1. Ułamki algebraiczne. Równania i nierówności wymierne. Funkcje wymierne

Ułamek algebraiczny. Skracanie i rozszerzenie ułamków algebraicznych

1.1. Wśród poniższych wyrażeń znajdują się ułamki algebraiczne. Wskaż je.

a) $\frac{0,5x^3+8x+1}{x^2}$ b) $\frac{2x-5}{3}$ c) $\frac{2|x|}{x^3-8}$

d) $\sqrt{\frac{x}{x+2}}$ e) $\frac{3}{x^3-8x^2+6}$ f) $\frac{7-\sqrt{x}}{x^2+1}$

1.2. Wyznacz dziedzinę danego ułamka algebraicznego.

a) $\frac{9x}{5x-10}$ b) $\frac{1}{(x+1)(5-x)}$ c) $\frac{4x+2}{x^2+4}$

d) $\frac{3x-7}{9x^2-81}$ e) $\frac{3x-5}{x^2+2x+1}$ f) $\frac{x^3-1}{x^3+8}$

1.3. Wyznacz dziedzinę danego ułamka algebraicznego.

a) $\frac{x^2+x+4}{x^2-5x+6}$ b) $\frac{x+1}{x^3-4x^2}$ c) $\frac{3x^3+8x+5}{8x^4-x}$

d) $\frac{x^2+5}{x^3-9x^2+x-9}$ e) $\frac{2x-7}{x^4+x^2-20}$ f) $\frac{2x^3-5x+3}{x^3-3x^2+3x-1}$

g) $\frac{-7x+2}{x^3+4x+5}$ h) $\frac{x-3}{5x^3-15x^2-5x+15}$ i) $\frac{3x^2-2x+1}{x^5+3x^3-4x^2}$

1.4. Podaj przykład ułamka algebraicznego, którego dziedziną jest dany zbiór.

a) $\boldsymbol{R}$ b) $\boldsymbol{R}-\{1\}$ c) $\boldsymbol{R}-\{0\}$ d) $\boldsymbol{R}-\{0, 3\}$

e) $\boldsymbol{R}-\{-2, 3\}$ f) $\boldsymbol{R}-\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ g) $\boldsymbol{R}-\{-\sqrt{3},0,\sqrt{3}\}$ h) $\boldsymbol{R}-\{-1, 1, 2, 4\}$

1. Ułamki algebraiczne. Równania i nierówności wymierne. Funkcje wymierne

Ułamek algebraiczny. Skracanie i rozszerzenie ułamków algebraicznych

1.1. Wśród poniższych wyrażeń znajdują się ułamki algebraiczne. Wskaż je.

a) $\frac{0,5x^3+8x+1}{x^2}$ b) $\frac{2x-5}{3}$ c) $\frac{2|x|}{x^3-8}$

d) $\sqrt{\frac{x}{x+2}}$ e) $\frac{3}{x^3-8x^2+6}$ f) $\frac{7-\sqrt{x}}{x^2+1}$

1.2. Wyznacz dziedzinę danego ułamka algebraicznego.

a) $\frac{9x}{5x-10}$ b) $\frac{1}{(x+1)(5-x)}$ c) $\frac{4x+2}{x^2+4}$

d) $\frac{3x-7}{9x^2-81}$ e) $\frac{3x-5}{x^2+2x+1}$ f) $\frac{x^3-1}{x^3+8}$

1.3. Wyznacz dziedzinę danego ułamka algebraicznego.

a) $\frac{x^2+x+4}{x^2-5x+6}$ b) $\frac{x+1}{x^3-4x^2}$ c) $\frac{3x^3+8x+5}{8x^4-x}$

d) $\frac{x^2+5}{x^3-9x^2+x-9}$ e) $\frac{2x-7}{x^4+x^2-20}$ f) $\frac{2x^3-5x+3}{x^3-3x^2+3x-1}$

g) $\frac{-7x+2}{x^3+4x+5}$ h) $\frac{x-3}{5x^3-15x^2-5x+15}$ i) $\frac{3x^2-2x+1}{x^5+3x^3-4x^2}$

1.4. Podaj przykład ułamka algebraicznego, którego dziedziną jest dany zbiór.

a) $\boldsymbol{R}$ b) $\boldsymbol{R}-\{1\}$ c) $\boldsymbol{R}-\{0\}$ d) $\boldsymbol{R}-\{0, 3\}$

e) $\boldsymbol{R}-\{-2, 3\}$ f) $\boldsymbol{R}-\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ g) $\boldsymbol{R}-\{-\sqrt{3},0,\sqrt{3}\}$ h) $\boldsymbol{R}-\{-1, 1, 2, 4\}$

1.5. Oblicz wartość danego ułamka algebraicznego dla podanej obok liczby.

a) $\dfrac{-x^2+3}{(2-x)(2+x)}$, -1 b) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^8+4x^2+7}$, 3

c) $\dfrac{2x^2+1}{x^3-1}$, 2 d) $\dfrac{32-x^2}{2x^3+8x^2+5x+20}$, -3

1.6. Oblicz wartość danego ułamka algebraicznego dla podanej obok liczby. Wynik przedstaw w postaci $a+b\sqrt{c}$, gdzie a, b, $c \in \mathbf{Q}$.

a) $\dfrac{x}{x-2}$, $3\sqrt{2}+2$ b) $\dfrac{x+1}{x-2}$, $1-\sqrt{3}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2-3}$, $1+\sqrt{2}$ d) $\dfrac{(6-x)(2+x)}{(x-1)^2}$, $2-\sqrt{2}$

1.7. Oblicz wartość danego ułamka algebraicznego dla podanej obok liczby. Wynik przedstaw w postaci ułamka o wymiernym mianowniku.

a) $\dfrac{1}{x+2}$, $2\sqrt[3]{3}$ b) $\dfrac{x^3}{3(x-1)}$, $\sqrt[3]{2}$

c) $\dfrac{2x^3}{x^2+x+1}$, $\sqrt[3]{5}$ d) $\dfrac{1}{x^2+\sqrt[3]{3}}$, $\sqrt[3]{3}-1$

1.8. Podaj przykład ułamka algebraicznego, którego dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}-\{0\}$ i który dla liczby 1 przyjmuje wartość 3.

1.9. Podaj przykład ułamka algebraicznego, którego dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}-\{2, 3\}$ i który dla liczby -1 przyjmuje wartość 5.

1.10. Wyznacz wszystkie wartości m, $m \in \mathbf{R}$, dla których dziedziną ułamka algebraicznego jest zbiór liczb rzeczywistych.

a) $\dfrac{x^2+5}{x^2+2x+m}$ b) $\dfrac{x}{x^2+5x+9m^2}$ c) $\dfrac{1-2x}{x^2+3mx+m}$

1.11. Skróć dany ułamek algebraiczny. Podaj konieczne założenia.

a) $\dfrac{3x^{12}}{6x^8}$ b) $\dfrac{-15(-x)^2}{3x}$ c) $\dfrac{7(-x)^{13}+5(-x)^{12}}{x^{10}}$

d) $\dfrac{(x^3)^2-5(x^2)^3}{2x^7}$ e) $\dfrac{\left[3(-x)^2\right]^2-8x^4}{2(-x)^5+3x^5}$ f) $\dfrac{x^6(-3x)^2+9x^8}{18x^4\cdot x^3}$

1.12. Skróć dany ułamek algebraiczny. Podaj konieczne założenia.

a) $\dfrac{x^2-4}{3x+6}$ b) $\dfrac{5+x}{25-x^2}$ c) $\dfrac{4x^2-9}{(3-2x)(3+2x)}$

d) $\dfrac{4-81x^2}{-9x-2}$ e) $\dfrac{x^2-2x+1}{5x-5}$ f) $\dfrac{9x^2-1}{1-6x+9x^2}$

1.13. Skróć dany ułamek algebraiczny. Podaj konieczne założenia.

a) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-4}$ b) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+2x-15}$ c) $\dfrac{-2x^2-14x+16}{3x^2+15x-72}$

d) $\dfrac{2x^2-3x-9}{4x^2-11x-3}$ e) $\dfrac{2x^3-32x}{3x^2+12x}$ f) $\dfrac{4x^4-400x^2}{x^3-13x^2+30x}$

1.14. Skróć dany ułamek algebraiczny. Podaj konieczne założenia.

a) $\dfrac{36x+3x^2-3x^3}{x^2+6x+9}$ b) $\dfrac{2x^7-8x^3}{3x^5+6x^3}$ c) $\dfrac{3x^3+2x^2-3x-2}{2x^4-2}$

d) $\dfrac{8x^4-x}{4x^2+2x+1}$ e) $\dfrac{75x^2-30x+12}{125x^3+8}$ f) $\dfrac{x^4-x^2-12}{x^4+8x^2+15}$

1.15. Skróć dany ułamek algebraiczny. Podaj konieczne założenia.

a) $\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^2+3x+2}$ b) $\dfrac{x^4-3x^2-4}{2x^4-8x^2}$ c) $\dfrac{2x^3+x-3}{4x^2+4x+6}$

d) $\dfrac{8x^3+12x^2+6x+1}{4x^3+4x^2+x}$ e) $\dfrac{2x^2+4x-6}{x^3-3x^2-9x+27}$ f) $\dfrac{x^4-8x^2-9}{x^4-13x^2+36}$

1.16. Skróć dany ułamek algebraiczny. Podaj konieczne założenia.

a) $\dfrac{3x^2(x-2)+4(x-2)}{9x^4-16}$ b) $\dfrac{x^3(3x-1)-(1-3x)x}{27x^3-1}$ c) $\dfrac{25x^3+50x^2-x-2}{5x^2+9x-2}$

d) $\dfrac{2x^3+2x-4}{x^3-x^2+3x-3}$ e) $\dfrac{216x^3+8}{12x^2-20x-8}$ f) $\dfrac{(x-2)^3-1}{x^3-3x^2}$

1.17. Rozszerz dane ułamki tak, aby otrzymać wyrażenia o podanych mianownikach. Podaj konieczne założenia.

a) $\dfrac{3x}{4}=\dfrac{\quad}{16x}$ b) $\dfrac{-2x^2}{9}=\dfrac{\quad}{18x^3}$ c) $\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{\quad}{2-x}$

d) $\dfrac{5}{2}=\dfrac{\quad}{2x-8}$ e) $\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{\quad}{x(x-2)}$ f) $\dfrac{2x}{x+3}=\dfrac{\quad}{x^2-9}$

1.18. Rozszerz dane ułamki tak, aby otrzymać wyrażenia o podanych mianownikach. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3}{x}=\frac{\qquad}{x^2-6x}$ b) $\frac{x-1}{x-2}=\frac{\qquad}{6x^2-3x^3}$ c) $\frac{3}{x-2}=\frac{\qquad}{x^2-x-2}$

d) $\frac{x}{x+1}=\frac{\qquad}{2x^2+4x+2}$ e) $\frac{5}{x-2}=\frac{\qquad}{x^3-8}$ f) $\frac{x+2}{x^2-x+1}=\frac{\qquad}{x^3+1}$

1.19. Rozszerz dane ułamki tak, aby otrzymać wyrażenia o podanych mianownikach. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x-1}{x^2-4}=\frac{\qquad}{x^3+3x^2-4x-12}$ b) $\frac{x}{x^2+1}=\frac{\qquad}{x^4-3x^2-4}$

c) $\frac{2}{x-1}=\frac{\qquad}{x^3-3x^2+3x-1}$ d) $\frac{3}{x-1}=\frac{\qquad}{x^3+4x^2-5}$

1.20. Rozszerz dane ułamki tak, aby otrzymać wyrażenia o podanych licznikach. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3}{5x}=\frac{3x^2}{\qquad}$ b) $\frac{x+1}{x-2}=\frac{x^2+x}{\qquad}$ c) $\frac{9-x}{3}=\frac{81-x^2}{\qquad}$

d) $\frac{2}{x-3}=\frac{6-2x}{\qquad}$ e) $\frac{3x-1}{x^2+5}=\frac{3x^3-x^2}{\qquad}$ f) $\frac{x^2-3}{x}=\frac{x^4-9}{\qquad}$

1.21. Rozszerz dane ułamki tak, aby otrzymać wyrażenia o podanych licznikach. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x^2-3x}{x+1}=\frac{x^3-9x}{\qquad}$ b) $\frac{2x+3}{x-5}=\frac{4x^2+12x+9}{\qquad}$

c) $\frac{x^2-1}{x}=\frac{x^4+2x^2-3}{\qquad}$ d) $\frac{x-1}{x}=\frac{3x^3-3x^2+x-1}{\qquad}$

e) $\frac{2x-3}{3x}=\frac{8x^3-27}{\qquad}$ f) $\frac{2x+1}{x+1}=\frac{10x^3+5x^2+8x+4}{\qquad}$

Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych

1.22. Wykonaj podane działania.

a) $\frac{x}{2}-\frac{3x+1}{4}+\frac{8-x}{8}$ b) $2x^2-\frac{(x-1)(x+1)}{3}+\frac{5x-7}{6}$

c) $\frac{x-7}{5}-\frac{x^2+2}{3}+\frac{2x^2+31}{15}$ d) $\frac{1-6x}{3}+\frac{x^2+8}{2}-\frac{12x+5x^2}{6}$

e) $\frac{(x+3)(x-2)}{2}-\frac{(x-1)(x+4)}{5}-x$ f) $\frac{(3-x)(3+x)}{8}-\frac{2(x-1)}{4}-\frac{x^2+1}{16}$

1.23. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3}{x+2}-\frac{x-4}{x+2}$ b) $\frac{2x-7}{x-3}-\frac{3(x-4)}{x-3}$ c) $9-\frac{x+7}{x+1}$

d) $1-\frac{4}{x+5}$ e) $\frac{x+7}{x-5}-\frac{4}{5-x}$ f) $\frac{2x-3}{x-1}+\frac{x+4}{1-x}$

1.24. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3x+1}{x^2-1}-\frac{x^2+3x}{x^2-1}$ b) $\frac{2x}{x^3-8x^2}-\frac{4x-16}{x^3-8x^2}$ c) $\frac{5-2x}{x^2+4x}+\frac{3x-5}{x^2+4x}$

d) $\frac{2-2x}{x^2-9}-\frac{x-5}{9-x^2}$ e) $4-\frac{3x^2-8x+4}{x^2-2x}$ f) $\frac{x^2-3x}{(x-3)^2}-1$

1.25. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x}{x-4}-\frac{x+1}{4-x}-\frac{2x+3}{x-4}$ b) $\frac{3x-2}{x-2}+3-\frac{4x+5}{2-x}$

c) $\frac{2x-5}{2x-3}-\frac{5}{2}-\frac{x+1}{3-2x}$ d) $3-\frac{x+2}{4x-1}-\frac{2x+5}{1-4x}$

e) $\frac{3}{4}-\frac{2}{x^2-1}+\frac{x^2}{1-x^2}$ f) $\frac{2(x-1)}{x^2-4}-\frac{x+6}{4-x^2}+1\frac{1}{2}$

1.26. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2}$ b) $\frac{3x}{2}-\frac{x^2+2x}{x+3}$ c) $\frac{2}{5x}-\frac{1}{x-1}$

d) $\frac{3x-1}{4}-\frac{x^2}{x+2}$ e) $\frac{3}{x-3}+\frac{x+4}{x}$ f) $\frac{x}{x+2}-\frac{3x+1}{3x}$

1.27. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+1}{x+2}$

b) $\frac{x-2}{x-3}-\frac{x-1}{x+3}$

c) $\frac{3x}{2x+1}+\frac{x^2}{(2x+1)^2}$

d) $\frac{x^2-1}{4x^2+12x+9}-\frac{2}{2x+3}$

e) $\frac{x+4}{x-1}-\frac{x+1}{x-4}$

f) $\frac{x+5}{x-5}-\frac{2-x}{2+x}$

1.28. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-3$

b) $\frac{x+2}{x}-\frac{x^2-3}{x^2}+\frac{3-x^2}{x^3}$

c) $\frac{5}{x-1}+1+\frac{4}{x+1}$

d) $\frac{3x^3+5x}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}-3x$

e) $\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{2}{x-2}$

f) $\frac{2}{x+3}-\frac{3}{x+2}+\frac{1}{2}$

1.29. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{1}{4x^2-25}+\frac{3x}{2x-5}-1$

b) $\frac{x}{x+2}+4+\frac{7}{x-3}$

c) $2+\frac{7-x}{x+3}+\frac{x+3}{x-7}$

d) $\frac{x-2}{x+1}-3+\frac{x-1}{x+2}$

1.30. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x^2+5}{x^2-3x}-\frac{x+1}{x-3}$

b) $\frac{x-2}{2x-5}+\frac{3x^2+1}{2x^2-5x}$

c) $\frac{x^3}{x^3-1}-\frac{x^2+3}{x^2+x+1}$

d) $\frac{x-2}{x^2+4}+\frac{5x-2x^2}{2x^3+8x}$

e) $\frac{2x^2-11x}{x^2-5x}-\frac{2x-1}{x}$

f) $\frac{x^3-6}{3x^4+x^2}-\frac{x+2}{3x^2+1}$

1.31. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x-1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x+1}$

b) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2-2x}$

c) $\frac{x-1}{2x+3}-\frac{x+1}{3-2x}+\frac{x^2-4}{4x^2-9}$

d) $\frac{2x^2-1}{4-x^2}+\frac{x+2}{x-2}-\frac{x+1}{x+2}$

e) $\frac{2x^2-3x}{x^2-6x+9}-\frac{x+2}{x-3}+1$

f) $\frac{x+2}{x-1}-\frac{4}{x^2-2x+1}-\frac{x+1}{x}$

1.32. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x-2}{x^2-4x}+\frac{x^2-1}{x^2-8x+16}-\frac{1}{2x}$

b) $\frac{x^2-1}{x^2-5x}-\frac{x^2-3}{x^2-10x+25}-\frac{1}{5-x}$

c) $\frac{2x}{x^2-4x+4}-\frac{x}{x^2-2x}-\frac{1}{x+1}$

d) $\frac{5x}{x^2-6x+9}-\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x^2+3x}$

Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych

1.33. Wykonaj mnożenie ułamków. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3}{x}\cdot\frac{x^2}{6}$

b) $\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2-x}{2}$

c) $\frac{4}{x+1}\cdot\frac{2x+2}{8x^2}$

d) $\frac{x+3}{2}\cdot\frac{16}{x^2-9}$

e) $\frac{x-1}{3}\cdot\frac{4x}{x^2-x}$

f) $\frac{3x-6}{x^2-4}\cdot\frac{5}{7x}$

1.34. Wykonaj mnożenie ułamków. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{2x-4}{5}\cdot\frac{10x}{x^2-4x+4}$

b) $\frac{2x+3}{x^2+6}\cdot\frac{2x^2+12}{4x^2-9}$

c) $\frac{x^2-1}{x^2-81}\cdot\frac{x-9}{x+1}$

d) $\frac{3x^3+6x^2}{x-4}\cdot\frac{6x-24}{9x^2-36}$

e) $\frac{x^3+8}{3x^2-3}\cdot\frac{6x+6}{x^2-2x+4}$

f) $\frac{2x^2+8x}{216-x^3}\cdot\frac{x^2+6x+36}{x^2-16}$

1.35. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3x^2+3x}{x^2-1}\cdot\frac{x-1}{6x}$

b) $\frac{4x^3-8x^2}{16x^2-64}\cdot\frac{4x+8}{x^2}$

c) $\frac{49-x^2}{x^2+8x+7}\cdot\frac{x+1}{2x-14}\cdot\frac{x}{2}$

d) $\frac{x^4-1}{2x^2+2}\cdot\frac{4}{3x^2-3}\cdot 9x$

e) $\frac{5x^2-20}{7x+14}\cdot\frac{14x+42}{x^2+x-6}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)$

f) $\left(-\frac{x}{21}\right)\cdot\frac{3x^2-3}{x^2-4x-5}\cdot\frac{7x-35}{2x-2}$

1.36. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x^2-1}{x^2+x-6}\cdot\frac{x^2+7x+12}{x^2+x-2}$

b) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-4}\cdot\frac{x^2+4x+4}{x^2+6x+9}$

c) $\frac{2x^2+5x-3}{3x^2+7x+4}\cdot\frac{9x^2+24x+16}{4x^2-1}$

d) $\frac{5x^2+7x+2}{x^2+2x+1}\cdot\frac{3x^2+2x-1}{25x^2-4}$

e) $\frac{2x^2-x-3}{4x^2-7x-2}\cdot\frac{8x^2-32}{2x^2+x-6}$

f) $\frac{2x^2+9x-5}{5x^2+3x-2}\cdot\frac{x^2+4x+3}{2x^2+5x-3}$

1.37. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}\cdot\frac{1}{x^2+8x+15}$

b) $\frac{x^3+5x^2-2x-10}{x^2-2}\cdot\frac{2}{x^2+10x+25}$

c) $\frac{2x^3-14x^2-8x+56}{2x^2-18}\cdot\frac{3x^2+7x-6}{x^2-9x+14}$

d) $\frac{2x^3+6x^2+x+3}{4x^2+11x-3}\cdot\frac{3x^2+2x-1}{2x^3+2x^2+x+1}$

e) $\frac{x^3-6x^2+5}{x^3-27}\cdot\frac{x^2+3x+9}{4x-4}$

f) $\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4x+4}\cdot\frac{8x+1}{3x^2-6x}$

1.38. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{1}{x^2}:\frac{x}{4}$

b) $\frac{2x}{5}:4:x$

c) $\frac{1}{2}+\frac{x-2}{x-1}:\frac{2}{3x}$

d) $4\cdot\frac{3}{x-1}:\frac{2}{x}$

e) $\frac{3}{x+1}:\frac{1}{2x+2}\cdot\frac{2}{x}$

f) $1-\frac{1}{x+6}:\frac{1}{36-x^2}$

1.39. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{1}{x}+\frac{x}{x-3}:\frac{x^2}{4x-12}$

b) $3x-\frac{4}{x+2}:\frac{1}{4-x^2}$

c) $\frac{5x}{x^2+10x+25}:\frac{10}{x^2-25}$

d) $\frac{5x}{9x^2-81}:\frac{1}{27-9x}$

e) $\frac{x^2-2x+1}{4x^2+2x+1}:\frac{3x^2-3}{8x^3-1}$

f) $\frac{125x^3+1}{x^2-4x}:\frac{25x^2-5x+1}{x-4}$

1.40. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3x-3}{5x+10}:\frac{3x^2-3}{10x^2-40}$

b) $\frac{2x^2+6x}{x^2+4x+4}:\frac{x^2+6x+9}{x^2-4}$

c) $\frac{25x^2-10x+1}{x^2-9}:\frac{10x-2}{5x+15}$

d) $\frac{2x^2+5x-3}{10x-20}:\frac{4x^2-1}{3x-6}$

e) $\frac{6x^2+13x-5}{4-x^2}:\frac{3x^2+20x-7}{-x^2-5x+14}$

f) $\frac{7x^2+13x-2}{3x^2-19x+20}:\frac{7x^2+6x-1}{2x^2-7x-15}$

1.41. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x^3+8x^2-x-8}{x^2+9x+8}:\frac{2x^2-2}{x+3}$

b) $\frac{x^3-5x^2+2x-10}{x^2+x-30}:\frac{x^3+2x}{x+6}$

c) $\frac{x^3-5x^2+3x-15}{x^3+x^2+3x+3}:\frac{2x-10}{3x+3}$

d) $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x^3+5x^2+x+5}:\frac{2x+4}{7x^2+7}$

e) $\frac{2x^3-x-1}{2x^2+x-3}:\frac{2x^2+2x+1}{4x^2-9}$

f) $\frac{x^3-x^2-4}{x^2+7x+10}:\frac{x^2+3x-10}{x^2+10x+25}$

Działania na ułamkach algebraicznych

1.42. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $3x^2:\left[2x^3:(x+1)\right]$

b) $2:x:\frac{3}{x}-\frac{2x+5}{x-4}$

c) $\left(5-\frac{2}{x}\right)\cdot\left(5+2x:x^2\right)$

d) $\left(1+\frac{1}{x+1}\right):\left(3-\frac{2}{x+1}\right)$

e) $\left(3-\frac{x}{x+2}\right):(x+3)$

f) $2-\frac{x^2-25}{x+3}\cdot\frac{4x+12}{x^2+5x}$

1.43. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{2-\frac{1}{x}}{4x^2-4x+1}$

b) $\frac{\frac{x^2-4}{3x-6}}{5-x}$

c) $\frac{\frac{x}{x-1}-\frac{2}{5}}{1+\frac{3x}{2}}$

d) $\frac{3-\frac{x+2}{x-1}}{-2x^2+7x-5}$

e) $\frac{\frac{x-1}{2}+\frac{x-3}{x}}{2-x}$

f) $\frac{\frac{2x}{x-1}-\frac{x}{x+2}}{\frac{x+5}{1-x^2}}$

1.44. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\left(\frac{1+a}{1-a}-\frac{1-a}{1+a}\right)\cdot\frac{1}{4a}$

b) $\frac{2+\frac{1}{a}}{a+2}\cdot\frac{a^2+4a+4}{2a+1}-\frac{2}{a}$

c) $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4a}{a+2}$

d) $\left(\frac{3}{a}-2+\frac{a}{3}\right)\cdot\frac{6a}{a^2-9}$

e) $3-\left(a-\frac{a-1}{a}\right):\frac{a^2-a+1}{4}$

f) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2a^3}\right):\left(a-1+\frac{1}{a}\right)$

1.45. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\left(\frac{1}{a^2+a}+\frac{a-2}{a+1}\right):\left(\frac{1}{a}-2+a\right)$

b) $1:\left(1-\frac{1}{a}-\frac{2}{a^2}\right)-\frac{4}{(a+1)(a-2)}$

c) $\left(a+1-\frac{3}{a-1}\right):\left(a-\frac{a^2}{a-1}\right)\cdot\frac{1}{2a^2-8}$

d) $\frac{-2a}{a+3}\cdot\left(a-2:\frac{1}{a+3}-\frac{9}{a}\right)$

e) $\left(\frac{a^4-1}{a^2+1}-3\right)\cdot\frac{a}{2a^2-8}-\frac{3}{a+1}$

f) $\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{3a}+\frac{3}{a+1}\right):\left(\frac{9}{a+1}+\frac{5}{a}\right)$

1.46. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{1}{2}+\frac{a^2-1}{2a+6}\cdot\frac{1+\frac{1}{a+2}}{1-\frac{1}{a+2}}$

b) $\frac{25-a^2}{4a+8}:\left[\frac{3-(a^2-1)}{a^2+4a+4}+\frac{3}{a+2}\right]$

c) $\left(a-\frac{a+3}{a-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{a-3}-\frac{1}{a+1}\right)$

d) $\left[\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\frac{3}{a^2-a}\right]:\frac{a^2-3a}{a-1}$

D **1.47.** Wykaż, że jeśli $a \neq 0$, to $6a:\left[\left(\frac{a+3}{2}\right)^2-\left(\frac{a-3}{2}\right)^2\right]=2$.

D **1.48.** Wykaż, że jeśli $a \in \mathbf{R}$, to $\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2+\left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2=1$.

D **1.49.** Wykaż, że jeśli $a\in \mathbf{R}-\left\{-2,\frac{1}{3},1,2\right\}$, to $\left(\frac{3a^2+2a-1}{3a-1}-\frac{3}{a-1}\right):\frac{2a^2-8}{a-1}=\frac{1}{2}$.

D **1.50.** Wykaż, że jeśli $a \in \mathbf{R}-\{-2, 0, 2\}$, to wartość wyrażenia $\frac{\frac{a}{4}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{2a}}\cdot\frac{2}{a^2-4}+3$ jest stała.

D **1.51.** Wykaż, że jeśli $a \neq -b$ i $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to wartość wyrażenia

$\left(\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{a^2+b^2}{a+b}\right):(3a+3b)$ jest stała.

D **1.52.** Wykaż, że jeśli $a \in \mathbf{R}-\{-2, 0\}$, to prawdziwa jest równość:

$$\left(\frac{a^2}{8}+\frac{1}{a}\right):\left(\frac{a}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{a}\right):\frac{(a-2)^2+8a}{1+\frac{2}{a}}=\frac{1}{2a}.$$

D **1.53.** Wykaż, że jeśli $a \in \mathbf{R}-\{-6, 3\}$, to zachodzi równość:

$$\left[\left(\frac{a-3}{3}\right)^2-\frac{(3+a)^2-12a}{9-3a}\right]\cdot\frac{9}{a^2+3a-18}=\frac{a}{a+6}.$$

D **1.54.** Wykaż, że jeśli $\frac{b}{3a+2b}=\frac{1}{5}$ i $b\neq\frac{-3a}{2}$, to $\frac{4a+5b}{11a-2b}=1$.

D **1.55.** Wykaż, że jeśli $a, b, c \in \mathbf{R}-\{0\}$ i $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, to $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{b^2}{c^2}$.

D **1.56.** Wykaż, że jeśli $a \neq 0$ i $b \neq 0$ oraz $\frac{2}{b}-\frac{3}{a}=2a-3b$, to $b=\frac{2}{3}a$ lub $ab=1$

1.57. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci. Podaj konieczne założenia.

a) $\left(\frac{1}{x+1}+x\right)\cdot\left(\frac{x}{x-1}-1\right)-\left(\frac{1}{x+1}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{x-1}-x\right)$

b) $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}}\cdot\left(1+\frac{(1+x^2)-4}{2x}\right)$

c) $\frac{x-1}{x^2+x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}-\sqrt{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{x-1}-2\right):\frac{2-x}{\sqrt{2}}$

d) $\left(\frac{3x+6}{x^3+x^2+x+1}-\frac{x+2}{x^3-x^2+x-1}\right):\left(\frac{5}{x^2+1}+\frac{3}{2x+2}-\frac{3}{2x-2}\right)$

1.58. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci. Podaj konieczne założenia.

a) $\left(\frac{3}{x-1}-\frac{3x^2+3x+3}{x^2-1}:\frac{x^4-x}{x^2-1}\right)\cdot\frac{x-x^2}{3}$

b) $\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}-\frac{1-x^2}{1+x^2}\right):\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)$

c) $\left[\frac{x^2-2x+4}{x-2}:\left(x^3+8\right)+\frac{x-2}{8+x^3}\cdot\frac{x^2-2x+4}{x^2-4}\right]\cdot\left(x^2-4\right)$

d) $\left(\frac{4x}{x+2}-\frac{x^3-8}{x^3+8}\cdot\frac{4x^2-8x+16}{x^2-4}\right):\frac{16}{x+2}$

1.59. Wyznacz wielomiany $P(x)$ oraz $Q(x)$ tak, aby zachodziła poniższa równość:

a) $\frac{P(x)}{3x+1}+\frac{Q(x)}{x-2}=\frac{11x-1}{3x^2-5x-2}$ oraz $\text{st.}P(x)=0$ i $\text{st.}Q(x)=0$

b) $\frac{P(x)}{x-2}-\frac{Q(x)}{x-4}=\frac{2x^2-10x-2}{x^2-6x+8}$ oraz $\text{st.}P(x)=1$ i $\text{st.}Q(x)=0$

c) $\frac{P(x)}{4x+5}+\frac{Q(x)}{3x-1}=\frac{4x^2+21x+1}{12x^2+11x-5}$ oraz $\text{st.}P(x)=0$ i $\text{st.}Q(x)=1$

1.60. Wyznacz liczby a, b, c tak, aby:

a) $\frac{a}{x-2}+\frac{bx+c}{x^2+2x+4}=\frac{x^2+10x}{x^3-8}$

b) $\frac{a}{x-1}-\frac{b}{2-x}-\frac{c}{x+3}=\frac{13x-21}{(x-1)(x-2)(x+3)}$

D **1.61.** Wykaż, że jeśli $a, b \in \mathbf{R}-\{0\}$, $a \neq -2b$ oraz $6ab-3a^2=2b^2-ab$, to $\frac{2a+b}{a+2b}=\frac{5}{4}$ lub $\frac{2a+b}{a+2b}=\frac{5}{7}$.

D **1.62.** Wykaż, że jeśli $a, b, c \in \mathbf{R}-\{0\}$ oraz $a+b+c=0$, to $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}=3$.

1.63. Wykaż, że jeśli a, b, c, x, y, z są różne od zera oraz $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ oraz $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, to $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Równania wymierne

1.64. Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{x+2}{x-2}=0$

b) $\frac{4x^2+9}{3x+6}=0$

c) $\frac{(2x-5)(3-x)}{x^2+9}=0$

d) $\frac{x(x-2)}{4x^2-4x+1}=0$

e) $\frac{(1-3x)^2}{(2x-3)(5-x)}=0$

f) $\frac{(x-1)(x+2)(x+5)}{x^2+4x-5}=0$

1.65. Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{\left(x^3-27\right)\left(x^2-16\right)}{6x-18}=0$

b) $\frac{\left(x^4-1\right)(x+2)}{x^2(x-1)}=0$

c) $\frac{x^2(x-1)+x-1}{4x+8}=0$

d) $\frac{x^4-10x^2+9}{x^2-4x+3}=0$

e) $\frac{2x^3+5x^2-3x}{x^2+6x+9}=0$

f) $\frac{\left(2x^2+4x\right)(3-x)}{x^3-4x^2}=0$

1.66. Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{x^3-4x^2+3}{x-1}=0$

b) $\frac{x^3-8x-7}{x^2-7}=0$

c) $\frac{3x^3-x^2-6x+2}{4-x^4}=0$

d) $\frac{x^5-8x^3+15x}{x^2+5x}=0$

e) $\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3+8}=0$

f) $\frac{x^6-3x^3+2}{x^2-x-2}=0$

1.67. Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{x}{2}=\frac{8}{x}$

b) $\frac{x}{3}-\frac{9}{x^2}=0$

c) $\frac{x}{x^2+3}=2$

d) $\frac{(x-2)^2}{2-x}=2-x$

e) $\frac{6}{x}=x-1$

f) $\frac{x+1}{x+2}=\frac{x+2}{x-3}$

1.68. Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{20-15x}{3x-4}-2x=0$

b) $\frac{x^3-x}{3x^2-3}-\frac{4}{6x-6}=0$

c) $\frac{x-5}{x+1}-1=x+1$

d) $\frac{3x-1}{x+2}-\frac{2x+3}{x+2}=x-2$

e) $\frac{x}{2x-3}+\frac{1}{3-2x}=2x-2$

f) $\frac{2x-1}{x-1}-x=\frac{x+2}{1-x}-1$

1.69. Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{4}{3x+2}-\frac{5}{x-2}=0$

b) $\frac{4}{x}-1=\frac{1}{x-1}$

c) $\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x-1}=1$

d) $\frac{2}{x-3}+\frac{4x}{x+2}=\frac{1}{3}$

e) $\frac{1}{2-x}+\frac{4}{x^3-8}=0$

f) $\frac{4x^2}{x^3+27}=\frac{1}{9-3x+x^2}$.

1.70. Rozwiąż równania:

a) $\frac{x+1}{x+2}-\frac{2x}{x+3}=-\frac{1}{5}$

b) $\frac{2x}{x-1}-\frac{x}{x+2}=\frac{2x-2}{x^2+x-2}$

c) $\frac{x-2}{x+1}-\frac{x+1}{3-x}=\frac{x^2+x+12}{x^2-2x-3}$

d) $\frac{x}{4-x}+\frac{2}{x+4}=\frac{2x+4}{16-x^2}$

e) $\frac{x^2+5x+4}{x^3+3x^2+3x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}=0$

f) $\frac{2x^3+x^2}{16x^2-4}=\frac{2}{2x-1}$.

1.71. Rozwiąż dane równania.

a) $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}=\frac{1}{9x^3}$

b) $\frac{3}{x}+\frac{2}{x+1}=\frac{3}{x-1}$

c) $\frac{2}{x^2+x}-\frac{1}{x}=\frac{6}{x^2}$

d) $\frac{3}{x^3+8}-\frac{1}{x^2-4}=\frac{2}{x^2-2x+4}$

e) $\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2-4x+4}=\frac{1}{x^2-2x}$

f) $\frac{1}{x^2-1}+\frac{4}{4-x^2}=\frac{x}{x^2+x-2}$

1.72. Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{x+1}{x^2+2x-3}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{2x+1}{2x^2-2x}$

b) $\frac{3x}{x^2-2x-3}-\frac{x}{x^2-x-2}+\frac{2}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x^3-4x^2+x+6}$

c) $\frac{3x}{x^2-4x+3}-\frac{x}{x^2+x-2}-\frac{8}{x^2-x-6}=\frac{11}{x^3-2x^2-5x+6}$

d) $\frac{5}{x^2-x-2}+\frac{x}{x^2+4x+3}-\frac{2x}{x^2+x-6}=\frac{9}{x^3+2x^2-5x-6}$

1.73. Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{3x^2-9x}{2}-\frac{12}{x^2-3x}=3$

b) $\frac{x^2-6x+3}{4}-2=\frac{5}{x^2-6x+3}$

c) $2\left(x^2+2x-4\right)=\frac{24}{x^2+2x-3}$

d) $\frac{2x^2+x-1}{3}-\frac{10}{3-3x-6x^2}=2\frac{1}{3}$

e) $x^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=8$

f) $4x^2+\left(\frac{4x}{x-2}\right)^2-20=0$

1.74. Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{2}{|1-3x|}=3$

b) $\frac{1}{|x+5|}=\frac{2}{|-4-x|}$

c) $\frac{|x+3|}{3}-\frac{1}{|2x+1|}=0$

d) $\frac{2}{|x|}+\frac{5}{|x-1|}=0$

e) $\frac{x}{x-1}-2=\frac{|x-2|}{2}$

f) $\frac{|2x-1|}{x+3}=|1-2x|$

1.75. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m\in \mathbf{R}$, dla których równanie $\frac{(x-3m)(x+m)}{x-6}=0$ ma jedno rozwiązanie. Podaj to rozwiązanie.

1.76. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m\in \mathbf{R}$, dla których równanie $\frac{(x-m)(x+2m)}{x^2-4}=0$ ma jedno rozwiązanie.

1.77. Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m, gdzie $m\in \mathbf{R}$, dla których równanie $\frac{m+2}{x+3}-\frac{x-1}{4}=0$ ma tylko jedno rozwiązanie. Dla znalezionych wartości parametru m podaj to rozwiązanie.

1.78. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a\in \mathbf{R}$, dla których równanie $\frac{x+4a}{xa+a}-2=0$ ma rozwiązanie. Podaj to rozwiązanie.

1.79. Dla jakich wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}$, równanie $\frac{2}{kx-2}=\frac{1}{9x-k}$ nie ma rozwiązań?

1.80. Oblicz wartość parametru a, $a \in \mathbf{R}$, dla którego jedyne rozwiązanie (x, y) układu równań $\begin{cases}(a-1)x-2y=3\\4x-(a+1)y=a\end{cases}$ spełnia zależność $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}$.

1.81. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \mathbf{R}$, dla których równanie $\frac{x-2p}{3x-2}=\frac{2}{x}$ ma dwa różne rozwiązania.

1.82. Dla jakich wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}$, równanie $2x^2-(9-k)=\frac{3x^4-91}{2x^2+9}$ ma dwa różne rozwiązania?

1.83. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \mathbf{R}$, dla których równanie $\frac{x+1}{2}-\frac{(2a-1)x-5}{x-1}=0$ ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2, które spełniają nierówność $|x_1+x_2|>x_1 \cdot x_2$.

Zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych

1.84. Licznik i mianownik dodatniego ułamka właściwego różnią się o 4. Wyznacz ten ułamek wiedząc, że jeśli jego licznik zwiększymy o 7, a mianownik podwoimy, to otrzymamy liczbę równą $\frac{5}{7}$.

1.85. Ułamek zwykły jest liczbą dodatnią, a jego licznik jest o 1 większy od mianownika. Wyznacz ten ułamek wiedząc, że różnica tego ułamka i 20% jego odwrotności jest równa 1,09.

1.86. Drogę długości 208 km, kierowca przejechał ze średnią prędkością V [km/h], w pewnym czasie t [h]. Gdyby jechał z prędkością o 13 km/h większą, wówczas trasę pokonałby w czasie o 48 minut krótszym. Oblicz V.

1.87. Turysta przebył pieszo 600 km. Każdego dnia pokonywał taką samą liczbę kilometrów. Gdyby codziennie przebywał o 10 km więcej, byłby w drodze o 5 dni krócej. Ile dni był turysta w drodze?

1.88. Właściciel hotelu zlecił dwóm zakładom krawieckim uszycie 140 zasłon. Pierwszy zakład miał uszyć 80 zasłon, zaś drugi 60 zasłon. W zakładzie pierwszym, zatrudniającym więcej pracowników, szyto dziennie o 8 zasłon więcej niż w zakładzie drugim. Drugi zakład wykonał zamówienie w terminie, a pierwszy o 1 dzień wcześniej niż ustalono. Ile zasłon dziennie szyto w każdym z zakładów?

1.89. Zakład stolarski otrzymał zamówienie na wykonanie 720 stołków. Aby zrealizować zamówienie na czas, postanowiono wykonywać dziennie jednakową liczbę stołków. Po wykonaniu $66\frac{2}{3}$% zamówienia usprawniono produkcję tak, że dzienna produkcja wzrosła o 4 stołki, a zamówienie zrealizowano o 5 dni wcześniej, niż planowano. W ciągu ilu dni planowano wykonać zamówienie?

1.90. Pod budowę bloku na osiedlu mieszkaniowym należało wykopać w określonym terminie 8000 m^3 ziemi. Praca została wykonana na 8 dni przed terminem, gdyż ekipa robotników przekraczała stale o 50 m^3 dzienny plan. Oblicz, w ciągu ilu dni miała być wykonana praca i o ile procent przekraczano codziennie plan.

1.91. Trzy zespoły robotników, pracując równocześnie, wykonują pewną pracę w ciągu jednego dnia. Pierwszy zespół wykonałby tę pracę samodzielnie o jeden dzień wcześniej niż drugi, a trzeci o 4 dni później niż pierwszy. W ile dni wykonałby tę pracę każdy z zespołów, pracując samodzielnie?

1.92. Dwie sekretarki wykonały pewną pracę w ciągu 12 godzin. Gdyby pierwsza wykonała sama połowę tej pracy, a następnie druga resztę, to potrzebowałyby na to 25 godzin. W ciągu ilu godzin każda z sekretarek, pracując oddzielnie, może wykonać tę pracę?

1.93. Ojciec i syn pracując razem wykonaliby pewną pracę w ciągu 12 dni. Ponieważ jednak po ośmiu dniach wspólnej pracy syn zachorował, ojciec, pracując sam, potrzebował jeszcze pięciu dni do ukończenia pracy. W ciągu ilu dni każdy z nich pracując sam, mógłby wykonać tę pracę?

1.94. Do mleczarni dostarczono 2400 kg mleka o zwartości 4% tłuszczu. Ile kilogramów śmietanki o zawartości tłuszczu 12% należy odwirować z tego mleka, aby otrzymać mleko o zawartości 2% tłuszczu?

1.95. Kran A napełnia pojemnik w czasie o 6 minut krótszym, niż kran B. Jeśli obydwa krany odkręcimy jednocześnie, to pojemnik zostanie napełniony w ciągu 4 minut. Ile minut potrzeba na napełnienie pojemnika przez każdy z kranów oddzielnie?

1.96. Przez jeden z kranów woda wypływa ze zbiornika, a przez drugi do niego wpływa. Gdy otworzymy oba krany, zbiornik zostanie napełniony wodą w ciągu 12 godzin. W ciągu ilu godzin pierwszy kran opróżnia pełny zbiornik, a drugi napełnia pusty zbiornik, jeżeli wiadomo, że czas napełniania zbiornika jest o godzinę krótszy od czasu jego opróżniania?

1.97. Pusty basen można napełnić wodą z dwóch kranów. Jeżeli otworzymy pierwszy kran na 5 godzin, a następnie zamkniemy go i otworzymy drugi kran na 10 godzin, to basen napełni się w 35%. Jeżeli natomiast otworzymy jednocześnie oba krany, to basen zostanie całkowicie napełniony w ciągu $22\frac{2}{9}$ godzin. Ile godzin potrzeba do napełnienia całego basenu za pomocą każdego kranu oddzielnie?

1.98. Z miejscowości A i B, odległych od siebie o 330 km, wyruszyły naprzeciw siebie po równoległych torach dwa pociągi. Pociąg jadący z miejscowości A do B wyjechał o godzinę wcześniej i jechał ze średnią prędkością o 5 km/h mniejszą niż pociąg jadący z miejscowości B do A. Pociągi spotkały się w odległości 180 km od miasta A.

a) Oblicz średnie prędkości obu pociągów.

b) Ile godzin jechał pociąg z miejscowości A do miejsca spotkania obu pociągów?

1.99. Dwaj rowerzyści wyjechali naprzeciw siebie z miejscowości A i B, odległych od siebie o 96 km. Rowerzysta jadący z miejscowości A do B wyjechał o godzinę później i jechał ze średnią prędkością o 3 km/h mniejszą niż rowerzysta jadący z miejscowości B do A. Rowerzyści spotkali się w odległości 36 km od miasta A. Wiedząc, że obaj jechali z prędkościami większymi niż 10 km/h, oblicz średnie prędkości obu rowerzystów.

1.100. Na drodze długości 36 m przednie koło ciągnika wykonało o 6 obrotów więcej niż tylne. Gdyby obwód każdego koła zwiększyć o 1 m, to na tej samej drodze przednie koło wykonałoby o 3 obroty więcej niż tylne. Oblicz obwody kół ciągnika.

1.101. Drogę z miejscowości A do miejscowości B długości 135 km motocyklista przebył ze stałą prędkością. Drogę powrotną postanowił pokonać w tym samym czasie. Z miejscowości B przez pół godziny motocyklista jechał z taką samą prędkością jak z A do B, a następnie zatrzymał się na 12 minut. Aby zdążyć na czas, pozostałą część drogi przebył z prędkością o 6 km/h większą. Z jaką prędkością jechał motocyklista z miejscowości A do B?

1.102. Z miejscowości A i B wyruszyli jednocześnie dwaj turyści idący ze stałymi prędkościami. Pierwszy przeszedł drogę z A do B i zaraz wrócił do A. Drugi poszedł z B do A i wrócił do B. Turyści minęli się po raz pierwszy w odległości 4 km od A, drugi raz w odległości 3 km od B. Jaka jest odległość z A do B?

1.103. Przejazd łódką 20 km w dół rzeki i z powrotem trwał 7 godzin. Równocześnie z łódką z tego samego miejsca wypłynęła tratwa, którą spotkano w drodze powrotnej w odległości 12 km od miejsca wypłynięcia. Oblicz prędkość wody.

Nierówności wymierne

1.104. Rozwiąż daną nierówność.

a) $\frac{5-x}{6+x}>0$ b) $\frac{2-x}{x+3}\leqslant 0$ c) $\frac{x(x-1)}{x-4}\geqslant 0$

d) $\frac{(5-x^2)}{(x+7)(x+1)}\geqslant 0$ e) $\frac{-x^2+4x-3}{x^3}<0$ f) $\frac{2x^2-5x+2}{2-x^2}\leqslant 0$

1.105. Rozwiąż daną nierówność.

a) $\frac{5x}{x^2-8x}>0$ b) $\frac{x+3}{x^2-9}\leqslant 0$ c) $\frac{-6-3x}{x^2+1}<0$

d) $\frac{4}{9-x^2}\geqslant 0$ e) $\frac{(3-2x)^2}{x^2+1}\leqslant 0$ f) $\frac{x^2+4x+4}{2x^2+x+3}>0$

1.106. Rozwiąż daną nierówność.

a) $\frac{4}{x}\leqslant\frac{1}{3}$ b) $\frac{x-3}{2x-1}>1$ c) $\frac{x-3}{x+5}\geqslant\frac{2x+11}{x+5}$

d) $\frac{x+1}{x-2}>\frac{3}{x-2}-\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{x-3}\geqslant\frac{1}{x+2}$ f) $\frac{2x^2}{x^2+3}>2$

1.107. Rozwiąż daną nierówność.

a) $\frac{x}{x^2+6x+9}\leqslant\frac{1}{x+3}$ b) $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}<\frac{4}{3}$ c) $4x+5\geqslant\frac{5x^2+4}{x}$

d) $\frac{1-4x^2}{6x-3}\geqslant 0$ e) $\frac{2x-3}{2x^2+1}<1$ f) $\frac{x^3-2x^2+x}{4x^2-25}\geqslant 0$

1.108. Rozwiąż daną nierówność.

a) $x^2+x-4>\frac{4}{x}$ b) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}>\frac{3}{x+2}$

c) $\frac{x+3}{x+1}+\frac{8}{x-5}\leqslant\frac{x-13}{x^2-4x-5}$ d) $\frac{1}{3x-2-x^2}\geqslant\frac{3}{7x-4-3x^2}$

e) $\frac{x^2(3-3x)}{x^3+8}\geqslant\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2-2x+4}$ f) $\frac{x^3+10}{x^3-27}+\frac{1}{3-x}\leqslant\frac{1}{9+3x+x^2}$

1.109. Rozwiąż daną nierówność.

a) $\dfrac{-3x^2-x+10}{x+2} \geqslant 2x$ b) $\dfrac{-2x^2+4x+6}{x-3} \leqslant x$

c) $\dfrac{x^3-4x^2+x-4}{x^4-1} > 0$ d) $\dfrac{2x^3-x^2-6x+3}{1-4x^2} < 0$

e) $\dfrac{5x^2-x^4}{x^2-1} \geqslant \dfrac{4}{x^2-1}$ f) $\dfrac{3x^3+8x^2+2x}{x^2-4} \leqslant \dfrac{-1}{x+2}$

1.110. Rozwiąż daną nierówność.

a) $\left(\dfrac{3}{x}-2\right)\cdot\left(\dfrac{3}{x}+4\right) > 0$ b) $\dfrac{10}{x+1}+\dfrac{3}{(x+1)^2} \leqslant 8$

c) $\left(\dfrac{x}{x-3}-1\right)\cdot\left(\dfrac{2x}{x-3}+7\right) < 0$ d) $\dfrac{x^2}{4x^2+4x+1} \geqslant \dfrac{8x}{2x+1}$

e) $\dfrac{x^4}{(x-1)^2}-\dfrac{6x^2}{x-1}+8 \leqslant 0$ f) $\dfrac{7(x-2)^2}{x}+\left(\dfrac{4x-x^2-4}{x}\right)^2 \leqslant 8$

1.111. Rozwiąż dany układ nierówności.

a) $\begin{cases} \dfrac{2x+15}{9} > \dfrac{1}{5}(x-1)+\dfrac{x}{3} \\ \dfrac{x+1}{x} < 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+x \leqslant 12 \\ \dfrac{8}{x^2+2x+1} \leqslant x+1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^3-4x+4 \geqslant x^2 \\ \dfrac{x+7}{x+2} \geqslant \dfrac{x+1}{x-1} \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x^2-x^3 \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x^2-2x-15} > \dfrac{1}{x^2-x-2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1} < \dfrac{8}{x^2-1} \\ \dfrac{1}{x-2} < 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{5}{x+3}-\dfrac{1}{x-1} < 1 \\ \dfrac{4}{x^2+5x}+\dfrac{x+1}{x+5} < \dfrac{2}{x} \end{cases}$

1.112. Rozwiąż daną nierówność.

a) $\dfrac{3}{|x-1|} > \dfrac{1}{3}$ b) $|x-1| \leqslant \dfrac{2}{x}$ c) $\left|\dfrac{2x-5}{x+1}\right| \leqslant 2$

d) $\left|\dfrac{x-3}{2x+8}\right| > 1$ e) $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \geqslant 1$ f) $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3} \geqslant 2x$

1.113. Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru a, $a \in \boldsymbol{R}$, dla których układ równań $\begin{cases} ax-4y=a+1 \\ -2x+2ay=-1 \end{cases}$ jest oznaczony i spełnia go para (x, y) taka, że $\dfrac{x}{y} \geqslant 0$.

1.114. Dla jakich wartości parametru k, $k \in \boldsymbol{R}$, równanie $(k-1)x^2+2(k+1)x+k-2=0$ ma dwa różne rozwiązania ujemne?

1.115. Dla jakich wartości parametru m, gdzie $m \in \boldsymbol{R}$, zbiorem rozwiązań nierówności $\dfrac{(m-2)x^2+x+m-1}{-3x^2+2x-5} > 0$ jest zbiór liczb rzeczywistych?

Dowodzenie z zastosowaniem średniej arytmetycznej, średniej geometrycznej i średniej kwadratowej kilku liczb

D 1.116. Wykaż, że jeśli suma dodatnich liczb a i b jest równa 3, to $a\cdot b \leqslant 2\frac{1}{4}$.

D 1.117. Wykaż, że jeśli liczby x, y, z są dodatnie oraz $9x + y + 3z = 18$, to $8 - xyz \geqslant 0$.

D 1.118. Wykaż, że jeśli dodatnie liczby p, q, r spełniają nierówność $p + q + r > 2$, to $3\left(p^2+q^2+r^2\right) > 4$.

D 1.119. Wykaż, że jeśli iloczyn liczb dodatnich a, b jest większy od $\frac{1}{4}$, to $a^2+b^2 > \frac{1}{2}$.

D 1.120. Wykaż, że jeśli x i y są liczbami dodatnimi oraz $xy=\frac{1}{4}$, to $4(1+x)\cdot(1+y) \geqslant 9$.

D 1.121. Wykaż, że jeśli liczby x, y są dodatnie, to $\dfrac{2x^2+2y^2}{xy}+3\cdot\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right) \geqslant 10$.

D 1.122. Wykaż, że jeśli $x > 0$, to $x^3+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{54}{x} \geqslant 18$.

D 1.123. Wykaż, że jeśli $a \neq 0$, to $a^4 + \frac{128}{a^2} \geqslant 48$.

D 1.124. Wykaż, że jeśli liczby a i b są dodatnie oraz $a + b = 12$, to $(2 + a) \cdot (2 + b) \leqslant 64$.

D 1.125. Wykaż, że jeśli liczby x, y, z są dodatnie oraz $xy = 9$, to $(x+y)\cdot(y+z) \geqslant (z+3)^2$.

D 1.126. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c, d są dodatnie, to $\frac{2a+c}{b} + \frac{b+5d}{c} + \frac{2bd+5ac}{ad} \geqslant 16$.

D 1.127. Wykaż, że jeśli liczby a i b są dodatnie, to $5\cdot\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)+\frac{6(a+b)^2-12ab}{ab} \geqslant 22$.

D 1.128. Wykaż, że jeśli liczby x, y, z są dodatnie, to $xy(3x+2y-4z)+yz(y+3z-4x)+xz(x+2z-4y) \geqslant 0$.

D 1.129. Wykaż, że jeśli dodatnie liczby a i b spełniają nierówność $a + b \geqslant 1$, to $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$.

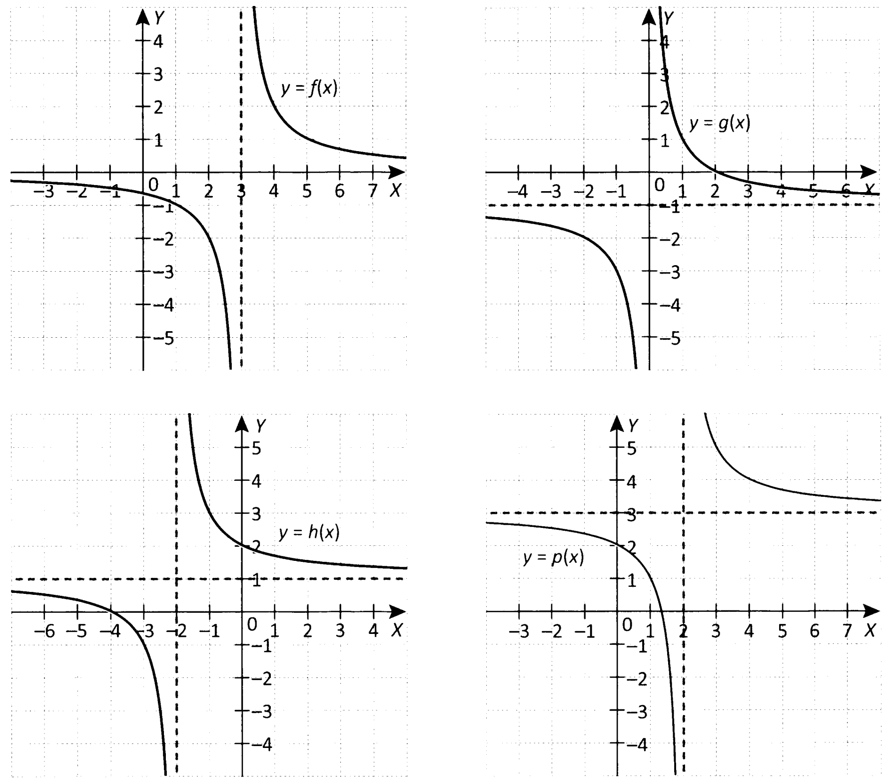
D 1.130. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie, to $\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{bc}} \geqslant 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)$.

Funkcja homograficzna

1.131. Wykres proporcjonalności odwrotnej $y = \frac{2}{x}$ przesunięto o pewien wektor $\vec{u}$ i otrzymano wykres funkcji, przedstawiony na poniższym rysunku.

a) Podaj współrzędne wektora $\vec{u}$.
b) Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymano.
c) Podaj dziedzinę i zbiór wartości otrzymanej funkcji.

d) Oblicz miejsce zerowe tej funkcji (jeśli istnieje).
e) Odczytaj z rysunku zbiór wszystkich argumentów, dla których otrzymana funkcja przyjmuje wartości ujemne.



1.132. Wykres funkcji $y = \frac{-4}{x}$, gdzie $x \neq 0$, przesunięto równolegle o wektor $\vec{v} = [0, 2]$ i otrzymano wykres funkcji f.

a) Napisz wzór funkcji f.
b) Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f.
c) Wyznacz argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość równą -2.
d) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu $\sqrt{3} - 1$.

1.133. Wykres funkcji $y = \frac{3}{x}$, gdzie $x \neq 0$, przesunięto równolegle o wektor $\vec{u} = [2, -4]$ i otrzymano wykres funkcji g.

a) Napisz wzór funkcji g i podaj dziedzinę tej funkcji.
b) Podaj współrzędne punktu, który jest środkiem symetrii wykresu funkcji g.

c) Oblicz współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji g z osiami układu współrzędnych.

d) Naszkicuj wykres funkcji g i omów własności tej funkcji.

1.134. Wykres funkcji $y=\frac{1}{x}$, gdzie $x\neq 0$, przesunięto równolegle o wektor $\vec{v}=[-4,3]$ i otrzymano wykres funkcji h.

a) Napisz wzór funkcji h.

b) Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji h.

c) Sprawdź, czy do wykresu funkcji h należy punkt $A\left(-9,\ 2\frac{4}{5}\right)$.

d) Wyznacz współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji h i wykresu funkcji liniowej $y = x + 7$.

1.135. Wykres funkcji $y=\frac{-3}{x}$ przesunięto równolegle o pewien wektor i otrzymano wykres funkcji g, którego środkiem symetrii jest punkt $S(2, -1)$.

a) Napisz wzór funkcji g w postaci ilorazu dwóch wielomianów stopnia pierwszego. Podaj dziedzinę tej funkcji.

b) Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji g i osi OY.

1.136. Wykres funkcji g otrzymamy, przesuwając równolegle wykres funkcji $y=\frac{a}{x}$, $x\neq 0$, o wektor $\vec{u}$. Oblicz a i współrzędne wektora $\vec{u}$.

a) $g(x)=\frac{x-4}{x+1}$ b) $g(x)=\frac{3x+8}{x+2}$ c) $g(x)=\frac{-2x+1}{x-1}$ d) $g(x)=\frac{5x-6}{-x-2}$

1.137. Naszkicuj w osobnych układach współrzędnych wykresy funkcji: $f(x)=\frac{x}{x-4}$, $g(x)=\frac{2x+4}{x+2}$, $h(x)=\frac{x+3}{x+2}$. Która z funkcji f, g, h nie jest funkcją homograficzną?

1.138. Dany jest wzór funkcji homograficznej f. Podaj dziedzinę, zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności tej funkcji.

a) $f(x)=\frac{4}{x+2}$ b) $f(x)=\frac{2x-1}{x}$ c) $f(x)=\frac{x}{x-1}$ d) $f(x)=\frac{x+1}{x+4}$

1.139. Dany jest wzór funkcji homograficznej f. Wyznacz argument, dla którego ta funkcja przyjmuje wartość w.

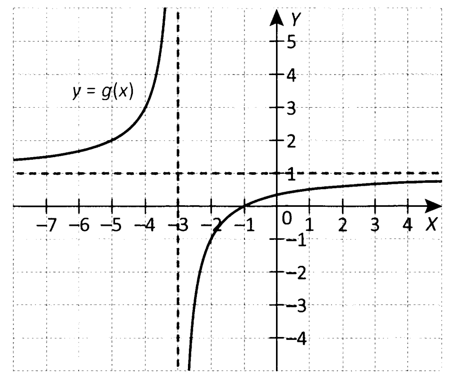
a) $f(x)=\frac{2x-5}{9x+27}$, $w=-5$, b) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, $w=2+\sqrt{3}$

1.140. Funkcja homograficzna $f(x)=\frac{2x+b}{x+4}$, gdzie $x\in \mathbf{R}-\{-4\}$, dla argumentu -3 przyjmuje wartość 5. Oblicz współczynnik b i naszkicuj wykres funkcji f.

1.141. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji homograficznej $g(x)=\frac{x+b}{x+c}$, gdzie $x\neq -c$. Miejscem zerowym funkcji g jest liczba -1.

a) Oblicz współczynniki b i c.

b) Rozwiąż graficznie równanie $g(x) = -x - 1$.



1.142. Wykres funkcji homograficznej $f(x)=\frac{ax-10}{x+b}$, gdzie $x\neq -b$, przecina oś OY w punkcie o rzędnej $-3\frac{1}{3}$. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba $-2\frac{1}{2}$.

a) Wyznacz wartości współczynników a i b.

b) Naszkicuj wykres funkcji f.

c) Odczytaj z wykresu zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie.

1.143. Miejscem zerowym funkcji homograficznej $f(x)=\frac{a-x}{x+b}$ jest liczba 3. Funkcja f jest malejąca w przedziałach: $(-\infty, -8)$, $(-8, +\infty)$.

a) Oblicz wartości współczynników a i b.

b) Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja f i funkcja $h(x)=\frac{-2x+6}{x+9}$ przyjmują tę samą wartość.

1.144. Dane są funkcje: $f(x)=\frac{2}{x-3}$, gdzie $x\neq 3$ oraz $g(x)=\frac{-x-2}{x}$, gdzie $x\neq 0$.

a) Naszkicuj wykresy funkcji f i g we wspólnym układzie współrzędnych.

b) Oblicz współrzędne punktów, w których przecinają się wykresy funkcji f i g.

1.145. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji homograficznej f i wykresu funkcji kwadratowej g. Naszkicuj wykresy obu funkcji we wspólnym układzie współrzędnych.

a) $f(x)=\frac{-2x}{x+1}$, gdzie $x \neq -1$ oraz $g(x)=-x^2$

b) $f(x)=\frac{3x+10}{x+2}$, gdzie $x \neq -2$ oraz $g(x)=(x+1)^2-5$

Zastosowanie wiadomości o funkcji homograficznej w zadaniach

D **1.146.** Wykaż na podstawie definicji, że funkcja homograficzna

a) $f(x)=-1-\frac{3}{x+2}$ jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, -2)$, $(-2, +\infty)$

b) $f(x)=\frac{2x}{x-3}$ jest malejąca w przedziałach $(-\infty, -3)$, $(-3, +\infty)$

c) $f(x)=\frac{x-6}{x-4}$ jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, 4)$, $(4, +\infty)$.

D **1.147.** Wykaż na podstawie definicji, że funkcja homograficzna h jest różnowartościowa.

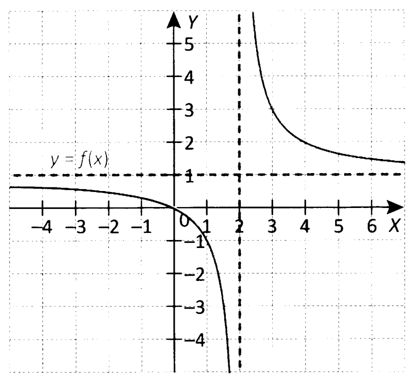
a) $h(x)=6-\frac{7}{x+1}$, $x \in \mathbf{R}-\{-1\}$

b) $h(x)=\frac{2-3x}{4x+5}$, $x \in \left\{-1\frac{1}{4}\right\}$

1.148. Na rysunku obok przedstawiony jest frągment wykresu funkcji homograficznej $f(x)=\frac{ax+1}{cx+d}$. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba -1. Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

a) Wyznacz współczynniki a, c, d.

b) Rozwiąż równanie $2 \cdot f(x) + (x-1)^2 = 4$.



1.149. Do wykresu funkcji homograficznej $f(x)=\frac{ax+b}{x+c}$ należy punkt $P(-6, 3)$. Funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, -1)$, $(-1, +\infty)$. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba $1\frac{1}{2}$.

a) Oblicz współczynniki a, b, c.

b) Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje większe wartości niż funkcja $g(x)=\frac{5x+3}{4x+7}$.

1.150. Z podanego równania wyznacz y jako funkcję zmiennej x. Następnie podaj dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.

a) $xy - x - 3y + 1 = 0$

b) $\frac{1}{y-1}+\frac{1}{x+1}=1$

c) $\frac{1}{y+2}=1+\frac{1}{x+1}$

1.151. Naszkicuj wykres funkcji f i omów jej własności.

a) $f(x)=\left|\frac{5-3x}{x-1}\right|$

b) $f(x)=\frac{|x|}{x-1}$

c) $f(x)=\frac{|x|+1}{|x|-1}$

1.152. Rozwiąż dane równanie, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $|x|+\frac{2}{x+1}=0$

b) $\frac{x^2-1}{2}=\frac{4}{|x|-2}$.

1.153. Rozwiąż graficznie daną nierówność.

a) $\left|\frac{4}{x}-2\right| \leqslant x^2-2x+3$

b) $5-2|x-4|>\frac{x+1}{x-3}$.

1.154. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniające dane równanie.

a) $y=\frac{2x-11}{x-3}$

b) $\frac{4}{x-6}=y-1$

c) $xy + 3x - 2y = 9$

d) $\frac{2}{x-2}+\frac{1}{y+1}=1$

D **1.155.** Wykaż, że istnieją tylko trzy pary liczb naturalnych (a, b), które spełniają równość $ab - 4(a - b) = 0$.

1.156. Dana jest funkcja $f(x)=\frac{3-x}{x+2}$, gdzie $x\in \mathbf{R}-\{-2\}$. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem $g(x)=\frac{|f(x)|}{f(x)}$.

1.157. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\left|\frac{-2x+1}{x+1}\right|$. Następnie ustal, dla jakich wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, równanie $\left|\frac{-2x+1}{x+1}\right|=\frac{m+3}{m+2}$ ma dwa rozwiązania różnych znaków.

1.158. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}-\{0\}$, dla których równanie $3+\frac{4}{|x|-2}=\frac{k+3}{k}$ ma rozwiązanie.

1.159. Dany jest układ równań $\begin{cases} px+2y=1 \\ 2x+py=2 \end{cases}$ z niewiadomymi x, y i z parametrem p, $p \in \mathbf{R}$.

a) Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których ten układ ma rozwiązanie.

b) Naszkicuj wykres funkcji $f(p)=\left|\frac{y}{x}\right|$, gdzie para (x, y) jest rozwiązaniem tego układu równań i $x \neq 0$.

1.160. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których funkcja $f(x)=\frac{5x+m^2+2m-18}{x-2}$ jest funkcją homograficzną, malejącą w przedziałach $(-\infty, 2)$, $(2, +\infty)$.

1.161. Naszkicuj wykres funkcji $g(m)=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, gdzie x_1, x_2 są różnymi rozwiązaniami równania kwadratowego $(m-5)x^2-4mx+m-2=0$.

Funkcje wymierne

1.162. Określ dziedzinę funkcji wymiernej f.

a) $f(x)=\frac{8x+5}{x^3-5x^2+6x}$

b) $f(x)=\frac{2x^5}{x^4+3x^2-4}$

c) $f(x)=\frac{x^2-7}{x^3+3x^2+3x+1}$

d) $f(x)=\frac{2}{x^3-4x^2-4x+16}$

e) $f(x)=\frac{x^3-2x}{x^3-9x^2+8}$

f) $f(x)=\frac{x^4+3}{x^3+3x^2-9x+5}$

1.163. Podaj wzór przykładowej funkcji wymiernej, której dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}-\{-3, 3\}$ i która dla argumentów -2 i 2 przyjmuje wartość 1.

1.164. Podaj wzór przykładowej funkcji wymiernej, której dziedziną jest zbiór $\mathbf{R}-\{-1, 2, 3\}$ i której wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 5)$.

1.165. Podaj wzór przykładowej funkcji wymiernej określonej w zbiorze $\mathbf{R}-\{0\}$, która jest parzysta i dla argumentu 1 przyjmuje wartość 3.

1.166. Podaj wzór przykładowej funkcji wymiernej określonej w zbiorze $\mathbf{R}-\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$, która jest nieparzysta oraz dla argumentu -2 przyjmuje wartość -8.

D 1.167. Dana jest funkcja wymierna $f(x)=\frac{2x^2-5x-3}{(x-3)^2}$. Wykaż, że:

a) funkcja f jest różnowartościowa

b) liczba 2 nie należy do zbioru wartości funkcji f.

1.168. Funkcja wymierna $h(x)=\frac{x^3+2x^2-9x+6k}{x+3k}$ dla argumentu 1 przyjmuje wartość 3.

a) Oblicz k.

b) Podaj miejsca zerowe funkcji h.

c) Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja h przyjmuje wartości nieujemne.

1.169. Liczba 2 jest miejscem zerowym funkcji wymiernej $f(x)=\frac{x^3+ax+6}{x-1}$.

a) Oblicz współczynnik a.

b) Wyznacz pozostałe miejsca zerowe funkcji f.

c) Naszkicuj wykres funkcji f.

d) Podaj przedziały monotoniczności funkcji f.

1.170. Dana jest funkcja wymierna $h(x)=\frac{4}{(x-1)^2}$, gdzie $x\neq 1$.

a) Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja h przyjmuje wartości większe od 1.

D b) Wykaż na podstawie definicji, że funkcja h jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 1)$ i malejąca w przedziale $(1, +\infty)$.

1.171. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbb{R}$, dla których dziedziną danej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych.

a) $f(x)=\frac{x^2+5}{2x^2-(m+3)x+8}$ b) $g(x)=\frac{mx-3}{(m-1)x^2+(1-m)x+6}$

c) $p(x)=\frac{3x^2+2m}{(m^2-4)x^2+(m+2)x+1}$ d) $h(x)=\frac{1}{mx^4+(m+1)x^2+2m+2}$

1.172. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbb{R}$, dla których funkcja wymierna $h(x)=\frac{4x^2-8x+m}{x+1}$ ma tylko jedno miejsce zerowe. Dla wyznaczonych wartości m, oblicz miejsce zerowe funkcji h.

1.173. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \mathbb{R}$, dla których funkcja wymierna $g(x)=\frac{4x^2-2(p-3)x+p}{2x^2+x-3}$ ma dwa miejsca zerowe.

1.174. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbb{R}$, dla których funkcja wymierna $f(x)=\frac{x^2-2kx}{x^3+2x^2-8x}$ nie ma miejsc zerowych. Dla wyznaczonych wartości k podaj zbiór wartości funkcji f.

1.175. Wyznacz największą wartość funkcji wymiernej f oraz argument, dla którego ta wartość jest przyjmowana.

a) $f(x)=\frac{40}{x^2+4x+24}$ b) $f(x)=\frac{10x^2+4x+6}{5x^2+2x+1}$

1.176. Wyznacz zbiór wartości funkcji wymiernej $g(x)=\frac{2x^2+x}{2x^2+x+3}$.

D **1.177.** Dana jest funkcja $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, gdzie $x\in\mathbb{R}$. Wykaż, że:

a) w przedziałach $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ funkcja f jest malejąca

b) zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -1, 1\rangle$.

1.178. Wyznacz zbiór wartości funkcji wymiernej $f(x)=2-\frac{10x}{x^2+25}$.

D **1.179.** Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x:

a) $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{x}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}$ b) $2\leqslant\frac{3x^2-4x+12}{x^2+4}\leqslant 4$.

D **1.180.** Dana jest funkcja wymierna $f(x)=\frac{x^2+1}{2x}$, gdzie $x\in\mathbb{R}-\{0\}$. Wykaż, że jeśli funkcja f dla dwóch różnych argumentów przyjmuje tę samą wartość, to jeden z tych argumentów jest odwrotnością drugiego.

Test sprawdzający do rozdziału 1.

1. Dziedziną ułamka algebraicznego $\frac{3x}{x(x-2)}$ jest zbiór:

A. $\mathbb{R}-\{0\}$ B. $\mathbb{R}-\{2\}$ C. $\mathbb{R}-\{-2\}$ D. $\mathbb{R}-\{0, 2\}$.

2. Jeśli $a=2-\sqrt{3}$, to liczba $\frac{a-2}{a+1}$ jest równa:

A. $\frac{-\sqrt{3}-1}{2}$ B. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$ D. $1-\sqrt{3}$.

3. Po skróceniu ułamka $\frac{2x^2-7x+3}{3-x}$, gdzie $x\neq 3$, otrzymamy wyrażenie:

A. $-2x^2+7x$ B. $1-2x$ C. $2x-1$ D. $\frac{1}{2}-x$.

4. Po rozszerzeniu ułamka $\frac{1}{2x-3}$, gdzie $x\neq 1\frac{1}{2}$, otrzymano ułamek, którego mianownik jest wielomianem $2x^3-3x^2+2x-3$. Wówczas licznik otrzymanego ułamka jest równy:

A. $2x^3-3x^2$ B. x^2+1 C. $-3x^2+2x$ D. x^2-1.

5. Suma rozwiązań równania $\frac{(3x+2)(6x-18)(3x+1)}{x^2-9}=0$ wynosi:

A. 2 B. –15 C. –1 D. 0.

6. Równanie $\frac{x-5}{x^2+4x}=\frac{1}{x}$

A. ma tylko jedno rozwiązanie B. ma dwa rozwiązania
C. jest sprzeczne D. jest tożsamościowe.

7. Zbiorem wartości funkcji $f(x)=\frac{5}{x}-2$ jest zbiór:

A. $\boldsymbol{R}-\{0\}$ B. $\boldsymbol{R}-\{5\}$ C. $\boldsymbol{R}-\{-2\}$ D. $\boldsymbol{R}-\{-2, 0\}$.

8. Aby otrzymać wykres funkcji homograficznej $y=\frac{3-x}{x+2}$, wystarczy wykres funkcji $f(x)=\frac{5}{x}$ przesunąć równolegle:

A. o 2 jednostki w lewo i 1 jednostkę w dół
B. o 2 jednostki w prawo i 1 jednostkę w górę
C. o 2 jednostki w lewo i 3 jednostki w górę
D. o 2 jednostki w prawo i 3 jednostki w dół.

9. Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$, gdzie $x\neq 3$. Wskaż zdanie <u>fałszywe</u>.

A. Miejsce zerowe funkcji f jest liczbą ujemną.
B. Funkcja f jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, 3)$, $(3, +\infty)$.
C. Środkiem symetrii wykresu funkcji f jest punkt $(3, 1)$.
D. Wykres funkcji przecina oś OY poniżej punktu $O(0, 0)$.

10 Ile liczb całkowitych należy do dziedziny funkcji homograficznej $f(x)=2-\frac{5}{x+3}$, dla których funkcja f przyjmuje wartości, będące liczbami pierwszymi?

A. jedna B. dwie C. trzy D. cztery

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1.

11. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{4x-6}{3x}+\left[x-\frac{4(x-1)}{x}\right]:(2-x)$ b) $\left(\frac{5}{x-4}+\frac{4}{4-x}\right)\cdot\left(\frac{x^2+16}{2x}-4\right)+2:\frac{x^2}{x-1}$

12. Rozwiąż dane równanie.

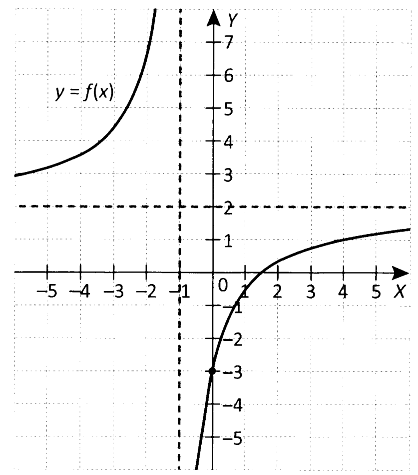
a) $\frac{12x^3+4x^2-3x-1}{2x-1}=0$ b) $(x-2)^2=\frac{8}{2-x}$

c) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{3x}{x^3-1}$ d) $\frac{x}{x+1}+\frac{3}{2}=\frac{2}{x}$

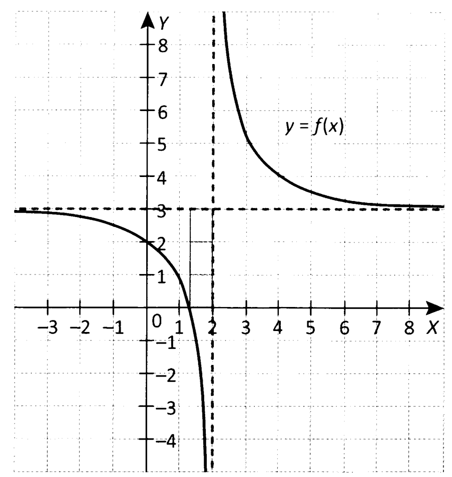
e) $\frac{x+3}{x+2}+1=\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{x-3}{2-x}$ f) $\frac{1}{6}x^2-\frac{1-2x}{x-6}=\frac{x}{6x-36}$

13. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji homograficznej $f(x)=\frac{a}{x+b}+c$, gdzie $a\neq 0$ i $x\neq -b$. Wykres przecina oś OY w punkcie $(0, -3)$.

a) Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f.
b) Wyznacz współczynniki a, b, c.
c) Oblicz miejsce zerowe funkcji f.
d) Podaj zbiór argumentów, dla których ta funkcja przyjmuje wartości nieujemne.



14. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji $f(x)=\frac{3x-4}{x-2}$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}-\{2\}$. Oblicz pole prostokąta zaznaczonego na tym rysunku wiedząc, że jeden z jego wierzchołków należy do wykresu funkcji f, a pozostałe odpowiednio do prostych $x = 2$, $y = 3$.



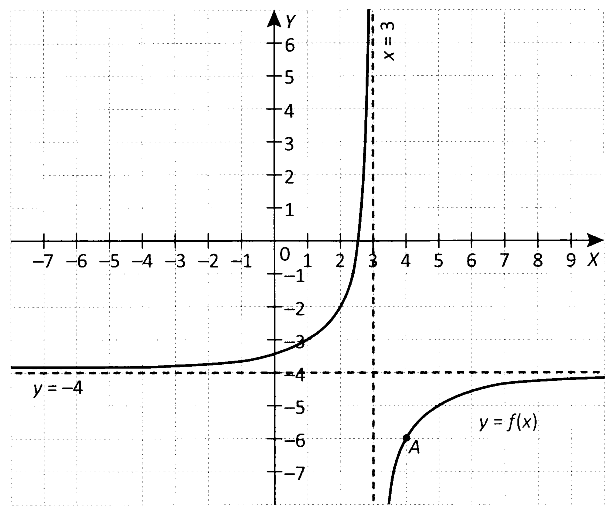
15. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji homograficznej $f(x)=\frac{-4x+b}{x+c}$, gdzie $x \neq -c$.

Wiedząc, że do wykresu funkcji f należy punkt $A(4, -6)$:

a) wyznacz współczynniki b, c.

b) ustal znak liczby $|f(-\pi)|+f(\pi)$.

c) sprawdź, czy punkt $B\left(1-\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}\right)$ należy do wykresu funkcji f.



16. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykres funkcji homograficznej $f(x)=\frac{2x+11}{x+4}$, gdzie $x \in \mathbf{R}-\{-4\}$, oraz wykres funkcji kwadratowej $g(x)=-\frac{1}{4}(x+1)^2+3$. Następnie oblicz współrzędne punktów wspólnych tych wykresów.

17. Wyznacz wszystkie liczby całkowite, dla których funkcja homograficzna $f(x)=1-\frac{8}{x+1}$, gdzie $x \neq -1$, przyjmuje wartości będące liczbami pierwszymi.

D **18.** Wykaż, że jeśli liczby a i b są dodatnie oraz $\frac{3a-b}{2a+b}=1$, to $\frac{2a+3b}{a+4b}=1\frac{1}{6}$.

D **19.** Wykaż, że jeśli $a \neq 0$, $b \neq 0$ oraz $a \neq b$, to wartość wyrażenia $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right):\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2}{3a-3b}$ jest stała.

D **20.** Wykaż, że jeśli $b \in \mathbf{R} - \{0, 1\}$ oraz $a - 2b = ab$, to wartość wyrażenia $\frac{b}{a}:\left(1-\frac{b+1}{2}\right)$ jest stała.

D **21.** Wykaż, że jeśli $a \neq -b$, $a \neq b$ oraz $b \neq 2a$, to

$$\left[\left(\frac{4}{a+b}+\frac{4a}{a^3+b^3}\cdot\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}\right):\frac{2a-b}{a^2+2ab+b^2}\right]\cdot\frac{a-b}{4}=a+b.$$

22. Maszynistka przepisywała rękopis książki liczący 240 stron – dziennie przepisując tę samą liczbę stron. Gdyby codziennie przepisywała o 10 stron więcej, to skończyłaby tę pracę o 2 dni wcześniej. W ciągu ilu dni maszynistka przepisała cały rękopis?

23. Zakład stolarski otrzymał zamówienie na wyprodukowanie 192 krzeseł. Dziennie wytwarzano tyle samo krzeseł. Ale po wykonaniu 25% zamówienia usprawniono produkcję i wówczas zakład zaczął produkować o 2 krzesła dziennie więcej. Dzięki temu umowę zrealizowano o 1 dzień wcześniej niż zaplanowano. W ciągu ilu dni zakład wyprodukował krzesła?

24. Zbiornik może być napełniony wodą z dwóch kranów. Pierwszy kran napełnia pusty zbiornik w czasie o 2 godziny krótszym niż drugi kran. Jeśli otworzymy dwa krany jednocześnie, to zbiornik zostanie napełniony w ciągu 2 godzin i 24 minut. Oblicz, ile czasu potrzeba, aby napełnić pusty zbiornik tylko przez pierwszy kran?

25. Z miast A i B odległych od siebie o 252 km wyjechały naprzeciw siebie dwa pociągi. Pociąg jadący z miasta A do miasta B wyjechał o 20 minut później i jechał z prędkością o 9 km/h większą niż pociąg jadący z miasta B do miasta A. Pociągi minęły się na stacji leżącej w połowie drogi między miastami A i B. Oblicz, z jakimi średnimi prędkościami jechały te pociągi.

D **26.** Wykaż na podstawie definicji, że funkcja homograficzna $f(x)=\frac{14-3x}{x-4}$ jest malejąca w przedziałach $(-\infty, 4)$, $(4, +\infty)$.

27. Funkcja $f(x)=\frac{7x}{x+a}$, gdzie $x \neq -a$, jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, -2)$, $(-2, +\infty)$. Funkcja $g(x)=\frac{2x^2}{b-x}$, gdzie $x \neq b$, przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (3, +\infty)$. Wyznacz współczynniki a i b. Następnie oblicz współrzędne punktów, w których przecinają się wykresy funkcji f i g.

D **28.** Dane są funkcje wymierne $f(x)=\frac{x^4+1}{x^2}$ oraz $g(x)=\frac{x^2+1}{x}$, gdzie $x \neq 0$. Wykaż, że:

a) funkcja f jest parzysta, a funkcja g jest nieparzysta,

b) zbiorem wartości funkcji g jest suma przedziałów $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty)$

c) jeśli $a \neq 0$, to prawdziwa jest równość $f(a)=\left[g(a)\right]^2-2$.

29. Rozwiąż równanie:

a) $x^2-4x-2=\dfrac{15}{x^2-4x}$ b) $\dfrac{x-2}{x-3}-|x-4|=2$ c) $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1.$

30. Rozwiąż nierówność:

a) $\dfrac{x-4}{5-x}\leqslant\dfrac{1}{1-x}$ b) $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right|<3$ c) $\dfrac{|x-1|}{x^2+x-2}\leqslant 0.$

D **31.** Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie oraz $a^2+b^2+c^2=108$, to $a+b+c\leqslant 18$.

D **32.** Wykaż, że jeśli $a>0$, to $a^3+\dfrac{48}{a}\geqslant 32$.

33. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m\in \mathbf{R}$, dla których funkcja wymierna $f(x)=\dfrac{(m+1)x-2}{x-m}$ jest funkcją homograficzną, malejącą w przedziałach $(-\infty, m)$, $(m, +\infty)$.

34. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m\in\mathbf{R}$, dla których funkcja $f(x)=(m+1)x^2-2\sqrt{2}x+m+2$ ma dwa różne miejsca zerowe x_1, x_2 takie, że $x_1x_2-m\geqslant 0$.

35. Dla jakich wartości parametru k, $k\in\mathbf{R}$, zbiorem rozwiązań nierówności wymiernej $\dfrac{(k+2)x^2+x+k+2}{x^2-(k+5)x+9}<0$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?

2. Ciągi

Określenie ciągu. Sposoby opisywania ciągów

2.1. Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu (a_n). Podaj pięć początkowych wyrazów tego ciągu.

a) $a_n=2n^2-5n+1$ b) $a_n=\dfrac{n+4}{2n-3}$ c) $a_n=3^{n-1}+(-1)^n\cdot(n+1)$.

2.2. Ciąg (b_n) ma pięć wyrazów. Naszkicuj wykres tego ciągu.

a) $b_n=(3-n)(n+1)$ b) $b_n=2+(-1)^{n+1}$ c) $b_n=\dfrac{6n}{n+1}$

2.3. Sprawdź, które wyrazy nieskończonego ciągu (a_n) są równe zero.

a) $a_n=(n^2-2)(n^2-4)(n-3)$ b) $a_n=\dfrac{n^2-4n-21}{n^2+1}$

c) $a_n=\dfrac{n^4-256}{n^2-n+2}$ d) $a_n=\dfrac{n^3-8n^2-4n+32}{3n+2}$

2.4. Wyznacz wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu o wyrazie ogólnym:

a) $a_n=\dfrac{3n-1}{5n+2}$, których wartość jest równa $\dfrac{1}{2}$
b) $b_n=(2n-3)^2$, których wartość jest równa 81
c) $c_n=n^2\cdot(n^2-5)$, których wartość jest równa -4
d) $d_n=n^3-7n^2+11n$, których wartość jest równa 5.

2.5. Dany jest wyraz ogólny ciągu (a_n), gdzie $n\in\mathbf{N}_+$. Które wyrazy tego ciągu są liczbami ujemnymi?

a) $a_n=\dfrac{2n-6}{n+1}$ b) $a_n=n^2-7n+10$ c) $a_n=2-|n-3|$

2.6. Wyznacz wszystkie wyrazy ciągu (b_n), gdzie $n\in\mathbf{N}_+$, określonego wzorem:
a) $b_n=|2n-3|-9$, które są mniejsze od 4
b) $b_n=-n^2+4n$, które są większe od -12.

2.7. Ciąg (c_n) jest określony wzorem $c_n = \frac{2}{5}n - 2{,}8$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.

a) Czy wśród wyrazów tego ciągu znajduje się liczba 2?

b) Ile wyrazów tego ciągu należy do przedziału $\left\langle \frac{1}{2}, 4 \right\rangle$?

2.8. Ciąg (d_n) jest określony wzorem $d_n = 3 - |n - 5|$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.

a) Sprawdź, czy liczba 4 jest wyrazem tego ciągu.

D b) Wykaż, że ciąg (d_n) ma tylko siedem wyrazów nieujemnych.

D **2.9.** Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{5n^2 - 43n + 24}{5n - 3}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Wykaż, że do przedziału $(3, 14\rangle$ należy jedenaście wyrazów tego ciągu.

2.10. Wyznacz wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu (a_n), będące liczbami naturalnymi, jeśli:

a) $a_n = 2 - \frac{6}{n}$ b) $a_n = \frac{3n-6}{n+2}$ c) $a_n = \frac{n^2 + 11n + 8}{n}$.

D **2.11.** Wykaż, że wśród wyrazów nieskończonego ciągu (b_n), gdzie $b_n = 3n - 2 \cdot \frac{n+6}{n}$, tylko dwa wyrazy są liczbami pierwszymi.

D **2.12.** Dany jest ciąg (c_n), gdzie $c_n = \frac{2 + n - 6n^2}{2n + 1}$, $n \in \boldsymbol{N}_+$. Wykaż, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi ujemnymi.

2.13. Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu (a_n). Wyznacz wyrazy: a_{n+1}, a_{2k}, oraz a_{3k-2}, gdzie $k \in \boldsymbol{N}_+$.

a) $a_n = \frac{2n-5}{n+1}$ b) $a_n = n^3$ c) $a_n = 2n - n^2$

2.14. Wyznacz wyraz ogólny a_n ciągu (a_n), $n \in \boldsymbol{N}_+$, jeśli

a) $a_{n+1} = n + 4$ b) $a_{n+2} = (n+1)^2$ c) $a_{n+3} = \frac{n+2}{2n+5}$

2.15. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n), wiedząc, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}_+$ spełnione są dwie równości: $a_n + a_{n+1} = \frac{2n+1}{n^2+n}$ oraz $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n^2+n}$.

2.16. Wyznacz wyraz ogólny a_n nieskończonego ciągu (a_n) wiedząc, że dla dowolnej liczby naturalnej n:

a) $a_{n+1} - a_{n+2} = 7n$ oraz $a_{n+1} + a_{n+2} = 4 - n$

b) $a_{n+2} - a_{n+1} = n^2$ oraz $a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3 - 2n^2$

2.17. Ciąg (b_n) jest określony za pomocą wzoru rekurencyjnego. Wyznacz b_5.

a) $\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_{n+1} = 2b_n - 1, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} b_1 = \frac{1}{4} \\ b_{n+1} = (b_n)^2 \cdot 4^n, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} b_1 = -3 \\ b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n}, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = -1 \\ b_{n+2} = (n+1) \cdot b_n - b_{n+1}, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$

2.18. Dany jest ciąg (a_n), gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Wyrazy tego ciągu powstały według pewnej reguły. Wyznacz wyraz ogólny tego ciągu.

a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots\right)$ b) $\left(1, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}, \frac{1}{81}, \ldots\right)$

c) $\left(1\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}, 3\frac{3}{4}, 4\frac{4}{5}, \ldots\right)$ d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \ldots\right)$

2.19. Dany jest ciąg (b_n), gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Podaj wyraz ogólny tego ciągu. Następnie zapisz wzór rekurencyjny ciągu (b_n).

a) $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$ b) $\left(9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\right)$

2.20. Dany jest ciąg (c_n), gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Podaj wzór rekurencyjny tego ciągu. Oblicz c_{10}.

a) $\left(2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \ldots\right)$ b) $(1, 2, 4, 7, 11, 16, \ldots)$

2.21. Ciąg (d_n) określony jest wzorem rekurencyjnym: $\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_{n+1} = d_n + 2n + 1 \end{cases}$. Wyznacz wyraz ogólny tego ciągu.

Monotoniczność ciągów

D **2.22.** Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu (a_n). Wykaż na podstawie definicji, że ten ciąg jest rosnący.

a) $a_n = \sqrt{3} \cdot n + 1$
b) $a_n = 1 - \frac{4}{n+1}$
c) $a_n = n^2 - n - 2$
d) $a_n = \frac{10n+4}{2n+1}$

D **2.23.** Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu (b_n). Wykaż na podstawie definicji, że ten ciąg jest malejący.

a) $b_n = 2 - \frac{2}{3}n$
b) $b_n = 7 - (n-1)^2$
c) $b_n = \frac{3}{2n+3}$
d) $b_n = 2 - n^3$.

2.24. Zbadaj monotoniczność nieskończonego ciągu (c_n), jeśli:

a) $c_n = n^2 + 3n$
b) $c_n = \frac{2n+3}{n+1}$
c) $c_n = 2 - \frac{5}{n+3}$
d) $c_n = 10n - n^2$
e) $c_n = \frac{n(n-3)}{2} + 1$
f) $c_n = -2(n^2 - 3n + 1)$.

2.25. Ciąg (a_n) jest skończony. Zbadaj monotoniczność tego ciągu.

a) $a_n = n^2 - 20n$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, ..., 10\}$
b) $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
c) $a_n = \begin{cases} 1, \text{ jeśli } n \in \boldsymbol{N}_+ \text{ i } n \leqslant 7 \\ n, \text{ jeśli } n \in \boldsymbol{N}_+ \text{ i } 8 \leqslant n \leqslant 15 \end{cases}$
d) $a_n = \begin{cases} -n^2 + 6n - 5, \text{ jeśli } n \in \boldsymbol{N}_+ \text{ i } n < 4 \\ n+1, \text{ jeśli } n \in \boldsymbol{N}_+ \text{ i } 4 \leqslant n \leqslant 10 \end{cases}$

2.26. Podaj przykład:

a) pięciowyrazowego ciągu rosnącego o wyrazach mniejszych od −3,
b) sześciowyrazowego ciągu niemalejącego o wyrazach dodatnich,
c) dziesięciowyrazowego ciągu nierosnącego o wyrazach należących do przedziału $\langle -1, 5)$
d) pięciowyrazowego ciągu, który nie jest monotoniczny,
e) nieskończonego ciągu malejącego o wyrazach mniejszych od 2,
f) nieskończonego ciągu nierosnącego o wyrazach niedodatnich.

2.27. Podaj przykład:

a) nieskończonego ciągu rosnącego o wyrazach większych od −8
b) nieskończonego ciągu malejącego o wyrazach mniejszych od 4
c) nieskończonego ciągu niemalejącego o wyrazach nieujemnych
d) nieskończonego ciągu rosnącego o wyrazach z przedziału $\langle 4, 5)$.

2.28. Dany jest wyraz ogólny ciągu (b_n), gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Sprawdź, czy ten ciąg jest monotoniczny.

a) $b_n = (-3)^n$
b) $b_n = |n - 5|$
c) $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3n}$
d) $b_n = 4^{-n+1}$

2.29. Zbadaj monotoniczność nieskończonego ciągu (a_n), określonego wzorem rekurencyjnym.

a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n - 2, \; n \geqslant 1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} a_1 = -4 \\ a_{n+1} = a_n + 5n, \; n \geqslant 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{3}, \; n \geqslant 1 \end{cases}$
d) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{2}{a_n}, \; n \geqslant 1 \end{cases}$
e) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = -\frac{3a_n}{2}, \; n \geqslant 1 \end{cases}$
f) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \; n \geqslant 1 \end{cases}$

2.30. Podaj wyraz ogólny przykładowego nieskończonego malejącego ciągu (a_n) o tej własności, że ciąg (b_n), gdzie $b_n = |a_n|$ jest rosnący.

2.31. Podaj wyraz ogólny przykładowego nieskończonego rosnącego ciągu (a_n) o tej własności, że ciąg (b_n), gdzie $b_n = |a_n|$ jest malejący.

2.32. Podaj wyraz ogólny przykładowego nieskończonego i niemonotonicznego ciągu (a_n) i takiego, że ciąg (b_n), gdzie $b_n = |a_n|$ jest monotoniczny.

2.33. Ciąg (a_n) jest ciągiem nieskończonym malejącym o wyrazach dodatnich. Zbadaj monotoniczność ciągu (b_n) wiedząc, że:

a) $b_n = -3a_n$
b) $b_n = \frac{1}{4}a_n$
c) $b_n = \frac{1}{a_n}$
d) $b_n = a_n^2$

2.34. Dany jest wyraz ogólny ciągu (c_n), gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Zbadaj monotoniczność tego ciągu.

a) $c_n = 3^{n+5}$
b) $c_n = 7^{1-n}$
c) $c_n = n \cdot 2^n$
d) $c_n = \frac{3^n}{n+1}$
e) $c_n = \frac{n}{5^{n+1}}$
f) $c_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{2^{n+2}}{n}$

Ciąg arytmetyczny

2.35. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 5n - 3$, gdzie $n \in N_+$.

D a) Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

b) Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

c) Podaj wzór rekurencyjny ciągu (a_n).

2.36. Dany jest ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = \frac{4-7n}{3}$, gdzie $n \in N_+$.

D a) Wykaż, że ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym.

b) Zbadaj monotoniczność tego ciągu.

c) Oblicz $b_{10} + b_{25}$.

2.37. W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) dane są $a_1 = -8{,}5$ i $r = 2{,}5$. Oblicz:

a) wyrazy a_6, a_{10} i a_{27} b) wyraz ogólny ciągu c) $a_{2n+1} - a_{n+3}$

2.38. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = n(n+1)$, gdzie $n \in N_+$.

D a) Wykaż, że ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

b) Drugi i piąty wyraz ciągu (a_n) są odpowiednio równe pierwszemu i siódmemu wyrazowi nieskończonego ciągu arytmetycznego (b_n). Wyznacz wyraz ogólny ciągu (b_n).

2.39. Między liczby 4 i 22 wstaw kolejno pięć liczb tak, aby wraz z danymi liczbami tworzyły rosnący ciąg arytmetyczny.

2.40. Pierwszy wyraz skończonego ciągu arytmetycznego o różnicy 3,1 wynosi 2,3. Ostatni wyraz tego ciągu jest równy 48,8. Ile wyrazów ma ten ciąg?

2.41. W skończonym ciągu arytmetycznym przedostatni wyraz jest równy 38, a ostatni wynosi 41. Wiedząc, że drugi wyraz tego ciągu jest równy 5, oblicz liczbę wyrazów tego ciąg.

2.42. Ciąg arytmetyczny ma siedemnaście wyrazów. Środkowy wyraz ciągu jest równy 8. Wyznacz różnicę tego ciągu wiedząc, że trzeci wyraz ciągu jest równy –22.

2.43. Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego (a_n), jeśli:

a) $a_7 + a_{13} = 14$ i $a_{10} + a_{22} = 10$ b) $a_8 - a_3 = 10$ i $2a_5 + 3a_7 = 37$

c) $a_3 + a_5 = 24$ i $a_3 \cdot a_5 = 135$ d) $a_9 - a_6 = 21$ i $a_9 \cdot a_6 = 2146$.

2.44. Oblicz, ile jest liczb naturalnych:

a) należących do przedziału $\langle 200, 895\rangle$, które są podzielne przez 4

b) mniejszych od 300, które nie są podzielne przez 7

c) należących do przedziału $(10, 400\rangle$, których reszta z dzielenia przez 3 wynosi 2.

D **2.45.** Wykaż że ciąg $\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}, 3, \sqrt{3}+4\right)$ jest ciągiem arytmetycznym.

2.46. Wyznacz liczbę k, dla której ciąg $(3k^2 - 2k + 3, k^2 - k + 1, -2k^2 + k + 5)$ jest ciągiem arytmetycznym. Dla wyznaczonej liczby k podaj ten ciąg.

2.47. Wyznacz liczby x, y tak, aby czterowyrazowy ciąg $(12, x, y, 27)$ był ciągiem arytmetycznym.

2.48. Dla jakiej wartości x liczby x^3, $x^2 + 2$, 4 są w danej kolejności odpowiednio pierwszym, trzecim i piątym wyrazem nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n)? Dla znalezionej wartości x napisz wyraz ogólny ciągu (a_n).

2.49. Oblicz długości boków trójkąta prostokątnego wiedząc, że te długości ustawione rosnąco tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 2.

2.50. Suma dwóch pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 27, suma dwóch ostatnich wyrazów wynosi 105. Wiedząc, że siódmy wyraz ciągu wynosi 30, oblicz:

a) pierwszy wyraz tego ciągu b) liczbę wyrazów tego ciągu.

2.51. W skończonym ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_2 = 2$ oraz $a_6 = 22$. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu. Wyznacz liczbę wyrazów ciągu (a_n) wiedząc, że ostatni wyraz wynosi 222.

2.52. Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Suma tych liczb jest równa 18, a suma kwadratów liczb skrajnych wynosi 104. Wyznacz te liczby.

D **2.53.** Wykaż, że jeśli ciąg (a_n), gdzie $n \in N_+$, jest rosnącym ciągiem arytmetycznym, to ciąg (b_n), gdzie $b_n = 3 - 2a_n$ jest ciągiem arytmetycznym malejącym.

D **2.54.** Dany jest malejący ciąg arytmetyczny (c_n), $n \in N_+$, oraz funkcja liniowa $f(x) = ax + b$, gdzie $a < 0$ i $b \in R$. Wykaż, że ciąg (b_n), gdzie $b_n = f(c_n)$, jest rosnącym ciągiem arytmetycznym.

D **2.55.** Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, jest parabola zwrócona ramionami do góry. Wykaż, że ciąg (d_n) określony wzorem $d_n = f(n+1) - f(n)$, gdzie $n \in N_+$ jest rosnącym ciągiem arytmetycznym.

2.56. Liczby całkowite a, b, c, d są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^4 + px^2 + 9$. Wiedząc, że ciąg (a, b, c, d) jest ciągiem arytmetycznym rosnącym, wyznacz liczby a, b, c, d, p.

Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

2.57. Suma n początkowych wyrazów nieskończonego ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Oblicz:

a) a_1 b) S_6 c) a_5 d) $a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}$.

Następnie wyznacz ogólny wyraz ciągu (a_n).

D **2.58.** Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = n(n^2 - 1)$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Wykaż, że:

a) $a_n = 3n(n-1)$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. b) ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

2.59. Sumę n początkowych wyrazów nieskończonego ciągu (a_n) określa wzór $S_n = n^2 - 4n$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

a) Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.
b) Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

2.60. Sumę n początkowych wyrazów nieskończonego ciągu (a_n) określa wzór $S_n = 5n - n^2$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

D a) Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym malejącym.
b) Oblicz $a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}$.

2.61. Suma ośmiu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 17, a suma trzynastu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi 32. Oblicz:

a) $a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13}$ b) a_{11} c) $a_{10} + a_{11} + a_{12}$

2.62. W nieskończonym ciągu arytmetycznym (b_n), $n \geqslant 1$, dane są: $b_1 = -4$, $r = 7$. Wiedząc, że S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów tego ciągu, oblicz:

a) S_{25} b) $b_{10} + b_{11} + b_{12} + \ldots + b_{25}$
c) $b_{13} + b_{14} + b_{15} + \ldots + b_{22}$

2.63. Nieskończony ciąg arytmetyczny (a_n) opisuje wzór $a_n = 24 - 4n$, $n \geqslant 1$.

a) Napisz wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n).
b) Oblicz, ile początkowych wyrazów tego ciągu należy wziąć do sumy, aby jej wartość wynosiła 0.

2.64. Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu arytmetycznego (b_n): $b_n = 10{,}5 - n$, $n \geqslant 1$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy wziąć do sumy, aby jej wartość była największa? Podaj tę największą wartość.

2.65. Oblicz:

a) $-7 - 4 - 1 + 2 + 5 + \ldots + 227$
b) $8^2 - 10^2 + 12^2 - 14^2 + 16^2 - 18^2 + \ldots + 2012^2 - 2014^2$.

2.66. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych:

a) parzystych, nie większych od 250
b) dwucyfrowych, podzielnych przez 4.

2.67. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych:

a) mniejszych od 200, których reszta z dzielenia przez 3 jest równa 1
b) większych od 100 i jednocześnie mniejszych od 500, których reszta z dzielenia przez 5 jest równa 1 lub 4.

2.68. Suma szesnastu początkowych wyrazów nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 728. Wiedząc, że $a_{16} = 63$, oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu (a_n).

2.69. Ciąg (a_n) jest skończonym ciągiem arytmetycznym, którego suma wszystkich wyrazów jest równa 204. Różnica ciągu jest równa 6, a ostatni wyraz ciągu wynosi 49. Ile wyrazów ma ten ciąg?

2.70. W nieskończonym ciągu arytmetycznym (b_n) dane są: $b_1 = 58$ oraz $r = -3$. Zsumowano kilkanaście początkowych wyrazów tego ciągu i otrzymano 578. Ile wyrazów ciągu (b_n) wzięto do tej sumy?

2.71. Dany jest nieskończony ciąg arytmetyczny (c_n), w którym $c_1 = 8$, $r = 3$.

D a) Wykaż, że wyrazy ciągu (c_n) o numerach parzystych tworzą ciąg arytmetyczny (b_n). Podaj różnicę ciągu (b_n).
b) Oblicz sumę czternastu początkowych wyrazów ciągu (b_n).

2.72. Rowerzysta w ciągu pierwszej godziny przejechał 20 km, a w ciągu każdej następnej godziny odcinek o 0,75 km krótszy od poprzedniego. Jaką drogę pokonał rowerzysta, jeśli w ciągu ostatniej godziny przejechał 17 km?

2.73. Wykopanie pierwszego metra studni kosztuje 8 zł, a każdego następnego o 3 zł drożej od poprzedniego.

a) Ile kosztuje wykopanie studni głębokości 25 m?
b) Wykopanie studni kosztowało 798 zł. Jaka była jej głębokość?

2.74. Marek chce przekopać swój przydomowy ogródek warzywny o powierzchni 7,83 a. Pierwszego dnia przekopał 27 m^2. Aby przyspieszyć prace postanowił każdego następnego dnia przekopywać o 4 m^2 ogródka więcej niż poprzedniego dnia. Ile najmniej dni musi przeznaczyć Marek na wykonanie tej pracy?

2.75. Z pełnego pojemnika zaczęła wylewać się woda. W pierwszej sekundzie wypłynęło 3,4 litra wody, a w każdej następnej o 0,3 litra mniej niż w poprzedniej. W ostatniej sekundzie wypłynęło tylko 0,1 litra wody.

a) Ile czasu wypływała woda z pojemnika?

b) Jaką pojemność miał pojemnik?

2.76. Rozwiąż dane równanie wiedząc, że po lewej stronie tego równania występuje suma początkowych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego.

a) $3 + 5 + 7 + \ldots + x = 195$

b) $(-11) + (-8) + (-5) + \ldots + (3x + 1) = 150$

c) $4 + 8 + 12 + \ldots + x^2 = 8320$

2.77. Suma stu kolejnych liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 2, jest równa 43 950. Wyznacz najmniejszą i największą z tych liczb.

2.78. Suma k początkowych wyrazów ciągu $(1, 4, 7, \ldots)$ jest o 5 mniejsza od sumy $k + 4$ początkowych wyrazów ciągu $(20, 21, 22, \ldots)$. Oblicz k.

D **2.79.** Dany jest nieskończony ciąg (a_n), gdzie $a_n = \dfrac{5+8+11+14+\ldots+(3n+2)}{4n}$, $n \in \mathbf{N}_+$. Wykaż, że ciąg (a_n) jest rosnącym ciągiem arytmetycznym.

2.80. Oblicz sumę stu początkowych wyrazów ciągu (b_n), jeśli $b_n = \dfrac{11+16+21+26+\ldots+(5n+6)}{5n^2+17n}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

2.81. Zbadaj na podstawie definicji monotoniczność ciągu (c_n), gdzie $c_n = \dfrac{3+10+17+24+\ldots+(7n-4)}{14n^2+5n-1}$, i $n \in \mathbf{N}_+$. Czy ciąg (c_n) jest ciągiem arytmetycznym? Odpowiedź uzasadnij.

D **2.82.** Wykaż, że jeśli szósty wyraz nieskończonego ciągu arytmetycznego jest równy zero, to suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu też jest równa zero.

D **2.83.** Wykaż, że suma dwudziestu początkowych wyrazów nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n), $n \in \mathbf{N}_+$ jest cztery razy większa od sumy $a_6 + a_7 + a_8 + \ldots + a_{15}$.

2.84. W ciągu arytmetycznym o nieparzystej liczbie wyrazów suma wyrazów stojących na miejscach nieparzystych jest równa 44, a suma pozostałych wyrazów wynosi 33. Oblicz wyraz środkowy i liczbę wyrazów tego ciągu.

2.85. Suma wszystkich liczb tablicy poniżej jest równa 1331. Oblicz n.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n+2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & n+1 & n+2 & n+3 & \ldots & 2n-1 \end{bmatrix}$$

D **2.86.** Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 1. Stosunek sumy m początkowych wyrazów ciągu (a_n) do sumy k początkowych wyrazów tego ciągu, gdzie $m \neq k$ i $m, k \in N_+$, wynosi $m^2 : k^2$. Wykaż, że różnica ciągu (a_n) jest równa 2.

D **2.87.** Nieskończony ciąg (b_n), $n \geqslant 1$, jest ciągiem arytmetycznym. Wykaż, że jeśli dla pewnej dodatniej liczby naturalnej k wyrazy tego ciągu spełniają dwie równości: $(2k - 1) \cdot b_{2k+1} = 2$ oraz $(2k + 1) \cdot b_{2k-1} = 2$, to suma $(4k^2 - 1)$ początkowych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

Ciąg geometryczny

2.88. Zbadaj, który z danych ciągów (a_n), (b_n), (c_n), (d_n), gdzie $n \in N_+$, jest geometryczny.

$a_n = 5^n \cdot 2^{n-1}$, $\quad b_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^{n+2}}$, $\quad c_n = n \cdot 3^{n-1}$, $\quad d_n = \dfrac{n+1}{4^n}$

2.89. Wyznacz wyraz ogólny ciągu geometrycznego, określonego wzorem rekurencyjnym.

a) $\begin{cases} a_1 = 27 \\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n}{2}, \ n \geqslant 1 \end{cases}$ $\quad$ b) $\begin{cases} b_1 = -100 \\ b_n = (-0{,}2) \cdot b_{n-1}, \ n > 1 \end{cases}$ $\quad$ c) $\begin{cases} c_1 = -\dfrac{3}{4} \\ c_{n+1} = -c_n, \ n \geqslant 1 \end{cases}$.

2.90. Wyznacz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) wiedząc, że:

a) $a_7 = -510{,}3$ oraz $q = -3$ $\quad$ b) $a_4 = -4(\sqrt{3}+2)$ oraz $q = \sqrt{3}+1$.

2.91. Ciąg $(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}, 3, \sqrt[3]{81}, \ldots)$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym. Oblicz dwudziesty siódmy wyraz tego ciągu i przedstaw go w postaci potęgi liczby 3.

2.92. Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego (a_n) wiedząc, że:

a) $a_1 = 0{,}5$ oraz $a_6 = 512$

b) $a_1 = 6$ oraz $a_5 = \frac{2}{27}$

c) $a_2 = -6$ oraz $a_4 = -8{,}64$

d) $a_1 = \frac{1}{7}$ oraz $a_2 \cdot a_4 = 1$

2.93. Ciąg (b_n) jest skończonym ciągiem geometrycznym, w którym $b_1 = -1$, $q = -\frac{2}{7}$. Wiedząc, że ostatni wyraz ciągu (b_n) jest równy $\frac{8}{343}$, oblicz liczbę wyrazów tego ciągu.

2.94. Dwa środkowe wyrazy sześciowyrazowego, malejącego ciągu geometrycznego są odpowiednio równe $\frac{27}{8}$ i $\frac{9}{4}$. Oblicz różnicę pomiędzy pierwszym i ostatnim wyrazem tego ciągu.

2.95. Iloczyn wszystkich wyrazów pięciowyrazowego ciągu geometrycznego jest równy 32. Oblicz trzeci wyraz tego ciągu.

D **2.96.** W pewnym nieskończonym ciągu geometrycznym iloczyn wyrazu drugiego i ósmego jest równy 36. Wykaż, że piąty wyraz tego ciągu jest równy –6 lub 6.

2.97. Nieskończony ciąg (b_n) o wyrazach dodatnich ma tę własność, że każdy jego wyraz jest o 20% większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego.

a) Czy ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym? Odpowiedź uzasadnij.

b) Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu, jeśli jego piąty wyraz jest równy $\frac{1296}{625}$.

2.98. Klient banku spłacił pożyczkę w wysokości 13 923 zł w czterech ratach, z których każda następna była o 10% większa od poprzedniej. Oblicz kwotę pierwszej i czwartej raty.

2.99. W ciągu geometrycznym (c_n), gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$, dane są: $c_6 = -\frac{1}{64}$ i $c_9 = \frac{1}{512}$. Wyznacz wyraz ogólny ciągu (c_n). Czy ciąg (c_n) jest monotoniczny?

D **2.100.** Ciąg (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym, w którym $a_3 = -0{,}36$ oraz $a_6 = -1\frac{2}{3}$. Wykaż, że ciąg (a_n) jest malejący. Wyznacz ogólny wyraz tego ciągu.

2.101. Ciąg geometryczny ma cztery wyrazy. Jeśli trzeci wyraz tego ciągu zmniejszymy o sumę dwóch pierwszych wyrazów, to otrzymamy 3. Jeśli czwarty wyraz zmniejszymy o sumę dwóch środkowych wyrazów, to otrzymamy 6. Wyznacz ten ciąg.

2.102. W czterowyrazowym ciągu geometrycznym iloczyn pierwszego i trzeciego wyrazu jest równy 0,64, zaś iloczyn drugiego i czwartego wyrazu wynosi 2,56. Wyznacz ten ciąg.

2.103. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego (b_n), jeśli:

a) $b_5 - b_3 = 1680$ oraz $b_3 + b_4 = 560$

b) $b_7 - b_3 = 120$ oraz $b_7 - b_5 = 96$.

D **2.104.** Wykaż, że liczby $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}$ tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny.

2.105. Ciąg $(-9, x, -2)$ jest rosnącym ciągiem geometrycznym. Oblicz x.

2.106. Liczby $7x + 1$, $2x + 2$, $x - 1$ w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Oblicz x i wyznacz ten ciąg.

D **2.107.** Wykaż, że jeśli ciąg $(x + 15, 8, x - 15)$ jest ciągiem geometrycznym malejącym, to iloraz tego ciągu jest jednym z pierwiastków wielomianu $W(x) = 4x^4 - x^3 - 32x + 8$.

D **2.108.** Wykaż, że jeśli ciąg $(12, a, b, c, d, 2916)$ jest ciągiem geometrycznym, to suma $a + b + c + d$ jest wielokrotnością liczby 5.

2.109. Długości trzech różnych krawędzi prostopadłościennego otwartego zbiornika na wodę tworzą malejący ciąg geometryczny, w którym ostatnim wyrazem jest wysokość tego zbiornika. Pojemność zbiornika wynosi 216 litrów.

D a) Wykaż, że jedna z krawędzi podstawy tego zbiornika ma długość 60 cm.

b) Wiedząc dodatkowo, że długości krawędzi podstawy zbiornika pozostają w stosunku 2 : 1, oblicz pole powierzchni tego zbiornika.

D **2.110.** Wykaż, że nieskończony ciąg (c_n) o wyrazie ogólnym $c_n = \frac{6}{3^{2n+1}} + 11 \cdot 9^{-n}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$, jest ciągiem geometrycznym. Podaj pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

D **2.111.** Wykaż, że nieskończony ciąg (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = 2^{\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$, jest ciągiem geometrycznym. Podaj pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

D **2.112.** Wykaż, że jeśli nieskończony ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym, to ciąg (a_n), gdzie $a_n = c_{3n}$ jest również ciągiem geometrycznym.

D **2.113.** Wykaż, że jeśli nieskończony ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to ciąg (b_n), gdzie $b_n = -a_{2n+1}$ jest również ciągiem geometrycznym.

2.114. W nieskończonym ciągu geometrycznym (a_n) suma pierwszego i piątego wyrazu jest równa 1285, zaś iloczyn drugiego i czwartego wyrazu wynosi 6400. Wyznacz a_1 i iloraz tego ciągu.

2.115. Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Suma tych liczb jest równa 57, a ich iloczyn wynosi 5832. Wyznacz te liczby.

2.116. Nieskończony ciąg (c_n) jest niemonotonicznym ciągiem geometrycznym, którego pierwszy wyraz jest równy $\frac{5}{16}$. Wiadomo, że $c_k = 20$ oraz $c_{k+2} = 160$ dla pewnej dodatniej liczby naturalnej k. Wyznacz:

a) c_3 oraz c_8 b) liczbę k.

D **2.117.** Ciąg (b_n) jest malejącym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Wykaż, że jeśli różnica między ósmym i dziesiątym wyrazem tego ciągu jest cztery razy większa od różnicy między wyrazem dziewiątym i dziesiątym , to iloraz tego ciągu jest równy $\frac{1}{3}$.

D **2.118.** Wykaż, że jeśli ciąg (a, b, c) jest ciągiem geometrycznym, to prawdziwa jest równość $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$.

D **2.119.** Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym oraz $a_1 - a_4 < a_3 - a_2$, to $a_1 < a_2$.

Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

2.120. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q, jeśli:

a) $a_1 = -\frac{1}{3}$, $q = -2$ b) $a_1 = 8$, $q = \sqrt{2}$.

2.121. Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n), określonego wzorem:

a) $\begin{cases} b_1 = 1 - \sqrt{3} \\ b_{n+1} = 2b_n,\ n \geqslant 1 \end{cases}$ b) $b_n = \frac{3}{5^n}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$

2.122. Suma czterech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa $\frac{65}{81}$. Oblicz pierwszy wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego, jeśli iloraz tego ciągu wynosi $\frac{2}{3}$.

2.123. Suma dziewięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa $127\frac{3}{4}$. Oblicz dziewiąty wyraz tego ciągu wiedząc, że iloraz ciągu jest równy 2.

2.124. Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (b_n), w którym $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy zsumować, aby otrzymać wynik $8\frac{8}{9}$?

2.125. Nieskończony ciąg $(96, -48, 24, \ldots)$ jest ciągiem geometrycznym. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy wziąć do sumy, aby jej wartość była równa 64,5?

2.126. Oblicz daną sumę wiedząc, że kolejne składniki sumy to kolejne wyrazy pewnego ciągu geometrycznego. Ile składników występuje w tej sumie?

a) $10\frac{1}{8} + 6\frac{3}{4} + 4\frac{1}{2} + \ldots + 1\frac{1}{3}$ b) $-1\frac{7}{8} + 3\frac{3}{4} - 7\frac{1}{2} + \ldots + 240$

2.127. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 729, a ostatni 96. Wiedząc, że suma wyrazów tego ciągu wynosi 1995, oblicz:

a) iloraz tego ciągu b) liczbę wyrazów tego ciągu.

2.128. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 128, a ostatni 1458. Wiedząc, że suma wyrazów tego ciągu wynosi 4118, oblicz:

a) iloraz tego ciągu b) liczbę wyrazów tego ciągu.

2.129. Dyrektor firmy przyznał pracownikom nagrody, o łącznej wartości 14 760 zł. Największa nagroda wynosiła 5000 zł, a każda następna była pewnym stałym ułamkiem poprzedniej. Wartość najmniejszej nagrody to 2560 zł. Oblicz, ile było nagród i jaką wartość miały pozostałe nagrody.

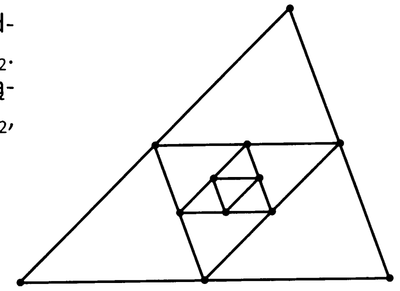
2.130. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów malejącego ciągu geometrycznego wiedząc, że drugi wyraz tego ciągu jest równy 20, a czwarty jest równy 5.

2.131. Pierwszy wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego jest równy $\frac{1}{4}$, a suma jego trzech początkowych wyrazów wynosi 1,75. Wyznacz:

a) iloraz tego ciągu b) wyraz ogólny tego ciągu.

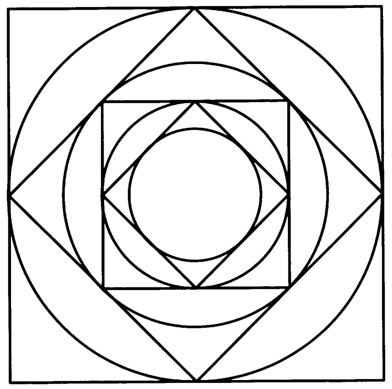
2.132. Ciąg geometryczny ma cztery wyrazy, których suma jest równa 130. Średnia arytmetyczna wyrazów skrajnych jest równa 35. Wyznacz ten ciąg.

2.133. Obwód trójkąta T_1 jest równy 96 cm. Środki boków trójkąta T_1 są wierzchołkami trójkąta T_2. Środki boków trójkąta T_2 są wierzchołkami trójkąta T_3 itd. Oblicz sumę obwodów trójkątów T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7.



2.134. Trójkąt T_1 jest trójkątem równobocznym, którego każdy bok ma długość 8 cm. Środki boków trójkąta T_1 są wierzchołkami trójkąta T_2. Środki boków trójkąta T_2 są wierzchołkami trójkąta T_3 itd. Oblicz sumę pól trójkątów T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6.

2.135. W kwadrat o boku 16 cm wpisano koło K_1. W koło K_1 wpisano kwadrat, a w ten kwadrat koło K_2. W koło K_2 wpisano kwadrat, a w ten kwadrat koło K_3, itd. Oblicz sumę: *a*) obwodów *b*) pól kół K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8.



2.136. Ciąg geometryczny składa się z pięciu wyrazów, a ich suma wynosi 124. Iloraz sumy wyrazów skrajnych przez wyraz środkowy jest równy 4,25. Wyznacz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

D **2.137.** Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o parzystej liczbie wyrazów, w którym $a_1 \neq 0$ oraz $q \in \mathbf{R} - \{-1, 0, 1\}$. Wykaż, że stosunek sumy wszystkich wyrazów tego ciągu do sumy wyrazów o numerach parzystych jest równy $\frac{1+q}{q}$.

D **2.138.** Dany jest ciąg dziesięciu kwadratów, z których każdy kolejny ma boki o 50% krótsze od boków poprzedniego kwadratu. Wykaż, że suma pól kwadratów o numerach nieparzystych jest cztery razy większa od sumy pól kwadratów o numerach parzystych.

D **2.139.** Z półokręgów budujemy krzywą. Pierwszy półokrąg ma promień r, a promień każdego następnego półokręgu stanowi $\frac{2}{3}$ promienia poprzedniego. Niech n oznacza liczbę półokręgów tworzących tę krzywą. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n długość krzywej jest mniejsza od $3\pi r$.

D **2.140.** Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n suma

$$3+33+333+\ldots+\underbrace{333\ldots3}_{n\text{ cyfr}} \text{ jest równa } \frac{10^{n+1}-9n-10}{27}.$$

D **2.141.** Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n suma

$$12+1212+121212+\ldots+\underbrace{121212\ldots12}_{n\text{ grup }(12)} \text{ jest równa } \frac{4}{33}\cdot\frac{100^{n+1}-99n-100}{99}.$$

D **2.142.** Wykaż, że liczba $\underbrace{444\ldots4}_{20\text{ cyfr}}-\underbrace{888\ldots8}_{10\text{ cyfr}}$ jest kwadratem pewnej liczby naturalnej.

Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny – zadania różne

2.143. Ciąg $(x, y, 1)$ jest ciągiem arytmetycznym, a ciąg $(1, x, y)$ jest ciągiem geometrycznym. Oblicz x i y.

2.144. Ciąg $(x-1, y, 11)$ jest ciągiem arytmetycznym, a ciąg $(x, y, 18)$ jest ciągiem geometrycznym. Oblicz x i y. Wyznacz te ciągi. Podaj różnicę ciągu arytmetycznego i iloraz ciągu geometrycznego.

2.145. Trzy liczby, których suma jest równa 9, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do pierwszej z nich dodamy $3\frac{1}{8}$, to otrzymamy rosnący ciąg geometryczny. Wyznacz liczby, tworzące ciąg arytmetyczny.

2.146. Trzy liczby tworzą malejący ciąg arytmetyczny, a ich suma jest równa 18. Jeśli drugą liczbę zmniejszymy o 3 i trzecią zmniejszymy o 2, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego.

2.147. Pierwszy, drugi i trzeci wyraz ciągu geometrycznego są odpowiednio drugim, szóstym i osiemnastym wyrazem nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy 2. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu (a_n).

2.148. Suma trzech początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 28. Te liczby są odpowiednio drugim, czwartym i piątym wyrazem nieskończonego, malejącego ciągu arytmetycznego. Oblicz sumę wyrazów ciągu geometrycznego od wyrazu b_4 do wyrazu b_{10} włącznie.

2.149. W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz szósty jest o 9 większy od wyrazu trzeciego. Średnia arytmetyczna wyrazów siódmego, dziewiątego i dziesiątego jest równa 15.

a) Wyznacz wyraz ogólny ciągu (a_n).

b) Wiedząc dodatkowo, że dla pewnej liczby naturalnej dodatniej k liczby a_k, a_{k+1}, a_{k+5} są w podanej kolejności trzema początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n), oblicz iloraz ciągu geometrycznego.

2.150. Suma n kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem $S_n = \frac{5}{2}n^2 + \frac{5}{2}n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.

a) Wyznacz wyraz ogólny ciągu (a_n).

b) Wiedząc dodatkowo, że dla pewnej liczby naturalnej k, liczby a_{k+1}, a_{k+3}, a_{k+7}, w podanej kolejności są trzema początkowymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego, oblicz k i wyznacz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

D **2.151.** Ciąg (x, y, z) jest ciągiem arytmetycznym oraz $x + y + z = 12$. Wykaż, że jeśli $(x + 3, y + 3, z + 3)$ jest ciągiem geometrycznym, to iloczyn xyz jest kwadratem liczby naturalnej.

D **2.152.** Wszystkie wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n) są dodatnie i różnią się między sobą. Pierwszy, trzeci i siódmy wyraz ciągu (a_n) są równe odpowiednio pierwszemu, drugiemu i trzeciemu wyrazowi pewnego ciągu geometrycznego (b_n). Wykaż, że iloraz ciągu (b_n) jest liczbą pierwszą.

D **2.153.** Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy -2, to ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = 3^{a_n}$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $\frac{1}{9}$.

D **2.154.** Ciąg (a_n) jest nieskończonym ciągiem liczbowym. Wykaż, że jeśli ciąg (b_n), gdzie $b_n = 5^{a_n}$ dla $n \in \boldsymbol{N}_+$, jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $5\sqrt{5}$, to ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 1,5.

2.155. Różnica nieskończonego ciągu arytmetycznego (b_n) wynosi 3. Ciąg (x_n) jest określony wzorem $x_n = 2^{b_n}$ gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Wiedząc, że $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2340$, oblicz pierwszy wyraz ciągu (b_n).

2.156. Suma dwudziestu początkowych wyrazów ciągu (x_n) jest równa 480. Ciąg (c_n), gdzie $c_n = 4^{x_n}$, $n \in \boldsymbol{N}_+$, jest ciągiem geometryczny o ilorazie 16. Oblicz x_1.

2.157. Ciąg geometryczny (x, y, z) ma tę własność, że jeśli jego drugi wyraz zwiększymy o 8, to ciąg zmieni się w ciąg arytmetyczny; jeśli natomiast do trzeciego wyrazu nowego ciągu dodamy 64, to powstanie ciąg geometryczny. Wyznacz liczby x, y, z.

2.158. Ciąg (a_1, a_2, a_3) jest ciągiem arytmetycznym, natomiast ciąg (b_1, b_2, b_3) jest ciągiem geometrycznym. Wyznacz te ciągi wiedząc, że $a_1b_1 = 1$, $a_2b_2 = 4$, $a_3b_3 = 12$ oraz $a_1 + a_2 + a_3 = 6$.

2.159. Z czterech liczb ustawionych jedna za drugą, trzy początkowe tworzą ciąg geometryczny, a trzy końcowe – ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby wiedząc, że suma liczb skrajnych wynosi 14, a suma liczb środkowych jest równa 12.

Lokaty pieniężne i kredyty bankowe

2.160. Pan Jan wpłacił na lokatę 6000 zł na procent prosty. Oprocentowanie roczne lokaty jest równe 4%, a odsetki od lokaty dopisywane są po każdym roku oszczędzania. Oblicz, jaką kwotę będzie miał pan Jan na tej lokacie po trzech latach oszczędzania, jeśli:

a) pominiemy podatek od dochodów kapitałowych

b) uwzględnimy 19-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

2.161. Pani Anna założyła wpłaciła na lokatę 4000 zł na procent prosty. Roczna stopa procentowa tej lokaty wynosi 2,4%, a odsetki od lokaty dopisywane są co kwartał. Oblicz stan lokaty pani Anny

a) po roku oszczędzania

b) po 15 miesiącach oszczędzania,

c) po 2,5 roku oszczędzania

d) po 8 latach oszczędzania.

Uwzględnij 18-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

2.162. Pani Marta założyła lokatę, wpłacając 3000 zł na procent prosty o rocznym oprocentowaniu równym 7%. Dodatkowo na początku każdego następnego roku oszczędzania wpłacała na tę lokatę kolejne 3000 zł. Wiedząc, że bank doliczał odsetki po każdym roku oszczędzania, oblicz kwotę na lokacie pani Marty po pięciu latach,

a) z pominięciem podatku dochodowego

b) z uwzględnieniem 18-procentowego podatku od dochodów kapitałowych.

2.163. Pan Adam założył lokatę na procent prosty, wpłacając do banku 8000 zł. Roczne oprocentowanie tej lokaty wynosiło 4,5%, a odsetki były dopisywane po każdym roku oszczędzania. Po upływie pierwszego i każdego następnego roku pan Adam wpłacał dodatkowo na tę lokatę 1000 zł. Ile lat pan Adam oszczędzał na tej lokacie, jeśli na koniec tego okresu oszczędzania, po dopisaniu odsetek, lokata miała wartość 26 290 zł? Pominięcie podatek od dochodów kapitałowych.

2.164. Pan Rafał założył czteroletnią lokatę na procent składany, wpłacając do banku 5000 zł. Roczne oprocentowanie tej lokaty jest równe 6%. Oblicz, jaką kwotę otrzyma pan Rafał z lokaty po tym okresie oszczędzania, jeśli kapitalizacja odsetek jest:

a) roczna b) półroczna c) kwartalna.

Pomiń podatek od dochodów kapitałowych.

2.165. Klient założył w banku lokatę w wysokości 25 000 zł na procent składany, o oprocentowaniu 10% w skali roku. Oblicz, jaką kwotę będzie miał na tej lokacie po trzech latach, jeśli odsetki są kapitalizowane:

a) po każdym roku oszczędzania b) co sześć miesięcy c) co kwartał.

Uwzględnij 18-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

2.166. Pani Ewa wpłaciła na lokatę 10 000 zł. Roczne oprocentowanie lokaty jest równe 8%, a kapitalizacja odsetek odbywa się co kwartał. Oblicz kwotę, jaką pani Ewa będzie miała na lokacie:

a) po 9 miesiącach b) po półtora roku c) po trzech latach oszczędzania.

Pomiń podatek od dochodów kapitałowych.

2.167. Pani Stefania założyła w banku lokatę w wysokości 10 000 zł na procent składany. Po dwóch latach bank wypłacił z lokaty całą kwotę, równą 12 155,06 zł. Jakie było oprocentowanie tej lokaty w skali roku, jeśli bank kapitalizował odsetki co sześć miesięcy? Pomiń podatek od dochodów kapitałowych.

2.168. Pani Irena założyła w banku lokatę w wysokości 10 000 zł na procent składany. Po dwóch latach bank wypłacił jej 12 146,04 zł. Jakie było oprocentowanie tej lokaty w skali roku, jeśli bank kapitalizował odsetki co trzy miesiące? Uwzględnij 18-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

2.169. Oblicz, jaką kwotę należy przeznaczyć na lokatę na procent składany, trwającą:

a) sześć miesięcy b) dziewięć miesięcy c) rok

aby po jej zakończeniu otrzymać 20 000 zł. Roczna stopa procentowa tej lokaty jest równa 12%, a kapitalizacja odsetek odbywa się co trzy miesiące. Pomiń podatek od dochodów kapitałowych.

2.170. W pewnym sklepie ze sprzętem RTV można kupić telewizor LCD, płacąc cztery raty po 2000 zł. Pierwszą ratę trzeba spłacić po trzech miesiącach od daty zakupu, a kolejne raty co trzy miesiące. Pan Michał chciałby kupić ten telewizor w systemie ratalnym. Ma na koncie w banku 7700 zł. Oprocentowanie na tym koncie wynosi 8% w skali roku, a kapitalizacja odsetek jest kwartalna. Czy ta kwota jest wystarczająca na zakup telewizora w systemie ratalnym? Odpowiedź uzasadnij.

2.171. Pani Klaudia wzięła w banku kredyt w wysokości 40 000 zł na zakup samochodu. Roczna stopa procentowa kredytu jest równa 16%. Kredyt ma być spłacony w ciągu dwóch lat, w kwartalnych ratach malejących. Pierwsza rata ma być spłacona po trzech miesiącach od daty przyznania kredytu. Oblicz:

a) wysokość pierwszej i ostatniej raty b) łączną kwotę odsetek od kredytu.

2.172. Pan Marcin wziął w banku kredyt w wysokości 40 000 zł na zakup samochodu. Roczna stopa procentowa kredytu jest równa 16%. Kredyt ma zostać spłacony w ciągu dwóch lat, w kwartalnych ratach równych. Pierwsza rata ma być spłacona po trzech miesiącach od daty przyznania kredytu. Oblicz:

a) wysokość raty kredytu b) łączną kwotę odsetek od kredytu.

Granica ciągu liczbowego

2.173. Oblicz, które wyrazy nieskończonego ciągu (a_n), gdzie $a_n = \frac{2n-3}{n+1}$ są oddalone od liczby 2 o mniej niż $\frac{1}{70}$.

2.174. Nieskończony ciąg (b_n) jest określony wzorem $b_n = \frac{7n^2-5}{2n^2}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Które wyrazy ciągu (b_n) są oddalone od liczby $3\frac{1}{2}$ o mniej niż $\frac{125}{512}$?

2.175. Nieskończony ciąg (d_n), gdzie $d_n = \frac{n}{n^2+4}$, jest zbieżny do liczby 0. Oblicz, ile wyrazów tego ciągu nie spełnia warunku $|d_n| < \varepsilon$, jeśli $\varepsilon = 0{,}05$.

2.176. Granicą nieskończonego ciągu (c_n), gdzie $c_n = \frac{-5n+7}{4n-1}$, jest liczba $-1\frac{1}{4}$. Ile wyrazów tego ciągu nie spełnia nierówności $\left|c_n - \left(-1\frac{1}{4}\right)\right| < \varepsilon$, jeśli $\varepsilon = \frac{1}{1000}$?

2.177. Dany jest wyraz ogólny ciągu (a_n): $a_n = \frac{2-15n}{9n}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną δ, dla której każdy wyraz ciągu (a_n) o numerze większym od δ jest oddalony od liczby $-1\frac{2}{3}$ o mniej niż $\frac{1}{250}$.

2.178. Nieskończony ciąg (b_n) jest określony wzorem $b_n=\frac{2n^2+5}{n^2+3}$. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną δ, dla której wszystkie wyrazy ciągu (b_n) o numerach większych od δ spełniają nierówność $|b_n-2|<0{,}01$.

D **2.179.** Ciąg (c_n) określony jest wzorem $c_n=\frac{(-1)^n}{2n}$, gdzie $n\in \boldsymbol{N}_+$. Wykaż na podstawie definicji, że $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=0$.

D **2.180.** Korzystając z definicji granicy ciągu wykaż, że:

a) liczba 5 jest granicą nieskończonego ciągu o wyrazie ogólnym $a_n=\frac{n+1}{0{,}2n+3}$

b) liczba $-0{,}75$ jest granicą nieskończonego ciągu o wyrazie ogólnym $b_n=\frac{5-6n}{8n+3}$.

D **2.181.** Wykaż, że nieskończony ciąg (c_n) o wyrazie ogólnym:

a) $c_n=\frac{3-(-1)^n}{19n+4}$ jest zbieżny do 0 b) $c_n=\frac{5n^2-3n}{4n^2+8}$ jest zbieżny do $1\frac{1}{4}$.

D **2.182.** Wykaż, że:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9n-5}{3-\frac{1}{2}n}=-18$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-5}{8n^2+1}=\frac{1}{4}$.

Obliczanie granic ciągów zbieżnych

2.183. Wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie i różne od 3. Wiedząc, że ciąg (a_n) jest zbieżny do liczby 3, oblicz:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2a_n-7}{4+5a_n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4a_n^2-7a_n-15}{2a_n-6}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{27-a_n^3}{4a_n-12}$.

2.184. Wiedząc, że $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{-2}{3}$ oraz $a_n\neq b_n$ dla $n\in\boldsymbol{N}_+$, oblicz:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(6b_n+3a_n)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n\cdot b_n}{a_n-b_n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2-9b_n^2)$.

2.185. Dane są nieskończone ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach ogólnych: $a_n=\frac{3n-1}{n+2}$, $b_n=\frac{n}{5n+4}$. Oblicz granicę ciągu (c_n), jeśli dla dowolnej liczby naturalnej n:

a) $c_n=a_n+b_n$ b) $c_n=\frac{a_n}{b_n}$ c) $c_n=a_n\cdot b_n$.

2.186. Oblicz dane granice.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{8}{n+1}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{4n}+3\right)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+3}{10-12n}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{n+3}{3n+1}\right)$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n-2}{1-5n}+1\right)^2$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n}+4\right)^2}{2n+5}$

2.187. Oblicz dane granice.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{3}{n^2}\right)\cdot\left(\frac{n+3}{4n-1}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{2n+1}-\frac{4n+1}{6n}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}+\frac{2n-5}{n}\right)^2$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1-4n}{2n}-\frac{n}{n+5}\right)}{\left(1-\frac{2n+4}{6n+7}\right)^2}$

2.188. Oblicz dane granice.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-6n+7}{4+8n^2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n+2n^2}{5n^2-3n+6}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(5n-1)(0{,}2n^2-4)}{2n^3+8n}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{16n^3+9n+5}{(2n-1)(3-4n)(n+5)}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3-6n+5}{(n^2+1)(n^2-3)}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n^2-5)^2}{7n^4+5n^2+3}$

2.189. Oblicz dane granice.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}+3}{5-4\sqrt{n}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3\sqrt{n}-2)(2\sqrt{n}+1)}{5n+8}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4-8n}{(2\sqrt{n}+3)^2}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}(n+3)}{4n^2+5}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n\sqrt{n}+3\right)^2}{5+0{,}2n^3}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2\sqrt{n}+1}{8n^3+7n^2}$

2.190. Oblicz dane granice.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{3n^2+5n}{12n^2+1}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2+7}}{8n-9}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{\sqrt{9n^2+5n+3}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(4n+1)(5+n)(4+n)}}{3n^2+2n+11}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+81}}{\sqrt[3]{7+64n^3}}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2-4n+2}{\sqrt{\left(n^2-3\right)\left(n^2+5\right)}}$

2.191. Oblicz dane granice.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+6+11+\ldots+(5n-4)}{3n^2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4n-1)(3n+5)}{2+5+8+\ldots+(3n-1)}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7+12+17+\ldots+(5n+2)}{1+2+3+\ldots+n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+4+7+10+\ldots+(3n-2)}{2n}-\dfrac{3n}{4}\right)$

2.192. Oblicz dane granice.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2+5n}-2n\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2\sqrt{n}+3}-\sqrt{n}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{n^2+6}-\sqrt{n^2+1}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n-\sqrt{n(n+4)}}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{9n^2-2n}-3n}{\sqrt{n+5}-2}$

2.193. Oblicz granicę:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+4}-n\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{8n^3+n^2}-2n\right)$.

2.194. Wyznacz wartości parametru k, $k\in \boldsymbol{R}$, dla których nieskończony ciąg (a_n) określony wzorem $a_n=\dfrac{\left(k^2+2k\right)n+7}{n+5}$ ma granicę równą:

a) 3

b) -1

c) 0.

2.195. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a\in \boldsymbol{R}$, dla których:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(a-1)n+9}{an+1}=\dfrac{2}{5}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(9a^2-16\right)n^2+n}{5n+(4+3a)n^2}=-10$

Wybrane własności ciągów zbieżnych

2.196. Oblicz dane granice.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(4-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2^{-n}+\dfrac{5}{6^n}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n+6^n}{6^n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n-4}{1+9^n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\cdot 2^{2n}-5}{8\cdot 4^n+2}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+7\cdot 3^{n-1}}{2^n+2\cdot 3^n}$

2.197. Oblicz dane granice.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(2^n+1\right)^2}{4^n+2^n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{16^n+4}{\left(2^{2n}-2\right)\left(2^{2n}+2\right)}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{\left(3^{n-1}+2\right)\left(3^{n-1}-2\right)}{3^{2n}+5}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(2^n-4^n\right)^3}{\left(3-8^n\right)^2}$

2.198. Oblicz dane granice.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{6}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{4^n}}$

2.199. Oblicz dane granice.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n+5^n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{7}{8}\right)^n+1+\left(\dfrac{8}{7}\right)^n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n+7^n+8^n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{10^{n+1}}-\sqrt[n]{\dfrac{1}{10^{1000}}}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}+(0{,}6)^n+\sqrt[n]{2^{3n+5}}\right)$

2.200. Oblicz dane granice.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n+2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sin(n+3)}{(3n-1)^2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n^2+n)}{5n+1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2\cos 4n}{n^3+2n+5}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{4n}\sin(4n-3)-\dfrac{5n}{10n+1}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n}{n^2+1}\cdot\cos(3n+1)+\dfrac{2n}{n+3}\right)$

Ciągi rozbieżne do nieskończoności

2.201. Sprawdź, które wyrazy nieskończonego ciągu (a_n) są większe od liczby M, jeśli:

a) $a_n=\dfrac{2n}{5}-120$, $M=4000$

b) $a_n=2n^2+3n-5$, $M=10$.

2.202. Sprawdź, które wyrazy nieskończonego ciągu (b_n) są mniejsze od liczby M, jeśli:

a) $b_n=148-3n^2$, $M=5$

b) $b_n=\dfrac{16}{n^2}-n^2$, $M=-6$.

D **2.203.** Wykaż na podstawie definicji, że:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(3n-4)=+\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(100-2n^2)=-\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+1}{12}=+\infty$.

2.204. Oblicz dane granice.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-11)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(1-5n)}{2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-4n^2+1}{3n^2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}(8n^3-5n^2+7n-10)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n-1)^2-8n^2\right]$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)^3$

2.205. Oblicz dane granice.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(2-3n)(5+4n)(1-n)\right]$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(3-n^4)^2-n^2\cdot(n^6+5)\right]$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-5)(1-2n)(2n+7)}{-4n^2+8n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3n+8n^2-7n^3}{(3n-2)^2}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6n^2-3n+1)^2}{9n^3-4n^2+5}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8+3n-6n^2-19n^3}{(2n-1)^3-(2n+1)^3}$

2.206. Oblicz dane granice.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(3^n+7)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-8^n)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n+1}+\sqrt{n}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n+3}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-2n\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{5-9n}$

2.207. Oblicz dane granice.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(11-2\sqrt[3]{n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{2n^2+7}+\sqrt[3]{n^2+5}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n}-\sqrt{n+10}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n+1}-\sqrt{n^3}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-n\right)$

2.208. Oblicz dane granice.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+1}{3}-\dfrac{2n^2+1}{2}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+1}{3}-\dfrac{n+1}{n+3}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-n+\dfrac{n+5}{n+1}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(n+1)^2}{n}-\dfrac{n^2}{n+1}\right]$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n+1}{2}-\dfrac{5+7+9+\ldots+(2n+3)}{n}\right]$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+5+9+\ldots+(4n-3)}{n+3}-2n\right]$

2.209. Wyznacz wartości parametru p, $p\in \boldsymbol{R}$, dla których nieskończony ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n=\sqrt{4n^2+3n+5}-(pn+1)$:

a) ma granicę niewłaściwą $-\infty$

b) ma granicę niewłaściwą $+\infty$

c) ma granicę właściwą. Oblicz tę granicę.

2.210. Zbadaj istnienie granicy $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{a^2n^2+n+4}-n}$ w zależności od wartości parametru a, gdzie $a\in \boldsymbol{R}$.

Szereg geometryczny

2.211. Oblicz sumę szeregu geometrycznego:

a) $\frac{4}{3}+1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\dots$

b) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\dots$

c) $\sqrt{12}-\sqrt{6}+\sqrt{3}-\frac{\sqrt{6}}{2}+\dots$

d) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+1+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\dots$

2.212. Balon wzniósł się w ciągu godziny na wysokość 4000 m. Jaka jest graniczna wysokość, którą mógłby osiągnąć balon, gdyby w ciągu każdej następnej godziny wznosił się na wysokość równą $\frac{1}{3}$ wysokości z godziny poprzedniej?

2.213. Zapisz dane ułamki okresowe w postaci ilorazu liczb całkowitych:

a) 1,(37) b) −0,2(6) c) 0,1(32) d) 4,0(12)

2.214. Wyznacz iloraz nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego (a_n), którego pierwszy wyraz jest równy 6, a suma wszystkich jego wyrazów wynosi 18. Podaj wyraz ogólny tego ciągu.

2.215. Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego $\left(a, \frac{3a}{4}, \frac{9a}{16}, \dots\right)$ jest równa 12.

a) Oblicz a.

b) Wyznacz sumę pięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

2.216. Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 12. Wiedząc, że iloraz tego ciągu wynosi $-\frac{1}{4}$, oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (S_n), gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (b_n).

2.217. W nieskończonym ciągu geometrycznym zbieżnym (a_n) suma n początkowych wyrazów jest równa S_n, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu, jeśli:

a) $S_n=\frac{3^n-1}{6\cdot 3^{n-2}}$

b) $S_n=\frac{5^n-1}{12\cdot 5^{n-1}}$

Jaki jest iloraz ciągu (a_n)?

2.218. Wyznacz wszystkie wartości x, $x \in \mathbb{R}$, dla których dany szereg geometryczny jest zbieżny.

a) $\frac{1}{x-2}+\frac{3}{(x-2)^2}+\frac{9}{(x-2)^3}+\dots$

b) $1+(-1)\cdot\frac{x+1}{2x+3}+\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^2+\dots$

2.219. Dany jest nieskończony ciąg geometryczny $\left(\frac{b+1}{b-3}, \frac{(b+1)^2}{2b-6}, \frac{(b+1)^3}{4b-12}, \dots\right)$.

Wyznacz b wiedząc, że suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa −2,4.

2.220. Rozwiąż dane równanie wiedząc, że lewa strona równania jest sumą pewnego szeregu geometrycznego zbieżnego.

a) $2+4(x+3)+8(x+3)^2+\dots=1\frac{3}{5}$

b) $2x+4+\frac{8}{x}+\dots=-5\frac{1}{3}$

c) $1+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}+\dots=1-2x$

d) $\frac{2+3x}{x+1}+\left(\frac{2+3x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{2+3x}{x+1}\right)^3+\dots=4x+3$

2.221. Rozwiąż daną nierówność wiedząc, że lewa strona nierówności jest sumą pewnego szeregu zbieżnego.

a) $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\dots>2$

b) $\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{x}\right)^3+\left(\sqrt{x}\right)^4+\dots<\sqrt{x}+1$

c) $x^2+x^3+x^4+\dots>-1-x$

d) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}+\dots\leqslant 3x-2$

e) $\frac{1}{x+2}+\frac{2x+1}{(x+2)^2}+\frac{(2x+1)^2}{(x+2)^3}+\dots\geqslant 3$

f) $\frac{x}{x-5}-\frac{x^2}{(x-5)^2}+\frac{x^3}{(x-5)^3}-\dots\geqslant 2-x^2$

2.222. Wzór funkcji f jest sumą pewnego szeregu geometrycznego zbieżnego. Naszkicuj wykres tej funkcji oraz podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x)=x+\frac{x}{1-x}+\frac{x}{(1-x)^2}+\dots$

b) $f(x)=(x+3)+\frac{(x+3)x}{x-2}+\frac{(x+3)x^2}{(x-2)^2}+\dots$

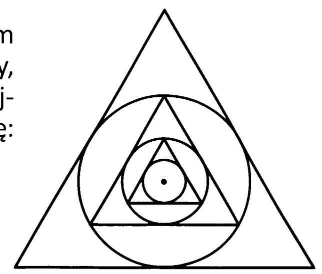
c) $f(x)=1+\frac{x}{3+2x}+\left(\frac{x}{3+2x}\right)^2+\left(\frac{x}{3+2x}\right)^3+\dots$

2.223. W trójkąt równoboczny o boku długości 9 cm wpisano koło K_1. W koło K_1 wpisano trójkąt równoboczny, a w ten trójkąt koło K_2. W koło K_2 ponownie wpisano trójkąt równoboczny, a w ten trójkąt koło K_3, itd. Oblicz sumę:

a) promieni

b) obwodów

c) pól wszystkich kół.



2.224. Ciąg (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym zbieżnym. Wyznacz ten ciąg wiedząc, że suma wszystkich jego wyrazów o numerach nieparzystych jest równa $\frac{3}{8}$, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa $\frac{1}{8}$.

D **2.225.** Wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego są różne od zera. Wykaż, że iloraz dowolnie wybranego wyrazu tego ciągu przez sumę wszystkich wyrazów, które po nim występują, jest stały. Podaj ten stały iloraz.

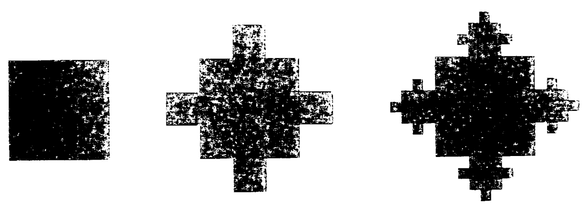
D **2.226.** Ciąg (a_n), gdzie $a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbf{N}_+$, jest nieskończonym ciągiem geometrycznym zbieżnym o ilorazie q. Niech S oznacza sumę wszystkich wyrazów ciągu (a_n), natomiast S_p – sumę wszystkich wyrazów o numerach parzystych. Wykaż, że jeśli $S = 7 \cdot S_p$, to $q = \frac{1}{6}$.

D **2.227.** Wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n) są dodatnie. Wykaż, że jeśli dla dowolnej liczby naturalnej k, gdzie $k \geqslant 2$, prawdziwa jest równość $b_{k-1} - 9b_{k+1} = 0$, to:

a) ciąg (b_n) jest zbieżny

b) suma trzech początkowych wyrazów ciągu (b_n) jest 26 razy większa od sumy pozostałych wyrazów tego ciągu.

D **2.228.** Budujemy nieskończony ciąg figur (F_n), $n \in \mathbf{N}_+$. Figurą F_1 jest kwadrat o boku długości a. Następnie dzielimy każdy bok kwadratu na trzy równe części i „doklejamy” cztery kwadraty o boku długości $\frac{a}{3}$. W ten sposób otrzymujemy figurę F_2. W kolejnym kroku dzielimy trzy boki mniejszych czterech kwadratów i „doklejamy” do nich po trzy kwadraciki o boku długości $\frac{a}{9}$, otrzymując figurę F_3 (zobacz rysunek poniżej). Analogicznie konstruujemy kolejne figury ciągu (F_n).



Niech L_n oznacza obwód figury F_n, natomiast P_n – pole figury F_n.

a) Wykaż, że $L_n = \frac{4a(2n+1)}{3}$ oraz oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} L_n$.

b) Wykaż, że $P_n = a^2\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3^n}\right)$ oraz oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

Test sprawdzający do rozdziału 2.

1. Ciąg $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \dots\right)$ można dla $n \in \mathbf{N}_+$ opisać wzorem:

A. $a_n = -1^{n+1} \cdot \frac{1}{2n}$ B. $a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n}$

C. $a_n = (-1)^{1+n} \cdot \frac{1}{2+n}$ D. $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n}$.

2. Ciąg (b_n) jest określony wzorem $b_n = n^2 - 18n$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Ile wyrazów tego ciągu jest mniejszych od 40?

A. dziewiętnaście B. osiemnaście C. siedemnaście D. dwadzieścia.

3. Suma wszystkich całkowitych wyrazów nieskończonego ciągu (c_n), gdzie $c_n = \frac{6}{2n-3} + 4$, jest równa:

A. 8 B. 14 C. 16 D. 12.

4. Ciąg (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_n^2 - 3a_{n+1},\ n \geqslant 1 \end{cases}$. Zatem:

A. $a_5 = 5$ B. $a_5 = -2$ C. $a_5 = -9$ D. $a_5 = 7$.

5. Nieskończony ciąg (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = \frac{25-4n^2}{2n+5}$, $n \in \mathbf{N}_+$ jest ciągiem:

A. rosnącym B. malejącym C. stałym D. niemonotonicznym.

6. W ciągu arytmetycznym (c_n) dane są: $c_2 = 3$ oraz $c_{10} = -37$. Różnica tego ciągu jest równa:

A. –7 B. –3 C. –5 D. –9.

7. Ciąg (a_n) jest malejącym ciągiem geometrycznym, w którym $a_3 = 18$ oraz $a_5 = 10\frac{1}{8}$. Iloraz tego ciągu jest równy:

A. $-\frac{3}{4}$ lub $\frac{3}{4}$ B. $-\frac{4}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 0,75.

8. Dane są wyrazy ogólne ciągów (b_n) i (c_n): $b_n = 3^{n-1}$ oraz $c_n = \frac{5}{2}n - 5\frac{3}{4}$, $n \in \mathbf{N}_+$.
Ile razy suma ośmiu początkowych wyrazów ciągu (b_n) jest większa od sumy dwudziestu początkowych wyrazów ciągu (c_n)?
A. 8 razy B. 6 razy C. 5 razy D. 2 razy

9. Ciąg $(x, y, 2 - x)$ jest jednocześnie ciągiem arytmetycznym i geometrycznym. Zatem liczba $2x^2 + y^2$ jest podzielna:
A. przez 5 B. przez 3 C. przez 2 D. przez 7.

10. Klient banku wpłacił kwotę K na trzyletnią lokatę terminową, z półroczną kapitalizacją odsetek. Oprocentowanie lokaty wynosi 0,08%. Jeśli uwzględnimy 18-procentowy podatek od dochodów kapitałowych, to po trzech latach na lokacie będzie kwota:

A. $K \cdot (1 + 0{,}328 \cdot 10^{-3})^6$ B. $K \cdot \left(1 + 0{,}18 \cdot \frac{4}{100}\right)^6$

C. $K \cdot (1 + 0{,}82 \cdot 0{,}04)^6$ D. $K \cdot (1 + 0{,}82 \cdot 8 \cdot 10^{-4})^6$.

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2.

11. Ciąg (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = a_n^2 - 15n,\ n \geqslant 1 \end{cases}$. Nieskończony ciąg (b_n) ma postać $(1, 8, 27, 64, \ldots)$. Oblicz $a_6 - b_6$.

12. Dany jest wyraz ogólny ciągu (c_n): $c_n = \frac{5-6n}{2n+1}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

D a) Wykaż, że ciąg (c_n) jest malejący.

b) Które wyrazy ciągu (c_n) należą do przedziału $\left\langle -2\frac{1}{2}, -2 \right)$?

D **13.** Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n^2 + 6n + 4$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Wykaż, że suma dowolnych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest kwadratem pewnej liczby naturalnej.

14. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{6n^2 - 11n - 7}{3n - 7}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

D a) Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, a jego wyrazy są liczbami nieparzystymi.

b) Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu, które są mniejsze od 100 i jednocześnie przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1.

15. Dany jest trzywyrazowy ciąg $\left(k^2 - \frac{5}{2}k, \frac{(2k-3)^2}{8}, \frac{9-2k}{4}\right)$, gdzie $k \in \mathbf{R}$.

a) Podaj wyrazy tego ciągu w przypadku, gdy $k = -3$.

b) Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej k dany ciąg jest ciągiem arytmetycznym.

16. Pierwszy wyraz nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy -3, a różnica tego ciągu jest równa 4. Oblicz największą liczbę n, dla której $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n < 1650$.

17. Suma n kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (b_n) wyraża się wzorem $S_n = n^2 - 9n$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

a) Oblicz, ile początkowych wyrazów ciągu (b_n) należy zsumować, aby otrzymać liczbę 322.

b) Wyznacz wyraz ogólny ciągu (b_n).

18. Suma n kolejnych początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = n^2 + 10n$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

a) Oblicz piętnasty wyraz ciągu (a_n).

D b) Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

19. Ciąg $(5, 9, 13, \ldots, 121)$ ma trzydzieści wyrazów. Iloraz wyrazu stojącego na miejscu k – licząc od początku, do wyrazu stojącego na miejscu k – licząc od końca, wynosi $\frac{11}{31}$. Oblicz k.

20. Liczby $7x + 1$, $2(x + 1)$, $x - 1$ są w podanej kolejności drugim, trzecim i czwartym wyrazem pewnego nieskończonego, monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n).

a) Oblicz x.

b) Wyznacz wyraz ogólny ciągu (a_n).

c) Wiedząc, że suma k początkowych wyrazów ciągu jest równa $161\frac{25}{27}$, oblicz k.

21. Na trzech półkach ustawiono 42 książki. Okazało się, że liczby książek kolejno na półce górnej, półce środkowej i półce dolnej tworzą rosnący ciąg geometryczny. Na środkowej półce stoi 12 książek. Oblicz, ile książek stoi na górnej półce, a ile na dolnej półce.

22. Dany jest trójkąt równoboczny T_1 o boku długości 10 cm. Wysokość trójkąta T_1 jest bokiem trójkąta równobocznego T_2, natomiast wysokość trójkąta T_2 jest bokiem trójkąta równobocznego T_3, itd. Oblicz sumę

a) obwodów b) pól trójkątów $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$.

23. Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest ciągiem różnowartościowym. Wiedząc, że $a_3 - a_2 = 5(a_2 - a_1)$ oraz $S_3 = 62$, oblicz pięć kolejnych początkowych wyrazów tego ciągu.

24. W skończonym ciągu geometrycznym (b_n) pierwszy wyraz jest równy 3, a wyraz ostatni jest równy 768. Wiedząc, że suma wszystkich wyrazów ciągu (b_n) wynosi 1533, oblicz iloraz tego ciągu. Ile wyrazów ma ten ciąg?

25. Nieskończony ciąg arytmetyczny (a_n) jest ciągiem rosnącym, a jego trzeci wyraz jest równy 5. Pierwszy, drugi i piąty wyraz ciągu (a_n) w podanej kolejności są jednocześnie początkowymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego (b_n). Oblicz:

a) $a_5 + a_6 + a_7 + \ldots + a_{20}$

b) sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu (b_n).

26. Nieskończony ciąg liczbowy (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, w którym pierwszy wyraz jest równy −15, a różnica wynosi 6. Dla pewnej naturalnej liczby dodatniej k ciąg (a_k, a_{k+1}, a_{2k}) jest ciągiem geometrycznym.

a) Oblicz liczbę k.

b) Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego.

D **27.** Ciąg (a, b, c) jest ciągiem arytmetycznym, a ciąg $(a + 5, b + 1, c)$ jest malejącym ciągiem geometrycznym. Wykaż, że jeśli $a + b + c = 15$, to iloczyn abc jest liczbą podzielną przez 35.

28. Firma informatyczna zanotowała comiesięczny wzrost zysku według następującej reguły: zysk w każdym kolejnym miesiącu był większy od zysku z poprzedniego miesiąca o 10% zysku z pierwszego miesiąca. Podaj z dokładnością do 1%, o ile procent więcej zysku miałaby ta firma w przeciągu całego roku, gdyby zysk z każdego kolejnego miesiąca był o 10% wyższy od zysku z poprzedniego miesiąca.

29. Pan Jerzy wpłacił 15 000 zł na trzyletnią lokatę, której oprocentowanie w stosunku rocznym wynosi 6%. Kapitalizacja odsetek odbywa się co kwartał. Jaką kwotą będzie dysponować pan Jerzy po trzech latach? Uwzględnij 20-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

30. Pani Ada wpłaciła 20 000 zł na czteroletnią lokatę, z półroczną kapitalizacją odsetek. Jakie było roczne oprocentowanie tej lokaty, jeśli po czterech latach pani Ada miała na lokacie 23 433,18 zł? Pomijamy podatek od dochodów kapitałowych.

D **31.** Ciąg arytmetyczny (a_n) ma 21 wyrazów, a ich suma jest równa 420.

a) Wykaż, że środkowy wyraz tego ciągu jest równy 20.

b) Oblicz sumę kolejnych wyrazów tego ciągu od dziewiątego do trzynastego włącznie.

D **32.** Liczby a, b, c, d są dodatnie. Ciąg (a, b, c) jest ciągiem arytmetycznym, a ciąg (a, d, c) jest ciągiem geometrycznym. Wykaż, że $b \geqslant d$.

33. Rosnący ciąg geometryczny (a_n) ma parzystą liczbę wyrazów. Wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie, a ich suma jest 5 razy większa od sumy wyrazów o numerach nieparzystych.

a) Oblicz iloraz ciągu (a_n).

b) Wiedząc dodatkowo, że iloczyn dwudziestu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi 1024^{32}, wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu.

34. Wyrazy malejącego ciągu geometrycznego są pierwiastkami wielomianu $W(x) = 3x^3 + ax^2 + bx - 3$. Wiadomo, że suma tych wyrazów jest równa $4\frac{1}{3}$.

a) Oblicz a i i.

b) Wyznacz ten ciąg.

35. Oblicz dane granice.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-n}{n+3}-\frac{2n^2+8}{n+5}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{\sqrt{9n^2+n}-3n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{3}-\frac{2+7+12+\ldots+(5n-3)}{4n}\right]$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+9+\ldots+3^n}{\left(\sqrt{3}\right)^{2n}+5}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\sqrt[n]{3^n+7^n}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7\sin\left(n^2+1\right)}{n+8}$

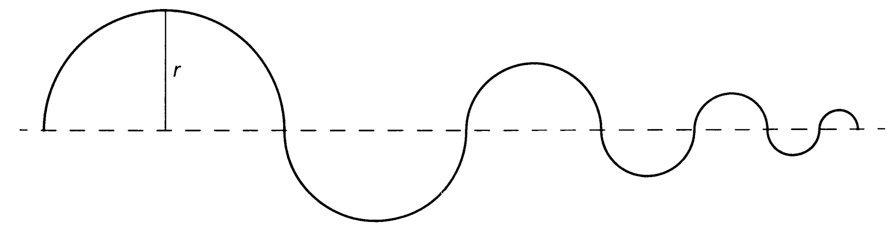
D **36.** Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}\cdot\sqrt{2}}-\frac{1}{2^n}\right)=\sqrt{2}-1.$

37. Rozwiąż nierówność $x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{4}x^5-\frac{1}{8}x^6+\ldots \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+6n+5}{(1-n)(2-3n)n}$.

D **38.** Z nieskończonej liczby półokręgów budujemy krzywą. Pierwszy półokrąg ma promień długości r, a promień każdego następnego półokręgu stanowi 75% promienia poprzedniego okręgu. Wykaż, że:

a) dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n długość krzywej zbudowana z n początkowych półokręgów jest mniejsza od $4\pi r$.

b) stosunek długości krzywej zbudowanej z dwóch początkowych okręgów do długości krzywej zbudowanej z pozostałych półokręgów jest równy 9 : 7.



D 39. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są różne od zera i tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny, to $a^2b^2c^2 \cdot \left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$.

D 40. Wykaż, że jeśli $q \in \left(-1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, to

$$\left(1+q+q^2+q^3+\ldots\right)\cdot\left[1-q(1+q)+q^2(1+q)^2-q^3(1+q)^3+\ldots\right]=\frac{1}{1-q^3}.$$

3. Kombinatoryka. Dwumian Newtona. Trójkąt Pascala

3.1. Na ile sposobów możemy utworzyć parę dziewczynka – chłopiec, jeśli mamy do dyspozycji cztery dziewczynki: Agatkę, Beatkę, Celinkę i Dorotkę oraz trzech chłopców: Edwina, Franka i Grześka.
Wypisz wszystkie możliwe pary w tabeli.

3.2. Poniższa tabela przedstawia wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe utworzone w taki sposób, że cyfra dziesiątek jest cyfrą ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$, a cyfra jedności – ze zbioru $\{6, 7, 8, 9\}$. Narysuj drzewo, w którym gałęzie przedstawiają wszystkie utworzone liczby.

c.dz. \ c.j.	6	7	8	9
1	16	17	18	19
2	26	27	28	29
3	36	37	38	39
4	46	47	48	49

3.3. Ile jest liczb dwucyfrowych, w których cyfra jedności jest równa 1 lub 2, zaś cyfra dziesiątek jest większa od 5? Narysuj drzewo, w którym gałęzie przedstawiają wszystkie utworzone liczby.

3.4. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których cyfra setek jest równa 1, 2 lub 3; cyfra dziesiątek jest liczbą podzielną przez 5, a cyfra jedności jest większa od 6? Narysuj drzewo, w którym gałęzie przedstawiają wszystkie utworzone liczby.

3.5. Dane są zbiory: $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5\}$, $Z = \{6, 7, 8, 9, 0\}$. Ile jest liczb trzycyfrowych, których cyfra setek należy do zbioru X, cyfra dziesiątek – do zbioru Y, a cyfra jedności – do zbioru Z i które są:

a) parzyste b) nieparzyste c) większe od 299?

W każdym przypadku narysuj trzyetapowe drzewo przedstawiające te liczby.

3.6. Dane są trzy zbiory: $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Ile jest liczb trzycyfrowych, których cyfra setek należy do zbioru A, cyfra dziesiątek – do zbioru B, a cyfra jedności – do zbioru Z i które są:

a) podzielne przez 5 b) mniejsze od 300 c) nie mniejsze niż 279?

3.7. Z cyfr ze zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tworzymy wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe, przy czym cyfry w liczbie mogą się powtarzać. Zapisz w tabeli wszystkie utworzone liczby. Ile spośród utworzonych liczb ma cyfrę dziesiątek mniejszą od cyfry jedności?

D 39. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są różne od zera i tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny, to $a^2b^2c^2 \cdot \left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$.

D 40. Wykaż, że jeśli $q \in \left(-1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, to

$$\left(1+q+q^2+q^3+\ldots\right)\cdot\left[1-q(1+q)+q^2(1+q)^2-q^3(1+q)^3+\ldots\right]=\frac{1}{1-q^3}.$$

3. Kombinatoryka. Dwumian Newtona. Trójkąt Pascala

3.1. Na ile sposobów możemy utworzyć parę dziewczynka – chłopiec, jeśli mamy do dyspozycji cztery dziewczynki: Agatkę, Beatkę, Celinkę i Dorotkę oraz trzech chłopców: Edwina, Franka i Grześka.
Wypisz wszystkie możliwe pary w tabeli.

3.2. Poniższa tabela przedstawia wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe utworzone w taki sposób, że cyfra dziesiątek jest cyfrą ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$, a cyfra jedności – ze zbioru $\{6, 7, 8, 9\}$. Narysuj drzewo, w którym gałęzie przedstawiają wszystkie utworzone liczby.

c.dz. \ c.j.	6	7	8	9
1	16	17	18	19
2	26	27	28	29
3	36	37	38	39
4	46	47	48	49

3.3. Ile jest liczb dwucyfrowych, w których cyfra jedności jest równa 1 lub 2, zaś cyfra dziesiątek jest większa od 5? Narysuj drzewo, w którym gałęzie przedstawiają wszystkie utworzone liczby.

3.4. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których cyfra setek jest równa 1, 2 lub 3; cyfra dziesiątek jest liczbą podzielną przez 5, a cyfra jedności jest większa od 6? Narysuj drzewo, w którym gałęzie przedstawiają wszystkie utworzone liczby.

3.5. Dane są zbiory: $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5\}$, $Z = \{6, 7, 8, 9, 0\}$. Ile jest liczb trzycyfrowych, których cyfra setek należy do zbioru X, cyfra dziesiątek – do zbioru Y, a cyfra jedności – do zbioru Z i które są:

a) parzyste b) nieparzyste c) większe od 299?

W każdym przypadku narysuj trzyetapowe drzewo przedstawiające te liczby.

3.6. Dane są trzy zbiory: $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Ile jest liczb trzycyfrowych, których cyfra setek należy do zbioru A, cyfra dziesiątek – do zbioru B, a cyfra jedności – do zbioru Z i które są:

a) podzielne przez 5 b) mniejsze od 300 c) nie mniejsze niż 279?

3.7. Z cyfr ze zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tworzymy wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe, przy czym cyfry w liczbie mogą się powtarzać. Zapisz w tabeli wszystkie utworzone liczby. Ile spośród utworzonych liczb ma cyfrę dziesiątek mniejszą od cyfry jedności?

3.8. Z cyfr ze zbioru $B = \{6, 7, 8, 9\}$ tworzymy wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe, w których cyfry nie mogą się powtarzać. Zapisz w tabeli wszystkie utworzone liczby. Ile jest wśród nich liczb podzielnych przez 4?

3.9. Z cyfr ze zbioru $X = \{0, 1, 2, 3\}$ tworzymy wszystkie liczby trzycyfrowe, przy czym cyfry w liczbie nie mogą się powtarzać. Narysuj drzewo, w którym gałęzie przedstawiają utworzone liczby trzycyfrowe. Ile wśród nich jest liczb podzielnych przez 3?

3.10. Ze zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ wybieramy kolejno dwie różne cyfry i tworzymy liczbę dwucyfrową. Ile jest możliwości utworzenia:

a) takiej liczby dwucyfrowej b) liczby podzielnej przez 2?

3.11. Ile jest punktów o współrzędnych całkowitych (x, y), takich, że $x \in (4, 20)$, $y \in \langle 0, 100\rangle$?

3.12. Ile jest punktów, których współrzędne (x, y) są różnymi liczbami całkowitymi, jeśli:

a) $x, y \in (6, 25)$ b) $x \in \langle 0, 10), y \in (1, 10\rangle$ c) $x \in \langle 3, 23\rangle, y \in (9, 39)$

3.13. Dane są zbiory: $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5\}$, $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Ile jest par uporządkowanych (a, b) takich, że liczba a jest elementem zbioru X i jednocześnie liczba b jest elementem zbioru Z lub liczba a jest elementem zbioru Y i jednocześnie liczba b jest elementem zbioru X?

3.14. Dane są zbiory: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{6, 7, 8\}$. Na ile sposobów można wybrać parę liczb (a, b), gdzie $a \in A$ i $b \in B$ tak, aby suma $a + b$ była liczbą:

a) nieparzystą b) parzystą c) większą od 9?

3.15. Dane są zbiory: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Na ile sposobów można wybrać parę liczb (a, b), gdzie $a \in A$ i $b \in B$ tak, aby iloczyn $a \cdot b$ był liczbą:

a) podzielną przez 7 b) parzystą c) podzielną przez 3?

3.16. W klasie III A jest 14 dziewcząt i 16 chłopców, a w klasie III B – 17 dziewcząt i 12 chłopców. Na ile sposobów można wybrać dwuosobową delegację tych dwóch klas składającą się z chłopca i dziewczyny tak, aby każda klasa miała swego przedstawiciela w tej delegacji?

3.17. Restauracja „Międzynarodowa" serwuje 12 dań kuchni polskiej, 10 dań kuchni węgierskiej i 8 dań kuchni czeskiej. Na ile sposobów można w tej restauracji wybrać dwa różne dania, z których:

a) jedno należy do kuchni polskiej, a drugie nie należy do kuchni polskiej
b) co najmniej jedno należy do kuchni polskiej?

3.18. Pewna dama ma 14 różnych torebek, oraz 16 różnych par pantofelków w różnych kolorach – według tabeli umieszczonej poniżej.

	Kolor czarny	Kolor brązowy	Kolor czerwony	Kolor beżowy
Torebki	5	4	2	3
Pantofelki	6	3	2	5

Na ile sposobów owa dama może skompletować parę torebka – pantofelki:

a) w jednym kolorze
b) w dwóch różnych kolorach – w brązie i w beżu?

3.19. Grupa pięciolatków z przedszkola z okazji Dnia Matki zaprosiła swoje mamy na przedstawienie, w których wystąpią jako skrzaty, mające czapki w trzech kolorach: czerwonym, niebieskim i zielonym. Liczbę osób mających czapkę w danym kolorze przedstawia tabela poniżej.

	Czapka czerwona	Czapka niebieska	Czapka zielona
Dziewczynki	7	4	2
Chłopcy	3	6	3

Ile jest możliwości wyboru pary – dziewczynka, chłopiec, w której:

a) obie osoby mają czapkę w takim samym kolorze
b) co najmniej jedna osoba ma czerwoną czapkę?

3.20. Dany jest zbiór $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Ile jest par uporządkowanych (a, b) takich, że liczby a, b należą do zbioru X oraz:

a) liczba a jest mniejsza od 3 lub liczba b jest większa od 7;
b) liczba a jest większa od b lub liczba b jest większa od liczby a;
c) liczba a jest nie mniejsza niż 4 i jednocześnie liczba b jest podzielna przez 3 lub przez 5;
d) liczba a jest liczbą pierwszą lub liczba b jest nie większa niż 6?

3.21. Ile jest liczb dwucyfrowych, w których zapisie występuje:

a) cyfra 1 i cyfra 7 b) cyfra 1 lub cyfra 7?

3.22. Ile jest liczb dwucyfrowych, w których cyfra 8 występuje:

a) tylko jeden raz b) co najwyżej jeden raz?

3.23. Ile jest liczb dwucyfrowych, w których:

a) co najmniej jedna cyfra jest parzysta
b) co najmniej jedna cyfra jest nieparzysta?

3.24. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których cyfra 3 występuje tylko raz?

3.25. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie cyfra 0 występuje:
a) co najwyżej raz b) co najmniej raz?

3.26. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie cyfra 1 występuje:
a) co najwyżej raz b) co najmniej raz?

3.27. Ile liczb dwucyfrowych podzielnych przez 3 można utworzyć z cyfr:
a) 1, 2, 4, 5, 7, 8 b) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

3.28. Ile liczb dwucyfrowych:
a) parzystych b) podzielnych przez 4
można utworzyć z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

3.29. Ile liczb dwucyfrowych podzielnych przez 6 można utworzyć z cyfr $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?

3.30. Ile jest liczb dwucyfrowych:
a) podzielnych przez 2 lub przez 3
b) podzielnych przez 4 lub 7
c) większych od 40 lub podzielnych przez 8
d) podzielnych przez 2 lub 5 i niepodzielnych przez 6?

Wariacje

3.31. Ile jest liczb trzycyfrowych utworzonych z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

3.32. Ile pięcioliterowych kodów można utworzyć z liter A, B, C?

3.33. Oblicz, ile jest czterocyfrowych:
a) liczb b) kodów PIN,
w których cyfry mogą się powtarzać.

3.34. Na ile sposobów sekretarka może wrzucić do trzech różnych szuflad 4 listy zaadresowane do różnych osób?

3.35. Oblicz, ile jest liczb siedmiocyfrowych, utworzonych tylko z cyfr będących liczbami pierwszymi.

3.36. Oblicz, ile jest liczb sześciocyfrowych, utworzonych:
a) tylko z cyfr nieparzystych b) tylko z cyfr parzystych.

3.37. Na górę do zamku prowadzą 4 różne szlaki. Na ile sposobów turysta może wejść na górę i wrócić z powrotem, jeśli zamierza zejść z góry innym szlakiem, niż na nią wejść?

3.38. Przedsiębiorca chce produkować chorągiewki składające się z trzech poziomych pasów równej szerokości, każdy w innym kolorze. Ile rodzajów takich chorągiewek może produkować, jeśli ma do dyspozycji 8 kolorów?

3.39. Oblicz, ile jest liczb trzycyfrowych, zbudowanych z cyfr należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, jeśli cyfry w liczbie nie mogą się powtarzać.

3.40. Oblicz, ile jest liczb trzycyfrowych, w których cyfry w liczbie nie mogą się powtarzać, jeśli są one zbudowane tylko z cyfr
a) będących liczbami nieparzystymi b) będących liczbami parzystymi.

3.41. Ile jest czterocyfrowych:
a) liczb b) kodów PIN,
w których cyfry nie mogą się powtarzać?

3.42. Pewna firma chce produkować ulotki, których każda ze stron ma mieć dwukolorowe tło: górna połowa danej strony ma mieć inny kolor, niż dolna połowa. Ile jest wzorów takich ulotek, jeśli firma ma do dyspozycji 7 kolorów?

3.43. Na ile sposobów można wrzucić 5 kul ponumerowanych do 6 różnych szuflad, jeżeli:
a) kule wrzucamy dowolnie
b) każda kula ma trafić do innej szuflady?

3.44. Każdej z pięciu osób przyporządkowujemy dzień tygodnia, w którym się urodziła. Ile jest możliwych wyników takiego przyporządkowania, jeżeli:
a) każda z tych osób mogła urodzić się w dowolnym dniu tygodnia
b) każda z tych osób urodziła się w innym dniu tygodnia?

3.45. Każdemu spośród czterech uczniów przyporządkowujemy ocenę roczną z matematyki. Ile jest możliwych wyników tego przyporządkowania, jeżeli:
a) każdy z uczniów będzie miał inną ocenę
b) każdy z uczniów może uzyskać dowolną ocenę?

3.46. Na peronie czekają na pociąg cztery osoby. Podjeżdża skład złożony z siedmiu wagonów. Na ile sposobów czekające osoby mogą wsiąść do pociągu, jeśli:
a) każda z nich ma wsiąść do innego wagonu
b) każda z nich wybiera wagon dowolnie?

3.47. Ile sześcioliterowych napisów można utworzyć, posługując się literami należącymi do zbioru $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$, jeśli:

a) litery mogą się powtarzać

b) litery nie mogą się powtarzać?

3.48. Na parterze wieżowca mającego 8 pięter do windy wsiada 5 osób. Na ile sposobów te osoby mogą wysiąść na piętrach, jeśli:

a) każda z tych osób wybiera piętro dowolnie,

d) każda z tych osób wysiada na czwartym, piątym lub szóstym piętrze,

c) żadne dwie osoby nie wysiadają na tym samym piętrze,

d) co najmniej jedna osoba wysiada na siódmym piętrze.

Pomijamy kolejność wysiadania z windy na poszczególnych piętrach.

3.49. Numer karty płatniczej MasterCard składa się z 16 cyfr. Pierwszą cyfrą jest 5, drugą – jedna z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5. Zakładamy, że pozostałe cyfry mogą być dowolne. Ile jest numerów kart płatniczych MasterCard?

3.50. Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach i jednocześnie:

a) nieparzystych

b) parzystych?

3.51. Ile jest numerów telefonów stacjonarnych, składających się z 7 cyfr takich, że:

a) pierwszą cyfrą jest 6, a pozostałe cyfry są różne od 6 i różne między sobą,

b) trzy początkowe cyfry są większe od 5, a pozostałe – mniejsze od 6,

c) dwie początkowe cyfry są liczbami nieparzystymi, a pozostałe cyfry są różnymi liczbami parzystymi,

d) pierwsza i ostatnia cyfra to jednakowe liczby pierwsze, a cyfra 7 występuje tylko jeden raz?

3.52. Ile jest telefonicznych numerów komórkowych, składających się z dziewięciu cyfr takich, że:

a) pierwszą cyfrą jest 5 lub 6, trzecią cyfrą jest 0, a pozostałe cyfry nie są ani piątką, ani szóstką, ani zerem

b) każda cyfra jest inna i na pierwszym miejscu nie występuje 0

c) każda kolejna cyfra tego numeru jest liczbą o 1 mniejszą od poprzedniej

d) pierwsza, trzecia, piąta, siódma i dziewiąta cyfra jest taka sama i jest liczbą nieparzystą, zaś pozostałe cyfry są różnymi liczbami parzystymi?

3.53. Ile liczb czterocyfrowych nieparzystych, w których wszystkie cyfry są różne, można utworzyć z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

3.54. Ile liczb pięciocyfrowych parzystych, w których wszystkie cyfry są różne, można utworzyć z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

3.55. Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, utworzonych z cyfr należących do zbioru $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i jednocześnie większych od 666?

3.56. Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, utworzonych z cyfr należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i jednocześnie mniejszych od 444?

3.57. Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, utworzonych z cyfr należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i jednocześnie mniejszych od 780?

3.58. Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, podzielnych przez:

a) 25

b) 4?

3.59. Ile jest liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach i jednocześnie:

a) podzielnych przez 25

b) większych od 5238?

3.60. Ile jest liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach i jednocześnie:

a) podzielnych przez 4

b) większych od 60 000?

Permutacje

3.61. Oblicz:

a) $4! - 2! \cdot 3!$

b) $5! - 2! \cdot 4!$

c) $\frac{10!}{8! \cdot 3!}$

d) $\frac{12!}{10! \cdot 4!}$

e) $\frac{9! \cdot 7!}{(6!)^3}$

f) $\frac{(9!)^3}{10! \cdot (8!)^2}$

3.62. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci wiedząc, że $n \in \mathbb{N}$.

a) $(n-2)!(n-1)n,\ n > 1$

b) $(2n+1)(2n)!$

c) $\frac{(n+3)!}{(n+2)!}$

d) $\frac{(2n+2)!}{(2n)!}$

e) $\frac{(n+4)!(3n)!}{3n(n+3)!}$

f) $\frac{(n-1)!n}{(n+2)!},\ n > 0$

3.63. Na ile sposobów można ustawić osoby A, B, C w szeregu?. Wypisz wszystkie możliwe permutacje tych osób.

3.64. Na ile sposobów Marek może wysłać pięć różnych widokówek z wakacji do pięciu swoich kolegów?

3.65. Mamy siedem dziewcząt i siedmiu chłopców. Na ile sposobów można utworzyć:

a) siedem par dziewczyna – chłopiec do wspólnego tańca,

b) jedną parę taneczną dziewczyna – chłopiec?

3.66. W biegu finałowym uczestniczy ośmiu sprinterów. Na ile sposobów mogą oni zająć kolejne miejsca, jeśli wszyscy ukończą bieg?

3.67. Na ile sposobów można ustawić w szereg grupę złożoną z pięciu dziewcząt i pięciu chłopców tak, aby:

a) od lewej stały najpierw wszystkie dziewczęta

b) dwie osoby tej samej płci nie stały obok siebie?

3.68. Siedmiu chłopców i pięć dziewcząt mają 12 biletów do kina: 5 biletów na miejsca w IX rzędzie i 7 biletów na miejsca w X rzędzie. Na ile sposobów mogą zająć te miejsca:

a) dowolnie

b) tak, aby wszystkie dziewczęta siedziały w IX rzędzie

c) w obu rzędach na zmianę: chłopak, dziewczyna, chłopak, dziewczyna, itd.?

3.69. W liceum uczą się po 4 klasy pierwsze, drugie, trzecie i czwarte. Na ile sposobów można położyć na biurku jeden na drugim dzienniki lekcyjne tych klas, jeśli:

a) na samym spodzie mają leżeć wszystkie dzienniki klas pierwszych

b) na samej górze leżą dzienniki klas A, niżej dzienniki klas B, jeszcze niżej dzienniki klas C i najniżej dzienniki klas D?

3.70. Mamy 5 książek, w tym książki A i B. Ustawiamy je losowo na pustej półce, jedna obok drugiej. Na ile sposobów można ustawić je tak, aby:

a) książki A i B nie stały obok siebie

b) pomiędzy książkami A i B stały dwie inne książki?

3.71. Sześć osób, które oznaczymy literami A, B, C, D, E, F, ma zająć sześć sąsiednich miejsc w jednym rzędzie w kinie. Na ile sposobów mogą one usiąść, tak aby:

a) osoby D, E siedziały obok siebie w podanym porządku

b) osoby A, B, C, D siedziały obok siebie w podanym porządku

c) osoby A, B, C siedziały obok siebie w dowolnym porządku

d) między osobami A i B siedziały dwie osoby?

3.72. Na ile sposobów można ustawić w szereg 8 osób tak, aby:

a) osoby A, B, C zajmowały odpowiednio pierwsze, drugie i trzecie miejsce w tym szeregu

b) osoby A i B stały obok siebie oraz pomiędzy tą parą osób a osobą C stały dwie inne osoby

c) osoby A i B nie stały obok siebie

d) osoba A stała pierwsza w szeregu, a w dalszej części szeregu osoba B stała bliżej A niż osoba C?

3.73. Ile jest liczb siedmiocyfrowych o różnych cyfrach należących do zbioru $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i jednocześnie:

a) mniejszych od 5 000 000

b) większych od 6 500 000?

3.74. Ile jest liczb pięciocyfrowych, zbudowanych z różnych cyfr należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ i jednocześnie:

a) nieparzystych

b) podzielnych przez 5?

3.75. Ile jest liczb siedmiocyfrowych, o niepowtarzających się cyfrach należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i jednocześnie:

a) parzystych

b) podzielnych przez 4?

3.76. Ile jest liczb sześciocyfrowych o różnych cyfrach należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ i jednocześnie:

a) podzielnych przez 5

b) podzielnych przez 25?

3.77. Przy okrągłym stole ustawiono 6 jednakowych krzeseł. Na ile sposobów może usiąść przy tym stole 6 osób, tak aby:

a) osoby A i B siedziały obok siebie

b) osoby A i B usiadły naprzeciwko siebie

c) między osobami A i B siedziała tylko osoba C

d) osoby A i B siedziały naprzeciwko siebie i jednocześnie osoby C i D siedziały naprzeciwko siebie?

Uwaga: Dwa rozmieszczenia przy stole uznajemy za różne, jeżeli w tych rozmieszczeniach co najmniej jedna osoba ma różnych sąsiadów.

3.78. Przy okrągłym stole ustawiono 12 krzeseł. Na ile sposobów może usiąść przy tym stole 12 osób, tak aby:

a) osoby A, B usiadły obok siebie

b) osoby A, B usiadły naprzeciwko siebie

c) między osobami A, B siedziały tylko dwie osoby

d) osoby A, B siedziały naprzeciwko siebie i jednocześnie osoby C, D siedziały naprzeciwko siebie?

Uwaga: Dwa rozmieszczenia przy stole uznajemy za różne, jeśli w tych rozmieszczeniach co najmniej jedna osoba ma różnych sąsiadów.

3.79. W przedziale wagonu kolejowego jest osiem ponumerowanych miejsc od 1 do 8 w dwóch jednakowych rzędach. Do przedziału wchodzą cztery dziewczyny: Ala, Julka, Kornelia i Maja oraz czterech chłopaków: Antek, Janek, Kacper i Michał. Na ile sposobów te osoby mogą zająć miejsca w przedziale:

a) dowolnie
b) tak, aby dziewczęta siedziały na miejscach o numerach parzystych
c) tak, aby Julka i Antek siedzieli obok siebie
d) tak, aby naprzeciwko siebie siedziały osoby, których imiona zaczynają się tą samą literą?

3.80. Stonoga – wbrew nazwie – ma tylko siedem par nóg. Na nogi ma włożyć siedem par kaloszy (każda para jest w innym kolorze). Na ile sposobów może to zrobić, jeśli:

a) nie rozróżnia kolorów ani butów lewych i prawych
b) rozróżnia kolory (na każdą parę nóg włoży buty w tym samym kolorze), lecz nie rozróżnia butów lewych i prawych
c) nie rozróżnia kolorów, lecz rozróżnia buty lewe i prawe
d) rozróżnia kolory i rozróżnia buty lewe i prawe?

Kombinacje

3.81. Oblicz:

a) $\binom{10}{3}$ b) $\binom{8}{4}$ c) $\binom{7}{3}-\binom{5}{2}$

d) $\binom{8}{2}-\binom{6}{4}$ e) $\dfrac{\binom{12}{3}}{\binom{14}{5}}$ f) $\dfrac{\binom{13}{6}}{\binom{12}{5}}$

3.82. Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci, wiedząc, że $n \in \boldsymbol{N}$:

a) $\dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{n+1}{3}}$ b) $\dfrac{\binom{n+2}{3}}{\binom{n+1}{2}}$

3.83. Wyznacz n wiedząc, że $n \in \boldsymbol{N}_+$:

a) $n + \binom{n}{2} = 15$ b) $\binom{n}{n-1}+\binom{2n}{2n-2}=18$

3.84. Oblicz, ile jest trójelementowych podzbiorów zbioru sześcioelementowego.

3.85. Oblicz, na ile sposobów można wybrać czteroosobową delegację z grupy 7 osób.

3.86. Z grupy 3 kobiet i 4 mężczyzn wybieramy trzy osoby. Ile jest takich sposobów wyboru, aby wśród wybranych osób:

a) były same kobiety
b) byli sami mężczyźni
c) były dwie kobiety i jeden mężczyzna?

3.87. Na płaszczyźnie zaznaczono n $(n > 2)$ punktów, z których dowolne trzy nie były współliniowe. Punkty te wyznaczyły 36 prostych. Oblicz n.

3.88. Na egzaminie było n tematów $(n \geq 2)$, z których student losował dwa. Oblicz n, wiedząc, że student miał 190 możliwości wylosowania zestawu tematów.

3.89. W turnieju szachowym każdy z zawodników rozegrał z każdym dwie partie. Ilu było zawodników, jeśli rozegrano w sumie 42 partie?

3.90. W pudełku znajdują się cztery ponumerowane kule: 2 białe i 2 czarne. Na ile sposobów można wybrać 2 kule, wśród których co najwyżej jedna będzie czarna?

a) Wypisz wszystkie możliwości.
b) Dlaczego liczby sposobów w punkcie *a*) nie można obliczyć w następujący sposób: wybieramy jedną kule białą na $\binom{2}{1}$ sposoby i drugą kulę jakąkolwiek z pozostałych kul na $\binom{3}{1}$ sposoby, czyli razem mamy $2 \cdot 3 = 6$ sposobów?

3.91 Pewien niepusty zbiór ma 211, co najwyżej dwuelementowych podzbiorów. Ile elementów ma ten zbiór?

3.92. W klasie jest 15 dziewcząt i 16 chłopców. Spośród uczniów tej klasy trzeba wybrać czteroosobową delegację. Na ile sposobów można to zrobić, tak aby w delegacji znalazły się:

a) tylko dwie dziewczynki
b) co najmniej dwie dziewczynki
c) co najwyżej dwie dziewczynki?

3.93. W grupie 20 osób jest 12 kobiet. Ile jest sposobów wybrania pięcioosobowej delegacji z tej grupy, tak aby:

a) znalazły się tam co najwyżej dwie kobiety

b) znalazła się tam co najmniej jedna kobieta
c) znalazły się tam co najmniej dwie i nie więcej niż cztery kobiety?

3.94. W klasie jest 8 chłopców i 9 dziewcząt. Wybieramy cztery osoby. Ile jest możliwych sposobów wyboru tych czterech osób, tak by wśród nich:

a) byli sami chłopcy
b) połowę stanowiły dziewczęta
c) były trzy dziewczynki i jeden chłopiec
d) był co najmniej jeden chłopiec?

3.95. Rodzina składająca się z rodziców i trojga dzieci: Ady, Mai i Filipa mają w pudełku zdjęcia ze wspólnych wakacji. W tabeli przedstawione są liczby zdjęć, na których znajdują się tylko wymienione osoby.

Rodzice	Cała rodzina	Ada, Maja i Filip	Ada i Maja	Ada i Filip	Maja i Filip
2	3	4	5	6	7

Oblicz, na ile sposobów można wybrać trzy zdjęcia do oprawy w ramki tak, aby:

a) na jednym zdjęciu byli tylko rodzice, na drugim było tylko troje dzieci, a na trzecim – cała rodzina w komplecie
b) na każdym wybranym zdjęciu było co najmniej dwoje dzieci
c) na co najmniej dwóch zdjęciach była Ada
d) rodzice byli co najwyżej na dwóch zdjęciach.

3.96. W pudełku znajdują się ponumerowane kule: 7 białych, 2 czarne i 1 zielona. Na ile sposobów można wybrać dwie kule tak, aby:

a) kule były różnych kolorów
b) obie kule były białe
c) kule były tego samego koloru
d) przynajmniej jedna z nich była biała?

3.97. W szufladzie znajdują się rozróżnialne cienkopisy: 5 zielonych, 4 czarne i 6 niebieskich. Na ile sposobów można wybrać trzy cienkopisy tak, aby:

a) każdy z nich był innego koloru
b) wszystkie były tego samego koloru
c) tylko dwa z nich były tego samego koloru?

3.98. Na biurku leżą ponumerowane kartki w różnych kolorach: 3 kartki czerwone z numerami od 1 do 3, 5 kartek żółtych z numerami od 1 do 5, 6 kartek niebieskich z numerami od 1 do 6 i 7 kartek białych z numerami od 1 do 7. Na ile sposobów można wybrać cztery kartki tak, aby:

a) wszystkie były tego samego koloru
b) co najwyżej jedna kartka była biała
c) miały różne numery od 1 do 4
d) co najmniej dwie miały parzysty numer?

3.99 Z talii 52 kart losujemy cztery karty. Ile jest możliwych wyników losowania, jeśli wśród tych czterech kart mają być:

a) dwie damy i dwa asy
b) trzy karty młodsze od dziewiątki i jeden król
c) trzy figury (figury to: as, dama, król i walet) i jedna karta nie będąca figurą?

3.100. Z talii 52 kart losujemy cztery karty. Ile jest możliwych wyników losowania, jeśli wśród nich mają być:

a) trzy kiery
b) co najwyżej trzy kiery
c) dwa kiery, jeden pik i jeden trefl?

3.101. Każdemu z czterech graczy należy przydzielić 13 kart z talii 52-kartowej. Na ile sposobów można to zrobić, tak aby gracze A i B otrzymali po dwa asy, a gracze C i D po dwie damy?

3.102. Grupę 12 drużyn sportowych, wśród których są drużyny A, B, C, dzielimy na trzy równe podgrupy w taki sposób, że każda z drużyn *A*, *B*, *C* znajduje się w innej podgrupie. Ile jest sposobów takiego podziału?

3.103. W turnieju szachowym startowało 10 zawodników. W pierwszej fazie każdy z zawodników rozegrał po dwie partie z każdym z pozostałych, po czym pewna liczba zawodników musiała wyjechać na zgrupowanie kadry i w drugiej fazie każdy z pozostałych rozegrał z każdym po jednej partii. Ilu uczestników wyjechało na zgrupowanie kadry, jeśli w obu fazach turnieju rozegrano łącznie 111 partii?

Kombinatoryka – zadania różne

3.104. Zbiór *A* ma 4 liczby, a zbiór *B* – 9 liczb. Ile jest funkcji odwzorowujących zbiór *A* w zbiór *B*:

a) dowolnych
b) różnowartościowych
c) rosnących?

3.105. Ile jest ciągów ośmioelementowych o wartościach należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

a) dowolnych
b) różnowartościowych
c) ściśle monotonicznych (tzn. rosnących, malejących lub stałych)
d) których tylko jeden wyraz jest równy 1, tylko dwa wyrazy są równe 2, a pozostałe są różne od siebie?

3.106. Ile jest liczb sześciocyfrowych, w których zapisie cyfry tworzą ciąg rosnący?

3.107. Ile jest liczb sześciocyfrowych, w których zapisie cyfry tworzą ciąg malejący?

3.108. Ile jest liczb pięciocyfrowych, w których zapisie występuje cyfra 7 i cyfry tworzą ciąg rosnący?

3.109 Ile jest liczb pięciocyfrowych, w których zapisie występuje cyfra 6 i cyfry tworzą ciąg malejący?

3.110. Ile wyrazów, mających sens lub nie, można ułożyć, przestawiając litery wyrazu:

a) SPANIEL b) TEMAT c) AGAWA d) POTOP?

3.111. Ile wyrazów, mających sens lub nie, można ułożyć, przestawiając litery wyrazu:

a) TOTALIZATOR b) ABRAKADABRA?

3.112. Podczas rozwiązywania zadań z kombinatoryki jeden z uczniów klasy biologicznej zauważył, że liczba możliwych wyrazów mających sens lub nie, utworzonych z przestawiania liter wyrazu PRAWDOPODOBIEŃSTWO, jest równa liczbie synaps neuronów (czyli styków pomiędzy neuronami) w korze mózgowej człowieka. Ile synaps ma kora mózgowa człowieka?

3.113. Ile jest liczb siedmiocyfrowych, w których zapisie cyfra 4 występuje trzy razy, cyfra 5 – dwa razy, a cyfra 0 ani razu?

3.114. Ile jest liczb ośmiocyfrowych, w których zapisie 0 występuje 5 razy, a pozostałe cyfry są nieparzyste?

3.115. Ile jest liczb pięciocyfrowych, w których zapisie 0 występuje co najwyżej raz, a cyfra jedności jest większa od 6?

3.116. Ile jest liczb ośmiocyfrowych, w których zapisie cyfra 2 występuje trzy razy, cyfrą dziesiątek jest 7, a pozostałe cyfry są różne i inne niż wymienione cyfry?

3.117. Oblicz, na ile sposobów można ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., 15\}$ wybrać dwie różne liczby tak, aby:

a) suma tych liczb była parzysta
b) suma tych liczb była nieparzysta
c) iloczyn tych liczb był parzysty
d) iloczyn tych liczb był podzielny przez 8.

3.118. Oblicz, na ile sposobów można ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., 11\}$ wybrać trzy różne liczby tak, aby:

a) suma tych liczb była nieparzysta
b) iloczyn tych liczb był nieparzysty
c) iloczyn tych liczb był parzysty
d) iloczyn tych liczb był podzielny przez 10.

3.119. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie cyfry tworzą ciąg niemalejący?

3.120. Ile jest liczb piętnastocyfrowych, w których suma cyfr jest równa 3?

3.121. Ile jest liczb dwudziestocyfrowych, w których suma cyfr jest równa 4?

3.122. Mamy 12 książek, wśród których są książki A, B, C. Wkładamy je do trzech ponumerowanych pudełek, do każdego po 4 książki. Ile jest możliwości takiego ułożenia książek w pudełkach, aby:

a) w pierwszym pudełku znalazły się książki A i B, a w trzecim – książka C
b) książki A, B i C znalazły się w tym samym pudełku?

3.123. Piętnaście osób trzeba podzielić na trzy grupy, po pięć osób w każdej grupie. Na ile sposobów można to zrobić, jeśli uporządkowanie w grupie nie ma znaczenia oraz:

a) kolejność grup jest istotna
b) kolejność grup nie jest istotna?

3.124. W szufladzie znajduje się 16 różnych skarpetek – po dwie w tym samym kolorze. Oblicz, na ile sposobów można wybrać 5 skarpetek tak, aby:

a) wszystkie wybrane skarpetki były w różnych kolorach
b) otrzymać dwie pary (para to dwie skarpetki w tym samym kolorze)
c) otrzymać tylko jedną parę
d) wśród wybranych skarpetek była co najmniej jedna para.

3.125. Mamy 6 par pantofli w różnych kolorach. Oblicz, na ile sposobów można:

a) ustawić je w szeregu tak, aby pantofle w jednym kolorze stały obok siebie w kolejności lewy – prawy
b) ustawić je w szeregu tak, aby pantofle stały na zmianę w kolejności lewy – prawy lub prawy – lewy i niekoniecznie w tych samych kolorach obok siebie
c) wybrać 4 pantofle, w tym dwa prawe, dwa lewe
d) wybrać 8 pantofli, wśród których będą co najmniej dwie pary.

Symbol Newtona. Wzór Newtona. Trójkąt Pascala

3.126. Oblicz:

a) $\binom{18}{2}-\binom{18}{16}$ b) $\binom{23}{21}+\binom{23}{22}$ c) $\binom{25}{23}+\binom{25}{24}$

d) $\dfrac{3\cdot\left[\binom{6}{2}\cdot\binom{15}{13}+\binom{6}{4}\cdot\binom{15}{14}\right]}{\binom{16}{2}}$ e) $\dfrac{\binom{24}{5}}{\binom{24}{19}}$ f) $\dfrac{\binom{5}{1}\cdot\binom{17}{14}+\binom{17}{15}\cdot\binom{5}{4}}{\binom{5}{2}\cdot\binom{17}{2}+\binom{5}{3}\cdot\binom{17}{3}}$

D **3.127.** Wykaż, że $\binom{3}{0}+\binom{4}{1}+\binom{5}{2}+\binom{6}{3}+\binom{7}{4}+\binom{8}{5}+\binom{9}{6}=\binom{10}{6}$.

3.128. Doprowadź dane wyrażenie do najprostszej postaci:

a) $\dfrac{\binom{n+1}{n-2}}{\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}}$ b) $\dfrac{\binom{2n+1}{2n-1}}{\binom{2n+1}{2n-1}+\binom{2n+1}{2n}}$

c) $\dfrac{\binom{3n+2}{3n-1}+\binom{3n+2}{3n}+\binom{3n+3}{3n+1}}{\binom{3n+3}{3n}+\binom{3n+3}{3n+1}}$ d) $\dfrac{\binom{4n}{4n-2}+\binom{4n}{4n-1}}{\binom{4n-1}{4n-3}+\binom{4n-1}{4n-2}+\binom{4n}{4n-1}}$

3.129. Korzystając ze wzoru Newtona i z trójkąta Pascala oblicz:

a) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^6$ b) $\left(2+\sqrt{5}\right)^5$ c) $\left(\sqrt{3}+3\right)^4$

d) $\left(2-\sqrt{2}\right)^7$ e) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^5$ f) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)^6$

3.130. Korzystając ze wzoru Newtona i z trójkąta Pascala zapisz w postaci sumy:

a) $(2x+1)^6$ b) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^8$, gdzie $x\neq 0$

c) $(3x-2)^5$ d) $\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)^4$, gdzie $x\neq 0$.

3.131. Wyznacz:

a) trzynasty wyraz rozwinięcia $\left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^{20}$

b) siódmy wyraz rozwinięcia $\left(2x-\dfrac{1}{4}\right)^{10}$

c) szósty wyraz rozwinięcia $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^{10}$

d) ósmy wyraz rozwinięcia $\left(3x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{11}$

3.132. Wyznacz środkowy wyraz rozwinięcia:

a) $\left(x-\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^{16}$ b $\left(x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{18}$

3.133. Wiadomo, że suma współczynników drugiego i trzeciego wyrazu rozwinięcia dwumianu $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n$, gdzie $x\neq 0$, wynosi 325. Wyznacz siedemnasty wyraz tego rozwinięcia.

3.134. Wiadomo, że suma współczynników dwóch ostatnich wyrazów rozwinięcia dwumianu $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$, gdzie $x\neq 0$, wynosi 19. Wyznacz szósty wyraz tego rozwinięcia.

3.135. Wyznacz współczynnik rozwinięcia $\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)^{15}$, gdzie $x\neq 0$, przy x^5.

3.136. Oblicz współczynnik:

a) przy x^5 w rozwinięciu $\left(x\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^7$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}_+$

b) przy x^3 w rozwinięciu $\left(x-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)^8$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}_+$.

3.137. Wyznacz wyraz rozwinięcia $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)^{20}$, gdzie $x\neq 0$, który nie zawiera x.

3.138. Oblicz:

a) $\binom{11}{0}+\binom{11}{1}+\binom{11}{2}+\ldots+\binom{11}{10}+\binom{11}{11}$

b) $\binom{12}{0}-\binom{12}{1}+\binom{12}{2}-\binom{12}{3}+\ldots+\binom{12}{12}$

c) $\binom{9}{1}+\binom{9}{3}+\binom{9}{5}+\binom{9}{7}+\binom{9}{9}$

d) $\binom{12}{0}+\binom{12}{2}+\binom{12}{4}+\binom{12}{6}+\ldots+\binom{12}{12}$

D **3.139.** Wykaż, że jeśli $n \in N_+$, to $\frac{\binom{n}{0}}{2^0}+\frac{\binom{n}{1}}{2^1}+\frac{\binom{n}{2}}{2^2}+\ldots+\frac{\binom{n}{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{\binom{n}{n}}{2^n}=\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Test sprawdzający do rozdziału 3.

1. Ile istnieje podzbiorów zbioru czteroelementowego?

A. 10 B. 12 C. 14 D. 16

2. Pewna firma cateringowa ma w ofercie danego dnia trzy różne zupy, dwa drugie dania i dwa desery. Na ile sposobów można wybrać jeden zestaw obiadowy, składający się z zupy, drugiego dania i deseru?

A. na 12 sposobów B. na 10 sposobów
C. na 8 sposobów D. na 7 sposobów

3. Ile jest możliwych rozmieszczeń trzech różnych długopisów w dwóch szufladach?

A. 9 B. 8 C. 6 D. 5

4. Ile jest liczb trzycyfrowych o niepowtarzających się cyfrach?

A. $10\cdot 9\cdot 8$ B. $9\cdot 8\cdot 7$ C. $9\cdot 9\cdot 8$ D. $8\cdot 8\cdot 7$

5. Ile jest liczb naturalnych większych od 150 i jednocześnie mniejszych od 900, których reszta z dzielenia przez 4 jest równa 1?

A. 186 B. 187 C. 188 D. 189

6. Ile jest liczb trzycyfrowych, w zapisie których występuje jedna cyfra 1 i jedna cyfra 0?

A. 8 B. 16 C. 24 D. 32

7. Na przyjęciu spotkało się 6 osób, przy czym każda osoba przywitała się z każdą inną osobą. Liczba wszystkich powitań była równa:

A. 9 B. 12 C. 15 D. 18

8. Na ile sposobów można 4 dziewczynki i 4 chłopców połączyć w pary dziewczynka – chłopiec, jeśli pominiemy kolejność par i kolejność osób w parze?

A. na 4 sposoby B. na 8 sposobów
C. na 16 sposobów D. na 24 sposoby

9. Ile jest możliwości ustawienia 8 osób w dwóch rzędach po 4 osoby w jednym rzędzie?

A. 8! B. $\binom{8}{4}\cdot 4!$ C. $\binom{2}{1}\binom{8}{4}$ D. $2^4\cdot 4!\cdot 4!$

10. Ile jest liczb naturalnych, które spełniają nierówność $\binom{n}{n-2}<15$?

A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3.

11. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ wybieramy dwie cyfry ze zwracaniem i tworzymy liczbę dwucyfrową. Zapisz w tabeli wszystkie liczby, jakie możemy w ten sposób otrzymać. Ile jest wśród nich liczb podzielnych przez 3?

12. Ze zbioru cyfr $\{0, 1, 2, 3\}$ wybieramy kolejno trzy cyfry bez zwracania i tworzymy liczbę trzycyfrową. Posługując się drzewem wypisz wszystkie liczby, jakie możemy w ten sposób otrzymać. Ile jest wśród nich liczb parzystych?

13. W klasach trzecich szkoły podstawowej zorganizowano koło taneczne, na które uczęszczają dzieci według tabeli zamieszczonej poniżej.

Klasa	IIIa	IIIb	IIIc
Dziewczęta	5	6	9
Chłopcy	10	3	7

Na ile sposobów można utworzyć parę dziewczynka – chłopiec, jeśli dzieci w tej parze:

a) mają chodzić do tej samej klasy

b) mają chodzić do klasy IIIa lub do klasy IIIb?

14. W szufladzie znajdują się różne czapki, szaliki i pary rękawiczek. Tabela poniżej opisuje liczby tych czapek, szalików i par rękawiczek według kolorów.

	Kolor czarny	Kolor niebieski	Kolor zielony
Czapki	3	4	2
Szaliki	1	2	3
Pary rękawiczek	2	1	1

Oblicz, na ile sposobów można wybrać jedną czapkę, jeden szalik i jedną parę rękawiczek:

a) w jednakowym kolorze

b) tak, aby czapka i szalik były w tym samym kolorze, a para rękawiczek – w innym kolorze

c) w różnych kolorach?

15 W pewnej grupie osób wszyscy czytają klasykę, z czego 14 osób uwielbia lirykę, a 20 osób chętnie czyta prozę. Oblicz, ile osób liczy ta grupa, jeżeli 9 spośród nich czyta zarówno lirykę, jak i prozę?

16. Ile jest liczb w zbiorze $\{1, 2, 3, 4, ..., 2021\}$, które są:

a) podzielne przez 2 i przez 3,

b) podzielne przez 3 lub przez 4,

c) podzielne przez 5 i jednocześnie niepodzielne przez 7?

17. Oblicz, ile jest liczb dwucyfrowych, których cyfry należą do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ i jednocześnie suma tych cyfr:

a) jest większa od 3 b) jest liczbą podzielną przez 4.

18. Oblicz, ile jest liczb dwucyfrowych, o różnych cyfrach należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ i których iloczyn cyfr:

a) jest mniejszy od 8 b) nie jest podzielny przez 5.

19. Oblicz, ile jest liczb dwucyfrowych utworzonych z różnych cyfr należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i jednocześnie:

a) parzystych b) nie większych od 56

c) niepodzielnych przez 3 d) podzielnych przez 7.

20. Oblicz, ile jest numerów telefonów komórkowych (numerów dziewięciocyfrowych), których:

a) pierwszą cyfrą jest cyfra większa od 6, ostatnie cztery cyfry są jednakowe, a każda z pozostałych cyfr jest różna od innych cyfr,

b) początkowe 4 cyfry są kolejnymi liczbami nieparzystymi, ustawionymi malejąco, a ostatnie trzy cyfry są kolejnymi liczbami parzystymi, ustawionymi rosnąco.

21. Na ile sposobów można 8 osób, wśród których są osoby A i B, posadzić:

a) w jednym rzędzie tak, aby osoby A i B były rozdzielone dwiema innymi osobami,

b) przy okrągłym stole tak, aby osoby A i B siedziały naprzeciw siebie? Przyjmij, że dwa umiejscowienia osób przy okrągłym stole są różne wtedy, gdy co najmniej jedna z tych osób ma innego sąsiada.

22. Na ile sposobów można wrzucić 5 piłeczek w różnych kolorach do trzech ponumerowanych szuflad:

a) dowolnie

b) tak, aby co najwyżej jedna piłeczka była w pierwszej szufladzie?

23. Oblicz, na ile sposobów można wybrać spośród 4 dziewcząt i 3 chłopców dwuosobową delegację, w której będzie:

a) tylko jeden chłopiec b) co najmniej jedna dziewczyna

24. W skrzyni znajduje się 12 piłek różnej wielkości, w tym 5 czerwonych, 4 niebieskie i 3 białe. Oblicz, na ile sposobów można wybrać trzy piłki:

a) każdą w innym kolorze

b) wszystkie w jednakowym kolorze

c) z których tylko jedna jest czerwona

d) z których dwie są białe.

25. Z talii 52 kart wybieramy 13 kart. Na ile sposobów możemy uzyskać:

a) 5 pików, 4 kiery i 3 trefle b) 8 kart w jednym z karcianych kolorów,

26. Ile wyrazów (mających sens lub nie) można ułożyć, przestawiając litery wyrazu MATEMATYKA?

27. Pewien roztargniony napisał 10 listów, zaadresował 10 kopert, a potem włożył listy do kopert i wysłał. Ile jest możliwości:

a) zupełnie losowego włożenia przez niego listów do kopert

b) takiego włożenia listów, aby co najmniej pierwsze dwa, które włożył do kopert, dotarły do właściwego adresata?

28. W sali stoi piętnaście ponumerowanych ławek. Na ile sposobów można posadzić 15 dziewcząt i 15 chłopców tak, aby:

a) w każdej ławce po lewej stronie chłopca siedziała dziewczyna

b) w każdej ławce siedziała dziewczyna i siedział chłopak?

29. Ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie cyfra 5 występuje:

a) 2 razy b) nie więcej niż dwa razy?

30. Oblicz, ile jest liczb naturalnych siedmiocyfrowych o różnych cyfrach i jednocześnie:

a) podzielnych przez 25

b) podzielnych przez 4.

31. Oblicz, ile jest liczb naturalnych dziesięciocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24.

32. Oblicz, ile jest liczb naturalnych dwudziestocyfrowych, których suma cyfr jest równa 5 i jednocześnie w zapisie tej liczby:

a) występuje cyfra 3

b) nie występuje cyfra 3.

33. Na podstawie wzoru dwumianowego Newtona i trójkąta Pascala zapisz w postaci sumy jednomianów wielomian $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^7$. Następnie oblicz wszystkie współczynniki tego wielomianu.

34. Wyznacz dziewiętnasty wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(4x^2+\frac{1}{x}\right)^{21}$, gdzie $x \neq 0$. Który wyraz tego rozwinięcia nie zawiera x?

D **35.** Wykaż, że:

a) $\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{99}{97}=\binom{100}{3}$

b) $\binom{30}{0}+\binom{30}{2}+\binom{30}{4}+\ldots+\binom{30}{30}=2^{29}$

4. Czworokąty

Podział czworokątów. Trapezoidy

4.1. Oblicz miary kątów czworokąta, jeśli:

a) pierwszy kąt jest o 20° mniejszy od drugiego, trzeci kąt jest o 70° większy od pierwszego, a czwarty jest średnią arytmetyczną trzech pozostałych

b) miary kolejnych kątów pozostają w stosunku 2 : 3 : 5 : 5

c) miara kąta drugiego stanowi 75% miary kąta pierwszego, kąt trzeci jest o 25% większy od kąta drugiego, a miara kąta czwartego stanowi $\frac{29}{16}$ miary kąta pierwszego.

4.2. Oblicz miary kątów czworokąta $ABCD$, wiedząc, że:

a) przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta przy wierzchołku A i w dwusiecznej kąta przy wierzchołku C oraz kąt ACB jest o 20° mniejszy od kąta DAC, a kąt ADC jest o 50° większy od kąta CAB

b) przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta przy wierzchołku A oraz suma miar kątów DAC i DCA jest równa 90°, kąt DCA ma miarę dwa razy większą niż kąt ACB, a kąt ABC jest o 60° większy od kąta DAC.

Czy czworokąt $ABCD$ jest deltoidem? Odpowiedź uzasadnij.

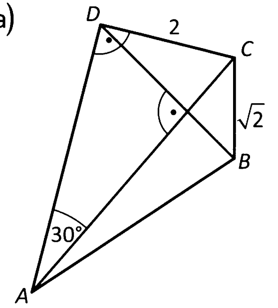
4.3. Jedna przekątna pewnego czworokąta dzieli ten czworokąt na dwa trójkąty o obwodach 20 cm i 40 cm, a druga – na dwa trójkąty o obwodach 30 cm i 50 cm. Wiedząc, że suma długości przekątnych jest równa 26 cm, oblicz obwód tego czworokąta.

4.4. Kawałek czworokątnego materiału o obwodzie 3 m przecięto wzdłuż jednej z jego przekątnych. Powstały dwie chusty w kształcie trójkąta równoramiennego: pierwsza o obwodzie 1,8 m, a druga o obwodzie 2,8 m. Linia rozcięcia stanowi podstawę pierwszego trójkąta, a dla drugiego jest ramieniem. Wyznacz wymiary obu chust.

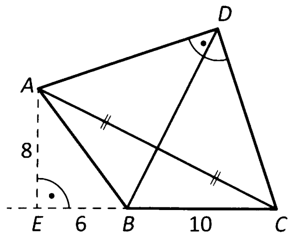
4.5. Z dwóch cienkich listewek o długościach 0,8 m i 1,05 m wykonano szkielet latawca. Dłuższa listewka wyznacza oś symetrii krótszej listewki i jest podzielona przez punkt przecięcia się z krótszą listewką na odcinki, których długości mają się do siebie jak 2 : 5. Następnie końce tych listewek połączono kolejno żyłką, wyznaczając w ten sposób boki latawca. Oblicz długość tej żyłki.

4.6. Oblicz długość przekątnych AC i BD czworokąta $ABCD$, wykorzystując dane na rysunku poniżej:

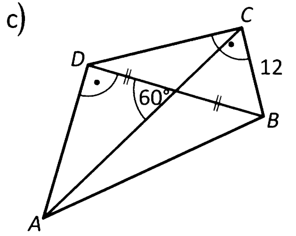
a)



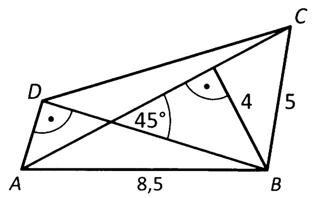
b)



c)



d)



4.7. Odcinek AB jest podstawą trójkąta równoramiennego ABC. Środkowe AM i CN tego trójkąta przecinają się w punkcie S. Wiedząc, że $|SM| = 2{,}5$ oraz $|SN| = 3$, oblicz długości przekątnych czworokąta wklęsłego $ABCS$.

4.8. Boki trójkąta ABC mają długości: $|AB| = 7$, $|BC| = 5$, $|AC| = 8$. Symetralne boków trójkąta ABC przecinają się w punkcie O. Wyznacz:

a) miarę kąta wklęsłego AOB

b) długość przekątnej OC czworokąta wklęsłego $AOBC$.

4.9. W deltoidzie $ABCD$ kąt przy wierzchołku A jest różny od pozostałych kątów, a miara tego kąta jest średnią arytmetyczną miar pozostałych kątów. Wiedząc, że $|BD| = 8$ oraz $|AC| = 7$, oblicz:

a) długości boków deltoidu $ABCD$

b) przybliżone miary kątów tego deltoidu przy wierzchołkach B, C i D.

4.10. Dwa boki deltoidu mają długość $2\sqrt{3}$, a pozostałe dwa mają długość $3\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. Wiedząc, że kąt deltoidu leżący między dwoma dłuższymi bokami ma miarę $45°$, oblicz miarę kąta deltoidu leżącego między dwoma krótszymi bokami.

4.11. Dwa równe kąty deltoidu mają miarę $120°$. Przekątna łącząca wierzchołki kątów o różnych miarach ma długość 7. Wiedząc, że obwód deltoidu jest równy 16, oblicz:

a) długości boków deltoidu

b) długość drugiej przekątnej.

D **4.12.** Wykaż, że jeśli przekątna BD czworokąta $ABCD$ zawiera się w dwusiecznej kątów ABC i CDA, to czworokąt $ABCD$ jest deltoidem.

D **4.13.** W trójkąt wpisano okrąg. Wykaż, że promienie tego okręgu poprowadzone do boków trójkąta dzielą ten trójkąt na trzy deltoidy.

Trapezy

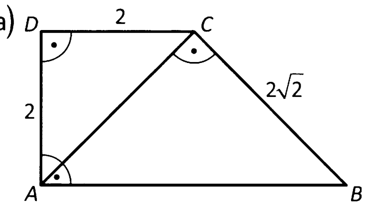
4.14. W trapezie $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$, miara kąta przy wierzchołku B jest o 25% większa od miary kąta przy wierzchołku A, natomiast miara kąta przy wierzchołku C jest o $13°$ mniejsza od miary kąta przy wierzchołku D. Wyznacz miary kątów tego trapezu.

4.15. Miary kątów kolejno przy wierzchołkach A, B, C, D trapezu $ABCD$ tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $20°$. Wyznacz kąty tego trapezu.

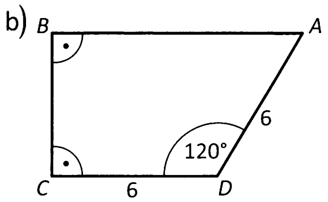
D **4.16.** W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąt przy wierzchołku A jest prosty, zaś kąt przy wierzchołku B jest równy $50°$. Wykaż, że jeśli kąt BCD jest o $40°$ większy od kąta ADC, to czworokąt $ABCD$ jest trapezem prostokątnym, którego kąt rozwarty ma miarę $130°$.

4.17. Trapez $ABCD$ jest prostokątny. Na podstawie danych na rysunku poniżej podaj miarę kąta ostrego trapezu i długość dłuższej podstawy AB.

a)



b)



D **4.18.** Wykaż, że jeśli krótsza podstawa trapezu równoramiennego ma taką samą długość, jak jego ramiona, to przekątne tego trapezu zawierają się w dwusiecznych kątów przy dłuższej podstawie.

D **4.19.** W trapezie równoramiennym $ABCD$ przekątna AC tworzy z ramieniem BC kąt prosty i jest jednocześnie dwusieczną kąta przy wierzchołku A. Wykaż, że:

a) kąty ostre trapezu mają miarę $60°$

b) jedna z podstaw tego trapezu jest dwa razy dłuższa od drugiej.

4.20. W trapezie równoramiennym krótsza podstawa i ramiona mają jednakową długość, równą 6 cm. Wiedząc, że kąt rozwarty trapezu jest równy 120°, oblicz długość dłuższej podstawy trapezu.

4.21. Kąt ostry trapezu równoramiennego jest równy 60°. Wiedząc, że wysokość trapezu jest równa $3\sqrt{3}$ cm, a długość przekątnej wynosi $2\sqrt{19}$ cm, oblicz obwód tego trapezu.

4.22. Kąty ostre trapezu równoramiennego mają miarę 45°, a wysokość jest równa 4 cm. Wiedząc że obwód trapezu wynosi $\left(18+8\sqrt{2}\right)$ cm, oblicz długości boków tego czworokąta.

4.23. Różnica długości podstaw trapezu prostokątnego wynosi 5 cm, a dłuższe ramię ma długość 13 cm. Wiedząc, że wysokość trapezu i krótsza podstawa pozostają w stosunku 3 : 4, oblicz długości podstaw tego trapezu.

4.24. W trapezie prostokątnym suma długości krótszej podstawy i wysokości jest równa 17 cm, a suma długości dłuższej podstawy i dłuższego ramienia wynosi 29 cm. Wiedząc, że krótsza przekątna ma długość 13 cm, oblicz:

a) długości boków trapezu
b) długość dłuższej przekątnej.

4.25. Krótsza podstawa trapezu ma długość 1 cm, a wysokość trapezu jest równa 3 cm. Wiedząc, że kąty przy dłuższej podstawie są równe 30° i 45°, oblicz:

a) obwód trapezu
b) długości przekątnych trapezu.

4.26. Obwód trapezu $ABCD$ jest równy 60 cm, a ramię AD ma długość 13 cm. Wiedząc, że tangens kąta BAD jest równy 2,4 oraz sinus kąta CBA wynosi 0,6, oblicz:

a) wysokość trapezu
b) długości boków $|AB|$, $|BC|$, $|DC|$.

4.27. Krótsza podstawa i ramiona trapezu równoramiennego mają taką samą długość, równą 13. Wiedząc, że długość przekątnej tego trapezu jest równa $6\sqrt{13}$, oblicz:

a) cosinus kąta rozwartego trapezu
b) wysokość trapezu
c) długość dłuższej podstawy.

4.28. Wysokość trapezu $ABCD$ jest równa 8 cm, a podstawa AB ma długość 30 cm. Ramię AD jest o 1 cm dłuższe od podstawy DC. Wiedząc, że przekątna AC i ramię BC mają jednakową długość, oblicz:

a) obwód trapezu $ABCD$
b) długość przekątnej BD
c) sinus kąta ADC.

4.29. W trapezie równoramiennym wysokość jest równa długości krótszej podstawy, a ramię ma długość 13 cm. Oblicz długości podstaw tego trapezu wiedząc, że ich suma jest równa 34 cm.

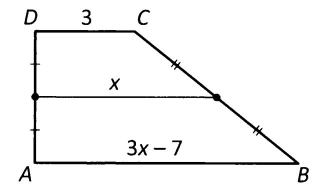
4.30. Wyznacz wysokość trapezu, jeśli:

a) podstawy mają długości 28 cm i 7 cm, a ramiona 10 cm i 17 cm
b) podstawy mają długości 2 cm i 30 cm, a ramiona 25 cm i 17 cm.

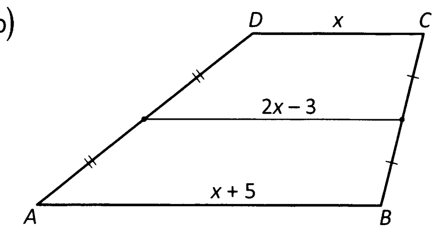
4.31. Podstawy trapezu mają długość 30 cm i 9 cm, a jedno ramię jest dłuższe od drugiego o 7 cm. Wiedząc, że obwód trapezu wynosi 72 cm, oblicz wysokość tego trapezu.

4.32. Ramiona AD i BC trapezu $ABCD$ na rysunku poniżej podzielono na tyle samo odcinków równej długości. Na podstawie informacji przedstawionych na rysunku oblicz x.

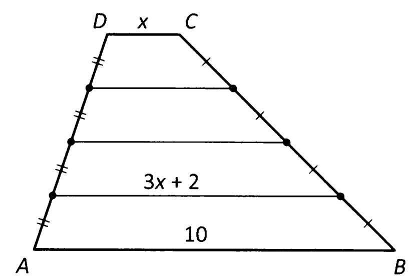
a)



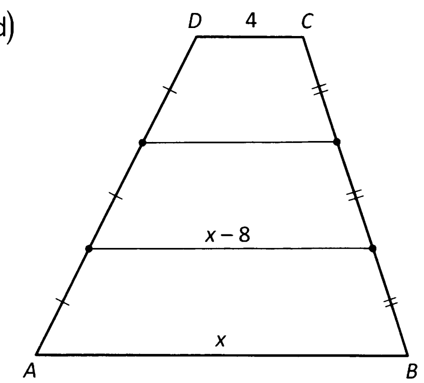
b)



c)



d)



4.33. Długości podstaw trapezu mają się do siebie jak 5 : 2, a ich różnica wynosi 9 cm. Oblicz długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu.

4.34. Kąty rozwarte trapezu mają miary 120° i 150°. Krótsza podstawa i krótsze ramię trapezu mają jednakową długość, równą 5 cm. Oblicz długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu. Rozważ dwa przypadki.

4.35. W trapezie równoramiennym $ABCD$, $AB \parallel CD$, wysokość CE dzieli dłuższą podstawę na odcinki mające długość: $|AE| = 15$ cm, $|EB| = 6$ cm. Długość przekątnej DB jest równa 17 cm. Oblicz:

a) długości podstaw trapezu   b) długość ramienia trapezu.

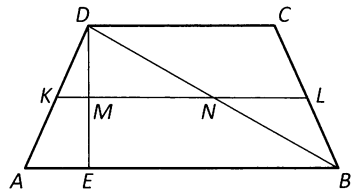
Jaką długość ma odcinek łączący środki ramion tego trapezu?

4.36. Odcinek łączący środki ramion trapezu równoramiennego ma długość 12 cm. Wiedząc, że długości przekątnych są równe 13 cm, oblicz wysokość tego trapezu.

D **4.37.** Punkt E jest spodkiem wysokości trapezu równoramiennego $ABCD$, poprowadzonej z wierzchołka D. Wykaż, że jeśli $|EB| = |BC|$, to wysokość jest średnią geometryczną długości podstaw tego trapezu.

D **4.38.** W trapezie równoramiennym $ABCD$ punkty K i L są odpowiednio środkami ramion AD i BC. Odcinek DE jest wysokością tego trapezu. Wykaż, że jeśli obwód czworokąta $EBLK$ jest równy podwojonej długości dłuższej podstawy, to kąt ostry trapezu ma miarę 60°.

4.39. Trapez $ABCD$ na rysunku obok jest równoramienny. Punkty K i L są środkami ramion AD i BC. Odcinek KL przecina wysokość DE w punkcie M i przekątną DB w punkcie N.



D a) Wykaż, że $|MN| = |KM| + |NL|$.

b) Wiedząc, że $|KM| = 3$ oraz $|NL| = 4$, oblicz długości podstaw tego trapezu.

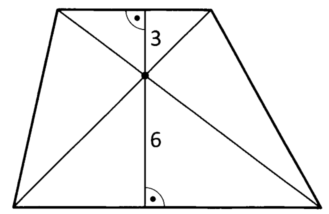
4.40. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ oraz punkty K, L, M, N, E – opisane w poprzednim zadaniu. Wiedząc, że $|DB| = 10$ cm, $|KM| = 1$ cm oraz $|MN| = 4$ cm, oblicz obwód tego trapezu.

D **4.41.** Punkty K, L są odpowiednio środkami ramion AD i BC trapezu $ABCD$. Odcinek KL przecina przekątną AC w punkcie M oraz przekątną DB w punkcie N. Wykaż, że:

a) $|AM| = |MC|$ b) $|MN| = \dfrac{|AB| - |DC|}{2}$.

4.42. Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 10 cm, a odcinek łączący środki przekątnych ma długość 3 cm. Oblicz długości podstaw trapezu.

4.43. Jedna przekątna trapezu ma długość $9\sqrt{2}$ cm, a druga 15 cm. Punkt przecięcia się przekątnych znajduje się w odległości 3 cm od krótszej podstawy i 6 cm od dłuższej podstawy. Oblicz:

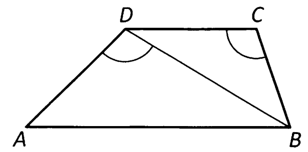


a) długości podstaw trapezu

b) długości ramion trapezu.

4.44. Podstawy trapezu mają długość 18 cm i 4 cm, a ramiona – 13 cm i 15 cm. Oblicz odległość punktu przecięcia się przekątnych od podstaw trapezu.

D **4.45.** W trapezie $ABCD$ przekątna BD tworzy z ramieniem AD kąt równy kątowi DCB. Wykaż, że $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CBD|$.



4.46. W trapezie $ABCD$ długość podstawy DC jest równa 18 cm, a ramiona AD i BC mają odpowiednio długość 15 cm i 25 cm. Wiedząc, że kąty rozwarte ADC i ACB są równe, oblicz długość podstawy AB.

4.47. W trapezie $ABCD$ długości podstawy AB jest równa 16 cm, a ramiona BC i AD mają odpowiednio długość 6 cm i 8 cm. Wiedząc, że kąty ostre BAD i CBD są równe, oblicz długość podstawy DC.

D **4.48.** Podstawy trapezu równoramiennego mają długości a i b, gdzie $a > b$. Punkt przecięcia przekątnych trapezu dzieli każdą z tych przekątnych na odcinki, których długości różnią się o 1. Wykaż, że długość przekątnych jest równa $\dfrac{a+b}{a-b}$.

4.49. W trapezie prostokątnym podstawy mają długości 18 cm i 6 cm, a wysokość jest równa 8 cm. Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw tego trapezu.

D **4.50.** Wykaż, że jeśli suma miar kątów trapezu przy dłuższej podstawie jest równa 90°, to długość odcinka łączącego środki podstaw jest równa połowie różnicy długości podstaw.

Równoległoboki

4.51. Wyznacz miary dwóch kolejnych kątów równoległoboku wiedząc, że jeden z tych kątów jest o 38° mniejszy od drugiego.

4.52. W równoległoboku $ABCD$ kąt przy wierzchołku D jest rozwarty. Z punktu D poprowadzono dwie wysokości równoległoboku, które tworzą kąt równy 53°. Wyznacz kąty równoległoboku.

4.53. Przekątne rombu tworzą z jednym z boków rombu kąty, których różnica miar jest równa 36°. Wyznacz kąty tego rombu.

4.54. Wyznacz kąty rombu wiedząc, że symetralna boku tego rombu przechodzi przez jeden z wierzchołków rombu.

4.55. Oblicz długość boku kwadratu, jeśli:

a) przekątna kwadratu jest o 2 cm dłuższa od boku

b) odległość środka boku od końców przeciwległego boku jest równa $3\sqrt{5}$ cm.

4.56. Na przekątnej AC kwadratu $ABCD$ zaznaczono punkt P tak, że $|AP| = |AB|$. Wiedząc, że boki kwadratu mają długość 2, oblicz odległość punktu P:

a) od boku AB b) od punktu B.

4.57. Oblicz szerokość prostokątnej ramy obrazu, wiedząc, że obwód zewnętrzny ramy jest o 28 cm większy od wewnętrznego obwodu tej ramy.

4.58. W prostokącie różnica odległości punktu przecięcia przekątnych od dwóch nierównoległych boków wynosi 8 cm. Oblicz długości boków tego prostokąta wiedząc, że jego obwód jest równy 44 cm.

4.59. Obwód prostokąta jest równy 142 cm. Oblicz długości boków prostokąta wiedząc, że jego przekątna jest o 1 cm dłuższa od jednego z tych boków.

4.60. Przekątna prostokąta tworzy z dłuższym bokiem kąt równy 30°. Oblicz długości boków tego prostokąta wiedząc, że ich różnica jest równa 2.

4.61. Przekątne prostokąta mają długość 10. a kąt ostry przecięcia tych przekątnych jest równy 30°. Oblicz obwód tego prostokąta.

4.62. W prostokącie $ABCD$ wysokość DE trójkąta ACD dzieli przekątną AC prostokąta na odcinki, których długości różnią się o 3. Wiedząc, że $|DE| = 2$, oblicz:

a) długości przekątnych AC i DB b) obwód prostokąta.

4.63. W prostokącie $ABCD$ tangens kąta między przekątną DB, a bokiem AB jest równy $1\frac{1}{3}$. Wiedząc, że odległość punktu C od przekątnej DB jest równa 12 cm, oblicz długości boków tego prostokąta.

4.64. Kąt ostry rombu ma miarę 30°. Wysokość rombu jest równa 2 cm. Oblicz:

a) obwód rombu b) długości przekątnych rombu.

4.65. Bok rombu ma długość 13, a tangens kąta ostrego wynosi 2,4. Oblicz długości przekątnych tego rombu.

4.66. Stosunek długości przekątnych rombu wynosi $\sqrt{3}$. Wiedząc, że obwód rombu jest równy 40, oblicz wysokość tego rombu.

4.67. Bok rombu ma długość 41 cm. Wyznacz długości przekątnych tego rombu, wiedząc, że różnica ich długości jest równa 62 cm.

4.68. Jaką figurę otrzymamy, łącząc kolejno środki boków:

a) równoległoboku b) rombu c) prostokąta d) kwadratu?

Odpowiedź uzasadnij.

4.69. W równoległoboku $ABCD$ wysokość DE jest równa 8 cm i dzieli bok AB na odcinki długości: $|AE| = 4{,}5$ cm, $|EB| = 6$ cm. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.

4.70. W równoległoboku $ABCD$ z wierzchołka D kąta rozwartego poprowadzono dwie różne wysokości DE i DF, przy czym $DE \perp AB$, $DF \perp BC$.

D a) Wykaż, że trójkąty AED i FCD są podobne.

b) Wiedząc dodatkowo, że $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{4}{5}$ oblicz, o ile procent wysokość DF jest dłuższa od wysokości DE.

4.71. W równoległoboku $ABCD$ kąt przecięcia przekątnych AC i BD ma miarę 60°. Na dłuższej przekątnej AC zaznaczono punkt E w taki sposób, że odcinek DE jest prostopadły do przekątnej AC. Wiedząc, że $|DE| = \sqrt{3}$ oraz $|\sphericalangle ADE| = 45°$, oblicz długości przekątnych równoległoboku.

4.72. W równoległoboku $ABCD$ krótsza przekątna DB jest jednocześnie wysokością, poprowadzoną na bok BC. Odcinek DE jest wysokością równoległoboku, poprowadzoną na bok AB. Wiedząc, że $|EB| = 2\sqrt{3}$ i $|DB| = 4\sqrt{3}$, oblicz długości boków tego równoległoboku.

4.73. Długości boków równoległoboku są równe 6 cm i 10 cm. Oblicz wysokości równoległoboku poprowadzone z wierzchołka kąta rozwartego wiedząc, że tworzą one kąt 60°.

4.74. Kąt między wysokościami równoległoboku poprowadzonymi z wierzchołka kąta rozwartego jest równy 45°. Oblicz obwód tego równoległoboku wiedząc, że odległości środka symetrii równoległoboku od boków są odpowiednio równe 2 cm i 4,5 cm.

4.75. Boki równoległoboku mają długości 6 i 8. Wiedząc, że długość jednej przekątnej jest równa 12 cm, oblicz:

a) cosinus kąta ostrego równoległoboku

b) długość drugiej przekątnej

c) sinus kąta między przekątnymi.

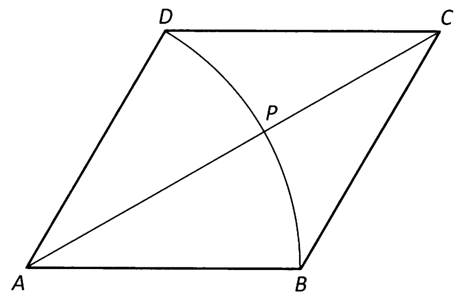
4.76. Kąt ostry równoległoboku jest równy 60°. Dłuższa przekątna ma długość $5\sqrt{3}$ i tworzy z krótszym bokiem kąt równy 45°. Oblicz obwód tego równoległoboku.

4.77. W równoległoboku $ABCD$ poprowadzono wysokości DE i DF. Wiedząc, że $|EF| = 8$ oraz $|\sphericalangle EDC| = 45°$ i $|\sphericalangle DFE| = 30°$, oblicz:

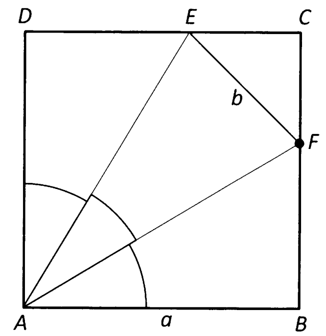
a) wysokości równoległoboku

b) długości boków równoległoboku.

D **4.78.** Kąt ostry BAD rombu $ABCD$ jest równy 60°. Przez wierzchołki B i D poprowadzono okrąg o środku w punkcie A, który przeciął przekątną AC w punkcie P. Wykaż, że $\frac{|PC|}{|AP|} = \sqrt{3} - 1$.



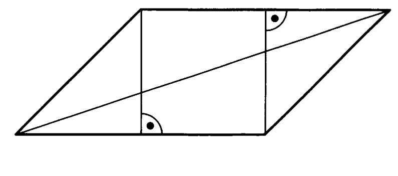
D **4.79.** W kwadracie $ABCD$ punkty E i F należą odpowiednio do boków DC i BC oraz odcinki AE i AF dzielą kąt BAD na trzy równe kąty. Wykaż, że jeśli boki kwadratu mają długość a, $a > 0$, zaś odcinek EF ma długość b, $b > 0$, to $3b^2 = 4a^2\left(2 - \sqrt{3}\right)$.



D **4.80.** Wykaż, że jeśli jeden z dwóch sąsiednich boków równoległoboku jest dwa razy dłuży od drugiego i kąt ostry równoległoboku jest równy 60°, to stosunek długości krótszej przekątnej do dłuższej przekątnej jest równy $\sqrt{3} : \sqrt{7}$.

D **4.81.** Przekątne równoległoboku mają długości 5 i 9. Wykaż, że jeśli długość jednego z boków tego równoległoboku jest równa 6, to długość sąsiedniego boku jest równa $\sqrt{17}$.

D **4.82.** Wysokości równoległoboku, poprowadzone z wierzchołków kątów rozwartych na dłuższe boki, dzielą ten równoległobok na dwa trójkąty równoramienne i kwadrat, zobacz rysunek obok.



a) Wykaż, że punkty przecięcia tych wysokości z dłuższą przekątną dzielą tę przekątną na trzy odcinki równej długości.

b) Wiedząc dodatkowo, że dłuższy bok równoległoboku ma długość 6 cm, oblicz długość odcinka dłuższej przekątnej, który jest zawarty w kwadracie.

D **4.83.** W prostokącie, który nie jest kwadratem, poprowadzono dwusieczne kątów:

a) wewnętrznych

b) zewnętrznych.

Wykaż, że punkty przecięcia tych dwusiecznych są wierzchołkami kwadratu.

Okrąg opisany na czworokącie

4.84. Sprawdź, czy kolejne kąty czworokąta wpisanego w okrąg mogą mieć następujące miary:

a) 72°, 72°, 108°, 108°

b) 46°, 15°, 134°, 165°

c) 58°, 81°, 123°, 98°

4.85. Czy czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg, jeżeli stosunek miar kątów przy wierzchołkach A, B, C, D wynosi odpowiednio:

a) 3 : 6 : 10 : 7

b) 6 : 3 : 10 : 7

c) 10 : 8 : 10 : 8?

4.86. Wyznacz miary kątów czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg, jeśli:

a) $|\sphericalangle B| = 2|\sphericalangle A|$ i $|\sphericalangle C| = 3|\sphericalangle A|$

b) $|\sphericalangle B| = \frac{1}{3}|\sphericalangle A|$ i $|\sphericalangle A| = 2|\sphericalangle C|$

c) $|\sphericalangle A| : |\sphericalangle B| : |\sphericalangle C| = 7 : 4 : 2$

d) $|\sphericalangle A| : |\sphericalangle B| : |\sphericalangle D| = 5 : 4 : 2$

4.87. Wyznacz miary kątów czworokąta wpisanego w okrąg, wiedząc, że przedłużenia przeciwległych boków przecinają się, tworząc kąty 25° i 35°

4.88. W okrąg o środku O wpisano czworokąt $ABCD$. Wyznacz miary kątów tego czworokąta oraz miarę kąta ostrego utworzonego przez jego przekątne wiedząc, że $|\sphericalangle AOB| = 150°$, $|\sphericalangle AOD| = 60°$, $|\sphericalangle COD| = 70°$.

4.89. Oblicz długość boku kwadratu, wiedząc, że iloczyn długości promienia okręgu wpisanego w ten kwadrat i promienia okręgu opisanego na tym kwadracie (wyrażonych w tych samych jednostkach) jest równy $25\sqrt{2}$.

4.90. W prostokącie krótszy bok ma długość 6 cm, a kąt ostry między przekątnymi jest równy 30°. Wyznacz promień okręgu opisanego na tym prostokącie.

4.91. W prostokącie $ABCD$ bok AB ma długość 10 cm. Odległość wierzchołka D od przekątnej AC jest równa 6 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym prostokącie.

4.92. Na trapezie opisano okrąg o promieniu równym 25 cm. Dłuższa podstawa trapezu jest średnicą tego okręgu. Wiedząc, że przekątna trapezu ma długość 40 cm, oblicz obwód tego trapezu.

4.93. Podstawy trapezu mają długość 12 cm i 16 cm. Trapez wpisano w okrąg o promieniu 10 cm. Oblicz wysokość tego trapezu. Rozważ dwa przypadki.

4.94. Podstawy trapezu mają długości 16 cm i 8 cm, a jego wysokość jest równa 8 cm. Środek okręgu opisanego na tym trapezie leży wewnątrz trapezu. Oblicz odległości tego środka od wszystkich boków trapezu.

4.95. Na deltoidzie $ABCD$ można opisać okrąg. Promień tego okręgu jest równy 10 cm. Wiedząc, że $|AB| - |BC| = 4$ cm, oblicz obwód deltoidu $ABCD$.

4.96. Na czworokącie wypukłym $ABCD$ można opisać okrąg. Wiadomo, że $|AB| = 2$, $|BC| = 3$, $|CD| = 4$, $|AD| = 5$.

a) Oblicz cosinusy kątów tego czworokąta. Który z kątów czworokąta $ABCD$ jest największy?
b) Wyznacz długości przekątnych AC i BD.

4.97. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są: $|AB| = |BC| = \sqrt{3}$ oraz $|\sphericalangle ADC| = 60°$ i $|\sphericalangle DCA| = 45°$. Wiedząc, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg, oblicz długości boków AD i DC.

4.98. Na czworokącie wypukłym $ABCD$ można opisać okrąg. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P pod kątem prostym. Wiedząc, że $|AP| = 15$ cm, $|PC| = 6$ cm oraz $|PD| = 8$ cm, oblicz:

a) długości boków czworokąta $ABCD$
b) promień okręgu opisanego na tym czworokącie.

4.99. Boki AB i BC czworokąta wypukłego $ABCD$ mają jednakową długość, równą promieniowi okręgu opisanego na tym czworokącie. Wiedząc, że $|AD| = 24$ i $|CD| = 15$, oblicz długości przekątnych AC, BD oraz promień tego okręgu.

Okrąg wpisany w czworokąt

4.100. Sprawdź, czy kolejne boki czworokąta opisanego na okręgu mogą mieć długość:

a) 11 cm, 7 cm, 4 cm, 8 cm
b) 8 cm, 6,5 cm, 10 cm, 10,5 cm
c) $9\frac{1}{3}$ cm, $3\frac{1}{3}$ cm, $11\frac{2}{3}$ cm, $5\frac{2}{3}$ cm.

4.101. Oblicz obwód czworokąta $ABCD$ opisanego na okręgu, jeśli:

a) $|AB| = 10$ cm, $|CD| = 11$ cm
b) $|AB| : |BC| : |CD| = 2 : 3 : 4$ oraz $|AD| = 15$ cm.

4.102. Oblicz długość boku kwadratu wiedząc, że różnica promieni: okręgu opisanego na tym kwadracie i okręgu wpisanego w ten kwadrat – jest równa $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$.

4.103. W romb wpisano okrąg. Punkt styczności okręgu z bokiem dzieli ten bok na odcinki długości 4 cm i 9 cm. Oblicz długości przekątnych i wysokość rombu.

4.104. Bok rombu ma długość 10 cm, a wysokość rombu jest równa 8 cm. W ten romb wpisano okrąg o_1.

a) Oblicz, w jakiej odległości od środka boku znajduje się punkt styczności okręgu z tym bokiem.
b) Wykaż, że przez środki boków tego rombu można poprowadzić okrąg o_2 i wyznacz długość promienia tego okręgu.
c) Korzystając z wyliczonych wielkości, narysuj ten romb wraz z okręgami o_1 i o_2 w skali 1 : 2.

4.105. W trapezie równoramiennym opisanym na okręgu ramiona mają po 6 cm długości, a jedna z podstaw jest dwa razy dłuższa od drugiej. Oblicz długości podstaw.

4.106. Na okręgu opisano trapez równoramienny. Oblicz promień okręgu wiedząc, że kąt rozwarty trapezu jest równy 150°, a odcinek łączący środki ramion ma długość 12.

4.107. Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 8 cm. Wiedząc, że w ten trapez można wpisać okrąg, oblicz obwód trapezu.

4.108. W trapez $ABCD$ wpisano okrąg. Ramię BC trapezu zostało podzielone przez punkt styczności S na odcinki długości $|CS| = 1$ cm oraz $|BS| = 9$ cm. Oblicz promień tego okręgu.

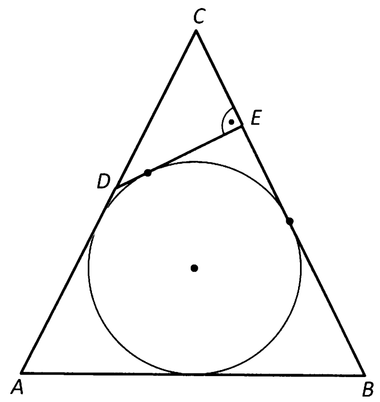
4.109. W trapez $ABCD$ wpisano okrąg o promieniu równym 12 cm. Ramię BC trapezu ma długość 25 cm. Jakie długości mają odcinki wyznaczone na ramieniu BC przez punkt styczności?

4.110. W trapez prostokątny wpisano okrąg. Punkt styczności okręgu z dłuższym ramieniem dzieli to ramię na odcinki długości 6 cm i 24 cm. Oblicz obwód trapezu.

4.111. W trapez wpisano okrąg o promieniu 2. Punkt styczności okręgu z dłuższą podstawą trapezu dzieli tę podstawę na odcinki długości 2,5 oraz 4. Oblicz obwód tego trapezu.

4.112. Środek okręgu wpisanego w deltoid $ABCD$ dzieli przekątną zawartą w osi symetrii deltoidu na odcinki długości 6 cm i 3 cm. Oblicz długości boków tego deltoidu wiedząc, że jego obwód jest równy 24 cm.

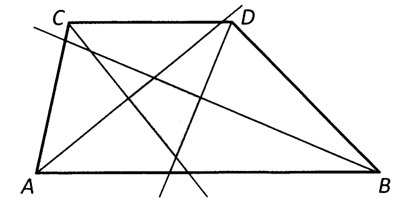
4.113. W trójkącie równoramiennym ABC dane są: $|AB| = 12$, $|AC| = |BC| = 10$. Na boku AC wybrano punkt D, a na boku BC punkt E w taki sposób, że odcinek DE jest prostopadły do boku BC i zawiera się w stycznej do okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Oblicz długości boków AD i DE czworokąta $ABED$.



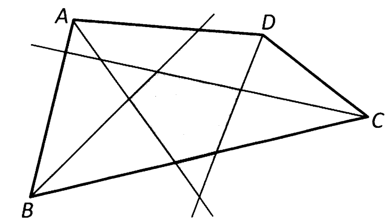
4.114. W trapezie $ABCD$, $AB \parallel DC$, suma kątów BAD i CBA jest równa 90°. W trapez wpisano okrąg o środku w punkcie O i promieniu 1. Punkt styczności E tego okręgu z bokiem AB dzieli ten bok tak, że $|AE| = 2$, $|EB| = 3$. Oblicz długości boków BC, DC i AD.

Okrąg opisany na czworokącie, okrąg wpisany w czworokąt – zadania na dowodzenie

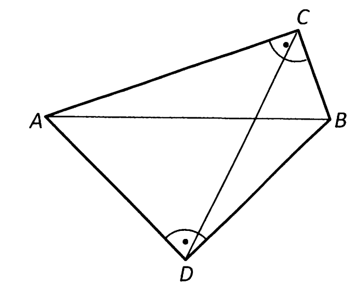
D **4.115.** Wykaż, że jeśli dwusieczne kątów wewnętrznych trapezu $ABCD$ wyznaczają czworokąt (zobacz rysunek obok), to na tym czworokącie można opisać okrąg.



D **4.116.** Wykaż, że jeśli dwusieczne kątów wewnętrznych czworokąta wypukłego $ABCD$ wyznaczają czworokąt (zobacz rysunek obok), to na wyznaczonym czworokącie można opisać okrąg.

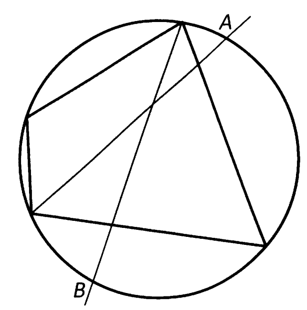


D **4.117.** Odcinek AB jest przeciwprostokątną w dwóch trójkątach prostokątnych ACB i ADB, przy czym trójkąt ADB jest równoramienny (zobacz rysunek obok). Wykaż, że odcinek CD zawiera się w dwusiecznej kąta prostego ACB.

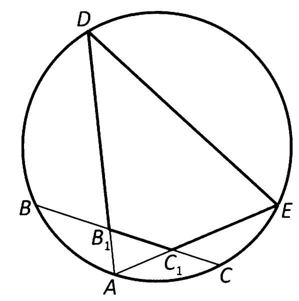


D **4.118.** W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty. Na dwusiecznej kąta ACB zaznaczono punkt D w taki sposób, że $|\sphericalangle DAB| = 45°$. Wykaż, że $|AD| = |DB|$.

D **4.119.** W czworokącie wpisanym w okrąg poprowadzono dwusieczne dwóch przeciwległych kątów, które przecięły okrąg w punktach A, B (zobacz rysunek obok). Wykaż, że odcinek AB jest średnicą tego okręgu.

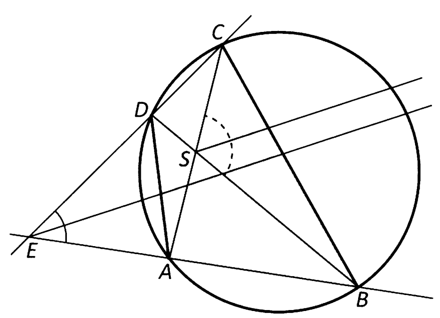


D **4.120.** W danym okręgu punkt A jest środkiem łuku BC. Dwie dowolne cięciwy AD i AE przecinają cięciwę BC w punktach B_1 i C_1. Wykaż, że na czworokącie B_1C_1ED można opisać okrąg.



D **4.121.** Wykaż, że jeśli czworokąt wpisany w okrąg ma jedną parę przeciwległych boków równej długości, to ten czworokąt jest trapezem równoramiennym.

D **4.122.** W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg przedłużono boki AB i CD aż do przecięcia w punkcie E. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie S (zobacz rysunek obok). Wykaż, że dwusieczna kąta BEC jest równoległa do dwusiecznej kąta BSC.



D **4.123.** Wykaż, że jeśli dwa przeciwległe kąty czworokąta wypukłego są proste i w ten czworokąt można wpisać okrąg, to ten czworokąt jest deltoidem.

D **4.124.** W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne AB i AC mają odpowiednio długość a i b, gdzie $a > b$. Poprowadzono prostą prostopadłą do boku BC, która przecięła bok AB w punkcie D oraz bok BC w punkcie E. Wykaż, że jeśli w czworokąt $ADEC$ można wpisać okrąg, to $|DE| = \dfrac{ab}{b+\sqrt{a^2+b^2}}$.

D **4.125.** Bok rombu ma długość a, a kąt ostry rombu jest równy α. Wykaż, że punkt styczności okręgu wpisanego w ten romb dzieli bok rombu na odcinki mające długości $\dfrac{a(1-\cos\alpha)}{2}$ oraz $\dfrac{a(1+\cos\alpha)}{2}$.

D **4.126.** Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 12 i 27. Wykaż, że jeśli w ten trapez można wpisać okrąg, to promień tego okręgu jest równy 9.

D **4.127.** Podstawy trapezu prostokątnego mają długości a i b. Wykaż, że jeśli w ten trapez można wpisać okrąg, to długość dłuższego ramienia trapezu jest równa $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$.

D **4.128.** Boki czworokąta wypukłego mają kolejno długości a, b, c, d. Wykaż, że jeśli na tym czworokącie można opisać okrąg i jednocześnie w ten okrąg można wpisać okrąg, to cosinus kąta między bokami długości a i b jest równy $\dfrac{ab-cd}{ab+cd}$.

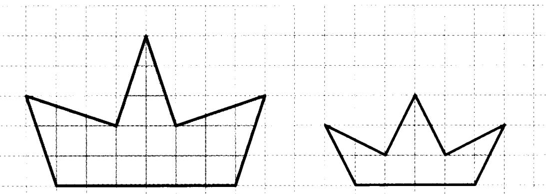
Podobieństwo. Czworokąty podobne

4.129. Czy podane figury są podobne? Odpowiedź uzasadnij.

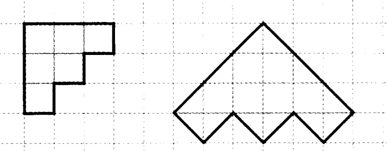
a) dowolne dwa odcinki
b) dowolne dwie proste
c) dowolne dwa prostokąty
d) dowolne dwa kwadraty
e) dowolne dwa kąty ostre
f) dowolne dwa wycinki jednego koła

4.130. Czy figury F_1 i F_2 na rysunku poniżej są podobne? Odpowiedź uzasadnij.

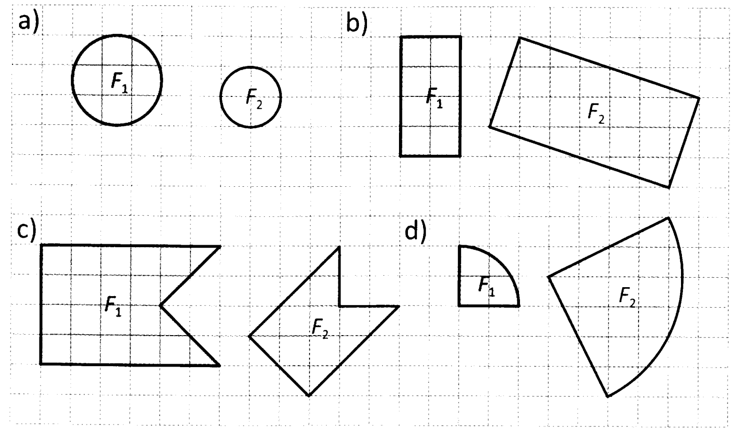
a)



b)



4.131. Obrazem figury F_1 w pewnym podobieństwie jest Rysunek F_2. Podaj skalę tegopodobieństwa.



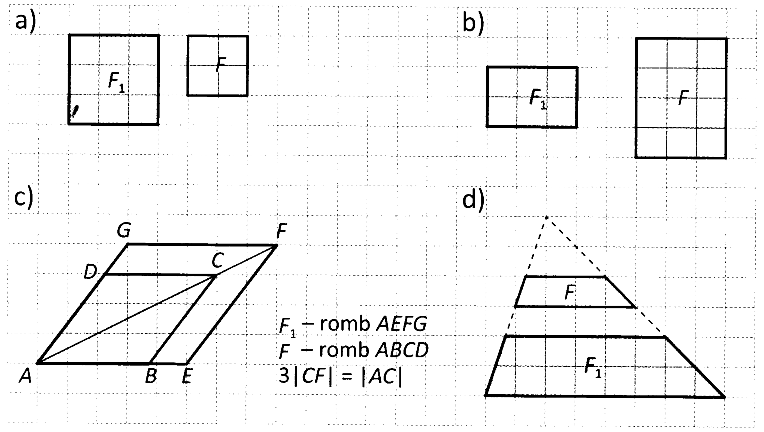
4.132. Obrazem okręgu O_1 o promieniu r_1 w pewnym podobieństwie jest okrąg o_2 o promieniu r_2. Wyznacz skalę tego podobieństwa, jeśli:

a) promień r_2 jest o 20% krótszy od promienia r_1

b) długość promienia r_1 stanowi 68% długości promienia r_2.

4.133. Obrazem półkola F w podobieństwie o skali $\frac{6}{5}$ jest półkole F_1, którego obwód wynosi 12. Oblicz długość promienia półkola F.

4.134. Czy na rysunku poniżej czworokąt F_1 jest podobny do czworokąta F? Jeśli tak, podaj skalę tego podobieństwa.



4.135. Długości boków jednego czworokąta mają się do siebie jak 2 : 5 : 1 : 3, a jego obwód jest równy 66 cm. Oblicz długości boków drugiego czworokąta, będącego obrazem pierwszego w podobieństwie o skali 2,5.

4.136. Obrazem czworokąta $ABCD$ w podobieństwie o skali k, $k > 0$, jest czworokąt $A_1B_1C_1D_1$. Oblicz, o ile procent obwód czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ jest mniejszy od obwodu czworokąta $ABCD$, jeśli:

a) $k=\frac{1}{5}$ b) $k=\frac{17}{20}$ c) $k=\frac{3}{8}$

4.137. W deltoidzie $ABCD$ mamy dane: $|AB| = 15$ cm, $|AC| = 21$ cm oraz $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC| = 120°$. Obrazem deltoidu $ABCD$ w podobieństwie o skali $\frac{1}{4}$ jest deltoid $A_1B_1C_1D_1$. Oblicz obwód deltoidu $A_1B_1C_1D_1$.

4.138. W prostokącie $ABCD$ długości boków pozostają w stosunku 3 : 4. Obrazem prostokąta $ABCD$ w podobieństwie o skali $\frac{2}{3}$ jest prostokąt, którego przekątna ma długość 7,5 cm. Oblicz różnicę obwodów tych prostokątów.

4.139. Jedna przekątna rombu $ABCD$ jest o 25% krótsza od drugiej. Obrazem rombu $ABCD$ w podobieństwie o skali 2 jest romb $A_1B_1C_1D_1$, którego suma długości przekątnych wynosi 56 cm. Oblicz długość boku rombu $ABCD$.

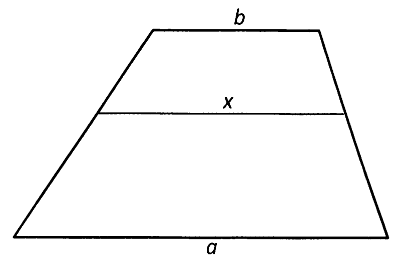
4.140. Bok AB równoległoboku $ABCD$ jest trzy razy dłuższy od boku BC. W jakim stosunku prosta równoległa do boku BC podzieli bok AB, jeśli w wyniku podziału otrzymamy dwa równoległoboki, z których jeden będzie podobny do równoległoboku $ABCD$?

D **4.141.** Bok rombu $ABCD$ ma długość 4 cm, a kąt ostry rombu jest równy 60°. Wysokość rombu $EFGH$ jest równa 9 cm, krótsza przekątna tego rombu ma długość $6\sqrt{3}$ cm. Wykaż, że romb $EFGH$ jest podobny do rombu $ABCD$. Oblicz skalę tego podobieństwa.

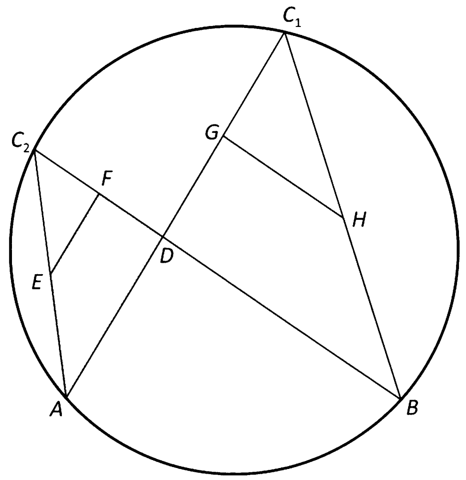
4.142. W trapezie podstawy mają długości a, b. Odcinek równoległy do obu podstaw dzieli dany trapez na dwa trapezy podobne. Oblicz długość tego odcinka, jeśli:

a) $a = 8$ cm, $b = 2$ cm

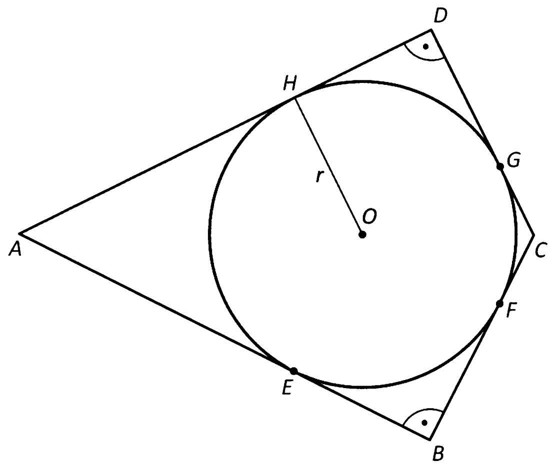
b) $a = 18\sqrt{2}$ cm, $b = 4\sqrt{2}$ cm.



D 4.143. Kąty AC_2B oraz AC_1B są kątami wpisanymi w okrąg. Cięciwy AC_1 oraz BC_2 przecinają się w punkcie D. Odcinek EF łączy środki odcinków AC_2 i DC_2, natomiast odcinek GH łączy środki odcinków BC_1 oraz DC_1, jak na rysunku obok. Wykaż, że trapezy $ADFE$ i $DBHG$ są podobne.



D 4.144. W deltoid $ABCD$ wpisano okrąg o środku O i promieniu r, $r > 0$. Punkty E, F, G, H są punktami styczności tego okręgu odpowiednio z bokami AB, BC, CD i AD. Wykaż, że jeśli kąty CBA i ADC są proste, to $r^2 = |AE| \cdot |FC|$.

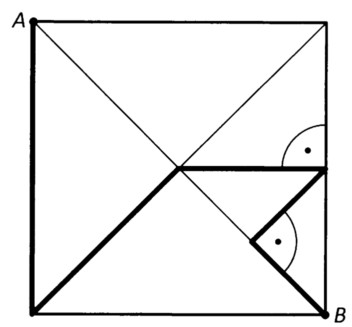


Test sprawdzający do rozdziału 4.

1. Bok kwadratu na rysunku obok ma długość 2. Długość łamanej o początku w punkcie A i końcu w punkcie B, zbudowanej z pięciu odcinków w kolorze niebieskim, jest równa:

A. $4+\sqrt{2}$ B. $3+2\sqrt{2}$

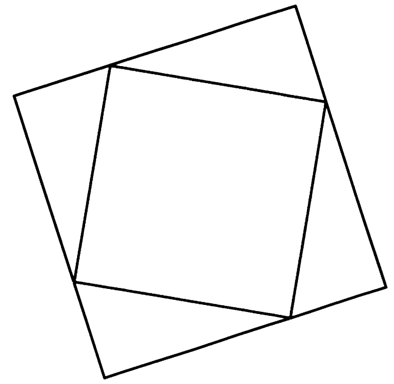
C. $3+4\sqrt{2}$ D. $4+2\sqrt{2}$



2. Wierzchołki mniejszego kwadratu należą do boków większego kwadratu i dzielą te boki w stosunku 1 : 2. Wówczas mniejszy kwadrat jest podobny do większego kwadratu w skali:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$



3. Boki równoległoboku mają długości 3 i $\sqrt{3}$, a kąt ostry jest równy 30°. Dłuższa przekątna tego równoległoboku ma długość:

A. $\sqrt{21}$ B. 4 C. $\sqrt{15}$ D. $\sqrt{12+3\sqrt{3}}$

4. Wierzchołki prostokąta są środkami boków deltoidu. Jeśli przekątne deltoidu mają długość $4-\sqrt{2}$ oraz $4+\sqrt{2}$, to obwód tego prostokąta jest równy:

A. 8 B. 12 C $12\sqrt{2}$ D. 14

5. Wysokość rombu jest równa 12, a długość dłuższej przekątnej wynosi 20 cm. Bok tego rombu ma długość:

A. 12 cm B. 12,5 cm C. 13 cm D. 13,5 cm

6. Ramiona trapezu prostokątnego mają długość 8 cm i 10 cm. Różnica długości podstaw tego trapezu jest równa:

A. 10 cm B. 8 cm C. 6 cm D. 2 cm

7. Obwód rombu jest równy 40. Jeśli różnica długości przekątnych rombu jest równa 4, to suma długości tych przekątnych wynosi:

A. 14 B. 21 C. 24 D. 28

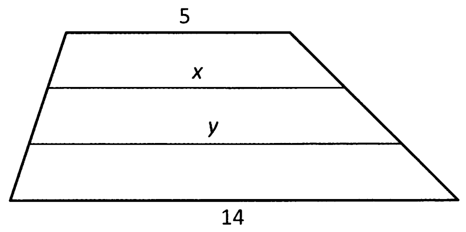
8. Wysokość trapezu równoramiennego jest równa 12 cm, a jego przekątna ma długość 15 cm. Długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu wynosi:

A. 6 cm B. 9 cm C. 12 cm D. 13,5 cm

9. Z wierzchołka kąta rozwartego równoległoboku poprowadzono dwie różne wysokości h_1 i h_2, które utworzyły kąt 30°. Obwód tego równoległoboku jest równy:

A. $\sqrt{3}\cdot(h_1+h_2)$ B. $2(h_1+h_2)$ C. $3(h_1+h_2)$ D. $4(h_1+h_2)$

10. W trapezie podstawy mają długości 5 i 14. Poprowadzono dwa odcinki równoległe do podstaw, o końcach należących do ramion trapezu i dzielące każde ramię na trzy równe części. Jeśli długości odcinków są równe x i y, to:

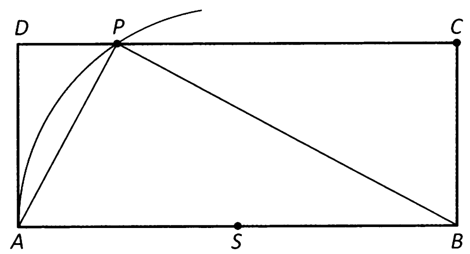


A. $x + y = 19$ B. $x + y = 18$ C. $x + y = 17$ D. $x + y = 16$

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4.

11. Przekątne prostokąta mają długość 18, a sinus kąta między przekątnymi wynosi $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Oblicz długości boków tego prostokąta.

12. Punkt S jest środkiem boku AB prostokąta $ABCD$. Łuk okręgu o środku w punkcie S i promieniu $|AS|$ przecina bok DC w punkcie P, jak na rysunku obok. Wiedząc, że $|AP| = 7{,}5$ oraz $|PB| = 10$, oblicz obwód prostokąta $ABCD$.

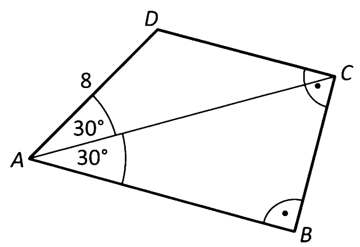


13. Długość boku rombu jest równa 5. Cosinus kąta ostrego rombu wynosi 0,6. Oblicz długości przekątnych tego rombu.

14. Jedna z wysokości równoległoboku jest trzy razy dłuższa od drugiej, a różnica długości dwóch różnych boków równoległoboku wynosi 4 cm. Oblicz obwód tego równoległoboku.

15. Krótszy bok równoległoboku ma długość 7 cm. Jedna z przekątnych tego równoległoboku ma długość 16 cm, a kąt ostry między przekątnymi jest równy 60°. Oblicz długość drugiej przekątnej i długość dłuższego boku.

16. Trapez $ABCD$ na rysunku obok jest prostokątny. Na podstawie danych na rysunku oblicz długość podstawy AB.



17. Kąty BAD i ADC trapezu $ABCD$ są proste. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P pod kątem prostym. Wiedząc, że $|PC| = 4$ cm oraz $|PD| = 6$ cm, oblicz długości przekątnych trapezu $ABCD$.

18. Oblicz wysokość trapezu, którego podstawy mają długości 17 cm i 3 cm, a ramiona – 13 cm i 15 cm.

19. Podstawy trapezu mają długości 15 cm i 20 cm, a wysokość jest równa 14 cm. Oblicz odległości punktu przecięcia przekątnych od obu podstaw.

20. Obwód trapezu równoramiennego jest równy 134 cm. Wysokość trapezu wynosi 30 cm, a ramię jest dwa razy dłuższe od krótszej podstawy. Oblicz długości boków tego trapezu.

21. W trapezie równoramiennym ramię ma długość 7 cm, a przekątna – 13 cm. Oblicz długości podstaw tego trapezu wiedząc, że kąty ostre mają miarę 60°.

D **22.** W trapezie równoramiennym przekątna zawiera się w dwusiecznej kąta przy podstawie i jest prostopadła do jednego z ramion. Wykaż, że kąt ostry trapezu jest równy 60°.

D **23.** W trapezie równoramiennym $ABCD$ punkty K i L są środkami ramion AD i BC. Odcinek KL przecina wysokość DE trapezu w punkcie M i przekątną DB w punkcie N. Wykaż, że $|MN| = \frac{|KL|}{2}$.

D **24.** Boki czworokąta wypukłego mają kolejno długości a, b, c, d. Wykaż, że jeśli przekątne czworokąta przecinają się pod kątem prostym, to $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

D **25.** Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i DC. Wykaż, że jeśli dwusieczne wszystkich kątów wewnętrznych trapezu przecinają się w punkcie P, to $|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle CPD| = 180°$.

26. Na czworokącie wypukłym $ABCD$ można opisać okrąg. Wiedząc, że $|AB| = 3$ cm, $|BC| = |CD| = 5$ cm, $|AD| = 8$ cm, oblicz:

a) długości przekątnych AC i BD b) miary kątów czworokąta $ABCD$.

27. Długości trzech kolejnych boków czworokąta opisanego na okręgu mają się do siebie jak 1 : 2 : 3. Obwód tego czworokąta wynosi 48 cm. Oblicz długości jego boków.

28. Kąt ostry rombu ma miarę 60°, a długość promienia okręgu wpisanego w ten romb wynosi $2\sqrt{3}$. Oblicz:

a) długości przekątnych rombu

b) długości odcinków, na jakie punkt styczności okręgu z rombem dzieli bok tego rombu.

29. Na okręgu opisano trapez, którego obwód wynosi 52 cm. Oblicz długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu.

30. W dany trapez można wpisać okrąg i na danym trapezie można opisać okrąg. Wysokość tego trapezu poprowadzona z wierzchołka przy krótszej podstawie dzieli dłuższą podstawę na dwa odcinki, z których dłuższy ma długość 10 cm. Oblicz obwód tego trapezu.

31. W trapez równoramienny wpisano okrąg o promieniu 4 cm. Ramię trapezu ma długość 10 cm. Punkty styczności okręgu z ramionami trapezu dzielą brzeg trapezu na dwie części. Oblicz długość każdej części.

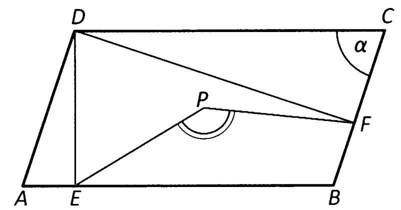
32. Obwód trapezu równoramiennego jest równy 30 cm, a odcinek łączący środki przekątnych trapezu ma długość 1,5 cm. Wiedząc, że w ten trapez można wpisać okrąg, oblicz:

a) długości podstaw trapezu

b) długość średnicy okręgu wpisanego w ten trapez

c) długość odcinka łączącego punkty styczności ramion z tym okręgiem.

D **33.** W równoległoboku $ABCD$ na rysunku obok odcinki DE i DF są wysokościami poprowadzonymi z wierzchołka D. Punkt P jest środkiem symetrii tego równoległoboku. Wykaż, że jeśli kąt ostry równoległoboku jest równy α, to $|\sphericalangle EPF| = 2\alpha$.



D **34.** W trapezie prostokątnym dwusieczne kątów przy dłuższym ramieniu przecinają się w punkcie P należącym do krótszego ramienia. Wykaż, że prosta przechodząca przez punkt P i jednocześnie prostopadła do dłuższego ramienia dzieli ten trapez na dwa deltoidy podobne.

D **35.** W trójkącie ABC kąty przy wierzchołkach A i B są równe odpowiednio 30° oraz 60°. Punkt D należy do boku AB, punkt E należy do boku BC i trójkąt DBE jest równoboczny. Wykaż, że jeśli $|CE| : |AC| = 1 : 3$, to w czworokąt $ADEC$ można wpisać okrąg i średnica tego okręgu jest równa $|AC| - |BC|$.

5. Geometria płaska – pole czworokąta

Pole prostokąta. Pole kwadratu

5.1. Pole pierścienia wyznaczonego przez okrąg wpisany w kwadrat i okrąg opisany na tym kwadracie jest równe π cm². Oblicz pole kwadratu.

5.2. W kwadrat $ABCD$ wpisano kwadrat $A_1B_1C_1D_1$ w taki sposób, że do każdego boku kwadratu $ABCD$ należy jeden wierzchołek kwadratu $A_1B_1C_1D_1$. Wyznacz stosunek pól tych kwadratów, jeśli boki kwadratu $A_1B_1C_1D_1$ tworzą z bokami kwadratu $ABCD$:

a) kąt 45° b) kąty odpowiednio 30° i 60°.

5.3. Wierzchołek C prostokąta $ABCD$ znajduje się w odległości 3 cm od przekątnej BD. Wiedząc, że kąt ostry między przekątnymi jest równy 30°, oblicz pole prostokąta $ABCD$.

5.4. Wyznacz wymiary prostokąta, którego obwód jest równy 18 cm, a pole wynosi 20 cm².

5.5. Pole prostokąta jest równe 9 cm². Wierzchołki prostokąta należą do okręgu, którego średnica jest równa 6 cm. Oblicz miarę kąta ostrego między przekątnymi prostokąta.

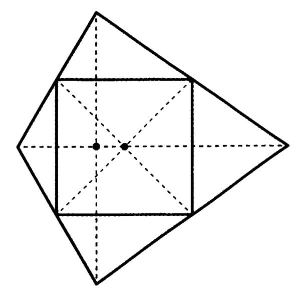
5.6. W prostokącie $ABCD$ poprowadzono przekątną AC. Odcinek DE jest wysokością trójkąta ACD, a punkt E dzieli przekątną prostokąta na odcinki długości 3 cm i 12 cm. Oblicz pole prostokąta $ABCD$.

5.7. Punkt P dzieli przekątną BD prostokąta w stosunku 1 : 2. Przez punkt P poprowadzono dwie proste równoległe do boków prostokąta, które podzieliły prostokąt na cztery mniejsze prostokąty. Oblicz, jaką część pola prostokąta $ABCD$ stanowi pole największego prostokąta po podziale.

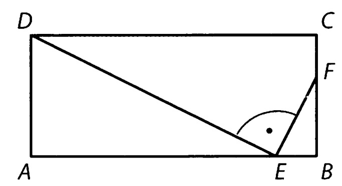
5.8. Z kawałka kartonu w kształcie deltoidu wycięto kwadrat o polu 1,44 m², którego wierzchołkami są środki boków deltoidu. Wiedząc, że punkt przecięcia przekątnych deltoidu leżał w odległości 20 cm od punktu przecięcia się przekątnych kwadratu (rysunek obok), oblicz:

a) pole powierzchni pozostałych skrawków kartonu

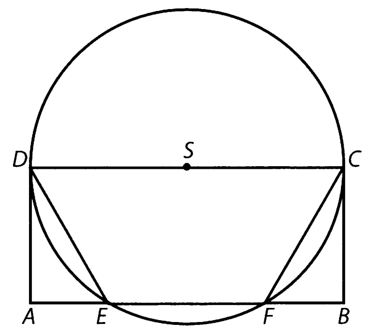
b) obwód deltoidu; wynik podaj z dokładnością do 0,01 m.



5.9. Dwa sąsiednie boki prostokąta $ABCD$ mają długość: $|AB| = 7$ cm, $|BC| = 3$ cm. Punkt E należy do boku AB, punkt F – do boku BC oraz $|\sphericalangle FED| = 90°$. Wiedząc, że $|DE| = 3|EF|$, oblicz pole czworokąta $DEFC$.



5.10. Boki prostokąta $ABCD$ mają długość: $|AB| = 10$ cm, $|AD| = 4$ cm. Punkt S jest środkiem odcinka DC. Okrąg o środku w punkcie S i promieniu 5 przecina bok AB w punktach E i F. Oblicz pole czworokąta $EFCD$.



Pole równoległoboku. Pole rombu

5.11. Dwa sąsiednie boki równoległoboku mają długości 6 cm i 13 cm. Oblicz pole tego równoległoboku wiedząc, że kąt między tymi bokami ma miarę:

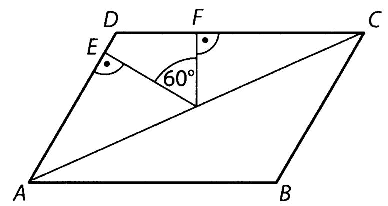
a) 30° b) 45° c) 120°.

5.12. Boki równoległoboku mają długości 12 i 8. Jedna z wysokości równoległoboku jest równa h_1. Wyznacz długość drugiej wysokości, jeśli:

a) $h_1 = 4$ b) $h_1 = 10$ c) $h_1 = 9$.

5.13. Wysokości równoległoboku są równe 4 cm i 7 cm, a sinus kąta ostrego równoległoboku jest równy $\frac{2}{3}$. Oblicz pole tego równoległoboku.

5.14. Punkt O jest środkiem przekątnej AC równoległoboku $ABCD$. Punkt E należy do boku AD, punkt F należy do boku DC i $|\sphericalangle AEO| = |\sphericalangle OFC| = 90°$. Wiedząc, że $|FO| = 3$ cm, $|EO| = 4{,}5$ cm oraz $|\sphericalangle EOF| = 60°$, oblicz pole równoległoboku $ABCD$.



5.15. Obwód równoległoboku jest równy 35 cm, a odległości punktu przecięcia przekątnych od dwóch sąsiednich boków równoległoboku są odpowiednio równe 3 cm i 4 cm. Oblicz pole tego równoległoboku.

5.16. Pole równoległoboku jest równe 24 cm^2, a obwód wynosi 26 cm. Oblicz długości boków równoległoboku wiedząc, że sinus kąta między sąsiednimi bokami jest równy 0,8.

D 5.17. Wykaż, że przekątne równoległoboku dzielą równoległobok na cztery trójkąty o jednakowych polach. Wiedząc dodatkowo, że przekątne równoległoboku mają długości 10 cm i 14 cm, a pole równoległoboku jest równe 35 cm^2, oblicz miarę kąta ostrego między przekątnymi.

5.18. Krótsza przekątna DB równoległoboku $ABCD$ ma długość 20 cm. Wysokość trójkąta ACD, poprowadzona z wierzchołka D, dzieli przekątną AC na odcinki mające długości 9 cm i 25 cm. Oblicz:

a) pole równoległoboku b) sinus kąta ostrego tego równoległoboku.

5.19. Przekątne równoległoboku mają długości 14 cm i 48 cm i zawierają się w dwusiecznych jego kątów. Oblicz pole i obwód równoległoboku.

5.20. Pole rombu jest równe 156. Wysokość rombu jest równa 12. Oblicz długości jego przekątnych.

5.21. Pole rombu wynosi 16. Oblicz długość boku rombu wiedząc, że kąt rozwarty ma miarę trzy razy większą niż kąt ostry tego rombu.

5.22. Oblicz pole rombu, którego bok ma długość 6 cm, a suma długości przekątnych jest równa 16 cm.

5.23. Pole rombu jest równe 4,8 dm^2. Odcinek łączący środki sąsiednich boków rombu przy kącie rozwartym ma długość 2,4 dm. Oblicz:

a) długości przekątnych rombu b) obwód rombu

c) wysokość rombu d) sinus kąta ostrego rombu.

5.24. Przekątne rombu mają długości 10 i 24.

a) Oblicz wysokość tego rombu.

b) Wyznacz długości odcinków, na jakie spodek wysokości poprowadzonej przez środek symetrii rombu dzieli bok rombu.

5.25. Dłuższa przekątna rombu jest równa $\sqrt{30}$, a cosinus kąta rozwartego wynosi $-\frac{2}{3}$. Oblicz:

a) długość boku rombu b) pole tego rombu.

Pole trapezu

5.26. Dane są długości podstaw a, b oraz długości ramion c, d trapezu. Oblicz pole tego trapezu.

a) $a = 15$ cm, $b = 9$ cm, $c = d = 5$ cm

b) $a = 44$ cm, $b = 16$ cm, $c = 17$ cm, $d = 25$ cm

c) $a = 11$ cm, $b = 6$ cm, $c = 12$ cm, $d = 13$ cm

d) $a = 28$ cm, $b = 7$ cm, $c = 17$ cm, $d = 10$ cm

5.27. Pole trapezu jest równe 54 cm^2, a wysokość ma długość 9 cm. Oblicz długości podstaw trapezu, wiedząc, że jedna z nich jest:

a) o 5 cm krótsza od drugiej b) o 25% dłuższa od drugiej.

5.28. Miary kątów trapezu przy dłuższej podstawie wynoszą 45° i 30°. Wiedząc, że podstawy mają długości 10 cm i 4 cm, oblicz pole tego trapezu.

5.29. Krótsza podstawa trapezu ma długość $3\sqrt{6}$ cm. Kąty przy tej podstawie mają miary 135° i 60°, a dłuższe ramię ma długość 18 cm. Oblicz pole tego trapezu.

5.30. W trapezie równoramiennym $ABCD$ wysokość DE ma taką samą długość, jak krótsza podstawa DC i dzieli dłuższą podstawę AB na odcinki w stosunku 1 : 2.

a) Oblicz miary kątów trapezu.

b) Wiedząc dodatkowo, że pole trapezu jest równe 162 cm^2, oblicz $|AB|$ i $|DC|$.

5.31. W trapezie równoramiennym ramię ma długość 12 cm, a jeden z kątów przy tym ramieniu jest dwa razy większy od drugiego. Wiedząc, że przekątna jest prostopadła do ramienia, oblicz pole tego trapezu.

5.32. W trapezie równoramiennym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego podzieliła dłuższą podstawę na odcinki, z których dłuższy ma 8 cm długości. Wiedząc, że wysokość trapezu jest równa 7 cm, oblicz pole tego trapezu.

5.33. Przekątna trapezu równoramiennego ma długość 10 cm i tworzy z dłuższą podstawą kąt równy 45°. Oblicz pole tego trapezu.

5.34. Obwód trapezu równoramiennego jest równy 38 cm, a jego ramię ma długość 5 cm. Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli dłuższą podstawę na odcinki, z których jeden jest o 10 cm krótszy od drugiego. Oblicz:

a) długości podstaw trapezu b) pole tego trapezu.

5.35. Dłuższa podstawa AB trapezu $ABCD$ ma długość $4\sqrt{5}$, a długość ramienia AD wynosi 4. Odległość wierzchołka C od przekątnej DB jest równa 3. Wiedząc, że $|\sphericalangle ADB| = 90°$, oblicz:

a) pole trapezu b) wysokość trapezu c) długość krótszej podstawy.

5.36. W trapezie równoramiennym jedna podstawa jest dwa razy dłuższa od drugiej. Przekątna trapezu dzieli kąt przy dłuższej podstawie na połowy. Wiedząc, że pole trapezu jest równe $3\sqrt{3}$ cm^2, oblicz długości boków tego trapezu.

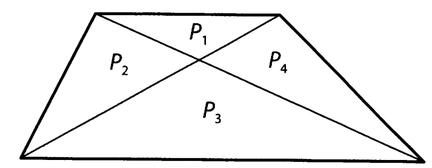
5.37. Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego ma długość 15 cm, a wysokość jest równa 9 cm. Długość odcinka łączącego środki przekątnych wynosi 4 cm. Oblicz pole tego trapezu.

5.38. Ramię trapezu równoramiennego ma długość 25 cm, a odcinek łączący środki przekątnych – 7 cm. Wiedząc, że pole trapezu jest równe 360 cm^2, oblicz długości podstaw tego trapezu.

5.39. W trapezie $ABCD$, $AB \parallel DC$, przekątne przecinają się w punkcie E. Pole trójkąta AED jest równe 15 cm^2, a pole trójkąta DEC wynosi 10 cm^2. Oblicz:

a) $|EC| : |AE|$ b) pole trapezu $ABCD$.

5.40 Przekątne trapezu dzielą trapez na cztery trójkąty. Niech P_1, P_2, P_3, P_4 oznaczają pola tych trójkątów, jak na rysunku obok. Oblicz pole trapezu, jeśli:



a) $P_1 = 14$, $P_2 = 35$ b) $P_3 = 7$, $P_4 = 3$ c) $P_1 = 5$, $P_3 = 45$.

5.41. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie, który dzieli je w stosunku 1 : 2. Wiedząc, że pole trapezu jest równe 27 cm^2, oblicz pola powstałych trójkątów.

5.42. Dłuższa podstawa trapezu jest średnicą okręgu opisanego na tym trapezie. Wiedząc, że ramię trapezu ma długość 10 cm, a wysokość jest równa 8 cm, oblicz pole tego trapezu.

D **5.43.** Trzy boki trapezu mają jednakową długość. Dłuższa podstawa tego trapezu jest średnicą okręgu opisanego na tym trapezie. Ramię trapezu ma taką samą długość, jak krótsza podstawa. Wykaż, że jeśli przekątna trapezu ma długość d, to pole tego trapezu jest równe $\frac{d^2\sqrt{3}}{4}$.

5.44. Trapez wpisano w okrąg o promieniu 5. Środek okręgu należy do trapezu i znajduje się w odległości 4 od krótszej podstawy oraz 3 od dłuższej podstawy. Oblicz obwód i pole tego trapezu.

5.45. Jedna z podstaw trapezu ma długość 24 cm, a druga – 6 cm. W ten trapez można wpisać okrąg i na tym trapezie można opisać okrąg. Oblicz pole tego trapezu.

5.46. Ramiona trapezu równoramiennego mają długość 20 cm, a pole tego trapezu jest równe 320 cm^2. Wiedząc, że w ten trapez można wpisać okrąg, oblicz długości jego podstaw.

5.47. Pole trapezu równoramiennego jest równe 156, a ramię tego trapezu ma długość 13. W trapez wpisano koło. Oblicz pole tego koła.

5.48. Ramiona trapezu mają długość 17 cm i 10 cm, a pole tego trapezu wynosi 108 cm^2. Wiedząc, że w ten trapez można wpisać okrąg, oblicz długości jego podstaw.

D **5.49.** W trapez prostokątny wpisano koło o promieniu r. Wykaż, że jeśli kąt ostry trapezu jest równy 45°, to pole trapezu wynosi $r^2 \cdot \sqrt{8}$.

5.50. Na okręgu opisano trapez prostokątny. Odległości środka okręgu od końców dłuższego ramienia wynoszą 3 cm i 7 cm. Oblicz pole tego trapezu.

5.51. W trapez prostokątny wpisano koło. Pole trapezu jest równe 72 cm^2, a dłuższe ramię ma długość 10 cm. Oblicz:

a) pole koła wpisanego w trapez
b) długości podstaw trapezu.

Pole czworokąta – zadania różne

5.52. Dane są długości d_1 i d_2 przekątnych czworokąta wypukłego oraz miara kąta między tymi przekątnymi. Oblicz pole czworokąta, jeśli:

a) $d_1 = 10,\ d_2 = 6,\ \alpha = 30°$
b) $d_1 = 8\sqrt{3},\ d_2 = 4,\ \alpha = 60°$
c) $d_1 = 21,\ d_2 = 6\frac{2}{3},\ \alpha = 120°$
d) $d_1 = 12,\ d_2 = 5\sqrt{2},\ \alpha = 135°$.

5.53. W czworokącie wypukłym przekątne mają długość 12 cm oraz 15 cm i tworzą z jednym bokiem tego czworokąta kąty równe α i β. Oblicz pole czworokąta, jeśli:

a) $\alpha = 70°,\ \beta = 80°$
b) $\alpha = 35°,\ \beta = 25°$.

5.54. Dane są długości d_1 i d_2 przekątnych czworokąta wypukłego oraz jego pole P. Oblicz miarę kąta ostrego przecięcia przekątnych, jeśli:

a) $P = 20$ cm^2, $d_1 = 8$ cm, $d_2 = 10$ cm
b) $P = 3$ cm^2, $d_1 = \sqrt{6}$ cm, $d_2 = \sqrt{8}$ cm
c) $P = 5\sqrt{2}$ dm^2, $d_1 = d_2 = 2\sqrt{5}$ dm
d) $P = 60$ cm^2, $d_1 = 1$ dm, $d_2 = 0{,}12$ m.

5.55. Rozpatrujemy równoległoboki, których obwód wynosi 16 cm, a kąt ostry jest równy 45°.

a) Wyznacz długości boków równoległoboku, którego pole jest równe $6\sqrt{2}$ cm^2.
b) Wyznacz długości boków równoległoboku, który ma największe pole. Oblicz to największe pole.

5.56. Rozpatrujemy trapezy prostokątne, których suma długości podstaw i wysokości jest równa 30 cm.

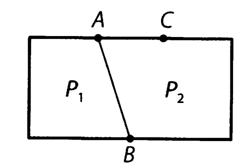
a) Wyznacz wysokość trapezu, którego pole jest równe 100 cm^2.
b) Wyznacz długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu, który ma największe pole. Oblicz to pole.

5.57. Rozpatrujemy czworokąt wypukły, którego przekątne przecinają się pod kątem 60°, a suma ich długości jest równa 52 cm. Ile jest równe największe z możliwych pole takiego czworokąta?

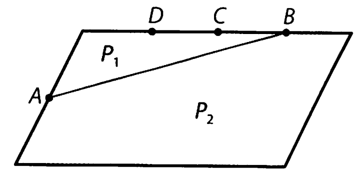
D **5.58.** Wykaż, że:

a) równoległobok o danych długościach boków ma największe pole wtedy, gdy jest prostokątem
b) równoległobok o danych długościach przekątnych ma największe pole wtedy, gdy jest rombem.

5.59. Oblicz stosunek pól $P_1 : P_2$ figur, na które odcinek AB dzieli:

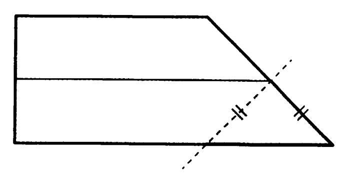


a) prostokąt na rysunku obok, jeśli punkty A, C wyznaczają na jednym boku trzy równe odcinki, a punkt B jest środkiem przeciwległego boku



b) równoległobok na rysunku obok, jeśli A jest środkiem krótszego boku, a punkty B, C, D wyznaczają na dłuższym boku cztery równe odcinki.

5.60. Przekątne czworokąta wypukłego dzielą ten czworokąt na cztery trójkąty. Wiedząc, że pola trzech trójkątów są równe 20, 30 i 40, oblicz pole tego czworokąta. Rozważ wszystkie możliwe przypadki.



5.61. Drużyna harcerska przeznaczyła kawałek materiału w kształcie trapezu prostokątnego na chorągiewkę. Materiał został złożony wzdłuż linii łączącej środki ramion trapezu o długości 90 cm. Następnie odcięto wystający skrawek, mający kształt trójkąta równoramiennego, jak na rysunku obok. Wiedząc, że trójkątny ścinek ma pole 600 cm^2, a jego podstawa ma długość 40 cm, oblicz:

a) obwód chorągiewki z dokładnością do 1 cm
b) pole powierzchni chorągiewki.

D **5.62.** W czworokącie połączono kolejno środki boków. Wykaż, że powstały w ten sposób równoległobok ma pole dwa razy mniejsze od pola danego czworokąta.

5.63. Oblicz pole czworokąta, wiedząc, że środki kolejnych boków tego czworokąta tworzą:

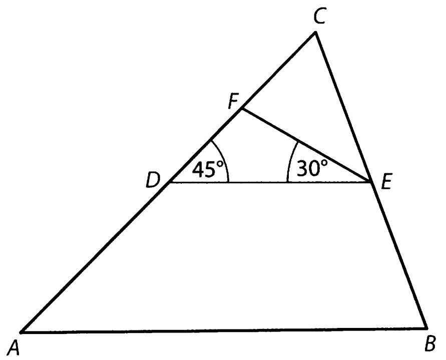
a) prostokąt o obwodzie 20, którego jeden z boków jest o 3 dłuższy od drugiego

b) romb, którego krótsza przekątna ma długość 17, a wysokość jest równa 8

c) równoległobok, którego boki mają długość 12 i 7, a kąt rozwarty jest równy 150°.

5.64. W trapezie równoramiennym $ABCD$ ramiona AD i BC mają długość 7 cm. Krótsza podstawa DC ma długość 3 cm i tworzy z przekątną AC kąt równy 60°. Oblicz pole tego trapezu.

5.65. W trójkącie ABC na rysunku obok punkty D i E są środkami boków AC i BC, a punkt F – środkiem odcinka DC. Wiedząc, że $|\sphericalangle EDC| = 45°$, $|\sphericalangle FED| = 30°$ oraz $|FE| = 8$, oblicz pole czworokąta $ABEF$.



5.66. Bok rombu ma długość 5, a kąt ostry jest równy 60°. W romb wpisano okrąg. Oblicz pole czworokąta wypukłego, którego wierzchołkami są punkty styczności okręgu z bokami rombu.

5.67. Obwód czworokąta wypukłego jest równy 54 cm. W ten czworokąt wpisano koło o promieniu 4 cm. Oblicz pole danego czworokąta.

5.68. Pole deltoidu jest równe $\frac{15\sqrt{3}}{2}$, a dwa przeciwległe kąty tego deltoidu są równe 120°. W deltoid wpisano okrąg o promieniu $\frac{15\sqrt{3}}{16}$. Oblicz:

a) długości boków deltoidu

b) długości jego przekątnych.

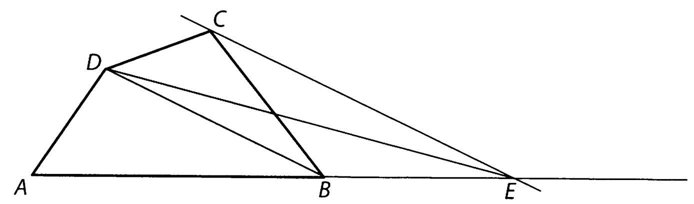
5.69. Na okręgu o promieniu równym 2 cm opisano trapez równoramienny, którego pole jest równe 20 cm^2. Oblicz długości boków tego trapezu.

5.70. Na okręgu opisano trapez prostokątny, którego obwód jest równy 100 cm, a pole wynosi 600 cm^2. Oblicz:

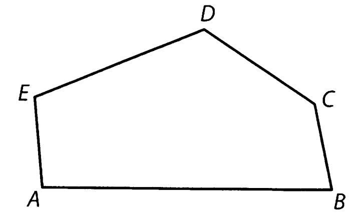
b) długości ramion trapezu

c) długości podstaw trapezu.

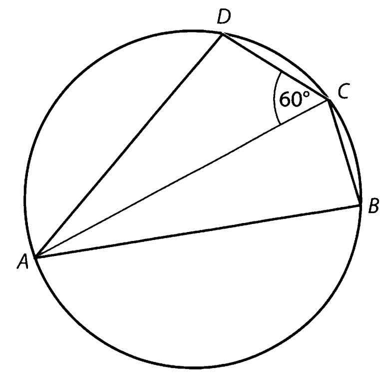
D **5.71.** Na rysunku poniżej przedstawiony jest czworokąt $ABCD$. Przez wierzchołek C poprowadzono prostą równoległą do prostej DB, która przecięła prostą AB w punkcie E. Wykaż, że pole czworokąta $ABCD$ jest równe polu trójkąta AED.



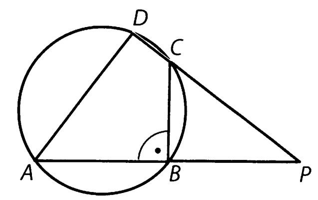
5.72. Na rysunku obok przedstawiony jest pięciokąt wypukły $ABCDE$. Zbuduj czworokąt, którego pole jest równe polu pięciokąta $ABCDE$. Skorzystaj z poprzedniego zadania.



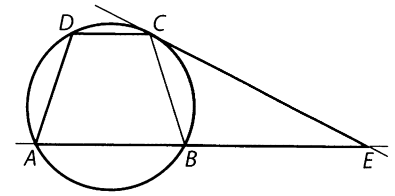
5.73. W czworokącie wypukłym $ABCD$ bok DC ma długość 6 oraz $|AB| = 3|BC|$. Przekątna AC ma długość 16 i tworzy z bokiem DC kąt równy 60°. Wiedząc, że na czworokącie można opisać okrąg, oblicz pole czworokąta $ABCD$.



5.74. Na czworokącie wypukłym $ABCD$ opisano okrąg. Prosta DC przecina prostą AB w punkcie P – jak na rysunku obok. Wiedząc, że $|AB| = |BP| = 8$ cm, $|BC| = 6$ cm oraz $|\sphericalangle ABC| = 90°$, oblicz pole czworokąta $ABCD$.



5.75. Na trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$, opisano okrąg. Styczna do okręgu w punkcie C przecina prostą AB w punkcie E – jak na rysunku poniżej. Wiedząc, że $|AB| = 8$, $|DC| = 4$, $|CE| = 6\sqrt{5}$ oraz pole trapezu jest o 6 większe od pola trójkąta BEC, oblicz promień okręgu opisanego na trapezie $ABCD$.



Pola figur podobnych

5.76. Obrazem figury F w podobieństwie o skali 0,2 jest figura F_1. Oblicz pola figur F_1 i F wiedząc, że pole figury F_1 jest o 72 cm^2 mniejsze od pola figury F.

5.77. Figura F_1 jest podobna do figury F w skali 1,5. Oblicz pola tych figur, wiedząc, że ich różnica jest równa 85 cm^2.

5.78. Figura F_1 jest podobna do figury F w skali k. Oblicz k, jeśli:

a) pole figury F_1 stanowi 144% pola figury F

b) pole figury F_1 jest o 21% większe od pola figury F

c) pole figury F_1 jest o 36% mniejsze od pola figury F

d) pole figury F stanowi 56,25% pola figury F_1.

5.79. Figury F_1 i F są podobne. O ile procent pole figury F_1 jest mniejsze od pola figury F, jeśli:

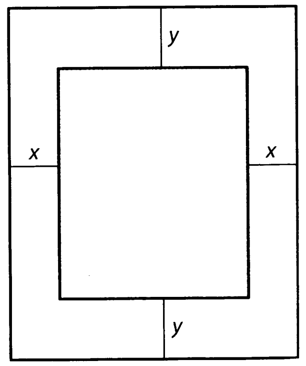
a) obwód figury F_1 stanowi $\frac{3}{4}$ obwodu figury F

b) obwód figury F_1 jest o 20% mniejszy od obwodu figury F

c) obwód figury F stanowi $\frac{5}{3}$ obwodu figury F_1

d) obwód figury F jest o 40% większy od obwodu figury F_1.

5.80. Zakupiono antyramę do zdjęcia o wymiarach 10 cm na 15 cm. Rama wyznacza prostokąt podobny w skali 1,4 do brzegu zdjęcia. Zdjęcie umieszczono w centralnym miejscu antyramy tak, że odpowiednie krawędzie są równoległe do siebie, jak na rysunku obok. Oblicz:



a) odległość x i y zdjęcia od krawędzi antyramy

b) jaki procent pola zdjęcia stanowi pole widocznego tła.

5.81. W równoległoboku $ABCD$ nierównoległe boki mają długość 7 i 8. Obrazem równoległoboku $ABCD$ w pewnym podobieństwie jest równoległobok $A_1B_1C_1D_1$. Wiedząc, że pole równoległoboku $A_1B_1C_1D_1$ jest równe 336, a kąt rozwarty jest równy 150°, oblicz:

a) skalę tego podobieństwa
b) obwód równoległoboku $A_1B_1C_1D_1$.

5.82. W trapezie $ABCD$ odcinki AB i DC są podstawami. Na ramieniu AD zaznaczono punkt E, a na ramieniu BC – punkt F w taki sposób, że trapez $EFCD$ jest podobny do trapezu $ABFE$. Wiedząc, że $|AB| = 18$ cm i $|DC| = 2$ cm, oblicz stosunek:

a) wysokości trapezów $EFCD$ i $ABFE$
b) pól trapezów $EFCD$ i $ABFE$.

5.83. W trapezie $ABCD$ zaznaczono punkt E na ramieniu AD oraz punkt F na ramieniu BC i otrzymano trapezy $CDEF$ oraz $ABFE$, które są do siebie podobne. Wiedząc, że stosunek pól trapezów podobnych wynosi 4 : 9, a długość odcinka EF jest równa 18 cm, oblicz długości podstaw trapezu $ABCD$.

Mapa. Skala mapy

5.84. Długość Wisły wynosi 1047 km. Oblicz, jaką długość (w cm) ma niebieska linia obrazująca Wisłę na mapie, która została wykonana w skali 1 : 3 000 000.

5.85. Droga z Rzeszowa do Radomia, zaznaczona na mapie wykonanej w skali 1 : 250 000, ma długość 80 cm. Oblicz, ile kilometrów ma w rzeczywistości.

5.86. Oblicz skalę, w jakiej został wykonany plan, jeśli:

a) 1 cm na mapie odpowiada 4 m w rzeczywistości

b) 1 cm^2 na mapie odpowiada 4 m^2 w rzeczywistości.

5.87. Budynek parterowy o powierzchni równej 150 m^2 zaznaczono na planie zagospodarowania terenu jako prostokąt o wymiarach 20 cm na 30 cm.

a) Oblicz skalę tego planu.

b) Wyznacz wymiary prostokąta, przedstawiającego dany budynek na mapie w skali 1 : 500.

5.88. Działka ma kształt prostokąta o wymiarach 50 m na 40 m. Ile cm^2 będzie zajmować obszar tej działki na planie sporządzonym w skali 1 : 2000?

5.89. Prostokątna działka na planie, sporządzonym w skali 1 : 1000, ma wymiary 15 cm na 20 cm. Ile hektarów ma ta działka w rzeczywistości?

5.90. Puszcza Solska zajmuje na mapie w skali 1 : 2 000 000 powierzchnię równą 3,1 cm^2. Oblicz, ile wynosi rzeczywista powierzchnia tej puszczy w km^2.

5.91. Jezioro Dąbie ma powierzchnię równą 5600 ha. Oblicz, jaką powierzchnię zajmuje to jezioro na mapie, wykonanej w skali 1 : 400 000.

Test sprawdzający do rozdziału 5.

1. Przekątna kwadratu ma długość 6 cm. Pole tego kwadratu jest równe:

A. 12 cm^2 B. 18 cm^2 C. 24 cm^2 D. 36 cm^2

2. Boki równoległoboku mają długość 4 i 8, a jedna z wysokości jest równa 6. Druga wysokość jest równa:

A. 12 B. 9 C. 4,5 D. 3

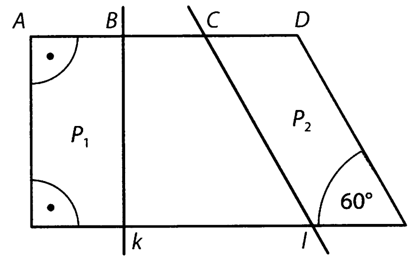
3. Sąsiednie boki równoległoboku mają długość 4 cm i 5 cm. Pole tego czworokąta nie może być równe:

A. 21 cm^2 B. $17\frac{8}{9}$ cm^2 C. $6\sqrt{7}$ cm^2 D. $4\sqrt{5}$ cm^2

4. Przekątne rombu mają długości 10 cm i 24 cm. Wysokość rombu jest równa:

A. 13 cm B. $9\frac{3}{13}$ cm C. $18\frac{6}{13}$ cm D. $4\frac{8}{13}$ cm

5. Kąt ostry trapezu prostokątnego jest równy 60°. Prosta k jest prostopadła do podstaw trapezu. Prosta l jest równoległa do dłuższego ramienia, jak na rysunku obok. Niech P_1 i P_2 oznaczają pola figur odciętych z trapezu przez te proste. Jeśli $|AB| = |CD|$, to:



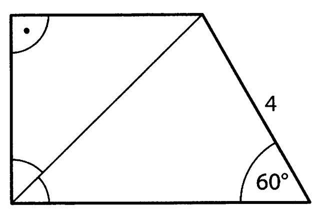
A. $P_1 < P_2$ B. $P_1 = \sqrt{2}P_2$

C. $P_1 = P_2$ D. $P_1 = \sqrt{3}P_2$

6. Pole trapezu wynosi 108, a odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 9. Wysokość tego trapezu jest równa:

A. 10 B. 12 C. $10\sqrt{3}$ D. $12\sqrt{3}$

7. Dłuższe ramię trapezu prostokątnego ma długość 4 i tworzy z dłuższą podstawą kąt równy 60°. Krótsza przekątna trapezu jest dwusieczną kąta prostego przy podstawie. Pole tego trapezu jest równe:



A. $2(\sqrt{3}+6)$ B. $2(\sqrt{3}+2)$

C. $6\sqrt{3}$ D. $2(2\sqrt{3}+3)$

8. Obwód wielokąta w jest o 40% większy od obwodu podobnego do niego wielokąta w_1. Pole wielokąta w jest większe od pola wielokąta w_1 o:

A. 16% B. 20% C. 40% D. 96%

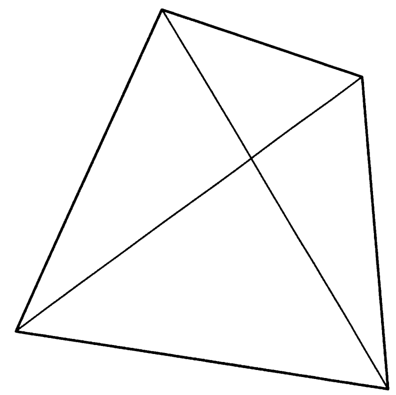
9. Przekątne czworokąta wypukłego mają długość 8 cm oraz 9 cm i przecinają się pod kątem 30°. Pole tego czworokąta wynosi:

A. $9\sqrt{3}$ cm^2 B. 18 cm^2 C. $18\sqrt{2}$ cm^2 D. $18\sqrt{3}$ cm^2

10. Przekątne czworokąta dzielą go na cztery trójkąty. Pola trzech z tych trójkątów dane są na rysunku obok. Zatem pole czworokąta jest równe:

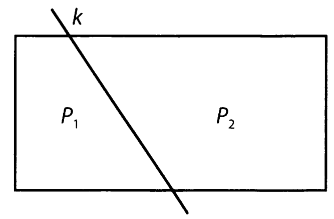
A. 48 B. 50

C. 52 D. 56



Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5.

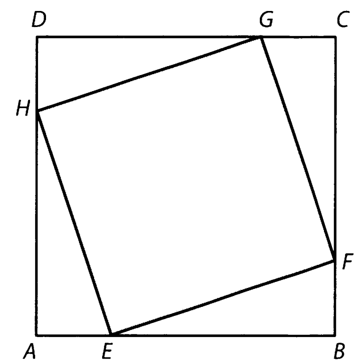
11. Na rysunku obok prosta k dzieli jeden z dłuższych boków prostokąta na odcinki, których długości pozostają w stosunku 1 : 4, a drugi dłuższy bok dzieli na połowy. Oblicz pole prostokąta wiedząc, że różnica pól powstałych trapezów jest równa 6.



12. W kwadrat $ABCD$ wpisano kwadrat $EFGH$, jak na rysunku obok. Wierzchołki E, F, G, H dzielą boki kwadratu $ABCD$ w stosunku 1 : 3.

a) Oblicz, jaką część pola kwadratu $ABCD$ stanowi pole kwadratu $EFGH$.

b) W jakiej skali kwadrat $EFGH$ jest podobny do kwadratu $ABCD$?



13. Przekątne prostokąta wypukłego przecinają się pod kątem 45°. Pole tego prostokąta jest równe $16\sqrt{2}$ cm^2. Podaj wymiary tego prostokąta.

14. Dłuższy bok równoległoboku ma długość $5\sqrt{5}$, a cosinus kąta ostrego równoległoboku jest równy $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Wiedząc, że pole równoległoboku wynosi 50, oblicz:

a) długość krótszego boku

b) długości przekątnych i miarę kąta ostrego między przekątnymi.

15. W równoległoboku $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie O. Punkt M należy do boku AB i odcinek OM jest równoległy do boku AD. Wiedząc, że $|AM| = 8$ cm, $|AC| = 26$ cm oraz $|OM| = 7$ cm, oblicz pole równoległoboku $ABCD$.

16. Pole rombu jest równe 96 cm^2, a sinus kąta ostrego wynosi $\frac{24}{25}$. Oblicz:

a) długość boku rombu b) wysokość rombu c) długości przekątnych.

17. Podstawy trapezu mają długość 30 cm i 2 cm, a ramiona – 17 cm i 25 cm. Oblicz pole tego trapezu.

18. Pole trapezu wynosi 169 cm^2. Punkt przecięcia przekątnych dzieli każdą z nich na odcinki, których długości pozostają w stosunku 5 : 8. Oblicz pola trójkątów, na jakie przekątne podzieliły trapez.

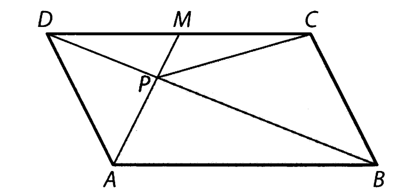
19. Pole trapezu równoramiennego wynosi 108 cm^2, a wysokość trapezu jest równa 9 cm. Oblicz długość przekątnej tego trapezu.

20. Przekątne trapezu prostokątnego mają długość 13 cm i 15 cm, a różnica długości podstaw jest równa 4 cm. Oblicz pole tego trapezu.

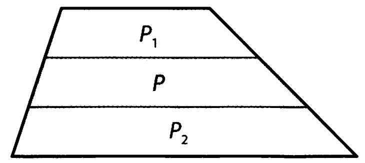
21. Przekątne czworokąta wypukłego mają długość 12 cm i 5 cm. Oblicz, jakie największe pole może mieć ten czworokąt.

22. Rozpatrujemy czworokąty wypukłe, których suma długości przekątnych jest równa 20 cm, a kąt ostry między przekątnymi ma miarę 45°. Wyznacz długości przekątnych czworokąta, którego pole jest największe z możliwych. Oblicz to największe pole.

D **23.** Punkt M jest środkiem boku DC równoległoboku $ABCD$. Przekątna DB przecina odcinek AM w punkcie P. Wykaż, że pole czworokąta wypukłego $ABCP$ jest dwa razy większe od pola czworokąta wklęsłego $APCD$.

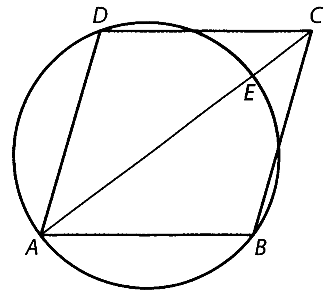


D **24.** W trapezie poprowadzono dwa odcinki równoległe do podstaw, które podzieliły ramiona trapezu na trzy równe odcinki, jak na rysunku obok. Wykaż, że jeśli pola powstałych w ten sposób trapezów są równe odpowiednio P_1, P, P_2, to $P = \frac{P_1 + P_2}{2}$.



25. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są: $|AD| = |BC| = 6$, $|DC| = 3\sqrt{5}$ oraz $|AC| = 3\sqrt{17}$. Wiedząc, że suma miar kątów wewnętrznych czworokąta przy wierzchołkach A i B jest równa 90°, oblicz pole tego czworokąta.

26. Przez wierzchołek A kąta ostrego rombu $ABCD$ i dwa wierzchołki B i D kątów rozwartych przechodzi okrąg. Dzieli on dłuższą przekątną na odcinki AE i EC w taki sposób, że $|AE| = 18\frac{3}{4}$ i $|EC| = 5\frac{1}{4}$. Oblicz:



a) pole rombu

b) wysokość rombu

c) sinus kąta ostrego rombu.

27. Pole trapezu jest równe 72 cm^2. Pole koła wpisanego w ten trapez wynosi 16π cm^2. Oblicz długość ramion trapezu w przypadku, gdy trapez jest:

a) równoramienny b) prostokątny.

Jakie długości mają odcinki, na które promień prostopadły do ramienia dzieli dane ramię?

28. Na okręgu o promieniu 3 opisano trapez, którego kąty przy dłuższej podstawie są równe 30° i 60°. Oblicz pole tego trapezu.

29. Boki czworokąta $ABCD$ mają długość: $|AB| = 8$, $|BC| = 3$, $|AD| = |CD| = 5$. Wiedząc, że na tym czworokącie można opisać okrąg, oblicz:

a) pole czworokąta $ABCD$ b) miarę kąta ostrego między przekątnymi.

30. Podstawy trapezu mają długość 8 cm i 6 cm, a wysokość trapezu jest równa 7 cm. Na trapezie opisano koło. Oblicz pole tego koła.

6. Elementy analizy matematycznej

Granica funkcji w punkcie

6.1. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie, oblicz:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(4x-8)$

b) $\lim\limits_{x\to -1}(6-2x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(7x-3)$

d) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-2x)$

e) $\lim\limits_{x\to -4}(2x^2+5x-1)$

f) $\lim\limits_{x\to 0}(-2x^2+4x+7)$

6.2. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie, oblicz:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{4+x}{16-x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4+x}{16-x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

f) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

6.3. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie, oblicz $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, jeśli:

a) $f(x)=\dfrac{-x^2-2x+3}{x+3}$, $x_0=-3$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-2x-8}$, $x_0=-2$

c) $f(x)=\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-7x+1}$, $x^0=5$

d) $f(x)=\dfrac{2x-14}{-x^2+9x-14}$, $x_0=7$

e) $f(x)=\dfrac{6-3x}{12-4x-x^2}$, $x_0=-4$

f) $f(x)=\dfrac{2x^2+x-6}{2x^2-5x+3}$, $x_0=1{,}5$

6.4. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie, oblicz $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, jeśli:

a) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$, $x_0=1$

b) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$, $x_0=-1$

c) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^3+8}$, $x_0=2$

d) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^3+8}$, $x_0=-2$

e) $f(x)=\dfrac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$, $x_0=27$

f) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}+4}{x+64}$, $x_0=-64$

6.5. Wskaż dwa ciągi (a_n) i (b_n), dla których $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=x_0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$, i na tej podstawie wykaż, że nie istnieje granica funkcji f w punkcie x_0, jeśli:

a) $f(x)=\dfrac{|x-6|}{x-6}$, $x_0=6$

b) $f(x)=\dfrac{x+7}{|x+7|}$, $x_0=-7$

c) $f(x)=\dfrac{x^2-4|x|}{2x}$, $x_0=0$

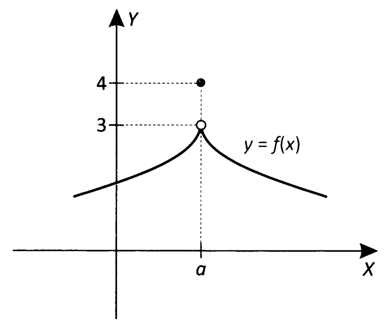
d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{|x-4|}$, $x_0=4$

e) $f(x)=\dfrac{|x^2+3x+2|}{x^2-1}$, $x_0=-1$

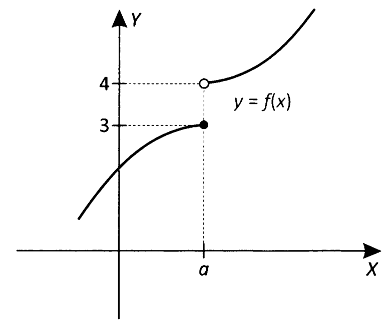
f) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+5}-1}{|x+4|}$, $x_0=-4$

6.6. Na podstawie wykresu funkcji f ustal, czy istnieje granica funkcji f w punkcie a. Jeśli tak, to podaj tę granicę.

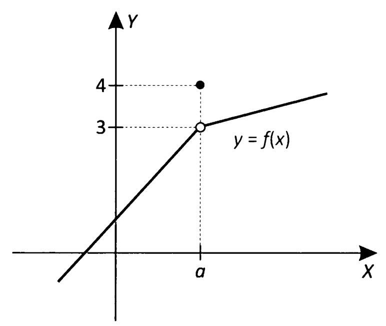
a)



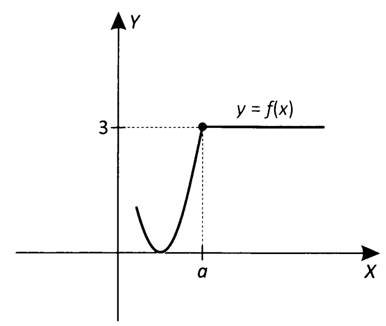
b)



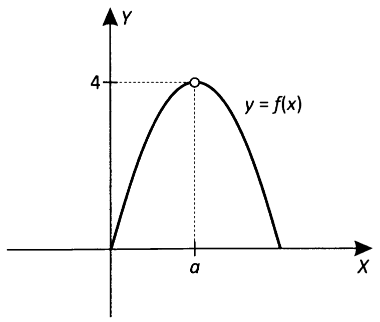
c)



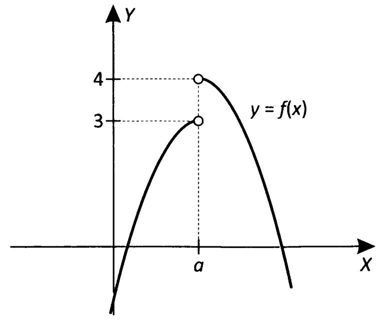
d)



e)



f)



Obliczanie granicy funkcji w punkcie

6.7. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left[(2x-3)^5(x+5)\right]$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\left[(5-x)^2(3x+2)^3\right]$

c) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{2x+8}$

d) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{(1-x)(4-2x)}$

e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(4x-5)(2-x)}{(5x-12)^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+5x-9}{(7x-6)(x-12)}$

6.8. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{2-x}$

b) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{-x^2+10x-24}{x^2-2x-24}$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{125-x^3}{4x^2-100}$

e) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^4-8x^2-9}{x^3+3x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4+2x^2-8}$

6.9. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{x}}{3-x}$

b) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x+4}{\frac{1}{x}+\frac{1}{4}}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^2-x-2}{x-2}+\dfrac{x-2}{x^3-8}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\left[\dfrac{x^3+8}{x^4-16}-\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x+6}\right]$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{1}{1-x}\right]$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x(x+1)}{x^4-1}-\dfrac{2}{x^4-1}\right]$

6.10. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25}$

b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{27-x^3}{x^2-9}$

d) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x(x-7)}{x^6-64}-\dfrac{10}{64-x^6}\right]$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^8-1}$

6.11. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+9}-3}{5x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{9+x}}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{2x+1}-3}$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-6}{\sqrt{7x+2}-\sqrt{5x+6}}$

6.12. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{1-3x}+2}{x-3}$

6.13. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach, oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4\sin\dfrac{1}{x^3}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(7x\sin\dfrac{1}{x^2}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(-3x\sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$

6.14. Wyznacz parametr a, wiedząc, że:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5+2\sqrt{x}}{\sqrt{ax+7}}=\dfrac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{ax^2+2}}{3x+a}=-2$

6.15. O funkcji f wiemy, że $f(x)>0$, jeśli $x>5$, $f(x)<0$, jeśli $x<5$ i $\lim\limits_{x\to 5}f(x)$ istnieje. Oblicz $\lim\limits_{x\to 5}f(x)$.

Granice jednostronne funkcji w punkcie

6.16. Oblicz granice jednostronne funkcji f w punkcie x_0 i na tej podstawie ustal, czy istnieje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, a następnie naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

a) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{|x-1|}$, $x_0=1$

b) $f(x)=\dfrac{4-x^2}{|2+x|}$, $x_0=-2$

c) $f(x)=\dfrac{x^3-2x}{|x|}$, $x_0=0$

d) $f(x)=\dfrac{|x-3|^3}{(x-3)^2}+2$, $x_0=3$

e) $f(x)=\dfrac{|2+x|^3}{x+2}-1$, $x_0=-2$

f) $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{|x|}$, $x_0=0$

6.17. Oblicz granice jednostronne:

a) $\lim\limits_{x\to 4^-}\left(2+\sqrt{16-x^2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -3^-} 5x\sqrt{x^2-9}$

c) $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{5-x}{\sqrt{(x-5)^2}}$

d) $\lim\limits_{x\to -6^+}\dfrac{\sqrt{2x+12}-2}{x+4}$

e) $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2}$

f) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{x^2-1}$

6.18. Zbadaj, czy istnieje granica funkcji f w punkcie x_0. Jeśli tak, to oblicz tę granicę.

a) $f(x)=\begin{cases}-3x+5, & \text{jeśli } x>1\\ 2x, & \text{jeśli } x<1\end{cases}$ $\quad x_0=1$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+6}{3x-2}, & \text{jeśli } x>2\\ x^2-1, & \text{jeśli } x<2\end{cases}$ $\quad x_0=2$

c) $f(x)=\begin{cases}x^3+5, & \text{jeśli } x>-3\\ -x^2+4x-1, & \text{jeśli } x<-3\end{cases}$ $\quad x_0=-3$

d) $f(x)=\begin{cases}|x-2|, & \text{jeśli } x>-1\\ \sqrt{6-3x}, & \text{jeśli } x<-1\end{cases}$ $\quad x_0=-1$

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{4-x}, & \text{jeśli } x>4\\ 3x-4, & \text{jeśli } x<4\end{cases}$ $\quad x_0=4$

f) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+9}-3}{x}, & \text{jeśli } x>0\\ \dfrac{2x-3}{4x-9}, & \text{jeśli } x<0\end{cases}$ $\quad x_0=0$

6.19. Zbadaj, czy istnieje granica funkcji f w punkcie x_0. Jeśli tak, to oblicz tę granicę.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-3x^2+5x-2}{x-1}, & \text{jeśli } x<1\\ \dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}, & \text{jeśli } x>1\end{cases}$ $\quad x_0=1$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{9x^2+20x+4}{4-x^2}, & \text{jeśli } x\in(-2,2)\\ \dfrac{x^3+8}{x^2+3x+2}, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-2)\end{cases}$ $\quad x_0=-2$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-16x+21}{3x-9}, & \text{jeśli } x<3\\ \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}, & \text{jeśli } x>3\end{cases}$ $\quad x_0=3$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{|2x+6|}, & \text{jeśli } x<-4\\ \dfrac{x^2+13x+36}{x+4}, & \text{jeśli } x>-4\end{cases}$ $\quad x_0=-4$

Granica funkcji w nieskończoności

6.20. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-5}{2x+7}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-6x}{1+3x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5}{3x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x+6}{7-x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5}{6-7x}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{12x-9}{4x+1}$

6.21. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+7x-1}{6x^2-4x+5}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x+5}{-x^2+2x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3x+x^2}{2x^2-4x-9}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8}{4x^2-7x+15}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2x-1)^2}{(1-3x)^2}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-(3x+1)^2}{x^2-(4x+2)^2}$

6.22. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2+6x-7}{2x^3-9x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8x^3-10x^2+x}{1-8x-10x^3}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-2x^2)^2}{x^4-x^3+6x^2-7x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(2x+1)^3}{(1-2x)^2\cdot x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(5x-2)^3}{(2+3x^2)(2-3x^2)}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(3x^2+5x)(1-x^2)}{(3-7x^2)(5+x^2)}$

6.23. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x+5}-x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\frac{5+3x^4}{x^3+2x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+7}{x-5}+\frac{3-4x^2}{2x+7}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+5}+\frac{1-x^3}{x^2-11}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{(3x+1)^2}{3x-5}-\frac{3x^2-7}{x+5}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{(x+1)^3}{x^2-1}-\frac{x^3-1}{x^2+1}\right)$

6.24. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+5}}{2x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+5}}{2x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x+7}}{9-3x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x+7}}{9-3x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|3x-2|}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|3x-2|}{x-1}$

6.25. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+5}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2-4x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{-x}}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-1}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x+5|-|6-x|\right)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(|7-x|-|3+x|\right)$

6.26. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach, wykaż, że:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cos x}{x^2+1}=0$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6\sin x}{\sqrt{x^2+5}}=0$

Granica niewłaściwa funkcji

6.27. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to2}\frac{2}{(x-2)^2}$ c) $\lim\limits_{x\to-4}\frac{2x+5}{(x+4)^2}$

d) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x-8}{|x+1|}$ e) $\lim\limits_{x\to3}\frac{1-4x}{|x-3|}$ f) $\lim\limits_{x\to7}\frac{|3-5x|}{|7-x|}$

6.28. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-5x^2+3x-7\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-5x^2+3x-7\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^5+2x^4+x+1\right)$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^5+2x^4+x+1\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4+7x^3-8x^2-10\right)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4+7x^3-8x^2-10\right)$

6.29. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(1-x)^2(x+3)\right]$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-3x(2-x)(2+x)\right]$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-3)^3(2-3x)^2\right]$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(5-x)(3-x)^2(x+2)\right]$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})\right]$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(9-2x)^3(7-x)^3\right]$

6.30. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+8x+10}{2x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+8x+10}{2x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2-7x+15}{2-x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2-7x+15}{2-x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^4+x^3+x^2-5}{x^2-2x+8}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^4+x^3+x^2-5}{x^2-2x+8}$

6.31. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+7x+15}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+7x+15}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x^2+2x+10}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\sqrt{x^2+2x+10}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x\sqrt{x^2-x+3}}{4-5x}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x\sqrt{x^2-x+3}}{4-5x}$

6.32. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2+3}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^2+3}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{2x^2-3}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{2x^2-3}{x-2}$ e) $\lim\limits_{x\to-3^+}\frac{-x^2+1}{x+3}$ f) $\lim\limits_{x\to-3^-}\frac{-x^2+1}{x+3}$

6.33. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to5^+}\frac{x^2-3x-12}{(5-x)^2}$ b) $\lim\limits_{x\to5^-}\frac{x^2-3x-12}{(5-x)^2}$ c) $\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{4x+21}{(x+2)^2}$

d) $\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{4x+21}{(x+2)^2}$ e) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-2}{(x-1)^4}$ f) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-2}{(x-1)^4}$

6.34. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to4^+}\frac{x^2-x-12}{(x-4)^2}$ b) $\lim\limits_{x\to4^-}\frac{x^2-x-12}{(x-4)^2}$

c) $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x^2-x-2}{(x+1)^3}$ d) $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{x^2-x-2}{(x+1)^3}$

e) $\lim\limits_{x\to6^+}\frac{x^2-2x-24}{-3(x-6)^3}$ f) $\lim\limits_{x\to6^-}\frac{x^2-2x-24}{-3(x-6)^3}$

6.35. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{3x+5}{x^2+4x-5}$ b) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{3x+5}{x^2+4x-5}$

c) $\lim\limits_{x\to-3^+}\frac{4x+7}{-x^2-x+6}$ d) $\lim\limits_{x\to-3^-}\frac{4x+7}{-x^2-x+6}$

e) $\lim\limits_{x\to7^+}\frac{x-10}{x^2-2x-35}$ f) $\lim\limits_{x\to7^-}\frac{x-10}{x^2-2x-35}$

6.36. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x+1}{x^4-2x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{x+1}{x^4-2x^2+1}$

c) $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3-2x}{x^3-8x^2+20x-16}$ d) $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3-2x}{x^3-8x^2+20x-16}$

e) $\lim\limits_{x\to4^+}\frac{8-2x}{x^3-12x^2+48x-64}$ f) $\lim\limits_{x\to4^-}\frac{8-2x}{x^3-12x^2+48x-64}$

Ciągłość funkcji w punkcie

6.37. Zbadaj ciągłość funkcji f w punkcie x_0:

a) $f(x)=\begin{cases}x+5, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-2)\\ 2x+7, & \text{jeśli } x\in\langle-2,+\infty)\end{cases}$ $x_0=-2$

b) $f(x)=\begin{cases}-x^2+2, & \text{jeśli } x\in(-\infty,1\rangle\\ 4-3x, & \text{jeśli } x\in(1,+\infty)\end{cases}$ $x_0=1$

c) $f(x)=\begin{cases}\frac{x+7}{x-3}, & \text{jeśli } x\in(-\infty,2)\\ 2-3x-x^2, & \text{jeśli } x\in\langle2,+\infty)\end{cases}$ $x_0=2$

d) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-4x}, & \text{jeśli } x\in(-\infty,0\rangle\\ \frac{6+5x}{2+x}, & \text{jeśli } x\in(0,+\infty)\end{cases}$ $x_0=0$

e) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-2x-24, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-3) \\ 3x^2+10x+3, & \text{jeśli } x\in\langle -3,+\infty) \end{cases}$ $\quad x_0=-3$

f) $f(x)=\begin{cases} x^3-2x^2+5x-1, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-1) \\ 4x^2+10x-2, & \text{jeśli } x\in\langle -1,+\infty) \end{cases}$ $\quad x_0=-1$

6.38. Zbadaj ciągłość funkcji f w punkcie x_0:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-5x-3}{x-3}, & \text{jeśli } x\neq 3 \\ 7, & \text{jeśli } x=3 \end{cases}$ $\quad x_0=3$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^3+7x^2+5x+1}{x+1}, & \text{jeśli } x\neq -1 \\ 0, & \text{jeśli } x=-1 \end{cases}$ $\quad x_0=-1$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-10x+25}, & \text{jeśli } x\neq 5 \\ 9, & \text{jeśli } x=5 \end{cases}$ $\quad x_0=5$

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-20}{x^2+5x+4}, & \text{jeśli } x\neq -4 \\ 3, & \text{jeśli } x=-4 \end{cases}$ $\quad x_0=-4$

e) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{9+12x^2}-3}{x^2}, & \text{jeśli } x\neq 0 \\ 2, & \text{jeśli } x=0 \end{cases}$ $\quad x_0=0$

f) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{12+4x^2}-4}{x-1}, & \text{jeśli } x\neq 1 \\ 1, & \text{jeśli } x=1 \end{cases}$ $\quad x^0=1$

6.39. Zbadaj, czy istnieje taka liczba a, dla której funkcja

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{|x|-3}, & \text{jeśli } x\neq 3 \wedge x\neq -3 \\ a, & \text{jeśli } x=3 \vee x=-3 \end{cases}$ jest ciągła w punktach –3 i 3.

6.40. Zbadaj, czy funkcja $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3nx+4}{nx+2}$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}$, jest ciągła w punktach –1, 0, 1.

6.41. Zbadaj, czy funkcja $f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{1+x^{2n}}$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}$, jest ciągła w punktach –1, 0, 1.

D 6.42. Wykaż, że funkcja f nie jest ciągła w punkcie x_0:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{jeśli } x\neq 2 \\ 3, & \text{jeśli } x=2 \end{cases}$ $\quad x_0=2$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-8|}{x-8}, & \text{jeśli } x\neq 8 \\ 1, & \text{jeśli } x=8 \end{cases}$ $\quad x_0=8$

6.43. Dana jest funkcja $f(x)=\begin{cases} x^2+3x, & \text{jeśli } x\in \boldsymbol{Z} \\ 18, & \text{jeśli } x\notin \boldsymbol{Z} \end{cases}$. Wyznacz te liczby całkowite, w których funkcja f jest ciągła.

Ciągłość funkcji w zbiorze

6.44. Wyznacz parametr a tak, aby funkcja $f(x)=\begin{cases} (1-a)x+4a-1, & \text{jeśli } x\in(-\infty,4) \\ ax-a^2, & \text{jeśli } x\in\langle 4,+\infty) \end{cases}$ była ciągła w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

6.45. Wyznacz parametry a, b, dla których funkcja $f(x)=\begin{cases} x^2+ax, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-2\rangle \\ b, & \text{jeśli } x\in(-2,5) \\ 2x-3, & \text{jeśli } x\in\langle 5,+\infty) \end{cases}$ jest ciągła w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

6.46. Wyznacz parametry a, b tak, aby funkcja $f(x)=\begin{cases} 3x+1, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-3\rangle \\ ax+b, & \text{jeśli } x\in(-3,5) \\ -6x+6, & \text{jeśli } x\in\langle 5,+\infty) \end{cases}$ była ciągła w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

6.47. Wyznacz parametry a, b ta, aby funkcja $f(x)=\begin{cases} ax^2+b, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-2) \\ x-a, & \text{jeśli } x\in\langle -2,3) \\ \frac{a}{x}+b, & \text{jeśli } x\in\langle 3,+\infty) \end{cases}$

była ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$.

6.48. Wyznacz a, b tak, aby funkcja $f(x)=\begin{cases} a, & \text{jeśli } x=-2 \\ \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x+7}}, & \text{jeśli } x\in(-2,2) \\ b, & \text{jeśli } x=2 \end{cases}$

była ciągła w przedziale $\langle -2, 2\rangle$.

6.49. Dziedziną funkcji ciągłej $y=f(x)$ jest przedział $\langle 1, 3\rangle$, a jej zbiorem wartości przedział $\langle 2, 6\rangle$. Wykaż, że równanie $f(x)=2x$ ma rozwiązanie w przedziale $\langle 1, 3\rangle$.

6.50. Dziedziną i zbiorem wartości funkcji ciągłej $y=f(x)$ jest przedział $\langle 0, 1\rangle$. Wykaż, że równanie $f(x)=x$ ma rozwiązanie w przedziale $\langle 0, 1\rangle$.

6.51. Funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle -10, -2\rangle$ oraz $f(-10)<0$ i $f(-2)=13$. Czy funkcja g, gdzie $g(x)=f(x)-10$ ma miejsce zerowe w przedziale $\langle -10, -2\rangle$? Odpowiedź uzasadnij.

6.52. Wykaż, korzystając z twierdzenia Darboux, że wykresy funkcji $f(x)=-x^4+5x$, $x\in\mathbb{R}$ i $g(x)=2x^3-4x+4$, $x\in\mathbb{R}$, przecinają się w punkcie o odciętej należącej do przedziału $(0, 1)$.

6.53. Wykaż, korzystając z twierdzenia Darboux, że funkcja $f(x)=x^4-5x^3-7x^2+3$, $x\in\mathbb{R}$, przyjmuje wartość -160.

6.54. Wykaż, że równanie $3x^5+5x^3+1=2x^4+6x^2+\sqrt{2}x$ ma rozwiązanie należące do przedziału $(0, 1)$.

6.55. Dana jest funkcja $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$, $x\in\mathbb{R}$. Wykaż, że równanie $f(x)=f(x+1)$ ma w przedziale $(2, 6)$ co najmniej dwa rozwiązania (nie rozwiązując tego równania).

6.56. Wykaż, że równanie $\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)=2^{-x}$ ma w przedziale $(0, 3)$ co najmniej dwa rozwiązania.

6.57. Wyznacz zbiór wartości funkcji f:

a) $f(x)=\frac{1}{x^2+2x-24}$, $x\in\langle -5, 3\rangle$

b) $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}$, $x\in\langle 4, 6\rangle$

c) $f(x)=\frac{1}{\sin x}$, $x\in\left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right\rangle$

d) $f(x)=\frac{1}{\cos x}$, $x\in\left\langle \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}\right\rangle$

Asymptoty wykresu funkcji

6.58. Zbadaj, czy wykres funkcji f ma asymptoty pionowe. Jeśli tak, wyznacz równania tych asymptot:

a) $f(x)=\frac{2x+8}{x-5}$

b) $f(x)=\frac{6x+2}{3x+1}$

c) $f(x)=\frac{5}{(x-2)^2}$

d) $f(x)=\frac{4x-5}{x^2}$

e) $f(x)=\frac{3}{5x^2-10x}$

f) $f(x)=\frac{-6x}{x^2+3x}$

6.59. Zbadaj, czy wykres funkcji f ma asymptoty pionowe. Jeśli tak, wyznacz równania tych asymptot:

a) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{(x+3)(x-1)}$

b) $f(x)=\frac{x^2+4x+4}{(x+4)(x+5)}$

c) $f(x)=\frac{x-2}{|x^2-4|}$

d) $f(x)=\frac{|x^2-9|}{x+3}$

e) $f(x)=\frac{2x^2-x-6}{3x^2+8x+4}$

f) $f(x)=\frac{6x^2-x-2}{2x^2+3x+5}$

6.60. Wyznacz wartości parametrów a, b, dla których wykres funkcji $f(x)=\frac{x^2+2x+6}{x^2+ax+b}$ ma dwie asymptoty pionowe o równaniach $x=-3$ i $x=6$.

6.61. Wyznacz wartości parametrów a, b, dla których wykres funkcji $f(x)=\frac{x^2+2x-24}{x^2+ax+b}$ ma tylko jedną asymptotę pionową o równaniu $x=4$.

6.62. Wyznacz wartości parametrów a, b, dla których wykres funkcji $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2+ax+b}$ ma tylko jedną asymptotę pionową o równaniu $x=4$.

6.63. Zadaj, czy istnieją takie wartości parametrów a, b, dla których wykres funkcji $f(x)=\frac{x^2+bx+a}{x^2+ax+b}$ ma dwie asymptoty pionowe o równaniach $x=1$ i $x=-5$.

6.64. Wykaż, że prosta k jest asymptota ukośną wykresu funkcji f, jeśli:

a) $f(x)=\frac{x^2+5x+2}{x}$, k: $x-y+5=0$

b) $f(x)=\frac{2x^2+6x-3}{x+1}$, k: $2x-y+4=0$

c) $f(x)=\frac{3x^3}{8x-x^2}$, k: $3x+y+24=0$

d) $f(x)=\frac{(2x-1)^3}{3x^2+x}$, k: $24x-9y-44=0$

e) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$, k: $x-y=0$ – asymptota ukośna prawostronna

f) $f(x)=\sqrt{x^2+3x}$, k: $2x+2y+3=0$ – asymptota ukośna lewostronna

6.65. Zbadaj, czy wykres funkcji f ma asymptoty ukośne (poziome). Jeśli tak, wyznacz równania tych asymptot:

a) $f(x)=\frac{x^2+3x}{2x-6}$

b) $f(x)=\frac{x^3+8}{x^2+4}$

c) $f(x)=\frac{5x^3+2x^2}{x^3-7}$

d) $f(x)=\frac{1-x^3}{2+x}$

e) $f(x)=\frac{2x^2+5x-17}{x^3-3x^2+21}$

f) $f(x)=\frac{(2x+3)^3}{(2x+1)^2}$

6.66. Wyznacz asymptoty ukośne (poziome) wykresu funkcji f, jeśli:

a) $f(x)=\frac{3x^2+1}{|x|+5}$

b) $f(x)=\frac{4x-3}{|x|+2}$

c) $f(x)=\frac{16-x^2}{|x+2|-2}$

d) $f(x)=\frac{x^2-4}{|x+1|+1}$

e) $f(x)=\sqrt{x^2+6x}$

f) $f(x)=\sqrt{4x^2-x}$

6.67. Wyznacz asymptoty ukośne (poziome) wykresu funkcji f:

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{3x^2-4}{x-3}, & \text{jeśli } x\le 1\\ \frac{2-x^3}{x^3+2}, & \text{jeśli } x>1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3+5}{2x+4}, & \text{jeśli } x\le -3\\ \frac{-2x^3}{x^2+1}, & \text{jeśli } x>-3\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2+1}, & \text{jeśli } |x|\le 4\\ \frac{2|x|}{x^2+x+5}, & \text{jeśli } |x|>4\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}5x+2, & \text{jeśli } |x|\le 3\\ \frac{3x^2}{|x|+6}, & \text{jeśli } |x|>3\end{cases}$

6.68. Wyznacz równania wszystkich asymptot wykresu funkcji:

a) $f(x)=\frac{5-2x}{x+7}$

b) $f(x)=\frac{x+5}{x^2+x-6}$

c) $f(x)=\frac{x^2-x-12}{x+1}$

d) $f(x)=\frac{2x^2-3x+8}{x^2-2x+1}$

e) $f(x)=\frac{3x^3-2x^2+6}{x^2-1}$

f) $f(x)=\frac{x^5+x^3+1}{x^2-6x+9}$

6.69. Wyznacz równania wszystkich asymptot wykresu funkcji f:

a) $f(x)=\frac{x^2+4x-12}{x^2-4}$

b) $f(x)=\frac{x^3-2x^2-3x}{x^2+2x+1}$

c) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^3-3x^2+2x}$

d) $f(x)=\frac{2x^3-6x^2-8x}{x^2-3x-4}$

e) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+9}}{-x+3}$

f) $f(x)=\begin{cases}\frac{6x^2}{|x|+1}, & \text{jeśli } |x|\ge 2\\ \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, & \text{jeśli } |x|<2\end{cases}$

Pochodna funkcji w punkcie

6.70. Korzystając z definicji, oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0:

a) $f(x)=-2x$, $x_0=3$

b) $f(x)=3x-5$, $x_0=-1$

c) $f(x)=4x^2+3x$, $x_0=-2$

d) $f(x)=-x^2+5$, $x_0=5$

e) $f(x)=\frac{1}{x+5}$, $x_0=4$

f) $f(x)=\frac{-2}{x-3}$, $x_0=-3$

6.71. Korzystając z definicji, oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0:

a) $f(x) = 2x^3$, $x_0 = 5$

b) $f(x) = -x^3 + x^2 - x$, $x_0 = -2$

c) $f(x) = \frac{x+3}{x-5}$, $x_0 = 1$

d) $f(x) = \frac{-3x}{x+1}$, $x_0 = -2$

e) $f(x) = \sqrt{3x+6}$, $x_0 = 1$

f) $f(x) = \sqrt{1-5x}$, $x_0 = -3$

6.72. Zbadaj, czy istnieje pochodna funkcji f w punkcie x_0:

a) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4x, & \text{jeśli } x \le -2 \\ -8x - 12, & \text{jeśli } x > -2 \end{cases}$ $x_0 = -2$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{jeśli } x \le 0 \\ -x^2, & \text{jeśli } x > 0 \end{cases}$ $x_0 = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & \text{jeśli } x \le 1 \\ -3x + 6, & \text{jeśli } x > 1 \end{cases}$ $x_0 = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{3x + 12}, & \text{jeśli } x \ne -4 \\ -2\frac{2}{3}, & \text{jeśli } x = -4 \end{cases}$ $x_0 = -4$

e) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & \text{jeśli } x \le 0 \\ x^2 - 3, & \text{jeśli } x > 0 \end{cases}$ $x_0 = 0$

f) $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 + 4, & \text{jeśli } x \le 2 \\ 4, & \text{jeśli } x > 2 \end{cases}$ $x_0 = 2$

6.73. Wyznacz liczby a i b, dla których istnieje pochodna funkcji f w punkcie x_0. Dla wyznaczonych liczb a i b naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \begin{cases} -0{,}5x^2 + 4, & \text{jeśli } x \leqslant 2 \\ ax + b, & \text{jeśli } x > 2 \end{cases}$ $x_0 = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{jeśli } x \geqslant -1 \\ ax^2 + bx - 1, & \text{jeśli } x < -1 \end{cases}$ $x_0 = -1$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 2, & \text{jeśli } x \geqslant 1 \\ 0{,}5x^2 + ax + b, & \text{jeśli } x < 1 \end{cases}$ $x_0 = 1$

Funkcja pochodna

6.74. Wyznacz pochodną funkcji:

a) $f(x) = 7$

b) $f(x) = -3x$

c) $f(x) = 6x - 8$

d) $f(x) = -x^2 + 7$

e) $f(x) = 5x^2 + 3x - \sqrt{2}$

f) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$

6.75. Wyznacz pochodną funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2$

b) $f(x) = x^5 - 2x^4 + x + 1$

c) $f(x) = -3x^8 + 5x^4 + 6$

d) $f(x) = 5 + 2x^3 - 6x^6$

e) $f(x) = \sqrt{6}x + x^7 - \frac{1}{8}x^8$

f) $f(x) = x^{10} + x^{100} + x^{1000}$

6.76. Wyznacz pochodną funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{x} + 2x$

b) $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$

c) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2}$

d) $f(x) = 2x^4 - \sqrt{x} + 5$

e) $f(x) = x^5 - 2x^3 + x + \frac{6}{x}$

f) $f(x) = \sqrt{7} + \sqrt{x}$

6.77. Wyznacz pochodną funkcji:

a) $f(x) = (4x - 1)(x^5 + 2)$

b) $f(x) = (2x^2 - 3)(4x^2 + 3x)$

c) $f(x) = (x^3 + x^2 + x)(x^2 + x + 1)$

d) $f(x) = (2x^4 + 4x^2)(x^3 + x + 3)$

e) $f(x) = (2\sqrt{x} + x^2 + 1)\left(x - \frac{1}{x}\right)$

f) $f(x) = \left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right)(\sqrt{x} + x)$

6.78. Wyznacz pochodną funkcji:

a) $f(x) = \frac{3}{x+5}$

b) $f(x) = \frac{-2x}{3x-1}$

c) $f(x) = \frac{5x+1}{-4x+2}$

d) $f(x) = \frac{3x^2+7x}{6x+1}$

e) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+1}$

f) $f(x) = \frac{2x}{x^2-5}$

6.79. Wyznacz pochodną funkcji:

a) $f(x)=\dfrac{x^3-2}{3x^2+x}$ b) $f(x)=\dfrac{4x^2-5x}{x^2+x+2}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2+8}{x+2}$ d) $f(x)=\dfrac{5}{x^4+x^3+1}$

e) $f(x)=\dfrac{x^4+3x+2}{x^3+1}$ f) $f(x)=\dfrac{x}{x^5-1}$

6.80. Zbadaj, czy istnieją takie wartości parametrów k, m $(k, m \in \boldsymbol{R})$, dla których funkcja f jest różniczkowalna w zbiorze $\boldsymbol{R}$. Wyznacz f'.

a) $f(x)=\begin{cases} 4x+m, & \text{jeśli } x<1 \\ kx^2+2x, & \text{jeśli } x\geq 1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{k}{4}x^2-kx, & \text{jeśli } x<3 \\ \dfrac{m}{x}-2, & \text{jeśli } x\geq 3 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} 2x^2+k^2x, & \text{jeśli } x<2 \\ x+m, & \text{jeśli } x\geq 2 \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} mx^2+(k+1)x, & \text{jeśli } x<-1 \\ kx^2-3mx, & \text{jeśli } x\geq -1 \end{cases}$

Funkcja złożona. Pochodna funkcji złożonej

6.81. Dane są wzory funkcji f i g. Wyznacz złożenia $g\circ f$, $f\circ g$ oraz dziedziny tych złożeń.

a) $f(x) = x - 3$, $g(x) = 3x$ b) $f(x) = 2x$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = -x^2$, $g(x) = -4x$ d) $f(x) = |x - 5|$, $g(x) = x^2 + 4$

e) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(x)=\dfrac{-1}{x}$ f) $f(x) = 5x - 1$, $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$

6.82. Dane są wzory funkcji f i g. Wyznacz złożenia $g\circ f$, $f\circ g$ oraz dziedziny tych złożeń.

a) $f(x) = (x - 1)^2$, $g(x)=\sqrt{x-1}$ b) $f(x) = x^2 - 25$, $g(x)=\sqrt{x+9}$

c) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=2x-6$ d) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$, $g(x)=\sqrt{x}$

e) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-5}$, $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ f) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$

6.83. Wyznacz pochodną funkcji:

a) $f(x) = (4x - 7)^4$ b) $f(x) = (3 - 2x^2)^3$

c) $f(x) = (3x^5 + 2x^2 - 8)^6$ d) $f(x) = (5x^4 - 2x)^7 + (3 + x^2)^4$

e) $f(x) = (5x - x^3)^3 - (1 - x)^4$ f) $f(x) = (4x^6 + 2x^2 + 1)^{-7}$

6.84. Wyznacz pochodną funkcji:

a) $f(x) = 5x^3(6x - 9)^5$ b) $f(x) = x-4 \cdot (x^4 - x^3 + x)^3$

c) $f(x) = (2x^4 - x^2)^3 \cdot (4 - 2x)$ d) $f(x) = (x^2 - x)^2 \cdot (x^3 - 1)^2$

e) $f(x)=\dfrac{(x^2+1)^3}{(x-2)^2}$ f) $f(x)=\dfrac{(2x+3)^4}{(3x+1)^5}$

6.85. Wyznacz pochodne funkcji:

a) $f(x)=\sqrt{5x}$ b) $f(x)=4\sqrt{x^4+3}$

c) $f(x)=2\sqrt{x^2+3x+4}$ d) $f(x)=\dfrac{6x}{\sqrt{3x^4+1}}$

e) $f(x)=\sqrt{\dfrac{5-x}{3x+1}}$ f) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+5}}$

6.86. Niech funkcje f i g będą różniczkowalne w zbiorze $\boldsymbol{R}$. Wiadomo, że $f(-5) = 4$, $f'(-5) = 2$ oraz $g(x)=f^2(x)-3f(x)+x^2$, $x \in \boldsymbol{R}$, oblicz $g(-5)$ i $g'(-5)$.

6.87. Niech funkcje f i g będą różniczkowalne w zbiorze $\boldsymbol{R}$. Wiadomo, że $f(3) = 2$, $f'(3) = 1$ oraz $g(x)=\dfrac{f(x)+1}{f^2(x)+4x^2+2}$, $x \in \boldsymbol{R}$, oblicz $g(3)$ i $g'(3)$.

6.88. Niech funkcje f i g będą różniczkowalne w zbiorze $\boldsymbol{R}$. Wiadomo, że $f(7) = 1$, $f'(7) = 2$ oraz $g(x)=\sqrt{f^4(x)+3x^2-2x+10}$, $x \in \boldsymbol{R}$, oblicz $g(7)$ i $g'(7)$.

Styczna do wykresu funkcji

6.89. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P, jeśli:

a) $f(x) = x^2 + 4x - 7$, $P(1, -2)$ b) $f(x) = -2x^2 + x + 3$, $P(-2, -7)$

c) $f(x)=\dfrac{4x+2}{x+3}$, $P(x_0, 2)$ d) $f(x)=\dfrac{3-x}{2x+18}$, $P\left(x_0, \dfrac{1}{2}\right)$

6.90. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x-\frac{1}{3}$ w punkcie $P(-6.\ y_0)$. Następnie wyznacz współrzędne drugiego punktu wspólnego tej stycznej z wykresem funkcji f.

6.91. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\frac{x^2}{2-x}$ w punkcie $P(x_0, -8)$. Ile punktów wspólnych z wykresem funkcji f ma ta styczna?

6.92. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+2x+1}$ w punkcie $P\left(x_0, \frac{5}{4}\right)$. Ile punktów wspólnych z wykresem funkcji ma ta styczna?

6.93. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$ w punkcie $P(x_0, -9)$. Ile punktów wspólnych z wykresem funkcji f ma ta styczna?

6.94. Styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 6x^6.+ 16. - 4$, $x \in \mathbf{R}$, w punkcie A przecina ten wykres w punkcie $B(0, -4)$, różnym od punktu A.

a) Wyznacz współrzędne punktu A.

b) Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie A.

Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji

6.95. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 1$

b) $f(x)=\frac{-1}{3}x^3+4x^2-15x-7$

c) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^3+5$

d) $f(x)=\frac{-1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3+16x^2-32x+7$

6.96. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f:

a) $f(x)=-x^4-\frac{7}{3}x^3-x^2+x+6$

b) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x$

c) $f(x)=\frac{-1}{5}x^5+x^4-x^3-2$

d) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{3}x^3+4x-6$

6.97. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f:

a) $f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x+3}$

b) $f(x)=\frac{2x^2-8x+8}{x-4}$

c) $f(x)=\frac{x^2+5x-6}{x^2-5x+6}$

d) $f(x)=\frac{x^2-5x+14}{x^2-5x-14}$

6.98. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f:

a) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-4}{x^2+2}, & \text{jeśli } x<2 \\ x^3-2x^2, & \text{jeśli } x\geq 2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+11}{x^2+1}, & \text{jeśli } x<2 \\ \frac{5x^2-17}{x^2-3}, & \text{jeśli } x\geq 2 \end{cases}$

6.99. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f:

a) $f(x)=\frac{|x+1|}{x^2-9}$

b) $f(x)=\frac{|x^2-x-2|}{x}$

6.100. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f:

a) $f(x)=x^2\sqrt{2x+4}$

b) $f(x)=x\sqrt{6-2x}$

c) $f(x)=x^2\sqrt{10-x}$

d) $f(x)=(16-x^2)\sqrt{x^2+2x+1}$

6.101. O funkcji $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + 6$, $x \in \mathbf{R}$, wiadomo, że:

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{-7}{3}, 1\right)$.

a) Oblicz współczynniki a, b.

b) Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f.

Ekstrema lokalne funkcji

6.102. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f (jeśli istnieją):

a) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-15x-10$

b) $f(x)=\frac{-1}{3}x^3+5x^2-24x+57$

c) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+8x-3$

d) $f(x)=\frac{-1}{3}x^3+x^2-x+18$

6.103. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f (jeśli istnieją):

a) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{10}{3}x^3+9x-10$

b) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^3+4\frac{1}{2}x^2+7$

c) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-x^4-4x^3+84$

d) $f(x)=\frac{1}{5}x^5+3x^3+18x-123$

6.104. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f (jeśli istnieją):

a) $f(x)=5x+\frac{1}{x}$

b) $f(x)=x^2+\frac{16}{x}$

c) $f(x)=\frac{3x^2-5x+9}{x}$

d) $f(x)=\frac{x^2-5}{x^2+2}$

6.105. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f (jeśli istnieją):

a) $f(x)=\begin{cases} x^3+8x^2+21x+18, & \text{jeśli } x<-2 \\ \frac{x^2-4}{x^2+1}, & \text{jeśli } x\geq -2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} -x^3-11x^2-40x-48, & \text{jeśli } x<-3 \\ \frac{9-x^2}{x^2+4}, & \text{jeśli } x\geq -3 \end{cases}$

6.106. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f (jeśli istnieją):

a) $f(x)=\frac{x^2}{|x|-4}$

b) $f(x)=\frac{x^2}{x+|2x-5|}$

c) $f(x)=\frac{x^2}{x+|7-2x|}$

d) $f(x)=\frac{|x^2+2x-3|}{x^2}$

6.107. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji $f(x)=\sqrt{8x}-x+1$.

6.108. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji $f(x)=x\sqrt{x}-6x+3$

6.109. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji $f(x)=x\sqrt{32-x^2}$.

6.110. Funkcja $f(x)=\frac{x^2-ax+b}{x-5}$ ma w punkcie 3 maksimum lokalne równe 1.

Wyznacz a, b oraz pozostałe ekstrema tej funkcji.

6.111. Dana jest funkcja $f(x)=\frac{192}{x^2}+ax+b$, $x\in \boldsymbol{R}-\{0\}$ z parametrami a i b.

Do wykresu funkcji f należy punkt o współrzędnych $(8, 18)$, a w punkcie 4 funkcja f ma ekstremum lokalne.

a) Wyznacz a i b.

b) Określ rodzaj ekstremum w punkcie 4.

6.112. Niech $f(x)=\frac{(m+2)}{3}x^3-4x^2+(8-m)x+5$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}$. Dla jakich wartości parametru m:

a) funkcja f jest rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$

b) funkcja f ma tylko jedno ekstremum lokalne; określ rodzaj tego ekstremum

c) funkcja f ma dwa ekstrema lokalne w punktach dodatnich?

Największa i najmniejsza wartość funkcji w przedziale

6.113. Wyznacz największą (M) i najmniejszą (m) wartość funkcji f w podanym przedziale:

a) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-8x-8$, $x\in\langle -5, 3\rangle$

b) $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-5$, $x\in\langle -1, 2\rangle$

c) $f(x)=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2$, $x\in\langle -2, 2\rangle$

d) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3-1$, $x\in\langle -1, 3\rangle$

6.114. Wyznacz wartości funkcji f: największą (M) i najmniejszą (m) w podanym zbiorze (jeśli istnieją):

a) $f(x)=\frac{x^2}{4+x}$, $x\in\langle -10, -5\rangle\cup\langle -3, 5\rangle$

b) $f(x)=\frac{1-x^2}{x-3}$, $x\in\langle -5, 3)$

c) $f(x)=\frac{10x}{x^2+1}$, $x\in(0, 10)$

d) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$, $x\in\langle 1, 2)\cup(2, 3\rangle$

6.115. Wyznacz zbiór wartości funkcji f:

a) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x-7\frac{2}{3}$, $x \in \langle 2, 5\rangle$

b) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x+4\frac{2}{3}$, $x \in (-3, 2)$

c) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^3-2x^2+24x+10$, $x \in (0, 7\rangle$

d) $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x+6$, $x \in (-2, 2)$

6.116. Wyznacz zbiór wartości funkcji f:

a) $f(x)=(1-x)\sqrt{4-x}$, $x \in \langle -1, 4\rangle$ b) $f(x)=(2-x)\sqrt{4x-x^2}$, $x \in \langle 0, 4\rangle$

Zadania optymalizacyjne

6.117. Z kwadratowego arkusza blachy o boku długości 80 cm wycięto w narożach cztery przystające kwadraty o boku długości x. Otrzymany profil odpowiednio zgięto, stykające się krawędzie zlutowano i w ten sposób otrzymano prostopadłościenną skrzynię (bez górnego wieka). Dla jakiej wartości x pojemność otrzymanej skrzyni jest największa? Wyznacz tę pojemność z dokładnością do 0,1 litra.

6.118. Należy wykonać skrzynię w kształcie prostopadłościanu (bez górnego wieka), którego podstawa jest kwadratem. Pojemność skrzyni ma być równa 36 litry. Jakie wymiary (w centymetrach) powinno mieć to pudełko, aby jego pole powierzchni było najmniejsze?

6.119. Z kawałka drutu mającego długość 96 cm wykonano model prostopadłościanu o podstawie kwadratowej i największej objętości. Jakie są wymiary tego prostopadłościanu?

6.120. Należy sporządzić skrzynię (z pokrywą) w kształcie prostopadłościanu o objętości 76 cm^3. Stosunek długości krawędzi podstawy tego prostopadłościanu ma być równy 1 : 6. Jakie powinny być wymiary skrzyni, aby na jej konstrukcję zużyć jak najmniej materiału?

6.121. Suma długości trzech krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka jest równa 54 cm. Długość jednej z tych krawędzi jest dwa razy większa od drugiej. Jakie są długości krawędzi tego prostopadłościanu, który ma największą objętość?

6.122. Z kawałka kątownika mającego długość 9,6 m zrobiono szkielet akwarium, w którym stosunek długości krawędzi podstawy jest równy 6 : 3. Jakie są wymiary tego akwarium, jeśli jego objętość jest największa?

6.123. Do pewnej liczby a dodano jej kwadrat, a następnie odjęto sześcian liczby a. Czy istnieje taka liczba a, dla której wartość otrzymanego wyrażenia jest największa, jeśli:

a) $a \in (0, +\infty)$ b) $a \in \mathbf{R}$?

6.124. Czy istnieje przedstawienie liczby 10 w postaci dwóch składników, dla których iloraz sumy kwadratów tych składników przez iloczyn tych składników jest najmniejszy, jeśli:

a) oba składniki są dodatnie

b) jeden ze składników jest ujemny?

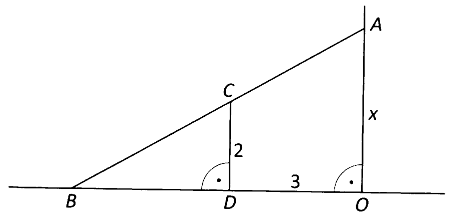
6.125. Wyznacz dwie nieujemne liczby x, y, które spełniają równanie $2x + y = 1$, tak aby suma ich sześcianów $x^3 + y^3$ była:

a) najmniejsza b) największa.

6.126. Wydajność pracy pewnego robotnika zmienia się w ciągu ośmiogodzinnego dnia pracy i po t godzinach od jej rozpoczęcia osiąga wartość $w(t) = 50 + 9t - t^6 - \frac{1}{9}t^3$, gdzie $t \in \langle 0, 8\rangle$. O której godzinie wydajność robotnika jest największa, jeśli rozpoczyna on pracę o godz. $6^{\underline{00}}$?

6.127. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa h. Dzieli ona przeciwprostokątną na odcinki mające długość x oraz $y - x$. Wyznacz y jako funkcję x i oblicz najmniejszą wartość tej funkcji.

6.128. Półproste $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ zawierają się w prostych prostopadłych, $CD \perp BD$ oraz $|CD| = 2$ i $|DO| = 3$ (zobacz rysunek poniżej).



Oznaczmy długość odcinka OA przez x.

a) Wyznacz długość $L(x)$ odcinka AB jako funkcję x.

b) Dla jakiej liczby x funkcja L przyjmuje najmniejszą wartość?

Test sprawdzający do rozdziału 6.

1. Granica $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ jest równa:

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. 0 D. 1.

2. Równość $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x+a}=6$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy:

A. $a=3$ B. $a=-3$ C. $a\in \boldsymbol{R}-\{3\}$ D. $a\in \boldsymbol{R}-\{-3\}$.

3. Granica $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ jest równa:

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{-1}{4}$ C. -4 D. 4.

4. Niech $W(x)=ax^3+2x^2-x+a$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}$.
A. Jeśli $a\neq 0$, to $\lim\limits_{x\to+\infty}W(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}W(x)$
B. Jeśli $a\neq 0$, to $\lim\limits_{x\to+\infty}W(x)=-\lim\limits_{x\to-\infty}W(x)$
C. Jeśli $a=0$, to $\lim\limits_{x\to+\infty}W(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}W(x)=-\infty$
D. Jeśli $a=0$, to $\lim\limits_{x\to+\infty}W(x)=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty}W(x)=+\infty$.

5. Funkcja $f(x)=\begin{cases}\frac{2+x}{x-6}, & \text{jeśli } x<5\\ 2x-3, & \text{jeśli } x\geq 5\end{cases}$:

A. jest ciągła w punkcie 5
B. jest lewostronnie ciągła w punkcie 5
C. jest prawostronnie ciągła w punkcie 5
D. nie jest ani lewostronnie ciągła w punkcie 5, ani nie jest prawostronnie ciągła w punkcie 5.

6. Niech dana będzie funkcja $y=W(x)$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem. Wiadomo, że $W(1)>0$, $W(2)>0$, $W(3)<0$, $W(4)>0$. Z tego wynika, że równanie $W(x)=0$:
A. nie ma rozwiązań w przedziale $(1, 2)$
B. nie ma rozwiązań w przedziale $(2, 4)$
C. ma tylko jedno rozwiązanie w zbiorze $\boldsymbol{R}$
D. ma co najmniej dwa rozwiązania w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

7. Funkcja $f(x)=\begin{cases}8, & \text{jeśli } x\in \boldsymbol{Z}\\ 2x^2, & \text{jeśli } x\in \boldsymbol{R}-\boldsymbol{Z}\end{cases}$ jest:

A. nieciągła w każdym punkcie będącym liczbą całkowitą
B. ciągła w punkcie 4
C. ciągła w punkcie -4
D. ciągła w punkcie -2.

8. Dana jest funkcja $f(x)=\begin{cases}\frac{2x^2-x-1}{x-1}, & \text{jeśli } x\in \boldsymbol{R}-\{1\}\\ 3, & \text{jeśli } x=1\end{cases}$. Zatem:

A. funkcja f jest ciągła w punkcie 1
B. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ nie istnieje
C. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1$
D. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-1$.

9. Wykres funkcji $f(x)=\frac{3x^2-5x+4}{x-1}$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}-\{1\}$ ma asymptoty obustronne:

A. pionową $x=1$ i ukośną $y=-2x+3$
B. pionową $x=-1$ i ukośną $y=-2x+3$
C. pionową $x=1$ i ukośną $y=3x-2$
D. pionową $x=-1$ i ukośną $y=3x-2$.

10. O funkcji $y=f(x)$ wiadomo, że jest funkcją wymierną, która w punkcie $x_{\min}$ ma minimum lokalne, a w punkcie $x_{\max}$ ma maksimum lokalne. Zatem:
A. $f(x_{\min})<f(x_{\max})$
B. $f(x_{\max})$ jest największą wartością funkcji f
C. $f(x_{\min})\cdot f(x_{\max})>0$
D. jest możliwy przypadek, w którym $f(x_{\min})>f(x_{\max})$.

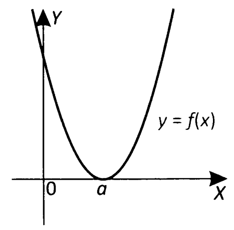
11. Niech dana będzie funkcja f określona w zbiorze $\boldsymbol{R}$.
A. Jeśli funkcja f jest ciągła i rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$, to jest różniczkowalna w zbiorze $\boldsymbol{R}$ i $f'(x)>0$ dla każdej liczby $x\in \boldsymbol{R}$.
B. Jeśli funkcja f jest ciągła i rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$, to jest różniczkowalna w zbiorze $\boldsymbol{R}$ i $f'(x)\geq 0$ dla każdej liczby $x\in \boldsymbol{R}$.
C. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna i rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$, to $f'(x)>0$ dla każdej liczby $x\in \boldsymbol{R}$.
D. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna i rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$, to $f'(x)\geq 0$ dla każdej liczby $x\in \boldsymbol{R}$.

12. Dana jest funkcja $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2-4}$, gdzie $x \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$.

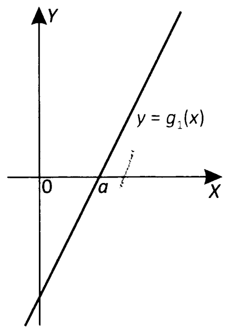
A. Funkcja f nie ma ekstremów lokalnych wtedy i tylko wtedy, gdy $b = 2a$.
B. Jeśli $a = 0$ i $b > 0$, to funkcja f ma tylko jedno ekstremum lokalne – maksimum.
C. Jeśli $a = 0$ i $b > 0$, to funkcja f ma tylko jedno ekstremum lokalne – minimum.
D. Jeśli $a \neq 0$ i $b = 0$, to funkcja f ma dwa ekstrema lokalne.

13. Dziedziną funkcji ciągłej f jest przedział otwarty. Zatem:
A. zbiorem wartości funkcji f może być przedział domknięty
B. zbiorem wartości funkcji f może być suma dwóch przedziałów rozłącznych
C. zbiór wartości funkcji f jest zawsze przedziałem otwartym
D. funkcja f zawsze przyjmuje wartość najmniejszą i największą.

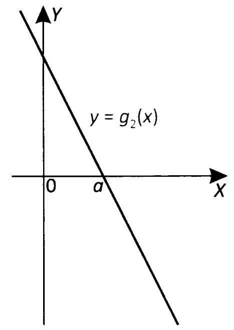
14. Na rysunku obok dany jest wykres pewnej funkcji kwadratowej f. Wśród czterech wykresów poniżej jest jeden, który przedstawia wykres pochodnej funkcji f. Wskaż ten wykres.



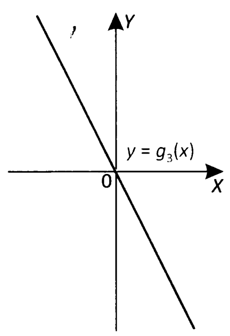
A.



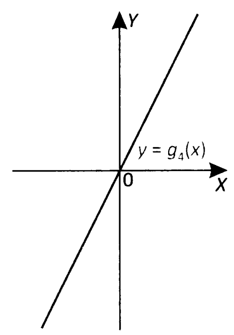
B.



C.



D.



15. Dziedziną funkcji ciągłej f jest zbiór $\mathbf{R}$.
A. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna i $f'(x_0) = 0$, to w punkcie x_0 jest ekstremum lokalne funkcji f.

B. Jeśli w punkcie x_0 jest ekstremum lokalne funkcji f, to $f'(x_0) = 0$ lub $f'(x_0)$ nie istnieje.
C. Jeśli $f'(x_0)$ nie istnieje, to w punkcie x_0 funkcja f ma ekstremum lokalne.
D. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna i rosnąca w zbiorze $\mathbf{R}$, to $f'(x_0) > 0$ dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$.

16. Funkcja $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5$, gdzie $x \in \mathbf{R}$:
A. ma ekstremum lokalne w punkcie 0
B. jest malejąca w przedziale $(-\infty, 3\rangle$
C. jest malejąca w przedziale $\langle 0, +\infty)$
D. przyjmuje największą wartość.

17. Funkcja $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|-4}$, gdzie $x \in \mathbf{R} - \{-4, 4\}$:
A. jest różniczkowalna w punkcie 0
B. ma dwa maksima lokalne
C. jest malejąca w zbiorze $(0, 4) \cup (4, 8)$
D. jest rosnąca w przedziale $(-4, 4)$.

18. Funkcja $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$, gdzie $x \in \mathbf{R}$:
A. ma tylko jedno miejsce zerowe
B. jest malejąca w przedziale $(-\infty, 1\rangle$
C. nie jest różniczkowalna w punkcie 0
D. w każdym punkcie przedziału $\langle -1, 1\rangle$ ma minimum lokalne.

19. Dana jest funkcja $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 4$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.
A. Równanie $f'(x) = 1$ ma dwa rozwiązania całkowite.
B. Istnieją dwie styczne do wykresu funkcji f nachylone do osi OX pod kątem 45°.
C. Styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(-2, 2)$ opisuje równanie $y = -x$.
D. Styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(-2, 2)$ przechodzi przez punkt $(1, 6)$.

20. Dana jest funkcja $f(x) = x^3 + mx^2 + 3x + 2$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.
A. Funkcja f jest malejąca w zbiorze $\mathbf{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.
B. Funkcja f jest malejąca w zbiorze $\mathbf{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle 3, +\infty)$.
C. Funkcja f jest rosnąca w zbiorze $\mathbf{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in (-3, 3)$.
D. Funkcja f jest rosnąca w zbiorze $\mathbf{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in \langle -3, 3\rangle$.

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6.

21. Zbadaj, czy istnieje granica funkcji f w punkcie x_0, jeśli:

a) $f(x)=\dfrac{|x|^3-5x^2}{|x|^2},\ x_0=0$ b) $f(x)=\dfrac{|x|^3-5x}{|x|},\ x_0=0$

Jeśli granica istnieje, to ją wyznacz.

22 Zbadaj, czy istnieją poniższe granice. Jeśli istnieją, to je wyznacz.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-6}{x^3-4x^2+x}$ b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x+8}{x^2+4x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2-4x-6}$ d) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{2x+9}-1}{x+4}$

e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x^2+x}{x^2-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x+4}$

23. Wyznacz granice jednostronne:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-2x-4}{x^2+3x-10}$

c) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2+4x-21}{x^2-x-6}$ d) $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2-3x-4}{-x^2-2x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{7}{x^2+4x+4}$ f) $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x^2-10x+24}{x^2-8x+16}$

24. Wyznacz granice:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[-2(1-2x)(x+3)(1-3x)\right]$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2+4x+5}{3(1-2x)(x-1)}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-3x^3+2x^2+x+1}{(1-2x^2)(1+2x^2)}$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^3-3x^2+5x}{(4x-1)^2}$

25. Temperaturę T wrzenia wody (w °C) w zależności od wysokości h (w metrach) nad poziomem morza (n.p.m.) opisuje w przybliżeniu funkcja

$$T(h)=103{,}79-0{,}1895\sqrt{h+400},\ \text{gdzie } h\in\langle 0,\ 2000\rangle$$

Wykaż, korzystając z twierdzenia Darboux, że pomiędzy 800 m n.p.m. a 900 m n.p.m. jest taki punkt, w którym woda wrze w temperaturze 97°C.

26. Mały kulisty kamień wystrzelono pionowo do góry. Odległość $s(t)$ kamienia od ziemi (w metrach) po t sekundach od wystrzelenia (do upadku na ziemię) opisuje funkcja

$$s(t)=1{,}5+34{,}3t-4{,}9t^2$$

a) Z jakiej wysokości nad ziemią wystrzelono kamień?
b) Na jakiej wysokości był kamień po 3 sekundach od wystrzelenia?
c) Jaka była średnia prędkość kamienia między 2 a 3 sekundą od wystrzelenia?
d) Jaka była prędkość chwilowa w 3 i w 4 sekundzie po wystrzeleniu kamienia?
e) Na jaką maksymalną wysokość wzniósł się kamień?
f) Po ilu sekundach od wystrzelenia kamień spadł na ziemię? Wynik podaj z dokładnością do 0,01 sekundy.

27. Spuszczenie wody z basenu zajmuje 80 minut. Ilość wody w basenie (w litrach) po t minutach od rozpoczęcia spuszczania wody opisuje funkcja

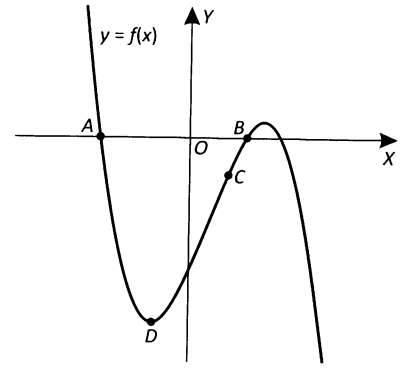
$$V(t)=250\cdot(80-t)^2,\ \text{gdzie } t\in\langle 0,\ 80\rangle$$

a) Ile metrów sześciennych wody mieści się w napełnionym basenie?
b) Ile metrów sześciennych wody pozostanie w basenie po 20 minutach od rozpoczęcia spuszczania wody?
c) Ile – średnio – litrów wody na minutę wypłynie z basenu w czasie 20 początkowych minut od rozpoczęcia spuszczania wody?
d) Jaka będzie prędkość wypływania wody z basenu (w litrach na minutę) w 20 minucie od rozpoczęcia spuszczania wody?

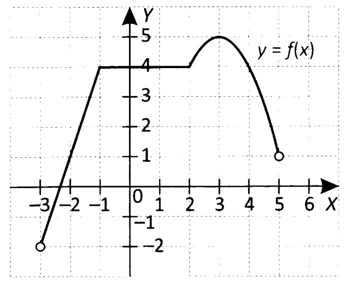
28. O funkcji ciągłej f wiadomo, że jeśli $x\in(7,10)$, to $f'(x)>0$. Styczna w punkcie $A(10,8)$ należącym do wykresu funkcji f ma współczynnik kierunkowy równy zero. Ponadto funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle 10,\ 15\rangle$. Spośród poniższych zdań wybierz zdania prawdziwe. Uzasadnij swój wybór.

a) W punkcie 10 funkcja f ma minimum lokalne.
b) W punkcie 10 funkcja f ma maksimum lokalne.
c) W punkcie 10 funkcja f nie ma ekstremum lokalnego.
d) Styczną do wykresu funkcji f w punkcie A opisuje równanie $y=8$.
e) Styczną do wykresu funkcji f w punkcie A opisuje równanie $y=10$.
f) Styczną do wykresu funkcji f w punkcie A opisuje równanie $y=10x$.

29. Rysunek obok przedstawia szkic wykresu funkcji $f(x)=-x^3+3x^2+24x-72$, gdzie $x\in\mathbf{R}$. Punkty A, B, C, D należą do wykresu funkcji f. Wyznacz współrzędne tych punktów, wiedząc, dodatkowo, że: punkty A, B należą też do osi OX styczna do wykresu funkcji f w punkcie C jest opisana równaniem $y=24x-68$ styczna do wykresu funkcji f w punkcie D jest równoległa do osi OX.



30. Na rysunku poniżej przedstawiony jest wykres funkcji f, której dziedziną jest przedział $(-3, 5)$. Wykres ten składa się z dwóch odcinków i fragmentu paraboli.



a) Podaj zbiór, w którym funkcja f jest różniczkowalna.

b) Oblicz: $f'(-2)$, $f'(1)$, $f'(3)$, $f'(4)$.

31. Wykaż, że najmniejszy kąt, pod jakim może być nachylona do osi OX styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 8$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, jest równy 45°.

32. Dla jakich wartości parametru k $(k \in \mathbf{R})$ funkcja

$$f(x)=\begin{cases} 2kx^2+3, & \text{jeśli } x \le 1 \\ \dfrac{-1}{kx}, & \text{jeśli } x>1 \end{cases}$$

jest:

a) ciągła w zbiorze $\mathbf{R}$

b) różniczkowalna w zbiorze $\mathbf{R}$?

33. Dana jest funkcja $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 12$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

a) Wyznacz miejsca zerowe funkcji f.

b) Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f.

c) Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie A, w którym wykres funkcji f przecina oś OY.

d) Punkt B należy do wykresu funkcji f. Styczna do wykresu w tym punkcie jest równoległa do stycznej w punkcie A. Wyznacz współrzędne punktu B oraz równanie stycznej do wykresu funkcji f w tym punkcie.

34. Maksymalny przedział, w którym funkcja $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 7$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, jest malejąca, to przedział $\langle -5, 3\rangle$.

a) Oblicz współczynniki a, b.

b) Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f.

35. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 9x + 1$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

a) Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f.

b) Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

36. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{10}{x} + 3 + 2{,}5x$, gdzie $x \in \langle -5, 0) \cup (0, 5\rangle$. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

37. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = x^3 + \frac{243}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R} - \{0\}$.

38. Wyznacz asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{4}{x} + 3$, gdzie $x \in (-3, 0) \cup (0, +\infty)$.

39. Mały zakład może produkować dziennie x wieszaków, gdzie $x \in \langle 20, 200\rangle$. Na dzienne koszty działalności zakładu składają się następujące elementy:
4 zł to koszt związany z wyprodukowaniem każdego wieszaka;
$\frac{22\,500}{x}$ to koszty bieżące działalności zakładu, serwis urządzeń produkcyjnych;
600 zł to wynagrodzenie pracowników.

a) Zapisz wzór funkcji $y = K(x)$, gdzie $K(x)$ oznacza dzienny koszt działalności zakładu przy wyprodukowaniu x wieszaków.

b) Oblicz, ile wieszaków dziennie powinien wyprodukować ten zakład, aby jego dzienny koszt działalności był najmniejszy.

40. Kierowca samochodu osobowego z silnikiem benzynowym ma do przejechania autostradą odcinek mający długość 490 km. Rozważa dwa warianty:

1) jazda z prędkością, przy której średnie spalanie jest najniższe,

2) jazda z maksymalną dopuszczalną prędkością (140 km/h).

Wiadomo, że średnie spalanie $f(x)$ w tym samochodzie (w litrach na 100 km) w zależności od średniej prędkości x, opisuje funkcja

$$f(x) = \frac{x^2+23\,450}{4x+530} - 28{,}5 \quad \text{gdzie } x \in \langle 5, 140\rangle,$$

a cena jednego litra benzyny jest równa 5,50 zł. Oblicz:

a) ile czasu zajmie przejazd samochodu w wariacie 1) i w wariacie 2)

b) o ile złotych tańszy będzie przejazd w wariancie 1) (uwzględniamy wyłącznie koszt benzyny).

7. Trygonometria

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej – powtórzenie wiadomości z klasy 2.

7.1. Zamień stopnie na radiany.

a) $175°$ b) $-15°$ c) $420°$ d) $-1028°$

7.2. Zamień radiany na stopnie.

a) $\frac{-2\pi}{9}$ b) $\frac{7\pi}{45}$ c) $\frac{57\pi}{24}$ d) $\frac{-107\pi}{18}$

7.3. Punkt $P(x, y)$ znajduje się na drugim ramieniu kąta skierowanego α. Oblicz brakującą współrzędną punktu P, jeśli:

a) $y=\frac{-2}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 6$ b) $x=-\sqrt{11}, \sin\alpha=\frac{-5}{6}$ c) $x = 5$, $\cos\alpha = 0{,}5$.

7.4. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli:

a) $\sin\alpha=\frac{2}{7}$ i $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ b) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{5}$ i $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

c) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{-1}{3}$ i $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ d) $\operatorname{ctg}\alpha = 4$ i $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$.

7.5. Oblicz wartość danego wyrażenia.

a) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\pi\right)\cdot\sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(-\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

b) $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{-10\pi}{3}\right)-\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$

c) $\cos\left(\frac{-13\pi}{6}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}:\operatorname{ctg}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)+\sin\frac{4\pi}{3}$

d) $\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}-\cos\frac{11\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{-7\pi}{4}\right)$

D 7.6. Wykaż, że dana równość jest tożsamością trygonometryczną. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{2\cos^2\alpha-1}{\cos\alpha\cdot(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)}=\sin\alpha$

b) $1+\frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2-2\operatorname{tg}^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}=\operatorname{ctg}\alpha\cdot(2+\operatorname{ctg}\alpha)$

c) $\frac{\cos\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1-\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

d) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha+\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}}=\operatorname{ctg}\alpha$

D 7.7. Wykaż, że jeśli $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$, to

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\frac{\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\pi)}}{1-\sin\left(\frac{3\pi-2\alpha}{2}\right)}-\frac{1}{\sin(5\pi+\alpha)}=0$$

D 7.8. Wykaż, że jeśli $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, to wartość wyrażenia

$\frac{\left(1+\sqrt{1-\sin^2\alpha}\right)\cdot\sin^2(\pi+\alpha)-\cos(2\pi-\alpha)+1}{\sin\left(\frac{3\pi+2\alpha}{2}\right)+1}$ jest liczbą należącą do przedziału $\langle 1, 2\rangle$.

7.9. Wyznacz okres podstawowy funkcji okresowej f.

a) $f(x)=2\sin\left(-\frac{3x}{2}\right)$ b) $f(x)=\frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(3\pi-\frac{1}{2}x\right)$

c) $f(x)=\cos\left(2-\frac{\pi x}{4}\right)-1$ d) $f(x)=-\sin\frac{2+x+\pi x}{3}$

7.10. Naszkicuj wykres funkcji $y = \sin x$, gdzie $x\in\langle -2\pi, 2\pi\rangle$. Podaj argumenty, dla których ta funkcja przyjmuje w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$ wartość $\frac{1}{2}$.

7.11. Naszkicuj wykres funkcji $y = \cos x$, gdzie $x \in \langle -\pi, 2\pi \rangle$. Podaj argumenty, dla których ta funkcja przyjmuje w przedziale $\langle -\pi, 2\pi \rangle$ wartość $\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

7.12. Naszkicuj wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$, gdzie $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Podaj argumenty, dla których ta funkcja przyjmuje w zbiorze $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ wartość -1.

7.13. Naszkicuj wykres funkcji $y = \operatorname{ctg} x$, gdzie $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$. Podaj argumenty, dla których ta funkcja przyjmuje w zbiorze $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ wartość $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7.14. Zbadaj parzystość danej funkcji.

a) $f(x) = \sin x \cos x \cdot \operatorname{tg}^2 x$

b) $g(x) = 2\sin x - \cos^2 x$

c) $h(x) = \cos 2x \cdot \left(1 + \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)$

d) $k(x) = \frac{x}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x}$

7.15. Wyznacz zbiór wartości funkcji ciągłej, określonej wzorem:

a) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\sin x\right)$

b) $g(x) = \sin\left(\frac{\pi \cos x}{6}\right)$

c) $h(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\sin x\right)$.

7.16. Wyznacz zbiór wartości funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = 5|\cos x| - 3$

b) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + 4$

c) $f(x) = \sin^2 x - \sin x - 12$

d) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x - 2\cos x - 8}$

e) $f(x) = \frac{1 - 4\sin x}{\sin x + 2}$

f) $f(x) = \frac{2}{|\cos x| - 1}$.

Przekształcenia wykresów funkcji trygonometrycznych

7.17. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = -\sin x - 1$

b) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

c) $y = \cos\left(-x - \frac{\pi}{3}\right)$

d) $y = 1 + \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

7.18. Naszkicuj wykres funkcji f:

a) $f(x) = 3 - 2\sin x$

b) $f(x) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $f(x) = -\sin\left(\frac{4x + \pi}{2}\right) + 1$

d) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$.

7.19. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \sin 3x - 4\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

b) $f(x) = \cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

c) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(-x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

d) $f(x) = -3\sin\left(\frac{3x - 2\pi}{6}\right)$

7.20. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right| - 2$

b) $f(x) = |\operatorname{tg}(-x) + 1| - 3$

c) $f(x) = \sin|2x| + 1$

d) $f(x) = \operatorname{tg}\left|\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right|$

7.21. Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \frac{|\cos x|}{\sin x}$

b) $f(x) = \sin x + \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|$

c) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi - x}{2}$

d) $f(x) = \operatorname{tg} 2x \cdot \sqrt{1 - \sin^2 2x}$

Równania trygonometryczne, cz. 1

7.22. Rozwiąż dane równania.

a) $\cos x = 0$

b) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\operatorname{ctg} x = 1$

d) $\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

e) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$

f) $\cos(-x) = 1$

7.23. Rozwiąż dane równania.

a) $2\sin(-x) = -1$

b) $\frac{3\operatorname{ctg}(-x)}{\sqrt{3}} = 1$

c) $\sqrt{2}\operatorname{tg}(-x) = \sqrt{6}$

7.24. Rozwiąż dane równania.

a) $\mathrm{tg}x - 2 = \mathrm{tg}(\pi - x)$

b) $\sin(-x) + 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$

c) $\sin x = \sin(x - \pi) - 1$

d) $2\mathrm{ctg}(2\pi - x) = 1 - \mathrm{ctg}x$

e) $\sin\left(\frac{\pi + 2x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi + 2x}{2}\right) = 0$

f) $\cos(-x - \pi) + 2\sin\left(\frac{-\pi - 2x}{2}\right) = 3$

7.25. Rozwiąż dane równanie graficznie.

a) $\cos x - 1 = \sin x$

b) $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x = 0$

c) $|\sin x| - 2 = \cos x$

d) $|\cos x| = |\sin x|$

e) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1{,}5 = \sin x$

f) $\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{ctg}x = 1.$

7.26. Rozwiąż dane równanie.

a) $|\mathrm{ctg}x - 1| = 0$

b) $\sqrt{2}|\cos x| - 2 = \frac{\sqrt{2} - 4}{2}$

c) $9|\mathrm{tg}\,x| = |6\,\mathrm{tg}\,x| + \sqrt{3}$

d) $(3\mathrm{ctg}\,x - \sqrt{3})(3\mathrm{ctg}\,x + \sqrt{3}) = 0$

e) $4\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 3$

f) $2\sin^2 x - 3 = 0$

7.27. Rozwiąż dane równania.

a) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$

b) $\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

c) $\mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = 1$

d) $\mathrm{ctg}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

e) $2\sin\left(\frac{8x + \pi}{4}\right) + \sqrt{2} = 0$

f) $\cos\left(-\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

7.28. Rozwiąż dane równania.

a) $3 + 4\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = -1$

b) $2\sin[3(x + 2\pi)] + \sqrt{2} = 0$

c) $3\mathrm{ctg}2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}$

d) $1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi - x}{2}\right) = \left[1 + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi - x}{2}\right)\right]^2$

7.29. Rozwiąż dane równania.

a) $\left|2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$

b) $\left|\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{x + 3\pi}{3}\right)\right| = 1$

c) $\sqrt{\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\sqrt{4\cos^2 3x + 4\cos 3x + 1} = 1$

e) $2\cos\left(\left|\frac{x}{3}\right|\right) + 1 = 0$

f) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - |2x|\right) = 1$

7.30. Rozwiąż równanie:

a) $\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$ w zbiorze $\left\langle -\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

b) $\sin x - \sin\frac{7\pi}{6} = 0$ w zbiorze $\langle -\pi, 2\pi\rangle$

c) $3(\sqrt{3} - 1)\mathrm{ctg}\,x = 3 - \sqrt{3}$ w zbiorze $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$

d) $2\sin^2 x - 1 = 0$ w zbiorze $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$

e) $4\cos^2 x + 1 = 4\cos x$, gdzie $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right\rangle$

f) $\sin x \cdot (4\cos^2 x - 3) = 0$, gdzie $x \in \left\langle -2\pi, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

7.31. Rozwiąż równanie:

a) $2\sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos(2\pi - x) = \sqrt{3}$ w zbiorze $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$

b) $[\sin(-x) + 1] \cdot \left[2\cos\left(\frac{3\pi - 2x}{2}\right) - \sqrt{2}\right] = 0$ w zbiorze $\langle -\pi, 2\pi\rangle$

c) $3\mathrm{tg}^2 x + 1 = 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x$ w zbiorze $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

d) $\left|\sin\left(\frac{\pi + 2x}{2}\right)\right| = \sin(\pi - x)$ w zbiorze $\left(-2\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

7.32. Rozwiąż równanie w podanym przedziale.

a) $2\sin 2x - 1 = 0$, $\langle 0, 2\pi\rangle$

b) $\sqrt{3}\cos 3x = -1{,}5$, $\langle -\pi, \pi\rangle$

c) $\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x + 2\pi}{2}\right)\right| = 1$, $\langle 0, 3\pi\rangle$

d) $\mathrm{ctg}\,2x + 1 = 0$, $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$

e) $\left|1+\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right|=\frac{1}{2}$, $\langle -\pi, \pi\rangle$

f) $\mathrm{tg}^2\left(\frac{4x-3\pi}{12}\right)-3=0$, $\langle -2\pi, 3\pi\rangle$

7.33. Rozwiąż dane równanie.

a) $\cos x\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+1=0$

b) $\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sin x+1\right)=0$

c) $\cos x\cdot\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x$

d) $\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\mathrm{ctg}\,x$

e) $\sin(2\pi-x)\cdot\mathrm{tg}\,x=\frac{\cos^2 x-1}{\cos x}$

f) $\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=0$

7.34. Rozwiąż dane równanie.

a) $2\cos^2 2x+3\cos 2x=2$

b) $3\,\mathrm{tg}^2 x-2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x-3=0$

c) $2\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin x=3$

d) $2\sin^2 3x+\cos 3x-2=0$

e) $4\sin^4 x-5\cos^2 x-1=0$

f) $\mathrm{ctg}^4 x-3=2\,\mathrm{ctg}^2 x$

7.35. Rozwiąż dane równania.

a) $\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}\,x=\sqrt{3}\left(\mathrm{tg}\,x+1\right)$

b) $4\sin^3 x-8\sin^2 x-\sin x+2=0$

c) $2(\cos^3 x+1)-\cos^2 x=4\cos x$

d) $\mathrm{tg}^3 x-1=\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{tg}\,x$

e) $2\sin^3 x-3\sin x\cos x=0$

f) $2\sin^5 x-3\sin^3 x+\sin x=0$

7.36. Rozwiąż dane równania.

a) $\frac{\sin x}{x^2-2\pi x}=0$

b) $2\sin x\cdot\cos x-2\sin x+\cos x=1$

c) $2\,\mathrm{tg}\,x\cdot\cos x+\mathrm{tg}\,x=2\cos x+1$

d) $\frac{\cos^2 x-1}{\sin x}+\sin^3 x=0$

e) $\mathrm{ctg}\,x=2\sin x-\frac{1}{\sin x}$

f) $\frac{\cos x}{1-\sin x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=0$

7.37. Rozwiąż dane równanie w podanym obok przedziale.

a) $2\left(\sin x\cdot\mathrm{ctg}\,x+\sqrt{3}\sin x\right)=3+\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x$, $\langle 0, 2\pi\rangle$

b) $\left(\cos^2 x-1\right)\cdot\sin x=0$, $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$

c) $\frac{\sin x}{1-\sin(\pi-x)}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{1+\sin x}=2$, $\langle -\pi, \pi\rangle$

d) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}{\mathrm{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}-\sin^2\frac{8x-\pi}{4}=0$, $(0, 2\pi)$

7.38. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m\in\mathbf{R}$, dla których dane równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie.

a) $\sin x=2m-9$

b) $|\mathrm{tg}\,x+1|=m^2-4$

c) $|\cos x|=-3m^2-4m$

d) $\mathrm{ctg}^2 x+12m=9m^2+4$

7.39. Wykaż, że równanie $\sin^2 x-\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$ ma w przedziale $\left(-\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ pięć rozwiązań.

7.40. Wykaż, że równanie $4\sin(\pi x)=4x^2-4x+5$ ma tylko jedno rozwiązanie.

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy

7.41. Oblicz:

a) $\sin 83^\circ\cos 38^\circ-\cos 83^\circ\sin 38^\circ$

b) $\cos 157^\circ\cos 37^\circ+\sin 157^\circ\cdot\sin 37^\circ$

c) $\sin 241^\circ\cos 29^\circ-\cos 61^\circ\sin 151^\circ$

d) $\cos(-345^\circ)\cdot(-\cos 15^\circ)-\cos 75^\circ\sin 195^\circ$

7.42. Oblicz:

a) $\frac{\cos 168^\circ\cdot\cos 108^\circ+\sin 528^\circ\cdot\cos 18^\circ}{\sin 7^\circ\cdot\cos 157^\circ-\cos 547^\circ\cdot\cos 113^\circ}$

b) $\frac{\cos 33^\circ\cdot\cos(-372^\circ)+\sin 12^\circ\cdot\sin 327^\circ}{\sin 34^\circ\cdot\cos 116^\circ+\sin 56^\circ\cdot\sin 476^\circ}$

7.43. Oblicz:

a) $\cos\frac{25\pi}{12}$

b) $\sin\frac{13\pi}{12}$

c) $\cos\frac{11\pi}{12}$

d) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{12}$

7.44. Wiedząc, że $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ oraz $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ i $\sin\beta=\frac{1}{2}$ oblicz:

a) $\sin(\alpha+\beta)$

b) $\sin(\alpha-\beta)$

c) $\cos(\alpha+\beta)$

d) $\cos(\alpha-\beta)$

7.45. Wiedząc, że $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\beta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ oraz $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ i $\operatorname{tg}\beta = -2{,}4$ oblicz:

a) $\sin(\alpha + \beta)$ b) $\cos(\alpha - \beta)$ c) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ d) $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$

7.46. Kąty trójkąta są równe α, β, γ, a jego boki mają odpowiednio długość a, b, c. Rozwiąż ten trójkąt wiedząc, że:

a) $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $a = 8$ b) $\alpha = 60°$, $b = 10$, $c = 16$

c) $\sin\alpha = 0{,}96$; $\sin\beta = 0{,}28$; $c = 25$ d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a = 8$, $c = 4$.

7.47. Sprawdź, czy dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość:

a) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$

b) $\cos\beta \cdot \sin(\alpha - \beta) + \sin\beta \cdot \cos(\alpha - \beta) = \sin\alpha$.

7.48. Wyznacz kąty ostre α i β wiedząc, że $\sin(\alpha - \beta) = 0{,}5$ oraz $2\cos(\alpha + \beta) = 1$.

D **7.49.** Wykaż, że:

a) jeśli $\cos 9° = a$, to $\sin 51° = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \sqrt{\frac{1-a^2}{4}}$

b) jeśli $\sin 162° = p$, to $\cos 27° = \frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{1-p^2}{2}}$.

D **7.50.** Wykaż, że jeśli α i β są kątami ostrymi oraz $\operatorname{tg}\alpha = 3$ i $\operatorname{tg}\beta = 2$, to $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$.

D **7.51.** Wykaż, że prawdziwe są następujące równości. Podaj konieczne założenia.

a) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}$

b) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$

D **7.52.** Wykaż, że wartość wyrażenia $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos^2\alpha$ nie zależy od miary kąta α.

7.53. Naszkicuj wykres funkcji, określonej wzorem:

a) $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ b) $y = \sqrt{8}\sin x + \sqrt{8}\cos x$

c) $y = \frac{\operatorname{tg}x + 1}{1 - \operatorname{tg}x}$ d) $y = \left|\frac{\operatorname{tg}x - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}x}\right|$

D **7.54.** Wykaż, że jeśli $\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}\beta = 0$, to $\sin(\alpha + \beta) = 3\sin(\alpha - \beta)$.

D **7.55.** Wykaż, że jeśli $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 4$ oraz $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -2$, to $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta = 10$.

D **7.56.** Wykaż, że jeśli $\gamma = \alpha + \beta$, to $\sin^2\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\gamma$.

D **7.57.** Wykaż, że $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\sin^2\frac{\alpha - \beta}{2}$.

D **7.58.** Wykaż, że jeśli $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, to $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$.

Funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta

7.60. Oblicz $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ oraz $\operatorname{ctg} 2\alpha$, jeśli:

a) $\cos\alpha = \frac{1}{5}$ i $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ b) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ i $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

c) $\operatorname{tg}\alpha = -3$ i $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ d) $\operatorname{ctg}\alpha = 2{,}5$ i $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

7.61. Oblicz:

a) $\cos^2 165° - \cos^2 105°$ b) $\operatorname{tg} 15° - \operatorname{ctg} 15°$

c) $\frac{1 + \operatorname{tg} 15°}{1 - \operatorname{ctg} 75°}$ d) $\frac{1}{\sin^2 105°} - \frac{1}{\sin^2 375°}$

e) $\frac{\sin^2 10° - \sin^2 100°}{7\sin 35°\cdot\sin 125°}$ f) $\frac{\operatorname{tg}^2 75° + \operatorname{tg}^2 15°}{\cos^2 60°}$.

7.62. Wiadomo, że $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ oraz $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{6}{5}$. Oblicz:

a) $\sin 2\alpha$ b) $\cos 2\alpha$.

7.63. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, jeśli $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$ i $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

7.64. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^4\frac{\alpha}{2}+\cos^4\frac{\alpha}{2}$ wiedząc, że $5\sin^2\alpha-1=5\cos^2\alpha$.

7.65. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\frac{\alpha}{3}+\cos\frac{\alpha}{3}$ wiedząc, że $\sin\frac{2}{3}\alpha=\frac{-8}{9}$ oraz $\sin^3\frac{\alpha}{3}+\cos^3\frac{\alpha}{3}=\frac{13}{27}$.

7.66. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^3\frac{\alpha}{2}-\cos^3\frac{\alpha}{2}$ wiedząc, że $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1+4\cos\frac{\alpha}{2}}{4}$.

7.67. Wiadomo, że $\sin2\alpha+\cos2\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$ i $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$. Oblicz $\sin^3 2\alpha-\cos^3 2\alpha$.

D **7.68.** Wiadomo, że $\cos36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Wykaż, że:

a) $\cos18^\circ=\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}$

b) $\sin18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

D **7.69.** Wykaż, że jeśli $\alpha\neq k\pi$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$, to $\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. Korzystając z tej równości, oblicz $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

D **7.70.** Wykaż, że jeśli $\alpha\neq 2k\pi$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$, to $\cos\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+1}$. Korzystając z tej równości oblicz $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}$.

7.71. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

b) $f(x)=\left(\sin\frac{x}{4}-\cos\frac{x}{4}\right)^2+2$

c) $f(x)=\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2x-1}$

d) $f(x)=1+4\cos^2\frac{x}{4}\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{2}$.

7.72. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

a) $f(x)=(\sin x+\cos x)^2-\sin2x$

b) $f(x)=8\sin^2x\cos^2x+3$

c) $f(x)=\sin^4x-\cos^4x-1$

d) $f(x)=\cos x+\sin\frac{x}{2}\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)$.

D **7.73.** Wykaż, że prawdziwe są dane równości. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$

b) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\cos2\alpha$

c) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

d) $\frac{2(1+\cos2\alpha)}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\sin2\alpha$

D **7.74.** Wykaż, że jeśli $\alpha\in\mathbb{R}$, to:

a) $1-8\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos2\alpha$

b) $\sin^4 2\alpha-\cos^4 2\alpha+\cos^2 2\alpha=2(1-\cos2\alpha)\cdot\cos^2\alpha$

c) $2(1+\cos\alpha)-\sin^2\alpha=4\cos^4\frac{\alpha}{2}$.

D **7.75.** Wykaż, że jeśli $\alpha\in\mathbb{R}$, to:

a) $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

b) $\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

7.76. Wiadomo, że $\cos3\alpha=\frac{-11}{16}$ oraz $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Oblicz $\cos\alpha$.

Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

7.77. Wykaż, że:

a) $\sin38^\circ+\sin22^\circ=\cos8^\circ$

b) $\cos40^\circ-\cos20^\circ=-\sin10^\circ$

c) $\cos47^\circ+\cos13^\circ=\sqrt{3}\cos17^\circ$

d) $2\cdot(\sin74^\circ-\sin46^\circ)\cdot\cos14^\circ=\sin28^\circ$.

7.78. Oblicz:

a) $\sin42^\circ+\sin78^\circ-\sqrt{3}\sin72^\circ$

b) $\frac{\cos36^\circ-\cos24^\circ+\sin54^\circ}{2\sin12^\circ\cdot\cos12^\circ}$

c) $\frac{\sin1^\circ+\cos89^\circ-\cos29^\circ}{\cos299^\circ}$

d) $\frac{\sin70^\circ-\cos40^\circ-\sin10^\circ}{\cos100^\circ-\cos20^\circ}$.

7.79. Przedstaw dane wyrażenie w postaci iloczynu.

a) $1+\cos(\alpha-\beta)$ b) $1+\sin(\alpha+\beta)$

c) $\sqrt{2}+2\cos\alpha$ d) $1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}$

e) $\sqrt{2}\cos\alpha-\sqrt{2}\sin\alpha$ f) $\cos\alpha+\sin2\alpha-\cos3\alpha$

D **7.80.** Wykaż, że jeśli $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, gdzie $k\in\mathbf{Z}$, to $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}=\operatorname{tg}\alpha$.

D **7.81.** Wykaż, że prawdziwa jest dana równość. Podaj konieczne założenia.

a) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\alpha$ b) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}+\operatorname{ctg}\alpha=0$

D **7.82.** Wykaż, że:

a) $\cos5\alpha-2\cos\alpha\cos7\alpha+\cos9\alpha=0$

b) $\sin\frac{\alpha}{6}+2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{2\alpha}{3}=\sin\frac{5\alpha}{6}$

c) $\cos^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1-\cos7\alpha}{2}=\cos3\alpha\cos4\alpha$.

D **7.83.** Wykaż, że:

a) $\dfrac{\cos10\alpha+\cos6\alpha+2\cos2\alpha}{\cos4\alpha\cdot\sin6\alpha+\cos4\alpha\cdot\sin2\alpha}=2\operatorname{ctg}4\alpha$, gdzie $\alpha\neq\frac{k\pi}{4}$ i $\alpha\neq\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$

b) $\dfrac{\sin3\alpha+\cos\alpha-\cos5\alpha}{\sin5\alpha+\cos3\alpha-\cos7\alpha}=\dfrac{\sin3\alpha}{\sin5\alpha}$, gdzie $\alpha\neq\frac{k\pi}{5}$, $k\in\mathbf{Z}$

c) $\dfrac{\cos3\alpha+\cos2\alpha+\cos\alpha+1}{2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1}=2\cos\alpha$, gdzie $\alpha\neq\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}-\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$, gdzie $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

7.84. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

a) $f(x)=\frac{\sin x}{3}+\frac{\cos x}{3}$ b) $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin2x+5$

c) $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$ d) $f(x)=-2\sin^2\frac{x-\pi}{2}+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$

D **7.85.** Wykaż, że jeśli α, β, γ są miarami kątów trójkąta, to:

a) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

b) $\sin\gamma\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)=\sin\alpha\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)$.

D **7.86.** Wykaż, że jeśli $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$,

to $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=1+4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)$.

D **7.87.** Wykaż, że liczba $\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{tg}15^\circ-\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ+\operatorname{ctg}15^\circ-\operatorname{ctg}27^\circ$ jest potęgą liczby 2.

Równania trygonometryczne, cz. 2

7.88. Rozwiąż dane równanie.

a) $2\cos^2\frac{x}{2}+1=2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$ b) $\sin2x=\sin x$

c) $\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos x-\sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin x$

e) $\sin^4 3x+\cos^4 3x=\frac{1}{2}$ f) $\sin x\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$

7.89. Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=1$ b) $\sin x+\sin3x=\sin2x$

c) $\sin^4x=1+\cos^4x$ d) $\sin^2x-\cos2x=2$

e) $\frac{\sin2x}{2}+\sin^2x=\cos x+\sin x$ f) $\sin x\cdot\sin2x=\cos x\cdot\cos2x$

7.90. Rozwiąż dane równanie.

a) $2\cos x+3=4\cos\frac{x}{2}$ b) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ c) $\cos x+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

d) $\sin x+\sin3x+\sin5x=0$ e) $\cos x\cdot\sin7x=\cos3x\cdot\sin5x$ f) $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\frac{5}{8}$

7.91. Rozwiąż dane równanie.

a) $1+\cos x+\cos\frac{x}{2}=0$

b) $\sin^2 2x + 4\cos 2x = 4$

c) $\sin x-\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$

e) $\cos x = \sin 2x + \cos 3x$

f) $\cos 4x \cos 2x - \sin 3x \sin 5x = 0$

7.92. Rozwiąż równanie:

a) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-2=0$

b) $\sin x \cdot \cos 3x = \operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x$

c) $\cos 2x + \sin 4x \operatorname{ctg} 2x = 0$

d) $\dfrac{\cos\frac{3x}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+\dfrac{\sin\frac{3x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=2.$

7.93. Rozwiąż równanie w danym przedziale.

a) $\cos 2x + 5\sin x - 3 = 0$, $\langle -2\pi, \pi\rangle$

b) $\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2}$, $\langle 0, 2\pi\rangle$

c) $(\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x$, $\langle -\pi, 2\pi\rangle$

d) $\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$

7.94. Rozwiąż równanie w danym przedziale.

a) $\sin 2x + \cos x = 0$, $\left\langle \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

b) $4\sin\frac{x}{2}+\cos x=3$, $\langle -4\pi, 4\pi\rangle$

c) $\cos^4 x - \sin^4 x = \sin 4x$, $\langle 0, 2\pi\rangle$

d) $\sin 3x \sin 6x = \sin 8x \sin 5x$, $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$

7.95. Rozwiąż dane równanie.

a) $\sin 2x+\frac{\sin 2x}{3}+\frac{\sin 2x}{9}+\ldots=3\cos x$

b) $\operatorname{tg} 2x+\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x+\frac{1}{4}\operatorname{tg} 2x+\ldots=\operatorname{tg} x$

c) $\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{16}+\frac{\cos 2x}{64}-\ldots=0{,}2\sin 2x$

7.96. Rozwiąż dane równanie w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.

a) $\frac{|\sin x|}{2}+\sin x\cos x=0$

b) $3\sin\frac{x}{2}-|\cos x|=1$

c) $\cos 2x + 2 = 3|\cos x|$

d) $|\operatorname{tg} x| - \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$

7.97. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}$, dla których dane równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie.

a) $\cos\left(\frac{2\pi+x}{4}\right)-\sqrt{8k^2}=\cos\frac{1}{4}x+k\sqrt{2}$

b) $2\sin 4x\cos 3x=\frac{2k-1}{k+3}+\sin 7x$

c) $\sin^4 2x + \cos^4 2x = |3k + 5|$

d) $4\sin^2\frac{x}{2}-k^2=4\sin\frac{x}{2}-7$

Nierówności trygonometryczne

7.98. Rozwiąż nierówność:

a) $\sin x\leqslant\frac{1}{2}$ gdzie $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$

b) $\cos x>-\frac{1}{2}$, gdzie $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$

c) $\operatorname{tg} x \geqslant -1$, gdzie $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

d) $\operatorname{ctg} x>\sqrt{3}$, gdzie $x \in (-\pi, \pi)$

7.99. Rozwiąż nierówność w podanym przedziale.

a) $|\sin x| < 1$, $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$

b) $|\cos x| \leqslant 0$, $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$

c) $|\operatorname{tg} x|<\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

d) $|\operatorname{ctg} x| \geqslant 1$, $\left(-\pi,\frac{\pi}{2}\right)$

7.100. Rozwiąż daną nierówność w zbiorze liczb rzeczywistych.

a) $2\sin x\geqslant\sqrt{2}$

b) $2\cos x+\sqrt{3}<0$

c) $\operatorname{tg} x < -1$

d) $3\operatorname{ctg} x\geqslant\sqrt{3}$

7.101. Rozwiąż daną nierówność w zbiorze liczb rzeczywistych.

a) $1 - 2\cos^2 x \leqslant 0$

b) $\operatorname{tg}^2 x\geqslant\frac{1}{3}$

c) $4\sin^2 x - 3 \leqslant 0$

d) $0 < 1 - \operatorname{ctg}^2 x$

7.102. Rozwiąż daną nierówność.

a) $\cos 3x>\frac{1}{2}$

b) $2\sin 2x>\sqrt{2}$

c) $\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\leqslant 0$

d) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 1$

e) $\sin\left(\frac{2x-\pi}{4}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\cos\left(\frac{-x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\geqslant 0$

7.103. Rozwiąż nierówność:

a) $2\sin(\pi+2x)<\sqrt{2}$ w przedziale $\left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)+1<0$ w przedziale $\left(\frac{-\pi}{2}, \pi\right)$

c) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0{,}5$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$

d) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\geqslant\frac{-\sqrt{3}}{2}$ w przedziale $\langle -\pi, 2\pi\rangle$

e) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)\geqslant\sqrt{3}$ w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

f) $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}x\right)+1\geqslant 0$ w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$.

7.104. Rozwiąż daną nierówność.

a) $\operatorname{ctg}(2\pi x) < 1$ b) $\operatorname{tg}\pi<\sqrt{3}$ c) $2\sin\frac{\pi x}{3}\geqslant\sqrt{3}$

7.105. Rozwiąż nierówność:

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\geqslant 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$

b) $\left(2\sin 2x+\sqrt{2}\right)\cdot\operatorname{tg}x<0$ w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

c) $\frac{2\cos x-1}{\sin^2(\pi+x)}\geqslant 0$ w zbiorze $\boldsymbol{R}$

d) $\frac{1+2\sin x}{4\cos^2 x-3}\leqslant 0$ w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

7.106. Rozwiąż daną nierówność w zbiorze liczb rzeczywistych.

a) $\sin x - 2\sin^2 x \geqslant 0$ b) $2\cos^2 x + \cos x < 1$

c) $4\cos^2 x + 2\sin^2 x < 5\cos x$ d) $4(\sin^2 x - \cos x) \geqslant 1$

e) $\operatorname{tg}x\cdot\left(\operatorname{tg}x-2\sqrt{3}\right)>-3$ f) $\left(\operatorname{ctg}x+\sqrt{3}\right)\cdot\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}x\leqslant\sqrt{3}$

7.107. Rozwiąż nierówność w danym przedziale.

a) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}>\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$, $\langle 0, 2\pi\rangle$

b) $\cos x\cdot(4\cos x-3)\leqslant 3-4\cos^3 x$, $\left\langle -\pi, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

c) $\cos 2x + \cos 4x < 0$, $\langle 0, \pi\rangle$

d) $\sin 2x + |\cos x| \leqslant 0$, $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

e) $\frac{4\sin^2 x-4|\sin x|+1}{1-2\cos^2 x}\leqslant 0$, $\langle 0, 2\pi\rangle$

f) $2|\sin^4 x - \cos^4 x| - 1 > 0$, $\langle -\pi, \pi\rangle$

7.108. Rozwiąż nierówność:

a) $\cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x + \cos^5 x + \ldots \geqslant 1 + \cos x$

b) $2\operatorname{tg}x+2\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg}^3 x+\ldots\geqslant\sqrt{3}+1$

c) $3\sin 2x + 3\sin^3 2x + 3\sin^5 2x + \ldots > 2$.

D 7.109. Wykaż, że jeśli $\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, to $1-(\cos\alpha-\sin\alpha)^2 > 0$.

D 7.110. Wykaż, że jeśli $x\in\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$, to $4\sin\left(\frac{\pi}{12}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}-x\right)+\sqrt{3}<0$.

Pochodne funkcji trygonometrycznych

7.111. Oblicz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = 3\sin x + 5\cos x$, $x \in \boldsymbol{R}$ b) $f(x) = x\cdot\sin x$, $x \in \boldsymbol{R}$

c) $f(x) = x^2\cdot\cos x$, $x \in \boldsymbol{R}$ d) $f(x) = \sin x\cdot\cos x$, $x \in \boldsymbol{R}$

7.112. Oblicz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = \operatorname{tg}x\cdot\sin x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ b) $f(x)=\frac{\cos x-2x}{\sin x}$, $x \in (0, \pi)$

c) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{\operatorname{ctg}x}{2}$, $x \in (0, \pi)$ d) $f(x)=\frac{2x+\operatorname{tg}x}{x}$, $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

7.113. Oblicz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = \sin^2 x - \cos x$
b) $f(x) = 4\cos 5x - 2x^3$
c) $f(x) = \cos^2 3x + 4$
d) $f(x) = \sin^3\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$

7.114. Oblicz pochodną funkcji f.

a) $f(x) = \operatorname{tg} 3x^2$
b) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{2}{x}\right)$
c) $f(x) = \operatorname{ctg} 2x \cdot \sin^2 x$
d) $f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \operatorname{tg} x}$

D **7.115.** Wykaż, że:

a) pochodna funkcji $g(x) = \cos 3x - x^2$ jest funkcją nieparzystą
b) pochodna funkcji $h(x) = \sin 2x - x \cdot \cos x$ jest funkcją parzystą.

7.116. Dana jest funkcja $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, $x \in \mathbf{R}$.

Rozwiąż równanie $2f'(x) \cdot f(x) = \sqrt{3}$.

7.117. Dane są funkcje $f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{16}$ oraz $g(x) = \cos x$.

Rozwiąż równanie $f'(x) + g'(x) = 0$.

7.118. Wyznacz miejsce zerowe pochodnej funkcji $h(x) = 4\sin\frac{x}{4} + 2\sin\frac{x}{2} + x$.

7.119. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji:

a) $f(x) = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ w punkcie o odciętej $\frac{\pi}{3}$

b) $g(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + 1$ w punkcie o odciętej $\frac{\pi}{4}$

c) $h(x) = \operatorname{ctg} x + 2x$ w punkcie o odciętej $\frac{\pi}{6}$.

7.120. Funkcja f określona jest w przedziale $(0, 2\pi)$. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = \sin x - \cos x$
b) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 4x - x$.

7.121. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f.

a) $f(x) = x - 2\sin x$, $x \in (0, 2\pi)$
b) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \cos x}$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

7.122. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

a) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, gdzie $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

b) $f(x) = \frac{1}{8}\operatorname{ctg} x + \cos x$, gdzie $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

Test sprawdzający do rozdziału 7.

1. Iloczyn $\sin\frac{\pi}{12} \cdot \sin\frac{7\pi}{12}$ jest równy:

A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{4}$

2. Suma $\sin 70° \cdot \sin 100° - \cos 290° \cdot \cos 280°$ jest równa:

A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Różnica $\cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{3\pi}{8}$ jest równa:

A. $-2\sin\frac{\pi}{8}$ B. $2\sin\frac{\pi}{8}$ C. $\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}$ D. $-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}$

Aby otrzymać wykres funkcji $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12}\right)$, $x \in \mathbf{R}$, należy przesunąć równolegle wykres funkcji $y = \sin\frac{1}{2}x$ o wektor:

A. $\left[\frac{\pi}{12}, 0\right]$ B. $\left[\frac{-\pi}{12}, 0\right]$ C. $\left[-\frac{\pi}{6}, 0\right]$ D. $\left[\frac{\pi}{6}, 0\right]$

5. Zbiorem wartości funkcji $f(x)=4-5\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$, gdzie $x\in\mathbf{R}$, jest przedział:

A. $\left\langle 2\frac{3}{4},3\right\rangle$ B. $\left\langle 1\frac{1}{2},6\frac{1}{2}\right\rangle$ C. $\left\langle \frac{1}{4},1\right\rangle$ D. $\left\langle -\frac{1}{4},2\frac{3}{4}\right\rangle$

6. Funkcja $f(x)=\sin 5x+\sin x$, określona w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$ ma:

A. 3 miejsca zerowe B. 4 miejsca zerowe

C. 5 miejsc zerowych D. 6 miejsc zerowych

7. Suma wszystkich rozwiązań równania $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\frac{1}{2}$ należących do przedziału $\left\langle -\frac{\pi}{6},2\pi\right\rangle$ jest równa:

A. $\frac{17\pi}{6}$ B. π C. 2π D. $\frac{5\pi}{3}$

8. Zbiorem rozwiązań nierówności $3\operatorname{tg}x-\sqrt{3}>0$ jest suma przedziałów postaci:

A. $\left(\frac{\pi}{6}+k\pi,\pi+k\pi\right)$, $k\in\mathbf{Z}$ B. $\left(\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in\mathbf{Z}$

C. $\left(\frac{7\pi}{6}+k\pi,\frac{3\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in\mathbf{Z}$ D. $\left(\frac{-\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right)$, $k\in\mathbf{Z}$

9. Równanie $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2$ ma taki sam zbiór rozwiązań, jak równanie:

A. $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

C. $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$ D. $2\cos^2 x+3=4\sqrt{3}\cos x$

10. Kąty trójkąta ostrokątnego są równe α, β, γ. Jeśli $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ oraz $\sin\beta=\frac{5}{13}$, to

A. $\sin\gamma=\frac{56}{65}$ B. $\sin\gamma=\frac{64}{65}$ C. $\sin\gamma=\frac{15}{65}$ D. $\sin\gamma=\frac{16}{65}$.

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 7.

11. Oblicz:

a) $\frac{\cos^2 105^\circ+\cos^2 15^\circ}{2\sin 765^\circ}$ b) $\frac{\sin 22{,}5^\circ\cdot\cos 22{,}5^\circ}{\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ}$

c) $\frac{\cos 12^\circ\cdot\sin 12^\circ\cdot\cos 24^\circ}{0{,}5\cdot(\cos 18^\circ-\cos 78^\circ)}$ d) $\left(\operatorname{tg}15^\circ-\frac{1}{\operatorname{tg}15^\circ}\right)\cdot\left(\operatorname{tg}15^\circ+\frac{1}{\operatorname{tg}15^\circ}\right)$

D 12. Wykaż, że:

a) $\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=4$ b) $\frac{\sin 20^\circ}{\sqrt{3}\cos 20^\circ-2\sin 40^\circ}=1$

13. Wiadomo, że $\alpha,\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ oraz $\operatorname{tg}\alpha=0{,}75$ i $\operatorname{ctg}\beta=1$. Oblicz $\sin(\alpha-\beta)$.

14. Wiadomo, że $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$. Oblicz $\cos 2\alpha$, jeśli:

a) $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{3-\sqrt{7}}{4}$ b) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\frac{5}{8}$

D 15. Wykaż, że jeśli $\alpha\neq(2k+1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, to $\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\cos\alpha$. Wiedząc, że $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=3$ oblicz $\cos\alpha$.

D 16. Wykaż, że jeśli kąty α, β są ostre oraz $\cos\alpha=\frac{1}{7}$ i $\cos\beta=\frac{13}{14}$, to $\alpha-\beta=60^\circ$.

17. Kąty α i β są kątami wewnętrznymi pewnego trójkąta oraz $\cos\alpha=\frac{1}{3}$ i $\cos\beta=\frac{2}{3}$. Sprawdź, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny, nie wyznaczając miar kątów tego trójkąta.

D 18. Kąty trójkąta są równe α, β, γ. Wykaż, że jeśli $2\beta=\alpha+\gamma$, to $2\cos\gamma=\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$.

D 19. Wykaż, że dana równość jest tożsamością trygonometryczną. Podaj konieczne założenia.

a) $\cos\alpha + \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = 1$

b) $\dfrac{1+\sin\alpha - \cos\alpha}{2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \cos\left(\dfrac{2\alpha-\pi}{4}\right)$

20. Dany jest wzór funkcji f. Naszkicuj wykres tej funkcji.

a) $f(x)=\sqrt{2}(\sin x - \cos x)$

b) $f(x)=\sqrt{3}\cos x - \sin x$

c) $f(x)=6\cdot\left|\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\right|+1$

d) $f(x) = \sin^2 x + \cos x \cdot |\cos x|$

21. Wyznacz zbiór wartości funkcji:

a) $f(x)=\cos x + \cos\frac{x}{2}$

b) $f(x)=3\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

22. Rozwiąż dane równanie.

a) $3\operatorname{tg}^2 x - \dfrac{1}{\cos^2 x} = 5$

b) $\cos 2x - 3\cos x - 4 = 0$

c) $(1-\cos x)\cdot\cos\frac{x}{2} = \cos x\cdot\sin\frac{x}{2}$

d) $\sin 3x + \cos 2x = \cos 8x$

23. Rozwiąż daną nierówność.

a) $\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{2}$

b) $\sin x + \cos^2 x \leqslant 0{,}25$

c) $4|\sin x\cos x|-\sqrt{2}>0$

d) $\dfrac{\operatorname{tg}x}{\cos x}<2\sin x$

24. Rozwiąż dane równanie w podanym przedziale.

a) $\cos 2x + 5\sin x + 2 = 0$, $(-2\pi, 2\pi)$

b) $2\sin x + 2\cos x = \sqrt{2}$, $\langle 0, 4\pi\rangle$

c) $2\sin^2\frac{3x}{2}+\sin 3x = 0$, $(0, 2\pi)$

d) $\sin x - \sqrt{2}\sin 2x + \sin 3x = 0$, $(-\pi, 2\pi)$

25. Rozwiąż daną nierówność w podanym przedziale.

a) $5\sin x + 4 > \cos 2x$, $(0, 2\pi)$

b) $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 3 \leqslant 0$ $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

c) $\sqrt{3}\sin x + \cos x > \sqrt{2}$, $(0, \pi)$

d) $\dfrac{|\sin x|}{\cos x} - 1 \geqslant 0$, $(-\pi, \pi)$

D 26. Wykaż, że jeśli $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, to $|\sin\alpha - \cos\alpha| \geqslant 1$.

D 27. Wykaż, że równanie $\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$ ma w przedziale $(0, 2\pi)$ tylko cztery rozwiązania.

D 28. Wykaż, że suma wszystkich rozwiązań równania $2\cos x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=1$ należących do przedziału $(-\pi, 2\pi)$ jest równa 2π.

29. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, gdzie $k \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $(\sin x - \cos x)(\sin x + 0{,}5k) = 0$ ma w przedziale $\left\langle 0, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$ cztery różne rozwiązania.

30. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \boldsymbol{R}$, dla których dane równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie.

a) $\cos x + \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 4 + p$

b) $|\sin x| + |\cos x| = p - 1$

8. Geometria analityczna

Wektor w układzie współrzędnych. Podział odcinka

8.1. Dane są punkty: $A(-3, 2)$, $B(4, -1)$, $C(5, 3)$. Oblicz współrzędne punktu D, jeśli:

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ c) $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{DC}$

8.2. Dany jest punkt A oraz wektor $\overrightarrow{AB}$. Oblicz współrzędne punktu B.

a) $A(0, -3)$, $\overrightarrow{AB} = [2, -1]$ b) $A(-4, 0)$, $\overrightarrow{AB} = [3, 5]$

c) $A\left(7\frac{1}{2}, -6\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left[-4, 7\frac{3}{4}\right]$ d) $A(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AB} = [\sqrt{3}+3, 1-2\sqrt{3}]$

8.3. Dany jest punkt B oraz wektor $\overrightarrow{AB}$. Oblicz współrzędne punktu A.

a) $B(0, -8)$, $\overrightarrow{AB} = [-3, -2]$ b) $B\left(2\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left[1\frac{1}{6}, -\sqrt{2}\right]$

8.4. Sprawdź, korzystając z równoległości wektorów, czy odcinki AB i CD są równoległe, jeśli:

a) $A(-4, -1)$, $B(3, 6)$, $C(1, -3)$, $D(2, -2)$

b) $A(0, 2)$, $B(4, 0)$, $C(0, 4)$, $D(0, 6)$

8.5. Wyznacz liczbę m, dla której wektory $\vec{u} = [m^2 - 1, -m]$ oraz $\vec{v} = [-1, m]$ są:

a) równe b) przeciwne c) równoległe.

8.6. Dane są wektory: $\vec{u} = [2, -4]$, $\vec{v} = [-3, 4]$, $\vec{z} = [10, -2]$. Oblicz współrzędne i długość wektora:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{z} - \vec{u}$ c) $3\vec{v}$ d) $\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{z}$

8.7. Dane są punkty $A(-3, 7)$, $B(5, 3)$. Odcinek AB podzielono na cztery odcinki równej długości. Oblicz współrzędne punktów podziału.

8.8. Punkt P jest środkiem odcinka AB. Wyznacz punkt B, jeśli:

a) $A(-3, 0)$, $P(-1, 2)$ b) $A(30, -20)$, $P(-6, -14)$

8.9. Dane są punkty $A(-10, 7)$, $B(2, -11)$. Odcinek AB podzielono na

a) trzy odcinki równej długości b) pięć odcinków równej długości.

Oblicz współrzędne punktów podziału.

8.10. Dane są punkty: $A(3, 5)$, $B(9, -7)$. Wyznacz współrzędne punktu P, należącego do odcinka AB wiedząc, że

a) $|AP| : |PB| = 5 : 1$ b) $|AP| : |PB| = 2 : 3$

8.11. Dane są wierzchołki trójkąta ABC: $A(-4, -5)$, $B(1, -2)$, $C(-2, 3)$. Punkty D i E są środkami boków AC i BC. Oblicz współrzędne punktu M, będącego środkiem odcinka DE.

8.12. Punkt $S(1, 2)$ jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$. Wiedząc, że $A(-5, 3)$, $B(-2, -4)$, oblicz współrzędne punktów C i D.

8.13. Punkty $A(-4, 3)$, $B(-2, -3)$, $C(6, 1)$ oraz P są wierzchołkami równoległoboku. Oblicz współrzędne punktu P. Rozważ wszystkie przypadki.

8.14. Dane są punkty: $A(-3, -2)$, $B(9, 2)$, $C(-3, 8)$. Oblicz:

a) długości środkowych AD, BE i CF trójkąta ABC

b) współrzędne środka ciężkości tego trójkąta

c) obwód trójkąta DEF.

8.15. Punkty $D(4, -2)$, $E(6, 1)$, $F(0,3)$ są środkami boków odpowiednio AB, BC i AC trójkąta ABC. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

8.16. W trójkącie ABC dane są: punkt $B(4, -4)$ oraz środek ciężkości $S(2, 1)$. Wiedząc, że punkt M jest środkiem boku AB i $\overrightarrow{MB} = [3, -2]$, oblicz współrzędne wierzchołków A, C.

8.17. W trójkącie ABC punkt $D(-3, 1)$ dzieli bok AB w stosunku $1 : 2$, licząc od wierzchołka A. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków AC i DC oraz $\overrightarrow{MN} = [2, -1]$. Wiedząc, że $\overrightarrow{BC} = [-2, 10]$, oblicz współrzędne wierzchołków trójkąta ABC.

Kąt między niezerowymi wektorami

8.18. Oblicz sinus kąta α utworzonego przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jeśli:

a) $\vec{u} = [\sqrt{3}, \sqrt{6}]$, $\vec{v} = [2, 0]$ b) $\vec{u} = [-3, 4]$, $\vec{v} = [0, 5]$

c) $\vec{u} = [7, -1]$, $\vec{v} = [-2, 2]$ d) $\vec{u} = [12, -5]$, $\vec{v} = [6, 8]$

8.19. Oblicz cosinus kąta α utworzonego przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jeśli:

a) $\vec{u} = [2\sqrt{2}, 1]$, $\vec{v} = [0, -5]$ b) $\vec{u} = [-\sqrt{5}, 2]$, $\vec{v} = [\sqrt{5}, 0]$

c) $\vec{u} = [-4, 8]$, $\vec{v} = [1, 2]$ d) $\vec{u} = [\sqrt{6}, 3\sqrt{2}]$, $\vec{v} = [2\sqrt{2}, 4]$

8.20. Wyznacz miarę kąta α utworzonego przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jeśli:

a) $\vec{u} = [1, 2]$, $\vec{v} = [4, -2]$ b) $\vec{u} = [-3, 3]$, $\vec{v} = [2, 0]$

c) $\vec{u} = [-\sqrt{3}, 1]$, $\vec{v} = [1, 0]$ d) $\vec{u} = [-\sqrt{3}, -1]$, $\vec{v} = [2\sqrt{3}, -2]$

8.21. Oblicz długości boków oraz miary kątów trójkąta ABC, jeśli:

a) $A(-7, 1)$, $B(1, -1)$, $C(-2, 4)$

b) $A(-4, -2\sqrt{3})$, $B(2, -2\sqrt{3})$, $C(-4, 4\sqrt{3})$

c) $A(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $B(3, \sqrt{3})$, $C(3 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$

d) $A(0, 3)$, $B(3\sqrt{3}, 6)$, $C(-3\sqrt{3}, 6)$

Wykaż, że dane wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są prostopadłe.

a) $\vec{u} = [12, 9]$, $\vec{v} = [-3, 4]$ b) $\vec{u} = \left[-1, -\frac{1}{10}\right]$, $\vec{v} = \left[-\frac{1}{2}, 5\right]$

Wykaż, że przekątne czworokąta $ABCD$ są prostopadłe, jeśli:

a) $A(-4, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(-4, 5)$, $D(-6, 3)$

b) $A(-8, 0)$, $B(-1, 1)$, $C(0, 11)$, $D(-12, 9)$

Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których dane wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe.

a) $\vec{u} = [a, -2]$, $\vec{v} = [-4 - a, a]$ b) $\vec{u} = [a - 2, 3]$, $\vec{v} = [a - 2, a^2 + 2a + 4]$

Dane są wektory $\vec{u} = [1, 2]$, $\vec{v} = [3, -6]$, $\vec{p} = \left[a, -\frac{1}{2}\right]$. Wyznacz wartość parametru a, jeśli wiadomo, że wektory $\vec{r} = (a + 1) \cdot \vec{u} + \vec{v}$ i $\vec{p}$, są prostopadłe.

D **8.26.** Dane są wektory $\vec{u} = [3, -1]$, $\vec{v} = [-2, 5]$, $\vec{p} = [1, -2]$. Wykaż, że jeśli wektory $\vec{p}$ i $\vec{r} = a \cdot \vec{u} - b \cdot \vec{v}$, są prostopadłe, to $12b + 5a = 0$.

8.27. Dane są punkty $A(-2, -2)$, $B(4, 2)$. Wyznacz na osi OY punkt P tak, aby $|\sphericalangle APB| = 90°$.

8.28. Dane są punkty $A(0, -2)$, $B(6, 0)$. Wyznacz na prostej k: $x - 2y = 0$ punkt P tak, aby kąt APB był prosty.

8.29. Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Wiedząc, że $\overrightarrow{AB} = [8, 4]$, $\overrightarrow{DB} = [6, -2]$, oblicz:

a) obwód równoległoboku b) miarę kąta ostrego równoległoboku.

8.30. Oblicz cosinus kąta ostrego równoległoboku $ABCD$, jeśli:

a) $\overrightarrow{AB} = [6, 3]$, $\overrightarrow{DB} = [9, 0]$ b) $\overrightarrow{BC} = [2, 5]$, $\overrightarrow{CA} = [-11, 8]$

Proste w układzie współrzędnych

8.31. Dane jest równanie kierunkowe prostej k i punkt P. Wyznacz równanie kierunkowe prostej równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt P.

a) k: $y = -2x + 3$, $P(-4, 1)$ b) k: $y = \frac{x+5}{3}$, $P(9, -5)$

8.32. Dane jest równanie ogólne prostej k i punkt P. Wyznacz równanie ogólne prostej równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt P.

a) k: $3x - 4y + 5 = 0$, $P(2, -9)$ b) k: $-2x + y + 7 = 0$, $P(-6, 5)$

8.33. Wyznacz równanie kierunkowe prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt P, jeśli:

a) k: $y = \frac{x-1}{2}$, $P\left(2\frac{1}{2}, -1\right)$ b) k: $y = 7x - 3$, $P(-14, -3)$

8.34. Wyznacz równanie ogólne prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt P, jeśli:

a) k: $3x - y + 5 = 0$, $P(-2, 1)$ b) k: $-5x + 2y - 4 = 0$, $P(12, -8)$

8.35. Wyznacz miarę kąta nachylenia prostej k do osi OX, jeśli:

a) $k: \sqrt{3}x - y + 1 = 0$
b) $\sqrt{12}x + 6y - 5 = 0$
c) $k: x + \sqrt{2} - 2 = 0$
d) $2y - \sqrt{3} + 1 = 0$

8.36. Dane są punkty A, B. Wyznacz tangens kąta α nachylenia prostej k do osi OX wiedząc, że punkty A, B należą do prostej k.

a) $A(3, -8)$, $B(-4, 6)$
b) $A(\sqrt{2}, 1)$, $B(-\sqrt{8}, -5)$

8.37. Wyznacz równanie kierunkowe prostej, przechodzącej przez punkty A, B, jeśli:

a) $A(-5, 12)$, $B(4, -3)$
b) $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $B\left(\frac{1}{3}, 3\right)$

8.38. Wyznacz równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkty A i B, jeśli:

a) $A(-4, 7)$, $B(-1, -2)$
b) $A(\sqrt{2}+2, -1)$, $B(\sqrt{2}-2, 3)$
c) $A(-4, 1+\sqrt{5})$, $B(10, \sqrt{5}+1)$
d) $A(-1, \sqrt{3})$, $B(-1, -\sqrt{6})$

8.39. Punkty $A(-6, 5)$, $B(-1, -3)$, $C(2, 1)$, $D(4, 7)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$. Oblicz współrzędne punktu przecięcia się przekątnych AC i BD.

8.40. Dane są punkty $A(-3, -4)$, $B(5, 2)$, $C(-1, 6)$.

a) Wyznacz równania prostych, zawierających środkowe trójkąta ABC.
b) Oblicz współrzędne punktu przecięcia się środkowych w tym trójkącie.

8.41. Dane są punkty $A(-2, -5)$, $B(7, 1)$, $C(-2, 3)$.

a) Wyznacz równania symetralnych dwóch dowolnych boków trójkąta ABC.
b) Oblicz współrzędne punktu przecięcia się symetralnych boków trójkąta ABC.

8.42. Punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta. Odcinek CD jest wysokością tego trójkąta. Oblicz współrzędne punktu D, jeśli:

a) $A(-2, -5)$, $B(7, -2)$, $C(-1, 2)$
b) $A(-4, 1)$, $B(2, -1)$, $C(8, 2)$.

8.43. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia się wysokości w trójkącie ABC, jeśli $A(-3, 0)$, $B(9, -6)$, $C(5, 6)$.

8.44. Wyznacz równanie prostej l przechodzącej przez punkt A, która tworzy z osią odciętych kąt o mierze dwa razy większej od kąta, jaki tworzy z tą osią prosta k, jeśli:

a) k: $y = 3x + 1$, $A(16, -1)$
b) k: $y = 0{,}5x + 3$, $A(6, -8)$

8.45. Dane są równania prostych k i l. Wyznacz miarę kąta ostrego, jaki tworzą proste k i l.

a) k: $y = 5x + 4$, l: $y = -1{,}5x - 2$
b) $k: y = -5$, $l: y = \sqrt{3}x + 2$
c) $k: x + 3 = 0$, $l: \sqrt{3}x + y + 1 = 0$
d) k: $x - 4y + 2 = 0$, l: $3x + 5y - 6 = 0$

Odległość punktu od prostej. Odległość między dwiema prostymi równoległymi

8.46. Oblicz odległość punktu $P(-2, 3)$ od prostej k, jeśli:

a) k: $x - 7 = 0$
b) k: $y + 1 = 0$
c) k: $7x - y + 17 = 0$
d) k: $3x + 4y + 5 = 0$

8.47. Dana jest prosta k: $4x - 3y + C = 0$ oraz punkt $P(-1, 1)$. Wyznacz liczbę C, dla której odległość punktu P od prostej k jest równa:

a) 1
b) 15
c) 0
d) $\sqrt{7}$

8.48. Dana jest prosta k: $8x - 15y + 7 = 0$. Wyznacz liczbę a, dla której odległość punktu $P(a, 3)$ od prostej k jest równa:

a) 2
b) 0
c) 13
d) 10

8.49. Dana jest prosta k: $-2x + y + 3 = 0$. Wyznacz liczbę a, dla której punkt P leży w odległości $2\sqrt{5}$ od prostej k, jeśli:

a) $P(1, a)$
b) $P(3a, 4)$
c) $P(a, 2a)$
d) $P(a + 2, a - 1)$

8.50. Oblicz odległość między prostymi równoległymi k i l, jeśli:

a) k: $x + y + 2 = 0$ l: $x + y - 4 = 0$
b) k: $x + 6 = 0$ l: $5x - 10 = 0$
c) k: $2x - y + 3 = 0$ l: $-3x + 1{,}5y - 2 = 0$
d) k: $5y + 7 = 0$ l: $3y - 20 = 0$

8.51. Wykaż, że prosta k: $2x - y - 1 = 0$ jest równo oddalona od prostych m: $2x - y + 9 = 0$ oraz n: $2x - y - 11 = 0$.

8.52. Wyznacz równanie prostej l, równoległej do prostej k: $8x - 15y + 21 = 0$ i leżącej w odległości 4 od prostej k.

8.53. Dany jest trapez $ABCD$, gdzie $A(3, -2)$, $B(3, 3)$, $C(0, 4)$, $D(-15, 4)$.

a) Które boki trapezu są równoległe? Odpowiedź uzasadnij.
b) Oblicz wysokość tego trapezu.

8.54. Wyznacz równanie prostej l, równoległej do prostej k: $6x - 8x + 1 = 0$ i leżącej w odległości 3 od punktu $P(-7, -2)$.

8.55. Dany jest trójkąt ABC, gdzie $A(-2, 3)$, $B(-2, 2)$, $C(2, 0)$. Wyznacz:
a) równania ogólne prostych zawierających boki tego trójkąta
b) wysokości tego trójkąta.

8.56. Punkty $A(-1, 7)$, $B(-2, 0)$, $C(3, -5)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$. Bez wyznaczania współrzędnych wierzchołka D oblicz:
a) wysokość rombu b) długość przekątnej BD.

8.57. Punkty $A(-6, 2)$, $B(-4, -2)$, $C(4, 0)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Bez wyznaczania współrzędnych wierzchołka D oblicz dwie różne wysokości tego równoległoboku.

8.58. Wyznacz równanie prostej l, prostopadłej do prostej k: $2x - 3y + 1 = 0$ i leżącej w odległości $2\sqrt{13}$ od punktu $P(-3, 4)$.

8.59. Na osi OX wyznacz punkt P, który jest równoodległy od prostych k: $x - y + 3 = 0$ oraz m: $7x + y - 1 = 0$.

8.60. Na osi OY wyznacz punkt P, który jest równoodległy od prostych k: $2x + y - 1 = 0$ oraz m: $11x - 2y + 1 = 0$.

8.61. Wyznacz równanie prostej, do której należy punkt $P(1, -1)$ i takiej, że odległość punktu $Q(8, -2)$ od tej prostej wynosi 5.

8.62. Wyznacz równanie prostej, do której należy punkt $P(-6, 15)$ i takiej, że odległość punktu $Q(4, -5)$ od tej prostej wynosi 10.

Pole trójkąta. Pole wielokąta

8.63. Oblicz pole trójkąta ABC, jeśli:
a) $A(1, 1)$, $B(3, 5)$, $C(-1, 3)$ b) $A(-4, 5)$, $B(6, -2)$, $C(3, 4)$

8.64. Dane są punkty $A(-5, -2)$, $B(3, -3)$, $C(-1, 5)$.
D a) Wykaż, że trójkąt ABC jest równoramienny.
b) Oblicz pole trójkąta ABC.

8.65. Dane są punkty $A(-3, 2)$, $B(5, 0)$, $C(-2, 6)$.
D a) Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.
b) Oblicz pole trójkąta ABC.

8.66. Boki trójkąta zawierają się w prostych o równaniach:
$3x - y - 9 = 0$, $2x + y - 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$. Oblicz pole tego trójkąta.

8.67. Oblicz pole trójkąta równobocznego ABC wiedząc, że punkt S jest środkiem ciężkości tego trójkąta oraz $\overrightarrow{AS} = \left[2\sqrt{2}, -4\right]$.

8.68. Oblicz pole sześciokąta foremnego $ABCDEF$ wiedząc, że $\overrightarrow{AD} = \left[\sqrt{39}, 5\right]$.

8.69. Punkt S jest punktem przecięcia się przekątnych kwadratu $ABCD$. Wiedząc, że $\overrightarrow{AS} = \left[-12, 3\frac{1}{2}\right]$, oblicz pole kwadratu $ABCD$.

8.70. Oblicz pole prostokąta $ABCD$ wiedząc, że $A(-5, -7)$, $B(4, 5)$, a do prostej DC należy punkt $E(-3, 4)$.

8.71. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$ wiedząc, że odległość punktu A od prostej DC jest równa 6 oraz $\overrightarrow{DC} = [4, -3]$.

8.72. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$ wiedząc, że:
a) $A(2, 4)$, $B(6, 3)$, $C(4, -1)$ b) $A(-2, 5)$, $C(3, 0)$, $D(7, 2)$.

8.73. Dane są punkty $A(-3, -2)$, $B(6, 4)$, $C(2, 5)$, $D(-1, 3)$.
D a) Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.
b) Oblicz pole tego trapezu.

8.74. Punkty $A(-2, -1)$, $B(5, 3)$, $C(2, 7)$, $D(-5, 8)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$.
D a) Wykaż, że przekątne AC i BD są prostopadłe.
b) Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

8.75. Oblicz pole czworokąta $ABCD$ wiedząc, że:
a) $A(-5, 3)$, $B(1, -3)$, $C(4, 6)$, $D(-3, 6)$
b) $A(-4, 2)$, $B(-4, -3)$, $C(0, -4)$, $D(6, 5)$

8.76. Dane są punkty: $A(0, 1)$, $B(8, 4)$. Wyznacz na osi OX taki punkt C, aby pole trójkąta ABC było równe 10.

8.77. Dane są punkty: $A(1, 2)$, $B(4, 6)$. Wyznacz na osi OY taki punkt C, aby pole trójkąta ABC było równe 13.

Równanie okręgu. Wzajemne położenie prostej i okręgu

8.78. Przekształć dane równanie okręgu do postaci kanonicznej. Podaj współrzędne środka i promień tego okręgu.

a) $x^2 + y^2 + 8x + 15 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 14x + 18y + 9 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 5x - 3y - 0{,}5 = 0$ d) $x^2 + y^2 + 11x - y + 5{,}5 = 0$.

8.79. Sprawdź, które z poniższych równań opisuje okrąg. Wyznacz środek i promień tego okręgu.

a) $x^2 + y^2 - 2xy = 0$ b) $x^2 + y^2 - 6y = 0$
c) $x^2 + y + 3x = 0$ d) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$

8.80. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie S wiedząc, że punkt A należy do tego okręgu.

a) $A(3, 10)$, $S(-3, 2)$ b) $A(4, 7)$, $S(-2, 1)$

8.81. Dany jest punkt A oraz proste k i l. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt A wiedząc, że środek tego okręgu należy jednocześnie do prostej k i do prostej l.

a) $A(-2, 2)$, k: $y = -3x + 6$, l: $x - 1 = 0$
b) $A(8, -1)$, k: $y = -3x + 13$, l: $x - 2y - 2 = 0$

8.82. Dany jest promień r okręgu oraz punkty A i B należące do tego okręgu. Wyznacz współrzędne środka tego okręgu.

a) $A(-3, 4)$, $B(5, 0)$, $r = 5$ b) $A(1, 3)$, $B(5, -1)$, $r = 2\sqrt{2}$

8.83. Dane są punkty A i B oraz prosta k. Wyznacz współrzędne środka S i promień r okręgu, przechodzącego przez punkty A, B wiedząc, że środek okręgu należy do prostej k.

a) $A(1, 4)$, $B(7, 0)$, k: $x + 2y = 0$ b) $A(0, -8)$, $B(4, 0)$, k: $2x - 3y + 5 = 0$

8.84. Oblicz, o ile istnieją, punkty wspólne okręgu o i prostej k, jeśli:

a) o: $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 10$, k: $x - y + 7 = 0$
b) o: $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 18$, k: $2x - 2y - 1 = 0$

c) o: $x^2 + y^2 - 8x - 4 = 0$, k: $x + 2y + 6 = 0$
d) o: $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 17 = 0$, k: $x + 3y + 19 = 0$

8.85. Określ położenie prostej k względem okręgu o, jeśli:

a) k: $x + y - 4 = 0$, o: $x^2 + y^2 = 8$
b) k: $x - 2y - 1 = 0$, o: $(x - 1)^2 + y^2 = 4$
c) k: $y - 3x + 5 = 0$, o: $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$
d) k: $x - 4y - 4 = 0$, o: $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$

8.86. Wyznacz równanie okręgu stycznego do obu osi układu współrzędnych i przechodzącego przez dany punkt A.

a) $A(3, 0)$ b) $A(8, 1)$ c) $A(-4, 2)$ d) $C(-9, -8)$

8.87. Wyznacz równanie okręgu:

a) stycznego do prostych k: $y = 2x + 4$ oraz l: $y = 2x - 6$ wiedząc, że środek tego okręgu należy do osi OX
b) stycznego do prostych k: $4x + 3y = 0$ oraz l: $4x + 3y + 8 = 0$ wiedząc, że środek tego okręgu należy do osi OY.

8.88. Dany jest okrąg o: $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$. Wyznacz równanie ogólne prostej k, która jest styczna do tego okręgu w punkcie:

a) $A(9, 1)$ b) $B(4, -4)$ c) $C(0, 4)$ d) $D(7, 5)$

8.89. Napisz równanie kierunkowe stycznych do danego okręgu o i równoległych do prostej k, jeśli:

a) o: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ k: $y = 2x$
b) o: $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 16$ k: $y = x$
c) o: $x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$ k: $y = -3x$
d) o: $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ k: $y = -x$

8.90. Napisz równania kierunkowe stycznych do danego okręgu o i prostopadłych do prostej k, jeśli:

a) o: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ k: $y = x$
b) o: $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ k: $y = -x$
c) o: $x^2 + y^2 - 2x + 12y + 28 = 0$ k: $y = -0{,}5x$
d) o: $x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0$ k: $y = -0{,}75x$

8.91. Napisz równania kierunkowe stycznych do danego okręgu o i nachylonych do osi OX pod kątem α, jeśli:

a) $x^2 + y^2 = 1$; $\alpha = 60°$ b) $(x - 1)^2 + y^2 = 4$; $\alpha = 120°$
c) $x^2 + y^2 - 10x = 0$; $\alpha = 150°$ d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$; $\alpha = 135°$

8.92. Napisz równania ogólne stycznych do danego okręgu o i przechodzących przez punkt A, jeśli:

a) $o: x^2 + y^2 = 4$, $A(6, -2)$
b) $o: x^2 + y^2 = 9$, $A(-5, 3)$
c) $o: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$, $A(-4, 3)$
d) $o: x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$, $A(-2, 2)$
e) $o: x^2 + y^2 + 10x - 6y + 30 = 0$, $A(-7, 9)$
f) $o: x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$, $A(5, -1)$

8.93. Sieczna k: $x - y + 1 = 0$ przecina okrąg o: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$ w punktach A i B. Przez punkty A i B poprowadzono styczne do okręgu, które przecinają się w punkcie C. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.

8.94. Oblicz tangens kąta ostrego, jaki tworzą styczne do okręgu $o: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$, przechodzące przez punkt $P(2, -1)$.

8.95. Zbadaj liczbę punktów wspólnych okręgu o z prostą l, w zależności od wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$), jeśli:

a) $o: (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 2$; $l: y = -x + m$
b) $o: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 8$; $l: y = x + m$
c) $o: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = m$; $l: x + y - 1 = 0$
d) $o: x^2 + y^2 = 25$; $l: 4x + 3y - m = 0$

8.96. Wyznacz współrzędne środka okręgu stycznego do prostej $k: \sqrt{3}x - y - 2 - 2\sqrt{3} = 0$ i jednocześnie stycznego do dodatnich półosi układu współrzędnych.

8.97. Okrąg przechodzi przez punkt $A(4, 1)$, zaś jego środek należy do prostej $k: x - y = 0$. Wiedząc, że okrąg ten jest styczny do prostej $l: y - 5 = 0$, wyznacz jego równanie.

8.98. Wyznacz równanie okręgu o promieniu 5, który jest styczny do osi OY i jednocześnie styczny do prostej $k: 3x + 4y - 6 = 0$.

Wzajemne położenie dwóch okręgów

8.99. Określ wzajemne położenie okręgów o_1 i o_2, jeśli:

a) $o_1: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$, $o_2: (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 12$
b) $o_1: (x + 3)^2 + y^2 = 10$, $o_2: (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 40$
c) $o_1: x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 = 0$, $o_2: x^2 + y^2 + 4y = 0$
d) $o_1: x^2 + y^2 - 12x + 35 = 0$ $o_2: x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$
e) $o_1: x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$, $o_2: x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$
f) $o_1: x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$, $o_2: (x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 5$

8.100. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych dwóch okręgów o_1 i o_2 (o ile istnieją).

a) $o_1: x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$, $o_2: x^2 + y^2 - 10x + 4y + 24 = 0$
b) $o_1: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$, $o_2: (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$

8.101. Wyznacz wartości parametru m, dla których okręgi $o_1: (x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 5$ oraz $o_2: (x + 1)^2 + (y - m)^2 = 20$ są styczne zewnętrznie.

8.102. Wyznacz wartości parametru m, dla których okręgi $o_1: x^2 + (y + 4)^2 = m^2$ oraz $o_2: (x - 3)^2 + y^2 = 49$ są styczne wewnętrznie.

8.103. Wyznacz wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których okręgi $o_1: (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 20$ oraz $o_2: (x - m)^2 + (y + 2m)^2 = 5$ mają tylko jeden punkt wspólny.

8.104. Wyznacz wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których okręgi $o_1: (x - 3)^2 + (y - m)^2 = 1$ oraz $o_2: (x + m)^2 + (y - 1)^2 = 9$ mają tylko jeden punkt wspólny.

8.105. Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$) okręgi opisane równaniami: $o_1: (x + 5)^2 + (y + m)^2 = 16$ oraz $o_2: (x - 2m)^2 + (y + m)^2 = 9$ przecinają się w dwóch punktach?

8.106. Wyznacz wartości parametru m, dla których okręgi $o_1: x^2 + (y - 6)^2 = m$ oraz $(x + 8)^2 + y^2 = 9$ są rozłączne zewnętrznie.

8.107. Dla jakich wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, okręgi opisane równaniami: $o_1: (x - m)^2 + (y - 2m)^2 = 1$ oraz $o_2: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$ są wzajemnie zewnętrzne?

8.108. Dla jakich wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, okręgi opisane równaniami: $o_1: (x - m)^2 + (y + 1)^2 = 1$ oraz $o_2: (x + 2)^2 + (y - m + 3)^2 = 25$ są rozłączne wewnętrznie?

Zadania różne z geometrii analitycznej

D **8.109.** Wykaż dwoma sposobami, że jeśli $A(-3, 2)$, $B(7, -4)$, $C(9, 2)$, $D(-1, 8)$, to czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

D **8.110.** Wykaż dwoma sposobami, że jeśli $A(-5, -4)$, $B(2, 0)$, $C(1, 8)$, $D(-6, 4)$, to czworokąt $ABCD$ jest rombem.

D 8.111. Wykaż dwoma sposobami, że jeśli $A(-5, -2)$, $B(-1, -4)$, $C(3, 4)$, $D(-1, 6)$, to czworokąt $ABCD$ jest prostokątem.

D 8.112. Wykaż dwoma sposobami, że jeśli $A(-4, -2)$, $B(1, 0)$, $C(-1, 5)$, $D(-6, 3)$, to czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.

8.113. Dane są punkty $A(1, -4)$, $B(11, 1)$, $C(?, 4)$, $D(-2, 2)$.

D a) Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem prostokątnym.

b) Oblicz obwód i pole tego trapezu.

8.114. Dane są punkty: $A(-1, 0)$, $B(5, 2)$, $C(2, 6)$, $D(-3, 6)$.

D a) Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest deltoidem.

b) Oblicz obwód i pole tego deltoidu.

8.115. Dane są punkty: $A(-4, -1)$, $B(2, -3)$, $C(5, 6)$.

D a) Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.

b) Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

8.116. Dane są punkty: $C(0, 5)$ oraz $D(3, -4)$. Wiedząc, że odcinek CD jest wysokością trójkąta równobocznego ABC, wyznacz:

a) równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC

b) równanie okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

8.117. Okrąg o jest styczny do osi OX w punkcie $A(4, 0)$ i jednocześnie jest styczny do ujemnej półosi OY.

a) Napisz równanie okręgu o.

b) Wyznacz na okręgu punkty B i C tak, aby trójkąt ABC był równoboczny.

8.118. Dane są wierzchołki $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ rombu $ABCD$. Wiedząc, że kąt BAD rombu jest równy 30°, oblicz współrzędne wierzchołków C i D.

8.119. Dane są wierzchołki $A(-1, -4)$, $B(7, 2)$ równoległoboku $ABCD$. Wiedząc, że pole równoległoboku jest równe 50, wyznacz równanie ogólne prostej, zawierającej bok CD.

8.120. Dane są punkty $A(-6, -3)$, $B(3, 0)$. Wyznacz punkt C, leżący na prostej k: $y = 4$ tak, aby pole trójkąta ABC było równe 30.

8.121. Dane są wierzchołki $A(0, 1)$ i $C(6, 5)$ kwadratu $ABCD$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i D.

8.122. Punkty $A(-5, -4)$, $B(3, -2)$ są wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Oblicz współrzędne wierzchołków C i D.

8.123. Punkty przecięcia paraboli $y = x^2 - 2x - 8$ z prostą k: $2x + y - 1 = 0$ są końcami przekątnej rombu, którego pole jest równe 60. Oblicz współrzędne wierzchołków tego rombu.

8.124. Dana jest prosta k: $y = 2x + 7$ oraz punkt $C(-5, 2)$.

a) Wyznacz na prostej k punkty A i B leżące w odległości 5 od punktu C.

b) Oblicz pole trójkąta ABC.

c) Oblicz cosinus kąta ACB.

8.125. Dane są punkty $A(-2, 5)$, $B(4, 3)$. Wyznacz na prostej k: $x + 2y - 4 = 0$ punkt C tak, aby kąt BCA był równy 90°.

8.126. Punkt W jest wierzchołkiem paraboli opisanej równaniem: $y = \frac{1}{3}(x-4)^2$. Na ramionach paraboli wyznacz punkty A i B tak, aby kąt AWB był prosty, a trójkąt AWB był trójkątem równoramiennym.

8.127. Wyznacz równania prostych, w których zawierają się dwusieczne kątów, pod jakimi przecinają się proste k: $4x + 2y + 1 = 0$ i m: $11x - 2y + 7 = 0$.

8.128. Wyznacz równanie prostej, zawierającej dwusieczną tego kąta, utworzonego przez proste k: $x + 3y - 1 = 0$ oraz m: $6x - 2y + 1 = 0$, do obszaru którego należy punkt $P(3, 1)$.

8.129. Dane są dwa punkty $A(1, -1)$ i $B(3, 3)$. Wyznacz na prostej k: $x - y + 3 = 0$ taki punkt C, aby pole trójkąta ABC było równe 6.

D 8.130. Pary liczb (x, y) spełniające układ równań $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4 \\ x^2 + y^2 - 4x - 16 = 0 \end{cases}$ są współrzędnymi wierzchołków czworokąta wypukłego $ABCD$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym.

8.131. Krzywa l jest zbiorem punktów, których odległość od osi OX jest taka sama, jak odległość od punktu $P(0, -2)$.

a) Wyznacz równanie krzywej l.

b) Oblicz współrzędne punktów, które znajdują się w odległości 5 od punktu P i od osi OX.

8.132. Krzywa l jest zbiorem punktów, których odległość od prostej k: $y + 1 = 0$ jest taka sama, jak odległość od punktu $(0, 1)$.

a) Wyznacz równanie krzywej l.

b) Podaj współrzędne punktu P, którego odległość od prostej k i od punktu $(0, 1)$ jest równa 10.

8.133. Dane są punkty $A(3, 0)$, $B(7, 0)$. Wyznacz równanie krzywej, składającej się z wszystkich punktów, których odległość w układzie współrzędnych od punktu B jest trzy razy większa niż odległość od punktu A.

8.134. Dane są punkty $A(-17, 0)$, $B(-2, 0)$. Wyznacz równanie krzywej składającej się z wszystkich punktów, których odległość w układzie współrzędnych od punktu A jest cztery razy większa niż odległość od punktu B.

8.135. Wyznacz równanie krzywej, będącej zbiorem środków wszystkich okręgów stycznych jednocześnie do osi OX oraz do okręgu o środku w punkcie $S(0, 3)$ i promieniu 1.

Wybrane przekształcenia geometryczne w układzie współrzędnych

Przesunięcie równoległe

8.136. Obrazem odcinka AB w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [-3, 0]$ jest odcinek A_1B_1. Wiedząc, że $A(-1, 5)$, $B(2,1)$ oblicz:

a) współrzędne punktów A_1, B_1

b) odległość między odcinkami AB i A_1B_1.

8.137. Obrazem trójkąta ABC w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [5, -6]$ jest trójkąt $A_1B_1C_1$. Wiedząc, że $A_1(-3, -2)$, $B_1(4, -7)$, $C_1(2, 0)$, oblicz współrzędne punktów A, B, C.

8.138. Okrąg o: $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 2$ przesunięto równolegle o wektor $\vec{u}$ i otrzymano okrąg o_1. Podaj równanie okręgu o_1, jeśli:

a) $\vec{u} = [7, 0]$ b) $\vec{u} = [0, -6]$ c) $\vec{u} = [-2, 3]$.

8.139. Wyznacz równanie okręgu o_1, będącego obrazem okręgu o: $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [-1, 2]$.

8.140. Dany jest wektor $\vec{u}$. Wyznacz równanie ogólne prostej l, będącej obrazem prostej k: $2x + y - 1 = 0$ w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$. Następnie oblicz odległość między prostymi k i l.

a) $\vec{u} = [0, 4]$ b) $\vec{u} = [-5, 0]$ c) $\vec{u} = [-5, 4]$

8.141. Wyznacz równanie paraboli, będącej obrazem paraboli p: $y = x^2 - 2x - 7$ w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [-2, 8]$. Podaj współrzędne punktu wspólnego obu parabol.

Symetria środkowa

8.142. Okrąg o_1 jest obrazem okręgu o: $x^2 + (y + 1)^2 = 4$ w symetrii środkowej względem punktu $P(3, 2)$. Wyznacz środek i promień okręgu o_1.

8.143. Dane są punkty $A(-1, -4)$, $B(3, -2)$. Obrazem odcinka AB w symetrii środkowej względem punktu $O(0, 0)$ jest odcinek A_1B_1.

a) Wyznacz współrzędne punktów A_1 i B_1.

b) Jakim czworokątem jest wielokąt wypukły o wierzchołkach A, B, B_1, A_1?

8.144. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest obrazem trójkąta ABC w symetrii środkowej względem punktu $O(0, 0)$. Wiedząc, że $A_1(-2, 0)$, $B_1(3, -2)$, $C_1(5, 4)$

a) oblicz współrzędne punktów A, B, C

b) naszkicuj te trójkąty we wspólnym układzie współrzędnych.

8.145. Obrazem prostej k w symetrii środkowej względem punktu $O(0, 0)$ jest prosta l. Podaj równanie ogólne prostej l oraz oblicz odległość między prostymi k i l, jeśli:

a) k: $x - 4 = 0$ b) k: $x + y = 0$ c) k: $y - 3 = 0$

d) k: $3x - 4y + 5 = 0$ e) k: $x - y - 2 = 0$ f) k: $5x + 12y - 26 = 0$

8.146. Wyznacz równanie paraboli, będącej obrazem paraboli p: $y = x^2 + 2x - 4$ w symetrii środkowej względem punktu $O(0, 0)$.

a) Oblicz współrzędne punktów przecięcia obu parabol.

b) Naszkicuj te parabole w jednym układzie współrzędnych.

8.147. Wyznacz równanie okręgu, będącego obrazem okręgu o: $(x+2)^2+(y-1)^2=10$ w symetrii środkowej względem punktu S, jeśli:
a) $S(0, 0)$ b) $S(0, 4)$ c) $S(3, 0)$ d) $S(5, -7)$

8.148. Trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, w którym $A(-2, 4)$ oraz $|\sphericalangle BAC|=90°$. Punkt $O(0, 0)$ jest środkiem ciężkości tego trójkąta. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest obrazem trójkąta ABC w symetrii środkowej względem punktu O. Oblicz współrzędne punktów A_1, B_1, C_1.

Symetria osiowa

8.149. Punkt B jest obrazem punktu $A(-8, 6)$ w symetrii osiowej względem osi OX, punkt C jest obrazem punktu B w symetrii względem osi OY, punkt D jest obrazem punktu C w symetrii względem osi OX.
a) Wyznacz współrzędne punktów B, C, D.
b) Oblicz długości przekątnych czworokąta $ABCD$.

8.150. Punkt A_1 jest obrazem punktu $A(a, 3)$ w symetrii osiowej względem osi OY i należy do prostej k: $2x-y+7=0$. Oblicz a.

8.151. Wyznacz równanie okręgu, będącego obrazem okręgu o w symetrii względem osi OX, jeśli:
a) o: $(x+5)^2+(y-7)^2=1$ b) o: $x^2-4x+y^2+10y-7=0$

8.152. Wyznacz równanie prostej l, będącej obrazem prostej k w symetrii osiowej względem osi OX, jeśli:
a) k: $2x+3y=0$ b) k: $x-y+8=0$ c) k: $5x+4y-1=0$

8.153. Wyznacz równanie prostej l, będącej obrazem prostej k z poprzedniego zadania w symetrii osiowej względem osi OY.

8.154. Obraz punktu P w symetrii osiowej względem osi OX należy do prostej k, zaś obraz punktu P w symetrii osiowej względem osi OY należy do prostej l. Wyznacz współrzędne punktu P, jeśli:
a) k: $x+y-3=0$, l: $y+4x=0$ b) k: $x+3y+5=0$, l: $x-5y+3=0$.

8.155. Punkt B jest obrazem punktu A w symetrii osiowej względem prostej k. Wyznacz równanie ogólne prostej k, jeśli:
a) $A(-7, -4)$, $B(1, -4)$ b) $A(-1, 3)$, $B(4, -2)$ c) $A(2, 7)$, $B(-8, 1)$

8.156. Dany jest punkt C oraz prosta k. Wyznacz współrzędne punktu D wiedząc, że jest on obrazem punktu C w symetrii osiowej względem prostej k.
a) $C(3, -2)$, k: $x+4=0$ b) $C(4, 2)$; k: $x+y=0$
c) $C(1, -5)$, k: $2x+4y-6=0$ d) $C(-3, -7)$; k: $3x-y+2=0$

Przekształcenia zdefiniowane za pomocą wzoru

8.157. Przekształcenie P punktów płaszczyzny jest zdefiniowane dla dowolnego punktu płaszczyzny o współrzędnych (x, y) w następujący sposób: $P((x, y))=(-y, x+3)$.
a) Wyznacz współrzędne punktu A_1 będącego obrazem punktu $A(-1, 9)$ w przekształceniu P.
D b) Wykaż, że przekształcenie P jest izometrią.

8.158. Przekształcenie P punktów płaszczyzny jest zdefiniowane dla dowolnego punktu płaszczyzny o współrzędnych (x, y) w następujący sposób: $P((x, y))=(x-5, 3y)$.
a) Wyznacz współrzędne punktu A_1 będącego obrazem punktu $A(4, -2)$ w przekształceniu P.
D b) Wykaż, że przekształcenie P nie jest izometrią.

8.159. Dane jest przekształcenie P płaszczyzny określone wzorem: $P((x, y))=(-x, y+1)$, gdzie $x, y \in \mathbf{R}$.
a) Wykaż, że przekształcenie P jest izometrią.
b) Wyznacz równanie obrazu okręgu o: $x^2+y^2-2y-4=0$ w tym przekształceniu.

8.160. Przekształcenie P określone jest wzorem $P((x, y))=(y+2, -x+1)$, gdzie $x, y \in \mathbf{R}$.
a) Wykaż, że przekształcenie P jest izometrią.
b) Wyznacz równanie obrazu okręgu o: $x^2+y^2-4x+6y+12=0$ w przekształceniu P.

8.161. Przekształcenie P punktów płaszczyzny (x, y) jest określone wzorem $P((x, y))=(-2y, x+2)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$.
D a) Wykaż, że przekształcenie P nie jest izometrią.
b) Wyznacz równanie prostej l, będącej obrazem prostej k: $y=-x+3$ w tym przekształceniu.

Jednokładność o środku w punkcie S i skali k, $k \neq 0$

8.162. Zaznacz na płaszczyźnie dwa różne punkty S oraz A. Następnie wyznacz obraz punktu A w jednokładności o środku w punkcie S i skali k, jeśli:

a) $k = 2$ b) $k = -3$ c) $k = -1$ d) $k = \frac{1}{2}$

8.163. Zaznacz na płaszczyźnie dwa różne punkty A i B. Następnie wyznacz środek S jednokładności o skali k, w której punkt B jest obrazem punktu A, jeśli:

a) $k = 2$ b) $k = -2$ c) $k = \frac{1}{2}$ d) $k = -\frac{1}{2}$

8.164. Wyznacz współrzędne punktu A_1, który jest obrazem punktu A w jednokładności J o środku w punkcie $O(0, 0)$ i skali k, jeśli:

a) $A(-2, 4)$, $k = 0{,}5$ b) $A(-9, 12)$, $k = -\frac{1}{3}$

c) $A\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{15}\right)$, $k = 15$ d) $A\left(\sqrt{2}, 16\sqrt{2}\right)$, $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

8.165. Odcinek A_1B_1 jest obrazem odcinka AB w jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali k. Wyznacz współrzędne środka E odcinka A_1B_1, jeśli:

a) $A(-20, 6)$, $B(10, 4)$, $k = 3$ b) $A(13, -1)$, $B(5, 7)$, $k = -2$
c) $A(-8, -27)$, $B(-12, -13)$, $k = 0{,}1$ d) $A(27, 108)$, $B(-2, -3)$, $k = -0{,}2$

8.166. Punkty A i A_1 są jednokładne, przy czym środkiem jednokładności jest punkt $O(0, 0)$. Oblicz skalę k tej jednokładności, jeśli:

a) $A(-3, 1)$, $A_1(6, -2)$ b) $A(5, 5)$, $A_1(-1, -1)$
c) $A(-2, 0)$, $A_1(5, 0)$ d) $A(0, 3)$, $A_1(0, -3)$

8.167. Dana jest prosta m o równaniu $y = 2x - 3$ oraz punkt $O(0, 0)$. Wyznacz równanie prostej, która jest obrazem prostej m w jednokładności J_O^k, jeśli:

a) $k = -3$ b) $k = 2$ c) $k = \frac{1}{3}$ d) $k = -\frac{1}{2}$

8.168. Dana jest funkcja $y = f(x)$. Wykres funkcji g jest obrazem wykresu funkcji f w jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali k. Wyznacz wzór funkcji g, jeśli:

a) $f(x) = -2x^2$, $k = -\frac{1}{2}$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, $k = 3$

c) $f(x) = \frac{x-2}{x}$, $k = -1$ d) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $k = \frac{1}{2}$

Naszkicuj wykresy funkcji f i g.

8.169. Wyznacz współrzędne punktu B_1, który jest obrazem punktu B w jednokładności J o środku w punkcie $S(-4, 5)$ i skali k, jeśli:

a) $B(-10, -8)$, $k = \frac{2}{3}$ b) $B(5, 7)$, $k = -2$

c) $B(1, 20)$, $k = 6$ d) $B(-4, 9)$, $k = -\frac{1}{2}$

8.170. Odcinek A_1B_1 jest obrazem odcinka AB w jednokładności J o środku w punkcie $S(-2, -1)$ i skali k. Wyznacz współrzędne końców odcinka A_1B_1, jeśli:

a) $A(10, -6)$, $B(-1, 4)$, $k = -5$ b) $A(0, 6)$, $B(-4, 0)$, $k = 3$
c) $A(-8, 4)$, $B(0, 0)$, $k = 0{,}5$ d) $A(3, 8)$, $B(-5, 13)$, $k = -0{,}3$

3.170. Dane są punkty $A(3, 2)$ i $A_1(-3, 5)$. Wiadomo, że $A_1 = J_S^k(A)$. Wyznacz współrzędne środka S tej jednokładności, jeśli skala k jest równa:

a) -2 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $-\frac{1}{4}$

8.172. Sprawdź, czy odcinki AB i CD są jednokładne, jeśli:

a) $A(2, -3)$, $B(5, 6)$, $C(0, -1)$, $D(1, 2)$ b) $A(-2, -1)$, $B(4, 2)$, $C(2, 1)$, $D(10, 5)$

W przypadku odpowiedzi twierdzącej wyznacz środek S i skalę jednokładności, w której obrazem odcinka AB jest odcinek CD.

8.173. Wyznacz środek S i skalę k jednokładności J, która okrąg o_1: $x^2 + y^2 + 10x - 10y + 41 = 0$ przekształca na okrąg o_2: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.

Wyznacz środek S i skalę k jednokładności J, która okrąg o_1: $x^2 + y^2 + 12x + 2y + 36 = 0$ przekształca na okrąg o_2: $x^2 + y^2 - 16x - 12y + 96 = 0$.

Wyznacz współrzędne takiego punktu A, że styczna do wykresu funkcji f w punkcie A jest równoległa do prostej k, jeśli:

a) $f(x) = -2x^2 + x + 1$, k: $5x - y - 2 = 0$ b) $f(x) = \frac{x-1}{x+4}$, k: $x - 5y + 5 = 0$

c) $f(x) = -\frac{3}{x^4}$, k: $12x - y - 8 = 0$ d) $f(x) = \frac{3x^2}{2x-1}$, k: $4x - 3y - 21 = 0$

8.176. Wyznacz współrzędne takiego punktu A, że styczna do wykresu funkcji f w punkcie A jest prostopadła do prostej k, jeśli:

a) $f(x) = 3x^2 + x - 2$, $k: x - 5y - 10 = 0$ b) $f(x) = \frac{3-x}{1-x}$, $k: 2x + y - 5 = 0$

c) $f(x) = \frac{-2}{x^5}$, $k: x + 10y = 0$ d) $f(x) = \frac{2x^2+3x}{4x+2}$, $k: 2x + 3y - 3 = 0$

8.177. Wykaż, że styczna do paraboli o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 2$, poprowadzona w punkcie P o odciętej 2, ogranicza wraz z osiami układu współrzędnych trójkąt o polu równym 8.

8.178. Wykaż, że styczna do hiperboli o równaniu $y = \frac{2x-1}{x+1}$, gdzie $x \neq -1$, poprowadzona w punkcie P o odciętej -2, ogranicza wraz z osiami układu współrzędnych trójkąt o polu $20\frac{1}{6}$.

8.179. Oblicz pole trójkąta ograniczonego dodatnimi półosiami układu współrzędnych i tą styczną do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$, która jest prostopadła do prostej o równaniu $2x - y - 3 = 0$.

8.180. Oblicz pole trójkąta ograniczonego ujemnymi półosiami układu współrzędnych i tą styczną do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2-x}{x+2}$, która jest równoległa do prostej o równaniu $4x + y - 11 = 0$.

8.181. Do paraboli o równaniu $y = x^2$ poprowadzono styczną w punkcie o odciętej ujemnej, która wraz z osiami układu współrzędnych ograniczyła trójkąt o polu równym 16. Wyznacz równanie tej stycznej.

8.182. W którym punkcie wykresu funkcji $f(x) = -x^3$ należy poprowadzić styczną do tego wykresu, aby pole trójkąta ograniczonego tą styczną i osiami układu współrzędnych było równe 54?

8.183. W którym punkcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$, gdzie $x \neq 0$, należy poprowadzić styczną do tego wykresu, aby pole trójkąta ograniczonego tą styczną i osiami układu współrzędnych było równe $1\frac{1}{8}$?

8.184. Na paraboli o równaniu $y = -x^2 + 2x$ wyznacz taki punkt P, aby styczna do tej paraboli poprowadzona w punkcie P ograniczała, wraz z prostymi o równaniach: $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, trapez o najmniejszym polu.

8.185. Prosta k: $y = ax + b$, gdzie $a > 0$, przechodząca przez punkt $P(-1, 2)$, odcina na osiach układu współrzędnych odcinki, których suma długości jest najmniejsza. Wyznacz równanie tej prostej.

8.186. Na paraboli o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2$ wyznacz taki punkt P, którego odległość od punktu $A(4, 1)$ jest najmniejsza.

8.187. Na paraboli o równaniu $y = -\frac{1}{4}x^2$ wyznacz taki punkt P, którego odległość od punktu $A(12, 0)$ jest najmniejsza.

8.188. Na gałęzi hiperboli o równaniu $y = \frac{8}{x}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$, wyznacz taki punkt P, którego odległość od punktu $A(2, -2)$ jest najmniejsza.

8.189. Budujemy prostokąty, których dwa wierzchołki należą do prostej k: $y = 4$, natomiast pozostałe dwa należą do paraboli o równaniu $y = (x + 3)^2$, a ich rzędne są mniejsze od 4. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego prostokąta, którego pole jest największe. Oblicz to największe pole.

8.190. Na hiperboli o równaniu $y = \frac{6}{x}$, gdzie $x \neq 0$, obrano punkty $A(2, 3)$ i $B(6, 1)$. Wyznacz na tej hiperboli taki punkt C o ujemnej odciętej, aby pole trójkąta ABC było najmniejsze.

Test sprawdzający do rozdziału 8.

1. Wektory $\vec{u} = [a, a+3]$ oraz $\vec{v} = [2, 5]$ są równoległe tylko wtedy, gdy:

A. $a = -1$ B. $a = 0$ C. $a = 1$ D. $a = 2$

2. Symetralna odcinka PQ, gdzie $P(4, 7)$, $Q(-2, 10)$, jest nachylona do osi OX pod kątem α. Wówczas:

A. $\text{tg}\,\alpha = 0{,}5$ B. $\text{tg}\,\alpha = -0{,}5$ C. $\text{tg}\,\alpha = 2$ D. $\text{tg}\,\alpha = -2$

3. Odległość punktu $P(-3, 2)$ od prostej k: $y = \frac{4}{3}x - 10\frac{2}{3}$ jest:

A. liczbą niewymierną B. kwadratem liczby naturalnej
C. liczbą naturalną podzielną przez 3 D. iloczynem dwóch liczb pierwszych

4. Środek ciężkości trójkąta ABC, gdzie $A(-2, 7)$, $B(3, -4)$, $C(5, 9)$ ma współrzędne:
A. $(2, 4)$ B. $(3, 6)$ C. $(4, 2)$ D. $(6, 3)$

5. Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Jeśli $A(-5, 0)$, $B(3, -4)$, $C(6, 2)$, to:
A. $D(13, -2)$ B. $D(-2, 6)$ C. $D(-7, -6)$ D. $D(0, 1)$

6. Prostą prostopadłą do prostej k: $3x - 2y + 1 = 0$ i przechodzącą przez punkt $P(0, 0)$ opisuje równanie:
A. $3x + 2y = 0$ B. $2x + 3y = 0$ C. $2x - 3y = 0$ D. $-x - 2y = 0$

7. Dane są punkty $A(4, -1)$, $B(11, 1)$, $C(4, 7)$. Pole trójkąta ABC jest równe:
A. 14 B. 21 C. 28 D. 56

8. Dana jest prosta k: $2x - y - 5 = 0$ oraz okrąg o: $x^2 + y^2 = 5$. Wskaż zdanie prawdziwe.
A. Prosta k przechodzi przez środek okręgu o.
B. Prosta k przecina okrąg o w punktach $(-2, -1)$ oraz $(-1, -2)$.
C. Prosta k jest styczna do okręgu o.
D. Prosta k jest rozłączna z okręgiem o.

9. Odcinek AC jest przekątną kwadratu $ABCD$. Jeśli $A(1, 5)$, $C(5, -3)$, to pole tego kwadratu jest równe:
A. 40 B. $40\sqrt{2}$ C. $40\sqrt{5}$ D. 80

10. Odległość między prostymi równoległymi k: $3x - 4y + 7 = 0$ oraz l: $3x - 4y - 5 = 0$ jest równa:
A. 12 B. 6 C. 3 D. 2,4

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 8.

11. Wyznacz na prostej k: $x - 2y + 7 = 0$ punkt P, który jest równoodległy od punktów A i B, gdzie $A(3, -2)$, $B(7, 2)$.

12. Dane są wierzchołki $A(-3, -5)$ i $B(9, 1)$ trójkąta ABC. Wiedząc, że punkt $S(1, 1)$ jest punktem przecięcia się środkowych trójkąta ABC, oblicz:
a) współrzędne punktu C b) pole trójkąta ABC.

13. Dane są punkty $A(-5, 1)$, $B(3, 1)$, $C(-2, 6)$. Oblicz współrzędne punktu będącego ortocentrum tego trójkąta.

14. Dwie wysokości trójkąta ABC zawierają się w prostych k: $2x - y + 6 = 0$ oraz l: $x + y = 0$. Wiedząc, że $A(-5, 1)$, wyznacz równanie ogólne prostej zawierającej trzecią wysokość tego trójkąta.

15. Dane są punkty $A(-6, -5)$, $B(6, 3)$, $C(-6, 9)$. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.

16. Dane są punkty $A(-3, 2)$, $B(5, 3)$, $C(6, 8)$, $D(1, 9)$.
D a) Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest deltoidem.
b) Oblicz pole tego czworokąta.

17. Dane są trzy wierzchołki czworokąta $ABCD$: $A(-7, 0)$, $B(-3, -2)$, $C(-1, 2)$. Wiadomo, że czworokąt $ABCD$ ma środek symetrii.
a) Oblicz współrzędne wierzchołka D.
D b) Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.
c) Wyznacz współrzędne wierzchołków kwadratu $A_1B_1C_1D_1$, będącego obrazem kwadratu $ABCD$ w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [2, 0]$.

18. Prosta k: $x + 2 = 0$ jest osią symetrii trójkąta równobocznego ABC. Wiedząc, że $A(-5, -1)$, wyznacz współrzędne wierzchołków B i C.

19. Dana jest prosta k: $y = 3x + 1$ oraz punkt $A(-3, 5)$. Wyznacz obraz punktu A w symetrii osiowej względem prostej k.

20. Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $S(3, 1)$ wiedząc, że punkty wspólne tego okręgu i prostej k: $x - 7y + 29 = 0$ są końcami cięciwy mającej długość $5\sqrt{2}$.

21. Dany jest okrąg o: $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 27 = 0$. Punkty A, B, C, D leżą na okręgu o i są wierzchołkami czworokąta wypukłego $ABCD$. Wiadomo, że bok AB zawiera się w prostej k: $y = -2x - 14$, a bok DC zawiera się w prostej $y = -x + 3$.
a) Wyznacz współrzędne wierzchołków czworokąta $ABCD$.
D b) Wykaż, że jedna z przekątnych tego czworokąta jest średnicą okręgu o.
c) Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

22. Dany jest okrąg o: $(x + 4)^2 + (y + 7)^2 = 169$ oraz punkt $A(1, 5)$.
a) Sprawdź, że punkt A należy do okręgu o.
b) Wyznacz równanie ogólne stycznej do okręgu o w punkcie A.

23. Wyznacz równania kierunkowe stycznych do okręgu o: $x^2 + y^2 + 8x - 29 = 0$, które są prostopadłe do prostej k: $2x - y - 8 = 0$.

24. Dane są punkty $A(-5, 2)$, $B(1, 4)$ oraz prosta k: $x - y + 9 = 0$. Wyznacz na prostej k punkt C tak, aby kąt ACB był prosty.

25. Dane są punkty $A(-3, -1)$, $C(3, 5)$. Odcinek AC jest przekątną rombu $ABCD$, którego pole jest równe 24. Oblicz współrzędne punktów B i D.

26. Dane są punkty $A(2, 1)$, $B(8,3)$, $C(-6, 5)$. Oblicz miarę największego kąta w trójkącie ABC.

27. W rombie $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie $S(2, -1)$. Dwa kolejne wierzchołki rombu mają współrzędne $A(m, -3)$ oraz $B(m + 6, m - 5)$, gdzie $m \in \mathbb{R}$. Wyznacz:

a) współrzędne wierzchołków rombu b) pole rombu
c) cosinus kąta rozwartego rombu
d) równanie okręgu wpisanego w romb $ABCD$.

28. Punkty A, B, C, D są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wiedząc, że $\overrightarrow{AB} = [8, 4]$, $\overrightarrow{DB} = [3, -6]$, oblicz:

a) pole równoległoboku $ABCD$ b) cosinus kąta BAD.

29. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych okręgów o_1: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$ oraz o_2: $(x - 5)^2 + y^2 = 29$.

D **30.** Wykaż, że punkty przecięcia okręgu o: $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 45 = 0$ z parabolą p: $y = (x + 3)^2$ są wierzchołkami trapezu równoramiennego, a przekątne tego trapezu przecinają się pod kątem prostym.

31. Dane są okręgi o_1: $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 12 = 0$ oraz o_2: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = m^2$, gdzie $m \neq 0$. Przeprowadź dyskusję położenia okręgów względem siebie w zależności od wartości parametru m.

32. Dane są punkty $A(3, 0)$ i $B(-3, 0)$. Wyznacz równanie linii utworzonej przez te wszystkie punkty płaszczyzny, których odległość od punktu A jest 2 razy większa od odległości od punktu B. Jaką figurę geometryczną opisuje ta linia?

33. Wyznacz wszystkie wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$), dla których prosta o równaniu $y = (m - 1)x + m + 2$ ma dokładnie dwa punkty wspólne z okręgiem o środku $S(1, 2)$ i promieniu $r = 1$.

34. W zbiorze wszystkich okręgów stycznych zewnętrznie do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 25$ i stycznych jednocześnie do prostej k: $3x - 4y - 50 = 0$ istnieje okrąg o najmniejszym promieniu. Wyznacz jego równanie.

35. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A(0, -1)$, który jest jednocześnie styczny do prostych k: $y = 0$ oraz l: $4x - 3y + 22 = 0$.

36. Dane są punkty $A(3, 1)$ $B(1, 3)$, $C(6, 3)$, $D(3, 6)$.

D a) Wykaż, że odcinki AB i CD są równoległe.
b) Wyznacz skalę k i środek S jednokładności, w której obrazem odcinka AB jest odcinek CD.

37. Na wykresie funkcji określonej wzorem $y = \frac{1}{2}x^3$ wyznacz taki punkt P o odciętej dodatniej, którego odległość od punktu $A\left(4, -1\frac{1}{2}\right)$ jest najmniejsza.

D **38.** Wykaż, że najmniejsza odległość punktu należącego do krzywej $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ od prostej k: $x + y - 4 = 0$ jest równa $\sqrt{2}$.

39. Styczna do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2 - x}{x + 4}$ w punkcie A jest prostopadła do prostej k: $6x - y + 4 = 0$. Oblicz współrzędne punktu A.

40. Styczna do wykresu funkcji $f(x) = 16x^2 + \frac{1}{x}$, gdzie $x \neq 0$, przechodząca przez początek układu współrzędnych ma z parabolą o równaniu $y = 3x^2 + 12x - 12$ dwa punkty wspólne A i B. Napisz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB.

Odpowiedzi do zadań

1. Ułamki algebraiczne. Równania i nierówności wymierne. Funkcje wymierne

Ułamek algebraiczny. Skracanie i rozszerzenie ułamków algebraicznych

1.1. a), b), e)

1.2. a) $\mathbf{R}-\{2\}$ b) $\mathbf{R}-\{-1, 5\}$ c) R d) $\mathbf{R}-\{-3, 3\}$ e) $\mathbf{R}-\{-1\}$ f) $\mathbf{R}-\{-2\}$

1.3. a) $\mathbf{R}-\{2, 3\}$ b) $\mathbf{R}-\{0, 4\}$ c) $\mathbf{R}-\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$ d) $\mathbf{R}-\{9\}$ e) $\mathbf{R}-\{-2, 2\}$

f) $\mathbf{R}-\{1\}$ g) $\mathbf{R}-\{-1\}$ h) $\mathbf{R}-\{-1, 1, 3\}$ i) $\mathbf{R}-\{0, 1\}$

1.5. a) $\frac{2}{3}$ b) 0 c) $\frac{9}{7}$ d) 1

1.6. a) $1+\frac{1}{3}\sqrt{2}$ b) $\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}$ c) $1+\frac{3}{4}\sqrt{2}$ d) $42+28\sqrt{2}$

1.7. a) $\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}{8}$ b) $\frac{2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)}{3}$ c) $\frac{5\left(\sqrt[3]{5}-1\right)}{2}$ d) $\frac{\sqrt[3]{3}+1}{4}$

1.10. a) $m\in(1, +\infty)$ b) $m\in\left(-\infty,-\frac{5}{6}\right)\cup\left(\frac{5}{6},+\infty\right)$ c) $m\in\left(0,\frac{4}{9}\right)$

1.11. a) $\frac{1}{2}x^4,\ x\in\mathbf{R}-\{0\}$ b) $-5x,\ x\in\mathbf{R}-\{0\}$ c) $-7x^3+5x^2,\ x\in\mathbf{R}-\{0\}$

d) $\frac{-2}{x},\ x\in\mathbf{R}-\{0\}$ e) $\frac{1}{x},\ x\in\mathbf{R}-\{0\}$ f) $x,\ x\in\mathbf{R}-\{0\}$

1. 12. a) $\frac{x-2}{3},\ x\in\mathbf{R}-\{-2\}$ b) $\frac{1}{5-x},\ x\in\mathbf{R}-\{-5, 5\}$ c) $-1,\ x\in R-\left\{-1\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\right\}$

d) $9x-2,\ x\in\mathbf{R}-\left\{-\frac{2}{9}\right\}$ e) $\frac{x-1}{5},\ x\in\mathbf{R}-\{1\}$ f) $\frac{3x+1}{3x-1},\ x\in\mathbf{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$

1.13. a) $\frac{x-3}{x-2},\ x\in\mathbf{R}-\{-2, 2\}$ b) $\frac{x-3}{x+5},\ x\in\mathbf{R}-\{-5, 3\}$ c) $\frac{-2x+2}{3x-9},\ x\in\mathbf{R}-\{-8, 3\}$

d) $\frac{2x+3}{4x+1},\ x\in\mathbf{R}-\left\{-\frac{1}{4},3\right\}$ e) $\frac{2x-8}{3},\ x\in\mathbf{R}-\{-4, 0\}$

f) $\frac{4x^2+40x}{x-3},\ x\in\mathbf{R}-\{0, 3, 10\}$

1.14. a) $\frac{-3x^2+12x}{x+3},\ x\in\mathbf{R}-\{3\}$ b) $\frac{2x^2-4}{3},\ x\in\mathbf{R}-\{0\}$ c) $\frac{3x+2}{2x^2+2},\ x\in\mathbf{R}-\{-1, 1\}$

d) $2x^2-x,\ x\in\mathbf{R}$ e) $\frac{3}{5x+2},\ x\in\mathbf{R}-\left\{-\frac{2}{5}\right\}$ f) $\frac{x^2-4}{x^2+5},\ x\in\mathbf{R}$

1.15. a) $x-2,\ x\in\mathbf{R}-\{-2, 1\}$ b) $\frac{x^2+1}{2x^2},\ x\in\mathbf{R}-\{-2, 0, 2\}$ c) $\frac{x-1}{2},\ x\in\mathbf{R}$

d) $\frac{2x+1}{x},\ x\in\mathbf{R}-\left\{-\frac{1}{2},0\right\}$ e) $\frac{2x-2}{(x-3)^2},\ x\in\mathbf{R}-\{-3, 3\}$

f) $\frac{x^2+1}{x^2-4},\ x\in\mathbf{R}-\{-3, -2, 2, 3\}$.

1.16. a) $\frac{x-2}{3x^2-4},\ x\in\mathbf{R}-\left\{-\frac{2\sqrt{3}}{2},\frac{2\sqrt{3}}{2}\right\}$ b) $\frac{x^3+x}{9x^2+3x+1},\ x\in\mathbf{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ c) $5x+1$,

$x\in\mathbf{R}-\left\{-2,\frac{1}{5}\right\}$ d) $\frac{2x^2+2x+4}{x^2+3},\ x\in\mathbf{R}-\{1\}$ e) $\frac{18x^2-6x+2}{x-2},\ x\in\mathbf{R}-\left\{-\frac{1}{3},2\right\}$

f) $\frac{x^2-3x+3}{x^2},\ x\in\mathbf{R}-\{0, 3\}$

1.17. a) $\frac{12x^2}{16x},\ x\in\mathbf{R}-\{0\}$ b) $\frac{-4x^5}{18x^3},\ x\in\mathbf{R}-\{0\}$ c) $\frac{-3}{2-x},\ x\in\mathbf{R}-\{2\}$

d) $\frac{5x-20}{2x-8},\ x\in\mathbf{R}-\{4\}$ e) $\frac{x^2-x-2}{x^2-2x},\ x\in\mathbf{R}-\{0, 2\}$

f) $\frac{2x^2-6x}{x^2-9},\ x\in\mathbf{R}-\{-3, 3\}$

1.18. a) $\frac{3x-18}{x^2-6x},\ x\in\mathbf{R}-\{0, 6\}$ b) $\frac{-3x^3+3x^2}{6x^2-3x^3},\ x\in\mathbf{R}-\{0, 2\}$

c) $\frac{3x+3}{x^2-x-2},\ x\in\mathbf{R}-\{-1, 2\}$ d) $\frac{2x^2+2x}{2x^2+4x+2},\ x\in\mathbf{R}-\{-1\}$

e) $\frac{5x^2+10x+20}{x^3-8},\ x\in\mathbf{R}-\{2\}$ f) $\frac{x^2+3x+2}{x^3+1},\ x\in\mathbf{R}-\{-1\}$

1.19. a) $\frac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2-4x-12},\ x\in\mathbf{R}-\{-3, -2, 2\}$ b) $\frac{x^3-4x}{x^4-3x^2-4},\ x\in\mathbf{R}-\{-2, 2\}$

c) $\frac{2x^2-4x+2}{x^3-3x^2+3x-1},\ x\in\mathbf{R}-\{1\}$ d) $\frac{3x^2+15x+15}{x^3+4x^2-5},\ x\in\mathbf{R}-\{1\}$

1.20. a) $\frac{3x^2}{5x^3},\ x\in\mathbf{R}-\{0\}$ b) $\frac{x^2+x}{x^2-2x},\ x\in\mathbf{R}-\{0, 2\}$ c) $\frac{81-x^2}{27+3x},\ x\in\mathbf{R}-\{-9\}$

d) $\frac{6-2x}{-x^2+6x-9},\ x\in\mathbf{R}-\{3\}$ e) $\frac{3x^3-x^2}{x^4+5x^2},\ x\in\mathbf{R}-\{0\}$ f) $\frac{x^4-9}{x^3+3x},\ x\in\mathbf{R}-\{0\}$

Odpowiedzi do zadań

1. Ułamki algebraiczne. Równania i nierówności wymierne. Funkcje wymierne

Ułamek algebraiczny. Skracanie i rozszerzenie ułamków algebraicznych

1.1. a), b), e)

1.2. a) $\boldsymbol{R}-\{2\}$ b) $\boldsymbol{R}-\{-1, 5\}$ c) R d) $\boldsymbol{R}-\{-3, 3\}$ e) $\boldsymbol{R}-\{-1\}$ f) $\boldsymbol{R}-\{-2\}$

1.3. a) $\boldsymbol{R}-\{2, 3\}$ b) $\boldsymbol{R}-\{0, 4\}$ c) $\boldsymbol{R}-\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ d) $\boldsymbol{R}-\{9\}$ e) $\boldsymbol{R}-\{-2, 2\}$

f) $\boldsymbol{R}-\{1\}$ g) $\boldsymbol{R}-\{-1\}$ h) $\boldsymbol{R}-\{-1, 1, 3\}$ i) $\boldsymbol{R}-\{0, 1\}$

1.5. a) $\frac{2}{3}$ b) 0 c) $\frac{9}{7}$ d) 1

1.6. a) $1+\frac{1}{3}\sqrt{2}$ b) $\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}$ c) $1+\frac{3}{4}\sqrt{2}$ d) $42+28\sqrt{2}$

1.7. a) $\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}{8}$ b) $\frac{2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)}{3}$ c) $\frac{5\left(\sqrt[3]{5}-1\right)}{2}$ d) $\frac{\sqrt[3]{3}+1}{4}$

1.10. a) $m \in (1, +\infty)$ b) $m \in \left(-\infty, -\frac{5}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}, +\infty\right)$ c) $m \in \left(0, \frac{4}{9}\right)$

1.11. a) $\frac{1}{2}x^4,\ x \in \boldsymbol{R}-\{0\}$ b) $-5x,\ x \in \boldsymbol{R}-\{0\}$ c) $-7x^3+5x^2,\ x \in \boldsymbol{R}-\{0\}$

d) $\frac{-2}{x},\ x \in \boldsymbol{R}-\{0\}$ e) $\frac{1}{x},\ x \in \boldsymbol{R}-\{0\}$ f) $x,\ x \in \boldsymbol{R}-\{0\}$

1. 12. a) $\frac{x-2}{3},\ x \in \boldsymbol{R}-\{-2\}$ b) $\frac{1}{5-x},\ x \in \boldsymbol{R}-\{-5, 5\}$ c) $-1,\ x \in R-\left\{-1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right\}$

d) $9x-2,\ x \in \boldsymbol{R}-\left\{-\frac{2}{9}\right\}$ e) $\frac{x-1}{5},\ x \in \boldsymbol{R}-\{1\}$ f) $\frac{3x+1}{3x-1},\ x \in \boldsymbol{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$

1.13. a) $\frac{x-3}{x-2},\ x \in \boldsymbol{R}-\{-2, 2\}$ b) $\frac{x-3}{x+5},\ x \in \boldsymbol{R}-\{-5, 3\}$ c) $\frac{-2x+2}{3x-9},\ x \in \boldsymbol{R}-\{-8, 3\}$

d) $\frac{2x+3}{4x+1},\ x \in \boldsymbol{R}-\left\{-\frac{1}{4}, 3\right\}$ e) $\frac{2x-8}{3},\ x \in \boldsymbol{R}-\{-4, 0\}$

f) $\frac{4x^2+40x}{x-3},\ x \in \boldsymbol{R}-\{0, 3, 10\}$

1.14. a) $\frac{-3x^2+12x}{x+3},\ x \in \boldsymbol{R}-\{3\}$ b) $\frac{2x^2-4}{3},\ x \in \boldsymbol{R}-\{0\}$ c) $\frac{3x+2}{2x^2+2},\ x \in \boldsymbol{R}-\{-1, 1\}$

d) $2x^2-x,\ x \in \boldsymbol{R}$ e) $\frac{3}{5x+2},\ x \in \boldsymbol{R}-\left\{-\frac{2}{5}\right\}$ f) $\frac{x^2-4}{x^2+5},\ x \in \boldsymbol{R}$

1.15. a) $x-2,\ x \in \boldsymbol{R}-\{-2, 1\}$ b) $\frac{x^2+1}{2x^2},\ x \in \boldsymbol{R}-\{-2, 0, 2\}$ c) $\frac{x-1}{2},\ x \in \boldsymbol{R}$

d) $\frac{2x+1}{x},\ x \in \boldsymbol{R}-\left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$ e) $\frac{2x-2}{(x-3)^2},\ x \in \boldsymbol{R}-\{-3, 3\}$

f) $\frac{x^2+1}{x^2-4},\ x \in \boldsymbol{R}-\{-3, -2, 2, 3\}$.

1.16. a) $\frac{x-2}{3x^2-4},\ x \in \boldsymbol{R}-\left\{-\frac{2\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{2}\right\}$ b) $\frac{x^3+x}{9x^2+3x+1},\ x \in \boldsymbol{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ c) $5x + 1$, $x \in \boldsymbol{R}-\left\{-2, \frac{1}{5}\right\}$ d) $\frac{2x^2+2x+4}{x^2+3},\ x \in \boldsymbol{R}-\{1\}$ e) $\frac{18x^2-6x+2}{x-2},\ x \in \boldsymbol{R}-\left\{-\frac{1}{3}, 2\right\}$

f) $\frac{x^2-3x+3}{x^2},\ x \in \boldsymbol{R}-\{0, 3\}$

1.17. a) $\frac{12x^2}{16x},\ x \in \boldsymbol{R}-\{0\}$ b) $\frac{-4x^5}{18x^3},\ x \in \boldsymbol{R}-\{0\}$ c) $\frac{-3}{2-x},\ x \in \boldsymbol{R}-\{2\}$

d) $\frac{5x-20}{2x-8},\ x \in \boldsymbol{R}-\{4\}$ e) $\frac{x^2-x-2}{x^2-2x},\ x \in \boldsymbol{R}-\{0, 2\}$

f) $\frac{2x^2-6x}{x^2-9},\ x \in \boldsymbol{R}-\{-3, 3\}$

1.18. a) $\frac{3x-18}{x^2-6x},\ x \in \boldsymbol{R}-\{0, 6\}$ b) $\frac{-3x^3+3x^2}{6x^2-3x^3},\ x \in \boldsymbol{R}-\{0, 2\}$

c) $\frac{3x+3}{x^2-x-2},\ x \in \boldsymbol{R}-\{-1, 2\}$ d) $\frac{2x^2+2x}{2x^2+4x+2},\ x \in \boldsymbol{R}-\{-1\}$

e) $\frac{5x^2+10x+20}{x^3-8},\ x \in \boldsymbol{R}-\{2\}$ f) $\frac{x^2+3x+2}{x^3+1},\ x \in \boldsymbol{R}-\{-1\}$

1.19. a) $\frac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2-4x-12},\ x \in \boldsymbol{R}-\{-3, -2, 2\}$ b) $\frac{x^3-4x}{x^4-3x^2-4},\ x \in \boldsymbol{R}-\{-2, 2\}$

c) $\frac{2x^2-4x+2}{x^3-3x^2+3x-1},\ x \in \boldsymbol{R}-\{1\}$ d) $\frac{3x^2+15x+15}{x^3+4x^2-5},\ x \in \boldsymbol{R}-\{1\}$

1.20. a) $\frac{3x^2}{5x^3},\ x \in \boldsymbol{R}-\{0\}$ b) $\frac{x^2+x}{x^2-2x},\ x \in \boldsymbol{R}-\{0, 2\}$ c) $\frac{81-x^2}{27+3x},\ x \in \boldsymbol{R}-\{-9\}$

d) $\frac{6-2x}{-x^2+6x-9},\ x \in \boldsymbol{R}-\{3\}$ e) $\frac{3x^3-x^2}{x^4+5x^2},\ x \in \boldsymbol{R}-\{0\}$ f) $\frac{x^4-9}{x^3+3x},\ x \in \boldsymbol{R}-\{0\}$

1.21. a) $\frac{x^3-9x}{x^2+4x+3},\ x \in \mathbf{R}-\{-3,-1\}$ b) $\frac{4x^2+12x+9}{2x^2-7x-15},\ x \in \mathbf{R}-\left\{-1\frac{1}{2},5\right\}$

c) $\frac{x^4+2x^2-3}{x^3+3x},\ x \in \mathbf{R}-\{0\}$ d) $\frac{3x^3-3x^2+x-1}{3x^3+x},\ x \in \mathbf{R}-\{0\}$

e) $\frac{8x^3-27}{12x^3+18x^2+27x},\ x \in \mathbf{R}-\{0\}$ f) $\frac{10x^3+5x^2+8x+4}{5x^3+5x^2+4x+4},\ x \in \mathbf{R}-\{-1\}$

Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych

1.22. a) $\frac{-3x+6}{8}$ b) $\frac{10x^2+5x-5}{6}$ c) $\frac{-x^2+x}{5}$ d) $\frac{-x^2-12x+13}{3}$

e) $\frac{3x^2-11x-22}{10}$ f) $\frac{-3x^2-8x+25}{16}$

1.23. a) $\frac{7-x}{x+2},\ x \in \mathbf{R}-\{-2\}$ b) $\frac{5-x}{x-3},\ x \in \mathbf{R}-\{3\}$ c) $\frac{8x+2}{x+1},\ x \in \mathbf{R}-\{-1\}$

d) $\frac{x+1}{x+5},\ x \in \mathbf{R}-\{-5\}$ e) $\frac{x+11}{x-5},\ x \in \mathbf{R}-\{5\}$ f) $\frac{x-7}{x-1},\ x \in \mathbf{R}-\{1\}$

1.24. a) $-1,\ x \in \mathbf{R}-\{-1, 1\}$ b) $\frac{-2}{x^2},\ x \in \mathbf{R}-\{0, 8\}$ c) $\frac{1}{x+4},\ x \in \mathbf{R}-\{-4, 0\}$

d) $\frac{-1}{x-3},\ x \in \mathbf{R}-\{-3, 3\}$ e) $\frac{x+2}{x},\ x \in \mathbf{R}-\{0, 2\}$ f) $\frac{3}{x-3},\ x \in \mathbf{R}-\{3\}$

1.25. a) $\frac{-2}{x-4},\ x \in \mathbf{R}-\{4\}$ b) $\frac{10x-3}{x-2},\ x \in \mathbf{R}-\{2\}$ c) $\frac{-4x+7}{4x-6},\ x \in \mathbf{R}-\left\{1\frac{1}{2}\right\}$

d) $\frac{13x}{4x-1},\ x \in \mathbf{R}-\left\{\frac{1}{4}\right\}$ e) $\frac{x^2+11}{4\left(1-x^2\right)},\ x \in \mathbf{R}-\{-1, 1\}$

f) $\frac{3x^2+6x-4}{2x^2-8},\ x \in \mathbf{R}-\{-2, 2\}$

1.26. a) $\frac{2x-1}{x^2},\ x \in \mathbf{R}-\{0\}$ b) $\frac{x^2+5x}{2(x+3)},\ x \in \mathbf{R}-\{-3\}$ c) $\frac{-3x-2}{5x(x-1)},\ x \in \mathbf{R}-\{0, 1\}$

d) $\frac{-x^2+5x-2}{4(x+2)},\ x \in \mathbf{R}-\{-2\}$ e) $\frac{x^2+4x-12}{x(x-3)},\ x \in \mathbf{R}-\{0, 3\}$

f) $\frac{-7x-2}{3x(x+2)},\ x \in \mathbf{R}-\{-2, 0\}$

1.27. a) $\frac{2x}{(x-2)(x+2)},\ x \in \mathbf{R}-\{-2, 2\}$ b) $\frac{5x-9}{(x-3)(x+3)},\ x \in \mathbf{R}-\{-3, 3\}$

c) $\frac{7x^2+3x}{(2x+1)^2},\ x \in \mathbf{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ d) $\frac{x^2-4x-7}{(2x+3)^2},\ x \in \mathbf{R}-\left\{-1\frac{1}{2}\right\}$

e) $\frac{-15}{(x-1)(x-4)},\ x \in \mathbf{R}-\{1, 4\}$ f) $\frac{2x^2+20}{(x-5)(2+x)},\ x \in \mathbf{R}-\{-2, 5\}$

1.28. a) $\frac{-3x^2+2x+1}{x^2},\ x \in \mathbf{R}-\{0\}$ b) $\frac{x^2+3x+3}{x^3},\ x \in \mathbf{R}-\{0\}$

c) $\frac{x^2+9x}{x^2-1},\ x \in \mathbf{R}-\{-1, 1\}$ d) $\frac{-6x^2+3x+1}{(x+1)^2},\ x \in \mathbf{R}-\{-1\}$

e) $\frac{-3x^2+5x-6}{x^2(x-2)},\ x \in \mathbf{R}-\{0, 2\}$ f) $\frac{x^2+3x-4}{2(x+3)(x+2)},\ x \in \mathbf{R}-\{-3, -2\}$

1.29. a) $\frac{2x^2+15x+26}{(2x-5)(2x+5)},\ x \in \mathbf{R}-\left\{-2\frac{1}{2},2\frac{1}{2}\right\}$ b) $\frac{5x^2-10}{(x+2)(x-3)},\ x \in \mathbf{R}-\{-2, 3\}$

c) $\frac{2x^2+12x-82}{(x+3)(x-7)},\ x \in \mathbf{R}-\{-3, 7\}$ d) $\frac{-x^2-9x-11}{(x+1)(x+2)},\ x \in \mathbf{R}-\{-2, -1\}$

1.30. a) $\frac{5-x}{x(x-3)},\ x \in \mathbf{R}-\{0, 3\}$ b) $\frac{4x^2-2x+1}{x(2x-5)},\ x \in \mathbf{R}-\left\{0,2\frac{1}{2}\right\}$

c) $\frac{x^2-3x+3}{x^3-1},\ x \in \mathbf{R}-\{1\}$ d) $\frac{1}{2\left(x^2+4\right)},\ x \in \mathbf{R}-\{0\}$

e) $\frac{-5}{x(x-5)},\ x \in \mathbf{R}-\{0, 5\}$ f) $\frac{-2x^2-6}{x^2\left(3x^2+1\right)},\ x \in \mathbf{R}-\{0\}$

1.31. a) $\frac{x^3+x^2-4x-3}{x^2(x-1)},\ x \in \mathbf{R}-\{-1, 0\}$ b) $\frac{1}{x(x-2)},\ x \in \mathbf{R}-\{0, 2\}$

c) $\frac{5x^2+2}{4x^2-9},\ x \in \mathbf{R}-\left\{-1\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\right\}$ d) $\frac{2x^2-5x-7}{4-x^2},\ x \in \mathbf{R}-\{-2, 2\}$

e) $\frac{2x^2-8x+15}{(x-3)^2},\ x \in \mathbf{R}-\{3\}$ f) $\frac{2x^2-5x-1}{x(x-1)^2},\ x \in \mathbf{R}-\{0, 1\}$

1.32. a) $\frac{2x^2+x-6}{2(x-4)^2},\ x \in \mathbf{R}-\{0, 4\}$ b) $\frac{-4x^2-3x+5}{x(x-5)^2},\ x \in \mathbf{R}-\{0, 5\}$

c) $\frac{7x-2}{(x+1)(x-2)^2},\ x \in \mathbf{R}-\{-1, 0, 2\}$ d) $\frac{x^3+16x^2+30x+9}{(x-3)^2x(x+3)},\ x \in \mathbf{R}-\{-3, 0, 3\}$

Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych

1.33. a) $\frac{x}{2},\ x \in \mathbf{R}-\{0\}$ b) $\frac{x-1}{2x},\ x \in \mathbf{R}-\{0\}$ c) $\frac{1}{x^2},\ x \in \mathbf{R}-\{-1, 0\}$ d) $\frac{8}{x-3},$
$x \in \mathbf{R}-\{-3, 3\}$ e) $\frac{4}{3},\ x \in \mathbf{R}-\{0, 1\}$ f) $\frac{15}{7x(x+2)},\ x \in \mathbf{R}-\{-2, 0, 2\}$

1.34. a) $\frac{4x}{x-2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{2\}$ b) $\frac{2}{2x-3}$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

c) $\frac{x-1}{x+9}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-9, -1, 9\}$ d) $\frac{2x^2}{x-2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-2, 2, 4\}$

e) $\frac{2x+4}{x-1}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$ f) $\frac{-2x}{(x-6)(x-4)}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-4, 4, 6\}$

1.35. a) $\frac{1}{2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 0, 1\}$ b) 1, $x \in \boldsymbol{R} - \{-2, 0, 2\}$ c) $-\frac{x}{4}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-7, -1, 7\}$

d) $6x$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$ e) -2, $x \in \boldsymbol{R} - \{-3, -2, 2\}$ f) $-\frac{x}{2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1, 5\}$

1.36. a) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-4}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-3, -2, 1, 2\}$ b) $\frac{x^2+x-2}{x^2+x-6}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-3, -2, 2\}$

c) $\frac{3x^2+13x+12}{2x^2+3x+1}$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{-1\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ d) $\frac{3x-1}{5x-2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{-1, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right\}$

e) $\frac{8x+8}{4x+1}$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{-2, -\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 2\right\}$ f) $\frac{x+5}{5x-2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{-3, -1, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right\}$

1.37. a) $\frac{1}{x+5}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-5, -3, -1, 1\}$ b) $\frac{2}{x+5}$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{-5, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$

c) $\frac{3x^2+4x-4}{x-3}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-3, 2, 3, 7\}$ d) $\frac{3x-1}{4x-1}$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{-3, -1, \frac{1}{4}\right\}$

e) $\frac{x^2-5\cancel{x}-5}{4x-12}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{1, 3\}$ f) $\frac{8x+1}{3x}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{0, 2\}$

1.38. a) $\frac{4}{x^3}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{0\}$ b) $\frac{1}{10}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{0\}$ c) $\frac{3x^2-5x-1}{2x-2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{0, 1\}$

d) $\frac{6x}{x-1}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{0, 1\}$ e) $\frac{12}{x}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 0\}$ f) $x - 5$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-6, 6\}$

1.39. a) $\frac{5}{x}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{0, 3\}$ b) $7x - 8$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-2, 2\}$ c) $\frac{x^2-5x}{2x+10}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-5, 5\}$

d) $\frac{-5x}{x+3}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-3, 3\}$ e) $\frac{2x^2-3x+1}{3x+3}$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{-1, \frac{1}{2}, 1\right\}$

f) $\frac{5x+1}{x}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{0, 4\}$

1.40. a) $\frac{2x-4}{x+1}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-2, -1, 1, 2\}$ b) $\frac{2x^2-4x}{x^2+5x+6}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-3, -2, 2\}$

c) $\frac{25x-5}{2x-6}$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{-3, \frac{1}{5}, 3\right\}$ d) $\frac{3x+9}{20x+10}$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right\}$

e) $\frac{2x+5}{x+2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{-7, -2, \frac{1}{3}, 2\right\}$ f) $\frac{2x^2+7x+6}{3x^2-x-4}$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{-1\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{7}, 1\frac{1}{3}, 5\right\}$

1.41. a) $\frac{x+3}{2x+2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-8, -3, -1, 1\}$ b) $\frac{1}{x}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-6, 0, 5\}$

c) $\frac{3}{2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 5\}$ d) $\frac{7x-14}{2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-5, -2\}$ e) $2x - 3$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{-1\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}\right\}$ f) $\frac{x^2+x+2}{x+2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-5, -2, 2\}$

Działania na ułamkach algebraicznych

1.42. a) $\frac{3x+3}{2x}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 0\}$ b) $\frac{4x+23}{12-3x}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{0, 4\}$

c) $\frac{25x^2-4}{x^2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{0\}$ d) $\frac{x+2}{3x+1}$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{-1, \frac{-1}{3}\right\}$

e) $\frac{2}{x+2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-3, -2\}$ f) $\frac{20-2x}{x}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-5, -3, 0\}$

1.43. a) $\frac{1}{2x^2-x}$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ b) $\frac{-x^2+3x+10}{3}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{2, 5\}$

c) $\frac{2}{5x-5}$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{\frac{-2}{3}, 1\right\}$ d) $\frac{-1}{x^2-2x+1}$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{1, 2\frac{1}{2}\right\}$

e) $\frac{-x-3}{2x}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{0, 2\}$ f) $\frac{-x^2-x}{x+2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-5, -2, -1, 1\}$

1.44. a) $\frac{1}{1-a^2}$, $a \in \boldsymbol{R} - \{-1, 0, 1\}$ b) 1, $a \in \boldsymbol{R} - \left\{-2, -\frac{1}{2}, 0\right\}$ c) $\frac{2-a}{2}$, $a \in \boldsymbol{R} - \{-2, 0\}$

d) $\frac{2a-6}{a+3}$, $a \in \boldsymbol{R} - \{-3, 0, 3\}$ e) $\frac{3a-4}{a}$, $a \in \boldsymbol{R} - \{0\}$ f) $\frac{a+1}{2a^2}$, $a \in \boldsymbol{R} - \{0\}$

1.45. a) $\frac{1}{a+1}$, $a \in \boldsymbol{R} - \{-1, 0, 1\}$ b) $\frac{2-a}{2}$, $a \in \boldsymbol{R} - \{-1, 0, 2\}$

c) $\frac{-1}{2a}$, $a \in \boldsymbol{R} - \{-2, 0, 1, 2\}$ d) $2a + 6$, $a \in \boldsymbol{R} - \{-3, 0\}$

e) $\frac{a^2+a-6}{2a+2}$, $a \in \boldsymbol{R} - \{-2, -1, 2\}$ f) $\frac{1}{3}$, $a \in \boldsymbol{R} - \left\{-1, -\frac{5}{14}, 0\right\}$

1.46. a) $\frac{a}{2}$, $a \in \boldsymbol{R} - \{-3, -2, -1\}$ b) $\frac{a+5}{4}$, $a \in \boldsymbol{R} - \{-2, 5\}$

c) $\frac{4}{a-1}$, $a \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1, 3\}$ d) $\frac{1}{a^2}$, $a \in \boldsymbol{R} - \{-1, 0, 1, 3\}$

1.57. a) $\frac{x^2+3x+1}{x+1}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$ b) $\frac{(x+3)^2}{2x}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 0, 1\}$

c) $\frac{1}{x^2+x+1}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1, 2\}$ d) 1, $x \in \boldsymbol{R} - \{-2, -1, 1, 2\}$

1.58. a) $1-x$, $x \in \mathbf{R} - \{-1, 0, 1\}$ b) $\frac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$ c) $\frac{2x}{x+2}$, $x \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$

d) $\frac{-1}{x+2}$, $x \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$

1.59. a) $P(x) = 2$, $Q(x) = 3$, gdzie $x \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{3}, 2\right\}$

b) $P(x) = 2x + 3$, $Q(x) = 5$, gdzie $x \in \mathbf{R} - \{2, 4\}$

c) $P(x) = 4$, $Q(x) = x + 1$, gdzie $x \in \mathbf{R} - \left\{-1\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right\}$

1.60. a) $a = 2$, $b = -1$, $c = 4$ b) $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$

1.61. *wskazówka:* Daną Równość doprowadź do postaci $2\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 7\left(\frac{b}{a}\right) + 3 = 0$. Następnie rozwiąż równanie $2x^2 - 7x + 3 = 0$, gdzie $x = \frac{b}{a}$.

1.62. *wskazówka:* Podstaw $a = -b - c$ do wyrażenia $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$.

1.63. *wskazówka:* Równość $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ pomnóż kolejno stronami przez $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$. Z otrzymanych zależności wyznacz $\frac{x^2}{a^2}, \frac{y^2}{b^2}, \frac{z^2}{c^2}$. Następnie przekształć sumę $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, korzystając z założenia $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$.

Równania wymierne

1.64. a) $x = -2$ b) Równanie sprzeczne c) $x \in \left\{2\frac{1}{2}, 3\right\}$ d) $x \in \{0, 2\}$ e) $x = \frac{1}{3}$

f) $x = -2$

1.65. a) $x \in \{-4, 4\}$ b) $x \in \{-2, -1\}$ c) $x = 1$ d) $x \in \{-3, -1\}$ e) $x \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$

f) $x \in \{-2, 3\}$

1.66. a) $x \in \left\{\frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right\}$ b) $x \in \left\{-1, \frac{1-\sqrt{29}}{2}, \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right\}$ c) $x = \frac{1}{3}$

d) $x \in \{-\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$ e) Równanie sprzeczne f) $x = \sqrt[3]{2}$

1.67. a) $x \in \{-4, 4\}$ b) $x = 3$ c) Równanie sprzeczne d) $x \in \mathbf{R} - \{2\}$

e) $x \in \{-2, 3\}$ f) $x = -1\frac{1}{6}$

1.68. a) $x = -2\frac{1}{2}$ b) $x = 2$ c) Równanie sprzeczne d) $x \in \{0, 1\}$ $x \in \left\{1, 1\frac{3}{4}\right\}$

f) $x \in \{0, 5\}$

1.69. a) $x = -1\frac{7}{11}$ b) $x = 2$ c) Równanie sprzeczne d) $x \in \left\{1, 1\frac{7}{11}\right\}$

e) $x \in \{-2, 0\}$ f) $x \in \left\{\frac{-3}{4}, 1\right\}$

1.70. a) $x \in \left\{-1\frac{3}{4}, 3\right\}$ b) $x = -1$ c) $x = 5$ d) Równanie sprzeczne

e) $x = -2$ f) $x \in \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$

1.71. a) $x \in \left\{\frac{-1}{3}, \frac{1}{12}\right\}$ b) $x \in \left\{\frac{-1}{2}, 3\right\}$ c) $x \in \{-3, -2\}$ d) $x \in \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$

e) $x \in \left\{1, 4\frac{2}{3}\right\}$ f) $x \in \{-1-\sqrt{3}, 0, -1+\sqrt{3}\}$

1.72. a) $x = 3$ b) $x = 1\frac{1}{2}$ c) $x = -1\frac{1}{2}$ d) $x \in \{-2, 3\}$

1.73. a) $x \in \{-1, 1, 2, 4\}$ b) $x \in \{-1, 1, 5, 7\}$ c) $x \in \{-1-2\sqrt{2}, -2, 0, -1+2\sqrt{2}\}$

d) $x \in \left\{-2, -1\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}\right\}$ e) $x \in \{-2, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}$ f) $x \in \{-2, 1\}$

1.74. a) $x \in \left\{\frac{1}{9}, \frac{5}{9}\right\}$ b) $x \in \left\{-6, -4\frac{2}{3}\right\}$ c) $x \in \left\{-3\frac{1}{2}, -2, -1\frac{1}{2}, 0\right\}$

d) Równanie sprzeczne e) $x = 2$ f) $x \in \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$

1.75. $m \in \{-6, 0, 2\}$; jeśli $m = 0$, to $x = 0$; jeśli $m = 2$, to $x = -2$; jeśli $m = -6$, to $x = -18$.

1.76. $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

1.77. $m \in \{-3, -2\}$; jeśli $m = -3$, to $x = -1$; jeśli $m = -2$, to $x = 1$

1.78. $a \in \mathbf{R} - \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$, $x = \frac{2a}{2a-1}$

1.79. $k \in \{-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 18\}$

1.80. $a \in \left\{3\frac{1}{2}, 6\right\}$

1.81. $p \in (-\infty, -5) \cup \left(-1, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

1.82. $k \in \left(-\infty, -1\frac{1}{9}\right) \cup \{-1\}$

1.83. $a \in \left(-\infty, -1\frac{3}{4}\right) \cup \left(2\frac{3}{4}, 3\right) \cup (3, +\infty)$

Zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych

1.84. $\frac{3}{7}$

1.85. $\frac{5}{4}$

1.86. $V = 52$ km/h

1.87. 20 dni

1.88. w pierwszym 20 zasłon, w drugim 12 zasłon

1.89. 60 dni; *wskazówka:* Niech x, gdzie $x \in \boldsymbol{N}_+$, oznacza liczbę dni potrzebnych na wykonanie zamówienia. Wówczas po uprawnieniu produkcji pozostało do zrobienia jeszcze 240 stołków, a planowany czas na ich wykonanie to $\frac{1}{3}x$ dni.

1.90. Praca miała być wykonana w ciągu 40 dni. Dziennie przekraczano plan o 25%.

1.91. Pierwszy w 2 dni, drugi w 3 dni, trzeci w 6 dni.

1.92. 20 godzin, 30 godzin

1.93. ojciec 15 dni, syn 60 dni.

1.94. 480 kg

1.95. kran A – 6 minut, kran B – 12 minut

1.96. Drugi kran napełnia pusty zbiornik w ciągu 3 godzin, pierwszy kran opróżnia pełny zbiornik w czasie 4 godzin.

1.97. 50 godzin, 40 godzin

1.98. a) 45 km/h, 50 km/h b) 4 h

1.99. 12 km/h, 15 km/h

1.100. 2 m, 3 m

1.101. 54 km/h

1.102. 9 km

1.103. 3 km/h

Nierówności wymierne

1.104. a) $x \in (-6, 5)$ b) $x \in (-\infty, -3) \cup \langle 2, +\infty)$ c) $x \in \langle 0, 1\rangle \cup (4, +\infty)$
d) $x \in \left(-7, -\sqrt{5}\right\rangle \cup \left(-1, \sqrt{5}\right\rangle$ e) $x \in (0, 1) \cup (3, +\infty)$
f) $x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left\langle \frac{1}{2}, \sqrt{2}\right) \cup \langle 2, +\infty)$

1.105. a) $x \in (8, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 3)$ c) $x \in (-2, +\infty)$ d) $x \in (-3, 3)$
e) $x = 1\frac{1}{2}$ f) $x \in \boldsymbol{R} - \{-2\}$

1.106. a) $x \in (-\infty, 0) \cup \langle 12, +\infty)$ b) $x \in \left(-2, \frac{1}{2}\right)$ c) $x \in \langle -14, -5)$ d) $x \in \boldsymbol{R} - \{2\}$
e) $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ f) nierówność sprzeczna

1.107. a) $x \in \boldsymbol{R} - \{-3\}$ b) $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 6)$ c) $x \in (-\infty, 0) \cup \langle 1, 4\rangle$
d) $x \in \left(-\infty, \frac{-1}{2}\right\rangle$ e) $x \in \boldsymbol{R}$ f) $x \in \left(-2\frac{1}{2}, 0\right\rangle \cup \{1\} \cup \left(2\frac{1}{2}, +\infty\right)$

1.108. a) $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (2, +\infty)$ b) $x \in (-3, -2) \cup (-1, 1)$
c) $x \in \langle -3, -2\rangle \cup (-1, 5)$ d) $x \in (-\infty, 1) \cup \left(1\frac{1}{3}, 2\right)$ e) $x \in (-2, -1\rangle \cup \left\langle \frac{2}{3}, 1\right\rangle$
f) $x \in \langle -2, 1\rangle \cup \langle 2, 3)$

1.109. a) $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1\rangle$ b) $x \in \left\langle -\frac{2}{3}, 3\right) \cup (3, +\infty)$ c) $x \in (-1, 1) \cup (4, +\infty)$
d) $x \in \left(-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ e) $x \in \langle -2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2\rangle$
f) $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1\rangle \cup \left\langle \frac{1}{3}, 2\right\rangle$

1.110. a) $x \in \left(\frac{-3}{4}, 0\right) \cup \left(0, 1\frac{1}{2}\right)$ b) $x \in \left(-\infty, -1\frac{1}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, +\infty\right)$ c) $x \in \left(-\infty, 2\frac{1}{3}\right)$
d) $x \in \left\langle \frac{-8}{15}, \frac{-1}{2}\right) \cup \left(\frac{-1}{2}, 0\right\rangle$ e) $x = 2$; *wskazówka:* Podstaw $t = \frac{x^2}{x-1}$.
f) $x \in \{-2\} \cup \langle 1, 4\rangle$; *wskazówka:* Podstaw $t = \frac{(x-2)^2}{x}$.

1.111. a) $x \in (-\infty, 0)$ b) $x \in \langle 1, 3\rangle$ c) $x \in (-2, 1) \cup \langle 3, +\infty)$ d) $x \in \{0\} \cup (5, +\infty)$
e) $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$ f) $x \in (-5, -3) \cup (1, 3)$

1.112. a) $x \in (-8, 1) \cup (1, 10)$ b) $x \in (0, 2\rangle$ c) $x \in \left\langle \frac{3}{4}, +\infty\right)$
d) $x \in (-11, -4) \cup \left(-4, -1\frac{2}{3}\right)$ e) $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0\rangle \cup \left\langle 1\frac{3}{5}, 2\right) \cup \left(2, 2\frac{1}{2}\right\rangle$
f) $x \in (-\infty, 3)$

1.113. $a \in \langle 1, 2) \cup (2, +\infty)$

1.114. $k \in (2, +\infty)$

1.115. $m \in \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)$

Dowodzenie z zastosowaniem średniej arytmetycznej, średniej geometrycznej i średniej kwadratowej kilku liczb

1.116. *wskazówka:* Skorzystaj z zależności pomiędzy Średnią arytmetyczną i średnią geometryczną dodatnich liczb a i b.

1.117. *wskazówka:* Skorzystaj z zależności pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią geometryczną trzech liczb dodatnich $9x$, y, $3z$.

1.118. *wskazówka:* Skorzystaj z zależności pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią kwadratową trzech dodatnich liczb p, q, $\boldsymbol{R}$.

1.119. *wskazówka:* Skorzystaj z zależności pomiędzy średnią geometryczną i średnią kwadratową dodatnich liczb a i b.

1.120. *wskazówka:* Wyrażenie $(1+x)\cdot(1+y)$ jest równe $1+xy+(x+y)$. Teraz skorzystaj z zależności pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną liczb dodatnich x i y.

1.121. *wskazówka:* Wykorzystaj, że $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$ dla dowolnych dodatnich liczb a, b.

1.122. *wskazówka:* Skorzystaj z zależności pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią geometryczną trzech liczb dodatnich.

1.123. *wskazówka:* Przedstaw lewą stronę nierówności w postaci sumy $a^4+\frac{64}{a^2}+\frac{64}{a^2}$. Następnie skorzystaj z zależności pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią geometryczną trzech liczb dodatnich.

1.128. *wskazówka:* Wyłącz iloczyn xyz poza nawias.

1.129. *wskazówka:* Skorzystaj z zależności pomiędzy średnią kwadratową i średnią arytmetyczną dwóch liczb dodatnich.

1.130. *wskazówka:* Skorzystaj z zależności pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią geometryczną dwóch liczb dodatnich.

Funkcja homograficzna

1.131. I. *a)* $\vec{u}=[3,0]$ b) $f(x)=\frac{2}{x-3}$ c) $D=\boldsymbol{R}-\{3\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{0\}$ d) funkcja f nie ma miejsc zerowych e) $x\in(-\infty,3)$

II. *a)* $\vec{u}=[0,-1]$ b) $g(x)=\frac{2}{x}-1$ c) $D=\boldsymbol{R}-\{0\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{-1\}$ d) 2

e) $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

III. *a)* $\vec{u}=[-2,1]$ b) $h(x)=\frac{2}{x+2}+1$ c) $D=\boldsymbol{R}-\{-2\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{1\}$ d) -4

e) $x\in(-4,-2)$

IV. *a)* $\vec{u}=[2,3]$ b) $p(x)=\frac{2}{x-2}+3$ c) $D=\boldsymbol{R}-\{2\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{3\}$ d) $1\frac{1}{3}$

e) $x\in\left(1\frac{1}{3},2\right)$

1.132. a) $f(x)=\frac{-4}{x}+2$ b) $D=\boldsymbol{R}-\{0\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{2\}$ c) 1 d) $-2\sqrt{3}$

1.133. a) $g(x)=\frac{3}{x-2}-4$, $D=\boldsymbol{R}-\{2\}$ b) $(2,-4)$ c) $\left(2\frac{3}{4},0\right)$, $\left(0,-5\frac{1}{2}\right)$

1.134. a) $h(x)=\frac{1}{x+4}+3$ b) $D=\boldsymbol{R}-\{-4\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{3\}$ c) tak d) $(-3,4)$, $(-5,2)$

1.135. a) $g(x)=\frac{-x-1}{x-2}$, $x\in\boldsymbol{R}-\{2\}$ b) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

1.136. a) $a=-5$, $\vec{u}=[-1,1]$ b) $a=2$, $\vec{u}=[-2,3]$ c) $a=-3$, $\vec{u}=[1,-2]$ d) $a=16$, $\vec{u}=[-2,-5]$

1.137. I. $f(x)=\frac{4}{x-4}+1$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}-\{4\}$ Funkcja f jest funkcją homograficzną.

II. $g(x)=2$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}-\{-2\}$ Funkcja g nie jest funkcją homograficzną.

III. $h(x)=\frac{1}{x+2}+1$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}-\{-2\}$ Funkcja h jest funkcją homograficzną.

1.138. a) $D=\boldsymbol{R}-\{-2\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{0\}$; funkcja jest malejąca w przedziałach $(-\infty,-2)$, $(-2,+\infty)$ b) $D=\boldsymbol{R}-\{0\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{2\}$; funkcja jest rosnąca w przedziałach $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ c) $D=\boldsymbol{R}-\{1\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{1\}$; funkcja jest malejąca w przedziałach $(-\infty,1)$, $(1,+\infty)$ d) $D=\boldsymbol{R}-\{-4\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{1\}$; funkcja jest Rosnąca w przedziałach $(-\infty,-4)$, $(-4,+\infty)$.

1.139. a) $\frac{-130}{47}$ b) $\sqrt{3}$

1.140. b = 11, $f(x)=\frac{3}{x+4}+2$

1.141. a) $b=1$, $c=3$ b) $x\in\{-4,-1\}$

1.142. a) $a=-4$, $b=3$ c) $(-\infty,-3)\cup\left\langle-2\frac{1}{2},+\infty\right)$

1.143. a) $a=3$, $b=8$ b) $x\in\{-7,3\}$

1.144. b) $(2,-2)$, $\left(-3,\frac{-1}{3}\right)$

1.145. a) $(-2,-4)$, $(0,0)$, $(1,-1)$ b) $(2,4)$, $(-3,-1)$

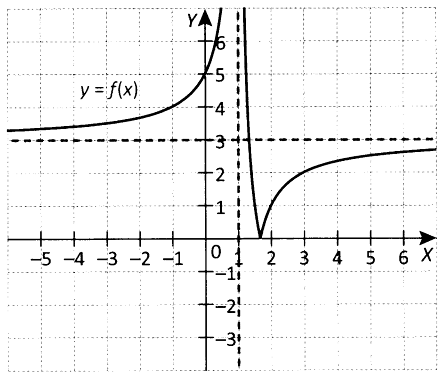
Zastosowanie wiadomości o funkcji homograficznej w zadaniach

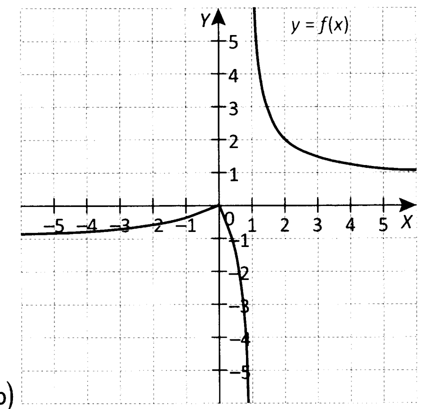
1.148. $a=1$, $c=1$, $d=-2$; $x=-1$

1.149. a) $a=2$, $b=-3$, $c=1$ b) $x\in(-\infty,-2)\cup\left(-1\frac{3}{4},-1\right)\cup(4,+\infty)$

1.150. a) $y=\frac{2}{x-3}+1$, $D=\boldsymbol{R}-\{3\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{1\}$ b) $y=\frac{1}{x}+2$, $D=\boldsymbol{R}-\{-1,0\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{1,2\}$ c) $y=\frac{-1}{x+2}-1$, $D=\boldsymbol{R}-\{-2,-1\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{-2,-1\}$

1.151.

a) 

b) 

c) *wskazówka:* Zauważ, że funkcja f jest parzysta. Naszkicuj najpierw wykres funkcji $y=\frac{x+1}{x-1}$, gdzie $x>0$

1.152. a) $x=-2$ b) $x\in\{-3, 3\}$

1.153. a) $x\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,+\infty)$ b) $x\in(1,3)\cup(4,5)$

1.154. a) $(-2, 3), (2, 7), (4, -3), (8, 1)$ b) $(2, 0), (4, -1), (5, -3), (7, 5), (8, 3), (10, 2)$
c) $(-1, -4), (1, -6), (3, 0), (5, -2)$ d) $(-3, -2), (5, 2), (6, 1)$

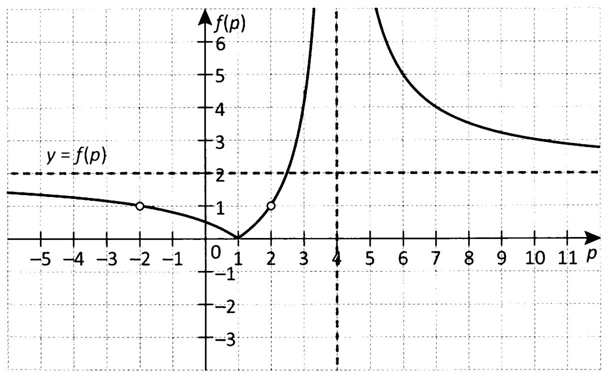
1.156. *wskazówka:* $g(x)=\begin{cases}1, \text{ jeśli } x\in(-2,3)\\ -1, \text{ jeśli } x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)\end{cases}$

1.157. $m\in(-1,+\infty)$

1.158. $k\in(-\infty,0)\cup\left(0,1\frac{1}{2}\right)$

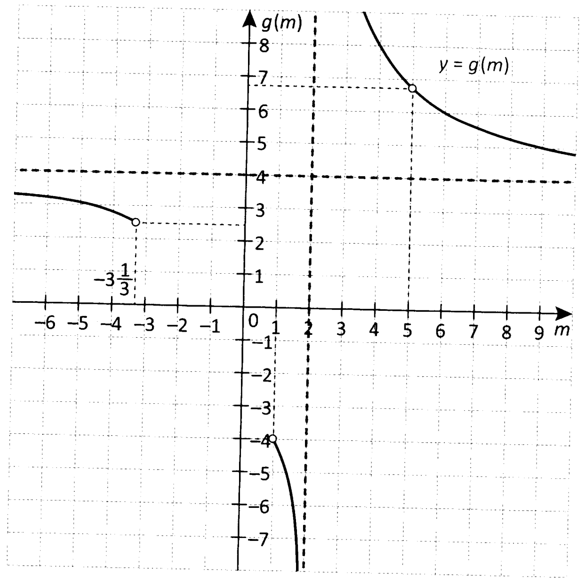
1.159. a) $p\in \boldsymbol{R}-\{-2,2\}$; wówczas układ równań ma jedno rozwiązanie $\begin{cases}x=\frac{p-4}{p^2-4}\\ y=\frac{2p-2}{p^2-4}\end{cases}$

b) $f(p)=\left|\frac{6}{p-4}+2\right|$, gdzie $p\in\boldsymbol{R}-\{-2,2,4\}$



1.160. $m\in(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$

1.161. $g(m)=\frac{8}{m-2}+4$, gdzie $m\in\left(-\infty,-3\frac{1}{2}\right)\cup(1,2)\cup(2,5)\cup(5,+\infty)$



Funkcje wymierne

1.162. a) $\boldsymbol{R}-\{0,2,3\}$ b) $\boldsymbol{R}-\{-1,1\}$ c) $\boldsymbol{R}-\{-1\}$ d) $\boldsymbol{R}-\{-2,2,4\}$
e) $R-\{4-2\sqrt{6}, 1, 4+2\sqrt{6}\}$ f) $\boldsymbol{R}-\{-5,1\}$

1.167. *wskazówka:* Zauważ, że wzór funkcji f można zapisać w postaci $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$.

1.168. a) $k=-3$ b) $-3, -2, 3$ c) $x\in(-\infty,-3\rangle\cup\langle-2,3\rangle\cup(9,+\infty)$

1.169. a) $a=-7$ b) $-3, 2$ c) wykresem funkcji f jest parabola bez punktu $(1,-4)$
d) funkcja f jest malejąca w przedziale $\left(-\infty-\frac{1}{2}\right)$, funkcja f jest rosnąca w przedziałach $\left(-\frac{1}{2},1\right)$, $(1,+\infty)$

1.170. a) $x\in(-1,1)\cup(1,3)$

1.171. a) $m\in(-11,5)$ b) $m\in\langle 1,25)$ c) $m\in(-\infty,-2\rangle\cup\left(3\frac{1}{3},+\infty\right)$
d) $m\in(-\infty,-1)\cup\langle 0,+\infty)$

1.172. $m\in\{-12,4\}$ Jeśli $m=-12$, to miejscem zerowym funkcji h jest liczba 3. Jeśli $m=4$, to miejscem zerowym funkcji h jest liczba 1.

1.173. $p\in(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(9,10)\cup(10,+\infty)$

1.174. $k \in \{-2, 1\}$; Jeśli $k = -2$, to $f(x) = \frac{1}{x-2}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{-4, 0, 2\}$, $ZW = \boldsymbol{R} - \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, 0\right\}$.

Jeśli $k = 1$, to $f(x) = \frac{1}{x+4}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{-4, 0, 2\}$, $ZW = \boldsymbol{R} - \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right\}$

1.175. a) największa wartość 2 – dla argumentu -2 b) największa wartość 7 – dla argumentu $-\frac{1}{5}$

1.176. $ZW = \left\langle \frac{-1}{23}, 1 \right)$

1.178. $ZW = \langle 1, 3 \rangle$

Test sprawdzający do rozdziału 1.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	D	A	B	B	C	C	D	A	B	B

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1.

11. a) $\frac{1}{3}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{0, 2\}$ b) $\frac{x^2-4}{2x^2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{0, 1, 4\}$

12. a) $x \in \left\{\frac{-1}{2}, \frac{-1}{3}\right\}$ b) $x = 0$ c) $x = 2$ d) $x \in \left\{\frac{-4}{5}, 1\right\}$ e) Równanie sprzeczne
f) $x \in \{1, 2, 3\}$

13. a) $D = \boldsymbol{R} - \{-1\}$, $ZW = \boldsymbol{R} - \{2\}$ b) $a = -5$, $b = 1$, $c = 2$ c) $1\frac{1}{2}$
d) $(-\infty, -1) \cup \left\langle 1\frac{1}{2}, +\infty \right)$

14. $P = 2$

15. a) $b = 10$, $c = -3$ b) $|f(-\pi)| + f(\pi) < 0$ c) tak

16. $(-5, -1)$, $(-1, 3)$, $\left(0, 2\frac{3}{4}\right)$

17. $-3, -5, -9$

19. 3

20. 1

22. w ciągu 8 dni

23. w ciągu 11 dni

24. 4 godziny

25. 63 km/h, 54 km/h

27. $a = 2$, $b = 3$; punkty wspólne wykresów funkcji: $(0, 0)$, $\left(-7, 9\frac{4}{5}\right)$, $\left(1\frac{1}{2}, 3\right)$

29. a) $x \in \{-1, 1, 3, 5\}$ b) $x = 4$ c) $x \in \left\{\frac{-2}{3}, \frac{1}{2}, 2\right\}$

30. a) $x \in (-\infty, 1) \cup \{3\} \cup (5, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, 1) \cup \left(2\frac{1}{5}, +\infty\right)$ c) $x \in (-2, 1)$

31. *wskazówka:* Zastosuj zależność między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową trzech liczb dodatnich.

32. *wskazówka:* Zauważ, że $a^3 + \frac{48}{a} = a^3 + \frac{16}{a} + \frac{16}{a} + \frac{16}{a}$. Skorzystaj z zależności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną czterech liczb dodatnich.

33. $m \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

34. $m \in \left(-3, -\sqrt{2}\right\rangle \cup (-1, 0)$

35. $k \in \left(-11, -2\frac{1}{2}\right)$; *wskazówka:* Zauważ, że dziedziną nierówności jest zbiór $\boldsymbol{R}$ tylko wtedy, gdy wyróżnik mianownika jest ujemny. Wówczas mianownik jest dodatni.

2. Ciągi

Określenie ciągu. Sposoby opisywania ciągów

2.1. a) $a_1 = -2$, $a_2 = -1$, $a_3 = 4$, $a_4 = 13$, $a_5 = 26$
b) $a_1 = -5$, $a_2 = 6$, $a_3 = 2\frac{1}{3}$, $a_4 = 1\frac{3}{5}$, $a_5 = 1\frac{2}{7}$
c) $a_1 = -1$, $a_2 = 6$, $a_3 = 5$, $a_4 = 32$, $a_5 = 75$

2.3. a) a_2, a_3 b) a_7, c) a_4 d) a_2, a_8

2.4. a) a_4 b) b_6 c) c_1, c_2 d) d_1, d_5

2.5. a) a_1, a_2 b) a_3, a_4 c) wszystkie wyrazy ciągu o numerach większych od 5: a_6, a_7, a_8, ...

2.6. a) $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$ b) b_1, b_2, b_3, b_4, b_5

2.7. a) tak, $a_{12} = 2$ b) dziewięć wyrazów

2.8. a) liczba 4 nie jest wyrazem ciągu (d_n)

2.9. *wskazówka:* Rozłóż licznik ułamka $\frac{5n^2 - 43n + 24}{5n - 3}$ na czynniki i skróć ułamek.

2.10. a) $a_3 = 0$, $a_6 = 1$ b) $a_2 = 0$, $a_4 = 1$, $a_{10} = 2$ c) $a_2 = a_4 = 17$, $a_1 = a_8 = 20$

2.11. *wskazówka:* Najpierw wyznacz wszystkie wyrazy ciągu (b_n), które są liczbami naturalnymi.

2.13. a) $a_{n+1}=\frac{2n-3}{n+2}$, $a_{2k}=\frac{4k-5}{2k+1}$, $a_{3k-2}=\frac{6k-9}{3k-1}$ b) $a_{n+1}=n^3+3n^2+3n+1$, $a_{2k}=8k^3$, $a_{3k-2}=27k^3-54k^2+36k-8$ c) $a_{n+1}=1-n^2$, $a_{2k}=4k-4k^2$, $a_{3k-2}=-9k^2+18k-8$

2.14. a) $a_n=n+3$ b) $a_n=(n-1)^2$ c) $a_n=\frac{n-1}{2n-1}$

2.15. 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$

2.16. a) $a_n=3n-1$ b) $a_n=-n^2+2n$

2.17. a) $b_5=33$ b) $b_5=4^{10}$ c) $b_5=1\frac{2}{7}$ d) $b_5=28$

2.18. a) $a_n=\frac{1}{2n}$ b) $a_n=\frac{1}{(2n-1)^2}$ c) $a_n=n+\frac{n}{n+1}=\frac{n^2+2n}{n+1}$ d) $a_n=\frac{n}{n^2+1}$

2.19. a) $b_n=2n-1$; wzór rekurencyjny: $\begin{cases} b_1=1 \\ b_{n+1}=b_n+2, \text{ jeśli } n\geqslant 1 \end{cases}$

b) $b_n=3^{3-n}$; wzór rekurencyjny: $\begin{cases} b_1=9 \\ b_{n+1}=\frac{1}{3}\cdot b_n, \text{ jeśli } n\geqslant 1 \end{cases}$

2.20. a) $\begin{cases} c_1=2 \\ c_{n+1}=\frac{1}{c_n}, \text{ jeśli } n\geqslant 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} c_1=1 \\ c_{n+1}=c_n+n, \text{ jeśli } n\geqslant 1 \end{cases}$

2.21. $d_n=n^2$

Monotoniczność ciągów

2.24. a) rosnący b) malejący c) rosnący d) nie jest monotoniczny e) niemalejący f) nierosnący

2.25. a) malejący b) stały c) niemalejący d) rosnący

2.27. c) np. $a_n=|n-1{,}5|-0{,}5$, gdzie $n\in \boldsymbol{N}_+$ d) np. $a_n=5-\frac{1}{n}$, gdzie $n\in \boldsymbol{N}_+$

2.28. a) nie jest monotoniczny b) nie jest monotoniczny c) jest rosnący d) jest malejący

2.29. a) malejący b) rosnący c) malejący d) nie jest monotoniczny e) nie jest monotoniczny f) niemalejący

2.30. $a_n=-n$

2.31. np. $a_n=-\frac{1}{n}$

2.32. np. $a_n=(-1)^n$

2.33. a) rosnący b) malejący c) rosnący d) malejący

2.34. a) rosnący b) malejący c) rosnący d) rosnący e) malejący f) niemalejący

Ciąg arytmetyczny

2.35. b) $a_1=2$, $r=5$ c) $a_n=\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=a_n+5, \ n\geqslant 1 \end{cases}$

2.36. b) malejący c) -79

2.37. a) $a_6=4$, $a_{10}=14$, $a_{27}=56\frac{1}{2}$ b) $a_n=\frac{5}{2}n-11$ c) $\frac{5}{2}n-5$

2.38. b) $b_n=4n+2$, gdzie $n\in \boldsymbol{N}_+$

2.39. 7, 10, 13, 16, 19

2.40. szesnaście

2.41. czternaście

2.42. $r=5$

2.43. a) $a_1=10$, $r=-\frac{1}{3}$ b) $a_1=-3$, $r=2$ c) $(a_1=3,\ r=3)$ lub $(a_1=21,\ r=-3)$ d) $(a_1=2,\ r=7)$ lub $(a_1=-93,\ r=7)$

2.44. a) 174 b) 257 c) 130

2.46. $k=-2$ lub $k=3$; jeśli $k=-2$, to ciąg ma postać $(19, 7, -5)$; jeśli $k=3$, to ciąg ma postać $(24, 7, -10)$

2.47. $x=17$, $y=22$

2.48. I. $x=0$; $a_n=n-1$, $n\in \boldsymbol{N}_+$ II. $x=2$; $a_n=-n+9$, $n\in \boldsymbol{N}_+$; *wskazówka:* Wykaż, że $a_5+a_1=2a_3$.

2.49. 6, 8, 10

2.50. a) $a_1=12$ b) 15 wyrazów

2.51. $a_1=-3$; ciąg ma 46 wyrazów

2.52. 2, 6, 10

2.56. $a=-3$, $b=-1$, $c=1$, $d=3$, $p=-10$; *wskazówka:* Jeśli x_1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to $(-x_1)$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu. Wówczas $a=-d$, $b=-c$. Zapisz wielomian $W(x)$ w postaci iloczynowej $W(x)=(x+d)(x+c)(x-c)(x-d)$ i oblicz cd.

Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

2.57. a) 3 b) 28 c) 6 d) 46; $a_n=n+1$, $n>1$

2.59. a) *wskazówka:* Wykaż, że $a_n=2n-5$, $n\in \boldsymbol{N}_+$ b) $a_1=-3$, $r=2$

2.60. a) *wskazówka:* Wykaż, że $a_n=-2n+6$, $n\in \boldsymbol{N}_+$. b) -114

2.61. a) 15 b) 3 c) 9

2.62. a) 2000 b) 1784 c) 1115

2.63. a) $S_n=22n-2n^2$, $n\in \boldsymbol{N}_+$ b) jedenaście początkowych wyrazów

2.64. $n=10$; $S_{10}=50$

2.65. a) 8690 b) $-2\ 030\ 088$; *wskazówka:* Pogrupuj składniki sumy po dwa i zastosuj do każdej grupy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

2.66. a) 15 750 b) 1188

2.67. a) 6700 b) 48 000

2.68. $a_1 = 28,\ r = 2\frac{1}{3}$

2.69. sześć

2.70. siedemnaście

2.71. a) 6 b) 700

2.72. 92,5 km

2.73. a) 1100 zł b) 21 m

2.74. 15 dni

2.75. a) 12 sekund b) 21 litrów

2.76. a) $x = 27$ b) $x = 10$ c) $x \in \{-16, 16\}$

2.77. 93; 786

2.78. $k = 27$

2.80. 50

2.81. Ciąg (c_n) jest rosnący i nie jest ciągiem arytmetycznym.

2.84. wyraz środkowy jest równy 11; ciąg ma siedem wyrazów

2.85. $n = 11$

Ciąg geometryczny

2.88. (a_n), (b_n)

2.89. a) $a_n = 18 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ b) $b_n = 500 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^n$ c) $c_n = \frac{3}{4} \cdot (-1)^n$

2.90. a) $a_1 = -0{,}7$ b) $a_1 = 1 - \sqrt{3}$

2.91. 3^9

2.92. a) $q = 4$ b) $q = \frac{1}{3} \vee q = -\frac{1}{3}$ c) $q = 1{,}2 \vee q = -1{,}2$ d) $q = -\sqrt{7} \vee q = \sqrt{7}$

2.93. cztery

2.94. $6\frac{19}{32}$

2.95. 2

2.97. a) tak b) $a_1 = 1$

2.98. I. rata: 3000 zł, IV. rata: 3993 zł

2.99. $c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$; ciąg (c_n) nie jest monotoniczny

2.100. $a_n = -\frac{81}{625} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1},\ n \in \mathbf{N}_+$

2.101. (3, 6, 12, 24)

2.102. $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}, -\frac{16}{5}\right)$ lub $\left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$ lub $\left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, -\frac{16}{5}\right)$ lub $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$

2.103. a) $b_1 = 7,\ q = 4$ b) $(b_1 = 2,\ q = -2)$ lub $(b_1 = 2,\ q = 2)$

2.105. $x = -3\sqrt{2}$

2.106. Jeśli $x = -\frac{1}{3}$, to ciąg ma postać $\left(-1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}, -1\frac{1}{3}\right)$. Jeśli $x = 5$, to otrzymujemy ciąg (36, 12, 4).

2.107. $q = \frac{1}{4}$

2.109. b) 180 dm^2

2.110. $c_1 = 1\frac{4}{9},\ q = \frac{1}{9}$

2.111. $b_1 = 2,\ q = \sqrt{2}$

2.114. $\left(a_1 = 1280,\ q = \frac{1}{4}\right)$ lub $\left(a_1 = 1280,\ q = -\frac{1}{4}\right)$ lub $(a_1 = 5,\ q = 4)$ lub $(a_1 = 5,\ q = -4)$

2.115. 27, 18, 12

2.116. a) $c_3 = 2\frac{1}{2},\ c_8 = -320\sqrt{2}$ b) $k = 5$

Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

2.120. a) 7 b) $56\left(1 + \sqrt{2}\right)$

2.121. a) $31 \cdot \left(1 - \sqrt{3}\right)$ b) $\frac{2343}{3125}$

2.122. $\frac{1}{3}$

2.123. 64

2.124. cztery

2.125. siedem

2.126. a) $27\frac{17}{24}$, sześć wyrazów b) $159\frac{3}{8}$, osiem wyrazów

2.127. a) $q = \frac{2}{3}$ b) sześć

2.128. a) $q = \frac{3}{2}$ b) siedem

2.129. cztery nagrody; 4000 zł, 3200 zł

2.130. $79\frac{59}{64}$

2.131. a) $q = -3$ lub $q = 2$

b) Jeśli $q = -3$, to $a_n = \frac{1}{4}\cdot(-3)^{n-1}$, $n \in \boldsymbol{N}_+$. Jeśli $q = 2$, to $a_n = 2^{n-3}$, $n \in \boldsymbol{N}_+$

2.132. $(54, 36, 24, 16)$ lub $(16, 24, 36, 54)$

2.133. 190,5 cm

2.134. $\frac{1365\sqrt{3}}{64}$ cm^2

2.135. a) $15\pi\left(2+\sqrt{2}\right)$ cm b) $\frac{255\pi}{2}$ cm^2

2.136. $\left(a_1 = 64,\ q = \frac{1}{2}\right)$ lub $\left(a_1 = \frac{1984}{11},\ q = -\frac{1}{2}\right)$ lub $(a_1 = 4,\ q = 2)$ lub $\left(a_1 = \frac{1984}{11},\ q = -\frac{1}{2}\right)$

lub $\left(a_1 = \frac{124}{11},\ q = -2\right)$

Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny – zadania różne

2.143. $(x = 1 \wedge y = 1)$ lub $(x = -0{,}5 \wedge y = 0{,}25)$

2.144. I. $x = 2$ i $y = 6$; wówczas ciąg $(1, 6, 11)$ jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 5, a ciąg $(2, 6, 18)$ – ciągiem geometrycznym o ilorazie 3;

II. $x = 50$ i $y = 30$; wówczas ciąg $(49, 30, 11)$ jest ciągiem arytmetycznym o różnicy -19, a ciąg $(50, 30, 18)$ – ciąg geometrycznym o ilorazie $\frac{3}{5}$

2.145. $-2, 3, 8$

2.146. $q = \frac{1}{3}$

2.147. 110,

2.148. $3\frac{31}{32}$

2.149. a) $a_n = 3n - 11$, $n \in \boldsymbol{N}_+$ b) $q = 4$

2.150. a) $a_n = 5n$, $n \in \boldsymbol{N}_+$ b) $k = 1$; $S_6 = 630$

2.155. $b_1 = 2$

2.156. $x_1 = 5$

2.157. $(x = 4,\ y = 12,\ z = 36)$ lub $\left(x = \frac{4}{9},\ y = \frac{-20}{9},\ z = \frac{100}{9}\right)$

2.158. $(3, 2, 1)$ i $\left(\frac{1}{3}, 2, 12\right)$ lub $(1, 2, 3)$ i $(1, 2, 4)$

2.159. $(2, 4, 8, 12)$ lub $\left(12\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$

Lokaty pieniężne i kredyty bankowe

2.160. a) 6720 zł b) 6583 zł 20 gr

2.161. a) 4078,72 zł b) 4098,40 zł c) 4196,80 d) 4629 zł 76 gr

2.162. a) 18 150 zł b) 17 583 zł

2.163. 12 lat

2.164. a) 6 312,38 zł b) 6 333,85 zł c) 6 344,93 zł

2.165. a) 31 668,08 zł b) 31 815,91 zł c) 31 893,05 zł

2.166. a) 10 612,08 zł b) 11 261,62 zł c) 12 682,42 zł

2.167. 10%

2.168. 12%

2.169. a) 18 8511,92 zł b) 18 302,84 zł c) 17 769,75 zł

2.170. tak

2.171. a) 6600 zł, 5200 zł b) 7200 zł

2.172. a) 5941,11 zł b) 7528,88 zł

Granica ciągu liczbowego

2.173. wszystkie wyrazy o numerach większych niż 349, czyli a_{350}, a_{351}, a_{352}, ...

2.174. wszystkie wyrazy o numerach większych niż 3, czyli b_4, b_5, b_6, ...

2.175. 19 wyrazów

2.176. 1437 wyrazów

2.177. $\delta = 55$

2.178. $\delta = 9$

Obliczanie granic ciągów zbieżnych

2.183. a) $\frac{-1}{19}$ b) $8\frac{1}{2}$ c) $-6\frac{3}{4}$

2.184. a) 2 b) $\frac{-1}{2}$ c) 0

2.185. a) $3\frac{1}{5}$ b) 15 c) $\frac{3}{5}$

2.186. a) 5 b) 3 c) $\frac{-1}{3}$ d) $2\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{25}$ f) $\frac{1}{2}$

2.187. a) $1\frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $6\frac{1}{4}$ d) $-6\frac{3}{4}$

2.188. a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{2}$ d) -2 e) 0 f) $\frac{4}{7}$

2.189. a) $-\frac{1}{2}$ b) $1\frac{1}{5}$ c) -2 d) 0 e) 5 f) 0

2.190. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) 1 d) 0 e) $\frac{1}{4}$ f) 5

2.191. a) $\frac{5}{6}$ b) 8 c) 5 d) $\frac{-1}{4}$

2.192. a) 0 b) $1\frac{1}{4}$ c) 1 d) $2\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$ f) 0

2.193. a) 0 b) $\frac{1}{12}$

2.194. a) $k \in \{-3, 1\}$ b) $k = -1$ c) $k \in \{-2, 0\}$

2.195. a) $a = 1\frac{2}{3}$ b) $a = -2$

Wybrane własności ciągów zbieżnych

2.196. a) 4 b) 0 c) 1 d) 0 e) $\frac{3}{8}$ f) $1\frac{1}{6}$

2.197. a) 1 b) 1 c) $\frac{1}{3}$ d) -1

2.198. a) $\frac{1}{4}$ b) 3

2.199. a) 5 b) $1\frac{1}{7}$ c) 8 d) $\frac{3}{4}$ e) 9 f) $8\frac{3}{5}$

2.200. a) 0 b) 0 c) 0 d) 0 e) $\frac{-1}{2}$ f) 2

Ciągi rozbieżne do nieskończoności

2.201. a) wyrazy o numerach większych od 10 300, czyli a_{10301}, a_{10302}, a_{10303}, ...
b) wyrazy o numerach większych od 2, czyli a_3, a_4, a_5 ...

2.202. a) wyrazy o numerach większych od 6, czyli a_7, a_8, a_9, ...
b) wyrazy o numerach większych od 2, czyli a_3, a_4, a_5, ...

2.204. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) $+\infty$

2.205. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $+\infty$ f) $+\infty$

2.206. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) $-\infty$

2.207. a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $+\infty$ e) $+\infty$ f) $-\infty$

2.208. a) $-\frac{1}{6}$ b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) 3 e) $-\infty$ f) -5

2.209. a) $p \in (2, +\infty)$ b) $p \in (-\infty, 2)$ c) $p = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -0{,}25$

2.210. Jeśli $a \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$, to dana granica jest równa $\frac{1}{|a|-1}$; jeśli $a \in \{-1, 1\}$, to ta granica jest równa $+\infty$.

Szereg geometryczny

2.211. a) $5\frac{1}{3}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$ d) $\frac{26\sqrt{3}+45}{6}$

2.212. 6000 m

2.213. a) $\frac{136}{99}$ b) $-\frac{4}{15}$ c) $\frac{131}{990}$ d) $\frac{662}{165}$

2.214. $q = \frac{2}{3}$; $a_n = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $n \in \boldsymbol{N}_+$

2.215. a) $a = 3$ b) $S_5 = 9\frac{39}{256}$

2.216. $S_1 = 15$, $S_2 = 11\frac{1}{4}$, $S_3 = 12\frac{3}{16}$, $S_4 = 11\frac{61}{64}$

2.217. a) $S = 1\frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{3}$ b) $S = \frac{5}{12}$, $q = \frac{1}{5}$

2.218. a) $x \in (-\infty, -1) \cup (-5, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, -2) \cup \left(-1\frac{1}{3}, +\infty\right)$

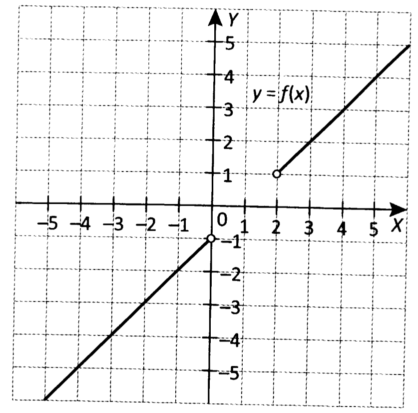
2.219. $b = \frac{1}{2}$

2.220. a) $x = -3\frac{1}{8}$ b) $x = -4$ c) $x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ d) $x = \frac{-5}{8}$

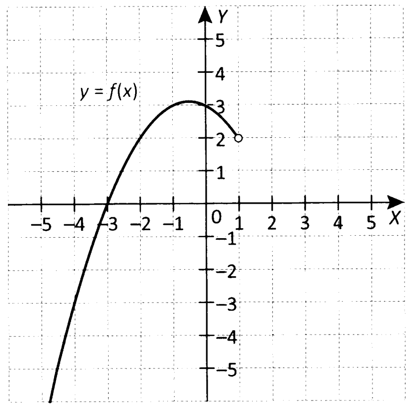
2.221. a) $x \in (-2, -1)$ b) $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right)$ c) $x \in (-1, 1)$ d) $x \in \langle 1, +\infty)$ e) $x \in \left\langle \frac{2}{3}, 1\right)$

f) $x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{41}}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1+\sqrt{41}}{4}, 2\right\rangle$

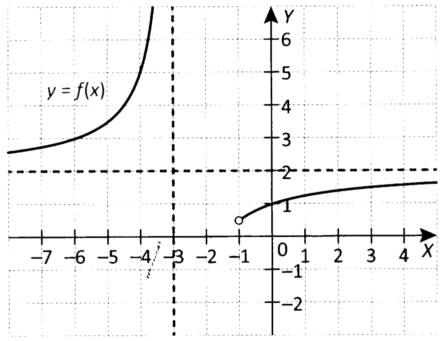
2.222. a) $f(x) = x - 1$, $D = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$,
$ZW = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



b) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+3$, $D(-\infty,1)$, $ZW=\left(-\infty,3\frac{1}{8}\right\rangle$



c) $f(x)=\frac{2x+3}{x+3}$, $D(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$, $ZW=\left(\frac{1}{2},2\right)\cup(2,+\infty)$



2.223. a) $3\sqrt{3}$ cm b) $6\pi\sqrt{3}$ cm c) 9π cm^2

2.224. $a_1=\frac{1}{3}$, $q=\frac{1}{3}$

2.225. $\frac{1-q}{q}$, gdzie q jest ilorazem tego ciągu

2.228. a) $\lim_{n\to\infty} L_n=+\infty$, $\lim_{n\to\infty} P_n=\frac{5a^2}{3}$

Test sprawdzający do rozdziału 2.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	**D**	**A**	**B**	**D**	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**A**

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2.

11. 150
12. b) c_4, c_5, c_6, c_7
14. a) $a_n=2n+1$, $n\in \mathbf{N}_+$ b) 1224
15. a) $\left(16\frac{1}{2}, 10\frac{1}{8}, 3\frac{3}{4}\right)$
16. $n=29$
17. a) 23 wyrazy b) $b_n=2n-10$, $n\in \mathbf{N}_+$
18. a) $a_{15}=39$ b) $a_n=2n+9$, $n\in \mathbf{N}_+$
19. $k=8$
20. a) $x=5$ b) $a_n=108\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $n\in \mathbf{N}_+$ c) $k=7$
21. Na górnej półce stoi 6 książek, a na dolnej stoją 24 książki.
22. a) $\frac{555(2+\sqrt{3})}{16}$ cm b) $\frac{84175\sqrt{3}}{1024}$ cm^2
23. $a_1=2$, $a_2=10$, $a_3=50$, $a_4=250$, $a_5=1250$
24. $q=2$; 9 wyrazów
25. a) 384 b) 364
26. a) $k=4$ b) $q=3$
28. o ok. 15%

    wskazówka: Niech z_1 oznacza wielkość zysku w pierwszym miesiącu. Zauważ, że ciąg $(z_1, z_1+0{,}1 z_1, z_1+2\cdot 0{,}1 z_1, \ldots z_1+11\cdot 0{,}1 z_1)$ przedstawiający wielkości rzeczywistych zysków firmy w poszczególnych miesiącach całego roku jest ciągiem arytmetycznym. Wówczas $S_{12}=18{,}6\cdot z_1$. W drugim przypadku otrzymujemy ciąg geometryczny $(z_1, 1{,}1 z_1, 1{,}1^2 z_1, \ldots, 1{,}1^{11} z_1)$. Wówczas suma wszystkich zysków w ciągu całego roku byłaby równa w przybliżeniu $21{,}384\cdot z_1$.
29. 17 308,42 zł
30. 4%
31. b) 100
33. a) $q=4$ b) $a_1=\frac{1}{8}$
34. a) $a=-13$, $b=13$; *wskazówka:* Zastosuj wzory Viete'a do iloczynu i do sumy pierwiastków wielomianu trzeciego stopnia. b) $\left(3,1,\frac{1}{3}\right)$.
35. a) 3 b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) $1\frac{1}{2}$ e) 11 f) 0
37. $x\in(-2,1\rangle$

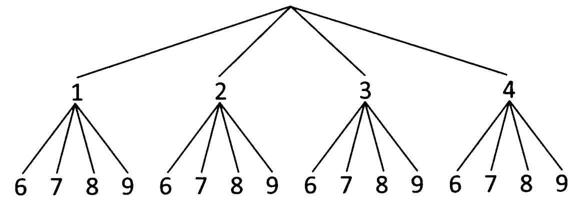
3. Kombinatoryka. Dwumian Newtona. Trójkąt Pascala

Reguła mnożenia i reguła dodawania

3.1. Na 12 sposobów

	E	F	G
A	**AE**	**AF**	**AG**
B	**BE**	**BF**	**BG**
C	**CE**	**CF**	**CG**
D	**DE**	**DF**	**DG**

3.2.



3.3. 8 liczb

3.4. 18 liczb

3.5. a) 18 liczb b) 12 liczb c) 10 liczb

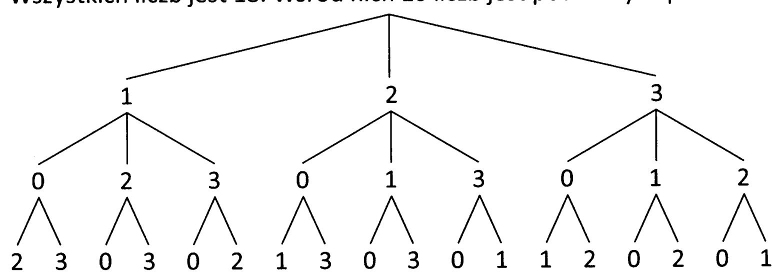
3.6. a) 15 liczb b) 50 liczb c) 26 liczb

3.7. Wszystkich liczb jest 25. Cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności w dziesięciu takich liczbach.

3.8. Wszystkich liczb jest 12. Wśród nich trzy liczby są podzielne przez 4.

	6	7	8	9
6	X	**67**	**68**	**69**
7	**76**	X	**78**	**79**
8	**86**	**87**	X	**89**
9	**96**	**97**	**98**	X

3.9. Wszystkich liczb jest 18. Wśród nich 10 liczb jest podzielnych przez 3.



3.10. a) 72 liczby b) 32 liczby

3.11. 1515 punktów

3.12. a) 306 liczb b) 82 liczby c) 595 liczb

3.13. 24 pary

3.14. a) na 10 sposobów b) na 11 sposobów c) na 12 sposobów

3.15. a) na 9 sposobów b) na 19 sposobów c) na 16 sposobów

3.16. na 440 sposoby

3.17. a) na 216 sposobów b) na 282 sposoby

3.18. a) na 61 sposobów b) na 29 sposobów

3.19. a) 51 możliwości b) 102 możliwości

3.20. a) 44 b) 90 c) 35 d) 76

3.21. a) 2 b) 34

3.22. a) 17 b) 89

3.23. a) 65 b) 70

3.24. 225

3.25. a) 891 b) 171

3.26. a) 873 b) 252

3.27. a) 18 b) 14

3.28. a) 24 b) 12

3.29. 9

3.30. a) 60 b) 32 c) 63 d) 39

Wariacje

3.31. $9^3 = 729$

3.32. 243

3.33. a) 9000 b) 10 000

3.34. 81

3.35. 4^7

3.36. a) 5^6 b) $4 \cdot 5^5$

3.37. na 12 sposobów

3.38. $8 \cdot 7 \cdot 6$ czyli 336

3.39. $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

3.40. a) 60 b) $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$

3.41. a) 4536 b) 5040

3.42. $(7 \cdot 6)^2$ czyli 1764

3.43. a) na 7776 sposobów b) na 720 sposobów

3.44. a) 16 807 b) 2520

3.45. a) 360 b) 1296

3.46. a) na 840 sposobów b) na 2401 sposobów

3.47. a) 531 441 b) 60 480

3.48. a) 8^5 b) 243 c) 6720 d) $8^5 - 7^5$

3.49. $5 \cdot 10^{14}$
3.50. a) 320 b) 328
3.51. a) 60 480 b) 82 944 c) 3000 d) 98 415
3.52. a) 1 647 086 b) 3 265 920 c) 2 d) 600
3.53. 480
3.54. 6720
3.55. 72
3.56. 105
3.57. 378
3.58. a) 22 b) 160
3.59. a) 154 b) 2388
3.60. a) 6720 b) 12 096

Permutacje

3.61. a) 12 b) 72 c) 15 d) 5,5 e) 4,9 f) 8,1
3.62. a) $n!$ b) $(2n+1)!$ c) $n+3$ d) $(2n+1)(2n+2)$
e) $(n+4)\cdot(3n-1)!$ f) $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$
3.63. na 6 sposobów
3.64. na 120 sposobów
3.65. a) na 7! sposobów b) na 49 sposobów
3.66. na 8! sposobów
3.67. a) $5!\cdot 5!$ b) $2\cdot 5!\cdot 5!$
3.68. a) 12! b) $5!\cdot 7!$ c) $5!\cdot 7!$
3.69. a) na $4!\cdot 12!$ sposbów b) na $(4!)^4$ sposobów
3.70. a) na 72 sposoby b) na 24 sposoby
3.71. a) na 120 sposobów b) na 6 sposobów c) na 144 sposoby d) na 144 sposoby
3.72. a) na 120 sposobów b) na 1920 sposobów; *wskazówka:* Rozważ przypadki, gdy osoby A i B stoją na dwóch pierwszych lub dwóch ostatnich miejscach, na drugim i trzecim miejscu lub na szóstym i siódmym miejscu itd.
c) $8! - 14\cdot 6! = 30\,240$ d) 2520
3.73. a) 1440 b) 2640 $(= 5! + 3\cdot 5! + 3\cdot 6!)$; *wskazówka:* Niech a oznacza liczbę siedmiocyfrową. Rozpatrz trzy przypadki:
$a \in (6\,500\,000, 6\,600\,000)$, $a \in (6\,700\,000, 7\,000\,000)$ oraz $a > 7\,000\,000$.
3.74. a) 36 b) 24
3.75. a) $6! + 15\cdot 5!$ czyli 2520 b) $4\cdot 5! + 8\cdot(5! - 4!)$ czyli 1248
3.76. a) 216 b) 42
3.77. a) na 48 sposobów b) na 24 sposoby c) na 12 sposobów d) na 8 sposobów
3.78. a) na $2\cdot 10!$ sposobów b) na 10! Sposobów c) na $2\cdot 10!$ sposobów
d) na $10\cdot 8!$ sposobów

3.79. a) 8! b) $4!\cdot 4!$ c) $12\cdot 6!$ d) $2^4\cdot 4!$
3.80. a) na 14! sposobów b) na $2^7\cdot 7!$ sposobów c) na $7!\cdot 7!$ sposobów
d) na 7! sposobów

Kombinacje

3.81. a) 120 b) 70 c) 25 d) 13 e) $\frac{10}{91}$ f) $2\frac{1}{6}$
3.82. a) $\frac{3}{n+1}$ b) $\frac{n+2}{3}$
3.83. a) $n=5$ b) $n=3$
3.84. 20
3.85. 35
3.86. a) 1 b) 4 c) 12
3.87. $n=9$
3.88. $n=20$
3.89. 7
3.90. a) $\{b_1, b_2\}$, $\{b_1, c_1\}$, $\{b_1, c_2\}$, $\{b_2, c_1\}$, $\{b_2, c_2\}$
b) para $\{b_1, b_2\}$ jest liczona podwójnie
3.91. 20
3.92. a) na 12 600 sposobów b) na 21 245 sposobów c) na 22 820 sposobów
3.93. a) 4592 sposoby b) 15 448 sposobów c) 13 816 sposobów
3.94. a) 70 b) 1008 c) 672 d) 2254
3.95. a) 24 b) 2300 c) $\binom{18}{2}\binom{9}{1}+\binom{18}{3}$ d) $\binom{27}{3}-\binom{5}{3}$
3.96. a) 23 b) 21 c) 22 d) 42
3.97. a) 120 b) 34 c) 301
3.98. a) $\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\binom{7}{4}$ b) $\binom{14}{4}+\binom{7}{1}\binom{14}{3}$ c) $\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}$
d) $\binom{9}{2}\binom{12}{2}+\binom{9}{3}\binom{12}{1}+\binom{9}{4}$
3.99. a) 36 b) 13 104 c) 20 160
3.100. a) 11 154 b) 270 010 c) 13 182
3.101. na $\binom{4}{2}\binom{44}{11}\binom{33}{11}\binom{4}{2}\binom{22}{11}$ sposobów
3.102. 10 080
3.103. 3

Kombinatoryka – zadania różne

3.104. a) 6561 b) 3024 c) 126

3.105. a) 10^8 b) 10! c) 100 d) $\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{2}\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4$

3.106. $\binom{9}{6}$, czyli 84

3.107. 210

3.108. 70

3.109. 126

3.110. a) 5040 b) 60 c) 20 d) 30

3.111. a) 1 663 200 b) 83 160

3.112. ok. 30 bilionów, czyli $30\cdot 10^{12}$

3.113. 10 290

3.114. 2625

3.115. $3\cdot 9^4 + 3\cdot 9^3\cdot 3$, czyli 26 244

3.116. $\binom{6}{2}\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5+\binom{6}{3}\cdot 7\cdot 7\cdot 6\cdot 5$, czyli 54 600

3.117. a) 49 b) 56 c) 77 d) 23

3.118. a) 80 b) 20 c) 145 d) 71

3.119. 165; *wskazówka:* Rozważ trzy przypadki. W zapisie liczby mogą wystąpić: • trzy jednakowe cyfry (9 liczb) lub • tylko dwie jednakowe cyfry (72 liczby) lub trzy różne cyfry (84 liczby)

3.120. 120; *wskazówka:* Rozważ trzy przypadki. Cyfry liczby to: • jedna trójka i 14 zer (jedna liczba) lub • jedna dwójka, jedna jedynka i 13 zer (28 liczb) lub • trzy jedynki (91 liczb)

3.121. 1540; *wskazówka:* Rozważ pięć przypadków. Cyfry liczby to: • jedna czwórka i 19 zer (1 liczba) lub • dwie dwójki i 18 zer (19 liczb) lub • jedna jedynka, jedna trójka i 18 zer (38 liczb) lub • dwie jedynki, jedna dwójka i 17 zer (513 liczb) lub • cztery jedynki (969 liczb)

3.122. a) 1260 b) 1890

3.123. a) $\binom{15}{5}\cdot\binom{10}{5}$, czyli 756 756 sposoby b) $\dfrac{\binom{15}{5}\cdot\binom{10}{5}}{3!}$, czyli 126 126 sposobów

3.124. a) $\binom{8}{5}\cdot 2^5$ b) $\binom{8}{2}\cdot 12$ c) $\binom{8}{1}\binom{7}{3}\cdot 2^3$ d) $\binom{16}{5}-\binom{8}{5}\cdot 2^5$

3.125. a) 6! b) $6!\cdot 6!\cdot 2$ c) $\binom{6}{2}\cdot\binom{6}{2}$, czyli 225 d) $\binom{6}{2}\cdot 2^4+\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 2^2+\binom{6}{4}$

Symbol Newtona. Wzór Newtona. Trójkąt Pascala

3.126. a) 0 b) 276 c) 325 d) 45 e) 1 f) $\frac{1}{2}$

3.127. *wskazówka:* Zauważ, że $\binom{3}{0}=\binom{4}{0}$; następnie skorzystaj kilkakrotnie ze wzoru $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$.

3.128. a) $\frac{n-1}{3}$ b) $\frac{n}{n+1}$ c) 1 d) 1

3.129. a) $485+198\sqrt{6}$ b) $682+305\sqrt{5}$ c) $252+144\sqrt{3}$ d) $2704-1912\sqrt{2}$
e) $176\sqrt{6}-304\sqrt{2}$ f) $12\,375+8750\sqrt{2}$

3.130. a) $64x^6 + 192x^5 + 240x^4 + 160x^3 + 60x^2 + 12x + 1$
b) $x^8 + 8x^6 + 28x^4 + 56x^2 + 70 + 56x^{-2} + 28x^{-4} + 8x^{-6} + x^{-8}$
c) $243x^5 - 810x^4 + 1080x^3 - 720x^2 + 240x - 32$ d) $x^8 - 4x^4 + 6 - 4x^{-4} + x^{-8}$

3.131. a) $c_{13}=3\cdot\binom{20}{12}$ b) $c_7=\binom{10}{6}\cdot\frac{x^4}{256}$ c) $c_6=-\frac{x^5}{32}\cdot\binom{10}{5}$ d) $c_8=-\sqrt{3}\cdot x^4\cdot\binom{11}{7}$

3.132. a) $c_9=\binom{16}{8}\cdot\frac{x^8}{9}$ b) $c_{10}=-\binom{18}{9}\cdot\frac{x^9}{8}$

3.133. $c_{17}=\binom{25}{16}\cdot x^2$

3.134. $c_6=\binom{18}{5}\cdot x^3$

3.135. $\binom{15}{10}$

3.136. a) $c_4 = 35$ b) $c_3 = 28$

3.137. $c_3 = 190$

3.138. a) 2^{11} b) 0 c) 2^8 d) 2^{11}

Test sprawdzający do rozdziału 3.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	D	A	B	C	B	D	C	D	A	C

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3.

11. Jest 9 liczb podzielnych przez 3
12. Jest 10 liczb parzystych

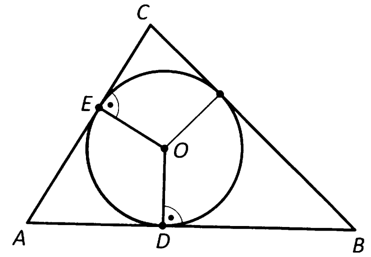
13. a) 131 b) 143
14. a) 20 b) 48 c) 53
15. 25 osób
16. a) 336 b) 1010 c) 347
17. a) 14 b) 5
18. a) 15 b) 12
19. a) 32 b) 37 c) 48 b) 11
20. a) 54 432 b) 600
21. a) na 7200 sposobów b) na 720 sposobów
22. a) na 243 sposoby b) na 112 sposobów
23. a) na 12 sposobów b) na 18 sposobów.
24. a) na 60 sposobów b) na 15 sposobów c) na 105 sposobó
d) na 27 sposobów
25. a) $\binom{13}{5}\binom{13}{4}\binom{13}{3}\binom{13}{1}$ b) $\binom{4}{1}\binom{13}{8}\binom{39}{5}$
26. 151 200 wyrazów
27. a) 10! czyli 3 628 800 b) 8! czyli 40 320
28. a) $15! \cdot 15!$ b) $2^{15} \cdot (15!)^2$
29. a) 459 b) 8964
30. a) 18 480 (• 11 760 liczb, których ostatnie dwie cyfry tworzą liczbę 25 albo 75 oraz • 6720 liczb, których ostatnie dwie cyfry tworzą liczbę 50)
b) 134 400 (• 40 320 liczb, których ostatnią lub przedostatnią cyfrą jest 0 oraz • 94 080 pozostałych liczb)
31. 2100
32. a) 551 b) 8304
33. $128x^7 - 224x^6 + 168x^5 - 70x^4 + \frac{35}{2}x^3 - \frac{21}{8}x^2 + \frac{7}{32}x - \frac{1}{128}$
34. $c_{19} = 85\,120x^{-12}$; piętnasty wyraz nie zawiera x

4. Czworokąty

Podział czworokątów. Trapezoidy

4.1. a) 60°, 80°, 130°, 90° b) 48°, 72°, 120°, 120° c) 80°, 60°, 75°, 145°
4.2 a) $|\sphericalangle A| = 100°$, $|\sphericalangle B| = 100°$, $|\sphericalangle C| = 60°$, $|\sphericalangle D| = 100°$; tak
b) $|\sphericalangle A| = 100°$, $|\sphericalangle B| = 110°$, $|\sphericalangle C| = 60°$, $|\sphericalangle D| = 90°$; nie
4.3. 44 cm
4.4. I. 0,5 m; 0,5 m; 0,8 m II. 0,8 m; 0,8 m; 1,2 m

4.5. 2,7 m
4.6. a) $|AC| = 4$, $|BD| = \sqrt{3} + 1$ b) $|AC| = 8\sqrt{5}$, $|BD| = 6\sqrt{5}$ c) $|AC| = 36$, $|BD| = 24$
d) $|AC| = 10{,}5$, $|BD| = \frac{23\sqrt{2}}{4}$
4.7. $|BS| = 5$, $|AC| = \sqrt{97}$
4.8. a) 240°; *wskazówka:* Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Oblicz miarę kąta ACB, następnie skorzystaj z własności kąta środkowego i kąta wpisanego w okrąg, które są oparte na tym samym łuku b) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$
4.9. a) $|AB| = |AD| = 4\sqrt{2}$, $|BC| = |CD| = 5$; *wskazówka:* Wykaż, że $|\sphericalangle BAD| = 90°$.
b) $|\sphericalangle B| = |\sphericalangle D| \approx 82°$, $|\sphericalangle C| \approx 106°$
4.10. 120°; *wskazówka:* Skorzystaj dwukrotnie z twierdzenia cosinusów.
4.11. a) 3, 3, 5, 5; *wskazówka:* Skorzystaj z twierdzenia cosinusów.
b) $\frac{30\sqrt{3}}{14}$: *wskazówka:* Niech x oznacza połowę długości szukanej przekątnej, zaś y oraz $7 - y$ – długości odcinków, na jakie szukana przekątna dzieli daną przekątną, przy czym $y > 7 - y$. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy dwa równania: $x^2 + y^2 = 25$ oraz $(7 - x)^2 + y^2 = 9$, czyli $49 - 14x + x^2 + y^2 = 9$. Po podstawieniu do drugiego równania liczby 25 w miejsce $x^2 + y^2$ otrzymasz równanie z niewiadomą x.
4.12. *wskazówka:* Wykaż, że $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$.
4.13. *wskazówka:* Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku obok. Rozpatrzmy czworokąt $ADOE$. Wykaż, że $\triangle AOE \equiv \triangle AOD$.



Trapezy

4.14. $|\sphericalangle A| = 52°$, $|\sphericalangle B| = 65°$, $|\sphericalangle C| = 115°$, $|\sphericalangle D| = 128°$
4.15. $|\sphericalangle A| = 60°$, $|\sphericalangle B| = 80°$, $|\sphericalangle C| = 100°$, $|\sphericalangle D| = 120°$
4.17. a) 45°; $|AB| = 4$ b) 60°, $|AB| = 9$
4.20. 12 cm
4.21. 26 cm
4.22. 13 cm, $4\sqrt{2}$ cm, 5 cm, $4\sqrt{2}$ cm
4.23. 16 cm, 21 cm

4.24. Dwa trapezy spełniają warunki zadania. I. podstawy: 5 cm, 14 cm; ramiona: 12 cm, 15 cm II. podstawy: 12 cm, $19\frac{13}{17}$ cm; ramiona: 5 cm, $9\frac{4}{17}$ cm

4.25. a) $11+3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ cm b) 5 cm, $\sqrt{37+6\sqrt{3}}$ cm

4.26. a) $h = 12$ cm b) $|AB| = 24$ cm, $|BC| = 20$ cm, $|DC| = 3$ cm

4.27. a) $-\frac{5}{13}$ b) 12 c) 23

4.28. a) 66 cm b) $8\sqrt{10}$ cm c) 0,8

4.29. (5 cm i 29 cm) lub (12 cm i 22 cm)

4.30. a) 8 cm b) 15 cm

4.31. 12 cm

4.32. a) $x = 4$ b) $x = 5{,}5$ c) $x = 2$ d) $x = 28$

4.33. 10,5 cm

4.34. 10 cm lub 7,5 cm

4.35. a) 21 cm, 9 cm b) 10 cm; Odcinek łączący środki ramion ma długość 15 cm.

4.36. $h = 5$ cm

4.37. *wskazówka:* Niech $|AB| = a$, $|DC| = b$, $a > b$. Poprowadź wysokość CF tego trapezu. Zauważ, że $|CF| = \frac{a-b}{2}$, $|BC| = \frac{a+b}{2}$.

4.38. *wskazówka:* Uzasadnij, że czworokąt $EBLK$ jest równoległobokiem i wyznacz długości jego boków w zależności od długości podstaw trapezu. Następnie wykaż, że trójkąt AEK jest równoboczny.

4.39. $|AB| = 20$, $|DC| = 8$

4.40. $16+4\sqrt{10}$ cm

4.41. *wskazówka:* Wykaż, że punkty M i N dzielą przekątne odpowiednio AC i BD na połowy. Następnie skorzystaj z twierdzenia o odcinku łączącym środki boków w trójkącie.

4.42. 13 cm, 7 cm; *wskazówka:* Skorzystaj z poprzedniego zadania.

4.43. a) 14 cm, 7 cm; *wskazówka:* Skorzystaj z podobieństwa odpowiednich trójkątów.

b) $\sqrt{85}$ cm, $\sqrt{106}$ cm

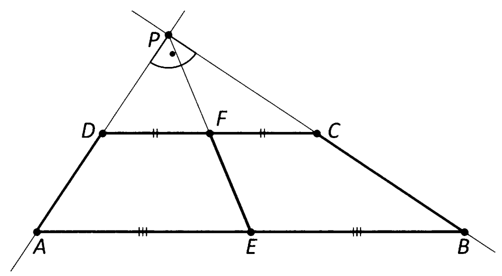
4.44. $2\frac{2}{11}$ cm, $9\frac{9}{11}$ cm

4.46. $|AB| = 50$ cm; *wskazówka:* Zauważ, że trójkąty ADC i ACB są podobne.

4.47. $|DC| = 9$ cm

4.49. 10 cm

4.50. *wskazówka:* Niech punkty E, F będą środkami podstaw AB i DC trapezu $ABCD$, punkt P – punktem przecięcia prostych AD i BC. Na podstawie twierdzenia Talesa wykaż, że punkty E, F, P są współliniowe. Następnie zauważ, że



$|\sphericalangle APB| = 90°$ i skorzystaj z własności środkowej trójkąta prostokątnego, poprowadzonej na przeciwprostokątną.

Równoległoboki

4.51. 71°, 109°

4.52. 53°, 127°, 53°, 127°

4.53. 54°, 126°, 54°, 126°

4.54. 60°, 120°, 60°, 120°

4.55. a) $(2+2\sqrt{2})$ cm b) 6 cm

4.56. a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2-\sqrt{2}}$

4.57. 3,5 cm

4.58. 19 cm, 3 cm

4.59. 60 cm, 11 cm

4.60. $1+\sqrt{3}$, $3+\sqrt{3}$

4.61. $Obw = 10\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$

4.62. a) 5 b) $Obw = 6\sqrt{5}$

4.63. 15 cm, 20 cm; *wskazówka:* Skorzystaj z podobieństwa odpowiednich trójkątów prostokątnych.

4.64. a) 16 cm b) $4\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm, $4\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm

4.65. $4\sqrt{13}$, $6\sqrt{13}$

4.66. $h = 5\sqrt{3}$

4.67. 18 cm, 80 cm

4.68. a) równoległobok b) prostokąt c) romb d) kwadrat

4.69. 10 cm, 17 cm

4.70. o 25%

4.71. $|DB| = 4$, $|AC| = 2+2\sqrt{3}$

4.72. $|AB| = |DC| = 8\sqrt{3}$, $|AD| = |BC| = 12$

4.73. $3\sqrt{3}$ cm, $5\sqrt{3}$ cm,

4.74. $26\sqrt{2}$ cm

4.75. a) $\frac{11}{24}$ b) $2\sqrt{14}$ c) $\frac{\sqrt{130}}{12}$

4.76. $5\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$; *wskazówka:* Skorzystaj z twierdzenia sinusów w trójkącie rozwartokątnym o kątach 45°, 120° i 15° i oblicz długość dłuższego boku równoległoboku.

4.77. a) $h_1 = 4\sqrt{2}$, $h_2 = 4+4\sqrt{3}$ (bo $h_2 > 8$); *wskazówka:* Skorzystaj z twierdzenia sinusów, a następnie z twierdzenia cosinusów w trójkącie DEF. b) 8, $4\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

4.81. *wskazówka:* Niech a, b oznaczają długości sąsiednich boków równoległoboku, d_1, d_2 – długości przekątnych. Skorzystaj dwukrotnie z twierdzenia cosinusów dla kątów równoległoboku i wykaż, że $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Okrąg opisany na czworokącie

4.84. a) tak b) tak c) nie

4.85. a) tak b) nie c) nie

4.86. a) $|\sphericalangle A| = 45°$, $|\sphericalangle B| = 90°$, $|\sphericalangle C| = 135°$, $|\sphericalangle D| = 90°$

b) $|\sphericalangle A| = 120°$, $|\sphericalangle B| = 40°$, $|\sphericalangle C| = 60°$, $|\sphericalangle D| = 140°$

c) $|\sphericalangle A| = 140°$, $|\sphericalangle B| = 80°$, $|\sphericalangle C| = 40°$, $|\sphericalangle D| = 100°$

d) $|\sphericalangle A| = 150°$, $|\sphericalangle B| = 120°$, $|\sphericalangle C| = 30°$, $|\sphericalangle D| = 60°$

4.87. 60°, 95°, 120°, 85°

4.88. kąty czworokąta: 75°, 65°, 105°, 115°

4.89. 10

4.90. $6\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm

4.91. 6,25 cm

4.92. 124 cm

4.93. I. środek okręgu leży wewnątrz trapezu; h = 14 cm II. środek okręgu leży na zewnątrz trapezu; h = 2 cm

4.94. odległości od podstaw: 7 cm, 1 cm; odległość od ramion: $3\sqrt{5}$ cm

4.95. 56 cm; *wskazówka:* Uzasadnij, że dwa równe kąty deltoidu są proste.

4.96. a) $\cos|\sphericalangle A| = \frac{1}{11}$, $\cos|\sphericalangle B| = -\frac{7}{13}$, $\cos|\sphericalangle C| = -\frac{1}{11}$, $\cos|\sphericalangle D| = \frac{7}{13}$; kąt CBA jest największy

b) $|AC| = \sqrt{\frac{253}{13}}\ (\approx 4{,}4)$, $|BD| = \sqrt{\frac{299}{11}}\ (\approx 5{,}2)$

4.97. $|AD| = \sqrt{6}$, $|DC| = \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$

4.98. a) $|AB|$ = 18,75 cm, $|BC|$ = 12,75 cm, $|CD|$ = 10 cm, $|AD|$ = 17 cm b) $R = 10\frac{5}{8}$ cm;

wskazówka: Okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ pokrywa się z okręgiem opisanym na trójkącie ACD. Skorzystaj ze wzoru na pole P trójkąta: , gdzie a, b, c – długości boków trójkąta, R – promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

4.99. $|AC| = 21$, $R = 7\sqrt{3}$, $|BD| = 13\sqrt{3}$; *wskazówka:* Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Wówczas $|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle BOC| = 60°$, więc $|\sphericalangle ADC| = 60°$ oraz przekątna BD jest dwusieczną kąta ADC. Korzystając z twierdzenia cosinusów oblicz najpierw $|AC|$, następnie R. Niech d = $|BD|$. Zauważ,

że spełnione są jednocześnie dwie równości: $R^2 = 24^2 + d^2 - 2 \cdot 24 \cdot d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz

$R^2 = d^2 + 15^2 - 2 \cdot d \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, skąd $d = 13\sqrt{3}$.

Okrąg wpisany w czworokąt

4.100. a) tak b) nie c) nie

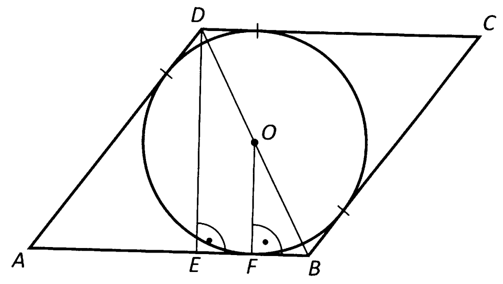
4.101. a) 42 cm b) 60 cm

4.102. 4

4.103. h = 12 cm,

4.104. a) 3 cm b) 5 cm

wskazówka: Niech $ABCD$ będzie rombem, DE – wysokością rombu, punkt O – środkiem okręgu o_1, a punkt F – punktem styczności boku AB i okręgu o_1. Oblicz długość odcinka EB, następnie wykorzystaj podobieństwo trójkątów DEB i OFB.



4.105. 4 cm, 8 cm

4.106 3

4.107. 32 cm

4.108. r = 3 cm

4.109. 9 cm, 16 cm

4.110. 108 cm

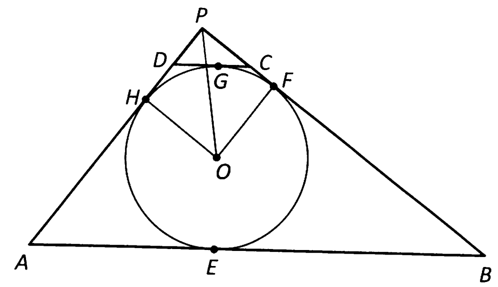
4.111. 18,2

4.112. 8 cm, 4 cm, 4 cm, 8 cm; *wskazówka:* Środek okręgu wpisanego w czworokąt jest punktem przecięcia się dwusiecznych kątów tego czworokąta. Skorzystaj z twierdzenia o dwusiecznej w trójkącie.

4.113. $|AD| = 6\frac{3}{7}$, $|DE| = 3\frac{3}{7}$; *wskazówka:* Wykaż, że promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest równy 3. Następnie poprowadź promienie tego okręgu do punktów styczności z bokami BE oraz DE i wykaż, że $|CE|$ = 1. Skorzystaj z twierdzenia o odcinkach stycznych do okręgu.

4.114. $|BC| = 3\frac{1}{3}$, $|DC| = \frac{5}{6}$, $|AD| = 2\frac{1}{2}$

wskazówka: Niech P będzie punktem przecięcia prostych zawierających boki AD i BC; punkty E, F, G, H będą punktami styczności okręgu z bokami trapezu (zobacz rysunek obok); $|AE|$ = $|AH|$ = 2, $|EB|$ = $|FB|$ = 3.



Czworokąt $HOFP$ jest kwadratem o boku 1 (uzasadnij to).

Zatem $|PD| + |DG| = |PC| + |GC| = 1$.

Ponadto trójkąt DCP jest podobny do trójkąta ABP w skali $\frac{1}{6}$ (oblicz i porównaj obwody tych trójkątów). Wykaż, że $|DG| = \frac{1}{2}$ i $|GC| = \frac{1}{3}$.

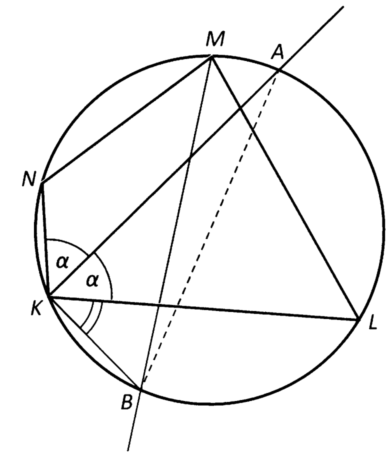
Okrąg opisany na czworokącie, okrąg wpisany w czworokąt – zadania na dowodzenie

4.118. *wskazówka:* Zauważ, że więc na czworokącie $ADBC$ można opisać okrąg.

4.119. *wskazówka:* Oznaczmy wierzchołki czworokąta K, L, M, N (zobacz rysunek obok).

Niech $|\sphericalangle LKA| = |\sphericalangle AKN| = \alpha$.

Wykaż, że $|\sphericalangle BKL| = 90° - \alpha$.



4.120. *wskazówka:* Niech $|\sphericalangle ADC| = \alpha$, $|\sphericalangle CDE| = \beta$. Wyznacz kąty trójkąta ACC_1 w zależności od α i β – korzystając z własności kątów wpisanych, opartych na tym samym łuku oraz kątów wpisanych, opartych na przystających łukach. Następnie oblicz miarę kąta EC_1B_1.

4.121. *wskazówka:* Skorzystaj z własności: *Kąty wpisane w okrąg i oparte na równych cięciwach są równe.* Z równości odpowiednich kątów uzasadnij, że czworokąt jest trapezem. Następnie skorzystaj z przystawania odpowiednich trójkątów i wykaż, że kąty trapezu przy podstawie są równe.

4.122. *wskazówka:* Wykaż, że dwusieczne przecinają cięciwę AC pod tym samym kątem. Niech P będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta BEC z cięciwą AC oraz $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle ABD| = \beta$. Udowodnij, że $|\sphericalangle BSC| = \alpha + \beta$ oraz $|\sphericalangle EPA| = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

4.123. *wskazówka:* Wykaż, że czworokąt ma dwie pary kolejnych boków równych.

4.124. *wskazówka:* Skorzystaj z zadania 4.123. oraz z podobieństwa trójkątów prostokątnych.

4.125. *wskazówka:* Niech x oraz $a - x$ oznaczają szukane długości odcinków, r – promień okręgu wpisanego w romb. Wówczas z zależności $2r = h = a\sin\alpha$ oraz $r^2 = x \cdot (a - x)$ otrzymujemy równanie z niewiadomą x: $x^2 - ax + \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{4} = 0$.

Podobieństwo. Czworokąty podobne

4.129. a) tak b) tak c) nie d) tak e) nie f) nie

4.130. a) nie b) tak

4.131. a) $k = \frac{2}{3}$ b) $k = \frac{\sqrt{10}}{2}$ c) $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $k = \sqrt{5}$

4.132. a) $k = 0{,}8$ b) $k = \frac{25}{17}$

4.133. $\frac{10}{\pi + 2}$

4.134. a) tak, $k = \frac{3}{2}$ b) nie c) tak, $k = \frac{4}{3}$ d) tak, $k = 2$

4.135. 30 cm, 75 cm, 15 cm, 45 cm

4.136. a) o 80% b) o 15% c) o 62,5%

4.137. 12 cm

4.138. 10,5 cm

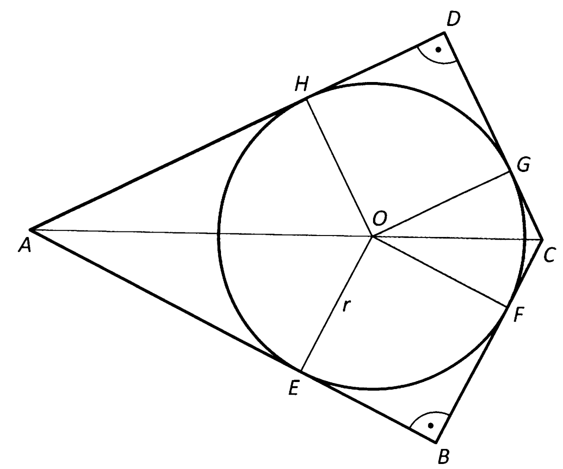
4.139. 10 cm

4.140. 1 : 8 (lub 8 : 1)

4.141. $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

4.142. a) 4 cm b) 12 cm

4.144. *wskazówka:* Poprowadź promienie okręgu do punktów styczności z bokami deltoidu $ABCD$. Następnie wykaż, że czworokąty $AEOH$ i $OFCG$ są podobne. Możesz skorzystać z podobieństwa odpowiednich trójkątów prostokątnych.



Test sprawdzający do rozdziału 4.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	B	D	A	A	B	C	D	B	D	A

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4.

11. $6\sqrt{6}$, $6\sqrt{3}$
12. 37
13. $2\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$
14. 16 cm
15. I. długość przekątnej: 6 cm, długość boku: $\sqrt{97}$ cm; II. długość przekątnej: 10 cm, długość boku: $\sqrt{129}$ cm
16. 12
17. $|AC| = 13$ cm, $|BD| = 19,5$ cm
18. $h = 12$ cm
19. 6 cm, 8 cm
20. podstawy: 17 cm, 49 cm; ramię: 34 cm
21. 8 cm, 15 cm
26. a) $|AC| = 7$ cm, $|BD| = 7\frac{6}{7}$ cm b) $|\sphericalangle A| \approx 76°$, $|\sphericalangle B| = 120°$, $|\sphericalangle C| \approx 104°$, $|\sphericalangle D| = 60°$
27. 6 cm, 12 cm, 18 cm, 12 cm
28. a) 8 oraz $8\sqrt{3}$ b) 2 oraz 6
29. 13 cm
30. 40 cm
31. 8 cm, 32 cm
32. a) 9 cm, 6 cm b) $3\sqrt{6}$ cm c) 7,2 cm
35. *wskazówka:* Wprowadź oznaczenia: $|CE| = x$, $|AC| = 3x$, $x > 0$ i wyznacz $|AD|$ oraz $|DE|$ w zależności od x. Aby obliczyć promień okręgu zauważ, że okrąg wpisany w czworokąt $ADEC$ pokrywa się z okręgiem wpisanym w trójkąt ABC.

5. Geometria płaska – pole czworokąta

Pole prostokąta. Pole kwadratu

5.1. 4 cm^2

5.2. a) 1 : 2 (lub 2 : 1) b) $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$ $\left(\text{lub } \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$

5.3. 36 cm^2

5.4. 4 cm, 5 cm

5.5. 30°

5.6. 90 cm^2

5.7. $\frac{4}{9}$

5.8. a) 1,44 m^2 b) 6,88 m

5.9. 11 cm^2; *wskazówka:* Skorzystaj z podobieństwa trójkątów AED i EBF Oblicz pola tych trójkątów.

5.10. 32 cm^2; *wskazówka:* $P_{EFCD} = P_{ABCD} - 2P_{AED}$, $|ES| = |DS| = 5$. Aby wyznaczyć $|AE|$, poprowadź promień ES i wysokość EG i zastosuj twierdzenie Pitagorasa w trójkącie ESG.

Pole równoległoboku. Pole rombu

5.11. a) 39 cm^2 b) $39\sqrt{2}$ cm^2 c) $39\sqrt{3}$ cm^2

5.12. a) $h_2 = 6$ lub $h_2 = 2\frac{2}{3}$ b) $h_2 = 6\frac{2}{3}$ c) $h_2 = 6$

5.13. 42 cm^2

5.14. $36\sqrt{3}$ cm^2; *wskazówka:* Zauważ, że jedna wysokość równoległoboku jest równa $2|OE|$, a druga $2|OF|$. Następnie uzasadnij, że kąt ostry równoległoboku jest równy 60°.

5.15. 60 cm^2; *wskazówka:* Ułóż układ równań z niewiadomymi a i b, gdzie a, b są długościami boków równoległoboku. Zastosuj dwukrotnie wzór na pole równoległoboku dla dwóch różnych podstaw.

5.16. 10 cm, 3 cm

5.17. 30°

5.18. a) 204 cm^2; *wskazówka:* Oblicz pole trójkąta ACD. b) $\frac{68}{\sqrt{8593}} \approx 0,73$

5.19. $P = 336$ cm^2, $Obw = 100$ cm

5.20. $4\sqrt{13}$, $6\sqrt{13}$

5.21. $4\sqrt[4]{2}$

5.22. 28 cm^2

5.23. a) 2 dm; 4,8 dm b) 10,4 dm c) $1\frac{11}{13}$ dm d) $\frac{120}{169}$

5.24. a) $h = 9\frac{3}{13}$ b) $11\frac{1}{13}$, $1\frac{12}{13}$

5.25. a) 3 b) $3\sqrt{5}$

Pole trapezu

5.26. a) 48 cm^2 b) 450 cm^2 c) 102 cm^2 d) 140 cm^2

5.27. a) 3,5 cm; 8,5 cm b) $6\frac{2}{3}$ cm; $5\frac{1}{3}$ cm

5.28. $21(\sqrt{3}-1)$ cm^2

5.29. $27(\sqrt{3}+3)$ cm^2

5.30. a) $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle B| = 45°$, $|\sphericalangle C| = |\sphericalangle D| = 135°$ b) $|AB| = 27$ cm, $|DC| = 9$ cm

5.31. $108\sqrt{3}$ cm^2
5.32. 56 cm^2
5.33. 50 cm^2
5.34. a) 18 cm, 10 cm b) 42 cm^2
5.35. a) 28 b) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ c) $3\sqrt{5}$
5.36. 2 cm, 2 cm, 2 cm, 4 cm
5.37. 99 cm^2
5.38. 22 cm, 8 cm
5.39. a) 2 : 3 b) 62,5 cm^2
5.40. a) $171\frac{1}{2}$ b) $14\frac{2}{7}$ c) 80
5.41. 3 cm^2, 6 cm^2, 6 cm^2, 12 cm^2
5.42. $85\frac{1}{3}$ cm^2
5.43. *wskazówka:* Wykaż, że kąty ostre trapezu są równe 60°.
5.44. $Obw = 14 + 10\sqrt{2}$, $P = 49$
5.45. 180 cm^2
5.46. 32 cm, 8 cm
5.47. 36π
5.48. 24 cm, 3 cm
5.50. $36\frac{6}{29}$ cm^2
5.51. a) 16π; *wskazówka:* Niech a, b oznaczają długości podstaw, r – promień koła wpisanego w trapez. Wówczas $\frac{a+b}{2} \cdot 2r = 72$ oraz $a + b = 2r + 10$, skąd otrzymujemy równanie $(10 + 2r) \cdot r = 72$ b) 12 cm, 6 cm

Pole czworokąta – zadania różne

5.52. a) 15 b) 24 c) $35\sqrt{3}$ d) 30
5.53. a) 45 cm^2 b) $45\sqrt{3}$ cm^2
5.54. a) 30° b) 60° c) 45° d) 90°
5.55. a) 6 cm, 2 cm b) 4 cm, 4 cm; $P = 8\sqrt{2}$ cm^2
5.56. a) $h = 10$ cm b) $\frac{a+b}{2} = 7{,}5$ cm; $P = 112{,}5$ cm^2
5.57. $169\sqrt{3}$ cm^2
5.59. a) 5 : 7 b) 3 : 13

5.60. 60 albo $26\frac{2}{3}$ albo 15; *wskazówka:* Wykonaj odpowiednie rysunki, poprowadź wspólne wysokości dla dwóch par trójkątów. Następnie skorzystaj z własności: *Stosunek pól trójkątów mających wspólną wysokość jest równy stosunkowi długości podstaw, na które ta wysokość została poprowadzona.*
5.61. a) 272 cm b) 4800 cm^2
5.62. Skorzystaj z własności pól trójkątów podobnych.
5.63. a) 45,5 b) $154\frac{2}{15}$ c) 84
5.64. $16\sqrt{3}$ cm^2; *wskazówka:* Skorzystaj z twierdzenia cosinusów dla kąta 60° i oblicz $|AC|$.
5.65. $P = 56(1+\sqrt{3})$; *wskazówka:* Zauważ, że $P_{FEC} = P_{DEF}$. Z podobieństwa trójkątów ABC i DEC wynika, że $P_{ABC} = 4P_{DEC}$. Zatem $P_{ABEF} = 7P_{DEF}$. Aby obliczyć pole trójkąta DEF, skorzystaj z twierdzenia sinusów i oblicz $|DF|$, następnie oblicz $|DE|$ z twierdzenia cosinusów dla kąta 45° lub kąta 30°.
5.66. $\frac{75\sqrt{3}}{16}$; *wskazówka:* Od pola rombu odejmij sumę pól odpowiednich trójkątów.
5.67. 108 cm^2
5.68. a) 3, 3, 5, 5; *wskazówka:* Niech x, y oznaczają długości różnych boków deltoidu, r – promień okręgu wpisanego w deltoid, P – pole deltoidu. Wówczas $(x + y) \cdot r = P$ oraz $\frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot P$. b) 7, $\frac{15\sqrt{3}}{7}$
5.69. 8 cm, 5 cm, 2 cm, 5 cm
5.70. a) $h = 2r = 12$ cm, $c = 26$ cm b) 30 cm, 20 cm
5.72. *wskazówka:* Poprowadź dwie proste: prostą AB, a przez punkt C – prostą równoległą do prostej BD. Punkt przecięcia obu prostych oznacz przez F. Wykaż, że pole czworokąta $AFDE$ jest równe polu pięciokąta $ABCDE$.
5.73. $P = 6(1+4\sqrt{3})$; *wskazówka:* Pole czworokąta jest równe sumie pól trójkątów ACD i ABC. Oblicz pole trójkąta ACD. Niech $\alpha = |\sphericalangle ADC|$. Aby obliczyć pole trójkąta ABC skorzystaj najpierw z twierdzenia cosinusów i oblicz $|AD|$ oraz $\cos\alpha$. Następnie zauważ, że $\cos|\sphericalangle ABC| = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ i oblicz $|AB|$ oraz $|BC|$; wówczas $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin\alpha$.
5.74. 37,44 cm^2; *wskazówka:* Zastosuj twierdzenie o siecznych okręgu: $|PC| \cdot |PD| = |PB| \cdot |PA|$ i oblicz $|DC|$. Następnie oblicz pola trójkątów ABC i ACD.
5.75. $2\sqrt{5}$; *wskazówka:* Zastosuj twierdzenie o stycznej i siecznej $|EB| \cdot |EA| = |EC|^2$. Oblicz $|BE|$. Następnie zauważ, że trójkąt BEC i trapez $ABCD$ mają wspólną wysokość, poprowadzoną z punktu C.

Pola figur podobnych

5.76. $P_1 = 3\text{ cm}^2$, $P = 75\text{ cm}^2$

5.77. $P_1 = 153\text{ cm}^2$, $P = 68\text{ cm}^2$

5.78. a) $k = 1\frac{1}{5}$ b) $k = 1{,}1$ c) $k = 0{,}8$ d) $k = 1\frac{1}{3}$

5.79. a) o $43\frac{3}{4}\%$ b) o 36% c) o 64% d) o ok. 49%

5.80. a) $x = 2$ cm, $y = 3$ cm b) 96%

5.81. a) $k = 2\sqrt{3}$ b) $60\sqrt{3}$

5.82. a) 1 : 3 b) 1 : 9

5.83. 27 cm, 12 cm

Mapa. Skala mapy

5.84. 34,9 cm

5.85. 200 km

5.86. a) 1 : 400 b) 1 : 200

5.87. a) 1 : 50 b) 2 cm, 3 cm

5.88. 5 cm^2

5.89. 3 ha

5.90. 1240 km^2

5.91. 3,5 cm^2

Test sprawdzający do rozdziału 5.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	B	D	A	B	C	B	A	D	B	D

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5.

11. P = 20

12. a) $\frac{5}{8}$,b) $k = \frac{\sqrt{10}}{4}$

13. $4\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $4\sqrt{2+\sqrt{2}}$

14. a) 5 b) 10, $10\sqrt{2}$, miara kąta między przekątnymi: 45°

15. $P = 112\sqrt{3}\text{ cm}^2$; *wskazówka:* Oblicz cosinus kąta rozwartego równoległoboku, a następnie sinus tego kąta.

16. a) 10 cm b) 9,6 cm c) 16 cm, 12 cm

17. 240 cm^2

18. 25 cm^2, 40 cm^2, 40 cm^2, 64 cm^2

19. 15 cm

20. 84 cm^2

21. 30 cm^2

22. 10 cm, 10 cm; największe pole: $25\sqrt{2}\text{ cm}^2$

23. *wskazówka:* Niech P oznacza pole trójkąta DPM. Uzasadnij, że $P_{PCM} = P$, $P_{APD} = 2P$, $P_{ABP} = P_{PBC} = 4P$.

25. $P = 45$; *wskazówka:* Niech P oznacza punkt przecięcia prostych AD i BC. Wówczas $|\sphericalangle APB| = 90°$ oraz $P_{ABCD} = P_{ABP} - P_{DCP}$. Oblicz cosinus kąta ADC, następnie cosinus kąta CDP i długości boków trójkąta DCP.

26. a) $P = 216\text{ cm}^2$; *wskazówka:* Poprowadź przekątną DB i cięciwę DE. Zauważ, że $|\sphericalangle ADE| = 90°$. Niech O oznacza punkt przecięcia się przekątnych AC i DB. Wówczas $|DO| = \sqrt{|AO| \cdot |OE|}$ b) $h = 14{,}4$ c) $\frac{24}{25}$

27. a) długość ramion: 9 cm, 9 cm; długości odcinków: $\frac{9-\sqrt{17}}{2}$, $\frac{9+\sqrt{17}}{2}$
b) I. długość krótszego ramienia: 8 cm; długość odcinków: 4 cm, 4 cm II. długość dłuższego ramienia: 10 cm; długości odcinków: 2 cm, 8 cm

28. $12\left(\sqrt{3}+3\right)\text{ cm}^2$

29. a) $\frac{55\sqrt{3}}{4}$; *wskazówka:* Niech $|\sphericalangle BAD| = \alpha$, wówczas $|\sphericalangle DCB| = 180° - \alpha$. Skorzystaj dwukrotnie z twierdzenia cosinusów dla tych kątów. b) 60°

30. I. przypadek: środek koła znajduje się wewnątrz trapezu; $P_K = 25\pi\text{ cm}^2$ II. przypadek: środek koła znajduje się na zewnątrz trapezu jest sprzeczny z warunkami zadania.

6. Elementy analizy matematycznej

Granica funkcji w punkcie

6.1. a) 0 b) 8 c) −3 d) 3 e) 11 f) 7

6.2. a) 3 b) 2 c) $\frac{1}{8}$ d) 1 e) 7 f) 6

6.3. a) 4 b) $\frac{-1}{6}$ c) 0 d) $\frac{-2}{5}$ e) $\frac{3}{2}$ f) 7

6.4. a) 3 b) 1 c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{12}$ e) 27 f) $\frac{1}{48}$

6.5. c) np. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{-1}{n}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \frac{-1}{2}$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = \frac{1}{2}$

6.6. a) istnieje granica; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 3$ b) nie istnieje granica

c) istnieje granica; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 3$ d) istnieje granica; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 3$

e) istnieje granica; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 4$ f) nie istnieje granica

Obliczanie granicy funkcji w punkcie

6.7. a) 7 b) -36 c) 4 d) $2\sqrt{10}$ e) $\frac{-7}{9}$ f) $\frac{-1}{8}$

6.8. a) -4 b) $\frac{-1}{5}$ c) -3 d) $-1\frac{7}{8}$ e) $-6\frac{2}{3}$ f) 0

6.9. a) $\frac{-1}{9}$ b) -16 c) $3\frac{1}{12}$ d) $\frac{9}{8}$ e) 2 f) $\frac{3}{4}$

6.10 a) 0,1 b) 32 c) $-4{,}5$ d) 54 e) $\frac{-1}{64}$ f) $\frac{5}{8}$

6.11. a) $\frac{1}{15}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{-1}{6}$ d) $\frac{-1}{2}$ e) 3 f) 12

6.12. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{-1}{4}$

6.13. a) 0 b) 0 c) 0 d) 0

6.14. a) $a = 64$ b) $a = 36$

6.15 0

Granice jednostronne funkcji w punkcie

6.16. a) granica w punkcie 1 istnieje i jest równa 0.
b) granica w punkcie -2 nie istnieje c) granica w punkcie 0 nie istnieje
d) granica w punkcie 3 istnieje i jest równa 2
e) granica w punkcie -2 nie istnieje f) granica w punkcie 0 istnieje i jest równa 1

6.17. a) 2 b) 0 c) -1 d) 1 e) -1 f) $\frac{-1}{2}$

6.18. a) 2 b) nie istnieje c) -22 d) 3 e) nie istnieje f) $\frac{1}{3}$

6.19. a) nie istnieje b) nie istnieje c) $\frac{2}{3}$ d) 5

Granica funkcji w nieskończoności

6.20. a) 2 b) -2 c) $\frac{2}{3}$ d) -7 e) 0 f) 3

6.21. a) $\frac{1}{3}$ b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d) 0 e) $\frac{4}{9}$ f) $\frac{3}{5}$

6.22. a) 0 b) $\frac{-4}{5}$ c) 4 d) 2 e) 0 f) $\frac{3}{7}$

6.23. a) -5 b) 0 c) 17 d) -5 e) 22 f) 3

6.24. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{-1}{2}$ c) $\frac{-2}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ e) 3 f) -3

6.25. a) 0 b) 1 c) $-2{,}5$ d) 0 e) -11 f) -10

Granica niewłaściwa funkcji

6.27. a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) $-\infty$ e) $-\infty$ f) $+\infty$
6.28. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) $+\infty$ e) $+\infty$ f) $+\infty$
6.29. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $-\infty$ f) $+\infty$
6.30. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) $+\infty$ e) $+\infty$ f) $+\infty$
6.31. a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $-\infty$ f) $-\infty$
6.32. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $-\infty$ f) $+\infty$
6.33. a) $-\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) $-\infty$
6.34. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) $-\infty$ e) $-\infty$ f) $-\infty$
6.35. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) $+\infty$
6.36. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) $-\infty$

Ciągłość funkcji w punkcie

6.37. a) jest ciągła b) jest ciągła c) nie jest ciągła
d) jest ciągła e) jest ciągła f) nie jest ciągła

6.38. a) jest ciągła b) jest ciągła c) nie jest ciągła
d) jest ciągła e) jest ciągła f) jest ciągła

6.39. $a = 6$

6.40. $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{jeśli } x \neq 0 \\ 2, & \text{jeśli } x = 0 \end{cases}$; funkcja f jest ciągła w punktach -1, 1, natomiast nie jest ciągła w punkcie 0

6.41. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ 1, & \text{jeśli } x \in \{-1, 1\} \\ 2, & \text{jeśli } x \in (-1, 1) \end{cases}$ funkcja jest ciągła w punkcie 0 i nie jest ciągła w punktach -1, 1

6.43 3; -6

Ciągłość funkcji w zbiorze

6.44 $a = 1$ lub $a = 3$

6.45. $a = -1{,}5$; $b = 7$

6.46. $a = -2$, $b = -14$

6.47. $a = \frac{-15}{11}$, $b = \frac{53}{11}$

6.48. $a = 0$, $b = 24$

6.49 Rozważmy funkcję $g(x) = f(x) - 2x$, gdzie $x \in \langle 1, 3\rangle$. Wówczas $g(1) = f(1) - 2 \geq 0$, bo $f(1) \geq 2$ i $g(3) = f(3) - 6 \leq 0$, bo $f(3) \leq 6$

1. Jeśli $g(1) = f(1) - 2 = 0$ lub $g(3) = f(3) - 6 = 0$, to liczba 1 lub 3 jest miejscem zerowym funkcji g, czyli jest też rozwiązaniem równania $f(x) = 2x$.

2. Jeśli $g(1) = f(1) - 2 > 0$ i $g(3) = f(3) - 6 < 0$, to na mocy twierdzenia Darboux istnieje taka liczba c, $c \in (1, 3)$, że $g(c) = 0$. To znaczy, że $f(c) = 2c$, czyli c jest rozwiązaniem równania $f(x) = 2x$.

6.50 *wskazówka:* Rozważ funkcję $g(x) = f(x) - x$, gdzie $x \in \langle 0, 1\rangle$. Korzystając z twierdzenia Darboux, wykaż, że funkcja g ma miejsce zerowe.

6.51 tak

6.52 *wskazówka:* Rozważ funkcję $y = h(x)$, gdzie $h(x) = f(x) - g(x)$. Wykaż, że funkcja h ma miejsce zerowe należące do przedziału $(0, 1)$.

6.53 *wskazówka:* Rozważ równanie $f(x) = -160$ i zapisz je w postaci $f(x) + 160 = 0$. Oznacz $W(x) = f(x) + 160$ a następnie oblicz $W(3)$ i $W(4)$.

6.54. *wskazówka:* Zapisz równanie w postaci $W(x) = 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem. Skorzystaj z twierdzenia Darboux.

6.55. *wskazówka:* Rozważ funkcję g, gdzie $g(x) = f(x) - f(x+1)$, $x \in \langle 2, 6\rangle$. Następnie oblicz $g(2)$, $g(4)$, $g(6)$ i skorzystaj z twierdzenia Darboux.

6.57 a) $ZW = \left\langle \frac{-1}{9}, \frac{-1}{25} \right\rangle$ b) $ZW = \left\langle \frac{1}{15}, \frac{1}{3} \right\rangle$ c) $ZW = \langle 1, 2\rangle$ d) $ZW = \langle -2, -1\rangle$

Asymptoty wykresu funkcji

6.58. a) $x = 5$, b) nie ma asymptot pionowych c) $x = 2$
d) $x = 0$ e) $x = 0$, $x = 2$ f) $x = -3$

6.59. a) $x = -3$ b) $x = -4$, $x = -5$ c) $x = -2$ d) nie ma asymptot pionowych
e) $x = -2$, $x = \frac{-2}{3}$ f) nie ma asymptot pionowych

6.60. $a = 1$, $b = -6$

6.61. $a = -8$, $b = 16$

6.62. $(a = -1$ i $b = -12)$ lub $(a = -6$ i $b = 8)$ lub $(a = -8$ i $b = 16)$

6.63. nie istnieją

6.65. a) $y = \frac{1}{2}x + 3$ b) $y = x$ c) $y = 5$
d) nie ma asymptot ukośnych e) $y = 0$ f) $y = 2x + 7$

6.66. a) $y = 3x - 15$ asymptota ukośna prawostronna $y = -3x - 15$ asymptota ukośna lewostronna
b) $y = 4$ asymptota pozioma prawostronna $y = -4$ asymptota pozioma lewostronna
c) $y = -x$ asymptota ukośna prawostronna $y = x - 4$ asymptota ukośna lewostronna
d) $y = x - 2$ asymptota ukośna prawostronna $y = -x$ asymptota ukośna lewostronna
e) $y = x + 3$ asymptota ukośna prawostronna $y = -x - 3$ asymptota ukośna lewostronna
f) $y = 2x - \frac{1}{4}$ asymptota ukośna prawostronna $y = -2x + \frac{1}{4}$ asymptota ukośna lewostronna

6.67. a) $y = 3x + 9$ asymptota ukośna lewostronna $y = -1$ asymptota pozioma prawostronna
b) $y = -2x$ asymptota ukośna prawostronna, brak asymptoty ukośnej lewostronnej
c) $y = 0$ asymptota pozioma obustronna
d) $y = -3x - 18$ asymptota ukośna lewostronna, $y = 3x - 18$ asymptota ukośna prawostronna

6.68. a) $x = -7$ asymptota pionowa; $y = -2$ asymptota pozioma
b) $x = 2$, $x = -3$ asymptoty pionowe; $y = 0$ asymptota pozioma
c) $x = -1$ asymptota pionowa; $y = x - 2$ asymptota ukośna
d) $x = 1$ asymptota pionowa; $y = 2$ asymptota pozioma
e) $x = 1$, $x = -1$ asymptoty pionowe; $y = 3x - 2$ asymptota ukośna
f) $x = 3$ asymptota pionowa; brak asymptot ukośnych

6.69. a) $x = -2$ asymptota pionowa, $y = 1$ asymptota pozioma
b) $x = -1$ asymptota pionowa $y = x - 4$ asymptota ukośna
c) $x = 0$ asymptota pionowa, $y = 0$ asymptota pozioma
d) $y = 2x$ asymptota ukośna
e) $x = 3$ asymptota pionowa $y = 1$ asymptota pozioma lewostronna $y = -1$ asymptota pozioma prawostronna
f) $x = -2$ asymptota pionowa prawostronna, $x = 2$ asymptota pionowa lewostronna, $y = 6x - 6$ asymptota ukośna prawostronna, $y = -6x - 6$ asymptota ukośna lewostronna

Pochodna funkcji w punkcie

6.70. a) $f'(3) = -2$ b) $f'(-1) = 3$ c) $f'(-2) = -13$ d) $f'(5) = -10$
e) $f'(4) = \frac{-1}{81}$ f) $f'(-3) = \frac{1}{18}$

6.71. a) $f'(5) = 150$ b) $f'(-2) = -17$ c) $f'(1) = \frac{-1}{2}$ d) $f'(-2) = -3$
e) $f'(1) = \frac{1}{2}$ f) $f'(-3) = \frac{-5}{8}$

6.72. a) istnieje b) istnieje c) nie istnieje d) istnieje e) nie istnieje f) istnieje

6.73. a) $a=-2,\ b=6$ b) $a=-1,\ b=-4$ c) $a=-\frac{1}{2},\ b=3$

Funkcja pochodna

6.74. a) $f'(x)=0$ b) $f'(x)=-3$ c) $f'(x)=6$ d) $f'(x)=-2x$
e) $f'(x)=10x+3$ f) $f'(x)=3x^2-8x+5$

6.75. a) $f'(x)=x^3-x^2+4x$ b) $f'(x)=5x^4-8x^3+1$ c) $f'(x)=-24x^7+20x^3$
d) $f'(x)=6x^2-36x^5$ e) $f'(x)=\sqrt{6}+7x^6-x^7$ f) $f'(x)=10x^9+100x^{99}+1000x^{999}$

6.76. a) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+2$ b) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$ c) $f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$
d) $f'(x)=8x^3-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ e) $f'(x)=5x^4-6x^2+1-\frac{6}{x^2}$ f) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

6.77. a) $f'(x)=24x^5-5x^4+8$ b) $f'(x)=32x^3+18x^2-24x-9$
c) $f'(x)=5x^4+8x^3+9x^2+4x+1$ d) $f'(x)=14x^6+30x^4+24x^3+12x^2+24x$
e) $f'(x)=3x^2+\frac{1}{x^2}+3\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$ f) $f'(x)=3x^2+2x+\frac{5}{2}x\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

6.78. a) $f'(x)=\frac{-3}{(x+5)^2}$ b) $f'(x)=\frac{2}{(3x-1)^2}$ c) $f'(x)=\frac{14}{(-4x+2)^2}$
d) $f'(x)=\frac{18x^2+6x+7}{(6x+1)^2}$ e) $f'(x)=\frac{10x}{(x^2+1)^2}$ f) $f'(x)=\frac{-2x^2-10}{(x^2-5)^2}$

6.79. a) $f'(x)=\frac{3x^4+2x^3+12x+2}{(3x^2+x)^2}$ b) $f'(x)=\frac{9x^2+16x-10}{(x^2+x+2)^2}$ c) $f'(x)=\frac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}$
d) $f'(x)=\frac{-20x^3-15x^2}{(x^4+x^3+1)^2}$ e) $f'(x)=\frac{x^6-2x^3-6x^2+3}{(x^3+1)^2}$ f) $f'(x)=\frac{-4x^5-1}{(x^5-1)^2}$

6.80. a) $k=1,\ m=-1;\ f'(x)=\begin{cases}4, & \text{jeśli } x<1\\ 2x+2, & \text{jeśli } x\geq 1\end{cases}$

b) $k=-2\frac{2}{3},\ m=12;\ f'(x)=\begin{cases}\frac{-4}{3}x+\frac{8}{3}, & \text{jeśli } x<3\\ \frac{-12}{x^2}, & \text{jeśli } x\geq 3\end{cases}$

c) nie istnieje takie k, m; $f'(x)=\begin{cases}4x+k^2, & \text{jeśli } x<2\\ 1, & \text{jeśli } x>2\end{cases}$

d) $k=m=\frac{-1}{4};\ f'(x)=\frac{-1}{2}x+\frac{3}{4},\quad x\in \boldsymbol{R}$

Funkcja złożona. Pochodna funkcji złożonej

6.81. a) $(g\circ f)(x)=3x-9$, $D_{g\circ f}=\boldsymbol{R}$, $(f\circ g)(x)=3x-3$, $D_{f\circ g}=\boldsymbol{R}$

b) $(g\circ f)(x)=\frac{1}{2x}$, $D_{g\circ f}=\boldsymbol{R}-\{0\}$, $(f\circ g)(x)=\frac{2}{x}$, $D_{f\circ g}=\boldsymbol{R}-\{0\}$

c) $(g\circ f)(x)=4x^2$, $D_{g\circ f}=\boldsymbol{R}$, $(f\circ g)(x)=-16x^2$, $D_{f\circ g}=\boldsymbol{R}$

d) $(g\circ f)(x)=x^2-10x+29$, $D_{g\circ f}=\boldsymbol{R}$, $(f\circ g)(x)=|x^2-1|$, $D_{f\circ g}=\boldsymbol{R}$

e) $(g\circ f)(x)=-x-1$, $D_{g\circ f}=\boldsymbol{R}-\{-1\}$, $(f\circ g)(x)=\frac{x}{x-1}$, $D_{f\circ g}=\boldsymbol{R}-\{0,1\}$

f) $(g\circ f)(x)=\frac{5x-1}{5x-3}$, $D_{g\circ f}=\boldsymbol{R}-\left\{\frac{3}{5}\right\}$, $(f\circ g)(x)=\frac{4x+2}{x-2}$, $D_{f\circ g}=\boldsymbol{R}-\{2\}$

6.82. a) $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-2x}$, $D_{g\circ f}=(-\infty,0\rangle\cup\langle 2,+\infty)$, $(f\circ g)(x)=x-2\sqrt{x-1}$,
$D_{f\circ g}=\langle 1,+\infty)$

b) $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-16}$, $D_{g\circ f}=(-\infty,-4\rangle\cup\langle 4,+\infty)$, $(f\circ g)(x)=x-16$,
$D_{f\circ g}=\langle -9,+\infty)$

c) $(g\circ f)(x)=2\sqrt{x}-6$, $D_{g\circ f}=\langle 0,+\infty)$, $(f\circ g)(x)=\sqrt{2x-6}$, $D_{f\circ g}=\langle 3,+\infty)$

d) $(g\circ f)(x)=\sqrt[4]{x^2-1}$, $D_{g\circ f}=(-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,+\infty)$, $(f\circ g)(x)=\sqrt{x-1}$,
$D_{f\circ g}=\langle 1,+\infty)$

e) $(g\circ f)(x)=\sqrt{\frac{x-5}{x+1}}$, $D_{g\circ f}=(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$, $(f\circ g)(x)=\sqrt{2x-6}$,
$D_{f\circ g}=\left(0,\frac{1}{25}\right)\cup\left(\frac{1}{25},+\infty\right)$

f) $(g\circ f)(x)=\left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2}\right)^2$, $D_{g\circ f}=\langle 0,4)\cup(4,9)\cup(9,+\infty)$, $(f\circ g)(x)=\frac{1-2|x|}{1-3|x|}$,
$D_{f\circ g}=\boldsymbol{R}-\left\{\frac{-1}{3},0,\frac{1}{3}\right\}$

6.83. a) $f'(x)=16(4x-7)^3$
b) $f'(x)=-12x(3-2x^2)^2$
c) $f'(x)=(3x^5+2x^2-8)^5(90x^4+24x)$
d) $f'(x)=(5x^4-2x)(140x^3-14)+(3+x^2)^3\cdot 8x$
e) $f'(x)=(5x-x^3)^2\cdot(15-9x^2)+4(1-x)^3$
f) $f'(x)=(4x^6+2x^2+1)^{-8}(-168x^5-28x)$

6.84. a) $f'(x) = 15x^2(6x-9)^4(16x-9)$
b) $f'(x) = x-4(x^4-x^3+x)^2(8x^3-5x^2-1)$
c) $f'(x) = (2x^4-x^2)^2(-52x^4+96x^3+14x^2-24x)$
d) $f'(x) = 2(x^2-x)(x^3-1)(5x^4-4x^3-2x+1)$
e) $f'(x)=\frac{2(x^2+1)^2(2x^2-6x-1)}{(x-2)^3}$ f) $f'(x)=\frac{(2x+3)^3(-6x-37)}{(3x+1)^6}$

6.85. a) $f'(x)=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}$ b) $f'(x)=\frac{8x^3}{\sqrt{x^4+3}}$ c) $f'(x)=\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+4}}$
d) $f'(x)=\frac{-18x^4+6}{\sqrt{(3x^4+1)^3}}$ e) $f'(x)=\frac{-8}{\sqrt{(5-x)(3x+1)^3}}$
f) $f'(x)=\frac{x^2+x-5}{\sqrt{(x^2-2x+4)(x^2+5)^3}}$

6.86. $g(-5) = 29$, $g'(x) = 2\cdot f(x)\cdot f'(x) - 3\cdot f'(x) + 2x$, $g'(-5) = 0$

6.87. $g(3)=\frac{1}{14}$, $g'(x)=\frac{f'(x)\left[f^2(x)+4x^2+2\right]-\left[2f(x)f'(x)+8x\right]\left[f(x)+1\right]}{\left[f^2(x)+4x^2+2\right]^2}$, $g'(3)=\frac{-1}{42}$

6.88. $g(7) = 12$, $g'(x)=\frac{2\cdot f^3(x)\cdot f'(x)+3x-1}{\sqrt{f^4(x)+3x^2-2x+10}}$, $g'(7) = 2$

Styczna do wykresu funkcji

6.89. a) $y = 6x-8$ b) $y = 9x+11$ c) $y=\frac{2}{5}x+1\frac{1}{5}$ d) $y = \frac{-1}{6}x$

6.90. $y=-5x+5$; $(4, -15)$

6.91. $y=-8$; jeden punkt wspólny

6.92. $y=\frac{1}{36}x+1\frac{4}{9}$, dwa punkty wspólne; $y=\frac{-1}{4}x+\frac{1}{2}$, dwa punkty wspólne

6.93. $y=\frac{3}{4}x-4\frac{1}{2}$, jeden punkt wspólny; $y=-3x-18$; jeden punkt wspólny

6.94. a) $A(3, 5)$ b) $y = 3x-4$

Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji

6.95. a) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 4, +\infty)$, a malejąca w przedziale: $\langle -1, 4\rangle$ b) funkcja f jest rosnąca w przedziale: $\langle 3, 5\rangle$, a malejąca w przedziałach: $(-\infty, 3\rangle$, $\langle 5, +\infty)$ c) funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 6, +\infty)$, a malejąca w przedziale $(-\infty, 6\rangle$ d) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, -4\rangle$, $\langle 1, 4\rangle$, a malejąca w przedziałach: $\langle -4, 1\rangle$, $\langle 4, +\infty)$

6.96. a) funkcja f jest rosnąca w przedziale $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right\rangle$, malejąca w przedziale $\left\langle\frac{1}{4}, +\infty\right)$
b) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $\left\langle\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$, $\langle 1, +\infty)$, a malejąca w przedziałach: $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right\rangle$ $\left\langle\frac{1}{2}, 1\right\rangle$ c) funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 1, 3\rangle$, a malejąca w przedziałach $(-\infty, 1\rangle$, $\langle 3, +\infty)$ d) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, -2\rangle$, $\langle -1, 1\rangle$, $\langle 2, +\infty)$, a malejąca w przedziałach: $\langle -2, -1\rangle$, $\langle 1, 2\rangle$

6.97. a) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, -4\rangle$, $\langle -2, +\infty)$, a malejąca w przedziałach $\langle -4, -3)$, $(-3, -2\rangle$ b) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, 2\rangle$, $\langle 6, +\infty)$, a malejąca w przedziałach $\langle 2, 4)$, $(4, 6\rangle$ c) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $\langle 0, 2)$, $\left(2, 2\frac{2}{5}\right\rangle$, a malejąca w przedziałach: $(-\infty, 0\rangle$, $\left\langle 2\frac{2}{5}, 3\right)$, $(3, +\infty)$ d) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, -2)$, $\left(2, 2\frac{1}{2}\right\rangle$, a malejąca w przedziałach: $\left\langle 2\frac{1}{2}, 7\right)$, $(7, +\infty)$

6.98. a) funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 0, +\infty)$, a malejąca w przedziale $(-\infty, 0\rangle$
b) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, 0\rangle$, $\langle 2, +\infty)$, a malejąca w przedziale $\langle 0, 2\rangle$

6.99. a) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, -3)$, $(-3, -1\rangle$, a malejąca w przedziałach $\langle -1, 3)$, $(3, +\infty)$ b) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 2, +\infty)$, a malejąca w przedziałach $\langle -1, 0)$, $(0, 2\rangle$

6.100. a) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $\left\langle -2, \frac{-8}{5}\right\rangle$, $\langle 0, +\infty)$, a malejąca w przedziale $\left\langle\frac{-8}{5}, 0\right\rangle$ b) funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 2\rangle$, a malejąca w przedziale $\langle 2, 3\rangle$ c) funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 0, 8\rangle$, a malejąca w przedziałach: $(-\infty, 0\rangle$, $\langle 8, 10\rangle$ d) funkcja f jest rosnąca w przedziałach: $\left(-\infty, -2\frac{2}{3}\right\rangle$, $\langle -1, 2\rangle$, a malejąca w przedziałach: $\left\langle -2\frac{2}{3}, -1\right\rangle$, $\langle 2, +\infty)$

6.101 a) $a=-2$, $b=7$ b) funkcja f jest rosnąca w przedziale $\left\langle\frac{-7}{3}, 1\right\rangle$ i malejąca w przedziałach: $\left(-\infty, \frac{-7}{3}\right\rangle$, $\langle 1, +\infty)$

Ekstrema lokalne funkcji

6.102. a) $f_{max}(-5) = 48\frac{1}{3}$, $f_{min}(3) = -37$ b) $f_{min}(4) = 19\frac{2}{3}$, $f_{max}(6) = 21$
c) brak ekstremów lokalnych d) brak ekstremów lokalnych

6.103. a) $f_{max}(-3) = 4\frac{2}{5}, f_{min}(-1) = -15\frac{13}{15}, f_{max}(1) = -4\frac{2}{15}, f_{min}(3) = -24\frac{2}{5}$

b) $f_{min}(0) = 7$ c) $f_{min}(6) = -520\frac{4}{5}, f_{max}(-2) = 93\frac{3}{5}$ d) brak ekstremów lokalnych

6.104. a) $f_{max}\left(\frac{-\sqrt{5}}{5}\right) = -2\sqrt{5}, f_{min}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 2\sqrt{5}$ b) $f_{min}(2) = 12$

c) $f_{min}\left(\sqrt{3}\right) = 6\sqrt{3} - 5, f_{max}\left(-\sqrt{3}\right) = -6\sqrt{3} - 5$ d) $f_{min}(0) = -2{,}5$

6.105. a) $f_{max}(-3) = 0, f_{min}\left(\frac{-7}{3}\right) = \frac{-4}{27}, f_{max}(-2) = 0, f_{min}(0) = -4$ b) $f_{min}(-4) = 0, f_{max}\left(\frac{-10}{3}\right) = \frac{4}{27}, f_{min}(-3) = 0, f_{max}(0) = \frac{9}{4}$

6.106. a) $f_{min}(-8) = 16, f_{max}(0) = 0, f_{min}(8) = 16$ b) $f_{min}(0) = 0, f_{max}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}, f_{min}\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{20}{9}$ c) $f_{min}(0) = 0, f_{max}\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}, f_{min}\left(\frac{14}{3}\right) = \frac{28}{9}$ d) $f_{min}(-3) = 0, f_{min}(1) = 0, f_{max}(3) = \frac{4}{3}$

6.107. $f_{max}(2) = 3$

6.108 $f_{min}(16) = -29$

6.109. $f_{min}(-4) = -16, f_{max}(4) = 16$

6.110. $a = 5$, $b = 4$, $f_{min}(7) = 9$

6.111. a) $a = 6$, $b = -33$ b) $f_{min}(4) = 3$

6.112. a) $m \in \langle 0, 6\rangle$ b) $m = -2$, maksimum c) $m \in (-2, 0) \cup (6, 8)$

Największa i najmniejsza wartość funkcji w przedziale

6.113. a) $M = 18\frac{2}{3}$, $m = -17\frac{1}{3}$ b) $M = 12$, $m = -5$

c) $M = 7\frac{11}{15}$, $m = \frac{-19}{30}$ d) $M = 2\frac{3}{5}$, $m = -3\frac{8}{15}$

6.114. a) $M = 9$, $m = -16\frac{2}{3}$ b) M – nie istnieje, $m = 4\sqrt{2} - 6$

c) $M = 5$, m – nie istnieje d) M – nie istnieje, m – nie istnieje

6.115. a) $ZW = \langle 1, 4\rangle$ b) $ZW = \left\langle -6\frac{2}{3}, 12\right\rangle$ c) $ZW = \langle -26, 38\rangle$ d) $ZW = \left\langle -8\frac{2}{3}, 8\frac{2}{3}\right\rangle$

6.116. a) $ZW_f = \langle -2, 2\sqrt{5}\rangle$ b) $ZW_f = \langle -2, 2\rangle$

Zadania optymalizacyjne

6.117. $x = 13\frac{1}{3}$ cm; 37,9 litra

6.118. 40 cm na 40 cm na 20 cm

6.119. 8 cm na 8 cm na 8 cm

6.120. 3 cm na 6 cm na 4 cm

6.121. 12 cm, 24 cm, 18 cm

6.122. 64 cm na 96 cm na 80 cm

6.123. a) tak, $a = 1$ b) nie; *wskazówka:* $\lim\limits_{a \to -\infty} (a + a^2 - a^3) = +\infty$

6.124. a) tak; $10 = 5 + 5$ b) nie; *wskazówka:* $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{x^2 + (10 - x)^2}{x(10 - x)}\right) = -\infty$

6.125. a) $x = \frac{4 - \sqrt{2}}{7}$, $y = \frac{2\sqrt{2} - 1}{7}$ b) $x = 0$, $y = 1$

wskazówka: Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^3 + (1 - 2x)^3$, gdzie $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$.

6.126. o godz. $9^{\underline{00}}$

6.127. $y(x) = x + \frac{h^2}{x}$, $x \in (0, +\infty)$; najmniejsza wartość funkcji jest równa $2h$ i przyjmowana jest dla argumentu h

6.128. a) $L(x) = \sqrt{x^2 + \frac{9x^2}{x^2 - 4x + 4}}$, gdzie $x \in (2, +\infty)$ b) dla $x = 2 + \sqrt[3]{18}$;

Test sprawdzający do rozdziału 6.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	**C**	**B**	**A**	**B**	**C**	**D**	**D**	**A**	**C**	**D**

Nr zadania	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Odpowiedź	**D**	**B**	**A**	**A**	**B**	**B**	**A**	**D**	**B**	**D**

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6.

21. a) granica istnieje; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -5$ b) granica nie istnieje

22. a) -2 b) 0 c) 1 d) 1 e) 0 f) granica nie istnieje

23. a) 0 b) $+\infty$ c) 2 d) $-\infty$ e) $+\infty$ f) $-\infty$

24. a) $-\infty$ b) $\frac{-1}{3}$ c) 0 d) $-\infty$

25. *wskazówka:* Funkcja T jest funkcją ciągłą.

26. a) 1,5 m b) 60,3 m c) 9,8 m/s d) prędkość chwilowa w 3 sekundzie: 4,9 m/s (kamień się wznosił); prędkość chwilowa w 4 sekundzie: –4,9 m/s (kamień spadał) e) 61,525 m f) po 7,04 s

27. a) 1600 m^3 b) 900 m^3 c) 35 000 l/min d) 30 000 l/min; *wskazówka:* Szukana wielkość jest równa $V'(20)$.

28. zdania prawdziwe: b), d)

29. $A\left(-2\sqrt{6},0\right)$, $B(3, 0)$, $C(2, -20)$, $D(-2, -100)$

30. a) $(-3, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, 5)$ b) $f'(-2) = 3, f'(1) = 0, f'(3) = 0, f'(4) = -2$

31. *wskazówka:* Udowodnij, że zbiór wartości funkcji pochodnej f' to przedział $\langle 1, +\infty)$.

32. a) $k = -1$ lub $k = \frac{-1}{2}$ b) $k = \frac{-1}{2}$

33. a) miejsca zerowe: $-4, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$ b) $f_{max}(-3) = 6, f_{min}\left(\frac{1}{3}\right) = -12\frac{14}{27}$

c) $y = -3x - 12$ d) $B\left(-2\frac{2}{3}, 5\frac{13}{27}\right)$, $y = -3x - 2\frac{14}{27}$

34. a) $a = 1, b = -15$ b) $f_{max}(-5) = 65\frac{1}{3}$, $f_{min}(3) = -20$

35. a) $f_{min}(-3) = -37\frac{1}{4}$, $f_{max}(1) = 5\frac{5}{12}$, $f_{min}(3) = -1\frac{1}{4}$ b) $ZW = \left\langle -37\frac{1}{4}, +\infty\right)$

36. $ZW = (-\infty, -7\rangle \cup \langle 13, +\infty)$

37. $ZW = (-\infty, -108\rangle \cup \langle 108, +\infty)$

38. $x = 0$ – asymptota pionowa obustronna, $y = \frac{1}{2}x + 3$ – asymptota ukośna prawostronna

39. a) $K(x) = 4x + \frac{22\,500}{x} + 600$, gdzie $x \in \langle 20, 200\rangle$ b) 75 wieszaków

40. a) w wariancie 1): 7 godzin, w wariancie 2): 3,5 godzin b) o ok. 121 zł

7. Trygonometria

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej – powtórzenie wiadomości z klasy 2.

7.1. a) $\frac{35\pi}{36}$ b) $\frac{-\pi}{12}$ c) $\frac{7\pi}{3}$ d) $\frac{-257\pi}{45}$

7.2. a) –40° b) 28° c) 427,5° d) –1070°

7.3. a) $x = -4$ b) $y = -5$ c) $y = -5\sqrt{3} \vee y = 5\sqrt{3}$

7.4. a) $\cos\alpha = \frac{-3\sqrt{5}}{7}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-2\sqrt{5}}{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{-3\sqrt{5}}{2}$

b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{23}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{46}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{46}}{23}$

c) $\sin\alpha = \frac{-\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -3$

d) $\sin\alpha = \frac{-\sqrt{17}}{17}$, $\cos\alpha = \frac{-4\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$

7.5. a) $\frac{4-\sqrt{6}}{4}$ b) $-3\frac{1}{4}$ c) $-\sqrt{3}$ d) -2

7.9. a) $T_o = \frac{4\pi}{3}$ b) $T_o = 2\pi$ c) $T_o = 8$ d) $T_o = \frac{6\pi}{\pi+1}$

7.10. $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

7.11. $\frac{-5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

7.12. $-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$

7.13. $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

7.14. Funkcja f jest nieparzysta, funkcja g nie jest ani parzysta, ani nieparzysta, funkcje h i k są parzyste.

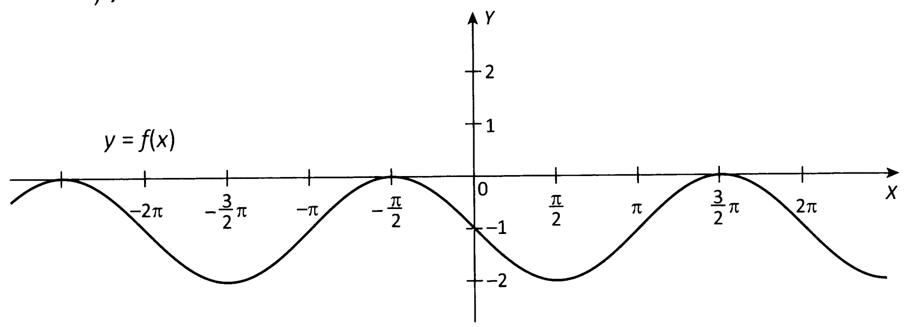
7.15. a) $ZW_f = \left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle$ b) $ZW_g = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ c) $ZW_h = \langle -1, 1\rangle$

7.16. a) $ZW = \langle -3, 2\rangle$ b) $ZW = \langle 4, +\infty)$ c) $ZW = \left\langle -12\frac{1}{4}, -10\right\rangle$

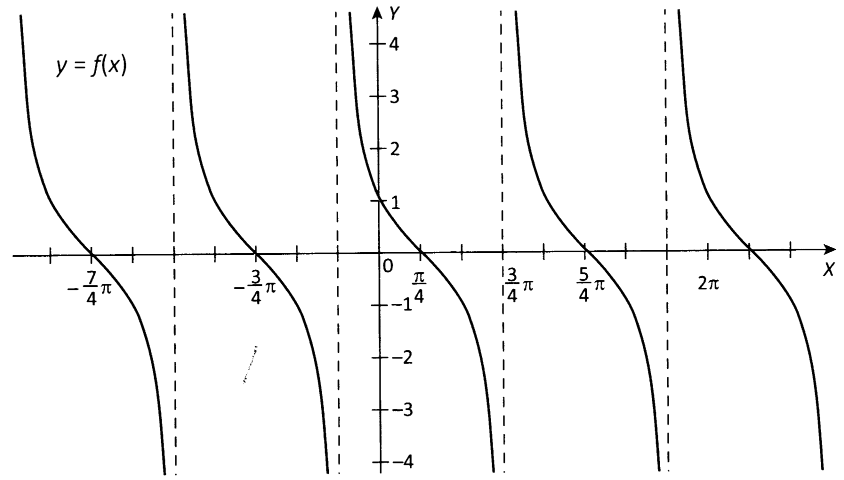
d) $ZW = \left\langle \frac{-1}{5}, \frac{-1}{9}\right\rangle$ e) $ZW = \langle -1, 5\rangle$ f) $ZW = (-\infty, -2\rangle$

Przekształcenia wykresów funkcji trygonometrycznych

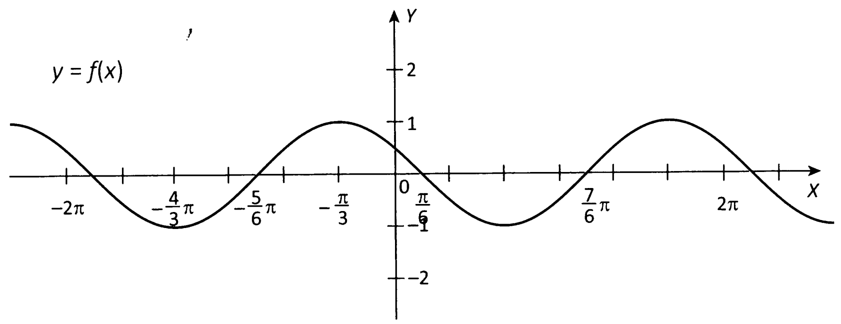
7.17. a) $y = -\sin x - 1$



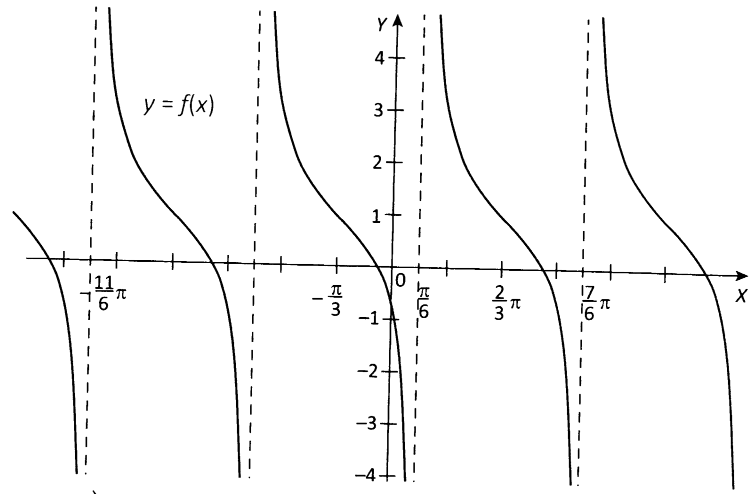
b) $y = -\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



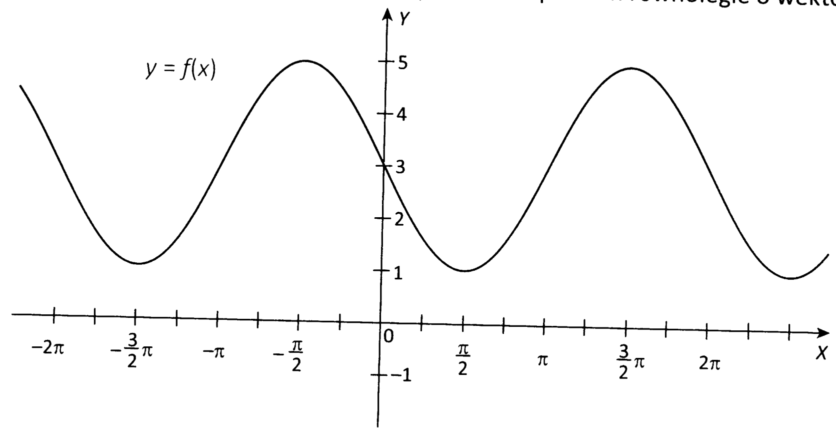
c) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$



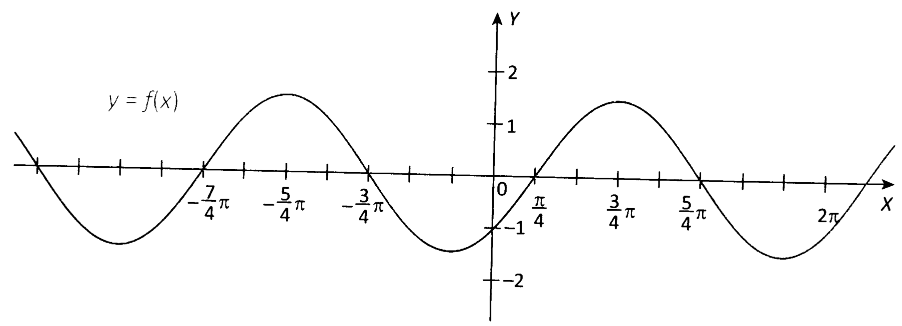
d) $y = 1 + \mathrm{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$



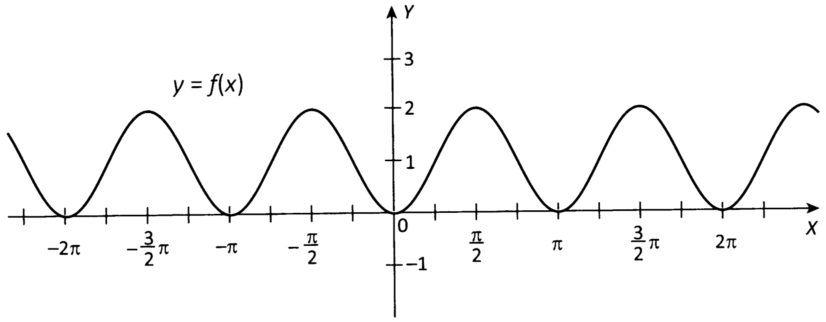
7.18. a) wskazówka Wykres funkcji $y = -2\sin x$ przesuń równolegle o wektor $[0, 3]$.



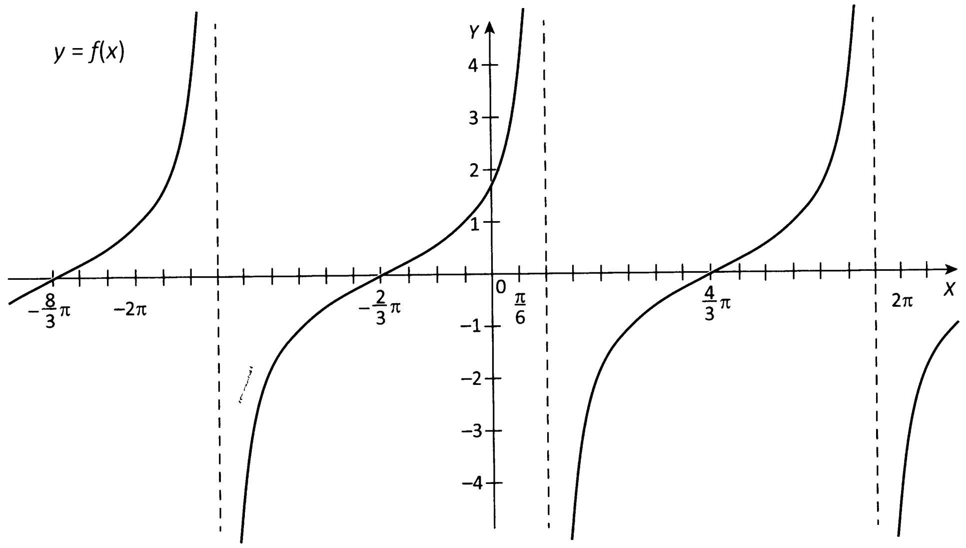
b) Wykres funkcji $y = -\sqrt{2}\cos x$ przesuń równolegle o wektor $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$



c) *wskazówka:* Przekształć wzór funkcji f do postaci: $f(x) = -\cos 2x + 1$



d) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

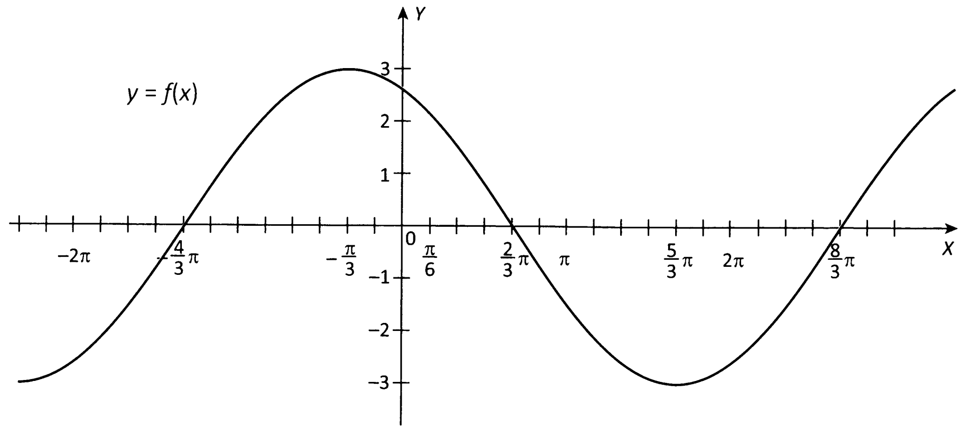


7.19. a) *wskazówka:* $f(x) = \sin^3 x + 2$

b) *wskazówka:* $f(x) = 2\cos x$

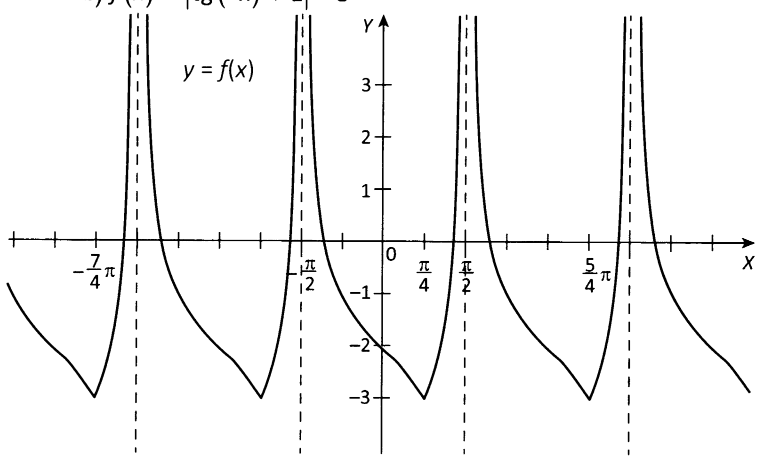
c) *wskazówka:* $f(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$, wykres funkcji $y = -\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$ przesuń równolegle o wektor $\left[-\frac{\pi}{3}, -1\right]$

d) *wskazówka:* $f(x) = -3\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$, czyli $f(x) = -3\sin\frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ Wykres funkcji $y = -3\sin\frac{x}{2}$ przesuń równolegle o wektor $\left[\frac{2\pi}{3}, 0\right]$

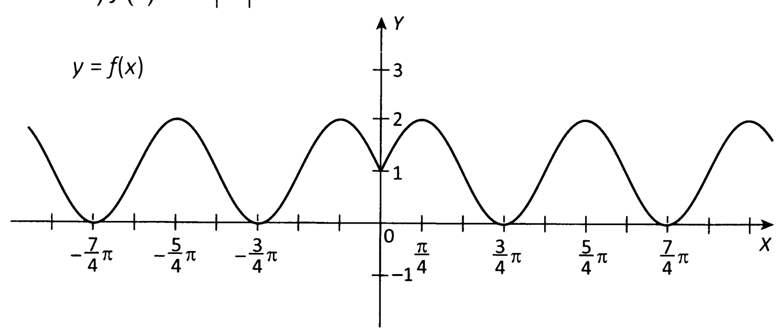


7.20. a) *wskazówka:* Wykres funkcji $y = |\sin x|$ przesuń równolegle o wektor $\left[\frac{\pi}{3}, -2\right]$

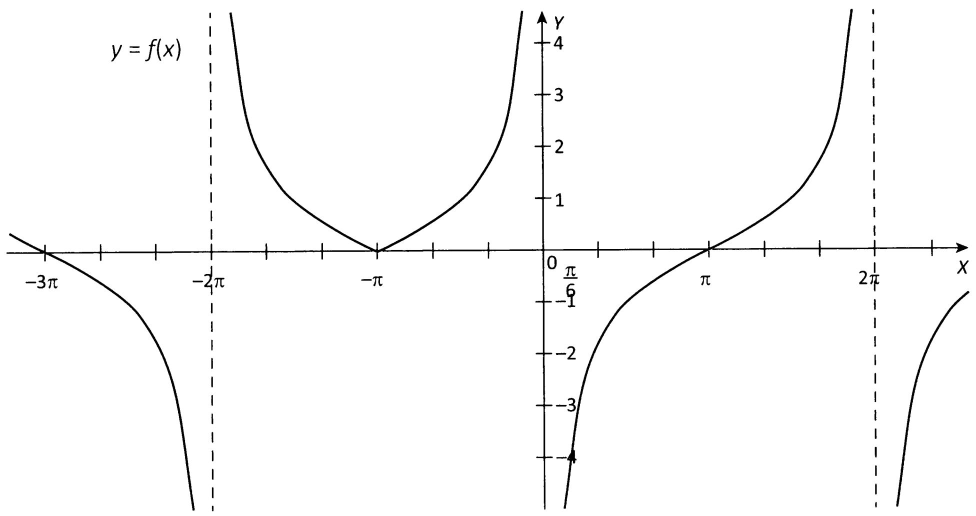
b) $f(x) = |\operatorname{tg}(-x) + 1| - 3$



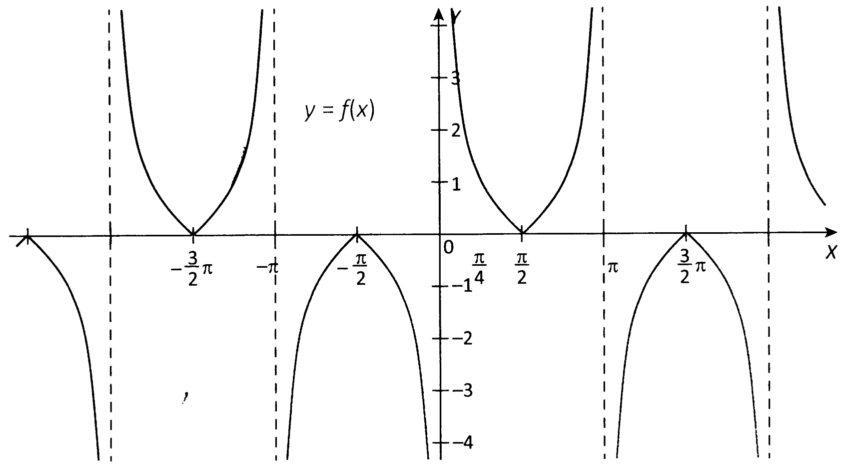
c) $f(x) = \sin|2x| + 1$



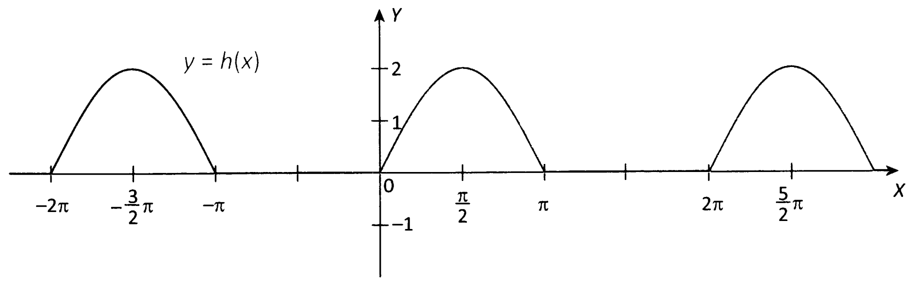
d) $f(x)=\operatorname{tg}\left|\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right|$



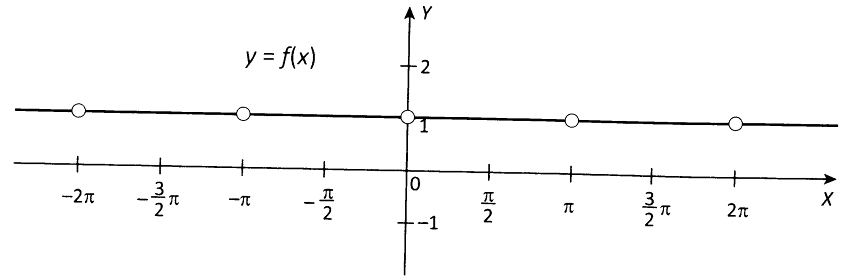
7.21. a) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{ctg}x, \text{ jeśli } \cos x \geqslant 0\\ -\operatorname{ctg}x, \text{ jeśli } \cos x < 0\end{cases}$



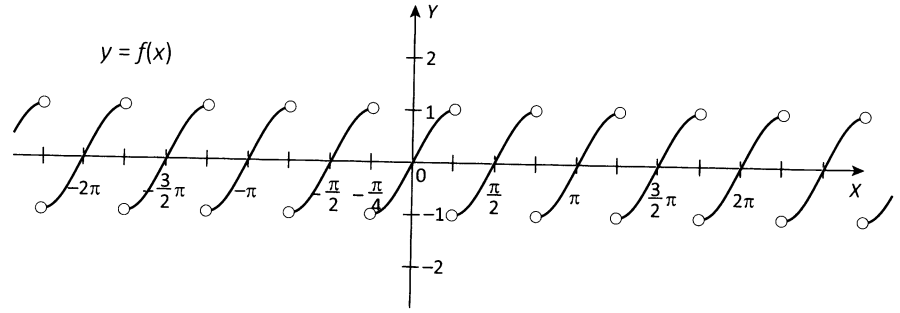
b) $f(x)=\begin{cases}2\sin x, \text{ jeśli } \sin x \geqslant 0\\ 0, \text{ jeśli } \sin x < 0\end{cases}$



c) $f(x)=1$, gdzie $x \neq k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$



d) $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, \text{ jeśli } \cos 2x > 0\\ -\sin 2x, \text{ jeśli } \cos 2x < 0\end{cases}$



Równania trygonometryczne, cz. 1

7.22. a) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in Z$ b) $x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$ c) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$

d) $x=\frac{-\pi}{4}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$ e) $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$ f) $x=2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$

7.23. a) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$ b) $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$ c) $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$

7.24. a) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$ b) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$

c) $x=\frac{-\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{-5\pi}{6}+2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$ d) $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$

e) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$ f) $x=\pi+2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$

7.25. a) $x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi \vee x=2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$ b) równanie sprzeczne

c) równanie sprzeczne d) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k \in \boldsymbol{Z}$

e) $x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi \vee x=\frac{-\pi}{6}+2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$ f) $x \in \boldsymbol{R}-\left\{x: x=\frac{k\pi}{2}, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$

7.26. a) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in -$ b) $x=\frac{-\pi}{3}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$

c) $x=\frac{-\pi}{6}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$ d) $x=\frac{\pi}{3}+k\pi \vee x=\frac{2\pi}{3}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$

e) $x=\frac{-\pi}{6}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$ f) równanie sprzeczne

7.27. a) $x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$ b) $x=\frac{-\pi}{3}+4k\pi \vee x=\pi+4k\pi, k\in \mathbf{Z}$

c) $x=\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}$ d) $x=\frac{-\pi}{2}+3k\pi, k\in \mathbf{Z}$

e) $x=\frac{-\pi}{2}+k\pi \vee x=\frac{-\pi}{4}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$ f) $x=\frac{-3\pi}{4}+3k\pi \vee x=\frac{-\pi}{4}+3k\pi, k\in \mathbf{Z}$

7.28. a) $x = 2\pi + 4k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ b) $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3} \vee x=\frac{7\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}, k\in \mathbf{Z}$

c) $x=\frac{-\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}$ d) $x = -\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

7.29. a) $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}$ b) $x=\frac{\pi}{2}+3k\pi \vee x=\frac{-\pi}{2}+3k\pi, k\in \mathbf{Z}$

c) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$ d) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} \vee x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}, k\in \mathbf{Z}$

e) $x=2\pi+6k\pi \vee x=-2\pi-6k\pi, k\in \mathbf{Z}$ f) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \vee x=\frac{-\pi}{8}-\frac{k\pi}{2}, k\in \mathbf{N}$

7.30. a) $x\in\left\{\frac{-3\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right\}$ b) $x\in\left\{\frac{-5\pi}{6},\frac{-\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$

c) $x\in\left\{\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right\}$ d) $x\in\left\{\frac{-3\pi}{4},\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$

e) $x\in\left\{\frac{-\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right\}$ f) $x\in\left\{-2\pi,\frac{-11\pi}{6},\frac{-7\pi}{6},-\pi,\frac{-5\pi}{6},\frac{-\pi}{6},0,\frac{\pi}{6}\right\}$

7.31. a) $x\in\{-2\pi,0,2\pi\}$ b) $x\in\left\{\frac{-3\pi}{4},\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$

c) $x\in\left\{\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right\}$ d) $x\in\left\{\frac{-7\pi}{4},\frac{-5\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$

7.32. a) $x\in\left\{\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12},\frac{13\pi}{12},\frac{17\pi}{12}\right\}$ b) $x\in\left\{\frac{-17\pi}{18},\frac{-7\pi}{18},\frac{-5\pi}{18},\frac{5\pi}{18},\frac{7\pi}{18},\frac{17\pi}{18}\right\}$

c) $x\in\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right\}$ d) $x\in\left\{\frac{-\pi}{8},\frac{3\pi}{8},\frac{7\pi}{8}\right\}$

e) $x\in\left\{-\pi,\frac{-\pi}{3},0,\frac{2\pi}{3},\pi\right\}$ f) $x\in\left\{\frac{-5\pi}{4},\frac{-\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\frac{11\pi}{4}\right\}$

7.33. a) $x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ b) $x=\frac{-\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$

c) $x=\frac{3\pi}{2}+4k\pi \vee x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$ d) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$

e) $x\in \mathbf{R}-\left\{x: x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$ f) $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2} \vee x=\frac{\pi}{12}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$

7.34. a) $x=\frac{-\pi}{6}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$

b) $x=\frac{-\pi}{6}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$

c) $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \vee x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$

d) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} \vee x=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} \vee x=\frac{-\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}, k\in \mathbf{Z}$

e) $x=\frac{-2\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{-\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$

f) $x=\frac{\pi}{6}+k\pi \vee x=\frac{-\pi}{6}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$

7.35. a) $x=\frac{-\pi}{4}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$ b) $x=\frac{\pi}{6}+k\pi \vee x=\frac{-\pi}{6}+k\pi,\ k\in \mathbf{Z}$

c) $x=\frac{-\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$ d) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$

e) $x=k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{-\pi}{3}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$ f) $x=\frac{k\pi}{4},\ k\in \mathbf{Z}$

7.36. a) $x = k\pi,\ k \in Z - \{0, 2\}$ b) $x=2k\pi \vee x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$

c) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi \vee x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$ d) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$

e) $x=\frac{-\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$ f) równanie sprzeczne

7.37. a) $x\in\left\{\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$ b) $\{-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi\}$

c) $x\in\left\{\frac{-3\pi}{4},\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$ d) równanie sprzeczne

7.38. a) $m \in \langle 4, 5\rangle$ b) $m \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty)$

c) $m \in \left\langle -1\frac{1}{3}, -1\right\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{3}, 0\right)$ d) $m \in \mathbf{R}$

7.39. *wskazówka:* Sprawdź, że jeśli $\cos x = 0$, to równanie nie ma rozwiązań. Następnie załóż, że $\cos x \neq 0$ i podziel obie strony równania przez $\cos^2 x$.

7.40. *wskazówka:* Rozwiąż równanie graficznie.

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy

7.41. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{-1}{2}$ c) -1 d) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

7.42. a) -1 b) $\sqrt{2}$

7.43. a) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ c) $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ d) $2+\sqrt{3}$

7.44. a) $\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$ c) $\frac{-2\sqrt{6}-1}{6}$ d) $\frac{-2\sqrt{6}+1}{6}$

7.45. a) $\frac{10+12\sqrt{5}}{39}$ b) $\frac{-5\sqrt{5}-24}{39}$ c) $\frac{540+338\sqrt{5}}{451}$ d) $\frac{270+169\sqrt{5}}{310}$

7.46. a) $\gamma = 75°$, $b = \frac{8\sqrt{6}}{3}$, $c = \frac{4\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right)}{3}$

b) $\beta \approx 38°$, $\gamma \approx 82°$, $a = 14$

c) $(\alpha \approx 74°, \beta \approx 16°, \gamma = 90°, a = 24, b = 7)$ lub

$\left(\alpha = 106°, \beta \approx 16°, \gamma \approx 58°, a = 28\frac{244}{527}, b = 8\frac{159}{527}\right)$

d) $\left(\alpha = 45°, \beta \approx 114°, \gamma \approx 21°, b = 2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{7}\right)\right)$ lub

$\left(\alpha = 135°, \beta \approx 24°, \gamma \approx 21°, b = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{7}-1\right)\right)$

7.47. a) tak b) tak

7.48. $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{12}$

7.53. *wskazówka:* a) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right), x \in \mathbf{R}$ b) $y = 4\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), x \in \mathbf{R}$

c) $y = \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right), x \in \mathbf{R} - \left\{a : a = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee a = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

d) $y = \left|\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|, x \in \mathbf{R} - \left\{a : a = \frac{-\pi}{6} + k\pi \vee a = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

Funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta

7.60. a) $\sin 2\alpha = \frac{-4\sqrt{6}}{25}$ $\cos 2\alpha = \frac{-23}{25}$ $\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{4\sqrt{6}}{23}$ $\mathrm{ctg}\, 2\alpha = \frac{23\sqrt{6}}{24}$

b) $\sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{9}$ $\cos 2\alpha = \frac{1}{9}$ $\mathrm{tg}\, 2\alpha = 4\sqrt{5}$ $\mathrm{ctg}\, 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{20}$

c) $\sin 2\alpha = \frac{-3}{5}$ $\cos 2\alpha = \frac{-4}{5}$ $\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{3}{4}$ $\mathrm{ctg}\, 2\alpha = 1\frac{1}{3}$

d) $\sin 2\alpha = \frac{20}{29}$ $\cos 2\alpha = \frac{21}{29}$ $\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{20}{21}$ $\mathrm{ctg}\, 2\alpha = 1\frac{1}{20}$

7.61. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-2\sqrt{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $-8\sqrt{3}$ e) $\frac{-2}{7}$ f) 56

7.62. a) $\frac{11}{25}$ b) $\frac{-6\sqrt{14}}{25}$

7.63. $\frac{7}{25}$

7.64. 0,7

7.65. $\frac{1}{3}$

7.66. $\frac{47}{128}$

7.67 $\frac{-9\sqrt{3}}{16}$

7.69. $\sqrt{2}-1$; *wskazówka:* Zauważ, że $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8} < 1$.

7.70. $2+\sqrt{3}$

7.71. *wskazówka:* a) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ b) $f(x) = 3 - \sin\frac{x}{2}$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{tg}\, 2x$, gdzie $x \neq \frac{k\pi}{4}, k \in Z$ d) $f(x) = 1 - \cos x$

7.72. a) $f(x) = 1$, $ZW = \{1\}$ b) $f(x) = 2\sin^2 2x + 3$, $ZW = \langle 3, 5\rangle$

c) $f(x) = -1 - \cos 2x$, $ZW = \langle -2, 0\rangle$ d) $f(x) = -\sin^2\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} + 1$, $ZW = \left\langle -1, 1\frac{1}{4}\right\rangle$

7.76. $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ lub $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{5}-1}{8}$

Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

7.78. a) 0 b) $\sqrt{3}$ c) $-\sqrt{3}$ d) 0

7.79. a) $2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$ b) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

c) $4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$ d) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{4}\right)$

e) $-2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ f) $4\sin2\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$

7.84. a) $ZW=\left\langle-\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3}\right\rangle$ b) $ZW=\left\langle5-\sqrt{3},5+\sqrt{3}\right\rangle$

c) $ZW=\left\langle-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$ d) $ZW=\left\langle\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right\rangle$

7.87. 2^3

Równania trygonometryczne, cz. 2

7.88. a) $x=\frac{-\pi}{2}+4k\pi\vee x=\frac{\pi}{2}+4k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$ b) $x=k\pi\vee x=\frac{-\pi}{3}+2k\pi\vee x=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$

c) $x=\frac{\pi}{24}+2k\pi\vee x=\frac{-7\pi}{24}+2k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$ d) $x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$

e) $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{6}, k\in\boldsymbol{Z}$ f) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$

7.89. a) $x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$ b) $x=\frac{k\pi}{2}\vee x=\frac{-\pi}{3}+2k\pi\vee x=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$

c) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$ d) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$

e) $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi\vee x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$ f) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}, k\in\boldsymbol{Z}$

7.90. a) $x=\frac{2\pi}{3}+4k\pi\vee x=\frac{-2\pi}{3}+4k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$ b) $x=\frac{-\pi}{6}+2k\pi\vee x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$

c) $x=\frac{5\pi}{8}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$ d) $x=\frac{k\pi}{3}\vee x=\frac{\pi}{3}+k\pi\vee x=\frac{-\pi}{3}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$

e) $x=\frac{k\pi}{2}\vee x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}, k\in\boldsymbol{Z}$

f) $x=\frac{\pi}{2}+3k\pi\vee x=\pi+3k\pi\vee x=\frac{-\pi}{2}+3k\pi\vee x=2\pi+3k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$

7.91. a) $x=\pi+2k\pi\vee x=\frac{4\pi}{3}+4k\pi\vee x=\frac{-4\pi}{3}+4k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$ b) $x=k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$

c) $x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi\vee x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$ d) $x=\frac{k\pi}{2}, k\in\boldsymbol{Z}$

e) $x=\frac{k\pi}{2}\vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$ f) $x=\frac{\pi}{14}+\frac{k\pi}{7}\vee x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$

7.92. a) $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$ b) $x=k\,\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$

c) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\vee x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\vee x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$ d) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$

7.93. a) $x\in\left\{\frac{-11\pi}{6},\frac{-7\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}$ b) $x\in\left\{\frac{\pi}{12},\frac{3\pi}{4},\frac{17\pi}{12}\right\}$

c) $x\in\left\{-\pi,\frac{-\pi}{4},0,\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{7\pi}{4},2\pi\right\}$ d) $x\in\left\{\frac{-5\pi}{3},-\pi,\frac{\pi}{3},\pi\right\}$

7.94. a) $x\in\left\{\frac{-\pi}{2},\frac{-\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right\}$ b) $x\in\{-3\pi,\pi\}$

c) $x\in\left\{\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{12},\frac{3\pi}{4},\frac{13\pi}{12},\frac{5\pi}{4},\frac{17\pi}{12},\frac{7\pi}{4}\right\}$ d) $x\in\left\{0,\frac{\pi}{11},\frac{2\pi}{11},\frac{3\pi}{11},\frac{4\pi}{11},\frac{5\pi}{11},\frac{\pi}{2}\right\}$

7.95. a) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$ b) $x=k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$ c) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in\boldsymbol{Z}$

7.96. a) $x\in\left\{0,\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{5}{3}\pi,2\pi\right\}$ b) $x\in\left\{\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$

c) $x\in\left\{0,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3},2\pi\right\}$ d) równanie sprzeczne

7.97. a) $k\in\left\langle-1,\frac{1}{2}\right\rangle$ b) $k\in\left\langle\frac{-2}{3},4\right\rangle$

c) $k\in\left\langle-2,-1\frac{5}{6}\right\rangle\cup\left\langle-1\frac{1}{2},-1\frac{1}{3}\right\rangle$ d) $k\in\left\langle-\sqrt{15},-\sqrt{6}\right\rangle\cup\left\langle\sqrt{6},\sqrt{15}\right\rangle$

Nierówności trygonometryczne

7.98. a) $x\in\left\langle0,\frac{\pi}{6}\right\rangle\cup\left\langle\frac{5\pi}{6},2\pi\right\rangle$ b) $x\in\left(\frac{-2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$

c) $x\in\left\langle\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$ d) $x\in\left(-\pi,\frac{-5\pi}{6}\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$

7.99. a) $x \in \left\langle -2\pi, 2\pi \right\rangle - \left\{ \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$ b) $x \in \left\{ \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$

c) $x \in \left(\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right)$ d) $x \in \left(-\pi, \frac{-3\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{-\pi}{4}, 0 \right) \cup \left(0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$

7.100. a) $x \in \left\langle \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$ b) $x \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$

c) $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$ d) $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$

7.101. a) $x \in \left\langle \frac{-\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$

b) $x \in \left(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{-\pi}{6} + k\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$

c) $x \in \left\langle \frac{-\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$ d) $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$

7.102. a) $x \in \left(\frac{-\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \right), k \in \mathbf{Z}$ b) $x \in \left(\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{3\pi}{8} + k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$

c) $x \in \left(\frac{-\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$ d) $x \in \left(\frac{3\pi}{4} + 3k\pi, \frac{3\pi}{2} + 3k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$

e) $x \in \left(\frac{-13\pi}{6} + 4k\pi, \frac{7\pi}{6} + 4k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$ f) $x \in \left\langle \frac{-11\pi}{6} + 4k\pi, \frac{5\pi}{6} + 4k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$

7.103. a) $x \in \left(-\pi, \frac{-3\pi}{8} \right) \cup \left(\frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{2} \right)$

b) $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{-5\pi}{12} \right) \cup \left(\frac{-\pi}{6}, \frac{-\pi}{12} \right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{12} \right)$

c) $x \in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \right)$ d) $x \in \left\langle -\pi, \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6}, 2\pi \right\rangle$

e) $x \in \left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right)$ f) $x \in \left\langle -2\pi, \frac{-3\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

7.104. a) $x \in \left(\frac{4k+1}{8}, \frac{k+1}{2} \right), k \in \mathbf{Z}$

b) $x \in \left(\frac{2k-1}{2}, \frac{3k+1}{3} \right), k \in \mathbf{Z}$

c) $x \in \left\langle 1+6k, 2+6k \right\rangle, k \in Z$

7.105. a) $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \pi, \frac{11\pi}{6} \right\rangle$ b) $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{-3\pi}{8} \right) \cup \left(\frac{\pi}{8}, 0 \right)$

c) $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, 2k\pi \right) \cup \left(2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$ d) $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$

7.106. a) $x \in \left\langle 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$

b) $x \in \left(-\pi + 2k\pi, \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$

c) $x \in \left(\frac{-\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$ d) $x \in \left\langle \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$

e) $x \in \mathbf{R} - \left\{ a : a = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee a = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$

f) *wskazówka:* $4 + 2\sqrt{3} = \left(1 + \sqrt{3}\right)^2$; $x \in \left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$

7.107. a) $x \in \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8} \right) \cup \left(\frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8} \right)$

b) $x \in \left\langle \frac{-5\pi}{6}, \frac{-\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle \cup \{-\pi, \pi\}$

c) $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right)$

d) $x \in \left\langle \frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\rangle \cup \left\{ \frac{3\pi}{2} \right\}$

e) $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi \right\rangle$

f) $x \in \left\langle -\pi, \frac{-5\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi \right\rangle$

7.108. a) $x \in \left\langle \frac{-\pi}{4} + k\pi, k\pi \right) \cup \left(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle, k \in \mathbf{Z}$

b) $x \in \left\langle \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$

c) $x \in \left(\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$

7.110. *wskazówka:* Zastosuj wzór: $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Pochodne funkcji trygonometrycznych

7.111. a) $f'(x) = 3\cos x - 5\sin x$ b) $f'(x) = \sin x + x\cos x$
c) $f'(x) = 2x\cos x - x^2\sin x$ d) $f'(x) = \cos 2x$

7.112. a) $f'(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} + \sin x$ b) $f'(x) = \frac{2x\cos x - 2\sin x - 1}{\sin^2 x}$

c) $f'(x) = \frac{1}{2\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ d) $f'(x) = \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$

7.113. a) $f'(x) = \sin 2x + \sin x$ b) $f'(x) = -20\sin 5x - 6x^2$

c) $f'(x) = -3\sin 6x$ d) $f'(x) = 12\sin^2\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$

7.114. a) $f'(x) = \frac{6x}{\cos^2 3x^2}$ b) $f'(x) = \frac{2}{x^2 \cdot \sin^2\left(\frac{2}{x}\right)}$

c) $f'(x) = \cos 2x - \frac{1}{2\cos^2 x}$ d) $f'(x) = \frac{2\cdot(\cos 2x + \cos 2x \cdot \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x)}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}$

7.116. $x = \frac{-\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{-\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \boldsymbol{Z}$

7.117. $x = k\pi \vee x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$

7.118. $2\pi + 4k\pi$ lub $\frac{8\pi}{3} + 8k\pi$ lub $\frac{16\pi}{3} + 8k\pi$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$

7.119. a) $y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}$ b) $y = -x + \frac{\pi + 4}{4}$ c) $y = -2x + \frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{3}$

7.120. a) funkcja f jest malejąca w przedziale $\left\langle \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\rangle$ i rosnąca w przedziałach $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right\rangle, \left\langle \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right)$

b) funkcja f jest malejąca w przedziałach
$\left\langle \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right\rangle, \left\langle \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right\rangle, \left\langle \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \right\rangle, \left\langle \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\rangle$ i rosnąca w przedziałach
$\left(0, \frac{\pi}{12}\right\rangle, \left\langle \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12} \right\rangle, \left\langle \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12} \right\rangle, \left\langle \frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \right\rangle, \left\langle \frac{23\pi}{12}, 2\pi \right)$

7.121. a) $f_{\min}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$, $f_{\max}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$ b) $f_{\min}(\pi) = -\frac{1}{2}$

7.122. a) $ZW = \left\langle 0, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right\rangle$ b) $ZW = \left\langle \frac{-3\sqrt{3}}{8}, +\infty \right)$

Test sprawdzający do rozdziału 7.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	**D**	**D**	**C**	**C**	**B**	**D**	**A**	**C**	**B**	**A**

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 7.

11. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $-8\sqrt{3}$

13. $\frac{-\sqrt{2}}{10}$

14. a) $-\frac{1}{8}$ b) $-\frac{1}{2}$

15. $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; *wskazówka:* Zauważ, że $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{3}$ i skorzystaj ze wzoru na tangens różnicy.

17. trójkąt ostrokątny; *wskazówka:* Oblicz cosinus trzeciego kąta w tym trójkącie.

18. *wskazówka:* Wykaż, że $\beta = 60°$. Następnie zauważ, że $\cos\gamma = \cos(120° - \alpha)$.

20. *wskazówka:* a) $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ lub $f(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

c) $f(x) = 3\left|\sin\frac{x}{2}\right| + 1$ d) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ jeśli } \cos x \geqslant 0 \\ -\cos 2x, \text{ jeśli } \cos x < 0 \end{cases}$

21. a) $ZW = \left\langle -1\frac{1}{8}, 2 \right\rangle$ b) $ZW = \left\langle -\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4} \right\rangle$

22. a) $x = \frac{-\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$ b) $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$

c) $x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$; *wskazówka:* $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

d) $x = \frac{k\pi}{3} \vee x = \frac{-\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5} \vee x = \frac{-\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \boldsymbol{Z}$

23. a) $x \in \left(\frac{-\pi}{6} + 4k\pi, \frac{7\pi}{6} + 4k\pi\right), k \in \boldsymbol{Z}$ b) $x \in \left\langle \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle, k \in \boldsymbol{Z}$

c) $x \in \left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$

d) $x \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right) \cup$

$\cup \left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbf{Z}$

24. a) $x \in \left\{\frac{-5\pi}{6}, \frac{-\pi}{12}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ b) $x \in \left\{\frac{7\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{31\pi}{12}, \frac{47\pi}{12}\right\}$

c) $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ d) $x \in \left\{\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

25. a) $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

b) $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{3}\right\rangle \cup \left\langle\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right\rangle \cup \left\langle\frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}\right\rangle$

c) $x \in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right)$ d) $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

26. *wskazówka:* Wykorzystaj zależność $\sin \alpha = \cos(90° - \alpha)$; następnie zastosuj wzór na różnicę cosinusów.

27. *wskazówka:* Zapisz 1 jako $\sin^2 x + \cos^2 x$. Równanie przekształć równoważnie do postaci $2\cos^2 x - 3\sin x \cos x + \sin^2 x = 0$. Zauważ, że jeśli $\sin x = 0$, to równanie nie ma rozwiązań. Zatem można założyć, że $\sin x \neq 0$. Po podzieleniu stron równania przez $\sin^2 x$ otrzymamy równanie $2\,\mathrm{ctg}^2 x - 3\,\mathrm{ctg} x + 1 = 0$.

28. *wskazówka:* Skorzystaj ze wzoru $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ i dane równanie przekształcić równoważnie do postaci $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

29. $k \in \left(-2, -\sqrt{2}\right) \cup \left(-\sqrt{2}, 0\right\rangle$

30. a) $p \in \left\langle -4 - \sqrt{3}, -4 + \sqrt{3}\right\rangle$ b) $p \in \left\langle 2, 1 + \sqrt{2}\right\rangle$; *wskazówka:* Lewa strona równania jest nieujemna, skąd mamy założenie $p - 1 \geq 0$ Dla $p \geq 0$ obie strony równania można podnieść stronami do kwadratu, otrzymując równanie równoważne danemu: $\sin^2 x + 2|\sin x| \cdot |\cos x| + \cos^2 x = p^2 - 2p + 1$ Zbadaj istnienie rozwiązań równania $|\sin 2x| = p^2 - 2p$, gdzie $p \geq 1$

8. Geometria analityczna

Wektor w układzie współrzędnych. Podział odcinka

8.1. a) $D(12, 0)$ b) $D(-2, 6)$ c) $D(-9, 9)$ d) $D\left(2\frac{2}{3}, 4\right)$

8.2. a) $B(2, -4)$ b) $B(-1, 5)$ c) $B\left(3\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}\right)$ d) $B\left(2\sqrt{3} + 3, 1\right)$

8.3. a) $A(3, -6)$ b) $A\left(1\frac{1}{3}, 2\sqrt{2}\right)$

8.4. a) tak b) nie

8.5. a) $m = 0$ b) $m = \sqrt{2} \vee m = -\sqrt{2}$ c) $m \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

8.6. a) $\vec{u} + \vec{v} = [-1, 0]$; 1 b) $\vec{z} - \vec{u} = [8, 2]$; $2\sqrt{17}$ c) $3\vec{v} = [-9, 12]$; 15

d) $\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{z} = [24, -10]$; 26

8.7. $(-1, 6)$, $(1, 5)$, $(3, 4)$

8.8. a) $B(1, 4)$ b) $B(-4, -8)$

8.9. a) $(-6, 1)$, $(-2, -5)$ b) $\left(-7\frac{3}{5}, 3\frac{2}{5}\right)$, $\left(-5\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)$, $\left(-2\frac{4}{5}, -3\frac{4}{5}\right)$, $\left(-\frac{2}{5}, -7\frac{2}{5}\right)$

8.10. a) $P(8, -5)$ b) $P\left(5\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$

8.11. $M\left(-1\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

8.12. $C(7, 1)$, $D(4, 8)$

8.13. $P(-12, -1)$ lub $P(8, -5)$ lub $P(5, 7)$

8.14. a) $|AD| = \sqrt{85}$, $|BE| = \sqrt{145}$, $|CF| = 10$ b) $S\left(1, 2\frac{2}{3}\right)$ c) $2\sqrt{10} + 3\sqrt{5} + 5$

8.15. $A(-2, 0)$, $B(10, -4)$, $C(2, 6)$; *wskazówka:* Niech punkt M będzie środkiem odcinka DF. Uzasadnij, że punkt M jest również środkiem środkowej AE.

8.16. $A(-2, 0)$, $C(4, 7)$

8.17. $A(-7, 3)$, $B(5, -3)$, $C(3, 7)$; *wskazówka:* Zauważ, że $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MN}$ oraz $\overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{MN}$

Kąt między niezerowymi wektorami

8.18. a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ c) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ d) $\sin\alpha = \frac{63}{65}$

8.19. a) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ b) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ c) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ d) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$

8.20. a) $\alpha = 90°$ b) $\alpha = 135°$ c) $\alpha = 150°$ d) $\alpha = 120°$

8.21. a) $|AB| = \sqrt{68}$, $|AC| = |BC| = \sqrt{34}$, $\alpha = \beta = 45°$, $\gamma = 90°$

b) $|AB| = 6$, $|AC| = 6\sqrt{3}$, $|BC| = 12$, $\alpha = 90°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 30°$

c) $|AB| = 3 - \sqrt{3}$, $|BC| = 2\sqrt{3}$, $|AC| = 3\sqrt{2}$, $\alpha = 45°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 15°$

d) $|AB| = |AC| = 6$, $|BC| = 6\sqrt{3}$, $\alpha = 120°$, $\beta = \gamma = 30°$

8.24. a) $a \in \{-2, 4\}$ b) $a \in \{-1, 2\}$

8.25. $a \in \{-2, -1\}$

8.27. $P(0, 2\sqrt{3})$ lub $P(0, -2\sqrt{3})$

8.28. $P(0, 0)$ lub $P(4, 2)$

8.29. a) $4(2\sqrt{5} + \sqrt{10})$ b) $45°$

8.30. a) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ b) $\frac{47}{5\sqrt{290}}$

Proste w układzie współrzędnych

8.31. a) $y = -2x - 7$ b) $y = \frac{1}{3}x - 8$

8.32. a) $3x - 4y - 42 = 0$ b) $-2x + y - 17 = 0$

8.33. a) $y = -2x + 4$ b) $y = -\frac{1}{7}x - 5$

8.34. a) $x + 3y - 1 = 0$ b) $2x + 5y + 16 = 0$

8.35. a) $60°$ b) $150°$ c) $90°$ d) $0°$

8.36. a) $\operatorname{tg} \alpha = -2$ b) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$

8.37. a) $y = \frac{-5}{3}x + \frac{11}{3}$ b) $y = -6x + 5$

8.38. a) $3x + y + 5 = 0$ b) $x + y - 1 - \sqrt{2} = 0$ c) $y - \sqrt{5} - 1 = 0$ d) $x + 1 = 0$

8.39. $\left(1\frac{1}{5}, 1\frac{2}{5}\right)$

8.40. a) np. $7x + 2y - 5 = 0$, $8x - 5y + 4 = 0$, $x - 7y + 9 = 0$ b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

8.41. a) np. $y = -1$, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$ b) $\left(\frac{11}{6}, -1\right)$

8.42. a) $D(1, -4)$ b) $D\left(6\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\right)$

8.43. $(3, 2)$

8.44. a) l: $y = -\frac{3}{4}x + 11$; *wskazówka:* Niech α oznacza kąt nachylenia prostej k do osi OX, a – współczynnik kierunkowy prostej l; wówczas $a = \operatorname{tg} 2\alpha$. b) $y = \frac{4}{3}x - 16$

8.45. a) $45°$ b) $60°$ c) $30°$ d) $45°$; *wskazówka:* I sposób. Wyznacz dwa dowolne niezerowe wektory zawarte w prostych k i l. Następnie oblicz miarę kąta między tymi wektorami.

II sposób. Niech α oznacza kąt nachylenia prostej k do osi OX, β – kąt nachylenia prostej l do osi OX; wówczas $\alpha \in (0°, 90°)$, $\beta \in (90°, 180°)$. Oblicz $\operatorname{tg}(\beta - \alpha)$.

Odległość punktu od prostej. Odległość między dwiema prostymi równoległymi

8.46. a) 9 b) 4 c) 0 d) $2\frac{1}{5}$

8.47. a) $C = 12$ lub $C = 2$ b) $C = -68$ lub $C = 82$ c) $C = 7$
d) $C = 7 - 5\sqrt{7}$ lub $C = 7 + 5\sqrt{7}$

8.48. a) $a = 9$ lub $a = 0{,}5$ b) $a = 4{,}75$ c) $a = 32\frac{3}{8}$ lub $a = -22\frac{7}{8}$
d) $a = 26$ lub $a = -16{,}5$

8.49. a) $a = 9$ lub $a = -11$ b) $a = -\frac{1}{2}$ lub $a = 2\frac{5}{6}$
c) nie istnieje taka liczba a d) $a = 8$ lub $a = -12$

8.50. a) $3\sqrt{2}$ b) 8 c) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ d) $8\frac{1}{15}$

8.52. l: $8x - 15y + 89 = 0$ lub l: $8x - 15y - 47 = 0$

8.53. a) $DA \parallel CB$ b) $h = 1{,}5\sqrt{10}$

8.54. $3x - 4y + 28 = 0$ lub $3x - 4y - 2 = 0$

8.55. a) pr. AB: $x + 2 = 0$, pr. BC: $x + 2y - 2 = 0$, pr. AC: $3x + 4y - 6 = 0$

b) $h_A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $h_B = 0{,}8$, $h_C = 4$

8.56. a) $h = d(A, pr.\ BC) = 4\sqrt{2}$ b) $|BD| = 2 \cdot d(B, pr.\ AC) = 2\sqrt{10}$

8.57. $h_1 = \frac{18}{\sqrt{17}}$, $h_2 = \frac{18}{\sqrt{5}}$

8.58. $3x + 2y - 25 = 0$ lub $3x + 2y + 27 = 0$

8.59. $P_1(8, 0)$ lub $P_2\left(-1\frac{1}{6}, 0\right)$

8.60. $P_1\left(0, \frac{6}{7}\right)$ lub $P_2\left(0, 1\frac{1}{3}\right)$

8.61. $3x - 4y - 7 = 0$ lub $4x + 3y - 1 = 0$

8.62. $x + 6 = 0$ lub $3x + 4y - 42 = 0$

Pole trójkąta. Pole wielokąta

8.63. a) 6 b) 19,5
8.64. b) 30
8.65. 17
8.66. 10
8.68. $24\sqrt{3}$
8.69. 312,5
8.70. 75
8.71. 30
8.72. a) 18 b) 30
8.73. b) 22
8.74. b) 50
8.75. a) 46,5; *wskazówka:* $P = P_{DAC} + P_{ABC}$ b) 46
8.76. $C(4, 0)$ lub $C\left(-9\frac{1}{3}, 0\right)$
8.77. $C(0, -8)$ lub $C\left(0, 9\frac{1}{3}\right)$

Równanie okręgu. Wzajemne położenie prostej i okręgu

8.78. a) $(x+4)^2 + y^2 = 1$; $S(-4, 0)$, $r = 1$ b) $(x-7)^2 + (y+9)^2 = 121$; $S(7, -9)$, $r = 11$
c) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = 9$; $S\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $r = 3$
d) $\left(x+\frac{11}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 25$; $S\left(-\frac{11}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $r = 5$
8.79. Równanie opisuje: *a*) prostą b) okrąg o środku $S(0, 3)$ i promieniu 3 c) parabolę
d) punkt
8.80. a) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 100$ b) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 72$
8.81. a) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$ b) $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 20$
8.82. a) $(0, 0)$ lub $(2, 4)$ b) $(3, 1)$
8.83. a) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$ b) $S(-4, -1)$, $r = \sqrt{65}$
8.84. a) $(-6, 1)$, $(-2, 5)$ b) nie istnieją c) $(2, -4)$ d) $(-4, -5)$, $\left(1\frac{2}{5}, -6\frac{4}{5}\right)$
8.85. a) styczna do okręgu b) sieczna okręgu c) prosta rozłączna z okręgiem
d) sieczna okręgu
8.86. a) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$ lub $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$
b) $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ lub $(x-13)^2 + (y-13)^2 = 169$
c) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$ lub $(x+10)^2 + (y-10)^2 = 100$
d) $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 25$ lub $(x+29)^2 + (y+29)^2 = 841$

8.87. a) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 5$ b) $x^2 + \left(y+\frac{4}{3}\right)^2 = 0{,}64$
8.88. a) k: $x - 9 = 0$ b) k: $y + 4 = 0$ c) k: $4x - 3y + 12 = 0$ d) k: $3x + 4y - 41 = 0$
8.89. a) $y = 2x - 3 + 2\sqrt{5}$ lub $y = 2x - 3 - 2\sqrt{5}$ b) $y = x + 8 + 4\sqrt{2}$ lub $y = x + 8 - 4\sqrt{2}$
c) $y = -3x + 3 + 4\sqrt{10}$ lub $y = -3x + 3 - 4\sqrt{10}$
d) $y = -x + 7 + 3\sqrt{2}$ lub $y = -x + 7 - 3\sqrt{2}$
8.90. a) $y = -x + 1 - \sqrt{2}$ lub $y = -x + 1 + \sqrt{2}$ b) $y = x - 5 + 3\sqrt{2}$ lub $y = x - 5 - 3\sqrt{2}$
c) $y = 2x - 8 + 3\sqrt{5}$ lub $y = 2x - 8 - 3\sqrt{5}$ d) $y = \frac{4}{3}x - 1$ lub $y = \frac{4}{3}x - 17\frac{2}{3}$
8.91. a) $y = \sqrt{3}x + 2$ lub $y = \sqrt{3}x - 2$ b) $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} + 4$ lub $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 4$
c) $y = \frac{-\sqrt{3}}{3}x - \frac{5\sqrt{3}}{3}$ lub $y = \frac{-\sqrt{3}}{3}x + 5\sqrt{3}$ d) $y = -x + 3$ lub $y = -x - 5$
8.92. a) $y + 2 = 0$ lub $3x + 4y - 10 = 0$ b) $y - 3 = 0$ lub $15x + 8y + 51 = 0$
c) $9x + 13y - 3 = 0$ lub $x - 3y + 13 = 0$ d) $2x + y + 2 = 0$ lub $x - 2y + 6 = 0$
e) $x + 7 = 0$ lub $4x + 3y + 1 = 0$ f) $x - 5 = 0$ lub $5x - 12y - 37 = 0$
8.93. $\left(x-1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-2\frac{1}{2}\right)^2 = 4\frac{1}{2}$
8.94. $\mathrm{tg}\,\alpha = 1\frac{1}{3}$
8.94. a) 0 punktów wspólnych dla $m \in (-\infty, -8) \cup (-4, +\infty)$
1 punkt wspólny dla $m \in \{-8, -4\}$
2 punkty wspólne dla $m \in (-8, -4)$
b) 0 punktów wspólnych dla $m \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$
1 punkt wspólny dla $m \in \{-5, 3\}$
2 punkty wspólne dla $m \in (-5, 3)$
c) dla $m \in (-\infty, 0\rangle$ równanie $(x-1)^2 + (y-1)^2 = m$ nie opisuje okręgu
0 punktów wspólnych dla $m \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$
1 punkt wspólny dla $m = \frac{1}{2}$
2 punkty wspólne dla $m \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
d) 0 punktów wspólnych dla $m \in (-\infty, -25) \cup (25, +\infty)$
1 punkt wspólny dla $m \in \{-25, 25\}$
2 punkty wspólne dla $m \in (-25, 25)$
8.96. $S(2, 2)$

8.97. $\left(x+2\sqrt{2}\right)^2+\left(y+2\sqrt{2}\right)^2=\left(5+2\sqrt{2}\right)^2$ lub $\left(x-2\sqrt{2}\right)^2+\left(y-2\sqrt{2}\right)^2=\left(5-2\sqrt{2}\right)^2$

8.98. $(x-5)^2+(y-4)^2=25$ lub $(x-5)^2+\left(y+8\frac{1}{2}\right)^2=25$ lub $(x+5)^2+\left(y-11\frac{1}{2}\right)^2=25$ lub $(x+5)^2+(y+1)^2=25$

Wzajemne położenie dwóch okręgów

8.99. a) okręgi się przecinają b) okręgi są styczne wewnętrznie c) okręgi są styczne zewnętrznie d) okręgi są rozłączne wewnętrznie e) okręgi są rozłączne zewnętrznie f) okręgi są współśrodkowe

8.100. a) $(7,-3)$ b) $(-2,2)$ oraz $(-1,3)$

8.101. $m\in\{-7,5\}$

8.102. $m\in\{-12,-2,2,12\}$

8.103. $m\in\{-1,1,3,5\}$. Jeśli $m\in\{-1,5\}$, to okręgi są styczne zewnętrznie; jeśli $m\in\{1,3\}$, to okręgi są styczne wewnętrznie.

8.104. Okręgi są styczne zewnętrznie, jeśli $m\in\{-3,1\}$. Nie istnieje parametr m, dla którego okręgi o_1 i o_2 byłyby styczne wewnętrznie.

8.105. dla $m\in(-6,-3)\cup(-2,1)$

8.106. $m\in(0,49)$

8.107. $m\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

8.108. dla $m\in(-2,2)$

Zadania różne z geometrii analitycznej

8.109. *wskazówka:* I sposób: Sprawdź, czy odpowiednie wektory są równe. II sposób: Sprawdź, czy środek przekątnej AC jest jednocześnie środkiem przekątnej BD.

8.110. *wskazówka:* I sposób: Wykaż, że długości wszystkich boków czworokąta są jednakowe. II sposób: Wykaż, że czworokąt jest równoległobokiem, którego przekątne są do siebie prostopadłe.

8.111. *wskazówka:* I sposób: Wykaż, że przekątne AC i BD mają jednakową długość i dzielą się na połowy. II sposób: Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, którego co najmniej jeden kąt wewnętrzny jest prosty.

8.112. *wskazówka:* I sposób: Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest rombem, którego co najmniej jeden kąt wewnętrzny jest prosty. II sposób: Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem, którego sąsiednie boki mają jednakową długość.

8.113. b) $Obw=10\sqrt{5}+3\sqrt{10}$, $P=52{,}5$

8.114. a) *wskazówka:* Wykaż, że $|AB|=|AD|$ oraz $|DC|=|BC|$. b) $Obw=10+4\sqrt{10}$, $P=30$

8.115. b) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{65}{2}$

8.116. a) $(x-2)^2+(y+1)^2=40$ b) $(x-2)^2+(y+1)^2=10$

8.117. a) $(x-4)^2+(y+4)^2=16$ b) $B\left(4-2\sqrt{3},-6\right)$, $B\left(4+2\sqrt{3},-6\right)$

8.118. $C\left(3\sqrt{3}+6,3\right)$, $D\left(3\sqrt{3},3\right)$ lub $C\left(3\sqrt{3}+6,-3\right)$, $D\left(3\sqrt{3},-3\right)$

8.119. $3x-4y+12=0$ lub $3x-4y-38=0$

8.120. $C(-5,4)$ lub $C(35,4)$

8.121. $B(5,0)$, $D(1,6)$

8.122. $C_1(1,6)$, $D_1(-7,4)$ lub $C_2(5,-10)$, $D_2(-3,-12)$

8.123. $(-3,7)$, $(-4,-1)$, $(3,-5)$, $D(4,3)$

8.124. a) $A(-5,-3)$, $B(-1,5)$ b) $P=10$ c) $-\frac{3}{5}$

8.125. $C(-2,3)$ lub $C(2,1)$

8.126. $A(1,3)$, $B(7,3)$

8.127. $2x-14y+9=0$, $42x+6y+19=0$

8.128. $4x-8y+3=0$

8.129. $C(0,3)$ lub $(12,15)$

8.130. $A(-2,-2)$, $B(6,-2)$, $C(4,4)$, $D(0,4)$

8.131. a) Krzywa jest parabolą o równaniu $y=-\frac{1}{4}x^2-1$. b) $(-4,-5)$ lub $(4,-5)$

8.132. a) Krzywa jest parabolą o równaniu $y=\frac{1}{4}x^2$. b) $P(6,9)$ lub $P(-6,9)$

8.133. okrąg o środku w punkcie $S\left(\frac{5}{2},0\right)$ i promieniu równym $\frac{3}{2}$

8.134. Krzywa jest okręgiem o równaniu $(x+1)^2+y^2=16$.

8.135. Krzywa jest parabolą o równaniu $y=\frac{1}{8}x^2+1$.

Wybrane przekształcenia geometryczne w układzie współrzędnych

8.136. a) $A_1(-4,5)$, $B_1(-1,1)$ b) 2,4

8.137. $A(-8,4)$, $B(-1,-1)$, $C(-3,6)$

8.138. a) $(x-3)^2+(y-1)^2=2$ b) $(x+4)^2+(y+5)^2=2$ c) $(x+6)^2+(y-4)^2=2$

8.139. $x^2+(y+1)^2=25$

8.140. a) $2x+y-5=0$; $d(k,l)=0{,}8\sqrt{5}$ b) $2x+y+9=0$; $d(k,l)=2\sqrt{5}$ c) $2x+y+5=0$; $d(k,l)=1{,}2\sqrt{5}$

8.141. $y=x^2+2x+1$; punkt wspólny ma współrzędne $(-2,1)$; *wskazówka:* Wyznacz obraz wierzchołka paraboli p i obraz punktu wspólnego tej paraboli z osią OY.

8.142. $S(6,5)$, $r=2$

8.143. a) $A_1(1,4)$, $B_1(-3,2)$ b) To jest równoległobok.

8.144. a) $A(2,0)$, $B(-3,2)$, $C(-5,-4)$

8.145. a) l: $x+4=0$, $d(k,l)=8$ b) l: $x+y=0$, $d(k,l)=0$ c) l: $y+3=0$, $d(k,l)=6$ d) l: $3x-4y-5=0$, $d(k,l)=2$ e) l: $x-y+2=0$, $d(k,l)=2\sqrt{2}$ f) l: $5x+12y+26=0$, $d(k,l)=4$

8.146. $y = -x^2 + 2x + 4$ *wskazówka:* Wyznacz obraz wierzchołka paraboli p i obraz punktu przecięcia tej paraboli z osią OY a) $(-2, -4)$, $(2, 4)$

8.147. a) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 10$ b) $(x-2)^2 + (y-7)^2 = 10$ c) $(x-8)^2 + (y+1)^2 = 10$ d) $(x-12)^2 + (y+15)^2 = 10$

8.148. $A_1(2, -4)$, $B_1(5, 5)$, $C_1(-7, -1)$

8.149. a) $B(-8, -6)$, $C(8, -6)$, $D(8, 6)$ b) 20

8.150. $a = 2$

8.151. a) $(x+5)^2 + (y+7)^2 = 1$ b) $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 36$

8.152. a) l: $2x - 3y = 0$ b) l: $x + y + 8 = 0$ c) l: $5x - 4y - 1 = 0$

8.153. a) l: $-2x + 3y = 0$ b) l: $-x - y + 8 = 0$ c) l: $-5x + 4y - 1 = 0$

8.154. a) $P(-1, -4)$ b) $P(-2, 1)$

8.155. a) $x + 3 = 0$ b) $x - y - 1 = 0$ c) $5x + 3y + 3 = 0$

8.156. a) $D(-11, -2)$ b) $D(-2, -4)$ c) $D\left(5\frac{4}{5}, 4\frac{3}{5}\right)$ d) $D(-3, -7)$

8.157. a) $A_1(-9, 2)$

8.158. a) $A_1(-1, -6)$

8.159. b) $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$

8.160. b) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$

8.161. b) $x - 2y + 10 = 0$

8.164. a) $A1(-1, 2)$ b) $A1(3, -4)$ c) $A1(9, -4)$ d) $A1(-1, -16)$

8.165. a) $E(-15, 15)$ b) $E(-18, -6)$ c) $E(-1, -2)$ d) $E\left(-2\frac{1}{2}, -10\frac{1}{2}\right)$

8.166. a) $k = -2$ b) $k = -\frac{1}{5}$ c) $k = -2\frac{1}{2}$ d) $k = -1$

8.167. a) $y = 2x + 9$ b) $y = 2x - 6$ c) $y = 2x - 1$ d) $y = 2x + 1\frac{1}{2}$

8.168. a) $g(x) = 4x^2$ b) $g(x) = \frac{1}{9}x^2$ c) $g(x) = -\frac{x+2}{x}$, $x \neq 0$ d) $g(x) = \frac{x}{2x+1}$, $x \neq \frac{1}{2}$

8.169. a) $B_1\left(-8, -3\frac{2}{3}\right)$ b) $B_1(-22, 1)$ c) $B_1(26, 95)$ d) $B_1(-4, 3)$

8.170. a) $A_1(-62, 24)$, $B_1(-7, -26)$; b) $A_1(4, 20)$, $B_1(-8, 2)$; c) $A_1\left(-5, 1\frac{1}{2}\right)$, $B_1\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ d) $A_1\left(-3\frac{1}{2}, -3\frac{7}{10}\right)$, $B_1\left(-1\frac{1}{10}, -5\frac{1}{5}\right)$

8.171. a) $S(1, 3)$ b) $S\left(-6, 6\frac{1}{2}\right)$ c) $S(-7, 7)$ d) $S\left(-1\frac{4}{5}, 4\frac{2}{5}\right)$

8.172. a) $k = \frac{1}{3}$ i $S(-1, 0)$ lub $k = -\frac{1}{3}$ i $S\left(1\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

b) $k = 1\frac{1}{3}$ i $S(-14, -7)$ lub $k = -1\frac{1}{3}$ i $S\left(3\frac{1}{7}, 1\frac{4}{7}\right)$

8.173. $k = -\frac{1}{3}$, $S\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ lub $k = \frac{1}{3}$, $S\left(5\frac{1}{2}, -1\right)$

8.174. $k = -2$, $S\left(-1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$ lub $k = 2$, $S(-20, -8)$

Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej

8.175. a) $A(-1, -2)$ b) $A(-9, 2)$ lub $A(1, 0)$ c) $A(1, -3)$ d) $A(-1, -1)$ lub $A(2, 4)$

8.179. $\frac{1}{4}$ lub $20\frac{1}{4}$

8.180. $\frac{1}{8}$ lub $36\frac{1}{8}$

8.181. $y = -8x - 16$

8.182. $(3, -27)$ lub $(-3, 27)$

8.183. $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$ lub $\left(2, \frac{1}{4}\right)$

8.184. $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

8.185. k: $y = \sqrt{2}x + 2 + \sqrt{2}$

8.186. $P(2, 2)$

8.187. $P(4, -4)$

8.188. $P(4, 2)$

8.189. $\left(-3 + \frac{2}{3}\sqrt{3}, 4\right)$, $\left(-3 - \frac{2}{3}\sqrt{3}, 4\right)$, $\left(-3 + \frac{2}{3}\sqrt{3}, 1\frac{1}{3}\right)$, $\left(-3 - \frac{2}{3}\sqrt{3}, 1\frac{1}{3}\right)$;

pole prostokąta: $\frac{32\sqrt{3}}{9}$

8.190. $C\left(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$

Test sprawdzający do rozdziału 8.

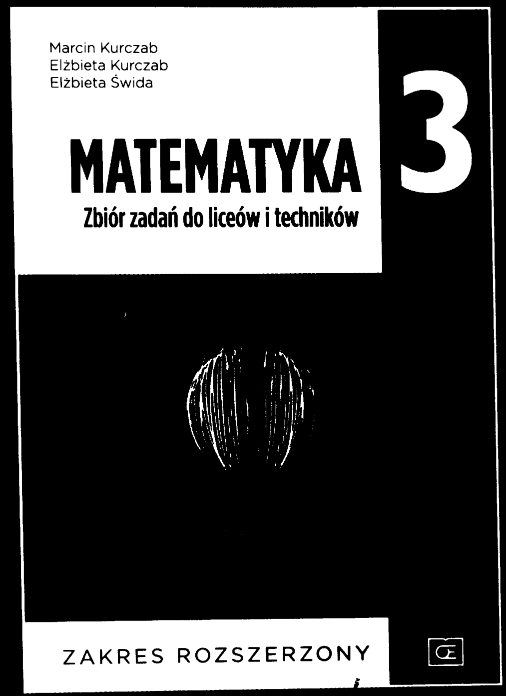
Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	D	C	D	A	B	B	C	C	A	D

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 8.

11. $P(1, 4)$; *wskazówka:* Punkt P to punkt przecięcia prostej k z symetralną odcinka AB.
12. a) $C(-3, 7)$ b) $P = 72$
13. $(-2, 4)$; *wskazówka:* Ortocentrum to punkt przecięcia się wysokości trójkąta lub ich przedłużeń.
14. $x - 3y + 8 = 0$; *wskazówka:* Szukana prosta przechodzi przez punkt A oraz przez punkt wspólny prostych k i l (ortocentrum trójkąta)

15. $(x+2)^2+(y-2)^2=65$; *wskazówka:* Środek tego okręgu jest punktem wspólnym symetralnych boków trójkąta ABC.
16. b) $P=39$
17. a) $D(-5, 4)$ c) $A_1(-5, 0)$, $B_1(-1, -2)$, $C_1(1, 2)$, $D_1(-3, 4)$
18. $B(1, -1)$, $C_1\left(-2, 3\sqrt{3}-1\right)$ lub $C_2\left(-2, -1-3\sqrt{3}\right)$
19. $A_1\left(4\frac{4}{5}, 2\frac{2}{5}\right)$
20. $(x-3)^2+(y-1)^2=25$
21. a) $A(-9, 4)$, $B(-5, -4)$, $C(3, 0)$, $D(-5, 8)$ c) 72
22. b) $5x+12y-65=0$
23. $y=-\frac{1}{2}x+5\frac{1}{2}$ oraz $y=-\frac{1}{2}x-9\frac{1}{2}$
24. $C(-5, 4)$ lub $C(-3, 6)$
25. $B(2, 0)$, $D(-2, 4)$
26. 135°
27. a) $A(0, -3)$, $B(6, -5)$, $C(4, 1)$, $D(-2, 3)$ b) 32 c) $\cos\alpha=-0{,}6$
    d) $(x-2)^2+(y+1)^2=6{,}4$
28. a) 60 b) 0,8
29. $(0, 2)$, $(3, 5)$
30. wierzchołki trapezu: $(-5, 4)$, $(-1, 4)$, $(0, 9)$, $(-6, 9)$
31. Jeśli $m\in(-3, 0)\cup(0, 3)$, to okręgi są rozłączne zewnętrznie; jeśli $m\in\{-3, 3\}$, to okręgi są styczne zewnętrznie; jeśli $m\in(-17, -3)\cup(3, 17)$, to okręgi się przecinają; jeśli $m\in\{-17, 17\}$, to okręgi są styczne wewnętrznie; jeśli $m\in(-\infty, -17)\cup(17, +\infty)$, to okręgi są rozłączne wewnętrznie.
32. okrąg o środku w punkcie $S(-5, 0)$ i promieniu $r=4$
33. $m\in\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$
34. $\left(x-4\frac{1}{2}\right)^2+(y+6)^2=6\frac{1}{4}$
35. $(x+3)^2+(y+5)^2=25$ lub $(x-7)^2+(y+25)^2=625$
36. I. $k=-1\frac{1}{2}$, $S(3, 3)$ II. $k=1\frac{1}{2}$, $S(-3, -3)$
37. $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$
39. $A(-10, -2)$ lub $A(2, 0)$
40. $x^2+y^2=580$

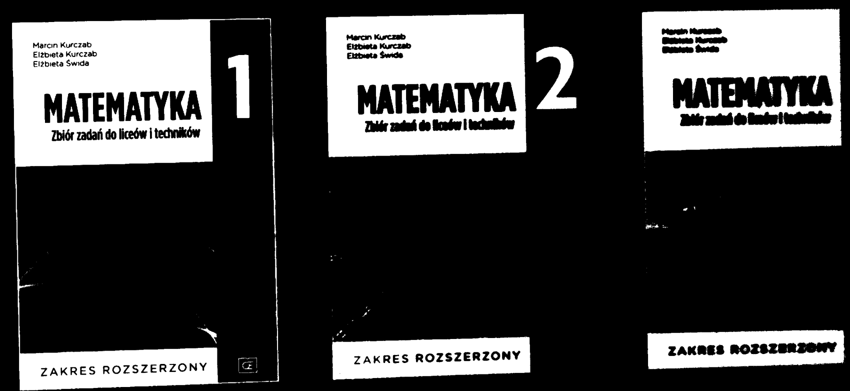
Zbiory zadań do liceów i techników w zakresie rozszerzonym
do nowej podstawy programowej, obowiązującej od września 2019 r.



Matematyka w liceum i w technikum:

- uczy logicznego i ścisłego myślenia,
- sprzyja samodzielnej pracy ucznia,
- daje podstawy języka potrzebnego do nauki przedmiotów przyrodniczych.

Seria zawiera: program nauczania, podręczniki, zbiory zadań, materiały pomocnicze.



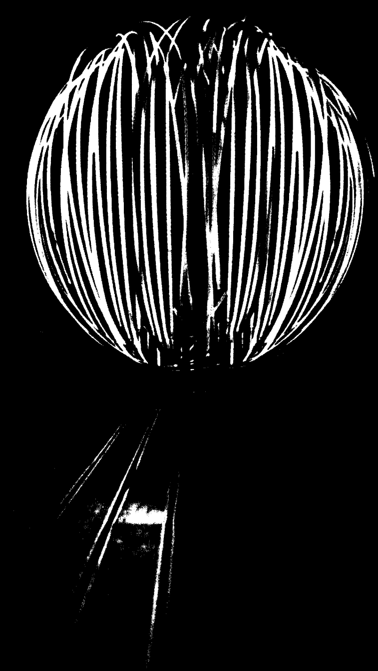
MAZR3

www.pazdro.com.pl

Marcin Kurczab
Elżbieta Kurczab
Elżbieta Świda

MATEMATYKA 3

Zbiór zadań do liceów i techników



ZAKRES ROZSZERZONY