1,9
Rubid	Rb	37	85,5	+ I	0,8
Ruten	Ru	44	101	+ IV	2,2
Samar	Sm	62	150	+ III, + II	1,2
Selen	Se	34	79	+ VI, - II	2,4
Siarka	S	16	32	+ VI, - II	2,5
Skand	Sc	21	45	+ III	1,3
Sód	Na	11	23	+ I	0,9
Srebro	Ag	47	108	+ I	1,9
Stront	Sr	38	81,5	+ II	1,0
Tal	Tl	81	204	+ II	1,8
Tantal	Ta	73	181	+ V	1,5
Technet	Tc	43	99	+ IV, + VII	1,9
Tellur	Te	52	121,5	+ VI, - II	2,1
Terb	Tb	65	159	+ III	1,1
Tlen	O	8	16	- II	3,5
Tor	Th	90	232	+ IV	1,3
Tul	Tm	69	169	+ III	1,1
Tytan	Ti	22	48	+ IV	1,5
Uran	U	92	238	+ VI	1,7
Wanad	V	23	51	+ V	1,6
Wapń	Ca	20	40	+ II	1,0
Węgiel	C	6	12	+ IV, - IV	2,5
Wodór	H	1	1	+ I	2,1
Wolfram	W	74	184	+ VI	1,1
Złoto	Au	79	197	+ III	2,4
Żelazo	Fe	26	56	+ II, + III	1,9

Wartości w nawiasach dotyczą mas molowych najtrwalszych lub najlepiej znanych izotopów.

Niektóre pierwiastki i związki nieorganiczne

Nazwa	Symbol lub wzór	Gęstość w g/cm ³	Temperatura topnienia t_t w °C	Temperatura wrzenia t_w w °C
Amoniak	NH ₃	0,77	-78	-33
Chlorek amonu	NH ₄ Cl	1,54	-	sublimuje przy 335
Azotan(V) amonu	NH ₄ NO ₃	1,73	169	rozkład od 200
Siarczan(VI) amonu	(NH ₄) ₂ SO ₄	1,77	513	rozkład
Antymon	Sb	6,69	630	1635
Tlenek arsenu(III)	As ₂ O ₃	3,86	290	457
Azot	N ₂	0,808c	-210	-195,8
Tlenek azotu(IV)	NO ₂	1,894	-11	21
Tlenek azotu(II)	NO	1,208c	-164	-152
Kwas azotowy(V)	HNO ₃	1,51	-47	rozkład od 86
Bar	Ba	3,65	710	1690
Chlorek baru	BaCl ₂	3,09	955	1592
Wodorotlenek baru	Ba(OH) ₂	4,49	78	103
Brom	Br ₂	3,14	-7	59
Bromowodór	HBr	2,169c	-87	-67
Chlor	Cl ₂	1,65c	-101	-34
Chlorowodór	HCl	1,187c	-112	-85
Kwas chlorowy(VII)	HClO ₄	1,76	-112	39
Chrom	Cr	7,19	~1900	~2300
Cyna	Sn	7,28	232	2350
Cynk	Zn	7,13	419	907
Chlorek cynku(II)	ZnCl ₂	2,91	313	732
Tlenek cynku(II)	ZnO	5,47	1975	sublimuje przy 1800
Fluor	F ₂	1,51c	-220	-188
Fluorowodór	HF	0,960c	-88	20
Glin	Al	2,70	660	2500
Tlenek glinu(III)	Al ₂ O ₃	3,90	2045	~3000
Siarczan(VI) glinu(III)	Al ₂ (SO ₄) ₃	2,71	rozkład od 600	-
Hel	He	0,126c	-272,1	-268,9
Jod	I ₂	4,94	114	185
Jodowodór	HJ	5,79	-51	35
Kadm	Cd	8,64	321	767
Kobalt	Co	8,83	1490	~3000
Krzem	Si	2,33	1413	2630
Krzem(IV) tlenek (kwarc)	SiO ₂	2,6	~1470	2590
Magnez	Mg	1,74	650	1120
Chlorek magnezu	MgCl ₂	2,32	712	1420

UKŁAD OKRESOWY PIERWIASTKÓW

OKRES	GRUPY GŁÓWNE																	
	IA (1)	IIA (2)																
1	1 H 1 2 99,98 0,02 - 2,1 208(1-) 1,318 1s ¹ Wodór	2 He 3 4 0,0001 100 150 - - 2,379 1s ² Hel																
2	3 Li 6 7 7,4 92,6 152 1,0 74(1+) 0,526 [He]2s ¹ Lit	4 Be 9 100 112 1,5 35(2+) 0,906 [He]2s ² Beryl																
3	11 Na 23 100 186 0,9 102(1+) 0,502 [Ne]3s ¹ Sód	12 Mg 24 25 26 78,7 10,1 11,2 160 1,2 72(2+) 0,744 [Ne]3s ² Magnez																
4	19 K 39 40 41 93,1 0,01 6,9 227 0,8 138(1+) 0,425 [Ar]4s ¹ Potas	20 Ca 40 42 44 97,0 0,6 2,1 197 1,0 99(2+) 0,596 [Ar]4s ² Wapń	21 Sc 45 100 161 1,3 75(3+) 0,637 [Ar]4s ^{3d} Skand	22 Ti 46 47 48 7,9 7,3 74,0 145 1,5 61(4+) 0,664 [Ar]4s ^{3d} Tytan	23 V 50 51 0,2 99,8 131 1,6 54(5+) 0,656 [Ar]4s ^{3d} Wanad	24 Cr 50 52 53 0,2 99,8 125 1,6 63(3+) 0,659 [Ar]4s ^{3d} Chrom	25 Mn 55 100 137 1,5 83(2+) 0,724 [Ar]4s ^{3d} Mangan	26 Fe 54 56 62 5,8 91,7 2,2 100 124 1,8 64(3+) 0,766 [Ar]4s ^{3d} Żelazo	27 Co 59 100 125 1,8 65(2+) 0,764 [Ar]4s ^{3d} Kobalt	28 Ni 58 60 62 67,9 26,2 3,6 100 125 1,8 69(2+) 0,743 [Ar]4s ^{3d} Nikiel	29 Cu 63 65 69,1 30,9 128 1,9 72(2+) 0,752 [Ar]4s ^{3d} Miedź	30 Zn 64 66 68 48,9 27,8 18,6 100 133 1,6 74(2+) 0,913 [Ar]4s ^{3d} Cynk	31 Ga 69 71 60,4 39,6 122 1,6 62(3+) 0,585 [Ar]4s ^{3d} Gal	32 Ge 70 72 74 20,5 27,4 36,5 100 123 1,8 53(4+) 0,768 [Ar]4s ^{3d} German	33 As 75 100 125 2,0 58(3+) 0,953 [Ar]4s ^{3d} Arsen	34 Se 78 80 82 23,5 49,8 9,2 100 116 2,4 198(2-) 0,947 [Ar]4s ^{3d} Selen	35 Br 79 81 50,5 49,5 100 195(1-) 1,146 [Ar]4s ^{3d} Brom	36 Kr 82 84 86 11,6 56,9 17,4 200 - - 1,357 [Ar]4s ^{3d} Krypton
5	37 Rb 85 87 72,2 27,8 248 0,8 149(1+) 0,409 [Kr]5s ¹ Rubid	38 Sr 86 87 88 9,9 7,0 82,5 215 1,0 112(2+) 0,556 [Kr]5s ² Stront	39 Y 89 100 178 1,3 92(3+) 0,622 [Kr]5s ^{4d} Itr	40 Zr 90 92 94 51,5 17,1 17,4 159 1,4 72(4+) 0,666 [Kr]5s ^{4d} Cyrkon	41 Nb 93 100 143 1,6 60(6+) 0,691 [Kr]5s ^{4d} Niob	42 Mo 92 96 98 15,9 16,5 23,8 - 136 1,8 60(6+) 0,691 [Kr]5s ^{4d} Molibden	43 Tc 93 100 135 1,9 - 0,708 [Kr]5s ^{4d} Technet	44 Ru 101 102 104 17,1 31,6 18,6 100 133 2,2 62(4+) 0,717 [Kr]5s ^{4d} Ruten	45 Rh 103 100 134 2,2 68(3+) 0,726 [Kr]5s ^{4d} Rod	46 Pd 105 106 108 22,2 27,3 26,7 100 138 2,2 86(2+) 0,811 [Kr]4d ¹⁰ Pallad	47 Ag 107 109 107 109 51,4 48,6 144 1,9 115(1+) 0,737 [Kr]5s ^{4d} Srebro	48 Cd 111 112 114 12,7 24,1 28,8 100 149 1,7 95(2+) 0,874 [Kr]5s ^{4d} Kadm	49 In 113 115 4,3 95,7 136 1,7 81(3+) 0,565 [Kr]5s ^{4d} Ind	50 Sn 116 118 120 14,3 24,0 32,8 100 151 1,8 71(4+) 0,715 [Kr]5s ^{4d} Cyna	51 Sb 121 123 57,2 42,8 100 145 1,9 76(3+) 0,840 [Kr]5s ^{4d} Antymon	52 Te 127 128 130 18,7 31,8 34,5 100 143 2,1 221(2-) 0,876 [Kr]5s ^{4d} Tellur	53 I 127 100 216(1-) 1,015 - 2,5 [Kr]5s ^{4d} Jod	54 Xe 129 131 132 129 131 132 100 220 - - 1,177 [Kr]5s ^{4d} Ksenon
6	55 Cs 133 100 265 0,7 170(1+) 0,382 [Xe]6s ¹ Cez	56 Ba 136 137 138 7,8 11,3 71,7 217 0,9 136(2+) 0,509 [Xe]6s ² Bar	57 La* 138 139 0,1 99,9 187 1,1 114(3+) 0,544 [Xe]6s ^{5d} Lantan	72 Hf 177 178 180 18,5 27,1 35,2 156 1,3 71(4+) 0,68 [Xe]6s ^{4f} Hafn	73 Ta 180 181 0,01 99,99 143 1,5 64(5+) 0,767 [Xe]6s ^{4f} Tantal	74 W 182 184 186 26,4 30,7 28,4 137 1,9 65(4+) 0,776 [Xe]6s ^{4f} Wolfram	75 Re 185 187 37,1 62,9 137 1,9 63(4+) 0,766 [Xe]6s ^{4f} Ren	76 Os 189 190 192 16,1 26,4 41,0 134 2,2 63(4+) 0,85 [Xe]6s ^{4f} Osm	77 Ir 191 193 37,3 62,7 136 2,2 63(4+) 0,88 [Xe]6s ^{4f} Iryd	78 Pt 194 195 196 32,9 33,8 25,3 100 139 2,2 80(2+) 0,87 [Xe]6s ^{4f} Platyna	79 Au 197 100 244 2,4 137(1+) 0,896 [Xe]6s ^{4f} Złoto	80 Hg 199 200 202 16,8 23,1 29,8 100 150 1,9 102(2+) 1,013 [Xe]6s ^{4f} Rtęć	81 Tl 203 205 29,5 70,5 170 1,8 150(1+) 0,596 [Xe]6s ^{4f} Tal	82 Pb 208 208 23,6 22,6 52,3 100 175 1,8 118(2+) 0,722 [Xe]6s ^{4f} Ołów	83 Bi 209 100 155 1,9 102(3+) 0,710 [Xe]6s ^{4f} Bizmut	84 Po - - 167 2,0 67(6+) 0,818 [Xe]6s ^{4f} Polon	85 At - - - 2,2 - [Xe]6s ^{4f} Astat	86 Rn - - - 2,2 - 1,043 [Xe]6s ^{4f} Radon

Numer grupy tradycyjny zalecony przez IUPAC (1985)

GRUPY POBOCZNE

IIIB (3)	IVB (4)	VB (5)	VIB (6)	VIIB (7)	VIIIB (8)	VIIIB (9)	VIIIB (10)	IB (11)	IIB (12)	
21 Sc 45 100 161 1,3 75(3+) 0,637 [Ar]4s ^{3d} Skand	22 Ti 46 47 48 7,9 7,3 74,0 145 1,5 61(4+) 0,664 [Ar]4s ^{3d} Tytan	23 V 50 51 0,2 99,8 131 1,6 54(5+) 0,656 [Ar]4s ^{3d} Wanad	24 Cr 50 52 53 0,2 99,8 125 1,6 63(3+) 0,659 [Ar]4s ^{3d} Chrom	25 Mn 55 100 137 1,5 83(2+) 0,724 [Ar]4s ^{3d} Mangan	26 Fe 54 56 62 5,8 91,7 2,2 100 124 1,8 64(3+) 0,766 [Ar]4s ^{3d} Żelazo	27 Co 59 100 125 1,8 65(2+) 0,764 [Ar]4s ^{3d} Kobalt	28 Ni 58 60 62 67,9 26,2 3,6 100 125 1,8 69(2+) 0,743 [Ar]4s ^{3d} Nikiel	29 Cu 63 65 69,1 30,9 128 1,9 72(2+) 0,752 [Ar]4s ^{3d} Miedź	30 Zn 64 66 68 48,9 27,8 18,6 100 133 1,6 74(2+) 0,913 [Ar]4s ^{3d} Cynk	
39 Y 89 100 178 1,3 92(3+) 0,622 [Kr]5s ^{4d} Itr	40 Zr 90 92 94 51,5 17,1 17,4 159 1,4 72(4+) 0,666 [Kr]5s ^{4d} Cyrkon	41 Nb 93 100 143 1,6 60(6+) 0,691 [Kr]5s ^{4d} Niob	42 Mo 92 96 98 15,9 16,5 23,8 - 136 1,8 60(6+) 0,691 [Kr]5s ^{4d} Molibden	43 Tc 93 100 135 1,9 - 0,708 [Kr]5s ^{4d} Technet	44 Ru 101 102 104 17,1 31,6 18,6 100 133 2,2 62(4+) 0,717 [Kr]5s ^{4d} Ruten	45 Rh 103 100 134 2,2 68(3+) 0,726 [Kr]5s ^{4d} Rod	46 Pd 105 106 108 22,2 27,3 26,7 100 138 2,2 86(2+) 0,811 [Kr]4d ¹⁰ Pallad	47 Ag 107 109 107 109 51,4 48,6 144 1,9 115(1+) 0,737 [Kr]5s ^{4d} Srebro	48 Cd 111 112 114 12,7 24,1 28,8 100 149 1,7 95(2+) 0,874 [Kr]5s ^{4d} Kadm	
57 La* 138 139 0,1 99,9 187 1,1 114(3+) 0,544 [Xe]6s ^{5d} Lantan	72 Hf 177 178 180 18,5 27,1 35,2 156 1,3 71(4+) 0,68 [Xe]6s ^{4f} Hafn	73 Ta 180 181 0,01 99,99 143 1,5 64(5+) 0,767 [Xe]6s ^{4f} Tantal	74 W 182 184 186 26,4 30,7 28,4 137 1,9 65(4+) 0,776 [Xe]6s ^{4f} Wolfram	75 Re 185 187 37,1 62,9 137 1,9 63(4+) 0,766 [Xe]6s ^{4f} Ren	76 Os 189 190 192 16,1 26,4 41,0 134 2,2 63(4+) 0,85 [Xe]6s ^{4f} Osm	77 Ir 191 193 37,3 62,7 136 2,2 63(4+) 0,88 [Xe]6s ^{4f} Iryd	78 Pt 194 195 196 32,9 33,8 25,3 100 139 2,2 80(2+) 0,87 [Xe]6s ^{4f} Platyna	79 Au 197 100 244 2,4 137(1+) 0,896 [Xe]6s ^{4f} Złoto	80 Hg 199 200 202 16,8 23,1 29,8 100 150 1,9 102(2+) 1,013 [Xe]6s ^{4f} Rtęć	
58 Ce 136 140 142 0,2 88,5 11,2 183 1,1 101(3+) 0,534 [Xe]6s ^{4f} Cer	59 Pr - - 132 1,1 100(3+) 0,529 [Xe]6s ^{4f} Prazeodym	60 Nd 142 144 146 27,1 23,9 17,2 - 181 1,2 98(3+) 0,536 [Xe]6s ^{4f} Neodym	61 Pm - - 135 - - 135 - 96(3+) 0,542 [Xe]6s ^{4f} Promet	62 Sm 147 152 154 15,0 26,7 22,7 179 1,2 96(3+) 0,549 [Xe]6s ^{4f} Samar	63 Eu 151 153 47,8 52,2 100 117(2+) 0,553 [Xe]6s ^{4f} Europ	64 Gd 156 158 160 20,5 24,9 21,9 100 179 1,1 94(3+) 0,598 [Xe]6s ^{4f} Gadolin	65 Tb 159 100 176 1,2 93(3+) 0,570 [Xe]6s ^{4f} Terb	66 Dy 162 163 164 100 175 1,2 92(3+) 0,587 [Xe]6s ^{4f} Dysproz	67 Ho 165 100 174 1,2 91(3+) 0,586 [Xe]6s ^{4f} Holm	
90 Th 232 100 180 1,3 100(4+) 0,675 [Rn]7s ^{6d} Tor	91 Pa - - 161 1,5 113(3+) - [Rn]7s ^{5f} Protaktyn	92 U 234 235 238 0,01 0,7 99,3 - 139 1,7 73(6+) 0,59 [Rn]7s ^{5f} Uran	93 Np - - 130 1,3 95(4+) - [Rn]7s ^{5f} Neptun	94 Pu - - 151 1,3 80(4+) 0,57 [Rn]7s ^{5f} Pluton	95 Am 182 1,3 100(3+) 0,59 - [Rn]7s ^{5f} Ameryk	96 Cm - - - 98(3+) - [Rn]7s ^{5f} Kury	97 Bk - - - - [Rn]7s ^{5f} Berkel	98 Cf - - - - [Rn]7s ^{5f} Kaliforn	99 Es - - - - [Rn]7s ^{5f} Einstein	100 Fm - - - - [Rn]7s ^{5f} Ferm
70 Yb 172 173 174 97,4 2,6 194 1,1 174 1,2 86(3+) 0,610 [Xe]6s ^{4f} Terb	71 Lu 175 176 97,4 2,6 194 1,1 174 1,2 86(3+) 0,610 [Xe]6s ^{4f} Terb	101 Md - - - - [Rn]7s ^{5f} Mendelew	102 No - - - - [Rn]7s ^{5f} Nobel	103 Lr - - - - [Rn]7s ^{5f} Lawrencj						

Lantanowce *

Aktynowce **

79 Au

- Liczba atomowa: 79
- Symbol pierwiastka: Au
- Liczba masowa: 197
- Zawartość w naturalnej mieszaninie izotopów w % atomowych: 100
- Promień atomowy w pm: 144
- Promień jonowy w pm: 137(1+)
- Ladunek jonu: 0,896
- Nazwa: Złoto
- Elektroujemność (wg Paulinga): 2,4
- Energia jonizacji (MJ · mol⁻¹): [Xe]6s^{4f}145d¹⁰
- Konfiguracja elektronowa: [Xe]6s^{4f}145d¹⁰

GRUPY GŁÓWNE					
IIIA (13)	IVA (14)	VA (15)	VIA (16)	VIIA (17)	VIIIA (18)
13 Al 27 100 143 1,5 53(3+) 0,584 [Ne]3s ^{3p} Glin	14 Si 28 29 30 92,2 4,7 3,1 100 132 1,8 40(4+) 0,793 [Ne]3s ^{3p} Krzem	15 P 31 100 128 2,1 44(3+) 1,018 [Ne]3s ^{3p} Fosfor	16 S 32 33 34 95,0 0,8 4,2 100 127 2,5 184(2-) 1,006 [Ne]3s ^{3p} Siarka	17 Cl 35 37 35,5 24,5 100 181(1-) 1,257 [Ne]3s ^{3p} Chlor	18 Ar 36 38 40 3,6 9,8 19,6 100 190 - - 1,527 [Ne]3s ^{3p} Argon
5 B 10 11 19,6 80,4 9,8 2,0 23(3+) 2,007 [He]2s ^{2p} Bor	6 C 12 13 14 99,9 0,04 0,2 100 9,8 2,0 16(4+) 1,093 [He]2s ^{2p} Węgiel	7 N 14 15 99,9 0,04 0,2 100 14,0 0,2 16(3+) 1,407 [He]2s ^{2p} Azot	8 O 16 17 18 19,9 0,04 0,2 100 14,0 0,2 140(2-) 1,320 [He]2s ^{2p} Tlen	9 F 19 19 19,0 0,0 100 131(1-) 4,687 [He]2s ^{2p} Fluor	10 Ne 20 21 22 20,9 0,3 8,8 160 - - 2,087 [He]2s ^{2p} Neon
31 Ga 69 71 60,4 39,6 122 1,6 62(3+) 0,585 [Ar]4s ^{3d} Gal	32 Ge 70 72 74 20,5 27,4 36,5 100 123 1,8 53(4+) 0,768 [Ar]4s ^{3d} German	33 As 75 100 125 2,0 58(3+) 0,953 [Ar]4s ^{3d} Arsen	34 Se 78 80 82 23,5 49,8 9,2 100 116 2,4 198(2-) 0,947 [Ar]4s ^{3d} Selen	35 Br 79 81 50,5 49,5 100 195(1-) 1,146 [Ar]4s ^{3d} Brom	36 Kr 82 84 86 11,6 56,9 17,4 200 - - 1,357 [Ar]4s ^{3d} Krypton
49 In 113 115 4,3 95,7 136 1,7 81(3+) 0,565 [Kr]5s ^{4d} Ind	50 Sn 116 118 120 14,3 24,0 32,8 100 151 1,8 71(4+) 0,715 [Kr]5s ^{4d} Cyna	51 Sb 121 123 57,2 42,8 100 145 1,9 76(3+) 0,840 [Kr]5s ^{4d} Antymon	52 Te 127 128 130 18,7 31,8 34,5 100 143 2,1 221(2-) 0,876 [Kr]5s ^{4d} Tellur	53 I 127 100 216(1-) 1,015 - 2,5 [Kr]5s ^{4d} Jod	54 Xe 129 131 132 129 131 132 100 220 - - 1,177 [Kr]5s ^{4d} Ksenon

UKŁAD OKRESOWY PIERWIĄSTKÓW

OKRES	GRUPY GŁÓWNE	
	IA (1)	IIA (2)
1	-253 -259 1,008 H 1 I, - Wodór	
2	1330 180 6,94 Li 3 I Lit	2480 1,85 1280 9,01 Be 4 II Beryl
3	892 98 22,99 Na 11 I Sód	1110 1,74 650 24,31 Mg 12 II Magnez
4	760 64 39,10 K 19 I Potas	1490 1,55 838 40,08 Ca 20 II Wapń
5	688 39 85,47 Rb 37 I Rubid	1380 2,6 770 87,62 Sr 38 II Stront
6	690 29 132,91 Cs 55 I Cez	1640 3,5 714 137,34 Ba 56 II Bar
7	(680) (27) (223) Fr 87 I Frans	1530 5 700 226,03 Ra 88 II Rad

Charakter tlenku przy typowym stopniu utlenienia
(*zasadowy*)

Temperatura wrzenia — 2970 19,3 — Gęstość w g/cm³ w temperaturze 25°C (gazy w kg/cm³)

Temperatura topnienia — 1063

Masa atomowa — 196,97

Liczba atomowa — 79

Nazwa — Złoto

Symbol pierwiastka — Au

Stopień utlenienia — III, I

ciała stałe
ciecze
gazy
pierwiastki radioaktywne
pierwiastki sztucznie otrzymane

Numer grupy tradycyjny zalecony przez IUPAC (1985)

GRUPY POBOCZNE

IIIB (3)	IVB (4)	VB (5)	VIB (6)	VII B (7)	VIII B (8)	VIII B (9)	VIII B (10)	IB (11)	IIB (12)
----------	---------	--------	---------	-----------	------------	------------	-------------	---------	----------

GRUPY GŁÓWNE					
IIIA (13)	IVA (14)	VA (15)	VIA (16)	VIIA (17)	VIIIA (18)
					-269 0,17 4,003 He 2 - Hel
3900 (2030) 10,81 B 5 III Bor	4830 2,26 3730 12,01 C 6 IV Węgiel	-196 1,17 -210 14,01 N 7 V, -III Azot	-183 1,33 -219 16,00 O 8 -II, VI Tlen	-188 1,58 -220 19,00 F 9 -I Fluor	-246 0,84 -249 20,18 Ne 10 - Neon
2450 660 26,98 Al 13 III Glin	2680 2,33 1410 28,09 Si 14 IV Krzem	280 1,82 44 30,97 P 15 V, -III Fosfor	445 2,07 119 32,06 S 16 -II, VI Siarka	-35 2,95 -101 35,45 Cl 17 -I, VII Chlor	-186 1,66 -189 39,95 Ar 18 - Argon
2400 30 69,72 Ga 31 III Gal	2830 5,32 937 72,59 Ge 32 IV, II German	613 5,72 - 74,92 As 33 III, V Arsen	685 4,80 217 78,96 Se 34 -II, IV Selen	58 3,12 -7 79,90 Br 35 -I Brom	-152 3,48 -157 83,80 Kr 36 - Krypton
2000 156 114,82 In 49 III Ind	2270 7,30 232 118,69 Sn 50 IV, II Cyna	1380 6,68 631 121,75 Sb 51 III, V Antymon	1390 6,24 450 127,60 Te 52 -II, IV Tellur	183 4,94 114 126,90 I 53 -I Jod	-108 5,49 -112 131,30 Xe 54 - Ksenon
690 29 132,91 Cs 55 I Cez	1640 3,5 714 137,34 Ba 56 II Bar	3470 6,17 920 138,91 La* 57 III Lantan	5400 13,1 2000 178,49 Hf 72 IV Hafn	5430 16,6 3000 180,95 Ta 73 V Tantal	5560 10,2 2610 183,85 W 74 VI, V Wolfram
(680) (27) (223) Fr 87 I Frans	1530 5 700 226,03 Ra 88 II Rad	3200 - 1050 (227) Ac** 89 III Aktyn	- (260) Ku 104 - Kurczatow	3470 6,78 795 140,12 Ce 58 III, IV Cer	3130 6,77 935 140,91 Pr 59 III, IV Prazeodym
				3030 7,00 1020 144,24 Nd 60 III Neodym	(2730) - (1030) 150,4 Pm 61 III Promet
				1900 7,54 1070 151,96 Sm 62 III, II Samar	1440 5,26 826 157,25 Eu 63 III, II Europ
				3000 7,89 1310 157,25 Gd 64 III Gadolin	2800 8,27 1360 158,93 Tb 65 III, IV Terb
				2600 8,54 1410 162,50 Dy 66 III Dysproz	2600 8,80 1460 164,93 Ho 67 III Holm
				2900 9,05 1500 167,26 Er 68 III Erb	1730 9,33 1550 168,93 Tm 69 III, II Tul
				1430 6,98 824 173,04 Yb 70 III, II Iterb	3330 9,84 1650 174,97 Lu 71 III Lutet
				4200 11,7 1700 232,04 Th 90 IV Tor	- 15,4 (1230) 231,04 Pa 91 III, IV Protaktyn
				3820 18,90 1130 238,03 U 92 VI, V Uran	- 20,4 640 237,05 Np 93 VI, V Neptun
				3230 19,8 640 (244) Pu 94 IV, VI Pluton	2600 11,7 850 (243) Am 95 III, II Ameryk
				7 - - (247) Cm 96 III Kiur	- - - (247) Bk 97 III, IV Berkel
				- - - (251) Cf 98 III Kaliforn	- - - (254) Es 99 - Einstein
				- - - (253) Fm 100 - Ferm	- - - (258) Md 101 - Mendelew
				- - - (256) No 102 - Nobel	- - - (256) Lr 103 - Lorens

Lantanowce *

Aktynowce **

Nazwa	Symbol lub wzór	Gęstość w g/cm ³	Temperatura topnienia t_f w °C	Temperatura wrzenia t_w w °C
Tlenek magnezu	MgO	3,65	2640	2800
Siarczan(VI) magnezu	MgSO ₄	2,66	1127	rozkłada się
Mangan	Mn	7,21	1244	~2100
Miedź	Cu	8,92	1083	2350
Chlorek miedzi(II)	CuCl ₂	3,05	630	655
Tlenek miedzi(I)	Cu ₂ O	6,0	1232	1800 rozkłada się
Tlenek miedzi(II)	CuO	6,45	rozkład od 1336	-
Siarczan(VI) miedzi(II)	CuSO ₄	3,61	200	rozkład od 650
Nikiel	Ni	8,90	1453	~2900
Ołów	Pb	11,34	327	1750
Azotan(V) ołowiu(II)	Pb(NO ₃) ₂	4,53	rozkład od 200	-
Tlenek ołowiu(II)	PbO	9,53	890	1410
Tlenek ołowiu(II)				
Tlenek ołowiu(IV)	Pb ₃ O ₄	9,10	rozkład od 830	rozkład w 500
Platyna	Pt	21,45	~1710	~4000
Potas	K	0,86	64	760
Azotan(V) potasu	KNO ₃	2,11	380	rozkład od 400
Bromek potasu	KBr	2,75	742	1382
Chloran(V) potasu	KClO ₃	2,32	rozkład od 356	rozkład w 400
Chlorek potasu	KCl	1,98	770	1405
Cyjanek potasu	KCN	1,52	623	1600
Dichromian(VI) potasu	K ₂ Cr ₂ O ₇	2,69	395	rozkład od 500
Manganian(VII) potasu	KMnO ₄	2,70	rozkład od 240	-
Węglan(IV) potasu	K ₂ CO ₃	2,43	897	rozkład
Wodorotlenek potasu	KOH	2,04	360	1327
Rtęć	Hg	13,59	-39	357
Chlorek rtęci(II)	HgCl ₂	5,42	277	304
Tlenek rtęci(II)	HgO	11,14	rozkład od 100	-
Siarka (rombowa)	S	2,06	113	445
Ditlenek siarki	SO ₂	1,460c	-76	-10
Kwas siarkowy(VI)	H ₂ SO ₄	1,83	11	rozkład od 338
Kwas siarkowodorowy	H ₂ S	0,950s	-86	
Tlenek siarki(VI)	SO ₃	2,75	17	45
Sód	Na	0,97	98	883
Azotan(V) sodu	NaNO ₃	2,25	310	rozkład od 380
Chlorek sodu	NaCl	2,16	800	1465
Siarczan(VI) sodu	Na ₂ SO ₄	2,69	884	-
Węglan(IV) sodu	Na ₂ CO ₃	2,53	852	rozkład od 1600
Wodorotlenek sodu	NaOH	2,13	120	390

Nazwa	Symbol lub wzór	Gęstość w g/cm ³	Temperatura topnienia t_t w °C	Temperatura wrzenia t_w w °C
Srebro	Ag	10,50	960	2200
Azotan(V) srebra	AgNO ₃	4,35	209	rozkład od 444
Tlen	O ₂	1,141c	219	-183
Wapń	Ca	1,54	845	1439
Chlorek wapnia	CaCl ₂	2,15	772	> 1600
Fluorek wapnia	CaF ₂	3,18	1392	2500
Fosforan(V) wapnia(II)	Ca ₃ (PO ₄) ₂	3,14	1730	-
Siarczan(VI) wapnia	CaSO ₄	2,96	~1300	rozkład
Tlenek wapnia	CaO	3,40	~2570	2850
Węglan(IV) wapnia	CaCO ₃	2,93	rozkład od 825	-
Węglik wapnia	CaC ₂	2,22	~2300	rozkład 3280
Wodorotlenek wapnia	Ca(OH) ₂	2,23	rozkład	-
Węgiel (diament)	C	3,51	3540	4347
Disiarczek węgla	CS ₂	1,36	-112	46
Ditlenek węgla	CO ₂	1,297c	-57	-79
Kwas cyjanowodorowy	HCN	0,69	-13,3	25,7
Tlenek węgla(II)	CO	0,792c	-205	-192
Wodór	H ₂	0,071c	-259,3	-252,8
Nadtlenek wodoru	H ₂ O ₂	1,46	-2	152
Woda	H ₂ O	1,0	0	100
Złoto	Au	19,28	1003	2700
Żelazo	Fe	7,86	1535	~3000
Chlorek żelaza(III)	FeCl ₃	2,80	304	319
Siarczek żelaza(II)	FeS	4,84	1195	rozkład
Tlenek żelaza(II)	FeO	5,70	1360	1400
Tlenek żelaza(III)	Fe ₂ O ₃	5,24	~1565	-
Fosfor (biały)	P	1,82	44	280
Kwas fosforowy(V)	H ₃ PO ₄	1,88	42	rozkład 213
Tlenek fosforu(V)	P ₂ O ₅	2,11	56	sublimuje przy 358

Temperatury topnienia i wrzenia w °C wyznaczono przy ciśnieniu 760 mm/Hg; gęstość w 20 °C.

Zastosowane skróty:

c – po skropleniu w temperaturze wrzenia

s – sublimuje

Podział głównych typów wiązań chemicznych

Typ wiązania	Przykład
Atomowe (kowalencyjne)	H_2 , Cl_2 , N_2 , diament
Atomowe (spolaryzowane)	CH_4 , $HCl_{(g)}$, AlF_3 , H_2O , $BeCl_2$
Jonowe (elektrowalencyjne)	$NaCl$, CaF_2
Metaliczne	Cu , $ZnCu$, Sn_8Cu_{31}
Wodorowe	$(HF)_n$, $(NH_3)_n$, $(H_2O)_n$
Van der Waalsa	skroplony argon, pseudohydraty gazów szlachetnych

Budowa elektronowa pierwiastków chemicznych




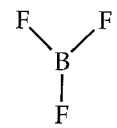


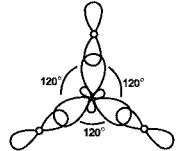
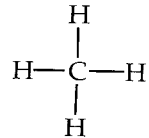


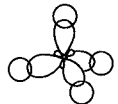
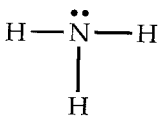


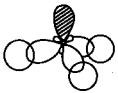
Pierwiastek				Powłoka							
Okres	L. atomowa	Nazwa	Symbol	K	L	M	N	O	P	Q	
				1	2	3	4	5	6	7	
				s	s p	s p d	s p d f	s p d f	s p d	s	
I	1	Wodór	H	1							
	2	Hel	He	2							
II	3	Lit	Li		1						
	4	Beryl	Be		2						
	5	Bor	B		2	1					
	6	Węgiel	C		2	2					
	7	Azot	N	s ²	2	3					
	8	Tlen	O		2	4					
	9	Fluor	F		2	5					
	10	Neon	Ne		2	6					
	III	11	Sód	Na			1				
		12	Magnez	Mg			2				
13		Glin	Al			2	1				
14		Krzem	Si	s ²	s ² p ⁶	2	2				
15		Fosfor	P			2	3				
16		Siarka	S			2	4				
17		Chlor	Cl			2	5				
18		Argon	Ar			2	6				
IV	19	Potas	K			2	6	1			
	20	Wapń	Ca			2	6	2			
	21	Skand	Sc			2	6	1	2		
	22	Tytan	Ti			2	6	2	2		
	23	Wanad	V			2	6	3	2		
	24	Chrom	Cr			2	6	5	1		
	25	Mangan	Mn			2	6	5	2		
	26	Żelazo	Fe	s ²	s ² p ⁶	2	6	6	2		
	27	Kobalt	Co			2	6	7	2		
	28	Nikiel	Ni			2	6	8	2		
	29	Miedź	Cu			2	6	10	1		
	30	Cynk	Zn			2	6	10	2		
	31	Gal	Ga			2	6	10	2	1	
	32	German	Ge			2	6	10	2	2	
	33	Arsen	As			2	6	10	2	3	

Pierwiastek				Powłoka						
Okres	I. atomowa	Nazwa	Symbol	K	L	M	N	O	P	Q
				1 s	2 s p	3 s p d	4 s p d f	5 s p d f	6 s p d	7 s
	34	Selen	Se			2 6 10	2 4			
	35	Brom	Br	s ²	s ² p ⁶	2 6 10	2 5			
	36	Krypton	Kr			2 6 10	2 6			
V	37	Rubid	Rb				2 6	1		
	38	Stront	Sr				2 6	2		
	39	Itr	Y				2 6 1	2		
	40	Cyrkon	Zr				2 6 2	2		
	41	Niob	Nb				2 6 4	1		
	42	Molibden	Mo				2 6 5	1		
	43	Technet	Tc				2 6 6	1		
	44	Ruten	Ru				2 6 7	1		
	45	Rod	Rh	s ²	s ² p ⁶	s ² p ⁶ d ¹⁰	2 6 8	1		
	46	Pallad	Pd				2 6 10			
	47	Srebro	Ag				2 6 10	1		
	48	Kadm	Cd				2 6 10	2		
	49	Ind	In				2 6 10	2 1		
	50	Cyna	Sn				2 6 10	2 2		
	51	Antymon	Sb				2 6 10	2 3		
52	Tellur	Te				2 6 10	2 4			
53	Jod	J				2 6 10	2 5			
54	Ksenon	Xe				2 6 10	2 6			
VI	55	Cez	Cs				2 6 10	2 6	1	
	56	Bar	Ba				2 6 10	2 6	2	
	57	Lantan	La				2 6 10	2 6 1	2	
	58	Cer	Ce				2 6 10 2	2 6	2	
	59	Prazeodym	Pr				2 6 10 3	2 6	2	
	60	Neodym	Nd				2 6 10 4	2 6	2	
	61	Promet	Pm	s ²	s ² p ⁶	s ² p ⁶ d ¹⁰	2 6 10 5	2 6	2	
	62	Samar	Sm				2 6 10 6	2 6	2	
	63	Europ	Eu				2 6 10 7	2 6	2	
	64	Gadolin	Gd				2 6 10 7	2 6 1	2	
	65	Terb	Tb				2 6 10 9	2 6	2	
	66	Dysproz	Dy				2 6 10 10	2 6	2	
	67	Holm	Ho				2 6 10 11	2 6	2	
	68	Erb	Er				2 6 10 12	2 6	2	

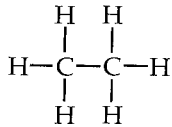
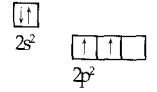
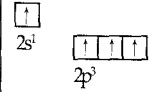
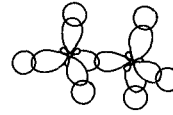
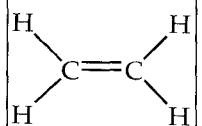
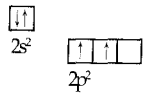
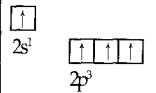
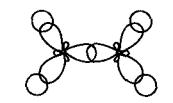

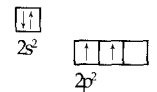
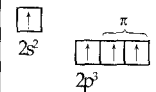
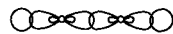
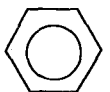
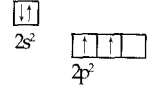
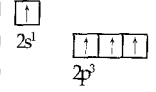
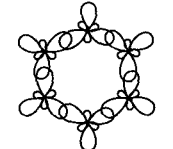
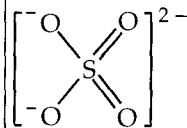
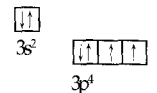
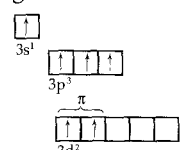
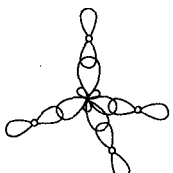
Modele orbitali s, p, d, f



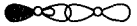
n	l=0 (s-Elektron)	l=1 (p-Elektron)		l=2 (d-Elektron)			l=3 (f-Elektron)			
	m=0	m=0	m=1 m=-1	m=0	m=1 m=-1	m=2 m=-2	m=0	m=1 m=-1	m=2 m=-2	m=3 m=-3
1										
2										
3										
4										

Podstawy teorii orbitali wzbudzonych cząsteczek i jonów

Lp.	Wzór sumaryczny związku lub jonu	Wzór kreskowy	Struktura elektronowa atomu centralnego	Struktura elektronowa powłoki walencyjnej	Stan wzbudzenia poprzedzający utworzenie cząsteczki, jonu	Typ hybrydyzacji	Struktura przestrzenna cząsteczki
1	BeCl ₂	Cl—Be—Cl	⁴ Be 1s ² 2s ²	Be ⁰ 2s ²  2p ⁰	Be ⁺ 2s ¹  2p ¹	sp	
2	BF ₃		⁵ B 1s ² 2s ² p ¹	B ⁰ 2s ²  2p ¹	B ⁺ 2s ¹  2p ²	sp ²	
3	CH ₄		⁶ C 1s ² 2s ² p ²	C ⁰ 2s ²  2p ²	C ⁺ 2s ¹  2p ³	sp ³	
4	NH ₃		⁷ N 1s ² 2s ² p ³	N ⁰ 2s ²  2p ³	N ⁺ 2s ¹  2p ³	sp ³ piramidalna	

Lp.	Wzór sumaryczny związku lub jonu	Wzór kreskowy	Struktura elektronowa atomu centralnego	Struktura elektronowa powłoki walencyjnej	Stan wzbudzenia poprzedzający utworzenie cząsteczki, jonu	Typ hybrydizacji	Struktura przestrzenna cząsteczki
5	ClO_4^-		^{17}Cl $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$	Cl^0 	Cl^+ 	sp^3 tetraedyczna	
6	HCN	$\text{H}-\text{C}\equiv\text{N}$	^6C $1s^2 2s^2 2p^2$	C^0 	C^+ 	sp	
7	NH_4^+		^7N $1s^2 2s^2 2p^3$	N^0 	N^+ 	sp^3 czworościan	
8	H_2O		^8O $1s^2 2s^2 2p^4$	O^0 	O^+ 	sp^3 piramidalna	
9	H_3O^+		^8O $1s^2 2s^2 2p^4$	O^0 	O^+ 	sp^3 piramidalna	

Lp.	Wzór sumaryczny związku lub jonu	Wzór kreskowy	Struktura elektronowa atomu centralnego	Struktura elektronowa powłoki walencyjnej	Stan wzbudzenia poprzedzający utworzenie cząsteczki, jonu	Typ hybrydyzacji	Struktura przestrzenna cząsteczki
10	C_2H_6		6C $1s^2 2s^2 p^2$	C^0 	C^* 	sp^3	
11	$CH_2=CH_2$		6C $1s^2 2s^2 p^2$	C^0 	C^* 	sp^2	
12	C_2H_2		6C $1s^2 2s^2 p^2$	C^0 	C^* 	sp	
13	C_6H_6		6C $1s^2 2s^2 p^2$	C^0 	C^* 	sp^2	
14	SO_4^{2-}		${}^{16}S$ $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 p^4$	S^0 	S^* 	sp^3	

Lp.	Wzór sumaryczny związku lub jonu	Wzór kreskowy	Struktura elektronowa atomu centralnego	Struktura elektronowa powłoki walencyjnej	Stan wzbudzenia poprzedzający utworzenie cząsteczki, jonu	Typ hybrydyzacji	Struktura przestrzenna cząsteczki
15	CO	$\text{:C}\equiv\text{O:}$	${}^6\text{C}$ $1s^2 2s^2 p^2$	C^0 $2s^2$  $2p^2$	O^0 $1s^2 2s^2 p^4$ $2s^2$  $2p^4$	sp	

Komentarz do tablicy „Struktury przestrzenne wybranych cząsteczek i jonów”

Posługując się tablicą, można przewidywać, jakie są struktury przestrzenne cząsteczek. Na podstawie wzoru kreskowego (kolumna 3) oblicza się liczbę jednostek wiązań, którymi dany atom połączony jest z innymi atomami. Struktura elektronowa atomu centralnego (kolumna 4 i 5) pozwala stwierdzić, czy liczba niesparowanych elektronów jest zgodna z tą liczbą. Jeżeli liczba niesparowanych elektronów jest mniejsza, korzysta się z postulatu o stanie wzbudzonym (kolumna 6). Podana w kolumnie 4 konfiguracja elektronowa przedstawiona jest bez uwzględnienia kolejności zapelnienia poziomów energetycznych zgodnie z ich wzrastającą energią, gdyż taki zapis ułatwia umieszczenie niesparowanych elektronów po promocji na odpowiednich orbitalach (kolumna 6). Po odliczeniu elektronów na utworzenie wiązań Π (w większości przykładów jest to zaznaczone) orbitale, na których znajdują się pozostałe elektrony, decydują o typie hybrydyzacji (kolumna 7). Typ hybrydyzacji wskazuje kąty pomiędzy kierunkami orbitali. One z kolei decydują o strukturze przestrzennej cząsteczki. Należy jednak pamiętać, że kąty pomiędzy orbitalami w przypadku obecności orbitali „zajętych” przez wolne pary elektronowe danego atomu różnią się nieco od kątów wynikających bezpośrednio z typu hybrydyzacji. Przewidując kształt cząsteczki związku, należy wziąć pod uwagę ułożenie w przestrzeni jąder atomów wchodzących w skład cząsteczki, dlatego w przykładzie 8 układ orbitali jest piramidalny, lecz cząsteczka jest kątowna. W kolumnie 8 przedstawiono ułożenie orbitali w przypadku hybrydyzacji sp, sp^2 i sp^3 , natomiast w przypadku hybrydyzacji z udziałem orbitali d zaznaczono schematycznie ułożenie w przestrzeni jąder atomów tworzących daną cząsteczkę. We wzorach kreskowych zaznaczono obecność tylko niektórych wolnych par elektronowych, jeżeli wpływają one na strukturę przestrzenną cząsteczki. Stosując powyższy sposób postępowania, można przewidzieć strukturę przestrzenną ogromnej większości cząsteczek związków chemicznych, lecz istnieją wyjątki, dla których powyższy tok postępowania nie prowadzi do prawidłowego opisu struktury przestrzennej cząsteczki. W takich przypadkach (przykład 15) należy zastosować indywidualny dla danej cząsteczki tok postępowania.

Stałe dysocjacji niektórych elektrolitów w temperaturze 18° - 25° C

Nazwa	Wzór	Stała dysocjacji
Kwasy nieorganiczne		
Kwas antymonowy(III)	HSbO_2	$K = 1 \cdot 10^{-11}$
Kwas antymonowy(V)	H_3SbO_4	$K_1 = 4 \cdot 10^{-5}$
Kwas arsenowy(III)	HAsO_2	$K = 5,8 \cdot 10^{-10}$
Kwas arsenowy(V)	H_3AsO_4	$K_1 = 5,6 \cdot 10^{-3}$ $K_2 = 1,7 \cdot 10^{-7}$ $K_3 = 2,95 \cdot 10^{-12}$
Kwas azotowy(III)	HNO_2	$K = 4 \cdot 10^{-4}$
Kwas borowy(III)	H_3BO_3	$K_1 = 5,8 \cdot 10^{-10}$ $K_2 = 1,8 \cdot 10^{-13}$ $K_3 = 1,6 \cdot 10^{-14}$
Kwas chromowy(III)	HCrO_2	$K = 9 \cdot 10^{-17}$
Kwas chromowy(VI)	H_2CrO_4	$K_2 = 3,2 \cdot 10^{-7}$
Kwas cyjanowodorowy	HCN	$K = 7,2 \cdot 10^{-10}$
Kwas cynowy(II)	H_2SnO_2	$K_1 = 6 \cdot 10^{-18}$
Kwas cynowy(IV)	H_2SnO_3	$K_1 = 4 \cdot 10^{-10}$
Kwas ortofosforowy(V)	H_3PO_4	$K_1 = 7,5 \cdot 10^{-3}$ $K_2 = 6,2 \cdot 10^{-8}$ $K_3 = 4,8 \cdot 10^{-18}$
Kwas glinowy(III)	HAlO_2	$K = 4 \cdot 10^{-13}$
Kwas metakrzemowy(V)	HSiO_3	$K_1 = 1 \cdot 10^{-10}$ $K_2 = 2 \cdot 10^{-12}$
Kwas ołowiowy(II)	H_2PbO_2	$K_1 = 2,1 \cdot 10^{-16}$
Kwas chlorowy(II)	HClO	$K = 3,2 \cdot 10^{-8}$
Kwas tiocyjanowy (rodankowy)	HSCN	$K = 1 \cdot 10^{-4}$

Nazwa	Wzór	Stała dysocjacji
Kwas siarkawy(IV)	H_2SO_3	$K_1 = 1,7 \cdot 10^{-2}$ $K_2 = 6 \cdot 10^{-8}$
Kwas siarkowodorowy(II)	H_2S	$K_1 = 1,2 \cdot 10^{-7}$ $K_2 = 1 \cdot 10^{-15}$
Kwas siarkowy(VI)	H_2SO_4	$K_2 = 1,2 \cdot 10^{-2}$
Kwas węglowy(IV)	H_2CO_3	$K_1 = 3,7 \cdot 10^{-7}$ $K_2 = 5,7 \cdot 10^{-11}$
Woda	H_2O	$K = 1,8 \cdot 10^{-16}$
Kwas sześciocjanożelaza(II)	$\text{H}_4[\text{Fe}(\text{CN})_6]$	$K_3 = 1 \cdot 10^{-3}$
Kwas heksacyjanożelaza(II)		$K_4 = 5,6 \cdot 10^{-5}$
Zasady nieorganiczne		
Wodorotlenek amonowy	NH_4OH	$K = 1,8 \cdot 10^{-5}$
Wodorotlenek berylu(II)	$\text{Be}(\text{OH})_2$	$K_2 = 5,0 \cdot 10^{-11}$
Wodorotlenek cynku(II)	$\text{Zn}(\text{OH})_2$	$K_1 = 4,4 \cdot 10^{-5}$ $K_2 = 1,5 \cdot 10^{-9}$
Wodorotlenek manganu(II)	$\text{Mn}(\text{OH})_2$	$K_2 = 3 \cdot 10^{-4}$
Wodorotlenek miedzi(II)	$\text{Cu}(\text{OH})_2$	$K_2 = 7,9 \cdot 10^{-14}$
Wodorotlenek ołowiu(II)	$\text{Pb}(\text{OH})_2$	$K_1 = 9,6 \cdot 10^{-4}$ $K_2 = 3 \cdot 10^{-23}$
Wodorotlenek rtęci(II)	$\text{Hg}(\text{OH})_2$	$K_1 = 7 \cdot 10^{-12}$ $K_2 = 2 \cdot 10^{-23}$
Wodorotlenek srebra(I)	$\text{Ag}(\text{OH})$	$K = 1,1 \cdot 10^{-4}$

Rozpuszczalność niektórych soli i zasad w wodzie

Kationy Aniony	Aniony																				
	Li ⁺	Na ⁺	K ⁺	NH ₄ ⁺	Cu ²⁺	Ag ⁺	Mg ²⁺	Ca ²⁺	Sr ²⁺	Ba ²⁺	Zn ²⁺	Hg ²⁺	Al ³⁺	Sn ²⁺	Pb ²⁺	Bi ³⁺	Mn ²⁺	Fe ³⁺	Fe ²⁺	Cr ³⁺	
Cl ⁻	R	R	R	R	R	Nr	R	R	R	R	R	R	R	R	Tr	-	R	R	R	R	R
Br ⁻	R	R	R	R	R	Nr	R	R	R	R	R	Tr	R	R	Tr	-	R	R	R	R	-
I ⁻	R	R	R	R	R	Nr	R	R	R	R	R	Nr	R	R	Nr	-	Nr	-	R	-	-
NO ₃ ⁻	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	-	R	R	R	R	R	R	R
CH ₃ COO ⁻	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	-	R	-	R	-	R	-	-
S ²⁻	R	R	R	R	Nr	Nr	-	R	R	R	Nr	Nr	-	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	-
SO ₃ ²⁻	R	R	R	R	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	-	-	Nr	Nr	Nr	-	Nr	-	-
SO ₄ ²⁻	R	R	R	R	R	Tr	R	Tr	Nr	Nr	R	-	R	R	Nr	-	R	R	R	R	R
CO ₃ ²⁻	R	R	R	R	-	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	-	-	-	Nr	Nr	Nr	-	Nr	-	-
SiO ₃ ²⁻	R	R	R	-	-	-	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	-	Nr	-	Nr	-	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr
CrO ₄ ²⁻	R	R	R	R	Nr	Nr	R	Tr	Tr	Nr	Nr	Nr	-	-	Nr	Nr	Nr	-	-	-	-
PO ₄ ³⁻	Nr	R	R	R	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr
OH ⁻	R	R	R	R	Nr	-	Nr	Tr	Tr	R	Nr	-	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr	Nr

Objaśnienie:

R - substancja rozpuszczalna

Tr - trudno rozpuszczalna

Nr - praktycznie nierozpuszczalna

(kreska) - oznacza, że substancja nie istnieje lub w wodzie ulega rozkładowi.

Wartość iloczynów rozpuszczalności (L) w 25 °C

Związek	L	Związek	L
AgCl	$1,1 \cdot 10^{-10}$	BiOCl	$7,9 \cdot 10^{-9}$
AgBr	$5,2 \cdot 10^{-13}$	Bi ₂ S ₃	$1,0 \cdot 10^{-96}$
AgJ	$8,3 \cdot 10^{-17}$	CaF ₂	$4,9 \cdot 10^{-11}$
AgCN	$2,0 \cdot 10^{-16}$	CaCO ₃	$4,7 \cdot 10^{-9}$
AgBrO ₃	$5,8 \cdot 10^{-5}$	CaC ₂ O ₄	$2,1 \cdot 10^{-9}$
Ag ₂ S	$7,0 \cdot 10^{-50}$	CaCrO ₄	$7,1 \cdot 10^{-4}$
Ag ₂ CO ₃	$8,2 \cdot 10^{-12}$	Ca(OH) ₂	$5,5 \cdot 10^{-6}$
Ag ₂ CrO ₄	$2,4 \cdot 10^{-12}$	CaSO ₄	$2,4 \cdot 10^{-5}$
Ag ₂ SO ₄	$1,7 \cdot 10^{-5}$	Ca ₃ (AsO ₄) ₂	$6,8 \cdot 10^{-19}$
Ag ₃ AsO ₄	$1,0 \cdot 10^{-22}$	Ca ₃ (PO ₄) ₂	$2,0 \cdot 10^{-29}$
Ag ₃ PO ₄	$1,0 \cdot 10^{-23}$	CdCO ₃	$5,2 \cdot 10^{-12}$
Al(OH) ₃	$2,0 \cdot 10^{-32}$	CdS	$7,0 \cdot 10^{-27}$
AlAsO ₄	$1,6 \cdot 10^{-16}$	Cd(OH) ₂	$2,8 \cdot 10^{-14}$
AlPO ₄	$5,8 \cdot 10^{-19}$	CoS	$8,0 \cdot 10^{-23}$
As ₂ S ₃	$4,0 \cdot 10^{-29}$	Co(OH) ₂	$2,0 \cdot 10^{-16}$
As ₂ S ₅	$4,7 \cdot 10^{-32}$	CoCO ₃	$8,0 \cdot 10^{-13}$
BaF ₂	$1,0 \cdot 10^{-6}$	Cr(OH) ₃	$7,0 \cdot 10^{-31}$
BaCO ₃	$5,1 \cdot 10^{-9}$	CuCl	$3,2 \cdot 10^{-7}$
BaCrO ₄	$1,2 \cdot 10^{-10}$	CuBr	$5,3 \cdot 10^{-9}$
BaC ₂ O ₄	$1,5 \cdot 10^{-8}$	CuJ	$1,1 \cdot 10^{-12}$
BaSO ₄	$1,0 \cdot 10^{-10}$	CuCN	$1,0 \cdot 10^{-11}$
Ba ₃ (AsO ₄) ₂	$1,1 \cdot 10^{-13}$	CuS	$8,0 \cdot 10^{-36}$
Ba ₃ (PO ₄) ₂	$6,0 \cdot 10^{-39}$	CuCO ₃	$2,5 \cdot 10^{-10}$

Związek	L	Związek	L
Cu(OH)_2	$2,2 \cdot 10^{-20}$	PbBr_2	$5 \cdot 10^{-6}$
Cu_2S	$1,0 \cdot 10^{-48}$	PbJ_2	$7,1 \cdot 10^{-9}$
FeCO_3	$3,5 \cdot 10^{-11}$	PbCO_3	$1,5 \cdot 10^{-13}$
FePO_4	$1,3 \cdot 10^{-22}$	PbCrO_4	$2,0 \cdot 10^{-16}$
FeS	$5,0 \cdot 10^{-18}$	Pb(OH)_2	$4,0 \cdot 10^{-15}$
Fe(OH)_2	$8,0 \cdot 10^{-16}$	PbSO_4	$1,3 \cdot 10^{-8}$
Fe(OH)_3	$6,0 \cdot 10^{-38}$	PbS	$8,0 \cdot 10^{-28}$
Fe_2S_3	$1,0 \cdot 10^{-88}$	$\text{Pb}_3(\text{PO}_4)_2$	$1,5 \cdot 10^{-32}$
Hg_2Cl_2	$1,3 \cdot 10^{-18}$	$\text{Pb}_3(\text{AsO}_4)_2$	$4,1 \cdot 10^{-36}$
Hg_2Br_2	$1,3 \cdot 10^{-22}$	PbF_2	$2,7 \cdot 10^{-8}$
Hg_2J_2	$4,0 \cdot 10^{-29}$	Sn(OH)_2	$1,6 \cdot 10^{-27}$
Hg_2CO_3	$8,9 \cdot 10^{-17}$	Sn(OH)_4	$1,0 \cdot 10^{-57}$
Hg_2CrO_4	$2,0 \cdot 10^{-9}$	SnS	$1,3 \cdot 10^{-27}$
HgJ_2	$4,0 \cdot 10^{-29}$	SnS_2	$1,0 \cdot 10^{-70}$
HgS	$3,0 \cdot 10^{-52}$	SrF_2	$7,9 \cdot 10^{-10}$
$\text{MgNH}_4\text{AsO}_4$	$3,2 \cdot 10^{-10}$	SrCO_3	$7,0 \cdot 10^{-10}$
MgNH_4PO_4	$2,5 \cdot 10^{-13}$	SrCrO_4	$5,0 \cdot 10^{-6}$
$\text{Mg}_3(\text{PO}_4)_2$	$1,0 \cdot 10^{-13}$	SrSO_4	$7,6 \cdot 10^{-7}$
MnS	$1,0 \cdot 10^{-11}$	$\text{Sr}_3(\text{PO}_4)_2$	$1,0 \cdot 10^{-31}$
MnCO_3	$8,8 \cdot 10^{-11}$	TIJ	$6,5 \cdot 10^{-8}$
Mn(OH)_2	$1,6 \cdot 10^{-13}$	TI_2CrO_4	$9,8 \cdot 10^{-13}$
Ni(OH)_2	$2,0 \cdot 10^{-15}$	ZnS	$3,0 \cdot 10^{-22}$
NiS	$2,0 \cdot 10^{-21}$	ZnCO_3	$2,1 \cdot 10^{-11}$
PbCl_2	$1,6 \cdot 10^{-5}$	Zn(OH)_2	$7,0 \cdot 10^{-18}$

PH soków owocowych

Sok owocowy	pH
cytryna zielona	1,8- 2,0
cytryna	2,2- 2,4
śliwka	2,8- 3,0
porzeczka	2,8- 3,0
jabłko	2,9- 3,3
grapefruit	3,0- 3,3
pomarańcza	3,0- 4,0
truskawka	3,0- 3,5
malina	3,2- 3,6
brzoskwinia	3,4- 3,6
wiśnia	3,2- 4,0
winogrona	3,5- 4,5
gruszka	3,6- 4,0
morela	3,6- 4,0
pomidor	4,0- 4,4
banan	4,5- 4,7
dynia	4,8- 5,2
daktyl	6,2- 6,4

Potencjały standardowe niektórych elektrod redoks

Elektroda	Proces przebiegający na elektrodzie	E° [V]
$\text{Mn}(\text{OH})_2, \text{OH}^-, \text{Mn}$	$\text{Mn}(\text{OH})_2 + 2e \rightleftharpoons \text{Mn} + 2\text{OH}^-$	- 1,55
$\text{SO}_3^{2-}, \text{S}_2\text{O}_4^{2-}, \text{OH}^- (\text{Pt})$	$2\text{SO}_3^{2-} + 2\text{H}_2\text{O} + 2e \rightleftharpoons \text{S}_2\text{O}_4^{2-} + 4\text{OH}^-$	- 1,12
$\text{SO}_4^{2-}, \text{SO}_3^{2-}, \text{OH}^- (\text{Pt})$	$\text{SO}_4^{2-} + \text{H}_2\text{O} + 2e \rightleftharpoons \text{SO}_3^{2-} + 2\text{OH}^-$	- 0,93
$\text{H}_2, \text{OH}^- (\text{Pt})$	$2\text{H}_2\text{O} + 2e \rightleftharpoons \text{H}_2 + 2\text{OH}^-$	- 0,828
$\text{SO}_3^{2-}, \text{S}_2\text{O}_3^{2-}, \text{OH}^- (\text{Pt})$	$2\text{SO}_3^{2-} + 3\text{H}_2\text{O} + 4e \rightleftharpoons \text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 6\text{OH}^-$	- 0,58
$\text{Cr}^{3+}, \text{Cr}^{2+} (\text{Pt})$	$\text{Cr}^{3+} + e \rightleftharpoons \text{Cr}^{2+}$	- 0,408
$\text{H}^+, \text{SO}_4^{2-}, \text{S}_2\text{O}_6^{2-} (\text{Pt})$	$2\text{SO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 2e \rightleftharpoons \text{S}_2\text{O}_6^{2-} + 2\text{H}_2\text{O}$	- 0,22
$\text{MnO}_2, \text{Mn}(\text{OH})_3, \text{OH}^- (\text{Pt})$	$\text{MnO}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + e \rightleftharpoons \text{Mn}(\text{OH})_3 + \text{OH}^-$	- 0,20
$\text{NO}_3^-, \text{NO}_2^- (\text{Pt})$	$\text{NO}_3^- + \text{H}_2\text{O} + 2e \rightleftharpoons \text{NO}_2^- + 2\text{OH}^-$	+ 0,01
$\text{S}_4\text{O}_6^{2-}, \text{S}_2\text{O}_3^{2-} (\text{Pt})$	$\text{S}_4\text{O}_6^{2-} + 2e \rightleftharpoons 2\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$	+ 0,08
$\text{Sn}^{4+}, \text{Sn}^{2+} (\text{Pt})$	$\text{Sn}^{4+} + 2e \rightleftharpoons \text{Sn}^{2+}$	+ 0,15
$\text{Cu}^{2+}, \text{Cu}^+ (\text{Pt})$	$\text{Cu}^{2+} + e \rightleftharpoons \text{Cu}^+$	+ 0,153
$\text{Mn}(\text{OH})_3, \text{Mn}(\text{OH})_2, \text{OH}^- (\text{Pt})$	$\text{Mn}(\text{OH})_3 + e \rightleftharpoons \text{Mn}(\text{OH})_2 + \text{OH}^-$	+ 0,20
$\text{ClO}_3^-, \text{ClO}_2^-, \text{OH}^- (\text{Pt})$	$\text{ClO}_3^- + \text{H}_2\text{O} + 2e \rightleftharpoons \text{ClO}_2^- + 2\text{OH}^-$	+ 0,33
$\text{ClO}_4^-, \text{ClO}_3^-, \text{OH}^- (\text{Pt})$	$\text{ClO}_4^- + \text{H}_2\text{O} + 2e \rightleftharpoons \text{ClO}_3^- + 2\text{OH}^-$	+ 0,36
$\text{O}_2, \text{OH}^- (\text{Pt})$	$\frac{1}{2}\text{O}_2 + \text{H}_2\text{O} + 2e \rightleftharpoons 2\text{OH}^-$	+ 0,401
$\text{J}_2, (\text{Pt})$	$\frac{1}{2}\text{J}_2 + e \rightleftharpoons \text{J}^-$	+ 0,536
$\text{MnO}_4^-, \text{MnO}_4^{2-} (\text{Pt})$	$\text{MnO}_4^- + 2\text{H}_2\text{O} + 3e \rightleftharpoons \text{MnO}_2 + 4\text{OH}^-$	+ 0,564
$\text{MnO}_4^-, \text{MnO}_2, \text{OH}^- (\text{Pt})$	$\text{MnO}_4^{2-} + 2\text{H}_2\text{O} + 2e \rightleftharpoons \text{MnO}_2 + 4\text{OH}^-$	+ 0,588


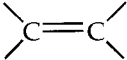
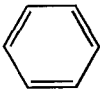
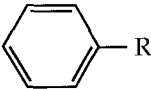
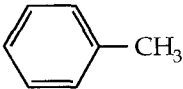
Elektroda	Proces przebiegający na elektrodzie	E' [V]
$\text{MnO}_4^{2-}, \text{MnO}_2, \text{OH}^- (\text{Pt})$	$\text{MnO}_4^{2-} + 2\text{H}_2\text{O} + 2e \rightleftharpoons \text{MnO}_2 + 4\text{OH}^-$	+ 0,60
$\text{ClO}_2^-, \text{ClO}^-, \text{OH}^- (\text{Pt})$	$\text{ClO}_2^- + \text{H}_2\text{O} + 2e \rightleftharpoons \text{ClO}^- + 2\text{OH}^-$	+ 0,66
$\text{Fe}^{3+}, \text{Fe}^{2+} (\text{Pt})$	$\text{Fe}^{3+} + e \rightleftharpoons \text{Fe}^{2+}$	+ 0,771
$\text{ClO}^-, \text{Cl}^-, \text{OH}^- (\text{Pt})$	$\text{ClO}^- + \text{H}_2\text{O} + 2e \rightleftharpoons \text{Cl}^- + 2\text{OH}^-$	+ 0,89
$\text{MnO}_2, \text{H}^+, \text{Mn}^{3+} (\text{Pt})$	$\text{MnO}_2 + 4\text{H}^+ + e \rightleftharpoons \text{Mn}^{3+} + 2\text{H}_2\text{O}$	+ 0,95
$\text{NO}_3^-, \text{H}^+, \text{NO} (\text{Pt})$	$\text{NO}_3^- + 4\text{H}^+ + 3e \rightleftharpoons \text{NO} + 2\text{H}_2\text{O}$	+ 0,96
$\text{Br}_2, 2\text{Br}^-$	$\frac{1}{2}\text{Br}_2 + e \rightleftharpoons \text{Br}^-$	+ 1,065
$\text{ClO}_4^-, \text{H}^+, \text{ClO}_3^- (\text{Pt})$	$\text{ClO}_4^- + 2\text{H}^+ + 2e \rightleftharpoons \text{ClO}_3^- + \text{H}_2\text{O}$	+ 1,19
$\text{O}_2, \text{H}^+ (\text{Pt})$	$\text{O}_2 + 4\text{H}^+ + 4e \rightleftharpoons 2\text{H}_2\text{O}$	+ 1,229
$\text{MnO}_2, \text{H}^+, \text{Mn}^{2+} (\text{Pt})$	$\text{MnO}_2 + 4\text{H}^+ + 2e \rightleftharpoons \text{Mn}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	+ 1,23
$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}, \text{H}^+, \text{Cr}^{3+} (\text{Pt})$	$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 14\text{H}^+ + 6e \rightleftharpoons 2\text{Cr}^{3+} + 7\text{H}_2\text{O}$	+ 1,33
$\text{Cl}_2, 2\text{Cl}^-$	$\frac{1}{2}\text{Cl}_2 + e \rightleftharpoons \text{Cl}^-$	+ 1,360
$\text{Mn}^{3+}, \text{Mn}^{2+} (\text{Pt})$	$\text{Mn}^{3+} + e \rightleftharpoons \text{Mn}^{2+}$	+ 1,51
$\text{MnO}_4^-, \text{H}^+, \text{Mn}^{2+} (\text{Pt})$	$\text{MnO}_4^- + 8\text{H}^+ + 5e \rightleftharpoons \text{Mn}^{2+} + 4\text{H}_2\text{O}$	+ 1,51
$\text{Ce}^{4+}, \text{Ce}^{3+} (\text{Pt})$	$\text{Ce}^{4+} + e \rightleftharpoons \text{Ce}^{3+}$	+ 1,61
$\text{Co}^{3+}, \text{Co}^{2+} (\text{Pt})$	$\text{Co}^{3+} + e \rightleftharpoons \text{Co}^{2+}$	+ 1,81
$\text{S}_2\text{O}_8^{2-}, \text{SO}_4^{2-} (\text{Pt})$	$\text{S}_2\text{O}_8^{2-} + 2e \rightleftharpoons 2\text{SO}_4^{2-}$	+ 2,010
$\text{MnO}_4^{2-}, \text{H}^+, \text{MnO}_2 (\text{Pt})$	$\text{MnO}_4^{2-} + 4\text{H}^+ + 2e \rightleftharpoons \text{MnO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	+ 2,26
$\text{F}_2, 2\text{F}^-$	$\frac{1}{2}\text{F}_2 + e \rightleftharpoons \text{F}^-$	+ 2,87

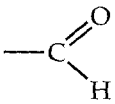
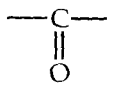
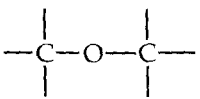
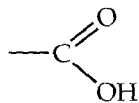
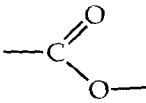
Szereg elektrochemiczny metali

Elektroda (półogniwo)	Reakcja elektrodowa postać utleniona postać zredukowana	Potencjał standardowy E° [V]
Li / Li ⁺	$\text{Li}^+ + \text{e}^- \rightleftharpoons \text{Li}$	-3,01
K / K ⁺	$\text{K}^+ + \text{e}^- \rightleftharpoons \text{K}$	-2,92
Ba / Ba ²⁺	$\text{Ba}^{2+} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Ba}$	-2,92
Sr / Sr ²⁺	$\text{Sr}^{2+} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Sr}$	-2,89
Ca / Ca ²⁺	$\text{Ca}^{2+} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Ca}$	-2,84
Na / Na ⁺	$\text{Na}^+ + \text{e}^- \rightleftharpoons \text{Na}$	-2,71
Mg / Mg ²⁺	$\text{Mg}^{2+} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Mg}$	-2,34
Be / Be ²⁺	$\text{Be}^{2+} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Be}$	-1,70
Al / Al ³⁺	$\text{Al}^{3+} + 3\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Al}$	-1,66
Mn / Mn ²⁺	$\text{Mn}^{2+} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Mn}$	-1,05
Zn / Zn ²⁺	$\text{Zn}^{2+} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Zn}$	-0,76
Cr / Cr ³⁺	$\text{Cr}^{3+} + 3\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Cr}$	-0,71
Fe / Fe ²⁺	$\text{Fe}^{2+} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Fe}$	-0,44
Cd / Cd ²⁺	$\text{Cd}^{2+} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Cd}$	-0,40
Co / Co ²⁺	$\text{Co}^{2+} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Co}$	-0,28
Ni / Ni ²⁺	$\text{Ni}^{2+} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Ni}$	-0,22
Sn / Sn ²⁺	$\text{Sn}^{2+} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Sn}$	-0,136

Elektroda (półogniwo)	Reakcja elektrodowa postać utleniona postać zredukowana	Potencjał standardowy E° [V]
Pb / Pb ²⁺	$\text{Pb}^{2+} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Pb}$	- 0,13
Fe / Fe ³⁺	$\text{Fe}^{3+} + 3\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Fe}$	- 0,04
H ₂ / H ⁺	$2\text{H}^+ + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{H}_2$	0,000
Bi / Bi ³⁺	$\text{Bi}^{3+} + 3\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Bi}$	+ 0,20
Sb / Sb ³⁺	$\text{Sb}^{3+} + 3\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Sb}$	+ 0,20
As / As ³⁺	$\text{As}^{3+} + 3\text{e}^- \rightleftharpoons \text{As}$	+ 0,30
Cu / Cu ²⁺	$\text{Cu}^{2+} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Cu}$	+ 0,34
Ag / Ag ²⁺	$\text{Ag}^{2+} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Ag}$	+ 0,80
Hg / Hg ²⁺	$\text{Hg}^{2+} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Hg}$	+ 0,87
Pt / Pt ²⁺	$\text{Pt}^{2+} + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Pt}$	+ 1,20
Au / Au ³⁺	$\text{Au}^{3+} + 3\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Au}$	+ 1,42

Grupy związków organicznych

Typ	Grupa funkcyjna	Ogólny wzór	Nazwy systematyczne	Przykład
węglowodory nasycone łańcuchowe (alkany)		C_nH_{2n+2}	alk -an	$CH_3-CH_2-CH_2-CH_3$ butan
węglowodory nasycone (cykliczne)		C_nH_{2n}	cyklo -alkan	 cykloheksan
węglowodory nienasycone łańcuchowe (alkeny)		C_nH_{2n}	alk -en	$CH_2=CH-CH_3$ propen-1
węglowodory nienasycone łańcuchowe (alkiny)	$-C\equiv C-$	C_nH_{2n-2}	alk -in	$CH_3-C\equiv C-CH_3$ butin-2
węglowodory aromatyczne			alkilo -benzen	 metylobenzen (toluen)
halogenoalkany	$-X$	$R-X$	halogeno -alkan	CH_3-CH_2Cl chloroetan
alkohole	$-OH$	$R-OH$	alkan -ol	$CH_3-\underset{\substack{ \\ OH}}{CH}-CH_3$ propanol-2

Typ	Grupa funkcyjna	Ogólny wzór	Nazwy systematyczne	Przykład
aldehydy		$R-C \begin{matrix} \text{O} \\ \parallel \\ \text{H} \end{matrix}$	alkan - al	$CH_3-CH_2-CH_2-C \begin{matrix} \text{O} \\ \parallel \\ \text{H} \end{matrix}$ butanal-1
ketony		$R-C \begin{matrix} \text{O} \\ \parallel \\ \text{R}' \end{matrix}$	alkan - on	$CH_3-C \begin{matrix} \text{O} \\ \parallel \\ \text{C}_2H_5 \end{matrix}$ butanon-2
etry		$R-O-R'$	alkoksy - alkan	$C_2H_5-O-C_2H_5$ etoksy-etan
kwasy karboksylowe		$R-C \begin{matrix} \text{O} \\ \parallel \\ \text{OH} \end{matrix}$	kwasy alkan- karboksylowy kwasy alkan- owy	$CH_3-C \begin{matrix} \text{O} \\ \parallel \\ \text{OH} \end{matrix}$ kwasy metanokarboksylowy kwasy etanowy
estry		$R-C \begin{matrix} \text{O} \\ \parallel \\ \text{O}-R' \end{matrix}$	alkanol - an alkilu	$CH_3-C \begin{matrix} \text{O} \\ \parallel \\ \text{O}-CH_3 \end{matrix}$ etanolan metylu (octan metylu)

Niekóre związki organiczne

Nazwa	Wzór	Temperatura topnienia °C	Temperatura wrzenia °C
Węglowodory alifatyczne			
Metan	CH ₄	-183	-162
Etan	CH ₃ CH ₃	-183	-89
Propan	CH ₃ CH ₂ CH ₃	-188	-42
<i>n</i> -Butan	CH ₃ (CH ₂) ₂ CH ₃	-138	-1
<i>n</i> -Pentan	CH ₃ (CH ₂) ₃ CH ₃	-130	36
<i>n</i> -Heksan	CH ₃ (CH ₂) ₄ CH ₃	-95	69
<i>n</i> -Heptan	CH ₃ (CH ₂) ₅ CH ₃	-91	98
<i>n</i> -Oktan	CH ₃ (CH ₂) ₆ CH ₃	-57	126
<i>n</i> -Nonan	CH ₃ (CH ₂) ₇ CH ₃	-54	151
<i>n</i> -Dekan	CH ₃ (CH ₂) ₈ CH ₃	-30	174
Izobutan	(CH ₃) ₂ CHCH ₃	-159	-12
Izopentan	(CH ₃) ₂ CHCH ₂ CH ₃	-160	28
Izoheksan	(CH ₃) ₂ CH(CH ₂) ₂ CH ₃	-154	60
Metylopropan	CH ₃ CH(CH ₃)CH ₃	-160	-12
2-Metylobutan	CH ₃ CH(CH ₃)CH ₂ CH ₃	-160	28
2,2-Dimetylpropan	CH ₃ C(CH ₃) ₂ CH ₃	-17	10
Etylen (Eten)	CH ₂ =CH ₂	-169	-102
Propen	CH ₂ =CHCH ₃	-185	-48
1-Buten	CH ₂ =CHCH ₂ CH ₃	-190	-6,5
1-Penten	CH ₂ =CH(CH ₂) ₂ CH ₃	-165	30
1-Heksen	CH ₂ =CH(CH ₂) ₃ CH ₃	-138	63,5
1-Hepten	CH ₂ =CH(CH ₂) ₄ CH ₃	-119	93
1-Okten	CH ₂ =CH(CH ₂) ₅ CH ₃	-104	122,5
1-Decen	CH ₂ =CH(CH ₂) ₇ CH ₃	-87	171
<i>cis</i> -2-Buten	<i>cis</i> -CH ₃ CH=CHCH ₃	-139	4
<i>trans</i> -2-Buten	<i>trans</i> -CH ₃ CH=CHCH ₃	-106	1
Acetylen (Etin)	HC≡CH	-82	-83,8
Propyn	HC≡CCH ₃	-101,5	-23
1-Butyn	HC≡CCH ₂ CH ₃	-122	9
1-Pentyn	HC≡C(CH ₂) ₂ CH ₃	-98	40
1-Heksyn	HC≡C(CH ₂) ₃ CH ₃	-124	72
2-Butyn	CH ₃ C≡CCH ₃	-24	27

Nazwa	Wzór	Temperatura topnienia °C	Temperatura wrzenia °C
2-Pentyn	$\text{CH}_3\text{C}\equiv\text{CCH}_2\text{CH}_3$	- 101	55
2-Heksyn	$\text{CH}_3\text{C}\equiv\text{C}(\text{CH}_2)_2\text{CH}_3$	- 92	84
3-Heksyn	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{C}\equiv\text{CCH}_2\text{CH}_3$	- 51	81
Cyklopropan	C_3H_6	- 127	- 33
Cyklobutan	C_4H_8	- 80	13
Cyklopentan	C_5H_{10}	- 94	49
Cykloheksan	C_6H_{12}	7	81
Węglowodory aromatyczne			
Benzen	C_6H_6	6	80
Toluen	$\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_3$	- 95	111
<i>o</i> -Ksylen	$1,2\text{-C}_6\text{H}_4(\text{CH}_3)_2$	- 25	144
<i>m</i> -Ksylen	$1,3\text{-C}_6\text{H}_4(\text{CH}_3)_2$	- 48	139
<i>p</i> -Ksylen	$1,4\text{-C}_6\text{H}_4(\text{CH}_3)_2$	13	138
Etylobenzen	$\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_2\text{CH}_3$	- 95	136
Bifenyl	$\text{C}_6\text{H}_5\text{C}_6\text{H}_5$	70	255
Styren	$\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}=\text{CH}_2$	- 31	145
Naftalen	C_{10}H_8	80	218
Antracen	$\text{C}_{14}\text{H}_{10}$	216	354
Fenantren	$\text{C}_{14}\text{H}_{10}$	101	340
Związki heterocykliczne			
Furan	$\text{C}_4\text{H}_4\text{O}$	- 86	31
Tiofen	$\text{C}_4\text{H}_4\text{S}$	- 38	84
Chinolina	$\text{C}_9\text{H}_7\text{N}$	- 15	238
Pirol	$\text{C}_4\text{H}_5\text{N}$	-	130
Chlorowcopochodne węglowodorów			
Chlorek metylu	CH_3Cl	- 98	- 24
Bromek metylu	CH_3Br	- 94	4
Jodek metylu	CH_3J	- 66	42
Chlorek etylu	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{Cl}$	- 136	12
1-Chloropropan	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{Cl}$	- 123	47

Nazwa	Wzór	Temperatura topnienia °C	Temperatura wrzenia °C
2-Chloropropan	$\text{CH}_3\text{CHClCH}_3$	- 117	36
1-Bromobutan	$\text{CH}_3(\text{CH}_2)_2\text{CH}_2\text{Br}$	- 112	101
2-Bromobutan	$\text{CH}_3\text{C}_2\text{H}_2\text{CHBrCH}_3$	- 112	91
2-Brom-2-metylopropan	$\text{CH}_3\text{CBr}(\text{CH}_3)\text{CH}_3$	- 16	73
Dichlorometan, chlorek metylenu	CH_2Cl_2	- 95	40
Trichlorometan (Chloroform)	CHCl_3	- 64	62
Tetrachlorometan	CCl_4	- 23	77
1,1,1-Trichloroetan	CCl_3CH_3	- 30	74
Tetrachloroeten	CCl_2CCl_2	- 19	121
1,4-Dibromobenzen	$\text{C}_6\text{H}_4\text{Br}_2$	87	220
Chloroetylen	CH_2CHCl	- 160	- 14
Bromoetylen	CH_2CHBr	- 138	16
Chlorobenzen	$\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}$	- 45	132
Fluorobenzen	$\text{C}_6\text{H}_5\text{F}$	- 45	85
Bromobenzen	$\text{C}_6\text{H}_5\text{Br}$	- 31	156
Jodobenzen	$\text{C}_6\text{H}_5\text{J}$	- 31	189
(Chlorometylo)-benzen	$\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_2\text{Cl}$	- 39	179
Chlorki kwasowe, bezwodniki i amidy			
Chlorek acetylu	CH_3COCl	- 112	51
Chlorek benzoilu	$\text{C}_6\text{H}_5\text{COCl}$	- 1	197
Bezwodnik octowy	$(\text{CH}_3\text{CO})_2\text{O}$	- 73	140
Bezwodnik maleinowy	$(\text{CHCO})_2\text{O}$	54	196
Formamid	HCONH_2	3	200 rozkł.
Acetamid	CH_3CONH_2	82	221
Bezwodnik kwasu etanowego	$(\text{CH}_3\text{CO})_2\text{O}$	73	136
Etanonitryl (acetonitryl)	$\text{CH}_3\text{C}\equiv\text{N}$	46	82
Mocznik (karbamid)	$\text{CO}(\text{NH}_2)_2$	132	160 rozkł.
Alkohole i Fenole			
Metanol	CH_3OH	- 98	65
Etanol	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$	- 114	78
1-Propanol	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$	- 126	97
2-Propanol	$\text{CH}_3\text{CHOHCH}_3$	- 89	82

Nazwa	Wzór	Temperatura topnienia °C	Temperatura wrzenia °C
1-Butanol	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$	- 89	118
2-Butanol	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CHOHCH}_3$	- 96	100
2-Metyl-1-propanol	$\text{CH}_3\text{COH}(\text{CH}_3)\text{CH}_3$	- 108	108
1-Heksanol	$\text{CH}_3(\text{CH}_2)_4\text{CH}_2\text{OH}$	- 45	157
Cyklopentanol	$\text{C}_5\text{H}_9\text{OH}$	- 19	141
Cykloheksanol	$\text{C}_6\text{H}_{11}\text{OH}$	25	161
1,2-Etandiol	$\text{CH}_2\text{OHCH}_2\text{OH}$	- 16	198
1,2,3-Propantriol	$\text{CH}_2\text{OHCHOHCH}_2\text{OH}$	18	291
Alkohol benzylowy	$\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_2\text{OH}$	- 15	205
Glikol etylenowy	$\text{HOCH}_2\text{CH}_2\text{OH}$	- 16	197
Glikol propylenowy	$\text{CH}_3\text{CH}(\text{OH})\text{CH}_2\text{OH}$		187
Gliceryna (glicerol)	$\text{HOCH}_2\text{CH}(\text{OH})\text{CH}_2\text{OH}$		215
Hydroksybenzol (Fenol)	$\text{C}_6\text{H}_5\text{OH}$	41	182
<i>o</i> -Krezol	$\text{CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{OH}$	31	191
<i>m</i> -Krezol	$\text{CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{OH}$	11	201
<i>p</i> -Krezol	$\text{CH}_3\text{C}_6\text{H}_4\text{OH}$	35	202
Pirotechcyna	$\text{C}_6\text{H}_4(\text{OH})_2$	105	245
Rezorcyna	$\text{C}_6\text{H}_4(\text{OH})_3$	110	277
Hydrochinon	$\text{C}_6\text{H}_4(\text{OH})_2$	172	285
1-Naftol	$\text{C}_{10}\text{H}_7\text{OH}$	96	280
2-Naftol	$\text{C}_{10}\text{H}_7\text{OH}$	122	286
Etery			
Metoksymetan (eter dimetylowy)	CH_3OCH_3	- 139	- 23
Etoksyetan (eter dietylowy)	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OCH}_2\text{CH}_3$	- 116	35
Metoksybenzen (Anizol)	$\text{C}_6\text{H}_5\text{OCH}_3$	- 38	155
Fenoksybenzen (eter difenylowy)	$\text{C}_6\text{H}_5\text{OC}_6\text{H}_5$	27	258
Tlenek etylenu	$\text{C}_2\text{H}_4\text{O}$	- 111	14
Tetrowodorofuran	$\text{C}_4\text{H}_8\text{O}$	- 65	67
1,4-Dioksan	$\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_2$	11	101
Fenetol (eter etylowo-fenylowy)	$\text{C}_6\text{H}_5\text{OC}_2\text{H}_5$	- 33	172

Nazwa	Wzór	Temperatura topnienia °C	Temperatura wrzenia °C
Aminy i nitro pochodne			
Metyloamina	CH_3NH_2	- 94	- 6
Dimetyloamina	$(\text{CH}_3)_2\text{NH}$	- 92	7
Trimetyloamina	$(\text{CH}_3)_3\text{N}$	- 117	3
1,6-diaminoheksan	$\text{NH}_2(\text{CH}_2)_6\text{NH}_2$	41	205
Pirydyna	$\text{C}_5\text{H}_5\text{N}$	- 42	115
Aminobenzen (Anilina)	$\text{C}_6\text{H}_5\text{NH}_2$	- 14	209
<i>o</i> -Toluidyna	$\text{C}_7\text{H}_9\text{N}$	- 28	200
<i>p</i> -Fenylendiamina	$\text{NH}_2\text{-C}_6\text{H}_4\text{-NH}_2$	142	267
Benzydyna	$\text{NH}_2\text{-C}_6\text{H}_4\text{-C}_6\text{H}_4\text{-NH}_2$	127	401
Nitrometan	CH_3NO_2	-29	101
Nitrobenzen	$\text{C}_6\text{H}_5\text{NO}_2$	6	211
Aldehydy i Ketony			
Aldehyd mrówkowy (Metanal)	HCHO	- 117	- 19
Aldehyd octowy (Etanal)	CH_3CHO	- 123	20
Aldehyd propianowy (Propanal)	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CHO}$	- 81	49
Aldehyd masłowy (Butanal)	$\text{CH}_3(\text{CH}_2)_2\text{CHO}$	- 99	76
Aldehyd walerianowy (Pentanal)	$\text{CH}_3(\text{CH}_2)_3\text{CHO}$	- 91	103
Aldehyd heksanowy	$\text{CH}_3(\text{CH}_2)_4\text{CHO}$	-	131
Aldehyd benzaldehyd	$\text{C}_6\text{H}_5\text{CHO}$	- 26	178
Aldehyd salicylowy	$\text{OH-C}_6\text{H}_4\text{-CHO}$	- 7	197
Aldehyd propanowy (Aceton)	CH_3COCH_3	- 95	56
Butanon	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{COCH}_3$	- 86	80
Cykloheksanon	$\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}$	- 16	156
Metylfenylketon	$\text{CH}_3\text{COC}_6\text{H}_5$	- 23	139
Kwasy karboksylowe			
Kwas metanowy (mrówkowy)	HCOOH	8	10
Kwas etanowy (octowy)	CH_3COOH	17	118
Kwas propionowy	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{COOH}$	- 21	141
Kwas butanowy (masłowy)	$\text{CH}_3(\text{CH}_2)_2\text{COOH}$	- 5	163
Kwas walerianowy	$\text{CH}_3(\text{CH}_2)_3\text{COOH}$	- 34	187

Nazwa	Wzór	Temperatura topnienia °C	Temperatura wrzenia °C
Kwas heksanowy	$\text{CH}_3(\text{CH}_2)_4\text{COOH}$	-3	205
Kwas oktanowy	$\text{CH}_3(\text{CH}_2)_6\text{COOH}$	16	239
Kwas dekanowy	$\text{CH}_3(\text{CH}_2)_8\text{COOH}$	31	269
Kwas palmitynowy	$\text{CH}_3(\text{CH}_2)_{14}\text{COOH}$	63	269 ¹⁰⁰
Kwas stearynowy	$\text{CH}_3(\text{CH}_2)_{16}\text{COOH}$	70	287 ¹⁰⁰
Kwas oleinowy (cis)	$\text{C}_8\text{H}_{17}\text{CH}=\text{CHC}_7\text{H}_{14}\text{COOH}$	16	223 ¹⁰
Kwas linolowy (cis, cis)	$\text{C}_4\text{H}_9(\text{C}_3\text{H}_4)_2\text{C}_7\text{H}_{14}\text{COOH}$	-5	230 ¹⁶
Kwas linolenowy (cis, cis, cis)	$\text{CH}_3(\text{C}_3\text{H}_4)_3\text{C}_7\text{H}_{14}\text{COOH}$	-11	232 ¹⁷
Kwas dietanowy (szczawiowy)	HOCCOOH	189	s 157
Kwas cis-butenowy (maleinowy)	$\text{HOOCCH}=\text{CHCOOH}$	140	rozkład 135
Kwas trans-butenowy (fumarowy)	$\text{HOOCCH}=\text{CHCOOH}$	300	290
Kwas 1,6-diheksanowy (adypinowy)	$\text{HOOC}(\text{CH}_2)_4\text{COOH}$	153	265
Kwas benzoesowy	$\text{C}_6\text{H}_5\text{COOH}$	122	249
Kwas 1,4-dibenzoilowy	$\text{HOOC}_6\text{H}_4\text{COOH}$	s 300	(subl)
Kwas 1,2-dibenzoilowy (ftalowy)	$\text{HOOC}_6\text{H}_4\text{COOH}$	234	rozkład
Kwas salicylowy	$\text{C}_6\text{H}_4(\text{COOH})\text{OH}$	159	
Estry			
Metanian metylu (mrówczan metylu)	HCOOCH_3	-99	32
Metanian etylu (mrówczan etylu)	$\text{HCOOCH}_2\text{CH}_3$	-81	55
Etanian metylu (octan metylu)	$\text{CH}_3\text{COOCH}_3$	-98	57
Etanian etylu (octan etylu)	$\text{CH}_3\text{COOCH}_2\text{CH}_3$	-84	77
Etanian propylu (octan propylu)	$\text{CH}_3\text{COO}(\text{CH}_2)_2\text{CH}_3$	-95	101
Benzoesan metylu	$\text{C}_6\text{H}_5\text{COOCH}_3$	-12	200
Benzoesan etylu	$\text{C}_6\text{H}_5\text{COOC}_2\text{H}_5$	-35	213

Nazwa substancji	Temperatura zamarzania w °C								
	-5	-10	-15	-20	-25	-30	-40	-50	-60
	Zawartość substancji w gramach na 100 g wody								
Chlorek sodu	8,44	16,1	22,9	-	-	-	-	-	-
Chlorek magnezu	7,66	13,4	17,7	21,1	-	25,9	-	-	-
Chlorek wapnia	9,61	16,6	21,9	26,3	29,9	33,3	38,8	43,8	-
Mleczan sodu	10,5	19,0	27,5	34,0	42,0	49,5	64,0	80,0	100,0
Alkohol metylowy	9,3	17,0	24,0	31,0	39,0	46,0	53,0	85,0	-
Alkohol etylowy	11,1	23,0	34,0	46,0	57,5	69,5	104,0	-	-
Gliceryna	20,5	42,0	56,0	68,0	80,0	90,5	113,0	138,0	-
Glikol etylenowy*)	15	23	29	34	39	44	53	-	-

*) Zawartość podano w % obj.

Podstawowe typy reakcji chemicznych

Podstawowe reakcje związków nieorganicznych	Schemat (przykład)				
Synteza $A + B = AB$	$H_2 + Cl_2 \rightarrow 2HCl$ $S + O_2 \rightarrow SO_2$				
Analiza $AB = A + B$	$2H_2O \xrightarrow[\text{elektr.}]{\text{prąd}} O_2 + 2H_2$ $2HgO \xrightarrow{\text{temp.}} 2Hg + O_2$				
Wymiana pojedyncza $AB + C = AC + B$	$CuSO_4 + Fe \rightarrow FeSO_4 + Cu$ $2HCl + Zn \rightarrow ZnCl_2 + H_2\uparrow$				
Wymiana podwójna $AB + CD = AC + BD$	$AgNO_3 + NaCl \rightarrow AgCl\downarrow + NaNO_3$				
Reakcje utlenienia i redukcji	$\dots MnO_4^- + \dots SO_3^{2-} + \dots H_3O^+ \rightarrow \dots Mn^{2+} + \dots SO_4^{2-} + \dots H_2O$ <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"> utleniacz $Mn(VII) + 5e^- \rightarrow Mn(II)$ </td> <td style="padding: 5px;"> $5e^- \times 2 = 10e^-$ reakcja redukcji </td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"> reduktor $S(IV) - 2e^- \rightarrow S(VI)$ </td> <td style="padding: 5px;"> $2e^- \times 5 = 10e^-$ reakcja utleniania </td> </tr> </table>	utleniacz $Mn(VII) + 5e^- \rightarrow Mn(II)$	$5e^- \times 2 = 10e^-$ reakcja redukcji	reduktor $S(IV) - 2e^- \rightarrow S(VI)$	$2e^- \times 5 = 10e^-$ reakcja utleniania
utleniacz $Mn(VII) + 5e^- \rightarrow Mn(II)$	$5e^- \times 2 = 10e^-$ reakcja redukcji				
reduktor $S(IV) - 2e^- \rightarrow S(VI)$	$2e^- \times 5 = 10e^-$ reakcja utleniania				
Reakcja dysocjacji elektrolitycznej (wg Arrheniusa) $AB = A^+ + B^-$	$H_2SO_4 \rightleftharpoons H^+ + HSO_4^-$ $NaOH \rightleftharpoons Na^+ + OH^-$ $K_2SO_3 \rightleftharpoons 2K^+ + SO_3^{2-}$				

Podstawowe reakcje związków nieorganicznych	Schemat (przykład)
Reakcja hydrolizy soli $A^- + H_2O \rightleftharpoons HA + OH^-$ $HB^+ + H_2O \rightleftharpoons B + H_3O^+$	$CH_3COO^- + H_2O \rightleftharpoons CH_3COOH + OH^-$ hydroliza alkaliczna $NH_4^+ + H_2O \rightleftharpoons NH_3 + H_3O^+$ hydroliza kwaśna
Reakcja zobojętnienia	$NaOH + HCl \rightleftharpoons NaCl + H_2O$ $Na^+ + OH^- + H^+ + Cl^- \rightleftharpoons Na^+ + Cl^- + H_2O$ $OH^- + H^+ \rightleftharpoons H_2O$
Tworzenie się związków trudno rozpuszczalnych w wodzie $mA^{n+} + nB^{m-} \rightleftharpoons A_m B_n \downarrow$	$2Bi^{3+} + 3S^{2-} \rightleftharpoons Bi_2S_3 \downarrow$ $Ag^+ + Cl^- \rightleftharpoons AgCl \downarrow$ $Cd^{2+} + CO_3^{2-} \rightleftharpoons CdCO_3 \downarrow$
Reakcja elektrolizy	katoda (-): $Ag^+ + e^- \rightarrow Ag$ reakcja redukcji anoda (+): $Cl^- \rightarrow \frac{1}{2}Cl_2 + e^-$ reakcja utlenienia

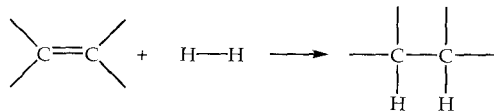
Podstawowe reakcje związków organicznych

Schemat (przykład)

1. Alkany (C_nH_{2n+2})

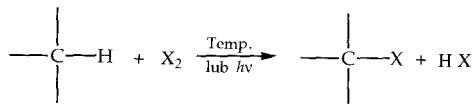
otrzymywanie

Hydrogenacja (uwodornienie) alkenów

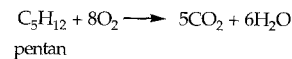
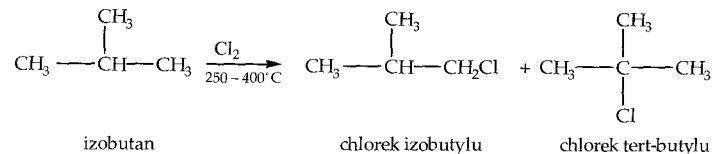
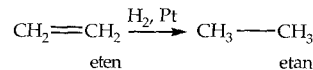
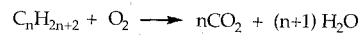


reakcje

Halogenowanie (reakcja podstawienia - substytucji)

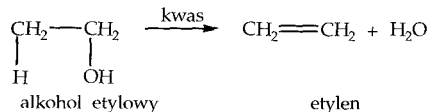
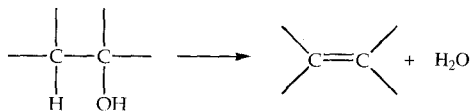


Spalanie

2. Alkeny (C_nH_{2n})

otrzymywanie

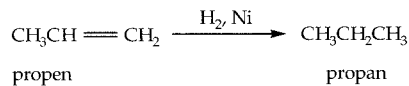
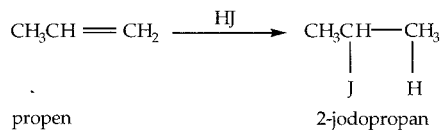
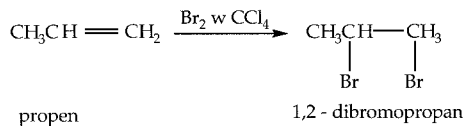
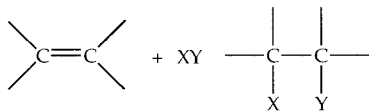
Dehydratacja (odwodnienie) alkoholi



Podstawowe reakcje związków organicznych

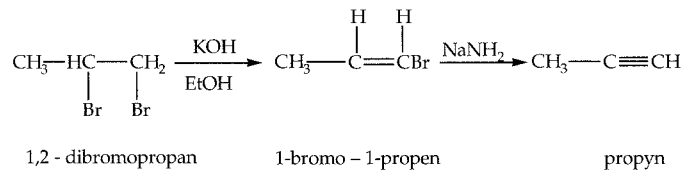
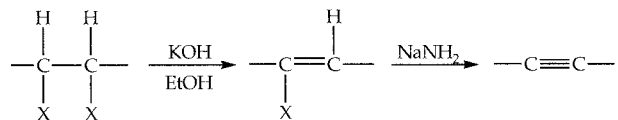
Schemat (przykład)

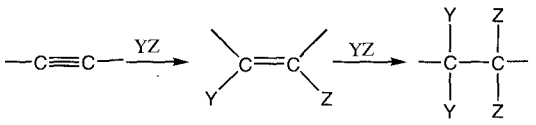
reakcje
Reakcja addycji (przyłączenia)

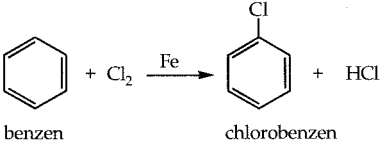
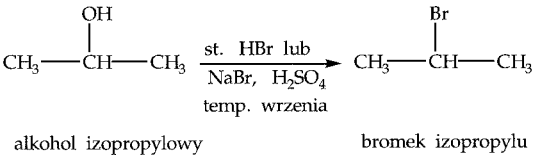
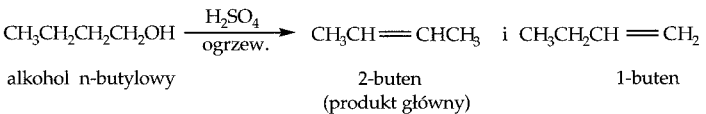
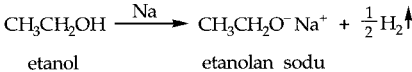


3. Alkiny ($\text{C}_n\text{H}_{2n-2}$)

otrzymywanie
Dehydrohalogenacja



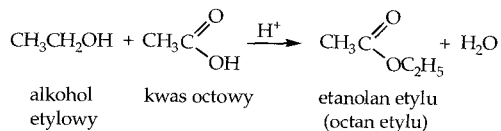
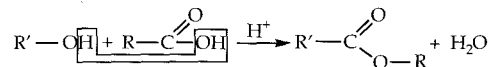
Podstawowe reakcje związków organicznych	Schemat (przykład)
<p>reakcja Addycja (przyłączenie)</p> 	<p>Schemat (przykład)</p> $\text{CH}_3\text{-C}\equiv\text{C-CH}_3 + 2\text{H}_2 \xrightarrow{\text{Ni}} \text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{CH}_3$ <p style="text-align: center;">2-butyn n-butan</p> $\text{CH}_3\text{-C}\equiv\text{CH} \xrightarrow{\text{Br}_2} \text{CH}_3\text{-C}(\text{Br})=\text{CH}(\text{Br}) \xrightarrow{\text{Br}_2} \text{CH}_3\text{-C}(\text{Br})_2\text{-C}(\text{Br})_2\text{-H}$ <p style="text-align: center;">1-propyn 1,2 - dibromopropen 1, 1, 2, 2 - tetrabromopropan</p>
4. Halogenopochodne węglowodorów	
<p>reakcja substytucji</p> $\text{R-X} \xrightarrow[\text{H}_2\text{O}]{\text{KOH}} \text{R-OH}$	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{-Br} \xrightarrow[\text{H}_2\text{O}]{\text{KOH}} \text{CH}_3\text{CH}_2\text{-OH}$ <p style="text-align: center;">bromek etylu etanol</p>
5. Węglowodory aromatyczne	
<p>reakcje Nitrowanie</p> $\text{Ar} \begin{array}{ c } \hline \text{H} + \text{HO} \\ \hline \end{array} \text{NO}_2 \xrightarrow{\text{H}_2\text{SO}_4} \text{ArNO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	$\text{C}_6\text{H}_6 + \text{HONO}_2 \xrightarrow{\text{H}_2\text{SO}_4} \text{C}_6\text{H}_5\text{NO}_2 + \text{H}_2\text{O}$ <p style="text-align: center;">benzen nitrobenzen</p>

Podstawowe reakcje związków organicznych	Schemat (przykład)
<p>Halogenowanie</p> $\text{ArH} + \text{Cl}_2 \xrightarrow{\text{Fe}} \text{ArCl} + \text{HCl}$	
6. Alkohole	
<p>reakcje Reakcja z halogenowodorami</p> $\text{R-OH} + \text{HX} \longrightarrow \text{RX} + \text{H}_2\text{O}$ <p>Reakcja dehydratacji (reakcja eliminacji)</p> $\begin{array}{c} \text{H} \quad \text{OH} \\ \quad \\ -\text{C}-\text{C}- \\ \quad \end{array} \xrightarrow[\text{temp.}]{\text{kwas lub Al}_2\text{O}_3} \begin{array}{c} \quad \\ \text{C}=\text{C} \\ \quad \end{array} + \text{H}_2\text{O}$ <p>Reakcja alkoholi z metalami aktywnymi</p> $\text{RO-H} + \text{M} \longrightarrow \text{RO}^- \text{M}^+ + \frac{1}{2} \text{H}_2 \uparrow$	  

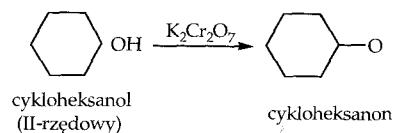
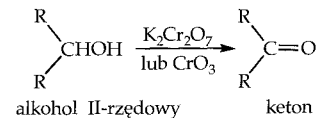
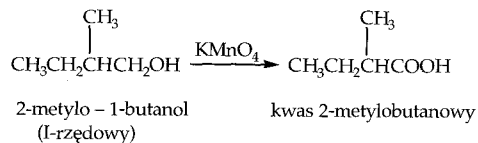
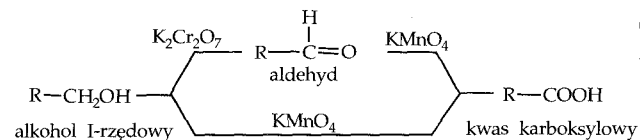
Podstawowe reakcje związków organicznych

Schemat (przykład)

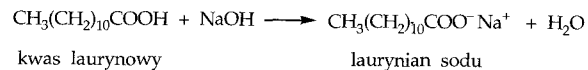
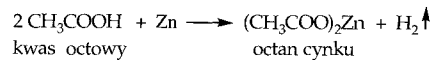
Reakcja tworzenia estrów



Utlenianie



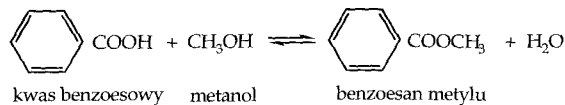
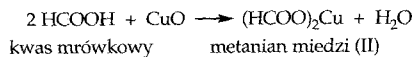
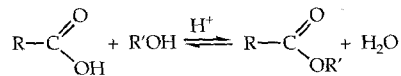
7. Kwasy karboksylowe

reakcje
Tworzenie soli

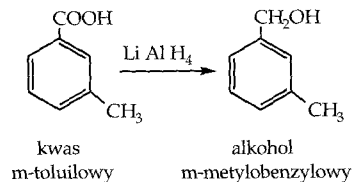
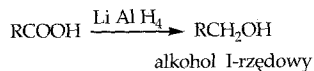
Podstawowe reakcje związków organicznych

Schemat (przykład)

Estryfikacja

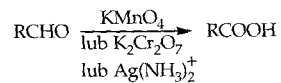


Redukcja

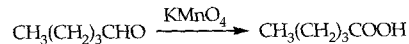
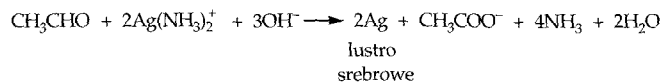


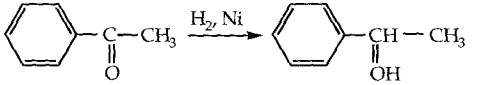
8. Aldehydy i ketony

reakcje
Utlenianie



próbna Tollensa (reakcja charakterystyczna dla aldehydów)

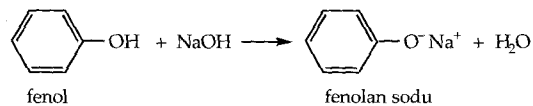
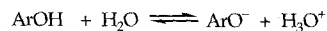


Podstawowe reakcje związków organicznych	Schemat (przykład)
<p>Redukcja do alkoholi</p> $\text{>C=O} \xrightarrow{\text{H}_2, \text{Ni}} \begin{array}{c} \\ \text{---C---OH} \\ \\ \text{H} \end{array}$	 <p>acetofenon $\xrightarrow{\text{H}_2, \text{Ni}}$ alkohol α-fenyloetylowy</p>

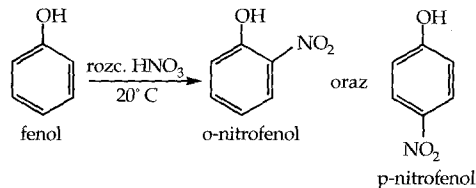
9. Fenole

reakcje

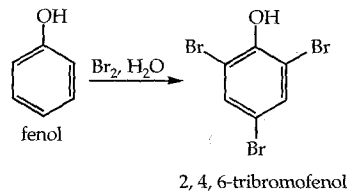
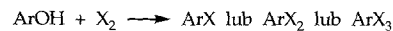
Kwasowość. Tworzenie soli



Nitrowanie

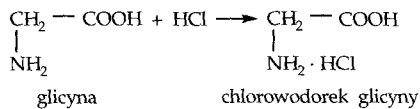
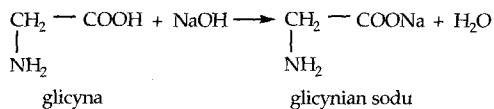
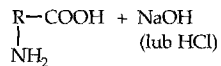


Halogenowanie

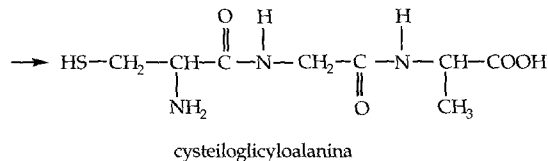
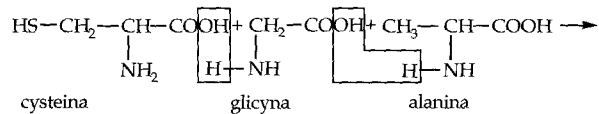
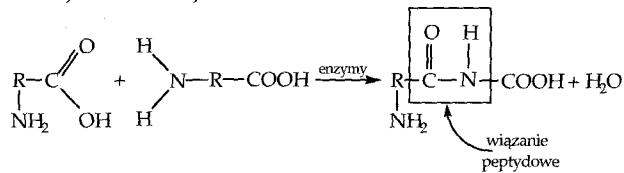


Aminokwasy

Określenie charakteru amfoterycznego aminokwasu



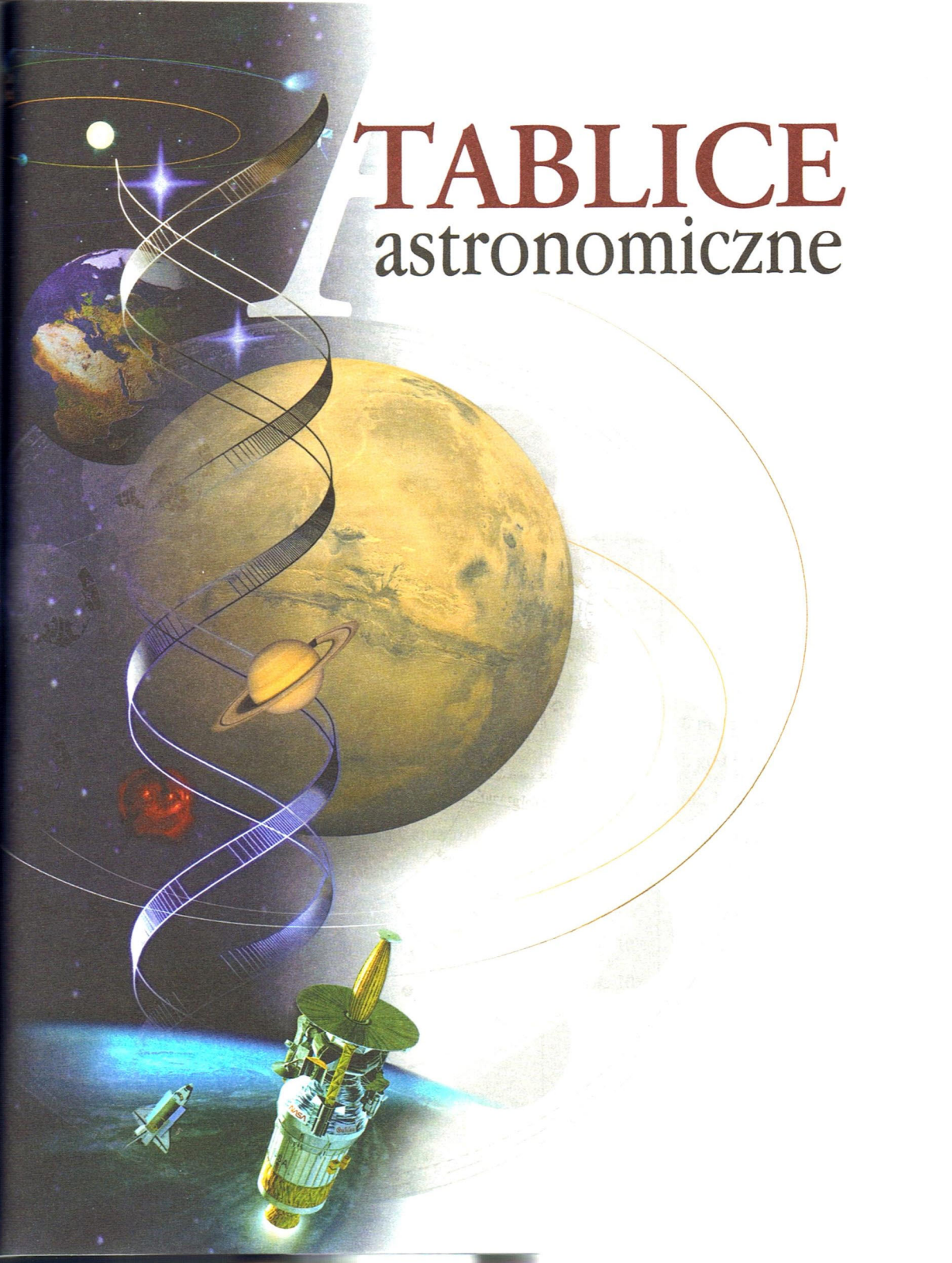
Reakcja kondensacji



Skład niektórych paliw gazowych

Skład % Nazwa gazu	H ₂	CO	CH ₄	CO ₂	N ₂
Ziemny	-	-	98,5	1	1
Koksowniczy	55	6	25	2	10
Miejski	41	13	23	3	18
Generatorowy	12	26-28	1	3-5	54-56
Wielkopieczowy	2	30	1	8	59

TABLICE astronomiczne



Astronomiczne jednostki odległości

Jednostka	Oznaczenie	Podstawa	Wartość
Jednostka astronomiczna	AU, j.a.	średnia odległość Ziemi od Słońca (wielka półoś orbity ziemskiej)	1 AU = $1,49597870 \cdot 10^{11}$ m
Rok świetlny	l.y., r.św., l.św.	odległość przebywana w próżni przez światło w ciągu 1 roku	1 l.y. = $9,4605 \cdot 10^{15}$ m
Parsek	pc	odległość, z której 1 j.a. jest widoczna pod kątem 1''	1 pc = $3,0857 \cdot 10^{16}$ m

Zależności: 1 l.y. = 63240 AU; 1 pc = 3,2616 l.y. = 206265 AU

Zakres rozmiarów i odległości astronomicznych

Odległość lub rozmiar	w km	w jednostkach świetlnych
Średnica Ziemi	$12,8 \cdot 10^3$	–
Odległość do Księżyca, średnia	$384,4 \cdot 10^3$	1,3 sekundy św.
Średnica Słońca (przeciętnej gwiazdy)	$1,392 \cdot 10^6$	–
Odległość do Słońca, średnia	$149,6 \cdot 10^6$	8 minut 19 sekund św.
Odległość do najdalszej planety (Pluton), średnia	$5,912 \cdot 10^9$	5 godzin 29 minut św.
Odległość do granic Układu Słonecznego	ok. 10^{12}	ok. 1 roku św.
Odległość do najbliższej gwiazdy (Proxima Centauri)	$40,5 \cdot 10^{12}$	4,28 lat św.
Odległość do najdalszych gwiazd widocznych gołym okiem	ok. $2 \cdot 10^{15}$	ok. 2 tys. lat św.
Odległość do krańców Galaktyki	ok. $3 \cdot 10^{16}$	ok. 30 tys. lat św.
Odległość do najbliższej galaktyki (Sagittarius)	$8 \cdot 10^{16}$	8 tys. lat św.
Średnica Galaktyki	ok. 10^{17}	ok. 100 tys. lat św.
Odległość do najdalszego obiektu widocznego gołym okiem (galaktyka M 31 w Andromedzie)	$2,2 \cdot 10^{19}$	2,4 mln lat św.
Średnica Lokalnej Grupy Galaktyk	ok. $7 \cdot 10^{19}$	ok. 7 mln lat św.
Odległość do najbliższych kwazarów	ok. $1,5 \cdot 10^{22}$	ok. 1,5 mld lat św.
Odległość do najdalszych rejonów Wszechświata dostępnych dla obserwacji	ok. $1,5 \cdot 10^{23}$	ok. 15 mld lat św.

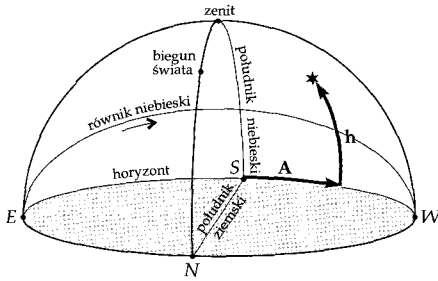
Astronomiczna skala jasności

Miara	Zależności
<p>Obserwowana (widoma) wielkość gwiazdowa, m (jasność obserwowana); mierzona w magnitudo (mag).</p> <p>Absolutna wielkość gwiazdowa, M (jasność absolutna); obserwowana wielkość gwiazdowa, jaką miałby obiekt oglądany z odległości 10 parseków; mierzona w magnitudo (mag).</p>	<p>$m = -2,5 \log E - 14,05$ gdzie: E – natężenie światła w luksach.</p> <p>Różnica wielkości gwiazdowych obiektów:</p> $m_1 - m_2 = 2,5 \log \frac{E_2}{E_1}$ <p>Stosunek natężeń światła obiektów:</p> $\frac{E_2}{E_1} = 10^{0,4(m_1 - m_2)}$ <p>$M = m + 5 - 5 \log D$ lub $M = m + 5 + 5 \log \pi_0$ gdzie: m – obserwowana wielkość gwiazdowa obiektu; D – odległość obiektu w parsekach; π_0 – paralaksa heliocentryczna obiektu, w “.</p>

Zakres jasności obiektów astronomicznych

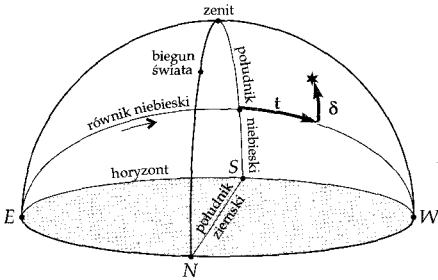
Obiekt	Jasność widoma, w mag
Słońce – najjaśniejszy obiekt naszego nieba	- 26,78
Księżyc, w pełni	- 12,8
Wenus – najjaśniejsza planeta, w maksimum blasku	- 4,7
Syriusz (α CMA) – najjaśniejsza gwiazda nocnego nieba	- 1,44
Najsłabsze gwiazdy dostrzegalne gołym okiem	+ 6
Najsłabsze gwiazdy widoczne przez lornetkę \varnothing 50 mm	+ 10
Najsłabsze gwiazdy widoczne przez teleskop o średnicy obiektywu 200 mm	+ 14
Najsłabsze gwiazdy widoczne przez teleskop o średnicy obiektywu 2500 mm	+ 19
Zasięg największych współczesnych teleskopów o średnicy obiektywu 10 m	+ 22
Zasięg teleskopu kosmicznego Hubble’a (HST)	+ 28

Podstawowe układy współrzędnych astronomicznych



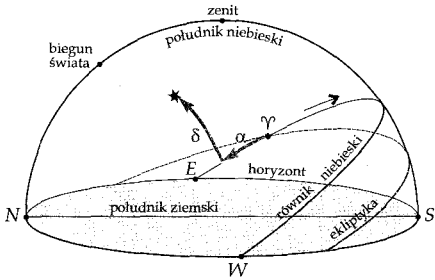
Współrzędne horyzontalne

A – azymut, mierzony w jednostkach kąta wzdłuż horyzontu, od punktu południa S w kierunku zachodnim, od 0° do 360° ;
 h – wysokość, mierzona w jednostkach kąta od płaszczyzny horyzontu, od 0° do $+90^\circ$ (zenit) i od 0° do -90° (nadir).
 Układ stosowany do opisu chwilowych położenia ciał niebieskich na sferze. Obydwie współrzędne ulegają stałej zmianie wraz z obrotem Ziemi.



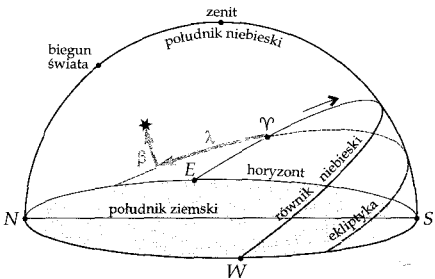
Współrzędne równikowe godzinne

t – kąt godzinny, mierzony w jednostkach czasu wzdłuż równika niebieskiego, od punktu przecięcia z południkiem niebieskim w kierunku zachodnim, od 0^h do 24^h ;
 δ – deklinacja, mierzona w jednostkach kąta od płaszczyzny równika niebieskiego, od 0° do $+90^\circ$ (północny biegun świata) i od 0° do -90° (południowy biegun świata).
 Układ stosowany m.in. do wyznaczania momentów wschodu, zachodu i górowania ciał niebieskich. Kąt godzinny ulega stałej zmianie wraz z obrotem Ziemi.



Współrzędne równikowe równonocne

α – rektascensja, mierzona w jednostkach czasu wzdłuż równika niebieskiego, od punktu Barana Υ w kierunku wschodnim, od 0^h do 24^h ;
 δ – deklinacja, mierzona w jednostkach kąta od płaszczyzny równika niebieskiego, od 0° do $+90^\circ$ (północny biegun świata) i od 0° do -90° (południowy biegun świata).
 Układ o szerokim zastosowaniu, do sporządzania efemeryd, katalogów i map nieba. Obydwie współrzędne stabilne dla obiektów spoza Układu Słonecznego – zmiany poniżej $1'/rok$.



Współrzędne ekliptyczne

λ – długość ekliptyczna, mierzona w jednostkach kąta wzdłuż ekliptyki, od punktu Barana Υ w kierunku wschodnim, od 0° do 360° ;
 β – szerokość ekliptyczna, mierzona w jednostkach kąta od płaszczyzny ekliptyki, od 0° do $+90^\circ$ (północny biegun ekliptyki) i od 0° do -90° (południowy biegun ekliptyki).
 Układ stosowany w zasadzie wyłącznie do określania położenia obiektów Układu Słonecznego i ich wzajemnych konfiguracji.

Ruch dzienny Słońca

Data	Wschody, górowania i zachody w centrum Polski				Poprawki na szerokość geograficzną w minutach			
	$\lambda = 19^{\circ}\text{E} / \varphi = 52^{\circ}\text{N}$				dla $\varphi = 50^{\circ}\text{N}$		dla $\varphi = 54^{\circ}\text{N}$	
	wschód	zachód	górowanie	wysokość górowania	wsch.	zach.	wsch.	zach.
1 stycznia	7.52	15.43	11.47	15,0°	-10	+10	+11	-11
16 stycznia	7.44	16.03	11.53	17,1°	-8	+8	+10	-10
1 lutego	7.24	16.31	11.57	20,9°	-7	+7	+7	-7
15 lutego	6.59	16.57	11.58	25,3°	-4	+4	+5	-5
1 marca	6.30	17.23	11.56	30,4°	-3	+3	+3	-3
16 marca	5.56	17.49	11.52	36,3°	0	0	0	0
1 kwietnia	6.19	19.17	12.48	42,6°	+2	-2	-2	+2
16 kwietnia	5.45	19.42	12.44	48,1°	+4	-4	-4	+4
1 maja	5.14	20.08	12.41	53,1°	+6	-6	-7	+7
16 maja	4.49	20.32	12.40	57,1°	+8	-8	-9	+9
1 czerwca	4.30	20.54	12.42	60,1°	+10	-10	-11	+11
16 czerwca	4.23	21.06	12.45	61,3°	+11	-11	-13	+13
1 lipca	4.28	21.07	12.48	61,1°	+11	-11	-12	+12
16 lipca	4.42	20.56	12.50	59,4°	+9	-9	-11	+11
1 sierpnia	5.05	20.34	12.50	56,0°	+8	-8	-9	+9
16 sierpnia	5.29	20.06	12.48	51,7°	+5	-5	-6	+6
1 września	5.55	19.31	12.44	46,3°	+3	-3	-4	+4
16 września	6.19	18.57	12.39	40,6°	+1	-1	-1	+1
1 października	6.44	18.22	12.33	34,8°	-1	+1	+1	-1
16 października	7.09	17.48	12.29	29,1°	-3	+3	+3	-3
1 listopada	6.38	16.16	11.27	23,6°	-5	+5	+6	-6
16 listopada	7.05	15.51	11.28	19,3°	-7	+7	+8	-8
1 grudnia	7.29	15.36	11.33	16,2°	-9	+9	+10	-10
16 grudnia	7.46	15.32	11.39	14,7°	-10	+10	+11	-11

Godziny wschodu i zachodu oraz górowania Słońca podano w obowiązującym w Polsce czasie urzędowym.

Kolorem zaznaczono okres obowiązywania czasu letniego.

Momenty wschodów i zachodów Słońca na krańcach Polski mogą różnić się nawet o ponad pół godziny od podanych. Dla dowolnego miejsca w Polsce wyznaczmy je uwzględniając podane poprawki na szerokość geograficzną oraz stałe poprawki (także dla górowań) na długość geograficzną: po - 4 minuty na każdy stopień długości geograficznej w kierunku wschodnim lub + 4 minuty w kierunku zachodnim od południka 19°E. Wysokość górowania maleje o 1 stopień z każdym stopniem szerokości geograficznej ku północy, zaś wzrasta w kierunku południowym.

Ruch roczny Słońca

Data	Rektascensja h m	Deklinacja ° '	Długość ekliptyczna ° '	Znak zodiaku	Odległość od Ziemi, w mln km
1 stycznia	18 47	- 22 59	280 50	Koziorożec, od 22.XII	147,099
16 stycznia	19 52	- 20 55	296 07	Koziorożec	147,169
1 lutego	20 59	- 17 05	312 23	Wodnik, od 20.I	147,412
15 lutego	21 55	- 12 39	326 34	Wodnik	147,776
1 marca	22 49	- 7 34	340 39	Ryby, od 19.II	148,233
16 marca	23 44	- 1 43	355 39	Ryby	148,824
1 kwietnia	0 42	4 33	11 31	Baran, od 20.III	149,493
16 kwietnia	1 37	10 08	26 15	Baran	150,138
1 maja	2 34	15 05	40 52	Byk, od 20.IV	150,732
16 maja	3 32	19 06	55 23	Byk	151,262
1 czerwca	4 37	22 03	70 45	Bliźnięta, od 21.V	151,696
16 czerwca	5 39	23 20	85 06	Bliźnięta	151,970
1 lipca	6 41	23 06	99 25	Rak, od 21.VI	152,086
16 lipca	6 42	21 21	113 43	Rak	152,047
1 sierpnia	8 46	18 00	129 00	Lew, od 23.VII	151,830
16 sierpnia	9 43	13 43	143 23	Lew	151,478
1 września	10 42	8 15	158 49	Panna, od 23.VIII	150,971
16 września	11 36	2 37	173 23	Panna	150,395
1 października	12 30	- 3 11	188 04	Waga, od 23.IX	149,772
16 października	13 25	- 8 53	202 53	Waga	149,126
1 listopada	14 26	- 14 26	218 49	Skorpion, od 23.X	148,480
16 listopada	15 26	- 18 44	233 53	Skorpion	147,936
1 grudnia	16 29	- 21 48	249 02	Strzelec, od 22.XI	147,517
16 grudnia	17 35	- 23 18	264 17	Strzelec	147,223

Tabela podaje współrzędne równonocne oraz długość ekliptyczną Słońca w odstępach półmiesięcznych w południe, w roku 2002. W innych latach mogą występować nieznaczne odstępstwa od podanych wartości, nie przekraczające 2 minut w rektascensji, 0,2 stopnia w deklinacji i 0,5 stopnia w długości ekliptycznej. Szerokość ekliptyczną Słońca można uważać za stałą, wynoszącą 0°.

Daty wkroczenia Słońca w kolejne znaki zodiaku mogą w innych latach różnić się o jeden dzień.

Odległości Słońca od Ziemi mogą w innych latach różnić się od podanych wartości, nie więcej niż 0,01 mln km.

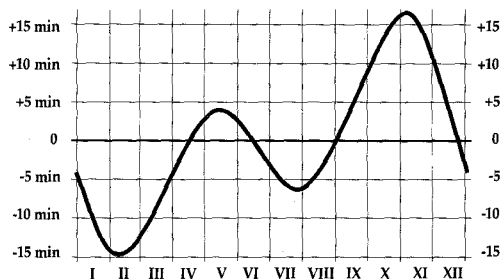
Czas

<p>Doba doba (słoneczna średnia); okres pomiędzy kolejnymi górowaniami Słońca średniego doba słoneczna prawdziwa; okres pomiędzy kolejnymi górowaniami Słońca prawdziwego; zależy od dobowych zmian równania czasu doba gwiazdowa; okres pomiędzy kolejnymi górowaniami dowolnej gwiazdy, okres obrotu Ziemi</p>	<p>24 h = 86400 s najkrótsza 23 h 59 min 38 s najdłuższa 24 h 00 min 30 s 23 h 56 min 04 s</p>
<p>Rok rok zwrotnikowy; okres pomiędzy kolejnymi przejściami Słońca średniego przez średni punkt równonocy wiosennej rok gwiazdowy (syderyczny); okres, po którym Słońce powraca w to samo miejsce na tle gwiazd, okres obiegu Ziemi wokół Słońca rok kalendarzowy zwykły rok kalendarzowy przestępny lata o numerze podzielnym przez 4, ale tylko co czwarty rok podzielny przez 100 (np. lata 1700, 1800, 1900, 2100 są zwykłe)</p>	<p>365,242199 doby 365,256363 doby 365,0 dób 366,0 dób</p>
<p>Miesiąc miesiąc synodyczny; okres pomiędzy kolejnymi pełniami Księżyca miesiąc gwiazdowy (syderyczny), okres obrotu Księżyca i jego obiegu wokół Ziemi miesiąc smoczy; okres pomiędzy kolejnymi przejściami Księżyca przez węzeł wstępujący miesiąc anomalistyczny; okres pomiędzy kolejnymi przejściami księżyca przez perygeum</p>	<p>śr. 29 d 12 h 44 min 02,9 s śr. 27 d 07 h 43 min 11,5 s śr. 27 d 05 h 05 min 35,9 s śr. 27 d 13 h 18 min 33,1 s</p>

Równanie czasu

Różnica pomiędzy czasem słonecznym prawdziwym a czasem słonecznym średnim.

Wykres przedstawia roczne zmiany wartości równania czasu.

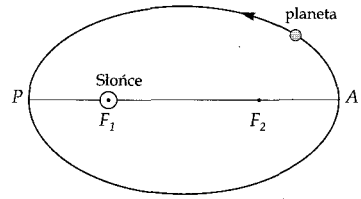


Prawa ruchu planet

I prawo Keplera

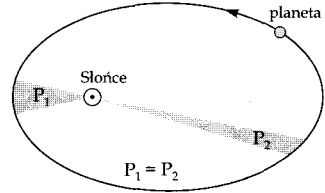
Planety poruszają się wokół Słońca po orbitach eliptycznych, ze Słońcem w jednym z ognisk.

- F_1, F_2 – ogniska elipsy,
- P – perihelium, punkt przysłoneczny,
- A – aphelium, punkt odsłoneczny.



II prawo Keplera

Promień wodzący planety zakresła jednakowe pola w równych odstępach czasu; inaczej: prędkość połowa planety jest stała.



III prawo Keplera

Stosunek drugich potęg okresów obiegu planet do trzecich potęg ich średnich odległości od Słońca jest stały.

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \text{const}$$

- T_1, T_2 – okresy obiegu,
- a_1, a_2 – długości wielkich półosi orbit.

Postać uogólniona III prawa Keplera:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_S + m)}$$

- M_S – masa Słońca,
- m – masa planety (obiektu)
- G – stała grawitacji

Konfiguracje planet

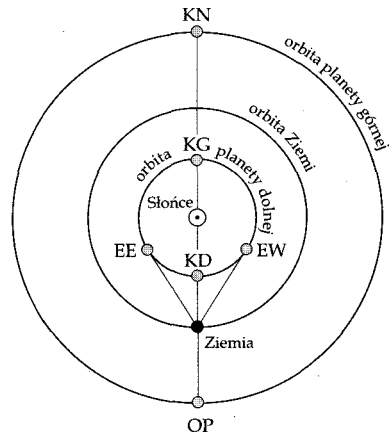
Podczas obserwacji z Ziemi mogą zachodzić następujące charakterystyczne układy planet (również innych ciał Układu Słonecznego) względem Ziemi i Słońca.

Dla planet dolnych, czyli Merkurego i Wenus:

- KG – koniunkcja górna,
- KD – koniunkcja dolna,
- EE – maksymalna elongacja wschodnia,
- EW – maksymalna elongacja zachodnia.

Dla planet górnych, czyli od Marsa do Plutona:

- KN – koniunkcja,
- OP – opozycja.



Parametry fizyczne planet

Parametr	Jednostka	MERKURY	WENUS	ZIEMIA
Promień równikowy	km	2240	6052	6378
	$R_z = 1$	0,383	0,949	1,000
Splaszczenie	-	0,000	0,000	0,0034
Masa	10^{24} kg	0,3302	4,869	5,9736
	$M_z = 1$	0,0553	0,815	1,000
Średnia gęstość	kg/m^3	5427	5204	5520
Przyspieszenie grawitacyjne na równiku	m/s^2	3,70	8,87	9,78
	$g = 1$	0,378	0,907	1,000
Prędkość ucieczki (II prędkość kosmiczna)	km/s	4,3	10,36	11,2
Okres rotacji	d, h, m, s	58 ^d 15 ^h 26 ^m	243 ^d 00 ^h 27 ^m	23 ^h 56 ^m 04 ^s
Nachylenie równika do płaszczyzny orbity	° ' "	5'	177°21'	23°27'
Wielka półoś orbity (średnia odległość od Słońca)	mln km	57,9	108,2	149,6
	AU ·	0,387	0,723	1,000
Mimośród orbity	-	0,2056	0,0068	0,0167
Nachylenie orbity do ekliptyki	° ' "	7°00'	3°23'	0°00'
Odległość w perihelium	mln km	46,0	107,5	147,1
Odległość w aphelium	mln km	69,8	108,9	152,1
Okres obiegu (rok gwiazdowy)	dni	87,969	224,701	365,256
Średnia prędkość liniowa na orbicie	km/s	47,69	35,02	29,79
Okres synodyczny	dni	115,88	583,92	-
Średnica kątowna Słońca z odległości planety	° ' "	1°09' ÷ 1°44'	43'58" ÷ 44'22"	31'31" ÷ 32'35"
Średnie nasłonecznienie	lx	$900 \cdot 10^3$	$258 \cdot 10^3$	$137 \cdot 10^3$
Temperatura przy powierzchni	°C	-160° ÷ +340°	+450° ÷ +480°	-40° ÷ +40°
Albedo	-	0,06	0,72	0,39
Średnica kątowna obserwowana z Ziemi	"	4,5 ÷ 12,9	9,6 ÷ 66,0	-
Jasność obserwowana z Ziemi	mag	+5,8 ÷ -2,2	-3,9 ÷ -4,7	-
Śr. ciśnienie atmosferyczne przy powierzchni	hPa	10^{-12}	92100	1014

Parametr	Jednostka	MARS	JOWISZ	SATURN
Promień równikowy	km	3397	71492	60268
	$R_z = 1$	0,533	11,21	9,45
Splaszczenie	–	0,006	0,065	0,098
Masa	10^{24} kg	0,6419	1898,6	568,46
	$M_z = 1$	0,107	317,83	95,16
Średnia gęstość	kg/m ³	3933	1326	687
Przyspieszenie grawitacyjne na równiku	m/s ²	3,69	23,12	8,96
	$g = 1$	0,377	2,364	0,916
Prędkość ucieczki (II prędkość kosmiczna)	km/s	5,03	59,5	35,5
Okres rotacji	h, m, s	24 ^h 37 ^m 23 ^s	9 ^h 55 ^m 30 ^s	10 ^h 39 ^m 22 ^s
Nachylenie równika do płaszczyzny orbity	° ' "	25°11'	3°07'	26°43'
Wielka półoś orbity (średnia odległość od Słońca)	mln km	227,9	778,4	1426,8
	AU	1,524	5,203	9,537
Mimośród orbity	–	0,0934	0,0484	0,0542
Nachylenie orbity do ekliptyki	° ' "	1°51'	1°18'	2°29'
Odległość w peryhelium	mln km	206,6	740,6	1347,6
Odległość w aphelium	mln km	249,2	816,0	1506,4
Okres obiegu (rok gwiazdowy)	lata	1,881	11,862	29,458
Średnia prędkość liniowa na orbicie	km/s	24,13	13,07	9,66
Okres synodyczny	dni	779,94	398,88	378,09
Średnica kątowna Słońca z odległości planety	' "	19°13" ÷ 23°10"	5°52" ÷ 6°28"	3°11" ÷ 3°33"
Średnie nasłonecznienie	lx	$58 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^3$
Temperatura powierzchni lub atmosfery	°C	–90° ÷ +40°	śr. –145°	śr. –175°
Albedo	–	0,16	0,70	0,75
Średnica kątowna obserwowana z Ziemi	"	3,1 ÷ 25,2	30,4 ÷ 50,1	15,0 ÷ 20,9
Jasność obserwowana z Ziemi	mag	+1,8 ÷ –2,9	–1,7 ÷ –2,9	+1,3 ÷ –0,3
Średnie ciśnienie w dolnych warstwach atmosfery	hPa	8	> 10 ⁵	> 10 ⁵

Parametr	Jednostka	URAN	NEPTUN	PLUTON
Promień równikowy	km	25559	24767	1150
	$R_z = 1$	4,01	3,88	0,18
Splaszczenie	-	0,023	0,017	?
Masa	10^{24} kg	86,83	102,45	0,013
	$M_z = 1$	14,54	17,15	0,0022
Średnia gęstość	kg/m ³	1318	16,38	2060
Przyspieszenie grawitacyjne na równiku	m/s ²	8,69	11,00	0,55
	$g = 1$	0,889	1,125	0,07
Prędkość ucieczki (II prędkość kosmiczna)	km/s	21,3	23,5	1,2
Okres rotacji	d, h, m, s	17 ^h 14 ^m 24 ^s	16 ^h 06 ^m 36 ^s	6 ^h 09 ^m 17 ^s
Nachylenie równika do płaszczyzny orbity	° ' "	97°52'	28°19'	122°31'
Wielka półoś orbity (średnia odległość od Słońca)	mln km	2871,0	4498,3	5911,8
	AU	19,191	30,07	39,518
Mimośród orbity	-	0,0472	0,0086	0,2470
Nachylenie orbity do ekliptyki	° ' "	0°46'	1°48'	17°09'
Odległość w peryhelium	mln. km	2734,0	4458,0	4451,6
Odległość w aphelium	mln km	3005,2	4535,2	7372,0
Okres obiegu (rok gwiazdowy)	lata	84,014	164,79	248,4
Średnia prędkość liniowa na orbicie	km/s	6,28	5,48	4,67
Okres synodyczny	dni	369,7	367,5	366,7
Średnica kątowna Słońca z odległości planety	' "	1'36" ÷ 1'45"	1'03" ÷ 1'04"	0'39" ÷ 1'05"
Średnie nasłonecznienie	lx	370	150	90
Temperatura atmosfery	°C	śr. - 216°	śr. - 214°	- 223°
Albedo	-	0,90	0,82	0,14
Średnica kątowna obserwowana z Ziemi	"	3,1 ÷ 3,7	2,0 ÷ 2, 2	0,06 ÷ 0,10
Jasność obserwowana z Ziemi	mag	+ 6,0 ÷ + 5,5	+ 7,8 ÷ + 7,6	+ 16,0 ÷ + 13,6
Średnie ciśnienie w dolnych warstwach atmosfery	hPa	> 10 ⁵	> 10 ⁵	0,1
Rok odkrycia	-	1781	1845	1930

Księżycy planet

Planeta	Księżyc	Średnia odległość od planety, w tys. km	Mimośród orbity	Okres obiegu, w dobach	Średnica (wymiary), w km	Jasność maks., w mag	Rok odkrycia
Ziemia	Księżyc	384,4	0,0549	27,3217	3476	-12,8	-
Mars	Phobos	9,378	0,015	0,319	27×22×19	11,3	1877
	Deimos	23,459	0,0005	1,262	15×12×11	12,4	1877
Jowisz	Metis	127,96	0,0	0,2948	40	17,5	1979
	Adrastea	128,98	0,0	0,2983	25×20×15	18,7	1979
	Amaltea	181,4	0,003	0,4981	270×164×150	14,1	1892
	Thebe	221,9	0,015	0,6745	?×110×90	16,0	1979
	Io	421,6	0,0041	1,7691	3630	5,0	1610
	Europa	670,9	0,0101	3,5512	3138	5,3	1610
	Ganymedes	1070,4	0,0006	7,1555	5262	4,6	1610
	Callisto	1882,7	0,007	16,6890	4800	5,6	1610
	Leda	11094	0,148	238,72	16	20,2	1974
	Himalia	11480	0,158	250,57	186	15,0	1904
	Lysithea	11720	0,107	259,22	36	18,2	1914
	Elara	11737	0,207	259,65	76	16,6	1904
	Ananke	21200	0,169	631	30	18,9	1951
	Carne	22600	0,207	692	40	17,9	1938
	Pasiphae	23500	0,378	735	50	16,9	1908
Sinope	23700	0,275	758	36	18,0	1914	
Saturn	Pan	133,58	0,0	0,575	20	19,0	1980
	Atlas	137,64	0,0024	0,602	38×34×28	18,0	1980
	Prometeus	139,35	0,0042	0,613	140×100×74	15,8	1980
	Pandora	141,70	0,004	0,629	110×86×66	16,5	1980
	Epimeteus	151,42	0,009	0,694	140×116×100	15,7	1980
	Janus	151,47	0,007	0,695	220×190×160	14,5	1966
	Mimas	185,52	0,0202	0,942	394	12,9	1789
	Enceladus	238,02	0,0045	1,370	502	11,7	1789
	Tethys	294,66	0,0	1,888	1048	10,2	1684
	Telesto	294,66	0,0	1,888	30×25×15	18,7	1980
	Calypso	294,66	0,0	1,888	30×16×16	19,0	1980
	Dione	377,40	0,0022	2,737	1118	10,4	1684

Planeta	Księżyc	Średnia odległość od planety, w tys. km	Mimośród orbity	Okres obiegu, w dobach	Średnica (wymiar), w km	Jasność maks., w mag	Rok odkrycia
Saturn (cd)	Helena	377,40	0,005	2,737	36×32×30	18,4	1980
	Rea	527,04	0,001	4,518	1528	9,7	1672
	Tytan	1221,9	0,0292	15,945	5150	8,3	1655
	Hyperion	1481,1	0,1042	21,277	350×240×200	14,2	1848
	Japetus	3561,3	0,0283	79,330	1436	10,2	1671
	Phoebe	12952	0,163	550,48	230×220×210	16,5	1898
Uran	Kordelia	49,75	0,0	0,336	25	24,1	1986
	Ofelia	53,77	0,10	0,377	30	23,8	1986
	Bianka	59,16	0,001	0,435	45	23,0	1986
	Kressida	61,77	0,0	0,465	65	22,2	1986
	Desdemona	62,65	0,0	0,476	60	22,5	1986
	Julia	64,63	0,001	0,494	85	21,5	1986
	Porcja	66,10	0,0	0,515	110	21,0	1986
	Rozalinda	69,93	0,0	0,560	60	22,5	1986
	Belinda	75,25	0,0	0,624	70	22,1	1986
	Puk	86,00	0,0	0,764	155	20,4	1985
	Miranda	129,8	0,0027	1,413	480×470×465	16,5	1948
	Ariel	191,2	0,0034	2,520	1160	14,2	1851
	Umbriel	266,0	0,0050	4,144	1190	14,0	1851
	Titania	435,8	0,0022	8,706	1610	15,3	1787
	Oberon	582,6	0,0008	13,463	1550	14,4	1787
Kaliban	7170	0,0823	579	60	22,3	1997	
Sykoraks	12214	0,5094	1289	120	20,7	1997	
Neptun	Najada	48,23	0,0	0,30	60	24,7	1989
	Talassa	50,07	0,0	0,31	80	23,8	1989
	Despoina	52,53	0,0	0,33	150	22,6	1989
	Galatea	61,95	0,0	0,45	160	22,3	1989
	Larissa	73,55	0,0	0,55	?×210×180	22,0	1989
	Proteus	117,6	0,0	1,12	440×415×400	20,3	1989
	Tryton	354,5	0,0	5,88	2720	13,6	1846
	Nereida	5510,7	0,75	359,4	340	18,7	1949
Pluton	Charon	19,1	0,0002	6,387	1186	16,8	1978

Wybrane planetoidy

Planetoida	Średnia odległość od Słońca, w AU	Mimośród orbity	Okres obiegu, w latach	Średnica (wymiar), w km	Jasność absolutna *), w mag	Rok odkrycia	
(1) Ceres	2,767	0,0767	4,60	907 × 959	3,32	1801	
(2) Pallas	2,770	0,2348	4,61	540	4,13	1802	
(3) Juno	2,670	0,2572	4,37	267	5,31	1804	
(4) Vesta	2,362	0,0899	3,63	530	3,16	1807	
(5) Astraea	2,574	0,1918	4,13	93	6,91	1845	
(6) Hebe	2,425	0,2019	3,78	211	5,70	1847	
(7) Iris	2,386	0,2290	3,67	208	5,56	1847	
(8) Flora	2,201	0,1560	3,27	90	6,48	1847	
(9) Metis	2,386	0,1226	3,69	110 × 220	6,32	1848	
(10) Hygiea	3,135	0,1205	5,61	414	5,37	1849	
(11) Parthenope	2,453	0,0993	3,84	150	6,62	1850	
(12) Victoria	2,335	0,2188	3,57	126	7,23	1850	
(13) Egeria	2,575	0,0867	4,13	233	6,71	1850	
(14) Irene	2,587	0,1667	4,16	158	6,27	1851	
(15) Eunomia	2,644	0,1865	4,30	248	5,22	1851	
(16) Psyche	2,927	0,1338	5,00	236	5,98	1852	
(17) Thetis	2,470	0,1356	3,88	98	7,77	1852	
(18) Melpomene	2,296	0,2184	3,48	162	6,41	1852	
(19) Fortuna	2,442	0,1588	3,82	198	7,09	1852	
(20) Massalia	2,409	0,1440	3,74	134	6,52	1852	
(433) Eros	1,458	0,2229	1,76	14 × 40	10,74	1898	
(1566) Icarus	1,078	0,8268	1,12	1,4	16,65	1949	
(2060) Chiron	13,748	0,3842	50,7	200	6,62	1977	
(2100) Ra-Shalom	0,832	0,4365	0,76	?	16,12	1976	
(5145) Pholus	20,226	0,5714	92,1	280	7,3	1992	
(5335) Damocles	11,840	0,8661	40,9	?	13,3	1991	
z zewnętrznego pasa planetoid	1992 QB1	43,8	0,07	289,9	?	23	1992
	1993 FW	43,9	0,04	291,2	?	23	1993
	1994 ES2	45,7	~0,0	308,9	?	24,7	1994
	1994 GV9	42,2	~0,0	274,1	?	23,4	1944
	1994 JQ1	43,3	~0,0	284,9	?	22,6	1994
	1994 JV	35,2	~0,0	208,8	?	22,6	1994
	1994 TB	31,7	~0,0	178,5	?	22	1994

*) dla obiektów z Układu Słonecznego oznacza jasność w odległości 1 AU od Słońca i 1 AU od Ziemi

Komety i meteoroidy

Wybrane komety okresowe

Kometa	Średnia odległość od Słońca, w AU	Mimośród orbity	Okres obiegu, w latach	Odległość peryhelium, w AU	Ostatnia data peryhelium
Encke	2,21	0,850	3,28	0,331	9.IX.2000
Grigg-Skjellerup	2,96	0,664	5,09	0,995	29.XI.2002
d'Arrest	3,49	0,612	6,39	1,353	3.II.2002
Giacobini-Zinner	3,52	0,706	6,59	1,034	21.XI.1998
Tempel-Tuttle	10,4	0,904	32,9	0,982	28.II.1998
Halley	17,9	0,967	76,0	0,587	9.II.1986
Swift-Tuttle	26,3	0,960	135,0	1,052	12.XII.1992

Klasyfikacja meteoroidów

Rodzaj obiektu	Średnica	Masa	Jasność	Częstość występowania
Mikrometeor	$\sim 10^{-3}$ mm	$10^{-12} \div 10^{-6}$ g	niewidzialne	stały spadek na Ziemię
Słaby meteor	~ 1 mm	10^{-3} g	$5^m \div 6^m$	kilka na godzinę
Jasny meteor w roju	kilka mm	~ 1 g	do -2^m	kilka-kilkadziesiąt na godzinę
Bolid	kilka cm	kilka g	$-4^m \div -10^m$	rzadkie, kilkadziesiąt na rok
Meteoryt	> 10 cm	> 100 g	$-10^m \div -20^m$	b. rzadkie, raz na kilka lat

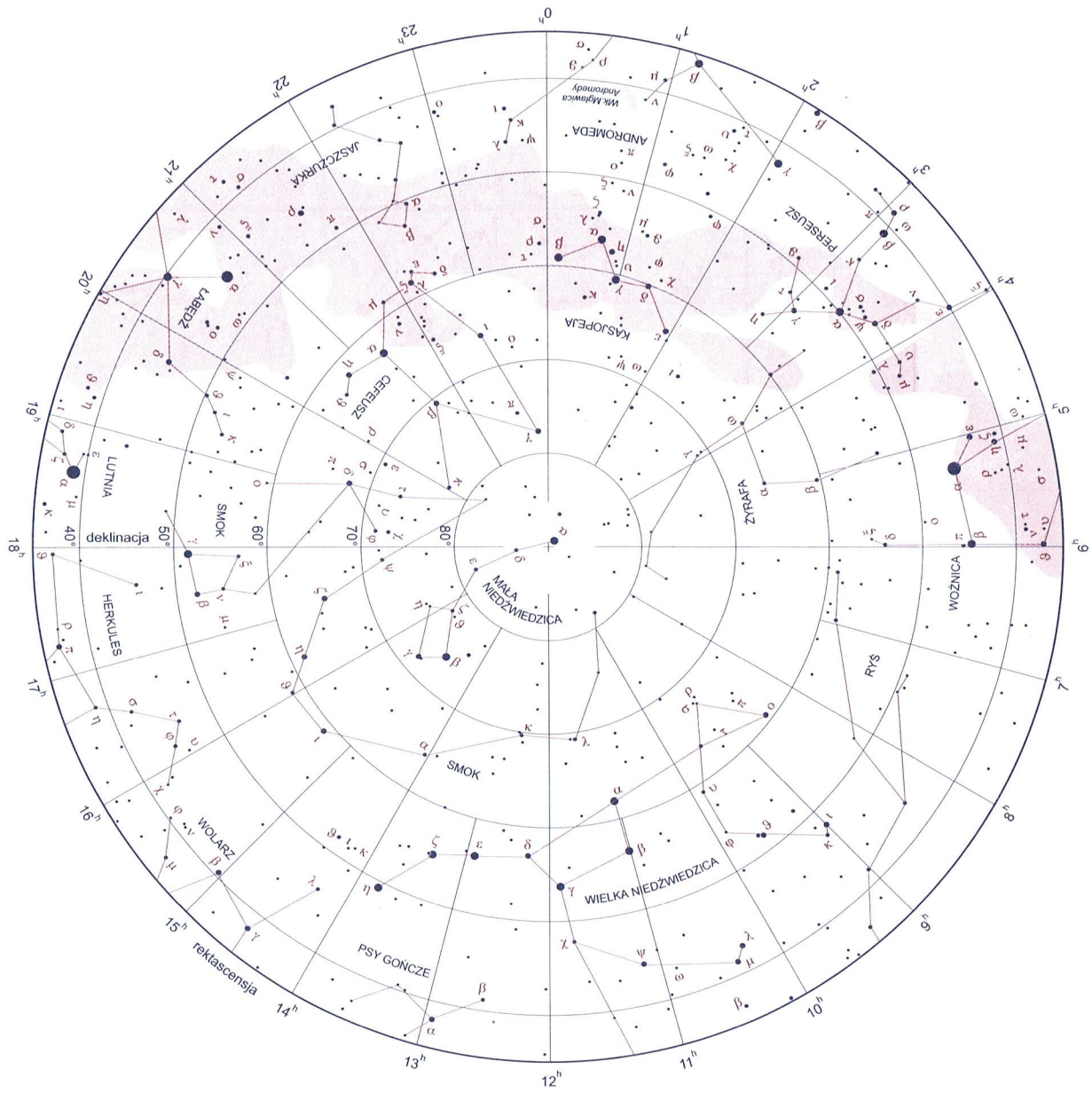
Główne roje meteorów obserwowane w Polsce

Nazwa roju	Okres aktywności	Data maksimum	Liczba meteorów na h	Prędkość, km/s	Związany z kometą
Kwadrantydy	1 – 5.01	3.01	100	40	Kozik-Peltier
Lirydy	16 – 25.04	22.04	90	50	Thatcher
Eta Akwarydy	19.04 – 28.05	3.05	60	65	Halley
Delta Akwarydy	8.07 – 19.08	29.07	30	40	–
Perseidy	17.07 – 24.08	12.08	90	60	Swift-Tuttle
Drakonidy	6 – 10.10	10.10	okresowo >1000	?	Giacobini-Zinner
Orionidy	2.10 – 7.11	22.10	25	65	Halley
Taurydy	13.09 – 25.11	3.11; 13.11	15	30	Encke
Leonidy	14 – 21.11	18.11	okresowo >10000	70	Tempel-Tuttle
Geminidy	7 – 17.12	14.12	65	35	–

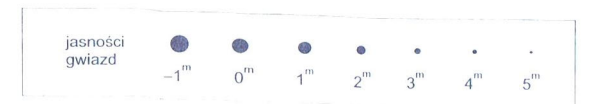
Parametry fizyczne Słońca

Parametr	Jednostka	Wartość	Ziemia = 1
Promień równikowy	km	696260	109,2
Powierzchnia	km ²	$6,09 \cdot 10^{12}$	11920
Objętość	km ³	$1,41 \cdot 10^{18}$	1302000
Masa	kg	$1,989 \cdot 10^{30}$	332965
Średnia gęstość	kg/m ³	1408	0,255
Gęstość jądra	kg/m ³	153000	27,7
Przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni	m/s ²	273,96	28,0
Prędkość ucieczki (II prędkość kosmiczna)	km/s	617,7	55,2
Okres rotacji:	na równiku	25 ^d 09 ^h 07 ^m	25,5
	na szerokości 45°	27 ^d 22 ^h	–
	na szerokości 75°	30 ^d 10 ^h	–
	blisko biegunów	30 ^d 21 ^h	–
Prędkość liniowa punktów na równiku	km/s	2,025	4,4
Nachylenie równika do płaszczyzny ekliptyki	°	7°15'	–
Odległość od płaszczyzny Galaktyki	lata św.	< 300	–
Odległość od centrum Galaktyki	lata św.	ok. 28000	–
Rok galaktyczny (okres obiegu środka Galaktyki)	lata	$240 \cdot 10^6$	–
Prędkość liniowa obiegu środka Galaktyki	km/s	220	–
Prędkość ruchu względem otaczających gwiazd (w kierunku gwiazdozbioru Herkulesa – apeks)	km/s	20	–
Temperatura powierzchniowa: średnia	K	5780	–
	plamy słoneczne	ok. 4000	–
	południe	ok. 6600	–
Temperatura centralna (jądro)	K	ok. $15 \cdot 10^6$	–
Moc promieniowania	W	$3,826 \cdot 10^{26}$	–
Średnia utrata masy (promieniowanie i wiatr sł.)	tony/s	$5,6 \cdot 10^6$	–
Stała słoneczna (ilość energii docierającej do Ziemi na jednostkę powierzchni)	W/m ²	1368	–
Oświetlenie powierzchni Ziemi w południe	lx	do 137000	–
Jasność obserwowana z Ziemi	mag	– 26,78	–
Jasność absolutna	mag	4,82	–
Typ widmowy	–	G2 V	–
Wiek	lata	ok. $4,6 \cdot 10^9$	–

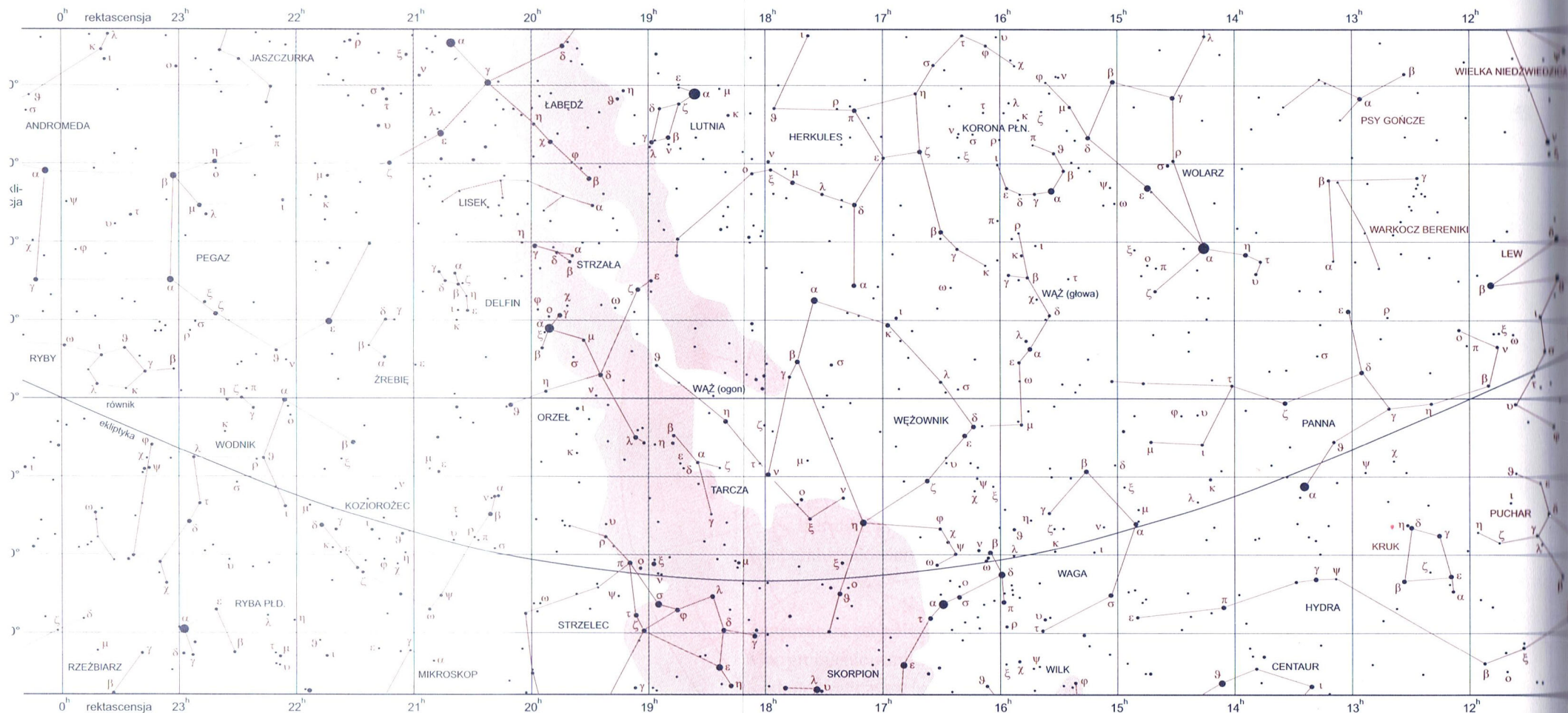
Mapa nieba okołobiegunowego północnego
Gwiazdozbiory widoczne w Polsce przez cały rok



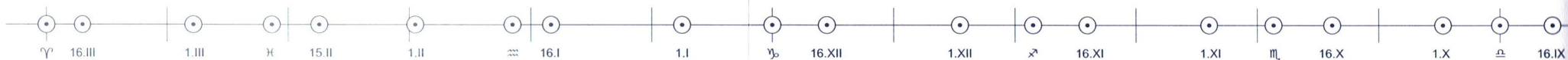
Na mapach zaznaczono gwiazdy do piątej wielkości gwiazdowej (5^m), czyli dobrze widoczne gołym okiem.



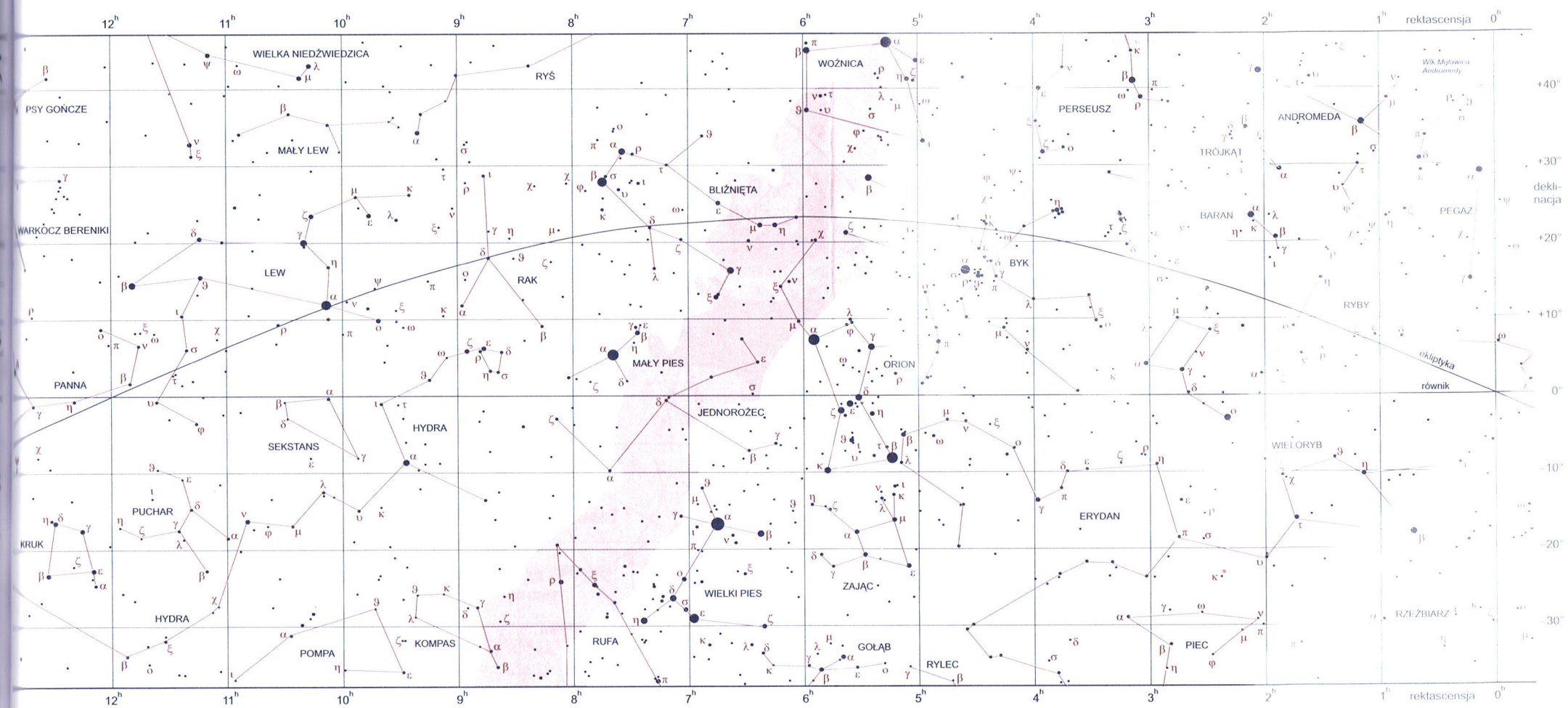
Mapa nieba równikowego od 12^h do 0^h Gwiazdozbiory widoczne w Polsce w określonych porach roku



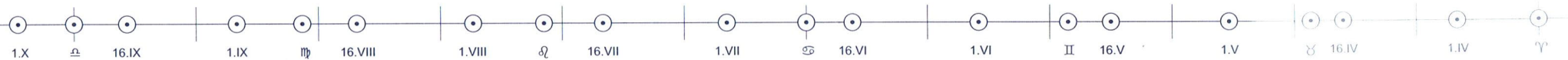
Roczne zmiany położenia Słońca na ekliptyce



Mapa nieba równikowego od 0^h do 12^h
Gwiazdozbiory widoczne w Polsce w określonych porach roku

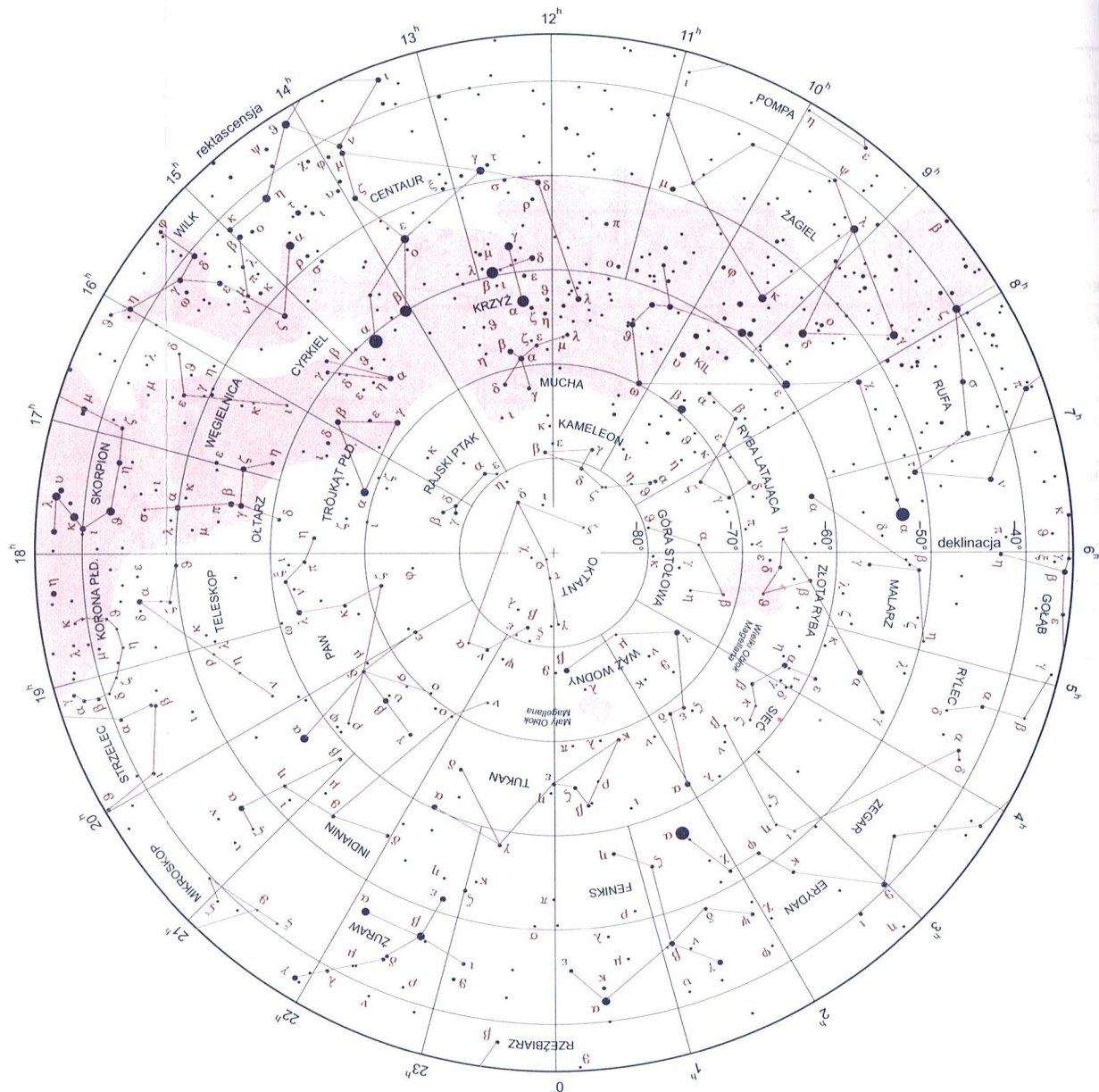


Roczne zmiany położenia Słońca na ekliptyce



Mapa nieba okołobiegunowego południowego

Gwiazdozbiory nigdy nie widoczne w Polsce



Na mapach zaznaczono gwiazdy do piątej wielkości gwiazdowej (5^m), czyli dobrze widoczne gołym okiem.



Podstawowe parametry fizyczne gwiazd

Wielkość		Zakres zmienności dla typowych gwiazd	Zależności
Średnica	względem Słońca	0,015 ÷ 300 mln km 0,01 ÷ 200	$\frac{L}{L_S} = \left(\frac{R}{R_S}\right)^2 \cdot \left(\frac{T_p}{T_{pS}}\right)^4$
Masa	względem Słońca	10 ²⁹ ÷ 2,5 · 10 ³² kg 0,05 ÷ 125	
Średnia gęstość	względem Słońca	10 ⁻⁴ ÷ 10 ⁸ kg/m ³ 10 ⁻⁷ ÷ 10 ⁵	
Moc promieniowania	względem Słońca	5 · 10 ²⁴ ÷ 10 ³² W 10 ⁻² ÷ 10 ⁶	
Temperatura powierzchniowa	względem Słońca	2500 ÷ 60000 K 0,4 ÷ 11	$\frac{T_c}{T_{cS}} = \frac{R}{R_S} \cdot \frac{M}{M_S}$
Jasność (natężenie źródła)	względem Słońca	10 ²³ ÷ 10 ³⁰ cd 10 ⁻⁴ ÷ 10 ³	
Pole magnetyczne	względem Słońca	0 ÷ 5 T 0 ÷ 35000	

- L, L_S – moc promieniowania gwiazdy, Słońca
- R, R_S – średnica gwiazdy, Słońca
- T_p, T_{pS} – temperatura powierzchniowa gwiazdy, Słońca
- T_c, T_{cS} – temperatura centralna gwiazdy, Słońca
- M, M_S – masa gwiazdy, Słońca

Rozkład gwiazd pod względem jasności

Jasność wizualna m , w mag	Liczba gwiazd jaśniejszych od m na całym niebie	Jasność wizualna m , w mag	Liczba gwiazd jaśniejszych od m na całym niebie
do 0	4	do 11	432 000
do 1	16	do 12	1 100 000
do 2	42	do 13	2 710 000
do 3	117	do 14	6 470 000
do 4	357	do 15	14 900 000
do 5	1 030	do 16	33 100 000
do 6	2 940	do 17	70 300 000
do 7	8 240	do 18	143 000 000
do 8	22 800	do 19	275 000 000
do 9	62 100	do 20	506 000 000
do 10	166 000	do 21	889 000 000

Klasyfikacja widmowa gwiazd

Typ widmowy	Temperatura powierzchni, w K	Barwa gwiazdy	Widmo	Przykłady gwiazd
O	30000 – 60000	niebieskobiała	słabe linie neutralnego wodoru i helu; wyraźna linia zjonizowanego helu; linie wielokrotnie zjonizowanego krzemu, węgla, azotu, tlenu.	brak
B	10000 – 30000	biała	mocniejsze linie wodoru i helu; słabe linie H i K zjonizowanego wapnia.	Spica, Rigel
A	7500 – 10000	białozółta	najmocniejsze linie wodoru; mocniejsze linie H i K zjonizowanego wapnia; słabe linie pierwiastków cięższych.	Wega, Syriusz
F	6000 – 7500	jasnożółta	słabsze linie wodoru; jeszcze mocniejsze linie H i K zjonizowanego wapnia; pasmo G żelaza, wapnia, tytanu.	Kanopus, Procyon
G	5400 – 6000	żółta	słabe linie wodoru; dominujące linie H i K zjonizowanego wapnia; intensywne linie wapnia.	Słońce, Kapella
K	4000 – 5400	pomarańczowa	bardzo słabe linie wodoru; w widmie dominują linie metali.	Arktur, Aldebaran
M	2500 – 4000	czerwona	silne pasma cząsteczkowe, zwłaszcza tlenu tytanu; liczne linie metali.	Antares, Betelgeuse

Powyzsza klasyfikacja obejmuje wiekszosć gwiazd. Dla nietypowych gwiazd stosowane są inne typy, np.: W, C, S. Każdy z typów widmowych dzieli się jeszcze na 10 równych części – podtypów, oznaczonych cyframi od 1 do 0. Na pełny symbol typu widmowego gwiazdy składają się: – litera od O do M, określająca główny typ widmowy, – cyfra od 1 do 0, określająca podtyp widmowy, – cyfra rzymska od I do VII określająca klasę jasności. Np. Aldebaran, oznaczany symbolem K5 III, jest gwiazdą typu pośredniego pomiędzy K i M, należąca do III klasy jasności, czyli pomarańczowoczerwonym olbrzymem.

Klasy jasności	Określenie gwiazd
Ia	najjaśniejsze nadolbrzymy
Ib – II	nadolbrzymy
III	olbrzymy
IV	podolbrzymy
V	karły
VI	podkarły
VII	białe karły

Najjaśniejsze gwiazdy nocnego nieba

Nazwa	Symbol	Jasność widoma, w mag	Jasność absolutna, w mag	Odległość, w latach świetlnych	Promień, $R_s = 1$	Masa, $M_s = 1$	Moc promieniowania, $L_s = 1$	Typ widmowy
Syriusz	α CMa (A)	-1,44	1,45	8,65	1,68	2,3	21,8	A1 V
Kanopus *	α Car	-0,62	-5,53	313	20	12	13500	F0 Ib
Arktur	α Boo	-0,05	-0,31	36,7	26	4	110,3	K2 III
Rigil Kent *	α Cen (A)	-0,01	4,34	4,34	1,1	1,1	1,52	G2 V
Wega	α Lyr	0,03	0,58	25,3	2,8	2,9	48,7	A0 V
Kapella	α Aur	0,08	-0,48	42,2	9	3,1	129,3	G8 III
Rigel	β Ori	0,18	-6,69	770	74	21	40000	B8 I
Procjon	α CMi (A)	0,40	2,68	11,41	2,1	1,8	7,04	F5 IV - V
Achernar *	α Eri	0,45	-2,77	143,8	4,1	5	1068	B5 - 8 IV
Betelgeuse	α Ori	0,4 ÷ 1,3	-5,14	427	900	15	9400	M2 Ib
Agena *	β Cen	0,61	-5,42	525	6,4	13	12300	B1 III
Altair	α Aql	0,76	2,20	16,77	1,6	2	10,93	A7 IV - V
Acrux *	α Cru	0,77	-4,19	321	6,4	15	3960	B1 V
Aldebaran	α Tau	0,87	-0,63	65,1	40	1,2	148,8	K5 III
Spica	α Vir	0,98	-3,55	262	8,1	10,8	30,53	B1 V
Antares	α Sco	0,9 ÷ 1,8	-5,28	600	550	15,5	10700	M1 Ib
Polluks	β Gem	1,16	1,09	33,7	12	3,5	2180	K0 III
Fomalhaut	α PsA	1,17	1,74	25,1	1,6	2,5	16,73	A3 V
Deneb	α Cyg	1,25	-8,70	3200	5,2	15	260000	A2 Ia
Mimosa *	β Cru	1,25	-3,92	353	12	10	3070	B0 III
Regulus	α Leo	1,36	-0,52	77,5	3,7	5	134,2	B7 V

* gwiazdy niewidoczne z terenu Polski

Najbliższe gwiazdy

Nazwa	Symbol	Odległość, w latach światelnych	Paralaksa heliocentr., w''	Ruch własny, w''/rok	Prędkość radialna, w km/s *)	Jasność widoma, w mag	Jasność absolutna, w mag
Słońce	-	0,000016	-	-	-	-26,78	4,82
Proxima Centauri	V 645 Cen	4,28	0,762	3,85	-16	11,12	15,49
Alfa Centauri A	α Cen A	4,34	0,752	3,69	-25	-0,01	4,34
Alfa Centauri B	α Cen B	4,34	0,752	3,69	-21	1,35	5,07
Gwiazda Barnarda	-	5,91	0,552	10,30	-108	9,54	13,22
Wolf 359	CN Leo	7,57	0,431	4,84	13	13,53	16,65
BD+36°2147	-	8,11	0,402	4,78	-84	7,50	10,50
Luyten 726-8 A	UV Cet A	8,25	0,395	3,35	29	12,52	15,46
Luyten 726-8 B	UV Cet B	8,25	0,395	3,35	29	13,0	15,94
Syriusz A	α CMa A	8,65	0,377	1,321	-8	-1,44	1,45
Syriusz B	α CMa B	8,65	0,377	1,321	-8	8,39	11,27
Ross 154	-	9,54	0,342	0,74	-4	10,45	13,14
Ross 248	HH And	10,39	0,314	1,82	-81	12,29	14,78
Epsilon Eridani	ϵ Eri	10,76	0,303	0,97	15	3,73	6,14
Ross 128	-	10,94	0,298	1,40	-13	11,10	13,47
61 Cygni A	61 Cyg A	11,09	0,294	5,22	-64	5,22	7,56
61 Cygni B	61 Cyg B	11,09	0,294	5,22	-64	6,02	8,36
Epsilon Indi	ϵ Ind	11,21	0,291	4,67	-40	4,68	7,02
Luyten 789-6	-	11,24	0,290	3,27	-60	12,18	14,49
BD+43°44 A	-	11,25	0,290	2,91	14	11,06	13,37
BD+43°44 B	-	11,25	0,290	2,91	14	12,18	14,49
Procyon A	α CMi A	11,41	0,286	1,248	-3	0,45	2,68
Procyon B	α CMi B	11,41	0,286	1,248	-3	10,7	13,0

*) ujemna wartość prędkości radialnej oznacza zbliżanie się gwiazdy, dodatnia – oddalanie się.

Typy gwiazd zmiennych

Gwiazdy zmienne zaćmieniowe

Typ	Charakterystyka składników	Okres zmian	Zakres zmian
Typu Algol (β Persei)	Chłodny podolbrzym i gorąca gwiazda ciągu głównego; w pełnym okresie zmian występują dwa minima blasku: głębsze i płytsze.	od kilku h do kilku dób	do 1,5 ^m
β Lyrae	Ciasny układ dwóch elipsoidalnie odkształconych olbrzymów o różnych masach.	ok. 1 doby	do 1 ^m
W Ursae Maioris	Ciasny układ dwóch silnie odkształconych gwiazd o podobnych, niewielkich masach.	kilka h	do 1 ^m

Gwiazdy fizycznie zmienne

Typ	Charakterystyka gwiazdy	Okres zmian	Zakres zmian
Cefeidy (δ Cephei)	Olbrzym lub nadolbrzym typu F, G lub K, powyżej 4 M_{\odot} , z radialnymi pulsacjami objętości. Okres zmienności ściśle związany z jasnością bezwzględna.	1 ÷ 50 dób	0,5 ÷ 1,5 ^m
RR Lyrae	Olbrzym typu A lub F o masie 0,5 ÷ 0,7 M_{\odot} , z radialnymi pulsacjami objętości.	1,5 ÷ 20 h	0,3 ÷ 1,5 ^m
Typu Mira (o Ceti)	Czerwony olbrzym lub nadolbrzym typu widmowego M, z radialnymi pulsacjami objętości.	0,2 ÷ kilka lat	do 10 ^m
β Cephei	Podolbrzym lub olbrzym typu O8 ÷ B6 o masie 10 ÷ 20 M_{\odot} , we wczesnej fazie ewolucji, z nieradialnymi pulsacjami objętości.	2 ÷ 15 h	do 0,3 ^m
UV Ceti	Młody, bardzo aktywny i szybko rotujący karzeł typu K lub M o masie ok. 0,5 M_{\odot} , z silnymi nieregularnymi rozbłyskami chromosferycznymi.	kilkuminutowe rozbłyski	0,01 ÷ 6 ^m
Nowa	Biały karzeł w ciasnym układzie podwójnym, na powierzchni którego następuje gwałtowny wybuch reakcji termojądrowej spalania wodoru, przechwyconego z drugiego składnika.	–	okresowy wzrost o 7 ÷ 16 ^m
Supernowa	Masywna gwiazda w późnym stadium ewolucji, wybuchająca po wyczerpaniu źródeł energii termojądrowej; pozostałością po wybuchu jest gwiazda neutronowa lub czarna dziura.	–	okresowy wzrost o 17 ÷ 21 ^m

Wybrane gwiazdy zmienne

Oznaczenie	Nazwa gwiazdy	Rektascensja h m	Deklinacja ° '	Jasność maksymalna, w mag	Jasność minimalna, w mag	Okres zmian, w dobach	Typ
γ Cas	Cih	0 56,7	+ 60 43	1,6	3,0	–	nieregularna
o Cet	Mira	2 19,3	– 2 59	2,0	10,1	331,6	Mira
ρ Per	Gorgona	3 05,2	+ 38 50	3,3	4,0	33	nieregularna
β Per	Algol	3 08,2	+ 40 57	2,1	3,4	2,867	Algol
λ Tau		4 00,7	+ 12 29	4,0	4,5	3,953	zaćmieniowa
ε Aur	Almaaz	5 2,00	+ 43 49	2,9	3,8	9892	zaćmieniowa
ζ Aur	Haedus I	5 02,5	+ 41 05	3,7	4,0	972,2	zaćmieniowa
α Ori	Betelgeuse	5 55,2	+ 7 24	0,4	1,0	2070	nieregularna
η Gem	Praepus	6 14,9	+ 22 30	3,2	3,9	233,4	nieregularna
T Mon		6 25,2	+ 7 05	5,6	6,6	27,0	cefeida
ζ Gem	Mekbuda	7 04,1	+ 20 34	3,7	4,4	10,15	cefeida
R Leo		9 47,6	+ 11 26	4,4	11,3	312,6	Mira
R Boo		14 35,0	+ 26 57	6,7	12,8	223,3	Mira
δ Lib	Zuben Elakribi	15 01,0	– 8 31	4,9	5,9	2,327	zaćmieniowa
μ Sco		16 51,9	– 38 03	3,0	3,3	1,44	zaćmieniowa
α Her	Ras Algethi	17 14,6	+ 14 23	3,0	4,0	–	nieregularna
β Lyr	Sheliak	18 50,1	+ 33 22	3,3	4,3	12,9	zaćmieniowa
RR Lyr		19 23,9	+ 42 41	6,9	8,0	0,6	RR Lyrae
U Aql		19 26,7	– 7 09	6,8	8,0	7,0	cefeida
χ Cyg		19 50,6	+ 32 55	3,3	14,2	407,0	Mira
η Aql		19 52,5	+ 1 00	3,5	4,4	7,18	cefeida
T Cep		21 09,5	+ 68 29	5,2	11,3	389,3	Mira
μ Cep		21 43,5	+ 58 47	3,6	5,1	730	nieregularna
δ Cep		22 29,2	+ 58 25	3,5	4,4	5,37	cefeida
β Peg	Scheat	23 03,8	+ 28 05	2,3	2,7	–	nieregularna
ρ Cas		23 54,4	+ 57 30	4,1	6,2	320	nieregularna
R Cas		23 58,4	+ 51 24	5,5	13,0	431,2	Mira

Wybrane gwiazdy podwójne i wielokrotne

Oznaczenie	Nazwa gwiazdy	Rektascensja h m	Deklinacja ° '	Jasność składnika A, w mag	Jasność składnika B, w mag	Odległość składników, w ''
γ Ari	Mesarthim	1 53,5	+ 19 18	4,8	4,8	7,8
α Psc	Alrisha	2 02,0	+ 2 46	4,2	5,1	1,7
γ And	Alamak	2 03,9	+ 42 20	2,3	5,5 + 6,3	9,8; 9,8
α UMi	Polaris	2 31,8	+ 89 16	2,0	9,0	18,4
β Ori	Rigel	5 14,5	- 8 12	0,1	6,8	9,5
θ ¹ Ori	Trapez	5 35,3	- 5 23	5,1	6,7 + 6,7 + 7,9	13; 13; 17
β Mon		6 28,8	- 7 02	4,7	5,2 + 6,1	7,3; 10
α Gem	Kastor	7 34,6	+ 31 53	1,9	2,9 + 8,8	2,3; 7,2
γ Leo	Algieba	10 20,0	+ 19 51	2,2	3,5	4,4
γ Vir	Porrina	14 41,7	- 1 27	3,5	3,5	2
α CVn	Cor Caroli	12 56,0	+ 38 19	2,9	5,5	19
ζ UMa	Mizar	13 23,9	+ 54 56	2,3	4,0	14
β Cen	Agena	14 03,8	- 60 22	0,7	3,9	1,3
α Cen	Rigil Kent	14 39,6	- 60 50	0,0	1,4	15
ε Boo	Izar	14 45,0	+ 27 04	2,5	4,9	2,8
α Sco	Antares	16 29,4	- 26 26	1,0	5,4	2,6
ζ Her		16 41,3	+ 31 36	2,9	5,5	1,6
α Her	Ras Algethi	17 14,6	+ 14 23	3,0 ÷ 4,0	5,4	4,7
ε ¹ Lyr		18 44,3	+ 39 40	5,0	6,1	2,6
ε ² Lyr		18 44,3	+ 39 37	5,2	5,5	2,3
θ Ser	Alya	18 56,2	+ 4 12	4,5	5,4	22
β Cyg	Albireo	19 30,7	+ 37 58	3,1	5,1	34
δ Cyg		19 45,0	+ 45 08	2,9	6,3	2,5
ε Dra	Tyl	19 48,2	+ 70 16	3,8	7,4	3,1
γ Del		20 46,7	+ 16 07	4,5	5,5	9,6
β Cep	Alfirk	21 28,7	+ 70 34	3,3	7,9	13
δ Cep		22 29,2	+ 58 25	3,5 ÷ 4,4	7,5	41

Nazwa łacińska	Skrót	Nazwa polska	Położenie środka		Obszar, stopnie kwadr.	Ilość gwiazd widocznych gołym okiem	Widoczność w Polsce (cz.=częściowa)
			rektascensja	deklinacja			
Andromeda	And	Andromeda	1 ^h	+ 40°	722	100	lato – zima
Antlia	Ant	Pompa	10 ^h	– 35°	239	20	cz./wiosna
Apus	Aps	Rajski Ptak	16 ^h	– 75°	206	20	niewidoczny
Aquarius	Aqr	Wodnik	23 ^h	– 15°	980	90	jesień
Aquila	Aql	Orzeł	20 ^h	+ 5°	652	70	lato
Ara	Ara	Ołtarz	17 ^h	– 55°	237	30	niewidoczny
Aries	Ari	Baran	3 ^h	+ 20°	441	50	jesień – zima
Auriga	Aur	Woźnica	6 ^h	+ 40°	657	90	jesień – wiosna
Bootes	Boo	Wolarz	15 ^h	+ 30°	907	90	zima – lato
Caelum	Cae	Rylec	5 ^h	– 40°	125	10	cz./zima
Camelopardalis	Cam	Żyrafa	6 ^h	+ 70°	757	50	cały rok
Cancer	Cnc	Rak	9 ^h	+ 20°	506	60	zima – wiosna
Canes Venatici	CVn	Psy Gończe	13 ^h	+ 40°	465	30	zima – lato
Canis Maior	CMa	Wielki Pies	7 ^h	– 20°	380	80	zima
Canis Minor	CMi	Mały Pies	8 ^h	+ 5°	183	20	zima – wiosna
Capricornus	Cap	Koziorożec	21 ^h	– 20°	414	50	lato
Carina	Car	Kil	9 ^h	– 60°	494	110	niewidoczny
Cassiopeia	Cas	Kasjopeja	1 ^h	+ 60°	598	90	cały rok
Centaurus	Gen	Centaur	13 ^h	– 50°	1060	150	cz./wiosna
Cepheus	Cep	Cefeusz	22 ^h	+ 70°	588	60	cały rok
Cetus	Cet	Wieloryb	2 ^h	– 10°	1231	100	jesień
Chamaeleon	Cha	Kameleon	11 ^h	– 80°	132	20	niewidoczny
Circinus	Cir	Cyrkiel	15 ^h	– 60°	93	20	niewidoczny
Columba	Col	Gołąb	6 ^h	– 35°	270	40	cz./zima
Coma Berenices	Com	Warkocz Bereniki	13 ^h	– 20°	386	50	zima – lato
Corona Australis	CrA	Korona Południowa	19 ^h	– 40°	128	25	niewidoczny
Corona Borealis	CrB	Korona Północna	16 ^h	+ 30°	179	20	zima – lato
Corvus	Crv	Kruk	12 ^h	– 20°	184	15	wiosna

Nazwa łacińska	Skrót	Nazwa polska	Położenie środka		Obszar, stopnie kwadr.	Ilość gwiazd widocznych gołym okiem	Widoczność w Polsce (cz.=częściowa)
			rektascensja	deklinacja			
Crater	Crt	Puchar	11 ^h	- 15°	282	20	wiosna
CruX	Cru	Krzyż (Południa)	12 ^h	- 60°	68	30	niewidoczny
Cygnus	Cyg	Łabędź	21 ^h	+ 40°	804	150	wiosna – jesień
Delphinus	Del	Delfin	21 ^h	+ 10°	189	30	wiosna – jesień
Dorado	Dor	Złota Ryba	5 ^h	- 65°	179	20	niewidoczny
Draco	Dra	Smok	17 ^h	+ 65°	1083	80	cały rok
Equuleus	Equ	Żrebię	21 ^h	+ 10°	72	10	lato – jesień
Eridanus	Eri	Erydan	3 ^h	- 20°	1138	100	cz./zima
Fornax	For	Piec	3 ^h	- 30°	398	35	cz./jesień
Gemini	Gem	Bliźnięta	7 ^h	+ 20°	514	70	jesień – wiosna
Grus	Gru	Żuraw	22 ^h	- 45°	366	30	niewidoczny
Hercules	Her	Herkules	17 ^h	+ 30°	1225	140	wiosna – jesień
Horologium	Hor	Zegar	3 ^h	- 60°	249	20	niewidoczny
Hydra	Hya	Hydra	10 ^h	- 20°	1303	130	wiosna
Hydrus	Hyi	Wąż Morski	2 ^h	- 75°	243	20	niewidoczny
Indus	Ind	Indianin	21 ^h	- 55°	294	20	niewidoczny
Lacerta	Lac	Jaszczurka	22 ^h	+ 45°	201	35	lato – zima
Leo	Leo	Lew	11 ^h	+ 15°	947	70	zima – wiosna
Leo Minor	LMi	Mały Lew	10 ^h	+ 35°	232	20	zima – lato
Lepus	Lep	Zając	6 ^h	- 20°	290	40	zima
Libra	Lib	Waga	15 ^h	- 15°	538	50	wiosna – lato
Lupus	Lup	Wilk	15 ^h	- 45°	334	70	cz./wiosna
Lynx	Lyn	Ryś	8 ^h	- 45°	545	60	jesień – wiosna
Lyra	Lyr	Lutnia	19 ^h	+ 40°	286	45	wiosna – jesień
Mensa	Men	Góra Stołowa	5 ^h	- 80°	153	15	niewidoczny
Microscopium	Mic	Mikroskop	21 ^h	- 35°	210	20	cz./ jesień
Monoceros	Mon	Jednorożec	7 ^h	- 5°	482	85	zima
Musca	Mus	Mucha	12 ^h	- 70°	138	30	niewidoczny
Norma	Nor	Węgielnica	16 ^h	- 50°	165	20	niewidoczny
Octans	Oct	Oktant	22 ^h	- 85°	291	35	niewidoczny

Nazwa łacińska	Skrót	Nazwa polska	Położenie środka		Obszar, stopnie kwadr.	Ilość gwiazd widocznych gołym okiem	Widoczność w Polsce (cz.=częściowa)
			rektascensja	deklinacja			
Ophiuchus	Oph	Wężownik	17 ^h	0°	948	100	lato
Orion	Ori	Orion	5 ^h	+ 5°	594	120	zima
Pavo	Pav	Paw	20 ^h	- 65°	378	45	niewidoczny
Pegasus	Peg	Pegaz	22 ^h	+ 20°	1121	100	lato – zima
Perseus	Per	Perseusz	3 ^h	+ 45°	615	90	jesień – zima
Phoenix	Phe	Feniks	1 ^h	- 50°	469	40	niewidoczny
Pictor	Pic	Malarz	6 ^h	- 55°	247	30	niewidoczny
Pisces	Psc	Ryby	1 ^h	+ 15°	889	75	jesień
Piscis Austrinus	PsA	Ryba Południowa	22 ^h	- 30°	245	25	jesień
Puppis	Pup	Rufa	8 ^h	- 40°	673	140	cz./zima
Pyxis	Pyx	Kompas	9 ^h	- 30°	221	25	zima
Reticulum	Ret	Sieć	4 ^h	- 60°	114	15	niewidoczny
Sagitta	Sge	Strzała	20 ^h	+ 10°	80	20	wiosna – jesień
Sagittarius	Sgt	Strzelec	19 ^h	- 25°	867	115	lato
Scorpius	Sco	Skorpion	17 ^h	- 40°	497	100	lato
Sculptor	Scl	Rzeźbiarz	0 ^h	- 30°	475	30	cz./jesień
Scutum	Sct	Tarcza (Sobieskiego)	19 ^h	- 10°	109	20	lato
Serpens	Ser	Wąż	17 ^h	+ 5°	637	60	lato
Sextans	Sex	Sekstans	10 ^h	0°	314	25	wiosna
Taurus	Tau	Byk	4 ^h	+ 15°	797	125	jesień – wiosna
Telescopium	Tel	Teleskop	19 ^h	- 50°	252	30	niewidoczny
Triangulum	Tri	Trójkąt	2 ^h	+ 30°	132	15	lato – zima
Triangulum Austr.	TrA	Trójkąt Południowy	16 ^h	- 65°	110	20	niewidoczny
Tucana	Tuc	Tukan	0 ^h	- 65°	295	25	niewidoczny
Ursa Maior	UMa	Wielka Niedźwiedzica	11 ^h	+ 50°	1280	125	cały rok
Ursa Minor	UMi	Mała Niedźwiedzica	15 ^h	+ 70°	256	20	cały rok
Vela	Vel	Żagiel	9 ^h	- 50°	500	110	niewidoczny
Virgo	Vir	Panna	13 ^h	0°	1294	95	wiosna
Volans	Vol	Ryba Latająca	8 ^h	- 70°	141	20	niewidoczny
Vulpecula	Vul	Lisek	20 ^h	+ 25°	268	45	wiosna – jesień

Wybrane gromady gwiazd

Nazwa (symbol), gwiazdozbiór	Typ	Rektascensja h m	Deklinacja ° '	Jasność, w mag	Rozmiary kątowe	Odległość, w pc
Hiady, Tau	otwarta	4 27	+ 16	0,6	10°	40
Plejady, Tau	otwarta	3 47	+ 24 07	1,3	3°	130
Praesepe, Cnc	otwarta	8 40	+ 19 59	3,1	2°	160
M7, Sco	otwarta	17 54	- 34 49	3,3	80'	250
M41, CMa	otwarta	6 47	- 20 44	4,5	40'	650
M35, Gem	otwarta	6 09	+ 24 20	5,0	30'	850
M11, Sct	otwarta	18 51	- 6 16	5,8	14'	1700
h i χ Persei	otwarte	2 21	+ 57 08	4,3 + 4,4	30' + 30'	2000
M10, Oph	kulista	16 57	- 04 06	6,6	15'	4300
M5, Ser	kulista	15 19	+ 2 05	5,8	18'	6700
M13, Her	kulista	16 42	+ 36 28	5,9	17'	7350
M3, CVn	kulista	13 42	+ 28 23	6,4	16'	8800
M15, Peg	kulista	21 30	+ 12 10	6,3	13'	10000
M2, Aqr	kulista	21 34	- 0 49	6,5	13'	12000

Wybrane mgławice

Nazwa gwiazdozbiór	Typ	Rektascensja h m	Deklinacja ° '	Jasność, w mag	Rozmiary kątowe	Odległość, w pc
Rozeta, Mon	emisyjna	6 32	+ 4 52	5,8	1°20'	1590
Wlk. Mgł. Oriona	emisyjna	5 35	- 5 27	3,0	1°	500
Trójlistna, Sgr	emisyjna	18 03	- 23 02	6,5	20'	2510
Laguna, Sgr	emisyjna	18 03	- 24 23	5,0	1°	1320
Omega, Sgr	emisyjna	18 21	- 16 11	7,0	40'	2510
Orzeł, Ser	emisyjna	18 19	- 13 53	6,4	1°20'	1995
Ameryka Płn., Cyg	absorp.-emis.	20 59	+ 44 19	-	2°10'	820
Koński Łeb, Ori	absorp.-emis.	5 41	- 2 26	-	1°10'	360
Krab, Tau	poz. supernowej	5 35	+ 22 01	8,5	5' × 7'	2000
Pierścień, Lyr	planetarna	18 54	+ 33 02	9,0	1°10''	420
Hantle, Vul	planetarna	20 00	+ 22 43	7,5	7'	150
Saturn, Aqr	planetarna	21 04	- 11 22	7,0	20''	480
Sowa, UMa	planetarna	11 15	+ 55 00	12,0	3'	730
Ślimak, Aqr	planetarna	22 30	- 20 47	6,5	6'	86

Klasyfikacja galaktyk

Typ	Symbol	Podtypy	Masa, w M_s
Spiralne	S	Sa, Sb, Sc – wg malejącego stopnia wykształcenia ramion spiralnych	$10^9 \div 10^{11}$
Spiralne z poprzeczką	SB	SBa, SBb, SBc – wg malejącego stopnia wykształcenia ramion spiralnych	$10^9 \div 10^{11}$
Soczewkowate	S0	typ pośredni pomiędzy spiralnymi S/SB i eliptycznymi E	$10^9 \div 10^{12}$
Eliptyczne	E	E0, E1, ... E7 – wg wzrastającego stopnia spłaszczenia	$10^8 \div 10^{12}$
Nieregularne	Ir	IrI lub Sd, Sm – nieregularne o pewnych podobieństwach do spiralnych; IrII – całkowicie bezkształtne	$10^8 \div 10^{11}$
Galaktyki Seyferta	Sy	Sy1, Sy2 – aktywne galaktyki spiralne o małym i szczególnie jasnym jądrze	?
Kwazary	-	aktywne jądra (wczesnych) galaktyk, najjaśniejsze obiekty Wszechświata	ok. 10^{10}

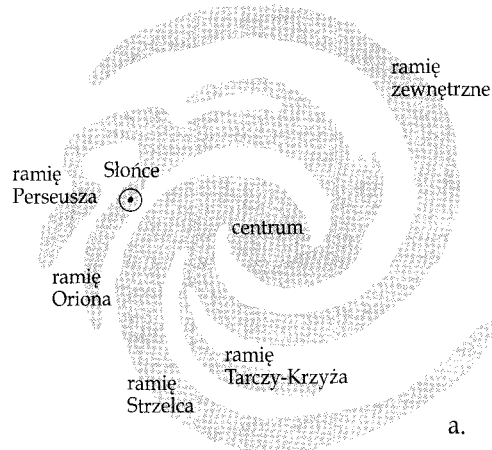
Najbliższe galaktyki

Oznaczenie	Nazwa	Gwiazdozbiór	Odległość, w mln ly	Typ	Masa, w M_s
-	Sagittarius	Strzelec	0,08	Ir	$< 10^9$
LMC	Wielki Obłok Magellana	Złota Ryba	0,169	Ir	$1,4 \cdot 10^{10}$
SMC	Mały Obłok Magellana	Tukan	0,195	Ir	$2 \cdot 10^9$
NGC6822	Galaktyka Barnarda	Strzelec	2,0	Ir	$1 \cdot 10^9$
NGC147	-	Kasjopeja	2,1	E5	$1,5 \cdot 10^8$
NGC185	-	Kasjopeja	2,2	E3	$1,0 \cdot 10^8$
NGC224, M31	Wielka Mgławica Andromedy	Andromeda	2,4	Sb	$3,7 \cdot 10^{11}$
NGC221, M32	-	Andromeda	2,4	E2	$4 \cdot 10^9$
NGC598, M33	-	Trójkąt	2,4	Sc	$2 \cdot 10^{10}$
NGC205	-	Andromeda	2,5	E5	$9 \cdot 10^9$

Nasza Galaktyka

Podstawowe dane

Parametr	Wartość
Średnica dysku galaktycznego	100000 lat św.
Maksymalna grubość dysku	20000 lat św.
Liczba gwiazd	300 mld
Całkowita masa Galaktyki	$5 \cdot 10^{41}$ kg
Odległość Słońca: od centrum	28000 lat św.
od brzegu dysku	22000 lat św.
od płaszczyzny równika	< 300 lat św.
Okres obiegu przez Słońce	240 mln lat
Prędkość liniowa Słońca	220 km/s
Typ galaktyki	Sb



Na rysunkach obok widok Galaktyki:
 a. od strony bieguna galaktycznego;
 b. w płaszczyźnie równika galaktycznego



Populacje gwiazd i podsystemy Galaktyki

Populacja	Podsystem	Wiek, w mld lat	Główne składniki
skrajna I	płaski	10	gaz i pył międzygwiazdowy, gorące gwiazdy typu widmowego O i B, nadolbrzymy, cefeidy, asocjacje gwiazd
pośrednia I	pośredni	1 ÷ 3	gromady otwarte gwiazd, gwiazdy typu widmowego A
dysk galaktyczny	pośredni	3 ÷ 10	gwiazdy nowe, mgławice planetarne
pośrednia II	pośredni	10	gwiazdy zmienne długookresowe
skrajna II (halo)	sferyczny	> 10	białe karły i podkarły, gromady kuliste gwiazd, gwiazdy zmienne typu RR Lyrae

Ewolucja gwiazd

Stadium	Proces, efekt
Kondensacja	Grawitacyjne kurczenie się pierwotnej mgławicy gazowej lub pyłowo-gazowej, wzrost gęstości i temperatury w centrum.
Protogwiazda	Początek świecenia w wyniku dalszego grawitacyjnego kurczenia; kilkadziesiąt tysięcy lat dla gwiazd o masie $50 M_{\odot}$, do miliarda lat dla $0,01 M_{\odot}$.
Gwiazda	Reakcje termojądrowe w jądrze – przemiana wodoru w hel; kilka milionów lat dla gwiazd b. masywnych, do kilkudziesięciu miliardów lat.
Czerwony olbrzym	Gwiazdy średnio masywne (np. Słońce) po wyczerpaniu wodoru w jądrze; ok. 100-krotny wzrost promienia, spalanie wodoru w warstwach zewnętrznych.
Biały karzeł	Odrzucenie zewnętrznych warstw czerwonego olbrzyma (mgławica planetarna); pozostałością gorąca, powoli stygnąca gwiazda o promieniu $0,01 R_{\odot}$.
Brazowy karzeł	Końcowe stadium protogwiazd o masach mniejszych od $0,08 M_{\odot}$, powoli stygnący obiekt, świecący wyłącznie kosztem energii grawitacyjnej.
Czarny karzeł	Pozostałość po gwiazdach o małych i średnich masach; wystygły brazowy lub biały karzeł, w stanie stałym.
Supernowa	Końcowe stadium ewolucji masywnych gwiazd, powyżej $8 M_{\odot}$; gwałtowny wybuch gwiazdy po zużyciu paliwa termojądrowego.
Gwiazda neutronowa	Pozostałość po masywnych gwiazdach, o masach $8 \div 40 M_{\odot}$; szybko obracający się obiekt o promieniu rzędu 10 km i gęstości do 10^{18} kg/m^3 .
Czarna dziura	Efekt gwałtownego zapadania grawitacyjnego gwiazd o masie powyżej $40 M_{\odot}$; obiekt obserwowany jedynie poprzez procesy zachodzące w jego otoczeniu.

Ewolucja Wszechświata

Stadium	Czas trwania	Stan końcowy materii		Proces
		temperatura	gęstość	
Era hadronowa	10^{-4} s	10^{12} K	10^{17} kg/m^3	Silnie oddziałujące na siebie cząstki elementarne, np. protony.
Era leptonowa	10 s	$2 \cdot 10^{10} \text{ K}$	10^8 kg/m^3	Cząstki oddziałujące słabo lub elektromagnetycznie, np. elektrony.
Era promieniowania	1000 s	10^{10} K	10^7 kg/m^3	Początek rekombinacji jonów w atomy wodoru i helu pierwotnego.
Era rekombinacji	10^5 lat	$4 \cdot 10^3 \text{ K}$	10^{-15} kg/m^3	Początek tworzenia się molekuł.
Era materii	obecnie	2,74 K (tło)	10^{-27} kg/m^3	Powstawanie galaktyk, gromad galaktyk, gwiazd.

Teleskopy

Klasyczne typy teleskopów optycznych

Luneta Keplera (1611 r.)

teleskop soczewkowy (refraktor).

OB – układ soczewek obiektywu,

OK – okular soczewkowy.



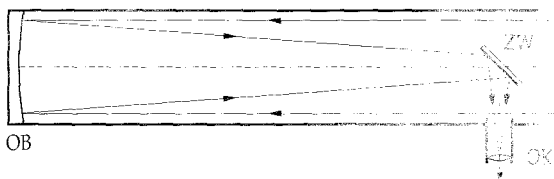
Teleskop Newtona (1672 r.),

teleskop zwierciadlany (reflektor).

OB – wklęsłe zwierciadło paraboloidalne,

ZW – zwierciadło płaskie,

OK – okular soczewkowy.



Teleskop Cassegraina (1672 r.),

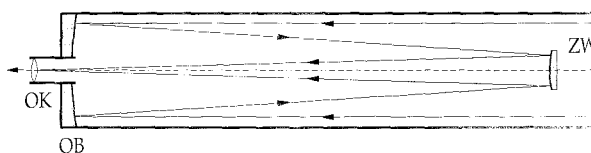
teleskop zwierciadlany (reflektor)

o wydłużonej ogniskowej.

OB – wklęsłe zwierciadło paraboloidalne,

ZW – wypukłe zwierciadło hiperboloidalne,

OK – okular soczewkowy.





































Podstawowe parametry optyczne teleskopów

Parametr	Określenie	Wzór praktyczny
Powiększenie	stosunek rozmiarów kątowych obrazu obiektu w teleskopie do rzeczywistych rozmiarów kątowych obiektu	maksymalne powiększenie: $f_{\max} \approx 20D$
Zdolność rozdzielcza	najmniejsza kątowa odległość dwóch obiektów rozróżnialnych przez układ optyczny teleskopu	$\theta \approx \frac{\sim 14''}{D}$
Zasięg	najmniejsza, graniczna jasność obiektów dostrzegalnych przez teleskop (wielkość gwiazdowa, w mag)	$m_p = 6 + 5 \log D$

D – średnica obiektywu w cm

Symbole astronomiczne

Symbol	Znaczenie	Symbol	Znaczenie
 	Ziemia		znak (punkt) Barana
	Merkury		znak Byka
	Wenus		znak Bliźnięt
	Mars		znak Raka
	Jowisz		znak Lwa
	Saturn		znak Panny
 	Uran		znak (punkt) Wagi
	Neptun		znak Skorpiona
 	Pluton		znak Strzelca
	Słońce		znak Koziorożca
	Księżyc		znak Wodnika
	nów Księżyc		znak Ryb
	pierwsza kwadra Księżyc		koniunkcja
	pełnia Księżyc		opozycja
	ostatnia kwadra Księżyc		węzeł wstępujący orbity
			węzeł zstępujący orbity

Alfabet grecki

A α	alfa	N ν	ni
B β	beta	Ξ ξ	ksi
Γ γ	gamma	Ο ο	omikron
Δ δ	delta	Π π	pi
Ε ε	epsilon	Ρ ρ	ro
Z ζ	dzeta	Σ σ	sigma
Η η	eta	Τ τ	tau
Θ θ υ	teta	Υ υ	ypsilon
I ι	jota	Φ φ ϕ	fi
K κ	kappa	X χ	chi
Λ λ	lambda	Ψ ψ	psi
M μ	mi	Ω ω	omega

ISBN 83-7266-161-8

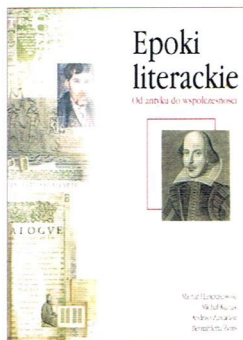


9 788372 661616

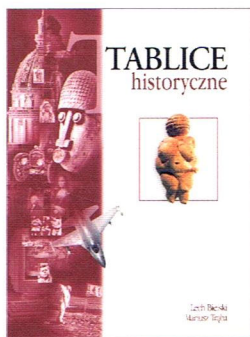
WYDAWNICTWO "PARK" poleca:



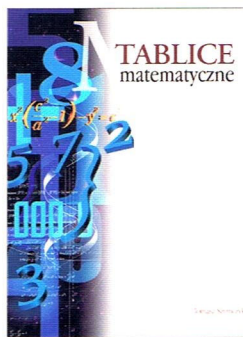
Słownik
gatunków
literackich



Epoki literackie.
Od antyku
do współczesności



Tablice historyczne



Tablice matematyczne

Park