



JÓZEF KALISZ  
MICHALINA MASSALSKA  
JERZY MICHAŁ MASSALSKI

**ZBIÓR  
ZADAŃ  
Z FIZYKI  
Z ROZWIĄZANAMI**

JÓZEF KALISZ,  
MICHALINA MASSALSKA,  
JERZY MICHAŁ MASSALSKI

ZBIÓR ZADAŃ  
Z FIZYKI  
Z ROZWIĄZANAMI

Wydanie VIII

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

1975



Okładkę projektował *Władysław Janiszewski*

Copyright by  
Państwowe Wydawnictwo Naukowe  
Warszawa 1971

*Printed in Poland*

# SPIS TREŚCI

Przedmowa do wydania VI . . . . .	8
<b>1. Wiadomości wstępne</b>	
1.1. Uwagi ogólne i dydaktyczne . . . . .	9
1.2. Układy jednostek fizycznych . . . . .	17
1.2.1. Jednostki podstawowe . . . . .	18
1.2.2. Jednostki uzupełniające . . . . .	20
1.2.3. Wielokrotności i podwielokrotności jednostek . . . . .	21
1.2.4. Symbole wielkości fizycznych . . . . .	21
1.3. Jednostki i ich związki (w mechanice) . . . . .	23
1.3.1. Układ SI . . . . .	23
1.3.2. Układ CGS . . . . .	24
1.3.3. Układ techniczny (ciężarowy) . . . . .	25
1.4. Zestawienie odpowiadających sobie wzorów i jednostek w kinematyce i dynamice ruchu postępowego i obrotowego w układzie SI . . . . .	27
1.5. Miary wielkości mechanicznych . . . . .	28
1.6. Jednostki i miary wielkości cieplnych . . . . .	34
1.7. Jednostki elektryczności . . . . .	34
1.7.1. Wstęp . . . . .	34
1.7.2. Jednostki wielkości elektrycznych oraz ich związki w układach SI, ES CGS oraz EM CGS . . . . .	36
1.7.3. Jednostki wielkości magnetycznych oraz ich związki w układach SI, ES CGS oraz EM CGS . . . . .	53
1.8. Jednostki wielkości optycznych i fotometrycznych w układzie SI . . . . .	68
1.9. Jednostki promieniotwórczości w układzie SI . . . . .	69
1.10. Najważniejsze stałe fizyczne wyrażone w układzie SI . . . . .	70
<b>2. Fizyczne podstawy mechaniki</b>	
2.1. Wstęp. Kinematyka punktu materialnego . . . . .	73
Zadania (2.1—2.56) . . . . .	77
2.2. Spadanie swobodne ciał. Rzut poziomy. Rzut ukośny . . . . .	83
Zadania (2.57—2.110) . . . . .	84
2.3. Zasady dynamiki. Praca, moc, energia . . . . .	89
Zadania (2.111—2.198) . . . . .	94



2.4. Grawitacja powszechna . . . . .	103
Zadania (2.199—2.218) . . . . .	103
2.5. Statyka. Współrzedne środka masy . . . . .	105
Zadania (2.219—2.251) . . . . .	106
2.6. Dynamika ruchu obrotowego ciała sztywnego . . . . .	109
Zadania (2.252—2.285) . . . . .	111
2.7. Tarcie . . . . .	114
Zadania (2.286—2.317) . . . . .	115
2.8. Własności sprężyste ciał . . . . .	118
Zadania (2.318—2.327) . . . . .	119
2.9. Aero- i hydrostatyka . . . . .	120
Zadania (2.328—2.356) . . . . .	120
2.10. Aero- i hydrodynamika . . . . .	124
Zadania (2.357—2.381) . . . . .	125
2.11. Rozwiązania zadań (2.1—2.381) . . . . .	128
3. Ciepło . . . . .	
3.1. Rozszerzalność liniowa i objętościowa . . . . .	227
Zadania (3.1—3.18) . . . . .	228
3.2. Kalorymetria . . . . .	230
Zadania (3.19—3.45) . . . . .	231
3.3. Równania gazów . . . . .	235
Zadania (3.46—3.82) . . . . .	237
3.4. Roztwory. Wilgotność. Przewodzenie ciepła . . . . .	241
Zadania (3.83—3.91) . . . . .	243
3.5. Teoria kinetyczna materii . . . . .	244
Zadania (3.92—3.130) . . . . .	246
3.6. Termodynamika . . . . .	250
Zadania (3.131—3.184) . . . . .	252
3.7. Rozwiązania zadań (3.1—3.184) . . . . .	259
4. Elektryczność i magnetyzm . . . . .	
4.1. Uwagi wstępne . . . . .	318
4.2. Magnesy trwałe oraz magnetyzm ziemski . . . . .	319
Zadania (4.1—4.19) . . . . .	320
4.3. Elektrostatyka . . . . .	323
Zadania (4.20—4.93) . . . . .	326
4.4. Prawo Ohma dla obwodu zamkniętego oraz dla części obwodu, prawa Kirchhoffa, łączenie oporów i ogniw . . . . .	334
Zadania (4.94—4.140) . . . . .	336
4.5. Praca i moc prądu elektrycznego . . . . .	342
Zadania (4.141—4.170) . . . . .	343
4.6. Elektroliza . . . . .	347
Zadania (4.171—4.192) . . . . .	349

4.7. Pole magnetyczne prądu oraz siła elektromotoryczna indukcji . . . . .	351
Zadania (4.193—4.230) . . . . .	354
4.8. Drgania i fale elektromagnetyczne. Prądy zmienne . . . . .	359
Zadania (4.231—4.245) . . . . .	361
4.9. Rozwiązania zadań (4.1—4.245) . . . . .	364
5. Akustyka i optyka	
5.1. Ruch drgający . . . . .	476
Zadania (5.1—5.42) . . . . .	479
5.2. Ruch falowy . . . . .	484
Zadania (5.43—5.78) . . . . .	487
5.3. Optyka geometryczna . . . . .	491
Zadania (5.79—5.201) . . . . .	494
5.4. Optyka falowa . . . . .	506
Zadania (5.202—5.260) . . . . .	508
5.5. Rozwiązania zadań (5.1—5.260) . . . . .	514
6. Fizyka atomowa i jądrowa	
6.1. Ogólne własności promieniowania cieplnego . . . . .	589
Zadania (6.1—6.11) . . . . .	590
6.2. Teoria względności. Korpuskularne własności światła. Zjawisko tworzenia par . . . . .	592
Zadania (6.12—6.38) . . . . .	595
6.3. Zasada nieoznaczoności. Fale de Broglie'a . . . . .	598
Zadania (6.39—6.53) . . . . .	598
6.4. Budowa atomu. Promienie Röntgena . . . . .	600
Zadania (6.54—6.74) . . . . .	602
6.5. Własności elektryczne i magnetyczne ciał . . . . .	604
Zadania (6.75—6.95) . . . . .	606
6.6. Promieniotwórczość naturalna i sztuczna. Energia wiązania . . . . .	609
Zadania (6.96—6.136) . . . . .	611
6.7. Metody fizyki współczesnej . . . . .	616
6.7.1. Cząstki swobodne . . . . .	616
Zadania (6.137—6.151) . . . . .	618
6.7.2. Przyrządy fizyki jądrowej . . . . .	621
Zadania (6.152—6.174) . . . . .	623
6.8. Rozwiązania zadań (6.1—6.174) . . . . .	626

## PRZEDMOWA DO WYDANIA VI

Ze względu na odkrycia coraz bardziej skomplikowanych zjawisk przyrodniczych jedną z palących potrzeb naukowych stało się pragnienie ich uporządkowania. Wyrazem tego jest też wprowadzenie międzynarodowego układu jednostek miar (SI) w fizyce (*International System of Units*). W Polsce układ SI obowiązuje od grudnia 1966 r. W konsekwencji należało więc przerobić całość zbioru zadań — w stosunku do poprzednich wydań — wprowadzając w nim obowiązujący układ SI. Najwięcej przeróbek wymagały zadania z dziedziny ciepła. Cały rozdział 1 został też na nowo opracowany. Dodane zostały nowe zadania o większym stopniu trudności niż w zadaniach dawnych (30 — w mechanice, 75 — w cieple, 73 — w elektryczności oraz 84 — w akustyce i optyce, razem 262 nowe zadania). Rozdział 6 pozostał bez zmiany. Obecny zbiór zawiera 1244 zadania. W rozdziale 4 dziedzinę magnetyzmu przedstawiono jeszcze w tradycyjnym układzie materiału. W rozdziale tym opuszczono rozwiązania w układzie ES CGS (4.2) oraz w układzie EM CGS (4.3). Nie chcąc powiększać objętości książki, wskutek wprowadzonych w tym wydaniu zmian, rozwiązania w rozdziałach 3 i 4 podano skrótowo.

Rozdziały 1, 3, 4 oraz 6.4, 6.5 i 6.7. 1 opracował J. Kalisz, natomiast rozdziały 2, 5 oraz 6.1, 6.2, 6.3, 6.6 i 6.7.2 M. Massalska i J. M. Massalski.

Serdecznie dziękujemy Kolegom, którzy przyczynili się do udoskonalenia książki.

*J. Kalisz, M. Massalska, J. M. Massalski*

Akademia Górniczo-Hutnicza  
Wyż. Szk. Ofic. Wojsk Chem.  
Kraków, 31 grudnia 1968 r.

### 1.1. UWAGI OGÓLNE I DYDAKTYCZNE

Podręcznik z zadaniami z fizyki ma przede wszystkim pomóc uczącemu się fizyki w opanowaniu przerabianego materiału, techniki posługiwania się wzorami fizycznymi, techniki zastosowania poznanych wzorów fizycznych do konkretnych zjawisk oraz do pogłębienia swej wiedzy fizycznej jako wiedzy praktycznej, wiedzy na codzienny użytek. Dla bardzo wielu studentów studiów wieczorowych i zaocznych, eksternistycznych i dziennych, jak i dla początkujących pracowników dydaktyczno-naukowych przyda się tych kilka uwag z zakresu dydaktyki zadań.

**1.1.1.** Najczęściej spotykanym błędem, ciągnącym się od szkoły podstawowej, jest powszechne twierdzenie rodziców i uczniów, że uczeń (student) fizykę umie, a ma trudności jedynie z rozwiązywaniem zadań z fizyki. Twierdzenie to jest z zasady fałszywe, gdyż taki student albo nie rozumie treści zadania, albo nie zna praw i zasad fizyki odnoszących się do zjawisk opisanych w zadaniu, albo nie ma opanowanego materiału pamięciowego tych praw i zasad i nie potrafi ich w zadaniu zastosować, chociaż czuje jego treść fizyczną, albo nie umie przeliczać jednostek z jednego układu jednostek na drugi. Ma więc materiał nie ugruntowany, jest mało wprawny, ewentualnie nie potrafi posiadanych wiadomości teoretycznych zastosować do celów praktycznych. Do tego celu służą podręczniki z zadaniami z fizyki i dlatego oprócz uczenia się teorii należy przerobić kilkaset zadań z samej fizyki klasycznej.

**1.1.2.** Przy przerabianiu zadań należy zwracać uwagę na to, aby nie pominąć żadnej ważnej dziedziny fizyki. Potrzebna jest przy tym pomoc nauczyciela, asystenta, wykładowcy czy profesora. Należy przede wszystkim przerobić takie zadania, na podstawie których bezpośrednio utwierdza się treść poznanych zasad, praw i definicji, następnie zadania wymagające przeliczania jednostek jednego układu na jednostki drugiego układu

(dopóki w życiu codziennym i całej literaturze nie zapanuje jednolicie system SI), a dopiero potem zadania trudniejsze, wymagające głębszego zrozumienia oraz zastosowania równocześnie szeregu praw i zasad fizycznych.

**1.1.3.** Fizyka klasyczna jest dzisiaj tylko małą częścią całości fizyki. Fizyka atomowa oraz współczesna fizyka jądrowa przerastają już pod względem ilości materiału fizykę klasyczną. Jednak pojęcia stosowane w fizyce klasycznej oraz poznane tam jednostki w różnych układach oraz związki pomiędzy nimi są fundamentem, na którym opiera się cała fizyka. Dlatego zadania z fizyki klasycznej, ze względu na ich powszechną użyteczność, są zadaniami podstawowymi, a zadania z fizyki atomowej czy jądrowej są już raczej specjalistyczne i potrzebne nielicznej grupie fizyków, chemików, bio-fizyko-chemików itd. Student musi zdawać sobie sprawę z tego, że mimo skracania czasu na opanowanie fizyki klasycznej, materiał ten musi być doskonale opanowany. W nowych programach duża część tego materiału została przerzucona na szkoły średnie, które będą odpowiedzialne za jego opanowanie. Na wyższych uczelniach programy zostaną na nowo przerobione i dostosowane do nowych potrzeb.

**1.1.4.** Rozwiązywanie zadań z fizyki różni się od rozwiązywania zadań z matematyki, gdyż we wzorach (równaniach) fizycznych mamy do czynienia przeważnie z wielkościami mianowanymi oraz z tym, że to samo zjawisko w różnych układach jednostek (zwłaszcza w elektryczności) będzie przedstawione różnymi wzorami. Przed przystąpieniem do rozwiązywania zadania należy więc uświadomić sobie, w jakim układzie jednostek chcemy dane zadanie rozwiązywać. Wszystkie miana należy najpierw sprowadzić do danego układu jednostek, napisać odpowiednie wzory w tym układzie, a następnie po podstawieniu danych liczb uzyskujemy wynik w danym układzie. Należy więc pamiętać ogólną zasadę, że *wszystkie wielkości wchodzące w skład ostatecznego wzoru powinny być wyrażone w tym układzie jednostek, w którym napisaliśmy wzór oraz w którym chcemy otrzymać wynik.*

Niejednokrotnie przeprowadza się też, dla opanowania materiału, operacje na wymiarach jednostek lub końcowy wynik przelicza się na wynik żądany w danym układzie jednostek.

**1.1.5.** Przy przeliczaniu z jednego układu jednostek na drugi układ jednostek należy pamiętać, że jeżeli jedna jednostka jest liczbowo  $x$  razy większa w jednym układzie od takiej jednostki w drugim układzie jednostek, to wynik podany w jednostkach drugiego układu będzie  $x$  razy większy.



Na przykład  $1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm}$ , bo 100 razy większa jest pierwsza jednostka od drugiej, a więc wynik wyrażony w drugiej jednostce jest 100 razy większy.

**1.1.6.** Zagadnienie definiowania jednostek to jedno z bardzo ważnych ogniów w nauczaniu fizyki. Jest ona jedną z głównych przyczyn ogólnego niskiego poziomu wiadomości studentów z dziedziny fizyki. Najlepiej wykażemy na przykładzie, o co tu chodzi. Na pytanie, co jest jednostką pracy w układzie SI, student odpowiada, że dżul i uważa, że to wystarcza. Tymczasem definicja jednostki pracy powinna być oparta na wzorze  $W = F \cdot s$ , określającym wynik działania stałej siły  $F$  działającej na ciało swobodne na drodze  $s$  i wykonującej pracę  $W$ . Ciało porusza się wtedy w kierunku działania siły. Jednostka pracy (jak prawie każda inna jednostka fizyczna) zależy od układu jednostek. Przy podawaniu definicji jednostki powinno się wykazać, że definicja ta jest oparta na wzorze opisującym dane zjawisko oraz podać opis tego zjawiska. W naszym przypadku odpowiedź powinna brzmieć — za jednostkę pracy w układzie SI przyjmujemy pracę siły jednego niutona ( $F = \text{jeden niuton}$ ) przemieszczającej ciało swobodne na drodze jednego metra ( $s = 1 \text{ m}$ ). Można jeszcze dodać, że jednostkę taką nazywamy dżulem (J). Uczeń czy student widzi od razu, że  $\text{J} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ . Wiadomo wtedy, że odpowiadający rozumie zjawisko oraz będzie rozumiał wzór i będzie umiał przeliczać jednostki jednego układu na jednostki drugiego układu. Zagadnienia tego w dydaktyce fizyki nie należy lekceważyć, bo dzisiejsza młodzież chce stosować i stosuje różnego rodzaju skróty, chociaż ich nie rozumie.

**1.1.7.** Rozwiązanie zadania z fizyki powinno mieć zawsze konkretny wynik (wyrażony w konkretnych jednostkach). Nie wdając się w szczegóły zadania, otrzymujemy np. wynik, który ktoś pisze w sposób następujący:

$$\begin{aligned} Q &= 4\pi r^2 \sigma T^4 t = 4 \cdot 3,14 \cdot (695,6 \cdot 10^3 \cdot 10^2)^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 5750^4 \cdot 60 = \\ &= 2,26 \cdot 10^{28} \text{ J} = 5,38 \cdot 10^{27} \text{ cal} . \end{aligned}$$

Tak nie wolno pisać. Trzeci człon tego równania napisany jest w postaci liczby czystej, która równa się liczbie wyrażającej pewną liczbę jednostek. Pisząc wzory ogólne nie pisze się jednostek, pisząc liczby szczegółowe, należy zawsze napisać jednostkę. Ta trudność w fizyce pochodzi stąd, że w szkole średniej czy wyższej w zadaniach matematycznych przeważnie używa się liczb czystych. W aktualnym programie szkoły średniej zwraca się już na to zagadnienie baczną uwagę.

**1.1.8.** Dla zilustrowania uwagi 1.1.4, w jaki sposób rozwiązanie tego samego zadania zależy od układu jednostek, podajemy dwa przykłady rozwiązywania zadań z dziedziny elektryczności.

*Przykład 1.* Obliczyć siłę odpychania się w próżni dwu ładunków elektrycznych każdego o wielkości jednej amperosekundy (kulomba) znajdujących się w odległości 20 cm.

Aby obliczyć tę siłę, prawo Coulomba piszemy w różnej postaci, zależnie od tego, w jakim układzie jednostek będziemy dokonywali obliczeń, a więc w jakich jednostkach chcemy otrzymać wartość siły. W układzie SI siłę otrzymamy w niutonach, w układzie zaś ES CGS oraz EM CGS siłę otrzymamy w dynach.

**Rozwiązanie w układzie SI** (wynik otrzymamy w niutonach). Wzór Coulomba w tym układzie przyjmuje postać

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (1.1)$$

gdzie

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}, \quad (1.2)$$

a więc

$$F = \frac{1}{4\pi \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}} \frac{1 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot 1 \text{ A} \cdot \text{s}}{(0,2)^2 \text{ m}^2} = \frac{9 \cdot 10^9}{0,04} \text{ N} = 2,15 \cdot 10^{11} \text{ N}. \quad (1.3)$$

**Rozwiązanie w układzie ES CGS** (wynik otrzymamy w dynach). Wzór Coulomba w tym układzie piszemy w postaci

$$F = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (1.4)$$

gdzie

$$\epsilon_0 = 1. \quad (1.5)$$

W układzie tym

$$Q_1 = Q_2 = 3 \cdot 10^9 \text{ j. ES CGS ład.} = 3 \cdot 10^9 \text{ g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$r = 20 \text{ cm},$$

zatem

$$F = \frac{(3 \cdot 10^9)^2 (\text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-1})^2}{400 \text{ cm}^2} = \frac{9 \cdot 10^{18} \text{ g} \cdot \text{cm}^3 \cdot \text{s}^{-2}}{400 \text{ cm}^2} =$$

$$= 2,15 \cdot 10^{16} \text{ dyn}.$$



Rozwiązanie w układzie EM CGS (wynik otrzymamy w dynach). Wzór Coulomba w tym układzie piszemy w postaci

$$F = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (1.6)$$

gdzie

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2} = \frac{1}{9 \cdot 10^{20} \text{ cm}^2/\text{s}^2}. \quad (1.7)$$

W rozwiązaniach zadań będziemy zawsze przyjmowali przybliżoną wartość światła  $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$ . Ponieważ

$$Q_1 = Q_2 = \frac{3 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^{10}} \text{ j. EM CGS ład.} = \frac{1}{10} \text{ j. EM CGS ład.} = \\ = \frac{1}{10} \text{ g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2},$$

$$r = 20 \text{ cm},$$

zatem

$$F = 9 \cdot 10^{20} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}^2} \frac{\frac{1}{100} (\text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2})^2}{400 \text{ cm}^2} = \frac{9 \cdot 10^{18} \text{ g} \cdot \text{cm}}{400 \text{ s}^2} = 2,15 \cdot 10^{16} \text{ dyn.}$$

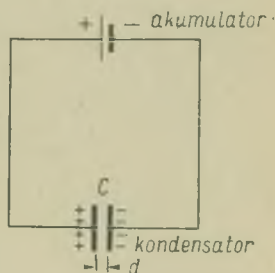
**Przykład 2.** Do płyt kondensatora płaskiego, oddalonych od siebie o  $d = 5 \text{ mm}$ , przyłożono napięcie z akumulatora o sile elektromotorycznej (SEM) równej 2 wolty (rys. 1.1). Jaka będzie gęstość powierzchniowa ładunków na płytach tego kondensatora, jeżeli znajduje się on w próżni?

Rozwiązanie w układzie SI (wynik otrzymamy w  $\text{A} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ ). Należy napisać związek między gęstością powierzchniową tych ładunków a natężeniem pola elektrycznego, panującego pomiędzy okładkami tego kondensatora, w układzie SI. Związek ten piszemy w postaci

$$\sigma = \epsilon_0 E, \quad (1.8)$$

lecz między natężeniem pola elektrycznego  $E$ , napięciem elektrycznym przyłożonym do okładek kondensatora  $U$  oraz odległością okładek  $d$  zachodzi związek

$$U = Ed. \quad (1.9)$$



Rys. 1.1

Otrzymujemy ostatecznie

$$\sigma = \varepsilon_0 \frac{U}{d}, \quad (1.10)$$

gdzie

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}, \quad U = 2 \text{ V} = 2 \frac{\text{J}}{\text{A} \cdot \text{s}} = 2 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}},$$

$$d = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

A więc na gęstość otrzymujemy wartość

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \cdot 2 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}} \frac{1}{5 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = \frac{1}{90\pi \cdot 10^6} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \\ &= 35,2 \cdot 10^{-10} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}. \end{aligned}$$

*Rozwiązanie w układzie ES CGS* (wynik otrzymamy w j. ES CGS ład./cm<sup>2</sup>). W układzie tym związek między natężeniem pola elektrycznego, panującego pomiędzy okładkami kondensatora, a gęstością powierzchniową ładunków na jego okładkach można napisać w postaci  $E = 4\pi\sigma$ , zatem

$$\sigma = \frac{U}{4\pi d}, \quad (1.11)$$

gdzie  $U = \frac{2}{300}$  j. ES CGS napięcia,  $d = 0,5$  cm; a więc

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\frac{2}{300} \text{ j. ES CGS napięcia}}{4 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \text{ cm}} = \frac{1}{942} \frac{\text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{cm}} = \\ &= 10,6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{cm}^2} = 10,6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{j. ES CGS ład.}}{\text{cm}^2}. \end{aligned}$$

*Rozwiązanie w układzie EM CGS* (wynik otrzymamy w j. EM CGS ład./cm<sup>2</sup>). W układzie tym związek pomiędzy natężeniem pola elektrycznego, panującego pomiędzy okładkami kondensatora, a gęstością powierzchniową ładunków na jego okładkach, można napisać w postaci

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \frac{U}{d}, \quad (1.12)$$

gdzie

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2} = \frac{1}{9 \cdot 10^{20} \text{ cm}^2 \text{ s}^2},$$

$U = 2 \cdot 10^8$  j. EM CGS napięcia,

$d = 0,5$  cm,

a więc

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 9 \cdot 10^{20} \text{ cm}^2} \frac{\text{s}^2 \cdot 2 \cdot 10^8 \text{ g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-2}}{0,5 \text{ cm}} = \\ &= \frac{1}{28,26 \cdot 10^{12}} \frac{\text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2}}{\text{cm}^2} = 35,2 \cdot 10^{-15} \text{ j. EM CGS ład.} \cdot \frac{1}{\text{cm}^2}. \end{aligned}$$

**1.1.9.** Należy zapamiętać kilka bardzo przydatnych uwag, które mogą przyczynić się do zwiększenia sprawności w rozwiązywaniu zadań z fizyki.

**1.1.9.1.** Pierwsza z nich dotyczy kalorymetrii. Ze względu na to, że wprowadzono układ SI jako układ obowiązujący, należy ciepło, a więc energię potrzebną do ogrzewania ciał czy do przeprowadzania zmiany stanu skupienia wyrażać w dżulach (J) a nie w kaloriach lub kilokaloriach. Należy więc dobrze zapamiętać tzw. *mechaniczny równoważnik ciepła*

$$1 \text{ kcal} = 4186 \text{ dżul (J)}. \quad (1.13)$$

Należy wprowadzić nową interpretację ciepła właściwego oraz ciepła przemiany. W tym podręczniku będziemy rozumieli pod pojęciem ciepła właściwego ilość energii potrzebną do zmiany temperatury jednego kilograma danego ciała o jeden K, a pod pojęciem ciepła przemiany ilość energii potrzebną do zmiany skupienia jednego kilograma danego ciała w temperaturze przemiany. Warto zapamiętać wartości ciepła właściwego:

$$\text{lodu } c = 0,5 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = 2093 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1},$$

$$\text{wody } c = 1 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = 4186 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1},$$

ciepła przemiany lodu na wodę

$$L = 79,71 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1} = 3,34 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

oraz ciepła przemiany wody na parę wodną

$$L = 539,55 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1} = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

W tej dziedzinie fizyki będzie najwięcej kłopotu, bo trzeba zerwać ze starymi nawykami, wprowadzić nową interpretację pojęć oraz przeprowadzić nowe przeliczenia w tablicach fizycznych.

**1.1.9.2.** Jeżeli będziemy pamiętali definicję (popularną a nie ścisłą), że kilogram siła (kG) jest to siła, którą Ziemia wywiera na masę jednego kilograma, to znając siłę w układzie technicznym jednostek, np.  $F = 10,5 \text{ kG}$ , będziemy znali również masę w układzie SI jednostek  $m = 10,5 \text{ kg}$  i odwrotnie. Jest to bardzo ważna uwaga, której nieuwzględnianie powoduje bardzo duży procent ocen niedostatecznych zarówno w szkole średniej, jak i wyższej.

**1.1.9.3.** Trzecia uwaga dotyczy obliczania objętości w zadaniach rozwiązywanych na podstawie prawa Archimedesesa. Objętość ciała można obliczyć znając albo jego masę oraz masę właściwą (wzór  $V = m/\rho$ ), albo ciężar ciała oraz jego ciężar właściwy (wzór  $V = G/\gamma$ ). Studenci bardzo często mieszając tu te cztery pojęcia ze sobą ( $\rho$  z  $\gamma$  i  $m$  z  $G$ ) napotykają trudności w rozwiązywaniu zadań.

**1.1.9.4.** Jeżeli mamy podaną w tablicach lub zadaniu masę właściwą w układzie CGS, np. jodu  $\rho = 4,94 \text{ g/cm}^3$ , to należy pamiętać, że mamy również podany ciężar właściwy, lecz w układzie mieszanym, a mianowicie  $\gamma = 4,94 \text{ G/cm}^3$ . Wartość tę jednak możemy natychmiast dostosować do układu technicznego. Przez zmianę G na kG oraz  $\text{cm}^3$  na  $\text{m}^3$  otrzymujemy wartość ciężaru właściwego w jednostkach układu technicznego

$$\gamma = 4,94 \frac{\text{G}}{\text{cm}^3} = 4,94 \frac{10^{-3} \text{ kG}}{10^{-6} \text{ m}^3} = 4,94 \cdot 10^3 \frac{\text{kG}}{\text{m}^3}.$$

**1.1.9.5.** Nie jest rzeczą obojętną dla studenta przy pisaniu wzorów, czy napisze np. wzór na ciśnienie w postaci

$$p_2 = \frac{V_1 p_1 T_2}{T_1 V_2},$$

czy też w postaci

$$p_2 = p_1 \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1}.$$

Wzór w postaci drugiej wskazuje od razu, że wymiar  $p_2$  jest taki sam jak wymiar  $p_1$ , gdyż ułamki  $V_1/V_2$  oraz  $T_2/T_1$  są bezwymiarowe (liczby czyste). Wielkości tego typu występujące w takich ułamkach możemy obliczać niezależnie od wybranego układu, stosując podstawienia w dowolnych jednostkach, ale takich samych w liczniku i mianowniku.

**1.1.9.6.** Pisanie symboli nie jest również obojętne. Wielu studentów nie przywiązuje żadnej wagi do przyjętych oznaczeń różnych wielkości

występujących w fizyce. Jest to jednak bardzo ważna sprawa, gdyż ułatwia pamięciowe opanowanie wiadomości fizycznych.

**1.1.10.** Dla głębszego zrozumienia danego działu fizyki, student powinien przerobić pewną liczbę zadań z tej dziedziny.

**1.1.10.1.** Według mnie najlepszą formą jest podanie na wykładzie, że na następne ćwiczenia wymagane jest przerobienie zadań z takiej i takiej dziedziny. Studentom zaleca się podręczniki do przerabiania zadań. Forma ta umożliwia kontrolę podwójną, bo zmusza studentów do przerabiania danej partii materiału oraz przerobienia zadań, jak również zmusza asystenta do prowadzenia ćwiczeń równoległe z wykładem. (Zwykle stosuje się jednodniowy „poślizg“.) Asystent zmuszony jest do zaznajomienia się z treścią i formą przedstawionego przez wykładowcę materiału.

**1.1.10.2.** Wywieszanie studentom zadań do przerobienia. Studenci przerabiają je w domu, a na ćwiczeniach przerabiane są zadania podobne. Forma ta nie ma jednak obu zalet podanych w punkcie 1.1.10.1.

**1.1.10.3.** Najgorszą formą jest wywieszanie dla studentów zadań (czasami nawet bardzo trudnych i powodujących całkowite zniechęcenie do ich rozwiązywania) oraz odpytywania ich na ćwiczeniach. Uważam takie postępowanie za błąd dydaktyczny. Takiej formy ćwiczeń nie powinno się stosować na ćwiczeniach w szkole wyższej na żadnym z podstawowych przedmiotów pierwszych lat.

## 1.2. UKŁADY JEDNOSTEK FIZYCZNYCH

Tęsknota człowieka do stabilności, na której oparliśmy się można przystąpić do rozwiązywania mechanizmu naszego życia i życia wszechświata, objawia się w fizyce w poszukiwaniu jednolitego układu systemu jednostek.

Na XI Generalnej Konferencji Miar w 1960 r. zalecono ostatecznie wprowadzenie jednolitego systemu jednostek w fizyce — międzynarodowego układu jednostek miar (SI) (*International System of Units*). W Polsce na sesji jesiennej 1966 r. \* sejm uchwalił wprowadzenie go w życie. Ustalając układ SI dążono do oparcia jednostek o niezniszczalne i odtwarzalne wzorce istniejące w przyrodzie. Układ SI opiera się na: sześciu dobrowolnie i umownie wybranych i określanych jednostkach podstawowych, trzech

\* Akty normalizacyjne dotyczące wprowadzenia w życie układu SI w PRL, 17. 06. 1966, Dz. U. PRL Nr 23, poz. 148 — *O miarach i narzędziach pomiarowych.*

23. 06. 1966, Dz. U. PRL Nr 25, poz. 154 — *Ustalenie legalnych jednostek miar.*

21. 12. 1966, Monitor Polski Nr 74, poz. 356 — *Ustalenie legalnych jednostek miar.*



umownie wybranych jednostkach uzupełniających, ustaleniu zasad określania wielokrotnej i podwielokrotnej danej jednostki, ustaleniu symbolu dla danej jednostki.

Praktycznie biorąc, układ SI w porównaniu z dawniej stosowanym układem MKSA (np. w poprzednim wydaniu podręcznik ten oparty był na układzie MKSA) wprowadza istotne zmiany tylko w dziedzinie nauki o cieple oraz fotometrii.

### 1.2.1. Jednostki podstawowe

**1.2.1.1. Jednostka długości — metr (m).** Długi czas szukano takiego ciała w spektroskopii, aby promieniowanie wysyłane lub absorbowane przez to ciało było jak najmniej zależne od wpływów ubocznych, to znaczy, aby było z dużą dokładnością w każdej chwili odtwarzalne. Zasady pomiarów interferometrycznych, dobrze znane od zeszłego stulecia, pozwalają na wyznaczenie długości dowolnego przedmiotu w porównaniu z długością określonej fali świetlnej. Na XI Generalnej Konferencji Miar w r. 1960 zatwierdzono takie ciało — izotop kryptonu  $^{86}_{36}\text{Kr}$ . Obecnie definicja metra brzmi: *metr jest długością równą 1 650 763,73 długości fali w próżni promieniowania, odpowiadającego przejściu pomiędzy poziomami  $2p_{10}$  oraz  $5d_5$  atomu kryptonu 86.*

Oznacza to, że elektron przechodzący pomiędzy tymi poziomami pochłania taką długość fali świetlnej. Fala ta leży w widmie widzialnym i odpowiada barwie pomarańczowej.

**1.2.1.2. Jednostka czasu — sekunda (s),** określona została na X i XI Generalnej Konferencji Miar (1954 i 1960). W związku z nowoczesną techniką pomiarową czasu zauważono już przed drugą wojną światową, że każdy następny rok jest dłuższy od poprzedniego. Ruchy Ziemi, badane dokładnie od czasów Newtona, są dokładnie znane i mogą być obliczone zarówno dla czasów przeszłych, jak i przyszłych. Dlatego określenie jednostki czasu odniesiono do ściśle określonego roku zwrotnikowego, mianowicie do roku 1960, podając, że *sekunda (s) jest 1/31 556 925,9747 częścią roku zwrotnikowego 1960, stycznia 0 godzina 12 czasu efemeryd.*

W październiku 1967 r. w Paryżu odbyła się XIII Generalna Konferencja Miar, która zaleciła następującą definicję sekundy: *sekunda jest czasem trwania 9 192 631 770 okresów promieniowania, odpowiadającego przejściu między dwoma nadsztylnymi poziomami stanu podstawowego atomu cezu 131.*

**1.2.1.3. Jednostka masy — kilogram (kg).** Ze względu na małą dokładność mierzenia masy (nie można zmierzyć bezpośrednio masy atomu danego izotopu) oraz ze względu na małą możliwość uzyskania absolutnie czystego pierwiastka (bez domieszek) pozostawiono jako jednostkę masy jednostkę przyjętą przez III Generalną Konferencję Miar w roku 1901.

*Kilogram (kg) jest to masa międzynarodowego wzorca jednostki przechowywanej w Międzynarodowym Biurze Miar w Sèvres pod Paryżem.* Nazwa tej jednostki nie jest zgodna z przyjętymi zasadami, dotyczącymi jednostek podstawowych i ich pochodnych (krotności i podwielokrotności), ponieważ kilogram oznacza teraz jednostkę podstawową, a składa się z dawnej jednostki podstawowej — gram (układ CGS) i przedrostka — kilo ( $= 10^3$ ).

**1.2.1.4. Jednostka natężenia prądu — amper (A).** Jeżeli przez dwa druty równoległe (rys. 1.2) przepuścimy prąd w tym samym kierunku, to będą się one przyciągały. W przypadku drutów nieskończenie długich (wystarczająco długich) siła  $F$  wywierana na przewodnik o długości  $dl_2$  wyrażona jest wzorem

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 dl_2}{d}, \quad (1.14)$$

gdzie  $I_1$  oraz  $I_2$  są natężeniami prądów płynących w przewodnikach,  $d$  ich odległością, a  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m  $= 1,26 \cdot 10^{-6}$  N/A<sup>2</sup>.

Na IX Generalnej Konferencji Miar w r. 1948 przyjęto określenie ampera oparte na tym zjawisku.

*Amper (A) jest natężeniem prądu elektrycznego nie zmieniającego się, który płynąc w dwóch równoległych przewodach prostoliniowych nieskończenie długich, o przekrojach kołowych znikomo małych, umieszczonych w odległości jednego metra jeden od drugiego w próżni — wywołuje między tymi przewodami siłę równą dwóm dziesięciomilionowym częściom niutona na każdy metr długości przewodu.*

Gdy

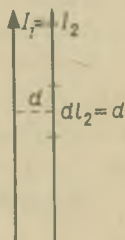
$$F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}, \quad I_1 = I_2 = I, \quad dl_2 = 1 \text{ m}, \quad d = 1 \text{ m},$$

to

$$2 \cdot 10^{-7} \text{ N} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2} \cdot I^2 \cdot 1 \text{ m}}{2\pi \cdot 1 \text{ m}},$$

skąd

$$\text{A}^2 = I^2, \quad \text{czyli} \quad I = 1 \text{ A}.$$



Rys. 1.2



**1.2.1.5. Jednostka temperatury — Kelvin (K)**, określona i przyjęta przez X Generalną Konferencję Miar w r. 1954. Opiera się na cyklu Carnota, którego przebieg oraz wydajność nie zależy od rodzaju użytego do obiegu gazu. Z wzoru na wydajność tego cyklu wynika, iż temperatura drugiego zbiornika (zimniejszego) może być określona przez pomiar wydajności tego cyklu oraz dowolnie (umownie) przyjętej temperatury  $T_1$  pierwszego zbiornika ciepła. Mianowicie

$$T_2 = \frac{T_1}{1-\eta}. \quad (1.15)$$

Temperaturę  $T_1$  przyjęto umownie.

*Kelvin jest jednostką termodynamicznej skali temperatur Kelvina, w której temperaturze potrójnego punktu wody przyporządkowano dokładnie wartość 273,16 K.*

**1.2.1.6. Jednostka światłości — kandela (cd)**, określona przez IX Generalną Konferencję Miar w r. 1948.

*Kandela (cd) jest światłością, którą w kierunku prostopadłym ma pole równe jednej sześćsettyśięczonej części metra kwadratowego powierzchni ciała doskonale czarnego, promieniującego w temperaturze krzepnięcia platyny pod ciśnieniem jednej atmosfery fizycznej.*

Temperatura krzepnięcia platyny w tych warunkach wynosi 2046,66 K.

## 1.2.2. Jednostki uzupełniające

Są to jednostki nie zaaprobowane przez Generalną Konferencję Miar ale dopuszczone przejściowo do stosowania jako legajne.

### 1.2.2.1. Jednostka kąta płaskiego — radian (rad)

*Radian jest kątem płaskim o wierzchołku w środku koła, wycinającym z obwodu tego koła łuk o długości równej promieniowi.*

### 1.2.2.2. Jednostka kąta bryłowego — steradian (sr)

*Steradian jest kątem bryłowym o wierzchołku w środku kuli, wycinającym z powierzchni tej kuli pole równe kwadratowi jej promienia.*

### 1.2.2.3. Jednostka ilości materii — mol

*Mol jest ilością materii zawierającą liczbę cząsteczek (albo atomów) równą liczbie atomów zawartych w masie 0,012 kg czystego izotopu węgla  $^{12}_6\text{C}$ .*

### 1.2.3. Wielokrotności i podwielokrotności jednostek

Do tworzenia jednostek<sup>1</sup> wielokrotnie większych lub mniejszych od danej jednostki (z wyjątkiem, jak wspomniałem powyżej, kilograma) używa się przedrostków, które podano w poniższej tabelce.

Nazwa przedrostka	Symbol	Mnożnik	Nazwa przedrostka	Symbol	Mnożnik
tera	T	$10^{12}$	centy	c	$10^{-2}$
giga	G	$10^9$	mili	m	$10^{-3}$
mega	M	$10^6$	mikro	$\mu$	$10^{-6}$
kilo	k	$10^3$	nano	n	$10^{-9}$
hekto	h	$10^2$	piko	p	$10^{-12}$
deka	da	$10^1$	femto	f	$10^{-15}$
decy	d	$10^{-1}$	atto	a	$10^{-18}$

### 1.2.4. Symbole wielkości fizycznych

#### Symbole w fizyce klasycznej

ciepło przemiany	$L$	gęstość strumienia ciepłego	$q$
ciepło właściwe	$c, c_v, c_p$	grubość, średnica	$d$
ciężar właściwy	$\gamma$	ilość ciepła	$Q$
ciśnienie	$p$	ilość światła	$Q$
ciśnienie barometryczne	$b$	indukcja elektryczna	$D$
czas	$t$	indukcja magnetyczna	$B$
częstotliwość	$f, \nu$	indukcyjność własna	$L$
częstotliwość kątowna	$\omega$	indukcyjność wzajemna	$M, L_{12}$
długość	$l$	jaskrawość, luminancja	$L$
długość drogi, łuk	$s$	kręt	$b, L, K$
długość fali	$\lambda$	lepkość dynamiczna	$\eta$
emitancja światła	$M$	liczba falowa	$\sigma, (\tau)$
energia	$E, W$	liczba obrotów	$n$
energia promieniowania	$Q$	ładunek elektryczny	$Q$
energia swobodna	$F$	ładunek elektryczny elementarny	$e$
energia wewnętrzna	$U$	magnetyzacja, polaryzacja	
entalpia	$M$	magnetyczna	$J$
entropia	$S$	masa	$m$
entropia właściwa	$s$	masa właściwa, gęstość	$\rho$
gęstość energii promieniowania	$w$	moc	$P$
gęstość powierzchniowa natężenia promieniowania	$L$	moc promieniowania	$\Phi$
gęstość prądu elektrycznego	$J$	moduł sztywności	$G$
		moduł ściśliwości	$K$

moduł Younga	$E$	prędkość liniowa	$v, u, w, c$
moduł bezwładności	$J, I$	promień	$r$
moment dipolowy	$p$	przenikalność dielektryczna	$\epsilon$
moment siły, ścinający	$M$	przenikalność dielektryczna próżni	$\epsilon_0$
napięcie elektryczne	$U$	przenikalność magnetyczna	$\mu$
napięcie magnetyczne	$U_m$	przenikalność magnetyczna	
napięcie powierzchniowe	$\sigma$	próżni	$\mu_0$
naprężenie normalne	$\sigma$	przewodnictwo	$\lambda$
naprężenie styczne	$\tau$	przewodnictwo temperaturowe	$a$
naświetlenie	$Q, H$	przewodność elektryczna bierna	$B$
natężenie napromieniowania	$E$	przewodność elektryczna czynna,	$G$
natężenie oświetlenia	$E$	przewodność magnetyczna	$G_m$
natężenie pola elektrycznego	$E$	przewodność pozorna	$Y$
natężenie pola magnetycznego	$H$	przyspieszenie kątowe	$e$
natężenie prądu elektrycznego	$I$	przyspieszenie liniowe	$a$
natężenie promieniowania	$I$	przyspieszenie ziemskie	$g$
objętość	$V$	siła	$F, P, Q, R$
objętość właściwa	$v$	siła elektromotoryczna	$E$
okres	$T$	siła magnetomotoryczna	$F_m$
oporność	$R$	stała grawitacji	$G$
opór bierny	$X$	strumień indukcji elektrycznej	$\Psi$
opór magnetyczny	$R_m$	strumień indukcji magnetycznej	$\Phi$
opór pozorny	$Z$	strumień świetlny	$\Phi$
opór właściwy	$\rho$	szerokość	$b$
pęd masy	$p$	światłość, natężenie światła	$I$
pojemność cieplna	$c$	temperatura	$t$
pojemność elektryczna	$C$	temperatura bezwzględna	$T$
polaryzacja elektryczna	$P$	współczynnik rozprężliwości	$\beta$
pole powierzchni	$S, A$	współczynnik rozszerzalności	
popęd siły	$\Pi$	liniowej	$\alpha$
potencjał elektryczny	$V$	współczynnik rozszerzalności	
potencjał termodynamiczny	$G$	objętościowej	$\gamma$
praca	$W, A, L$	współczynnik załamania światła	$n$
prędkość fali	$c$	wysokość	$h$

### Symbole w fizyce atomowej i jądrowej

ciśnienie cząsteczkowe składnika $x$	$p_x$	objętość molowa	$V_m$
ciśnienie osmotyczne	$\pi$	powinowactwo chemiczne	$A$
ilość materii	$n$	przewodność elektrolityczna	$\gamma, \sigma$
liczba cząsteczek	$N$	przewodność molowa	$\Lambda_m$
względna masa atomowa	$A_r$	przewodność równoważnikowa	$\Lambda$
masa cząsteczki	$m$	stała Avogadra	$N, L$
masa względna cząsteczkowa	$M_r$	stała Boltzmanna	$k$
masa molowa	$M$	molowa stała gazów	$R$
molarność	$m$	współczynnik dyfuzji	$D$

### 1.3. JEDNOSTKI I ICH ZWIĄZKI (W MECHANICE)

W mechanice stosowane są od lat trzy układy jednostek: układ MKS, identyczny w tym dziale fizyki z układem SI, układ CGS oraz układ techniczny T. Podajemy więc zestawienie jednostek we wszystkich trzech układach.

#### 1.3.1. Układ SI

Wielkość	Jednostka	Liczba wymiarowa
Jednostki podstawowe		
długość	metr (m)	[l]
masa	kilogram (kg)	[m]
czas	sekunda (s)	[t]
Jednostki uzupełniające		
kąt płaski	radian (rad)	[l <sup>0</sup> m <sup>0</sup> t <sup>0</sup> ]
kąt bryłowy	steradian (sr)	[l <sup>0</sup> m <sup>0</sup> t <sup>0</sup> ]
Jednostki pochodne		
ciężar właściwy	niuton na metr sześcienny (N/m <sup>3</sup> )(kg·m <sup>-2</sup> ·s <sup>-2</sup> )	[l <sup>-2</sup> m <sup>1</sup> t <sup>-2</sup> ]
ciśnienie	niuton na metr kwadratowy paskal (N/m <sup>2</sup> )(kg·m <sup>-1</sup> ·s <sup>-2</sup> )	[l <sup>-1</sup> m <sup>1</sup> t <sup>-2</sup> ]
częstotliwość	herc (Hz)(s <sup>-1</sup> )	[l <sup>0</sup> m <sup>0</sup> t <sup>-1</sup> ]
działanie	dżul razy sekunda (J·s)(kg·m <sup>2</sup> ·s <sup>-1</sup> )	[l <sup>2</sup> m <sup>1</sup> t <sup>-1</sup> ]
kręt (moment pędu)	(kg·m <sup>2</sup> ·s <sup>-1</sup> )	[l <sup>2</sup> m <sup>1</sup> t <sup>-1</sup> ]
lepkość (współczynnik lepkości)	(kg·m <sup>-1</sup> ·s <sup>-1</sup> )	[l <sup>-1</sup> m <sup>1</sup> t <sup>-1</sup> ]
liczba falowa	liczba fal na metr (m <sup>-1</sup> )	[l <sup>-1</sup> m <sup>0</sup> t <sup>0</sup> ]
masa właściwa (gęstość)	kilogram na metr sześcienny (kg·m <sup>-3</sup> )	[l <sup>-3</sup> m <sup>2</sup> t <sup>0</sup> ]
moc	wat (W)(kg·m <sup>2</sup> ·s <sup>-3</sup> )	[l <sup>2</sup> m <sup>1</sup> t <sup>-3</sup> ]
moment bezwładności	(kg·m <sup>2</sup> )	[l <sup>2</sup> m <sup>1</sup> t <sup>0</sup> ]
moment siły	niuton razy metr (kg·m <sup>2</sup> ·s <sup>-2</sup> )	[l <sup>2</sup> m <sup>1</sup> t <sup>-2</sup> ]
objętość	metr sześcienny (m <sup>3</sup> )	[l <sup>3</sup> m <sup>0</sup> t <sup>0</sup> ]

Wielkość	Jednostka	Liczba wymiarowa
objętość właściwa	metr sześcienny na kilogram ( $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ )	$[\text{L}^3 \text{m}^{-1} \text{t}^0]$
pęd	( $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	$[\text{L}^1 \text{m}^1 \text{t}^{-1}]$
pole	metr kwadratowy ( $\text{m}^2$ )	$[\text{L}^2 \text{m}^0 \text{t}^0]$
praca, energia	dżul (J)( $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ )	$[\text{L}^2 \text{m}^1 \text{t}^{-2}]$
prędkość	metr na sekundę ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	$[\text{L}^1 \text{m}^0 \text{t}^{-1}]$
prędkość kątowna	radian na sekundę ( $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ )	$[\text{L}^0 \text{m}^0 \text{t}^{-1}]$
przyspieszenie	metr na kwadrat sekundy ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )	$[\text{L}^1 \text{m}^0 \text{t}^{-2}]$
przyspieszenie kątowe	radian na kwadrat sekundy ( $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$ )	$[\text{L}^0 \text{m}^0 \text{t}^{-2}]$
siła	niuton (N)( $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )	$[\text{L}^1 \text{m}^1 \text{t}^{-2}]$

### 1.3.2. Układ CGS

Wielkość	Jednostka	Liczba wymiarowa
Jednostki podstawowe		
długość	centymetr (cm)	[l]
masa	gram (g)	[m]
czas	sekunda (s)	[t]
Jednostki uzupełniające		
kąt płaski	radian (rad)	$[\text{L}^0 \text{m}^0 \text{t}^0]$
kąt bryłowy	steradian (sr)	$[\text{L}^0 \text{m}^0 \text{t}^0]$
Jednostki pochodne		
ciężar właściwy	dyna na centymetr sześcienny ( $\text{g} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$ )	$[\text{L}^{-2} \text{m}^1 \text{t}^{-2}]$
ciśnienie	mikrobar ( $\mu\text{bar}$ ) (dyna na centymetr kwadratowy) ( $\text{g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ )	$[\text{L}^{-1} \text{m}^1 \text{t}^{-2}]$
częstotliwość	herc ( $\text{s}^{-1}$ )	$[\text{L}^0 \text{m}^0 \text{t}^{-1}]$
działanie	erg razy sekunda ( $\text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )	$[\text{L}^2 \text{m}^1 \text{t}^{-1}]$

Wielkość	Jednostka	Liczba wymiarowa
kręt (moment pędu)	$(g \cdot cm^2 \cdot s^{-1})$	$[l^2 m^1 t^{-1}]$
lepkość (współczynnik lepkości)	puaz $(g \cdot cm^{-1} \cdot s^{-1})$	$[l^{-1} m^1 t^{-1}]$
liczba falowa	ilość fal na centymetr $(cm^{-1})$	$[l^{-1} m^0 t^0]$
masa właściwa (gęstość)	gram na centymetr sześcienny $(g \cdot cm^{-3})$	$[l^{-3} m^1 t^0]$
moc	erg na sekundę $(g \cdot cm^2 \cdot s^{-3})$	$[l^2 m^1 t^{-3}]$
moment bezwładności	$(g \cdot cm^2)$	$[l^2 m^1 t^0]$
moment siły	dyna razy centymetr $(g \cdot cm^2 \cdot s^{-2})$	$[l^2 m^1 t^{-2}]$
objętość	centymetr sześcienny $(cm^3)$	$[l^3 m^0 t^0]$
objętość właściwa	centymetr sześcienny na gram $(cm^3 \cdot g^{-1})$	$[l^3 m^{-1} t^0]$
pęd	$(g \cdot cm \cdot s^{-1})$	$[l^1 m^1 t^{-1}]$
pole	centymetr kwadratowy $(cm^2)$	$[l^2 m^0 t^0]$
praca, energia	erg $(g \cdot cm^2 \cdot s^{-2})$	$[l^2 m^1 t^{-2}]$
prędkość	cel (centymetr na sekundę) $(cm \cdot s^{-1})$	$[l^1 m^0 t^{-1}]$
prędkość kątowna	radian na sekundę $(rad \cdot s^{-1})$	$[l^0 m^0 t^{-1}]$
przyspieszenie	gal (centymetr na kwadrat sekundy) $(cm \cdot s^{-2})$	$[l^1 m^0 t^{-2}]$
przyspieszenie kątowe	radian na kwadrat sekundy $(rad \cdot s^{-2})$	$[l^0 m^0 t^{-2}]$
siła	dyna $(g \cdot cm \cdot s^{-2})$	$[l^1 m^1 t^{-2}]$

### 1.3.3. Układ techniczny (ciężarowy) (T)

Wielkość	Jednostka	Liczba wymiarowa
Jednostki podstawowe		
długość	metr (m)	[l]
siła	kilogram-siła (kG) jest to siła, z jaką masa jednego kilograma ciąży ku Ziemi w próżni w miejscu, gdzie przyspieszenie ziemskie wynosi $g_n = 9,80665 m \cdot s^{-2}$ (przyspieszenie normalne)	[f]
czas	sekunda (s)	[t]



Wielkość	Jednostka	Liczba wymiarowa
Jednostki uzupełniające		
kąt płaski	radian (rad)	$[l^0 f^0 t^0]$
kąt bryłowy	steradian (sr)	$[l^0 f^0 t^0]$
Jednostki pochodne		
ciężar właściwy	kilogram-siła na metr sześcienny ( $kG \cdot m^{-3}$ )	$[l^{-3} f^1 t^0]$
ciśnienie	kilogram-siła na metr kwadratowy ( $kG \cdot m^{-2}$ )	$[l^{-2} f^1 t^0]$
częstotliwość	herc ( $s^{-1}$ )	$[l^0 f^0 t^{-1}]$
działanie	( $kG \cdot m \cdot s$ )	$[l^1 f^1 t^1]$
kręt (moment pędu)	( $kG \cdot m \cdot s$ )	$[l^1 f^1 t^1]$
lepkość (współczynnik lepkości)	( $kG \cdot m^{-2} \cdot s$ )	$[l^{-2} f^1 t^1]$
liczba falowa	ilość fal na metr ( $m^{-1}$ )	$[l^{-1} f^0 t^0]$
masa	( $kG \cdot m^{-1} \cdot s^2$ )	$[l^{-1} f^1 t^2]$
masa właściwa (gęstość)	( $kG \cdot m^{-4} \cdot s^2$ )	$[l^{-4} f^1 t^2]$
moc	kilogramometr na sekundę ( $kGm \cdot s^{-1}$ )	$[l^1 f^1 t^{-1}]$
moment bezwładności	( $kGm \cdot s^2$ )	$[l^1 f^1 t^2]$
moment siły	kilogramometr (kGm)	$[l^1 f^1 t^0]$
objętość	metr sześcienny ( $m^3$ )	$[l^3 f^0 t^0]$
objętość właściwa	metr sześcienny na jednostkę masy ( $m^2 \cdot kG^{-1} \cdot s^2$ )	$[l^2 f^{-1} t^2]$
pęd	kilogram-siła razy sekunda ( $kG \cdot s$ )	$[l^0 f^1 t^1]$
pole	metr kwadratowy ( $m^2$ )	$[l^2 f^0 t^0]$
praca, energia	kilogramometr (kGm)	$[l^1 f^1 t^0]$
prędkość	metr na sekundę ( $m \cdot s^{-1}$ )	$[l^1 f^0 t^{-1}]$
prędkość kątowna	radian na sekundę ( $rad \cdot s^{-1}$ )	$[l^1 f^0 t^{-1}]$
przyspieszenie	metr na kwadrat sekundy ( $m \cdot s^{-2}$ )	$[l^1 f^0 t^{-2}]$
przyspieszenie kątowe	radian na kwadrat sekundy ( $rad \cdot s^{-2}$ )	$[l^1 f^0 t^{-2}]$



**1.4. ZESTAWIENIE ODPOWIADAJĄCYCH SOBIE WZORÓW I JEDNOSTEK W KINEMATYCE I DYNAMICE RUCHU POSTĘPOWEGO I OBROTOWEGO W UKŁADZIE SI**

Kinematyka			
Ruch postępowy	Jednostka lub odpowiedni wzór	Ruch obrotowy	Jednostka lub odpowiedni wzór
przemieszczenie, droga	$s$ (m)	kąt obrotu	$\alpha$ [rad]
prędkość liniowa	$v = ds/dt$ (m/s)	prędkość kątowna	$\omega = d\alpha/dt$ [rad/s]
droga przebyta ruchem jednostajnym w czasie $t$	$s = s_0 + vt$	kąt zakreślony ruchem jednostajnym obrotowym w czasie $t$	$\alpha = \alpha_0 + \omega t$
przyspieszenie liniowe	$a = dv/dt$ (m/s <sup>-2</sup> )	przyspieszenie kątowe	$\epsilon = d\omega/dt$ [rad/s <sup>2</sup> ]
droga przebyta ruchem jednostajnie zmiennym w czasie $t$	$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	kąt zakreślony ruchem jednostajnie zmiennym w czasie $t$	$\alpha = \omega_0 t + \frac{1}{2} \epsilon t^2$
Dynamika			
siła	$F = ma = dp/dt$ niuton (N)	moment siły	$M = Fr = I\epsilon = db/dt$ niuton × metr
masa	$m$ (kg)	moment bezwładności	$J$ (kg·m <sup>2</sup> )
pęd	$p = mv$ (kg·m·s <sup>-1</sup> )	moment pędu (krętu)	$b = J\omega = pr = mvr$
zasada zachowania pędu	$p = \text{constans}$	zasada zachowania krętu	$b = \text{constans}$
energia kinetyczna	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$ (J-dżuli)	energia kinetyczna	$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$
zasadnicze równanie ruchu postępowego	$F = dp/dt$ $F dt = dp = \Pi$	zasadnicze równanie ruchu obrotowego	$M = J\epsilon = db/dt$
praca	$W = Fs$ (J-dżuli)	praca	$W = M\alpha$ (J-dżuli)
moc	$P = W/t$ (W-watów)	moc	$P = M\epsilon$ (W-watów)

## 1.5. MIARY WIELKOŚCI MECHANICZNYCH

### Metryczne miary długości

terametr (Tm) = $10^{12}$ m = $10^{14}$ cm	milimetr (mm) = $10^{-3}$ m = $10^{-1}$ cm
gigametr (Gm) = $10^9$ m = $10^{11}$ cm	mikrometr ( $\mu\text{m}$ ) = $10^{-6}$ m = $10^{-4}$ cm
megametr (Mm) = $10^6$ m = $10^8$ cm	nanometr (nm) = $10^{-9}$ m = $10^{-7}$ cm
kilometr (km) = $10^3$ m = $10^5$ cm	angstrom ( $\text{\AA}$ ) = $10^{-10}$ m = $10^{-8}$ cm
hektometr (hm) = $10^2$ m = $10^4$ cm	pikometr (pm) = $10^{-12}$ m = $10^{-10}$ cm
dekametr (dam) = $10^1$ m = $10^3$ cm	jednostka X = $10^{-13}$ m = $10^{-11}$ cm
metr (m) = $10^0$ m = $10^2$ cm	femtometr (fm) = $10^{-15}$ m = $10^{-13}$ cm
decymetr (dm) = $10^{-1}$ m = $10^1$ cm	attometr (am) = $10^{-18}$ m = $10^{-16}$ cm
centymetr (cm) = $10^{-2}$ m = $10^0$ cm	

### Miary kąta płaskiego

stopień stary	= 1/360 części kąta pełnego	= 1/90 części kąta prostego =
	= 60' (minut starych)	= 3600'' (sekund starych)
	= $1,745329 \cdot 10^{-1}$ radianów (rad)	= 1,111111 stopni nowych =
	= 111,1111 minut nowych	= 11111,11 sekund nowych
stopień nowy (grad)	= 1/400 części kąta pełnego	= 1/100 część kąta prostego =
	= 100 minut nowych	= 10000 sekund nowych =
	= 0,9000000 stopni starych	= $1,570796 \cdot 10^{-2}$ radianów (rad)
radian	= $57,29578^\circ$ stopni starych	= 63,661914 stopni nowych =
	= 3437,74680' minut starych	= 206264,808'' sekund starych
minuta stara	= 1/60 części stopnia starego	= 60'' sekund starych =
	= $2,908882 \cdot 10^{-4}$ radianów	= 1,851851 minut nowych
sekunda stara	= 1/60 części minuty starej	= 3,086419 sekund nowych

### Metryczne miary pola

kilometr kwadratowy ( $\text{km}^2$ )	= $10^6$ m <sup>2</sup> = $10^{10}$ cm <sup>2</sup>
hektar (ha)	= $10^4$ m <sup>2</sup> = $10^8$ cm <sup>2</sup>
ar (a)	= $10^2$ m <sup>2</sup> = $10^6$ cm <sup>2</sup>
metr kwadratowy (m <sup>2</sup> )	= $10^0$ m <sup>2</sup> = $10^4$ cm <sup>2</sup>
decymetr kwadratowy (dm <sup>2</sup> )	= $10^{-2}$ m <sup>2</sup> = $10^2$ cm <sup>2</sup>
centymetr kwadratowy (cm <sup>2</sup> )	= $10^{-4}$ m <sup>2</sup> = $10^0$ cm <sup>2</sup>
milimetr kwadratowy (mm <sup>2</sup> )	= $10^{-6}$ m <sup>2</sup> = $10^{-2}$ cm <sup>2</sup>
barn (jednostka używana w nukleonice)	= $10^{-28}$ m <sup>2</sup> = $10^{-24}$ cm <sup>2</sup>

## Metryczne miary objętości

kilometr sześcienny (km <sup>3</sup> )	= 10 <sup>9</sup> m <sup>3</sup> = 10 <sup>15</sup> cm <sup>3</sup>
hektometr „ (hm <sup>3</sup> )	= 10 <sup>6</sup> m <sup>3</sup> = 10 <sup>12</sup> cm <sup>3</sup>
dekametr „ (dam <sup>3</sup> )	= 10 <sup>3</sup> m <sup>3</sup> = 10 <sup>9</sup> cm <sup>3</sup>
metr „ (m <sup>3</sup> )	= 10 <sup>0</sup> m <sup>3</sup> = 10 <sup>6</sup> cm <sup>3</sup>
decymetr „ (dm <sup>3</sup> )	= 10 <sup>-3</sup> m <sup>3</sup> = 10 <sup>3</sup> cm <sup>3</sup>
centymetr „ (cm <sup>3</sup> )	= 10 <sup>-6</sup> m <sup>3</sup> = 10 <sup>0</sup> cm <sup>3</sup>
milimetr „ (mm <sup>3</sup> )	= 10 <sup>-9</sup> m <sup>3</sup> = 10 <sup>-3</sup> cm <sup>3</sup>

hektolitr (hl) = 10 <sup>2</sup> litrów (l)	centylitr (cl) = 10 <sup>-2</sup> litrów (l)
dekalitr (dal) = 10 <sup>1</sup> litrów (l)	mililitr (ml) = 10 <sup>-3</sup> litrów (l)
litr (l) = 10 <sup>0</sup> litrów (l)	mikrolitr (μl) = 10 <sup>-6</sup> litrów (l)
decylitr (dl) = 10 <sup>-1</sup> litrów (l)	

$$1 \text{ litr} = 1,000028 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 0,999972 \text{ l}$$

## Metryczne miary masy

tona (t) = 10 <sup>3</sup> kg = 10 <sup>6</sup> g	gram (g) = 10 <sup>-3</sup> kg = 10 <sup>0</sup> g
kwintal (cetnar metryczny q) = 10 <sup>2</sup> kg = 10 <sup>5</sup> g	decygram (dg) = 10 <sup>-4</sup> kg = 10 <sup>-1</sup> g
kilogram (kg) = 10 <sup>0</sup> kg = 10 <sup>3</sup> g	centygram (cg) = 10 <sup>-5</sup> kg = 10 <sup>-2</sup> g
hektogram (hg) = 10 <sup>-1</sup> kg = 10 <sup>2</sup> g	miligram (mg) = 10 <sup>-6</sup> kg = 10 <sup>-3</sup> g
dekagram (dag) = 10 <sup>-2</sup> kg = 10 <sup>0</sup> g	mikrogram (μg) = 10 <sup>-9</sup> kg = 10 <sup>-6</sup> g

## Miary czasu

$$\text{rok zwrotnikowy (1900)} = 31\,556\,925,9747 \text{ s} = 525\,948,7662 \text{ minut (min)} = \\ = 8765,8128 \text{ godzin (h)} = 365,2422 \text{ dób (d)},$$

$$\text{doba średnia (d)} = 24 \text{ godziny średnie (h)} = 1440 \text{ minut średnich (min)} = \\ = 86400 \text{ sekund (s)},$$

$$\text{godzina średnia (h)} = 60 \text{ minut średnich (min)} = 3600 \text{ sekund (s)}.$$

## Miary częstotliwości

$$\text{megaherc (MHz; megacykl na sekundę)} = 10^3 \text{ kHz (kiloherców)} = 10^6 \text{ Hz (herców)},$$

$$\text{kiloherc (kHz; kilocykl na sekundę)} = 10^3 \text{ Hz (herców)},$$

herc (Hz) = cykl na sekundę jest częstotliwością zjawiska, które powtarza się cyklicznie co sekundę.

### Miary prędkości

	km/h	m/s	cm/s
km/h	1	0,2778	27,78
m/s	3,6	1	100
cm/s	0,036	0,01	1

### Miary przyspieszenia

	cm/s <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>	km/s·h
cm/s <sup>2</sup>	1	10 <sup>-2</sup>	0,036
m/s <sup>2</sup>	10 <sup>2</sup>	1	3,6
km/s·h	27,78	0,2778	1

### Miary prędkości kątowej

	stopień/s	rad/s	obrót/s	obrót/min	obrót/h
stopień/s	1	$1,745 \cdot 10^{-2}$	$28,9 \cdot 10^{-4}$	0,167	10
rad/s	57,296	1	0,1591	9,551	573,1
obrót/s	360	6,283	1	60	3600
obrót/min	6	0,0147	0,0167	1	60
obrót/h	10 <sup>-1</sup>	$1,745 \cdot 10^{-3}$	$28,9 \cdot 10^{-5}$	0,0167	1

## Miary siły

(Przyjęto na przyspieszenie ziemskie wartość  $g = 980,665 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ )

	dyna	niuton	kilogram-siła (kG)	megadyna	sten	gram-siła (G)
dyna	1	$10^{-5}$	$1,019716 \cdot 10^{-6}$	$10^{-8}$	$10^{-8}$	$1,019716 \cdot 10^{-3}$
niuton	$10^5$	1	0,1019716	$10^{-1}$	$10^{-3}$	101,9716
kilogram-siła	980 665	9,80665	1	0,980665	$0,980665 \cdot 10^{-2}$	1000
megadyna	$10^6$	10	1,019716	1	$10^{-2}$	1019,716
sten	$10^8$	$10^3$	101,9716	$10^2$	1	101971,6
gram-siła	980,665	$980,665 \cdot 10^{-5}$	$10^{-3}$	$980,665 \cdot 10^{-6}$	$980,665 \cdot 10^{-8}$	1

## Miary mocy

	erg/s	W	kG·m/s	cal <sub>16</sub> /s	KM	kW
erg na sekundę	1	$10^{-7}$	$1,020 \cdot 10^{-8}$	$2,389 \cdot 10^{-8}$	$1,360 \cdot 10^{-10}$	$10^{-10}$
wat (W)	$10^7$	1	0,1020	0,2389	$1,360 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$
kilogramometr na sekundę	$9,807 \cdot 10^7$	9,807	1	2,343	$1,333 \cdot 10^{-2}$	$9,807 \cdot 10^{-3}$
kaloria (cal) 15-stopniowa na s	$4,185 \cdot 10^7$	4,185	0,427	1	$5,692 \cdot 10^{-3}$	$4,185 \cdot 10^{-3}$
koń mechaniczny (KM)	$7,355 \cdot 10^8$	735,5	75	175,5	1	0,7355
kilowat (kW)	$10^{10}$	$10^3$	102,0	238,9	1,3596	1

*Erg na sekundę* — moc układu mogącego wykonać w każdej sekundzie pracę równą jednemu ergowi. *Wat* — moc układu mogącego wykonać w każdej sekundzie pracę równą jednemu dżulowi. *Kilogramometr na sekundę* — moc układu mogącego wykonać w każdej sekundzie pracę równą jednemu kilogramometrowi. *Koń mechaniczny* — moc układu mogącego wykonać w każdej sekundzie pracę równą siedemdziesięciu pięciu kilogramometrom. *Kaloria piętnastostopniowa na sekundę* — moc układu mogącego wykonać w każdej sekundzie pracę równoważną kalorii piętnastostopniowej.

## Miary ciśnienia

(Przyjęto w obliczeniach wartości  $g = 980,665 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $\rho_{\text{Hg}} = 13,5951 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ,

	mikrobar (dyna/cm <sup>2</sup> )	N/m <sup>2</sup> (paskal)	kG/m <sup>2</sup>	milibar
mikrobar	1	0,1	$1,0197 \cdot 10^{-2}$	$10^{-3}$
N/m <sup>2</sup>	10	1	0,10197	0,01
kilogram-siła na metr kwadratowy	98,0665	9,80665	1	$98,0665 \cdot 10^{-3}$
milibar	$10^3$	100	10,197	1
bar	$10^6$	$10^5$	$1,0197 \cdot 10^4$	$10^3$
atmosfera fizyczna (atm)	$1,013 \cdot 10^6$	$1,013 \cdot 10^5$	$1,033 \cdot 10^4$	$1,013 \cdot 10^3$
atmosfera techniczna (at)	$9,807 \cdot 10^5$	$9,807 \cdot 10^4$	$10^4$	980,665
cmHg	$1,333 \cdot 10^4$	$1,333 \cdot 10^3$	136,0	13,33
cmH <sub>2</sub> O	$9,807 \cdot 10^2$	90,0665	10	$98,0665 \cdot 10^{-3}$

## Miary pracy i energii

	erg	dżul	kilogramo- metr (kGm)	elektronowolt (eV)
erg	1	$10^{-7}$	$1,020 \cdot 10^{-8}$	$6,243 \cdot 10^{11}$
dżul	$10^7$	1	0,1020	$6,243 \cdot 10^{18}$
kilogramometr	$9,807 \cdot 10^7$	9,80665	1	$6,122 \cdot 10^{19}$
elektronowolt	$1,602 \cdot 10^{-12}$	$1,602 \cdot 10^{-19}$	$1,633 \cdot 10^{-20}$	1
megaelektronowolt	$1,602 \cdot 10^{-6}$	$1,602 \cdot 10^{-13}$	$1,633 \cdot 10^{-14}$	$10^6$
kaloria 15-stopniowa	$4,186 \cdot 10^7$	4,186	0,4268	$2,613 \cdot 10^{19}$
kilokaloria 15-stopniowa	$4,186 \cdot 10^{10}$	$4,186 \cdot 10^3$	426,8	$2,613 \cdot 10^{22}$
litroatmosfera fizyczna	$1,013 \cdot 10^9$	101,3	10,33	$6,323 \cdot 10^{20}$
kilowatogodzina	$3,6 \cdot 10^{13}$	$3,6 \cdot 10^6$	$3,672 \cdot 10^5$	$2,247 \cdot 10^{25}$
gram masy	$8,987 \cdot 10^{20}$	$8,987 \cdot 10^{13}$	$9,164 \cdot 10^{12}$	$5,61 \cdot 10^{32}$

*Erg* — praca wykonana przez siłę jednej dyny przy przesunięciu ciała o jeden centymetr w kierunku działania siły. *Dżul* — praca wykonana przez siłę jednego niutona przy przesunięciu ciała o jeden metr w kierunku działania siły. *Kilogramometr* — praca wykonana przez siłę jednego kilograma przy przesunięciu ciała o jeden metr w kierunku działania siły. *Elektronowolt* — praca wykonana przez siłę pola elektrycznego nad elektronem podczas przebiecia przez niego różnicy potencjałów równej jednemu woltowi. *Kaloria piętnasto-stopniowa* — ilość ciepła potrzebna do ogrzania jednego grama wody od 14,5°C do 15,5°C.



$$\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1,0000 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

bar	atmosfera fizyczna = 760 mmHg = 760 Tr	atmosfera techniczna = kG/cm <sup>2</sup>	centymetr rtęci = 1 cmHg	centymetr wody = 1 cmH <sub>2</sub> O
10 <sup>-6</sup>	9,869 · 10 <sup>-7</sup>	1,0197 · 10 <sup>-6</sup>	75,006 · 10 <sup>-6</sup>	1,0197 · 10 <sup>-3</sup>
10 <sup>-5</sup>	9,869 · 10 <sup>-6</sup>	1,0197 · 10 <sup>-5</sup>	75,006 · 10 <sup>-5</sup>	1,0197 · 10 <sup>-2</sup>
98,0665 · 10 <sup>-6</sup>	0,9678 · 10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-4</sup>	73,556 · 10 <sup>-4</sup>	0,1
10 <sup>-3</sup>	9,869 · 10 <sup>-4</sup>	1,0197 · 10 <sup>-3</sup>	75,006 · 10 <sup>-3</sup>	1,0197
1	0,9869	1,0197	75,006	1,0197 · 10 <sup>3</sup>
1,013	1	1,033	76	1,033 · 10 <sup>3</sup>
0,980665	0,9678	1	73,556	1000
13,33 · 10 <sup>-3</sup>	1,316 · 10 <sup>-2</sup>	1,360 · 10 <sup>-2</sup>	1	13,5951
98,07 · 10 <sup>-5</sup>	0,9678 · 10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-3</sup>	0,0736	1

MeV	cal 15°	kcal 15°	litroatmosfera fizyczna	kilowatogodzina	gram masy
6,243 · 10 <sup>5</sup>	2,389 · 10 <sup>-8</sup>	2,389 · 10 <sup>-11</sup>	9,869 · 10 <sup>-10</sup>	2,778 · 10 <sup>-14</sup>	1,113 · 10 <sup>-21</sup>
6,243 · 10 <sup>12</sup>	0,2389	2,389 · 10 <sup>-4</sup>	9,869 · 10 <sup>-3</sup>	2,778 · 10 <sup>-7</sup>	1,113 · 10 <sup>-14</sup>
6,122 · 10 <sup>13</sup>	2,343	2,343 · 10 <sup>-3</sup>	9,690 · 10 <sup>-2</sup>	2,724 · 10 <sup>-6</sup>	1,091 · 10 <sup>-13</sup>
10 <sup>-6</sup>	3,827 · 10 <sup>-20</sup>	3,827 · 10 <sup>-23</sup>	1,583 · 10 <sup>-21</sup>	4,450 · 10 <sup>-26</sup>	1,782 · 10 <sup>-33</sup>
1	3,827 · 10 <sup>-14</sup>	3,827 · 10 <sup>-17</sup>	1,583 · 10 <sup>-15</sup>	4,450 · 10 <sup>-20</sup>	1,782 · 10 <sup>-27</sup>
2,613 · 10 <sup>13</sup>	1	10 <sup>-3</sup>	4,131 · 10 <sup>-2</sup>	1,163 · 10 <sup>-6</sup>	4,658 · 10 <sup>-14</sup>
2,613 · 10 <sup>16</sup>	10 <sup>3</sup>	1	41,31	1,163 · 10 <sup>-3</sup>	4,658 · 10 <sup>-11</sup>
6,323 · 10 <sup>14</sup>	24,21	2,421 · 10 <sup>-3</sup>	1	2,814 · 10 <sup>-5</sup>	1,128 · 10 <sup>-12</sup>
2,247 · 10 <sup>19</sup>	8,6 · 10 <sup>5</sup>	860	3,557 · 10 <sup>4</sup>	1	4,007 · 10 <sup>-8</sup>
5,61 · 10 <sup>26</sup>	2,147 · 10 <sup>18</sup>	2,147 · 10 <sup>10</sup>	8,870 · 10 <sup>11</sup>	2,497 · 10 <sup>7</sup>	1

*Litroatmosfera fizyczna* — praca wykonana przez ciśnienie jednej atmosfery fizycznej przy zmianie objętości o jeden liter w warunkach normalnych. *Litroatmosfera techniczna* — praca wykonana przez ciśnienie jednej atmosfery technicznej przy zmianie objętości o jeden liter w warunkach normalnych. *Kilowatogodzina* — praca wykonana przez źródło mocy jednego kilowata w czasie jednej godziny. *Gram masy* — energia równoważna masie jednego grama.



## 1.6. JEDNOSTKI I MIARY WIELKOŚCI CIEPLNYCH

Wielkość	Jednostka	Skrót (wzór)
temperatura	kelwin stopień Celsjusza kelwin	K, °C
temperatura w stopniach Kelvina, a temperatura w stopniach Celsjusza		$T \text{ (K)} =$ $= (t + 273,16)^\circ \text{C}$
współczynnik rozszerzalności liniowej cieplnej ( $\alpha$ ), objętościowej ( $\gamma$ ), rozprężliwości ( $\beta$ )	jeden na kelwin	$\text{K}^{-1}$
ilość ciepła ( $Q$ )	dżul	J
ciepło właściwe ( $c$ )	dżul na kg. razy kelwin	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
ciepło przemiany ( $L$ )	dżul na kilogram	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$
współczynnik przewodzenia cieplnego (przewodność cieplna) ( $\lambda$ )	dżul na kelwin razy metr razy sekunda	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
entropia ( $S$ )	dżul na kelwin	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$
entropia właściwa ( $s$ )	dżul na kilogram razy kelwin	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
energia wewnętrzna ( $U$ ), entalpia ( $M$ ), energia swobodna ( $F$ ), potencjał termodynamiczny ( $G$ )	dżul	J

## 1.7. JEDNOSTKI ELEKTRYCZNOŚCI

### 1.7.1. Wstęp

1.7.1.1. Zagadnienie układów jednostek elektrycznych i magnetycznych to bardzo zawile zagadnienie. Różnie bowiem i niezależnie od siebie rozwijały się dziedziny elektryczności oraz magnetyzmu. Dopiero Maxwell opracował jednolitą teorię elektryczności oraz udowodnił istnienie fundamentalnego związku

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}, \quad (1.16)$$

gdzie  $\mu_0$  jest to tzw. przenikalność magnetyczna próżni,  $\varepsilon_0$  — przenikalność elektryczna próżni,  $c$  — prędkość światła w próżni.

Na związku tym opiera się budowa czterech zasadniczych układów jednostek w elektryczności i magnetyzmie.

**Układy CGS**, w których przyjmujemy  $c = 3 \cdot 10^{10}$  cm/s.

**Układ elektrostatyczny** otrzymujemy przyjmując  $\epsilon_0 = 1$  (liczba czysta), a więc

$$\mu_0 = 1/c^2 = 1/9 \cdot 10^{20} \text{ s}^2 \cdot \text{cm}^{-2}. \quad (1.17)$$

**Układ elektromagnetyczny** otrzymujemy przyjmując  $\mu_0 = 1$  (liczba czysta), a więc

$$\epsilon_0 = 1/c^2 = 1/9 \cdot 10^{20} \text{ s}^2 \cdot \text{cm}^{-2}. \quad (1.18)$$

**Układ SI**, w którym przyjmujemy  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \left( \frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} - \text{najbardziej potrzebne do rozwiązywania zadań} = \frac{\text{farad}}{\text{m}} \right). \quad (1.19)$$

Na  $\mu_0$  otrzymujemy

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = \frac{1}{\frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \cdot 9 \cdot 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

$$\left( \frac{\text{N}}{\text{A}^2} - \text{najbardziej potrzebne do rozwiązywania zadań} = \frac{\text{henr}}{\text{m}} \right). \quad (1.20)$$

Prawie w każdym podręczniku z fizyki dla szkół wyższych jest wyjaśnione, dlaczego na  $\epsilon_0$  przyjmuje się powyższą wartość.

**Układ Gaussa** polega na tym, że jednostki elektryczne przyjmuje się z układu ES CGS, a jednostki magnetyczne — z układu EM CGS.

**1.7.1.2.** Każdy z powyższych czterech układów może być zracjonalizowany lub niezracjonalizowany. Polega to na tym, że w prawie Coulomba dla elektryczności

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (1.21)$$

gdzie  $k$  przyjmuje różne wartości.

**W układzie niezracjonalizowanym**

$$k = 1/\epsilon_0 \text{ w próżni,}$$

$$k = 1/\epsilon\epsilon_0 \text{ w dielektryku o stałej dielektrycznej } \epsilon.$$

**W układzie zracjonalizowanym**

$$k = 1/4\pi\epsilon_0 \text{ w próżni,}$$

$$k = 1/4\pi\epsilon\epsilon_0 \text{ w dielektryku o stałej dielektrycznej } \epsilon.$$

Wartość  $4\pi$  znika lub pojawia się w różnych wzorach w zależności od tego, czy układ jest zrationalizowany czy niezrationalizowany. Należy więc bardzo uważać na to, w jakim układzie będziemy pisali wzory.

**1.7.1.3.** Proste doświadczenie fizyczne z płynącym prądem elektrycznym, powstałym z rozładowywania kondensatora o znanej pojemności, pozwala porównać jednostki elektryczności używane w układach elektrostatycznym oraz elektromagnetycznym. Doświadczenie to, opisane w wielu podręcznikach, wykazuje, że liczbowo jednostka natężenia prądu elektrycznego w układzie elektromagnetycznym jest „ $c$ ” razy, a więc  $3 \cdot 10^{10}$  razy większa od jednostki natężenia prądu elektrycznego w układzie elektrostatycznym. Taki sam stosunek zachodzi zatem pomiędzy jednostkami ładunku elektrycznego w obu układach.

Inne doświadczenie, oparte na definicji ampera w układzie SI wykazuje, że jednostka natężenia prądu elektrycznego w układzie SI jest 10 razy mniejsza od jednostki natężenia prądu elektrycznego w układzie elektromagnetycznym, a więc zarazem  $c/10$  razy, czyli  $3 \cdot 10^9$  razy większa od jednostki natężenia prądu elektrycznego w układzie elektrostatycznym. Dotyczy to również jednostki ładunku elektrycznego w tych układach. Na tych dwu doświadczeniach opierają się wszelkie związki pomiędzy jednostkami wielkości występujących w elektryczności oraz w magnetyzmie.

**1.7.1.4.** Jest sprawą dobrze znaną, że konsekwentne teoretyczne, a nawet doświadczalne opisanie zjawisk magnetostacyjnych jest bardzo trudne. Można by więc tę dziedzinę zupełnie pominąć i podobnie jak w książce R. Resnicka i D. Hallidaya, *Fizyka* t. II, PWN, Warszawa 1967, zacząć naukę o magnetyzmie w oparciu o wektor indukcji magnetycznej  $\mathbf{B}$ . W tym podręczniku pozostawimy jednak tradycyjny sposób ujęcia, a więc również i całą dziedzinę magnetostatyki.

**1.7.1.5.** Przy rozwiązywaniu zadań będziemy stosowali układ zrationalizowany SI, a gdy zajdzie potrzeba, układy niezrationalizowane ES oraz EM CGS.

## **1.7.2. Jednostki wielkości elektrycznych oraz ich związki w układach SI, ES CGS, EM CGS**

**Jednostka ładunku elektrycznego.** W układzie SI wynika ona z definicji natężenia prądu elektrycznego, nazywamy ją amperosekundą ( $A \cdot s$ )

lub kulombem (C). W układach ES CGS oraz EM CGS wyprowadzamy ją z definicji opartej na prawie Coulomba.

W poniższej tabelce podajemy prawo Coulomba oraz jednostki ładunku elektrycznego we wszystkich układach.

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$\epsilon_0 = 1$	$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \frac{s^2}{cm^2}$	$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{A^2 \cdot s^2}{N \cdot m^2} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{A^2 \cdot s^2}{N \cdot m^2}$
$F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \text{ dyn}$	$F = c^2 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \text{ dyn}$	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \text{ niutonów}$
<b>Jednostki</b>		
$[Q] = [\sqrt{Fr^2}] = g^{1/2} \cdot cm^{3/2} \cdot s^{-1}$	$[Q] = \left[ \sqrt{\frac{Fr}{c^2}} \right] = g^{1/2} \cdot cm^{1/2}$	$[Q] = [\sqrt{Fr^2 \epsilon_0}] = \sqrt{N \cdot m^2 \frac{A^2 \cdot s^2}{N \cdot m^2}} = A \cdot s = \text{kulomb (C)}$

Związki pomiędzy jednostkami ładunku elektrycznego w tych układach podane są w tabelce.

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	$3,33 \cdot 10^{-10} = 10/c$
jednostka elektromagnetyczna	$c = 3 \cdot 10^{10}$	1	10
amperosekunda (kulomb) jednostka układu SI	$3 \cdot 10^9 = c/10$	$10^{-1}$	1

We wszystkich tabelkach porównawczych będziemy przyjmowali  $c$  jako liczbę bezwymiarową i równą w przybliżeniu  $c = 3 \cdot 10^{10}$ .

Jednostka gęstości powierzchniowej ładunku elektrycznego określona jest na podstawie wzoru

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \quad (1.22)$$

obowiązującego w każdym układzie jednostek, gdzie  $dQ$  oznacza ładunek elektryczny rozmieszczony na powierzchni  $dS$

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
<b>Jednostki</b>		
$[\sigma] = \frac{g^{1/2} \cdot cm^{3/2} \cdot s^{-1}}{cm^2} =$ $= g^{1/2} \cdot cm^{-1/2} \cdot s^{-1}$	$[\sigma] = \frac{g^{1/2} \cdot cm^{1/2}}{cm^2} =$ $= g^{1/2} \cdot cm^{-3/2}$	$[\sigma] = \frac{A \cdot s}{m^2} = \frac{C}{m^2}$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	$3,33 \cdot 10^{-6}$
jednostka elektromagnetyczna	$c = 3 \cdot 10^{10}$	1	$10^5$
jednostka układu SI	$3 \cdot 10^5$	$10^{-5}$	1

$$\frac{A \cdot s}{m^2} = \frac{3 \cdot 10^9}{10^4} \text{ jednostek ES} = \frac{10^{-1}}{10^4} \text{ jednostek EM.}$$

**Jednostka gęstości objętościowej ładunku elektrycznego** określona jest we wszystkich układach jednostek na podstawie wzoru

$$q = \frac{dQ}{dV}, \quad (1.23)$$

gdzie  $dQ$  oznacza ładunek elektryczny zgromadzony w objętości  $dV$ .

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
<b>Jednostki</b>		
$[q] = \frac{g^{1/2} \cdot cm^{3/2} \cdot s^{-1}}{cm^3} =$ $= g^{1/2} \cdot cm^{-3/2} \cdot s^{-1}$	$[q] = \frac{g^{1/2} \cdot cm^{1/2}}{cm^3} =$ $= g^{1/2} \cdot cm^{-5/2}$	$[q] = \frac{A \cdot s}{m^3} = \frac{C}{m^3}$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	$3,33 \cdot 10^4$
jednostka elektromagnetyczna	$c = 3 \cdot 10^{10}$	1	$10^7$
jednostka układu SI	$3 \cdot 10^3$	$10^{-7}$	1

$$\frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^3} = \frac{3 \cdot 10^9}{10^6} \text{ jednostek ES} = \frac{10^{-1}}{10^6} \text{ jednostek EM}.$$

**Jednostka natężenia pola elektrycznego** określona jest we wszystkich układach jednostek na podstawie wzoru

$$E = \frac{F}{Q}. \quad (1.24)$$

Kierunek wektora  $E$  jest kierunkiem siły, której doznaje dodatni ładunek  $Q$  w danym miejscu. Dla określenia wartości natężenia pola elektrycznego w danym miejscu bierzemy pod uwagę tak mały dodatni ładunek punktowy próbny, aby jego pole nie zakłócało pola badanego. Natężenie pola elektrycznego wokół ładunku punktowego wyznaczamy z prawa Coulomba.

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ <p>Jednostki</p> $[E] = \left[ \frac{F}{Q} \right] =$ $= \text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{-1/2} \cdot \text{s}^{-1}$	$E = \frac{c^2}{\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ $[E] = \left[ \frac{F}{Q} \right] =$ $= \text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot \text{s}^{-2}$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ $[E] = \left[ \frac{F}{Q} \right] = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{s}} =$ $= \frac{\text{J}}{\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}} = \frac{\text{V}}{\text{m}} =$ $= \text{kg}^1 \cdot \text{m}^1 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$



Ich związki między sobą

**Jednostki natężenia pola elektrycznego**

	j. ES	j. EM	j. SI	V/cm
jednostka elektrostatyczna	1	$c = 3 \cdot 10^{10}$	$3 \cdot 10^4$	300
jednostka elektromagnetyczna	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	1	$10^{-8}$	$10^{-8}$
wolt na metr $V/m = N/A \cdot s = N/C$	$3,33 \cdot 10^{-5}$	$10^6$	1	$10^{-2}$
wolt na centymetr	$3,33 \cdot 10^{-3}$	$10^8$	100	1

$$\frac{V}{m} = \frac{N}{C} = \frac{10^5}{3 \cdot 10^9} \text{ j. ES} = \frac{10^5}{10^{-1}} \text{ j. EM.}$$

Jednostka strumienia natężenia pola elektrycznego  $E$  przez pole powierzchni  $S$  określona jest w każdym układzie jednostek na podstawie wzoru

$$\psi = ES, \tag{1.25}$$

gdzie  $S$  jest maleńkim elementem powierzchni prostopadłym w danym miejscu do wektora  $E$ .

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$\psi = ES$	$\psi = ES$	$\psi = ES$
<b>Jednostki</b>		
$[\psi] = [ES] =$ $= g^{1/2} \cdot cm^{-1/2} \cdot s^{-1} \cdot cm^2 =$ $= g^{1/2} \cdot cm^{5/2} \cdot s^{-1}$	$[\psi] = [ES] =$ $= g^{1/2} \cdot cm^{1/2} \cdot s^{-2} \cdot cm^2 =$ $= g^{1/2} \cdot cm^{5/2} \cdot s^{-2}$	$[\psi] = [ES] = \frac{N}{A \cdot s} m^2 =$ $= V \cdot m = kg^1 \cdot m^3 \cdot s^3 \cdot A^{-1}$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$c = 3 \cdot 10^{10}$	3
jednostka elektromagnetyczna	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	1	$10^{-10}$
jednostka układu SI ( $V \cdot m$ )	0,33	$10^{10}$	1

$$\frac{V}{m} \cdot m^2 = V \cdot m = \frac{N \cdot m^2}{C} = \frac{10^5 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^9} \text{ j. ES} = \frac{10^5 \cdot 10^4}{10^{-1}} \text{ j. EM.}$$

**Jednostka indukcji elektrycznej D** określona jest w każdym układzie na podstawie wzoru

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (\text{w próżni}), \quad (1.26)$$

a więc

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{E}$  <b>Jednostki</b> $[D] = [\epsilon_0 E] =$ $= 1 \cdot g^{1/2} \cdot cm^{-1/2} \cdot s^{-1}$	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E}$  $[D] = [\epsilon_0 E] =$ $= s^2 \cdot cm^{-2} \cdot g^{1/2} \cdot cm^{1/2} \cdot s^{-2} =$ $= g^{1/2} \cdot cm^{-3/2}$	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  $[D] = [\epsilon_0 E] = A^2 \cdot s^2 \cdot N^{-1} \cdot$ $\cdot m^{-2} \cdot N \cdot A^{-1} \cdot s^{-1} =$ $= A \cdot s \cdot m^{-2} = C \cdot m^{-2}$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$c = 3 \cdot 10^{10}$	$3,33 \cdot 10^{-6}$
jednostka elektromagnetyczna	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	1	$10^5$
jednostka układu SI (C/m <sup>2</sup> )	$3 \cdot 10^5$	$10^{-5}$	1

$$\frac{C}{m^2} = \frac{3 \cdot 10^9}{10^4} \text{ j. ES} = \frac{10^{-1}}{10^4} \text{ j. EM.}$$

**Jednostka strumienia indukcji elektrycznej** określona jest w każdym układzie jednostek na podstawie wzoru

$$\psi = \mathbf{D} dS, \quad (1.27)$$

gdzie  $dS$  oznacza prostopadły element powierzchni do wektora indukcji elektrycznej  $\mathbf{D}$ .

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$\psi = D dS$	$\psi = D dS$	$\psi = D dS$
<b>Jednostki</b>		
$[p] = g^{1/2} \cdot \text{cm}^{-1/2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^2 =$ $= g^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-1}$	$[p] = g^{1/2} \cdot \text{cm}^{-3/2} \cdot \text{cm}^2 =$ $= g^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2}$	$[p] = \text{C} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{m}^2 = \text{C} =$ $= \text{A} \cdot \text{s}$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	$3,33 \cdot 10^{-10}$
jednostka elektromagnetyczna	$c = 3 \cdot 10^{10}$	1	10
jednostka układu SI (A·s)	$3 \cdot 10^9$	$10^{-1}$	1

$$\text{A} \cdot \text{s} = 3 \cdot 10^9 \text{ j. ES} = 10^{-1} \text{ j. EM}.$$

**Jednostka momentu dipola elektrycznego** określona jest we wszystkich układach na podstawie wzoru

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{r}, \quad (1.28)$$

gdzie ładunki punktowe  $Q$ , dodatni oraz ujemny, znajdują się w odległości  $r$ , a zwrot  $p$  jest określony od ładunku ujemnego do dodatniego.

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$\mathbf{p} = Q\mathbf{r}$	$\mathbf{p} = Q\mathbf{r}$	$\mathbf{p} = Q\mathbf{r}$
<b>Jednostki</b>		
$[p] = g^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm} =$ $= g^{1/2} \cdot \text{cm}^{5/2} \cdot \text{s}^{-1}$	$[p] = g^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot \text{cm} =$ $= g^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2}$	$[p] = \text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m} = \text{C} \cdot \text{m}$

### Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	$3,33 \cdot 10^{-12}$
jednostka elektromagnetyczna	$c = 3 \cdot 10^{10}$	1	$10^{-1}$
jednostka układu SI ( $A \cdot s \cdot m = C \cdot m$ )	$3 \cdot 10^{11}$	10	1

$$A \cdot s \cdot m = 3 \cdot 10^9 \cdot 10^2 \text{ j. ES} = 10^{-1} \cdot 10^2 \text{ j. EM.}$$

**Jednostka polaryzacji elektrycznej** określona jest w każdym układzie jednostek na podstawie wzoru

$$P = \frac{dp}{dV}, \quad (1.29)$$

gdzie moment dipola elektrycznego  $dp$  przypada na objętość dielektryka  $dV$ .

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$P = dp/dV$	$P = dp/dV$	$P = dp/dV$
<b>Jednostki</b>		
$[P] = g^{1/2} \cdot cm^{5/2} \cdot s^{-1} \cdot cm^{-3} =$ $= g^{1/2} \cdot cm^{-1/2} \cdot s^{-1}$	$[P] = g^{1/2} \cdot cm^{3/2} \cdot cm^{-3} =$ $= g^{1/2} \cdot cm^{-3/2}$	$[P] = C \cdot m \cdot m^{-3} =$ $= C \cdot m^{-2} = A \cdot s \cdot m^{-2}$

### Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	$3,33 \cdot 10^{-6}$
jednostka elektromagnetyczna	$c = 3 \cdot 10^{10}$	1	$10^5$
jednostka układu SI ( $A \cdot s/m^2$ )	$3 \cdot 10^5$	$10^{-5}$	1

$$A \cdot s \cdot m^{-2} = 3 \cdot 10^9 \cdot 10^{-4} \text{ j. ES} = 10^{-1} \cdot 10^{-4} \text{ j. EM.}$$

**Jednostka napięcia elektrycznego** pomiędzy dwoma punktami pola elektrycznego jest we wszystkich układach określona na podstawie wzoru

$$U = \frac{dW}{dQ}, \quad (1.30)$$

gdzie  $dW$  oznacza pracę potrzebną do przeniesienia ładunku  $dQ$  z jednego punktu pola elektrycznego do drugiego punktu tego pola. Jednostka ta jest również *jednostką potencjału* punktu pola elektrycznego, gdyż określamy go jako napięcie elektryczne między tym punktem a ziemią (lub nieskończonością). Jest ona również *jednostką siły elektromotorycznej* ogniwa, gdyż określamy ją jako napięcie elektryczne między biegunami ogniwa otwartego.

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
<b>Jednostki</b>		
$[U] = \left[ \frac{dW}{dQ} \right] =$ $= \frac{\text{g}^1 \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-1}} =$ $= \text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$	$[U] = \left[ \frac{dW}{dQ} \right] =$ $= \frac{\text{g}^1 \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2}} =$ $= \text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-2}$	$[U] = \left[ \frac{dW}{dQ} \right] = \frac{\text{J}}{\text{A} \cdot \text{s}} =$ $= \text{wolt (V)} =$ $= \text{kg}^1 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$

Ich związki między sobą

#### Jednostki siły elektromotorycznej (napięcia, potencjału)

	j. ES	j. EM	j. SI	mV	V	kV
jednostka elektrostatyczna	1	$c = 3 \cdot 10^{10}$	300	$3 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^8$	0,3
jednostka elektromagnetyczna	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	1	$10^{-8}$	$10^{-5}$	$10^{-2}$	$10^{-11}$
wolt (V) — jednostka układu SI (V)	1/300	$10^8$	1	$10^3$	$10^6$	$10^{-3}$
miliwolt	$3,33 \cdot 10^{-6}$	$10^6$	$10^{-3}$	1	$10^3$	$10^{-6}$
mikrowolt	$3,33 \cdot 10^{-9}$	$10^2$	$10^{-6}$	$10^{-3}$	1	$10^{-9}$
kilowolt	3,33	$10^{11}$	$10^3$	$10^6$	$10^9$	1

$$\text{V} = \text{J} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = 10^7 \cdot 3^{-1} \cdot 10^{-9} \cdot 1 \text{ j. ES} = 10^7 \cdot 10 \cdot 1 \text{ j. EM.}$$

Jednostka pojemności elektrostatycznej przewodnika jest w każdym układzie określona na podstawie wzoru

$$C = \frac{dQ}{dU}, \quad (1.31)$$

gdzie ładunek  $dQ$  wprowadzony na powierzchnię przewodnika elektrycznego wywołuje pomiędzy nim a otoczeniem napięcie elektryczne  $dU$ .

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
<b>Jednostki</b>		
$[C] = \left[ \frac{dQ}{dU} \right] = \frac{g^{1/2} \cdot cm^{3/2} \cdot s^{-1}}{g^{1/2} \cdot cm^{1/2} \cdot s^{-1}} = „cm“$	$[C] = \left[ \frac{dQ}{dU} \right] = \frac{g^{1/2} \cdot cm^{1/2}}{g^{1/2} \cdot cm^{3/2} \cdot s^{-2}} = cm^{-1} \cdot s^2$	$[C] = \left[ \frac{dQ}{dU} \right] = \frac{A \cdot s}{V} = \frac{A \cdot s}{\frac{J}{A \cdot s}} = \text{farad (F)} = kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^4 \cdot A^2$

Ich związki między sobą

	j. ES (cm)	j. EM	j. SI	$\mu F$	pF
jednostka elektrostatyczna (cm)	1	$1,11 \cdot 10^{-21}$	$1,11 \cdot 10^{-12}$	$1,11 \cdot 10^{-6}$	1,11
jednostka elektromagnetyczna	$9 \cdot 10^{20}$	1	$10^9$	$10^{15}$	$10^{21}$
farad (F) — jednostka układu SI	$9 \cdot 10^{11}$	$10^{-9}$	1	$10^6$	$10^{12}$
mikrofarad	$9 \cdot 10^5$	$10^{-15}$	$10^{-6}$	1	$10^6$
pikofarad	0,9	$10^{-21}$	$10^{-12}$	$10^{-6}$	1

$$F = \frac{A \cdot s}{V} = 3 \cdot 10^9 \cdot 300 \text{ j. ES} = 10^{-1} \cdot 10^{-8} \text{ j. EM.}$$

Jednostka gęstości pola elektrycznego w każdym układzie jednostek określona jest na podstawie wzoru

$$q = \frac{dE}{dV}, \quad (1.32)$$

gdzie  $dE$  oznacza energię pola elektrycznego w polu elektrycznym o objętości  $dV$ .



Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$q = \frac{1}{8\pi} \varepsilon \varepsilon_0 E^2$	$q = \frac{1}{8\pi c} \varepsilon \varepsilon_0 E^2$	$q = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2$
<b>Jednostki</b>		
$[q] = (g^{1/2} \cdot cm^{-1/2} \cdot s^{-1})^2 = \frac{erg}{cm^3}$	$[q] = cm^{-2} \cdot s^2 \times (g^{1/2} \cdot cm^{1/2} \cdot s^{-2})^2 = \frac{erg}{cm^3}$	$[q] = \frac{A \cdot s^2}{N \cdot m^2} \left[ \frac{N}{A \cdot s} \right]^2 = \frac{N \cdot m}{m^3} = \frac{J}{m^3}$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	1	$10^{-1}$
jednostka elektromagnetyczna	1	1	$10^{-1}$
jednostka układu SI	10	10	1

$$\frac{J}{m^3} = 10^7 \cdot 10^{-6} \text{ j. ES} = 10^7 \cdot 10^{-6} \text{ j. EM.}$$

Jednostka natężenia prądu elektrycznego w każdym układzie określona jest na podstawie wzoru

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad (1.33)$$

gdzie  $dQ$  oznacza ładunek elektryczny przepływający w czasie  $dt$  przez dowolne pole przekroju przewodnika.

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$I = \frac{dQ}{dt}$	$I = \frac{dQ}{dt}$	$I = \frac{dQ}{dt}$
<b>Jednostki</b>		
$[I] = \left[ \frac{dQ}{dt} \right] = \frac{g^{1/2} \cdot cm^{3/2} \cdot s^{-1}}{s} = g^{1/2} \cdot cm^{3/2} \cdot s^{-2}$	$[I] = \left[ \frac{dQ}{dt} \right] = \frac{g^{1/2} \cdot cm^{1/2}}{s} = g^{1/2} \cdot cm^{1/2} \cdot s^{-1}$	$[I] = \left[ \frac{dQ}{dt} \right] = \frac{A \cdot s}{s} = A$

	j. ES	j. EM	j. SI	mA	$\mu$ A
jednostka elektrostatyczna	1	$3,33 \cdot 10^{-11}$	$3,33 \cdot 10^{-10}$	$3,33 \cdot 10^{-7}$	$3,33 \cdot 10^{-4}$
jednostka elektromagnetyczna	$3 \cdot 10^{10}$	1	10	$10^4$	$10^7$
amper (A) — jednostka układu SI	$3 \cdot 10^9$	$10^{-1}$	1	$10^3$	$10^6$
miliamper	$3 \cdot 10^6$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	1	$10^3$
mikroamper	$3 \cdot 10^3$	$10^{-7}$	$10^{-6}$	$10^{-3}$	1

$$A = \frac{C}{s} = \frac{3 \cdot 10^9}{1} \text{ j. ES} = \frac{10^{-1}}{1} \text{ j. EM.}$$

**Jednostka gęstości prądu elektrycznego** przepływającego w danym przewodniku w każdym układzie jednostek określona jest na podstawie wzoru

$$J = \frac{dI}{dS}, \quad (1.34)$$

gdzie  $dI$  oznacza natężenie prądu elektrycznego przepływającego przez prostopadłą część przekroju przewodnika o powierzchni  $dS$ .

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$J = \frac{dI}{dS}$	$J = \frac{dI}{dS}$	$J = \frac{dI}{dS}$
<b>Jednostki</b>		
$[J] = \left[ \frac{dI}{dS} \right] = \frac{g^{1/2} \cdot cm^{3/2} \cdot s^{-2}}{cm^2} = g^{1/2} \cdot cm^{-1/2} \cdot s^{-2}$	$[J] = \left[ \frac{dI}{dS} \right] = \frac{g^{1/2} \cdot cm^{3/2} \cdot s^{-1}}{cm^2} = g^{1/2} \cdot cm^{-3/2} \cdot s^{-1}$	$[J] = \left[ \frac{dI}{dS} \right] = \frac{A}{m^2}$

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	$3,33 \cdot 10^{-6}$
jednostka elektromagnetyczna	$c = 3 \cdot 10^{10}$	1	$10^5$
jednostka w układzie SI (A/m <sup>2</sup> )	$3 \cdot 10^5$	$10^{-5}$	1

$$\frac{\text{A}}{\text{m}^2} = \frac{3 \cdot 10^9}{10^4} \text{ j. ES} = \frac{10^{-1}}{10^4} \text{ j. EM.}$$

**Jednostka oporu elektrycznego przewodnika** określona jest w każdym układzie jednostek na podstawie wzoru

$$R = \frac{U}{I}, \quad (1.35)$$

gdzie  $U$  oznacza przyłożone do końców przewodnika napięcie elektryczne, a  $I$  — płynący w tym przewodniku prąd elektryczny pod wpływem tego przewodnika.

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$R = \frac{U}{I}$	$R = \frac{U}{I}$	$R = \frac{U}{I}$
<b>Jednostki</b>		
$[R] = \left[ \frac{U}{I} \right] =$ $= \frac{\text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-2}} =$ $= \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^1$	$[R] = \left[ \frac{U}{I} \right] =$ $= \frac{\text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-1}} =$ $= \text{cm}^1 \cdot \text{s}^{-1}$	$[R] = \frac{U}{I} = \frac{\frac{\text{J}}{\text{A} \cdot \text{s}}}{\frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{A}}} =$ $= \frac{\text{J}}{\text{A}^2 \cdot \text{s}} = \frac{\text{V}}{\text{A}} =$ $= \Omega \text{ (om)} =$ $= \text{kg}^1 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI	kΩ	MΩ
jednostka elektrostatyczna	1	$9 \cdot 10^{20}$	$9 \cdot 10^{11}$	$9 \cdot 10^8$	$9 \cdot 10^6$
jednostka elektromagnetyczna	$1,11 \cdot 10^{-21}$	1	$10^{-9}$	$10^{-12}$	$10^{-15}$
om (Ω) — jednostka w układzie SI	$1,11 \cdot 10^{-12}$	$10^9$	1	$10^{-3}$	$10^{-6}$
kiloom	$1,11 \cdot 10^{-9}$	$10^{12}$	$10^3$	1	$10^{-3}$
megaom	$1,11 \cdot 10^{-6}$	$10^{15}$	$10^6$	$10^3$	1

$$\Omega = \text{om} = \frac{\text{wolt}}{\text{amper}} = \frac{300^{-1}}{3 \cdot 10^9} \text{ j. ES} = \frac{10^8}{10^{-1}} \text{ j. EM.}$$

Jednostka oporu właściwego danego przewodnika określona jest w każdym układzie na podstawie wzoru

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (1.36)$$

gdzie  $R$  oznacza opór przewodnika o długości  $l$  oraz o powierzchni przekroju  $S$ .

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$\rho = \frac{RS}{l}$	$\rho = \frac{RS}{l}$	$\rho = \frac{RS}{l}$
<b>Jednostki</b>		
$[\rho] = \left[ \frac{RS}{l} \right] = \frac{\text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^1 \cdot \text{cm}^2}{\text{cm}} = \text{s}^1$	$[\rho] = \left[ \frac{RS}{l} \right] = \frac{\text{cm}^1 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^2}{\text{cm}} = \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$[\rho] = \left[ \frac{RS}{l} \right] = \frac{\Omega \cdot \text{m}^2}{\text{m}} = \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A}} = \text{kg}^1 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI	j. $\frac{\text{om} \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$
jednostka elektrostatyczna	1	$9 \cdot 10^{20}$	$9 \cdot 10^9$	$9 \cdot 10^{15}$
jednostka elektromagnetyczna	$1,11 \cdot 10^{-21}$	1	$10^{-11}$	$10^{-8}$
jednostka w układzie SI (om)	$1,11 \cdot 10^{-10}$	$10^{11}$	1	$10^6$
$\frac{\text{om} \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$	$1,11 \cdot 10^{-16}$	$10^5$	$10^{-6}$	1

$$\frac{\text{om} \cdot \text{m}^2}{\text{m}} = 1,11 \cdot 10^{-12} \cdot 10^4 \cdot 10^{-2} \text{ j. ES} = 10^9 \cdot 10^4 \cdot 10^{-2} \text{ j. EM} =$$

$$= 1 \cdot 10^6 \cdot 1 \frac{\text{om} \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$$

**Jednostka przewodności elektrycznej** przewodnika określona jest w każdym układzie jednostek na podstawie wzoru

$$\sigma = \frac{1}{\varrho}, \quad (1.37)$$

gdzie  $\varrho$  oznacza opór właściwy danego przewodnika.

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$\sigma = \frac{1}{\varrho}$	$\sigma = \frac{1}{\varrho}$	$\sigma = \frac{1}{\varrho}$
<b>Jednostki</b>		
$[\sigma] = \text{s}^{-1}$	$[\sigma] = \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^1$	$[\sigma] = \frac{\text{A}}{\text{V} \cdot \text{m}} = \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{A}^2$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$1,11 \cdot 10^{-21}$	$1,11 \cdot 10^{-10}$
jednostka elektromagnetyczna	$9 \cdot 10^{20}$	1	$10^{11}$
jednostka w układzie SI	$9 \cdot 10^9$	$10^{-11}$	1

Wartości te wynikają z definicji oraz z poprzedniej tabelki.

**Jednostka pracy prądu elektrycznego** określona jest w każdym układzie jednostek na podstawie wzoru

$$W = UIt = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t, \quad (1.38)$$

gdzie  $W$  oznacza pracę wykonaną przez prąd elektryczny płynący w przewodniku w czasie  $t$ , jeżeli opór tego przewodnika wynosi  $R$ , natężenie

prądu płynącego w nim wynosi  $I$  oraz napięcie elektryczne na końcach tego przewodnika wynosi  $U$ . Na podstawie przeliczenia można się przekonać, że jednostki te są takie same jak w mechanice.

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$W = UIt$		$W = UIt$
<b>Jednostki</b>		
$[W] = g^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot s^{-1}$ $\cdot g^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot s^{-2} \cdot s^1 =$ $= g^1 \cdot \text{cm}^2 \cdot s^{-2} = \text{erg}$		$[W] = g^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot s^{-2}$ $\cdot g^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot s^{-1} \cdot s^1 =$ $= g^1 \cdot \text{cm}^2 \cdot s^{-2} = \text{erg}$
		$[W] = \text{kg}^1 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$ $\cdot \text{A}^1 \cdot \text{s}^1 =$ $= \text{kg}^1 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \text{dżul}$

Związki między nimi podano w mechanice.

Uwaga: dżul = wolt · amper · sekunda = amper<sup>2</sup> · om · sekunda = wolt<sup>2</sup> · om<sup>-1</sup> · sekunda.

**Jednostka mocy prądu elektrycznego** określona jest w każdym układzie jednostek na podstawie wzoru

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}, \quad (1.39)$$

gdzie  $P$  oznacza moc wydzieloną przez płynący w czasie jednej sekundy prąd elektryczny o natężeniu  $I$  w przewodniku o oporze  $R$ , jeżeli na jego końcach panuje napięcie elektryczne  $U$ . W poniższej tabelce widzimy, że jednostki te są takie same jak w mechanice.

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$P = UI$		$P = UI$
<b>Jednostki</b>		
$[P] = g^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot s^{-1}$ $\cdot g^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot s^{-2} =$ $= g^1 \cdot \text{cm}^2 \cdot s^{-3} = \frac{\text{erg}}{\text{s}}$		$[P] = \text{kg}^1 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$ $\cdot \text{A}^1 = \text{kg}^1 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} = \text{wat}$



Związki pomiędzy nimi podane są w mechanice.

Uwaga: wat = volt · amper = amper<sup>2</sup> · om = volt<sup>2</sup> · om<sup>-1</sup>.

**Jednostka elektrochemicznego równoważnika** danego jonu jest w każdym układzie jednostek określona na podstawie wzoru

$$m = kIt = kQ, \quad (1.40)$$

gdzie  $m$  oznacza masę wydzielonego elektrolitu pod wpływem przepływu przez ten elektrolit ładunku  $Q$ .

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$k = \frac{m}{Q}$	$k = \frac{m}{Q}$	$k = \frac{m}{Q}$
<b>Jednostki</b>		
$[k] = g \cdot g^{-1/2} \cdot cm^{-3/2} \cdot s^1 = g^{1/2} \cdot cm^{-3/2} \cdot s^1$	$[k] = g \cdot g^{-1/2} \cdot cm^{-1/2} = g^{1/2} \cdot cm^{-1/2}$	$[k] = kg \cdot A^{-1} \cdot s^{-1} = kg \cdot C^{-1}$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostki elektrostatyczne	1	$c = 3 \cdot 10^{10}$	$3 \cdot 10^6$
jednostki elektromagnetyczne	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	1	$10^{-4}$
jednostka w układzie SI (kg/C)	$3,33 \cdot 10^{-7}$	$10^4$	1

$$\frac{kg}{C} = \frac{10^3}{3 \cdot 10^9} \text{ j. ES} = \frac{10^3}{10^{-1}} \text{ j. EM.}$$

**Jednostka ruchliwości jonów** jest w każdym układzie jednostek określona na podstawie wzoru

$$v = uE, \quad (1.41)$$

gdzie  $u$  oznacza prędkość danego jonu, którą uzyskał pod wpływem natężenia pola elektrycznego  $E$ .

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$u = \frac{v}{E}$	$u = \frac{v}{E}$	$u = \frac{v}{E}$
Jednostki		
$[u] = \frac{\text{cm}^1 \cdot \text{s}^{-1}}{\text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{-1/2} \cdot \text{s}^{-1}} = \text{g}^{-1/2} \cdot \text{cm}^{3/2}$	$[u] = \frac{\text{cm}^1 \cdot \text{s}^{-1}}{\text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot \text{s}^{-2}} = \text{g}^{-1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot \text{s}^1$	$[u] = \frac{\text{m}^1 \cdot \text{s}^{-1}}{\text{V}^1 \cdot \text{m}^{-1}} = \frac{\text{m}^1 \cdot \text{s}^{-1}}{\text{kg}^1 \cdot \text{m}^1 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}} = \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{A}^1$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	$3,33 \cdot 10^{-7}$
jednostka elektromagnetyczna	$c = 3 \cdot 10^{10}$	1	$10^4$
jednostka w układzie SI	$3 \cdot 10^8$	$10^{-4}$	1

$$\frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{V} \cdot \text{m}^{-1}} = \frac{\text{m}^2}{\text{V} \cdot \text{s}} = \frac{10^4}{300^{-1} \cdot 1} \text{ j. ES} = \frac{10^4}{10^8 \cdot 1} \text{ j. EM.}$$

### 1.7.3. Jednostki wielkości magnetycznych oraz ich związki w układach SI, ES CGS, EM CGS

**Jednostka natężenia bieguna magnetycznego** magnesu trwałego. Pojęcie to w nowoczesnym ujęciu nauki o magnetyzmie nie ma właściwie sensu. Ze względów tradycyjnych wyprowadza się go na podstawie prawa Coulomba

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.42)$$

gdzie  $m_1$  oraz  $m_2$  oznaczają natężenia biegunów magnetycznych magnesów punktowych działających na siebie z odległości  $r$  siłą  $F$ . W układach ES i EM

w próżni stała  $k = 1/\mu_0$  (układy niezracjonalizowane), a w układzie SI zracjonalizowanym  $k = 1/4\pi\mu_0$  (w próżni). W ośrodku materialnym o przenikalności magnetycznej  $\mu$  stałe te wynoszą odpowiednie  $k = 1/\mu\mu_0$  oraz  $k = 1/4\pi\mu\mu_0$ . Jednostkę tę wyprowadzamy podobnie jak jednostkę ładunku elektrycznego i uwagi tam podane są również i tu słuszne.

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$\mu_0 = \frac{1}{c^2} \frac{\text{s}^2}{\text{cm}^2}$	$\mu_0 = 1$	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} =$ $= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$
$F = \frac{c^2}{\mu} \frac{m_1 m_2}{r^2} [\text{dyn}]$	$F = \frac{1}{\mu} \frac{m_1 m_2}{r^2} [\text{dyn}]$	$F = \frac{10^7}{16\pi^2 \mu} \frac{m_1 m_2}{r^2} [\text{N}]$
<b>Jednostki</b>		
$[m] = \left[ \sqrt{\frac{Fr^2}{c^2}} \right] =$ $= \text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2}$	$[m] = \left[ \sqrt{Fr^2} \right] =$ $= \text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$	$[m] = \left[ \sqrt{F4\pi\mu_0 r^2} \right] =$ $= \sqrt{\text{N} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \text{m}^2} = \frac{\text{J}}{\text{A}} =$ $= \text{V} \cdot \text{s} = \text{kg}^1 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$3 \cdot 10^{10} = c$	$\frac{4\pi c}{10^9} = 3768$
jednostka elektromagnetyczna	$3,33 \cdot 10^{-11} = 1/c$	1	$\frac{4\pi}{10^9} = 1,26 \cdot 10^{-7}$
jednostka w układzie SI (V·s)	$\frac{10^9}{4\pi c} = 2,65 \cdot 10^{-4}$	$\frac{10^9}{4\pi} = 7,958 \cdot 10^6$	1

$$\text{V} \cdot \text{s} = \frac{10^9 \cdot 1}{4\pi} \text{j. EM},$$

gdyż układ EM jest niezracjonalizowany oraz jednostka ES = c jednostek EM, jak to wynika bezpośrednio z prawa Coulomba (a więc przeciwnie niż przy jednostce ładunku elektrycznego).

**Jednostka natężenia pola magnetycznego.** Tradycyjnie wprowadzona w każdym układzie jednostek wzorem

$$H = \frac{F}{m}, \quad (1.43)$$

gdzie w danym punkcie pola magnetycznego na biegun liniowego magnesu o natężeniu bieguna  $m$  działa siła  $F$ . Nowocześnie, jak np. w podręczniku D. Hallidaya i R. Resnicka, *Fizyka t. II*, str. 398, PWN, Warszawa 1967, wielkość ta wprowadzona jest w układzie SI na podstawie wzoru

$$H = \frac{B - \mu_0 J}{\mu_0}, \quad (1.44)$$

gdzie uprzednio zdefiniowany został już jako wektor pierwotny wektor indukcji magnetycznej  $B$  oraz wektor magnetyzacji  $J$ . Jedno i drugie ujęcie prowadzi oczywiście do tych samych wyników, chociaż interpretacja treści zjawisk jest różna.

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$H = \frac{c^3 m}{\mu r^2}$ <p style="text-align: center;">Jednostki</p> $[H] = \left[ \frac{c^3 m}{r^2} \right] =$ $= g^{1/2} \cdot cm^{1/2} \cdot s^{-1}$	$H = \frac{1 m}{\mu r^2}$ $[H] = \left[ \frac{m}{r^2} \right] =$ $= g^{1/2} \cdot cm^{-1/2} \cdot s^{-1} =$ $= \text{ersted (Oe)}$	$H = \frac{10^7 m}{16\pi^2 \mu r^2}$ $[H] = \left[ \frac{1 m}{\mu_0 r^2} \right] =$ $= \frac{A^2 Nm}{N m^2 A} = \frac{A}{m}$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	$2,65 \cdot 10^{-9}$
jednostka elektromagnetyczna (ersted — Oe)	$c = 3 \cdot 10^{10}$	1	79,6
jednostka w układzie SI $\left( \frac{A}{m} \right)$	$3,77 \cdot 10^8$	$1,26 \cdot 10^{-2}$	1

$$\frac{A}{m} = 4\pi \frac{3 \cdot 10^9}{10^2} \text{ j. ES} = 4\pi \frac{10^{-1}}{10^2} \text{ j. EM}.$$

**Jednostka momentu magnetycznego magnesu trwałego.** Moment magnetyczny magnesu trwałego jest to już konkretnie mierzalna wielkość magnetyczna; w każdym układzie jednostek zdefiniowana jest na podstawie wzoru

$$M = ml, \quad (1.45)$$

gdzie  $l$  jest długością liniowego magnesu trwałego. Zwrot wektora  $l$  liczymy od bieguna o ujemnym natężeniu magnetycznym do przeciwnego bieguna, oba bieguny mają natężenia bieguna magnetycznego  $m$ .

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$M = ml$	$M = ml$	$M = ml$
<b>Jednostki</b>		
$[M] = [ml] = \text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2}$	$[M] = [ml] =$ $= \text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{5/2} \cdot \text{s}^{-1}$	$[M] = [ml] = \frac{\text{J}}{\text{A}} \text{ m} =$ $= \text{V} \cdot \text{m} \cdot \text{s} =$ $= \text{kg}^1 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$c = 3 \cdot 10^{10}$	$12\pi = 37,68$
jednostka elektromagnetyczna	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	1	$4\pi/10^{10} =$ $= 1,26 \cdot 10^{-9}$
jednostka układu SI	$1/12\pi = 0,0265$	$1/4\pi \cdot 10^{10} =$ $= 7,958 \cdot 10^8$	1

$$\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{m} = \frac{10^8}{4\pi} 10^2 \text{ j. EM} = \frac{10^8}{4\pi \cdot 10^{10}} 10^2 \text{ j. ES}.$$

**Jednostka momentu magnetycznego obwodu prądu** w każdym układzie jednostek określona jest na podstawie wzoru

$$M = IS, \quad (1.46)$$

gdzie  $I$  jest natężeniem prądu elektrycznego „opływającego” powierzchnię o polu  $S$ .

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$M = IS$	$M = IS$	$M = IS$
<b>Jednostki</b>		
$[M] = g^{1/2} \cdot cm^{3/2} \cdot s^{-2} \cdot cm^2 = g^{1/2} \cdot cm^{7/2} \cdot s^{-2}$	$[M] = g^{1/2} \cdot cm^{1/2} \cdot s^{-2} \cdot cm^2 = g^{1/2} \cdot cm^{5/2} \cdot s^{-2}$	$[M] = A \cdot m^2$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$c = 3 \cdot 10^{10}$	$3,33 \cdot 10^{-14}$
jednostka elektromagnetyczna	$1/c = 3,33 \cdot 10^{11}$	1	$10^{-3}$
jednostka w układzie SI	$3 \cdot 10^{13}$	$10^3$	1

$$A \cdot m^2 = 3 \cdot 10^9 \cdot 10^4 \text{ j. ES} = 10^{-1} \cdot 10^4 \text{ j. EM.}$$

**Jednostka indukcji magnetycznej.** W tradycyjnym ujęciu jednostka ta jest jednostką pochodną, wyprowadzoną w każdym układzie jednostek na podstawie wzoru

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}, \quad (1.47)$$

gdzie  $\mu$  (liczba czysta) oznacza przenikalność magnetyczną danego ośrodka (względna).

W nowoczesnym ujęciu wektor indukcji magnetycznej  $\mathbf{B}$  wyprowadza się w dziedzinie magnetyzmu jako pierwszą jednostkę magnetyczną na podstawie wzoru

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{I} \times \mathbf{B}), \quad (1.48)$$

a więc gdy kierunek płynącego prądu jest prostopadły do wektora indukcji magnetycznej  $\mathbf{B}$ , to  $\mathbf{F} = BI$ , gdzie  $F$  oznacza siłę, której doznaje przewodnik o długości  $l$  umieszczony w polu magnetycznym o wektorze in-



dukcji magnetycznej  $\mathbf{B}$ , a przez który płynie prąd elektryczny o natężeniu  $I$ . Oczywiście jednostki indukcji wyprowadzone na podstawie któregośkolwiek wzoru będą takie same. Wyprowadzimy je sposobem tradycyjnym.

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu}{c^2} \mathbf{H}$ <p style="text-align: center;">Jednostki</p> $[B] = \left[ \frac{H}{c^2} \right] =$ $= g^{1/2} \cdot cm^{-3/2} =$ $= \frac{j. ES \text{ napięcia} \cdot s}{cm^2}$	$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$ $[B] = [H] =$ $= g^{1/2} \cdot cm^{-1/2} \cdot s^{-1} =$ $= \text{gaus (Gs)} =$ $= \frac{j. EM \text{ napięcia} \cdot s}{cm^2}$	$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H} = 4\pi \cdot 10^{-7} \mu \mathbf{H}$ $[B] = [\mu_0 H] = \frac{N \cdot A}{A^2 \cdot m} =$ $= \frac{J}{A \cdot m^2} = \frac{V \cdot s}{m^2} =$ $= \text{tesla (T)} = kg^1 \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$c = 3 \cdot 10^{10}$	$3 \cdot 10^8$
jednostka elektromagnetyczna gaus (Gs)	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	1	$10^{-4}$
jednostka układu SI (tesla (T) = weber/m <sup>2</sup> )	$3,33 \cdot 10^{-7}$	$10^4$	1

$$\text{tesla} = \frac{V \cdot s}{m^2} = \frac{300^{-1} \cdot 1}{10^4} j. ES = \frac{10^8 \cdot 1}{10^4} j. EM.$$

Jednostka strumienia magnetycznego  $\Phi$ , podobnie jak każdy inny strumień, określona jest na podstawie wzoru

$$\Phi = \mathbf{B}S, \quad (1.49)$$

gdzie  $\mathbf{B}$  oznacza wektor indukcji magnetycznej przechodzący przez prostopadłą powierzchnię o polu  $S$ .

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$\Phi = BS$	$\Phi = BS$	$\Phi = BS$
<b>Jednostki</b>		
$[\Phi] = g^{1/2} \cdot cm^{-3/2} \cdot cm^2 = g^{1/2} \cdot cm^{1/2}$	$[\Phi] = g^{1/2} \cdot cm^{-1/2} \cdot s^{-1} \cdot cm^2 = g^{1/2} \cdot cm^{3/2} \cdot s^{-1}$ (makswel = Mx)	$[\Phi] = \frac{V \cdot s}{m^2} m^2 = V \cdot s = T \cdot m^2 = kg^1 \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-1} = \text{weber} = \text{Wb}$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$c = 3 \cdot 10^{10}$	300
jednostka elektromagnetyczna (makswel — Mx)	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	1	$10^{-8}$
jednostka układu SI (weber — Wb)	$1/300 = 3,33 \cdot 10^{-3}$	$10^8$	1

$$\text{Wb} = \frac{V \cdot s}{m^2} m^2 = V \cdot s = 1/300 \text{ j. ES} = 10^8 \text{ j. EM.}$$

**Jednostka namagnesowania** (magnetyzacji, polaryzacji magnetycznej) **J** we wszystkich układach jednostek określona jest na podstawie wzoru

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{M}}{dV}, \quad (1.50)$$

gdzie  $d\mathbf{M}$  oznacza wypadkowy moment magnetyczny prądu przypadający na objętość  $dV$ .

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{M}}{dV}$	$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{M}}{dV}$	$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{M}}{dV}$
<b>Jednostki</b>		
$[J] = g^{1/2} \cdot cm^{7/2} \cdot s^{-2} \cdot cm^{-3} = g^{1/2} \cdot cm^{1/2} \cdot s^{-2}$	$[J] = g^{1/2} \cdot cm^{5/2} \cdot s^{-2} \cdot cm^{-3} = g^{1/2} \cdot cm^{-1/2} \cdot s^{-2}$	$[J] = A \cdot m^2 \cdot m^{-3} = A/m$

### Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	$3,33 \cdot 10^{-9}$
jednostka elektromagnetyczna	$c = 3 \cdot 10^{10}$	1	$10^9$
jednostka układu SI (A/m)	$3 \cdot 10^7$	$10^{-3}$	1

$$\frac{A}{m} = \frac{3 \cdot 10^9}{10^2} \text{ j. ES} = \frac{10^{-1}}{10^2} \text{ j. EM.}$$

Jednostka siły magnetomotorycznej określona jest na podstawie wzoru

$$\oint \mathbf{H}_l d\mathbf{l} = F_m, \quad (1.51)$$

gdzie całkowanie obejmuje składową styczną wektora natężenia pola magnetycznego po obwodzie zamkniętym  $l$ .

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$\oint \mathbf{H}_l d\mathbf{l} = F_m$	$\oint \mathbf{H}_l d\mathbf{l} = F_m$	$\oint \mathbf{H}_l d\mathbf{l} = F_m$
<b>Jednostki</b>		
$[F_m] = g^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot s^{-2} \cdot \text{cm} = g^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot s^{-2}$	$[F_m] = g^{1/2} \cdot \text{cm}^{-1/2} \cdot s^{-1} \cdot \text{cm} = g^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot s^{-1}$	$[F_m] = A \cdot m^{-1} \cdot m = A$

### Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	$2,65 \cdot 10^{-11}$
jednostka elektromagnetyczna	$c = 3 \cdot 10^{10}$	1	0,796
jednostka układu SI (amperozwój — Azw)	$3,77 \cdot 10^{10}$	1,26	1

Uwzględniając, że układ SI jest zrationalizowany, a pozostałe układy jednostek nie zrationalizowane, otrzymujemy

$$\text{Azw} = A = \frac{4\pi}{10} \text{ j. EM} = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^9 \text{ j. ES.}$$

Jednostka magnetycznego oporu właściwego  $\varrho_m$  określona jest na podstawie wzoru

$$\varrho_m = \frac{1}{\mu\mu_0}, \quad (1.52)$$

gdzie  $\mu$  oznacza przenikalność magnetyczną danego materiału, a  $\mu_0$  — próżni.

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$\varrho_m = \frac{1}{\mu\mu_0}$	$\varrho_m = \frac{1}{\mu\mu_0}$	$\varrho_m = \frac{1}{\mu\mu_0}$
Jednostki		
$[\varrho_m] = \frac{1}{1 \cdot \text{s}^2 \cdot \text{cm}^{-2}} = \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-2}$	$[\varrho_m] = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$	$[\varrho_m] = \frac{1}{1 \cdot \text{henr} \cdot \text{m}^{-1}} = \frac{1}{1 \cdot \text{N} \cdot \text{A}^{-2}} = \frac{\text{A}^2}{\text{N}}$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$1,11 \cdot 10^{-21}$	$8,84 \cdot 10^{-17}$
jednostka elektromagnetyczna	$9 \cdot 10^{20}$	1	$7,96 \cdot 10^5$
jednostka w układzie SI	$1,13 \cdot 10^{16}$	$1,26 \cdot 10^{-6}$	1

$$\frac{1}{\mu\mu_0} = \frac{1}{1 \cdot \text{N} \cdot \text{A}^{-2}} = \frac{\text{A}^2}{\text{N}} = 4\pi \frac{9 \cdot 10^{18}}{10^5} \text{ j. ES} = 4\pi \frac{10^{-2}}{10^5} \text{ j. EM.}$$

Jednostka oporu magnetycznego określona jest na podstawie wzoru

$$R_m = \varrho_m \frac{l}{S}, \quad (1.53)$$

gdzie  $\varrho_m$  oznacza opór właściwy materiału o długości  $l$  oraz polu przekroju  $S$ .

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$R_m = \varrho_m \frac{l}{S}$	$R_m = \varrho_m \frac{l}{S}$	$R_m = \varrho_m \frac{l}{S}$
<b>Jednostki</b>		
$[R_m] = \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{cm} = \text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$	$[R_m] = 1 \cdot \text{cm} \cdot \text{cm}^{-2} = \text{cm}^{-1}$	$[R_m] = \frac{\text{A}^2}{\text{N}} \cdot \text{m} \cdot \text{m}^{-2} = \text{A}^2 \cdot \text{J}^{-1} = \frac{\text{A}}{\text{V} \cdot \text{s}} = \text{henr}^{-1} = \text{H}^{-1}$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$1,11 \cdot 10^{-21}$	$8,84 \cdot 10^{-15}$
jednostka elektromagnetyczna	$9 \cdot 10^{20}$	1	$7,96 \cdot 10^7$
jednostka w układzie SI	$1,13 \cdot 10^{14}$	$1,26 \cdot 10^{-8}$	1

Uwzględniając zależność pomiędzy jednostkami oporu magnetycznego właściwego i definicję  $R_m$ , otrzymujemy

$$\frac{\text{A}^2}{\text{J}} = 4\pi \cdot 9 \cdot 10^{13} \frac{10^2}{10^4} \text{j. ES} = 4\pi \frac{1}{10^7} \frac{10^2}{10^4} \text{j. EM}.$$

Jednostka napięcia obwodu magnetycznego  $U_m$  określona jest na podstawie wzoru

$$U_m = \Phi R_m, \quad (1.54)$$

gdzie  $\Phi$  oznacza strumień indukcji magnetycznej płynący w obwodzie magnetycznym o oporze magnetycznym  $R_m$ .

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$U_m = \Phi R_m$	$U_m = \Phi R_m$	$U_m = \Phi R_m$
Jednostki		
$[U_m] = g^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-2} = g^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-2}$	$[U_m] = g^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1} = g^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$	$[U_m] = \text{V} \cdot \text{s} \frac{\text{A}}{\text{V} \cdot \text{s}} = \text{Azw (amperozwój)}$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$1/c = 3,33 \cdot 10^{-11}$	$2,65 \cdot 10^{-11}$
jednostka elektromagnetyczna	$c = 3 \cdot 10^9$	1	0,796
jednostka układu SI	$3,78 \cdot 10^{10}$	1,26	1

Uwzględniając definicję  $U_m$ , otrzymujemy

$$\text{Azw} = \text{Wb} \frac{\text{A}}{\text{V} \cdot \text{s}} = 300^{-1} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^{11} \text{ j. ES} = 10^8 \cdot 4\pi \cdot 10^{-9} \text{ j. EM.}$$

**Jednostka indukcyjności własnej i wzajemnej.** Jeżeli zmiana natężenia płynącego w obwodzie prądu elektrycznego  $dI$  w czasie  $dt$  powoduje powstanie siły elektromotorycznej w tym obwodzie o wartości  $E$ , to wartość  $E$  określamy na podstawie wzoru

$$E = -L \frac{dI}{dt}, \quad (1.55)$$

gdzie  $L$  nazywamy *samoindukcyjnością obwodu* (współczynnikiem samoindukcji obwodu).

Jeżeli zmiana natężenia prądu elektrycznego w obwodzie pierwszym  $dI_1$  wywołana w czasie  $dt$  spowoduje w tym samym czasie powstanie w obwodzie drugim siły elektromotorycznej  $E_2$ , to wartość  $E_2$  możemy określić na podstawie wzoru

$$E_2 = -M_{12} \frac{dI_1}{dt}, \quad (1.56)$$



gdzie  $M_{12}$  nazywamy *indukcyjnością wzajemną obwodów* (współczynnikiem indukcji wzajemnej obwodów).

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$L = - \frac{Edt}{dl}$ $M_{12} = - \frac{E_2 dt}{dl_1}$ <p><b>Jednostki</b></p> $[L] = [M_{12}] = \frac{g^{1/2} \cdot cm^{1/2} \cdot s^{-1} \cdot s^1}{g^{1/2} \cdot cm^{3/2} \cdot s^{-2}} = cm^{-1} \cdot s^2$	$L = - \frac{Edt}{dl}$ $M_{12} = - \frac{E_2 dt}{dl_1}$ <p><b>Jednostki</b></p> $[L] = [M_{12}] = \frac{g^{1/2} \cdot cm^{3/2} \cdot s^{-2} \cdot s}{g^{1/2} \cdot cm^{1/2} \cdot s^{-1}} = „cm”$	$L = - \frac{Edt}{dl}$ $M_{12} = - \frac{E_2 dt}{dl_1}$ <p><b>Jednostki</b></p> $[L] = [M_{12}] = \frac{kg^1 \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1} \cdot s^1}{A} = \frac{kg^1 \cdot m^2 \cdot s^{-2}}{A^2} = \frac{J}{A^2} = \frac{V \cdot A \cdot s}{A^2} = \frac{V \cdot s}{A} = \text{henr (H)}$

Ich związki między sobą

	j. ES	j. EM cm	j. SI	mH	$\mu$ H
jednostka elektrostatyczna	1	$9 \cdot 10^{20}$	$9 \cdot 10^{11}$	$9 \cdot 10^{14}$	$9 \cdot 10^{17}$
jednostka elektromagnetyczna	$1,11 \cdot 10^{-21}$	1	$10^{-9}$	$10^{-6}$	$10^{-3}$
henr (H) — jednostka w układzie SI	$1,11 \cdot 10^{-12}$	$10^9$	1	$10^3$	$10^6$
milihenr	$1,11 \cdot 10^{-15}$	$10^6$	$10^{-3}$	1	$10^3$
mikrohenr	$1,11 \cdot 10^{-18}$	$10^3$	$10^{-6}$	$10^{-3}$	1

$$\text{henr} = H = \frac{\text{wolt} \cdot s}{\text{amper}} = \frac{300^{-1} \cdot 1}{3 \cdot 10^9} \text{ j. ES} = \frac{10^8 \cdot 1}{10^{-1}} \text{ j. EM.}$$

**Jednostka oporu pojemnościowego, oporu indukcyjnego oraz zawady układu.** Jeżeli w układzie, przez który płynie zmienny prąd elektryczny, pojemność wynosi  $C$ , a częstotliwość tego prądu wynosi  $\nu$ , to pojemność

ta przedstawia dla tego prądu opór pojemnościowy  $R_c$  wyrażany wzorem

$$R_c = \frac{1}{2\pi\nu C}. \quad (1.57)$$

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$R_c = \frac{1}{2\pi\nu C}$	$R_c = \frac{1}{2\pi\nu C}$	$R_c = \frac{1}{2\pi\nu C}$
Jednostki		
$[R_c] = \frac{1}{s^{-1} \cdot cm^1} = cm^{-1} \cdot s^1$	$[R_c] = \frac{1}{s^{-1} \cdot \frac{s^2}{cm}} = cm^1 \cdot s^{-1}$	$[R_c] = \frac{kg^1 \cdot m^3 \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}}{s^{-1} \cdot A \cdot s} = kg^1 \cdot m^3 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2} = om$

Ich związki podano przy jednostce oporu elektrycznego.

Jeżeli w układzie płynie prąd elektryczny zmienny o indukcyjności  $L$  lub indukcyjności wzajemnej  $M_{12}$ , a częstotliwość tego prądu wynosi  $\nu$ , to indukcyjność ta przedstawia dla obwodu tzw. opór indukcyjny  $R_L$  wyrażany wzorem

$$R_L = 2\pi\nu L = 2\pi\nu M_{12}. \quad (1.58)$$

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$R_L = 2\pi\nu L = 2\pi\nu M_{12}$	$R_L = 2\pi\nu L = 2\pi\nu M_{12}$	$R_L = 2\pi\nu L = 2\pi\nu M_{12}$
Jednostki		
$[R_L] = s^{-1} \cdot cm^{-1} \cdot s^1 = cm^{-1} \cdot s^1$	$[R_L] = s^{-1} \cdot cm^1 = cm^1 \cdot s^{-1}$	$[R_L] = s^{-1} \cdot kg^1 \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-2} = kg^1 \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2} = om$

Ich związki między sobą podano przy jednostce oporu elektrycznego. Jeżeli w układzie, przez który przepływa prąd zmienny, pojemność wynosi  $C$ , samoindukcyjność  $L$ , a indukcyjność  $M_{12}$ , to obwód ten stanowi dla tego prądu tzw. zawadę, a więc opór elektryczny, który wyrażamy wzorem

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad (1.59)$$

gdzie  $R$  oznacza opór omowy przewodnika. Jednostkami zawady są jednostki oporu elektrycznego.

**Jednostka okresu drgań obwodu drgającego.** Jeżeli oznaczymy przez  $T$  czas drgania obwodu elektrycznego o samoindukcyjności  $L$  oraz o pojemności elektrycznej  $C$ , to wartość tego okresu wyznaczmy na podstawie wzoru

$$T = 2\pi \sqrt{LC}. \quad (1.60)$$

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$T = 2\pi \sqrt{LC}$	$T = 2\pi \sqrt{LC}$	$T = 2\pi \sqrt{LC}$
<b>Jednostki</b>		
$[T] = (\text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{cm}^2)^{1/2} = \text{s}$	$[T] = \left(\text{cm} \cdot \frac{\text{s}^2}{\text{cm}}\right)^{1/2} = \text{s}$	$[T] = \left(\frac{\text{kg}^1 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{A}^2} \cdot \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{kg}^1 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-8} \cdot \text{A}^{-1}}\right)^{1/2} = \text{s}$

**Jednostka przenikalności magnetycznej  $\mu$ .** W poniższej tabelce podane są związki pomiędzy jednostkami przenikalności magnetycznej w różnych układach.

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$9 \cdot 10^{20}$	$4\pi \cdot 9 \cdot 10^{13} = 1,13 \cdot 10^{14}$
jednostka elektromagnetyczna	$1,11 \cdot 10^{-21}$	1	$4\pi \cdot 10^{-7} = 1,26 \cdot 10^{-6}$
jednostka w układzie SI	$8,84 \cdot 10^{-16}$	$7,96 \cdot 10^5$	1

**Jednostka przenikalności elektrycznej  $\epsilon$ .** W poniższej tabelce podane są związki pomiędzy jednostkami przenikalności dielektrycznej w różnych układach.

	j. ES	j. EM	j. SI
jednostka elektrostatyczna	1	$1,11 \cdot 10^{-21}$	$8,84 \cdot 10^{-12}$
jednostka elektromagnetyczna	$9 \cdot 10^{20}$	1	$7,96 \cdot 10^9$
jednostka w układzie SI	$4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 = 1,13 \cdot 10^{12}$	$4\pi \cdot 10^{-11} = 1,256 \cdot 10^{-10}$	1

W celu szybszego sprawdzenia poprawności pisania wymiarów wielkości elektrycznych lub magnetycznych zarówno w układzie ES CGS, jak EM CGS oraz ich liczbowego stosunku, zestawiamy te dane w poniższej tabelce.

**Wymiary wielkości elektrycznych i magnetycznych w układach CGS: elektrostatycznym i elektromagnetycznym**

$l$  oznacza liczbę wymiarową długości,  $m$  — liczbę wymiarową masy,  $t$  — liczbę wymiarową czasu. Przyjmując stałą dielektryczną próżni  $\epsilon_0$  oraz przenikalność magnetyczną próżni  $\mu_0$  za liczby bezwymiarowe, należy je z poniższych danych wykreślić.

Nazwa wielkości	Symbol	Układ ES CGS	Układ EM CGS	Stosunek jednostki ES do EM
Wielkości elektryczne				
ilość elektryczności	$Q$	$l^{3/2} m^{1/2} t^{-1} \epsilon^{1/2}$	$l^{1/2} m^{1/2} t^0 \mu_0^{-1/2}$	$1/c$
natężenie pola elektrycznego	$E$	$l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1} \epsilon_0^{1/2}$	$l^{1/2} m^{1/2} t^{-2} \mu_0^{1/1}$	$c$
indukcja elektryczna	$D$	$l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1} \epsilon_0^{1/2}$	$l^{-3/2} m^{1/2} t^0 \mu_0^{-1/2}$	$1/c$
potencjał — napięcie	$U, D$	$l^{1/2} m^{1/2} t^{-1} \epsilon^{1/2}$	$l^{3/2} m^{1/2} t^{-2} \mu_0^{1/2}$	$c$
natężenie prądu	$I$	$l^{3/2} m^{1/2} t^{-2} \epsilon_0^{1/2}$	$l^{1/2} m^{1/2} t^{-1} \mu_0^{1/2}$	$1/c$
opór	$R$	$l^{-1} m^0 t^1 \epsilon^{-1}$	$l^1 m^0 t^{-1} \mu_0^1$	$c^2$
przewodnictwo	$\gamma$	$l^0 m^0 t^{-1} \epsilon_0^1$	$l^{-2} m^0 t^1 \mu_0^{-1}$	$1/c^2$
pojemność elektryczna	$C$	$l^1 m^0 t^0 \epsilon_0^1$	$l^{-1} m^0 t^2 \mu_0^{-1}$	$1/c^2$
indukcyjność	$L, M$	$l^{-1} m^0 t^2 \epsilon^{-1}$	$l^1 m^0 t^0 \mu_0^1$	$c^2$
stała dielektryczna próżni	$\epsilon_0$	$l^0 m^0 t^0 \epsilon^1$	$l^{-2} m^0 t^2 \mu_0^{-1}$	$1/c^2$

Nazwa wielkości	Symbol	Układ ES CGS	Układ EM CGS	Stosunek jednostki ES do EM
Wielkości magnetyczne				
natężenie bieguna magnetycznego	$m$	$l^{1/2} m^{1/2} t^0 \varepsilon_0^{-1/2}$	$l^{3/2} m^{1/2} t^{-1} \mu_0^{1/2}$	$c$
natężenie pola magnetycznego	$H$	$l^{1/2} m^{1/2} t^{-2} \varepsilon_0^{1/2}$	$l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1} \mu_0^{-1/2}$	$1/c$
indukcja magnetyczna	$B$	$l^{-3/2} m^{1/2} t^0 \varepsilon_0^{-1/2}$	$l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1} \mu_0^{1/2}$	$c$
strumień indukcji magnetycznej	$\Phi$	$l^{1/2} m^{1/2} t^0 \varepsilon_0^{-1/2}$	$l^{3/2} m^{1/2} t^{-1} \mu_0^{1/2}$	$c$
siła magnetomotoryczna	$U_m, F_n$	$l^{3/2} m^{1/2} t^{-2} \varepsilon_0^{-1/2}$	$l^{1/2} m^{1/2} t^{-1} \mu_0^{-1/2}$	$1/c$
natężenie namagnesowania	$I$	$l^{-3/2} m^{1/2} t^0 \varepsilon_0^{-1/2}$	$l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1} \mu_0^{1/2}$	$c$
energia elektryczna i magnetyczna	$L, E$	$l^2 m^1 t^{-2} \varepsilon_0^0$	$l^2 m^1 t^{-2} \mu_0^0$	$1$
przenikalność magnetyczna	$\mu$	$l^{-2} m^0 t^2 \varepsilon_0^{-1}$	$l^0 m^0 t^0 \mu_0^1$	$c^2$

### 1.8. JEDNOSTKI WIELKOŚCI OPTYCZNYCH I FOTOMETRYCZNYCH W UKŁADZIE SI

**Jednostka światłości — kandela (cd)** zdefiniowana jest jako jednostka podstawowa.

**Jednostka strumienia światła  $\Phi$ .** Jeżeli przyjmiemy punktowe źródło światła o światłości  $I$ , to wysyła ono energię promieniowania widzialnego w bryłowy kąt przestrzenny  $\omega$  o wielkości  $\Phi$ , którą nazywamy strumieniem światła i wyrażamy ją wzorem

$$\Phi = I\omega. \quad (1.61)$$

Przyjmując  $I = 1$  cd,  $\omega = 1$  sr, otrzymujemy na jednostkę strumienia światła taki strumień światła, który wysyła punktowe źródło światła o światłości jednej kandelii w przestrzenny kąt bryłowy jednego steradiana. Jednostkę tę nazywamy lumenem, a więc

$$\text{lumen (lm)} = \text{kandela (cd)} \cdot \text{steradian (sr)}.$$

Analogicznie można określić jednostkę strumienia całkowitego promieniowania źródła punktowego, jeśli przyjmiemy, że  $I$  oznacza całkowitą energię wypromieniowaną przez dane źródło wyrażoną w dżulach w czasie



jednej sekundy w przestrzenny kąt bryłowy jednego steradiana. Na podstawie powyższego wzoru otrzymujemy

$$\frac{J}{s \cdot sr} \cdot sr = \text{wat}$$

jako jednostkę strumienia całkowitego promieniowania.

**Jednostka natężenia oświetlenia  $E$ .** Jeżeli strumień światła  $d\Phi$  pada prostopadle na powierzchnię  $dS$ , to powoduje jej oświetlenie, które wyrażamy wzorem

$$E = \frac{d\Phi}{dS}. \quad (1.62)$$

Na podstawie tego wzoru określamy jednostkę natężenia oświetlenia jako takie natężenie oświetlenia danego ciała, które powoduje padający prostopadle na powierzchnię  $1 \text{ m}^2$  równomiernie strumień światła o światłości jednego lumena. Jednostkę tę nazywamy luksiem

$$\text{lüks (lx)} = \frac{\text{lumen}}{\text{m}^2}.$$

**Jednostka jasności powierzchni  $B$ .** Jeśli prostopadle na powierzchnię o wielkości  $dS$  pada strumień światła o światłości  $dI$ , to powoduje jej jasność, którą określamy wzorem

$$B = \frac{dI}{dS}. \quad (1.63)$$

Na podstawie powyższego wzoru na jednostkę jasności powierzchni przyjmujemy taką jasność, którą wywołuje światłość strumienia świetlnego o wartości jednej kandel, padającego równomiernie i prostopadle na powierzchnię  $1 \text{ m}^2$ , a więc

$$\frac{\text{cd}}{\text{m}^2} = 1 \text{ nit (nt)}.$$

## 1.9. JEDNOSTKI Z DZIEDZINY PROMIENIOTWÓRCZOŚCI W UKŁADZIE SI

**Jednostka dawki promieniowania rentgenowskiego lub promieniowania  $\gamma$ .** Ilość energii promieniowania rentgenowskiego lub  $\gamma$  wytwarzającego w  $1 \text{ cm}^3$  powietrza w temperaturze  $0^\circ\text{C}$  pod ciśnieniem  $1 \text{ atm}$  ( $760 \text{ Tr}$ )



w komorze jonizacyjnej przewodnictwo, które przy pomiarze prądu nasycenia daje jedną jednostkę elektrostatyczną ładunku przy całkowitym zużycowaniu elektronów wtórnych, jeżeli wpływ ścianek komory jonizacyjnej jest usunięty, nazywamy *rentgenem* (R). Jednostkę w układzie SI otrzymamy wtedy, gdy ciśnienie wyrażamy w  $\text{N/m}^2$ , objętość w  $\text{m}^3$ , a temperaturę w K. W warunkach podanych wyżej objętość  $1 \text{ cm}^3$  zajmuje objętość  $0,1013 \text{ m}^3 = 0,1 \text{ m}^3$  pod ciśnieniem jednego  $\text{N/m}^2$ .

Natężenie prądu nasycenia wyrażamy w układzie SI w amperach =  $3 \cdot 10^9$  j. ES, a więc jednostka dawki promieniowania w układzie SI będzie wynosiła

$$\text{jednostka w SI} = \frac{dJ}{dV} = \frac{3^{-1} \cdot 10^{-9}}{0,1} \text{ rentgena} = 3,33 \cdot 10^{-9} \text{ R}. \quad (1.64)$$

**Jednostka ilości pierwiastka promieniotwórczego.** Jeżeli w każdej sekundzie liczba przemian atomowych wynosi  $3,700 \cdot 10^{10}$ , to ilość pierwiastka promieniotwórczego równa się jednostce, którą nazywamy *kiur* (Ci).

$$1 \text{ mCi} = 10^{-3} \text{ Ci} \quad 1 \mu\text{Ci} = 10^{-6} \text{ Ci}. \quad (1.65)$$

Inną jednostką ilości pierwiastka promieniotwórczego jest *rezerford* (Rd). Jest to taka ilość pierwiastka promieniotwórczego, że w każdej sekundzie liczba przemian atomowych wynosi  $10^6$ . A więc

$$\text{Ci} = 3,7 \cdot 10^4 \text{ Rd}, \quad \text{mCi} = 37 \text{ Rd}. \quad (1.66)$$

**Jednostka aktywności właściwej źródeł promieniotwórczych.** Jednostką tą jest eman i określamy ją jako aktywność właściwą takiego źródła promieniotwórczego, które o objętości jednego litra wysyła dawkę promieniowania  $10^{-10}$  kiur.

$$\text{eman} = 10^{-10} \frac{\text{kiur}}{\text{litr}} = 10^{-7} \frac{\text{kiur}}{\text{m}^3}. \quad (1.67)$$

## 1.10. NAJWAŻNIEJSZE STAŁE FIZYCZNE WYRAŻONE W UKŁADZIE SI

### Stałe fizyczne

prędkość światła w próżni  $c = 2,997925 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  
ładunek elementarny elektronu  $e = 1,60210 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  
masa spoczynkowa elektronu  $m_e = 9,10908 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,

stosunek ładunku do masy elektronu  $e/m = 1,758\,796 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,

masa spoczynkowa protonu  $m_p = 1,672\,52 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ,

masa atomowa neutronu  $M_n = 1,008\,6654$ ,

masa atomowa wodoru  $H = (1,007\,8252 \pm 0,000\,000\,1)$ ,

masa atomowa deuteru  $D = (2,014\,1022 \pm 0,000\,000\,1)$ ,

masa spoczynkowa neutronu  $m_n = 1,674\,82 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ,

masa atomowa protonu  $M_p = 1,007\,276\,63$ ,

stosunek masy protonu do masy elektronu  $m_p/m_e = (1836,12 \pm 0,02)$ ,

stała gazów dla gramocząsteczki (mola),

$$\begin{aligned} R_0 &= (8,31696 \pm 0,00034) \cdot \text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, \\ &= 1,9866 \text{ cal} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, \\ &= 0,08206 \text{ litroatmosfera mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, \end{aligned}$$

objętość standardowa gramocząsteczki gazu idealnego

$$V_0 = 22413,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1},$$

stała Avogadra

$$N = 6,02292 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1},$$

stała Plancka

$$h = 6,62559 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s},$$

$$\hbar = h/2\pi = 1,05443 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s},$$

stała Faradaya

$$F = Ne = 9,64870 \cdot 10^4 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{mol}^{-1},$$

stała Boltzmann

$$\begin{aligned} k &= R_0/N = (1,38044 \pm 0,00007) \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} = \\ &= (8,6167 \pm 0,0004) \cdot 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{K}^{-1}, \end{aligned}$$

$$1/k = (11\,605,4 \pm 0,5) \text{ K} \cdot \text{eV}^{-1},$$

stała grawitacji  $G = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ,

mechaniczny równoważnik ciepła  $J = 4,1852 \cdot 10^7 \text{ erg} \cdot \text{cal}_{15}^{-1}$ ,

stała Rydberga (liczba fal na cm) dla nieskończenie wielkiej masy

$$\begin{aligned} R_\infty &= (109\,737,309 \pm 0,013) \text{ cm}^{-1} = \\ &= (109\,737,309 \pm 0,013) \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}, \end{aligned}$$

stała Rydberga dla lekkich jąder

$$R_H = (109\,677,576 \pm 0,012) \text{ cm}^{-1} = \\ = (109\,677,576 \pm 0,012) \cdot 10^2 \text{ m}^{-1},$$

$$R_D = (109\,707,419 \pm 0,012) \text{ cm}^{-1} = \\ = (109\,707,419 \pm 0,012) \cdot 10^2 \text{ m}^{-1},$$

$$R_{He} = (109\,722,267 \pm 0,012) \text{ cm}^{-1} = \\ = (109\,722,267 \pm 0,012) \cdot 10^2 \text{ m}^{-1},$$

magneton Bohra

$$\mu_0 = \frac{1}{2} e \lambda_{ce} = \hbar e / 4\pi m c = (0,927\,32 \pm 0,000\,02) \cdot 10^{-20} \text{ erg} \cdot \text{Gs}^{-1} = \\ = (0,927\,32 \pm 0,000\,02) \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1},$$

(gdzie  $\lambda_{ce} = \frac{h}{2\pi m c}$  jest komptonowską długością fali elektronu),

promień pierwszej orbity Bohra

$$a_0 = \alpha / 4\pi R_\infty = \hbar^2 / m e^2 = 5,291\,67 \cdot 10^{-9} \text{ cm} = 5,291\,67 \cdot 10^{-11} \text{ m},$$

stała dielektryczna próżni

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} [\text{F/m}],$$

przenikalność magnetyczna próżni

$$\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} [\text{H/m}].$$

## 2.1. WSTĘP. KINEMATYKA PUNKTU MATERIALNEGO

Położenie punktu materialnego w przestrzeni można opisać przez podanie wektora wodzącego  $\mathbf{r}$  albo współrzędnych prostokątnych  $x, y, z$ , przy czym  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  oraz  $|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Wartość prędkości punktu materialnego w ruchu prostoliniowym zdefiniowana jest wzorem

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt},$$

ogólnie zaś prędkość wyrażamy wzorem

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (2.1)$$

gdzie  $s$  jest drogą przebytą przez punkt materialny. Dalej możemy napisać

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k},$$

gdzie

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

przy czym

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (2.2)$$

Przyspieszenie punktu materialnego definiujemy następująco:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (2.3)$$

Można je również napisać następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} = \\ &= \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k}, \end{aligned}$$

gdzie

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

W ruchu prostoliniowym przyspieszenie można napisać następująco

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (2.4)$$

W ruchu prostoliniowym jednostajnym punkt materialny ma stałą prędkość  $\mathbf{v} = \text{const}$ . Wówczas

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0, \quad s = \int v dt = s_0 + vt, \quad (2.5)$$

gdzie  $s_0$  jest odcinkiem drogi przebytej do momentu  $t = 0$ .

**Ruch prostoliniowy jednostajnie przyspieszony** charakteryzuje się stałym przyspieszeniem  $\mathbf{a} = \text{const}$ , pokrywającym się z kierunkiem prędkości początkowej ( $a > 0$ ).

$$v = \int a dt = v_0 + at, \quad (2.6)$$

$$s = \int v dt = \int (at + v_0) dt = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2, \quad (2.7)$$

gdzie  $v_0$  oznacza prędkość początkową, tj. wartość prędkości w chwili  $t = 0$ . Gdy  $\mathbf{a} = \text{const}$  i  $a < 0$ , występuje ruch prostoliniowy jednostajnie opóźniony.

Z wzorów (2.6) i (2.7) wynika

$$v^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0). \quad (2.8)$$

We wzorach tych  $v_0$  i  $s_0$  oznaczają: prędkość początkową i drogę przebytą przez ciało przed rozpoczęciem liczenia czasu.

**Ruch jednostajny po linii prostej.** Gdy  $a = 0$ , z wzoru (2.7) otrzymujemy wartość drogi w ruchu jednostajnym

$$s = s_0 + v_0 t.$$

Jeżeli w ruchu prostoliniowym przyspieszenie  $a \neq \text{const}$  i jest funkcją czasu  $a = a(t)$ , wówczas

$$v(t) = \int_0^t a(t) dt,$$

$$s(t) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t \left[ \int_0^t a(t) dt \right] dt.$$

W ruchu krzywoliniowym przyspieszenie punktu materialnego rozkładamy na przyspieszenie styczne

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} = \frac{d^2s}{dt^2} \boldsymbol{\tau} \quad (2.9)$$

i przyspieszenie normalne

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} \boldsymbol{\rho}, \quad (2.10)$$

gdzie  $\boldsymbol{\tau}$  jest wektorem jednostkowym w kierunku stycznej,  $\boldsymbol{\rho}$  — wektorem jednostkowym w kierunku normalnym do toru, po którym porusza się ciało, skierowanym do środka krzywizny w danym punkcie,  $R$  jest promieniem krzywizny krzywej będącej torem ruchu

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R} \boldsymbol{\rho}, \quad (2.11)$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}. \quad (2.12)$$

W ruchu krzywoliniowym prędkość kątowa  $\omega$  zdefiniowana jest wzorem

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}, \quad (2.13)$$

a przyspieszenie kątowe  $\varepsilon$  wzorem

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad (2.14)$$

gdzie  $\alpha$  jest wektorem, którego wartość bezwzględna jest kątem  $\alpha$  zakreślonym przez promień wodzący poruszającego się punktu materialnego. Wektor  $\alpha$  jest prostopadły do płaszczyzny kąta  $\alpha$ , a jego zwrot jest wyznaczony kierunkiem posuwania się śruby prawoskrętnej, obracającej się zgodnie z ruchem punktu materialnego. Jeżeli ruch odbywa się w płaszczyź-



nie, wówczas wektory  $\alpha$  i  $\varepsilon$  leżą na jednej prostej prostopadłej do płaszczyzny ruchu. Między prędkością liniową  $v$  i kątową  $\omega$  zachodzi związek

$$v = R\omega, \quad (2.15)$$

gdzie  $R$  jest promieniem krzywizny toru.

W ruchu krzywoliniowym płaskim  $a_t = R\varepsilon$ , co wynika z różniczkowania poprzedniego wzoru. Szczególnym przypadkiem ruchu krzywoliniowego jest ruch po okręgu. W ruchu jednostajnym po okręgu prędkość kątowa jest wielkością stałą

$$\omega = \text{const}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.16)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0, \quad \alpha = \int \omega dt = \alpha_0 + \omega t. \quad (2.17)$$

$T$  jest okresem ruchu. Jest to czas jednego obrotu punktu po okręgu. Liczbę obrotów w ciągu jednostki czasu nazywamy częstotliwością  $n$  ruchu po okręgu:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (2.18)$$

**Ruch jednostajnie zmienny (przyspieszony albo opóźniony) po okręgu** charakteryzuje się stałym przyspieszeniem kątowym

$$\varepsilon = \text{const}, \quad \omega = \int \varepsilon dt = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (2.19)$$

$$\alpha = \int \omega dt = \int (\omega_0 + \varepsilon t) dt = \alpha_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2. \quad (2.20)$$

### Ruhome układy odniesienia

Jeżeli układ odniesienia  $S'$  porusza się względem układu odniesienia  $S$  ruchem postępowym z prędkością  $\mathbf{v}_0$  i przyspieszeniem  $\mathbf{a}_0$  oraz ruchem obrotowym z prędkością kątową  $\boldsymbol{\omega}$  i przyspieszeniem kątowym  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , wówczas między prędkością  $\mathbf{v}$  i przyspieszeniem  $\mathbf{a}$  punktu materialnego w układzie  $S$ , a prędkością  $\mathbf{v}'$  i przyspieszeniem  $\mathbf{a}'$  tegoż punktu względem układu  $S'$ , zachodzą związki

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}' \quad (2.21)$$

oraz

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \mathbf{a}', \quad (2.22)$$

gdzie  $\mathbf{r}'$  jest wektorem wodzącym punktu względem układu odniesienia  $S'$ . Prędkość  $\mathbf{v}'$  i przyspieszenie  $\mathbf{a}'$  nazywamy względnymi, zaś prędkość  $\mathbf{v}$  i przyspieszenie  $\mathbf{a}$  nazywamy bezwzględnymi.

Prędkość poławą  $\mathbf{p}$  definiujemy jako wektor

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.23)$$

wartość bezwzględna  $|\mathbf{p}| = p$  równa się powierzchni, jaką zakreśla wektor wodzący  $\mathbf{r}$  punktu materialnego w jednostce czasu. Jeżeli ruch odbywa się po okręgu o promieniu  $r$ , wówczas

$$p = \frac{1}{2}r^2\omega. \quad (2.24)$$

## Zadania

2.1. Jak sporządzić noniusz do milimetrowej podziałki, aby można było odczytywać długość z dokładnością do  $(1/n) = (1/20)$  mm? Z jaką dokładnością można odczytać kąty na skali kątowej o podziałce w półstopniach, jeżeli noniusz tej skali jest sporządzony w analogiczny sposób?

2.2. W celu obliczenia promienia krzywizny  $R$  szkiełka zegarka zmierzono średnicę koła podstawy  $2r = 3,7$  cm i odległość środka szkiełka od płaszczyzny podstawy  $h = 6,93$  mm. Jaki jest promień krzywizny szkiełka?

2.3. W celu zmierzenia powierzchni  $S$ , nie dającej się obliczyć geometrycznie, wycięto kartkę papieru tego samego kształtu. Masa kartki  $m = 1248$  mg, gęstość materiału kartki  $\rho = 0,85$  g/cm<sup>3</sup>. 10 kartek tego papieru ma grubość  $h = 2,85$  mm. Obliczyć daną powierzchnię.

2.4. O ile minut średnia doba słoneczna różni się od doby gwiazdowej?

Δ 2.5. Ile czasu  $t$  potrzeba do przebycia drogi  $s = 100$  m ruchem jednostajnym z prędkością  $v = 100$  km/h?

Δ 2.6. Obliczyć drogę  $s$ , jaką przebyłoby ciało w ciągu czasu  $t = 2$  h, poruszając się ruchem jednostajnym, jeżeli drogę  $s_0 = 100$  m przebyło ono w czasie  $t_0 = 10,2$  s.

Δ 2.7. O ile przesunie się pociąg podczas błyskawicy trwającej  $2 \cdot 10^{-4}$  s, jeżeli prędkość pociągu wynosi  $v = 72$  km/h?

– 2.8. Samochód przebył od miasta  $A$  do  $B$  drogę  $s$ , jadąc z prędkością  $v_1 = 50$  km/h, a z powrotem z prędkością  $v_2 = 40$  km/h. Obliczyć prędkość średnią.

2.9. Pojazd przebył pewną drogę  $s$  od  $A$  do  $B$  z prędkością  $v$ . Z jaką prędkością  $v_1$  powinien poruszać się pojazd w drodze powrotnej, aby średnia prędkość tam i z powrotem wynosiła  $2v$ ?

2.10. Krople deszczu poruszając się wskutek oporu powietrza ruchem jednostajnym padają pionowo na dół z prędkością  $v_1 = 70$  m/s. Opisać ten ruch względem pociągu, który porusza się ruchem jednostajnym po płaszczyźnie poziomej z prędkością  $v_2 = 30$  m/s.

2.11. Dwa okręty wyruszyły równocześnie w drogę w kierunkach do siebie prostopadłych, jeden z prędkością  $v_1 = 20$  km/h, drugi z prędkością  $v_2 = 30$  km/h. Obliczyć prędkość wzajemnego oddalania się okrętów oraz ich odległość po upływie czasu  $t = 4$  h.

2.12. Łódź przepływa rzekę o szerokości  $l = 100$  m z prędkością  $v_1 = 2,5$  m/s w kierunku poprzecznym do brzegu rzeki płynącej z prędkością  $v_2 = 2$  m/s. O ile metrów zostanie zniesiona łódź w dół rzeki w chwili lądowania?

2.13. Statek porusza się w górę rzeki z prędkością  $v_1 = 3,8$  km/h, w dół rzeki z prędkością  $v_2 = 6,2$  km/h. Określić prędkość  $v_3$  statku w wodzie stojącej i prędkość  $v_4$ , z jaką płynie rzeka.

2.14. Samolot leci z prędkością  $v_1 = 108$  km/h, w czasie lotu wiatr „przesuwa“ samolot w kierunku prostopadłym z prędkością  $v_2 = 16$  m/s. Obliczyć wypadkową prędkość samolotu  $v$  w m/s.

2.15. Kula toczy się w wagonie kolejowym, prostopadle do kierunku poruszania się wagonu, z prędkością  $v_1 = 8$  m/s względem wagonu, który porusza się z prędkością  $v_2 = 60$  km/h. Jaka jest prędkość kuli względem Ziemi co do wielkości i co do kierunku?

2.16. Pociąg pędzący z prędkością  $v_1 = 80$  km/h przebija kula wystrzelona prostopadle do toru z prędkością  $v_2 = 200$  m/s. Jaka jest wielkość oraz kierunek prędkości  $v$  kuli względem układu odniesienia związanego z pociągiem?

2.17. Jaki kurs steru i jaką prędkość wypadkową  $v$  powinien mieć sterowiec o prędkości własnej  $v_1 = 100$  km/h, jeżeli musi lecieć w kierunku od  $S$  do  $N$ , a wiatr pędzi go w kierunku od  $NO$  do  $SW$  z prędkością  $v_2 = 8$  m/s?

2.18. Prostopadle do strumienia o szerokości  $l = 54$  m porusza się czółno z prędkością własną  $v = 1,8$  m/s. Wskutek prądu wody czółno wylądowało w odległości  $s = 15$  m poniżej miejsca leżącego naprzeciw miejsca wyruszenia. Jaka prędkość  $v_1$  ma woda strumienia?

2.19. Podróżny jadący pociągiem z prędkością  $v_1 = 50$  km/h mija

pociąg towarowy o długości  $l = 200$  m, który porusza się z prędkością  $v_1 = 30$  km/h w kierunku przeciwnym. Jak długo pociąg towarowy będzie mijał podróżnego?

**2.20.** Samolot lecący z prędkością  $v_1 = 200$  km/h przebywa drogę z punktu  $A$  do punktu  $B$  i z powrotem w czasie  $t = 1$  h 50 min. W czasie lotu wiatr wieje z punktu  $A$  do  $B$  z prędkością  $v_2 = 40$  km/h. W jakim czasie  $t_1$  przebędzie samolot powyższą drogę w czasie ciszy (bez wiatru)?

**2.21.** Kolumna wojska o długości  $l = 1,5$  km przesuwa się wzdłuż drogi z prędkością  $v = 6$  km/h. Z czoła kolumny wysyła dowódca motocyklistę z rozkazem na tył kolumny. Motocyklista jedzie z prędkością  $v_1 = 20$  km/h, nie zatrzymując się przekazuje rozkaz i wraca. Jak długo był w drodze?

**2.22.** Okręt płynie ruchem jednostajnym po linii prostej z prędkością  $v = 25$  km/h. Łódź motorowa porusza się od przodu okrętu prostopadle do jego kursu z prędkością  $v_1 = 40$  km/h. Jak przedstawia się ruch łodzi motorowej dla obserwatora na okręcie?

**2.23.** Człowiek znajduje się w odległości  $h = 50$  m od prostej drogi, po której porusza się samochód z prędkością  $v_1 = 10$  m/s. W jakim kierunku powinien on biec, aby spotkać się z samochodem, jeśli może osiągnąć prędkość  $v_2 = 3$  m/s, samochód zaś znajduje się w odległości  $b = 200$  m od człowieka. Jaka jest najmniejsza prędkość, z którą mógłby biec, aby spotkać się z samochodem?

**2.24.** W jakim stosunku pozostaje czas przejazdu w górę rzeki i z powrotem do czasu przejazdu takiej samej drogi po stojącej wodzie? Prędkość łódki względem wody w obydwu przypadkach jest równa  $v_2 = 5$  km/h, prędkość prądu  $v_1 = 2$  km/h.

**2.25.** Obserwator, stojący w chwili ruszania pociągu obok początku pierwszego wagonu, stwierdził, że wagon ten mijał go w ciągu  $\tau = 3$  s. W jakim czasie będzie go mijał  $n$ -ty (np. 6) wagon, jeżeli ruch pociągu jest jednostajnie przyspieszony?

**2.26.** Samochód porusza się wzdłuż szosy z prędkością  $v = 60$  km/h. Fotograf robi zdjęcie samochodu z odległości  $l = 20$  m z kierunku prostopadłego do szosy, stosując czas ekspozycji  $t = 0,02$  s. Jaka jest nieostrość obrazu na kliszy, jeżeli ogniskowa aparatu wynosi  $f = 4$  cm?

**2.27.** Samolot wzbija się w górę, lecąc z prędkością  $v = 700$  km/h. Po upływie czasu  $t = 4$  min osiąga wysokość  $h = 4$  km. Z jaką prędkością porusza się po płaszczyźnie poziomej (powierzchnia Ziemi) cień samolotu?

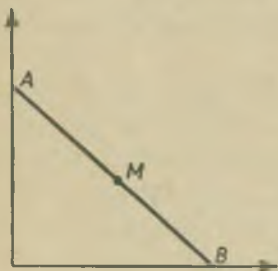


2.28. Ruch punktu materialnego opisany jest układem równań parametrycznych  $x = r \sin \omega t$ ,  $y = r \cos \omega t$ , przy czym  $r(t) = \text{const}$ ,  $\omega(t) = \text{const}$ . a) wyznaczyć składowe prędkości i przyspieszenia; b) wykazać, że tor punktu jest kołem o promieniu  $r$ ; c) wyznaczyć wartość bezwzględną wektora prędkości i przyspieszenia.

2.29. Ruch punktu opisują równania parametryczne:  $x = ct$ ,  $y = a + bt^2$ , przy czym  $a$ ,  $b$ ,  $c$  są stałe. a) obliczyć składowe prędkości i przyspieszenia; b) wyznaczyć tor punktu przyjmując  $a = 0$ ,  $b = g/2$ ,  $c = v_0$ .

2.30. Przyspieszenie punktu poruszającego się po linii prostej wynosi  $a = 12kt$ , gdzie  $k$  jest stałą. Obliczyć: a)  $v(t)$ , b)  $x(t)$ , jeżeli dla  $t = 0$ ,  $v = 0$ ,  $x = 0$ .

2.31. Końce pręta  $AB$  o długości  $l = 50$  cm ślizgają się po osiach  $x$ ,  $y$  prostokątnego układu współrzędnych. Koniec  $A$  pręta porusza się po osi  $y$  ku początkowi układu ruchem jednostajnym, z prędkością  $v = 4$  cm/s. Jakim ruchem porusza się drugi koniec pręta? Jaka będzie prędkość końca  $B$  w chwili gdy koniec  $A$  znajduje się w odległości 30 cm od początku układu? Wyznaczyć tor, jaki zakreśli przy tym ruchu dowolnie obrany punkt  $M$ , leżący na odcinku  $AB$  (rys. 2.1).



Rys. 2.1

2.32. Latarnia, znajdująca się w odległości  $R_0 = 6$  m od pionowej ściany rzuca na nią światło („zajaczek“). Latarnia równomiernie

obraca się wokół swojej osi pionowej z częstotliwością  $n = 1 \text{ s}^{-1}$ . Przy obrocie latarni światło biegnie po prostej poziomej. Znaleźć prędkość światła po  $t = 0,2$  s od chwili gdy promień światła był prostopadły do ściany.

2.33. Równanie ruchu punktu materialnego we współrzędnych biegunowych jest następujące:  $r = Ae^{kt}$ ,  $\varphi = kt$ , przy czym  $A$  i  $k$  są stałymi. Napisać równanie ruchu powyższego punktu oraz wyrazić prędkość, przyspieszenie i promień krzywizny toru jako funkcję współrzędnych biegunowych  $r$  i  $\varphi$ .

2.34. Punkt materialny porusza się prostoliniowo z przyspieszeniem wzrastającym proporcjonalnie do czasu. W ciągu pierwszych  $t = 10$  s ruchu przyspieszenie wzrosło od zera do  $a_1 = 10 \text{ m/s}^2$ . Jaka jest prędkość punktu materialnego po upływie czasu  $t_1 = 10$  s oraz jaką drogę przebył on w tym czasie, jeżeli w chwili  $t = 0$  znajdował się w spoczynku?

– 2.35. Pociąg opuszcza przystanek ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem  $a = 30 \text{ cm/s}^2$ . W jakiej odległości od przystanku uzyska on prędkość  $v = 15 \text{ m/s}$ ?

– 2.36. Pociąg pospieszny jedzie z prędkością  $v_1 = 18 \text{ m/s}$ . Maszynista hamuje pociąg w ciągu  $t = 15 \text{ s}$ . Jak wielkie jest opóźnienie ruchu podczas hamowania pociągu?

2.37. Pociąg wyrusza ze stacji i przebywa drogę  $s = 750 \text{ m}$  ruchem jednostajnie przyspieszonym, osiągając prędkość końcową  $v = 60 \text{ km/h}$ . Obliczyć przyspieszenie pociągu w jednostkach układu CGS. W jakim czasie przebywa pociąg początkowy odcinek drogi  $s_0$ ?

– 2.38. Wóz tramwajowy wyrusza z przystanku ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem  $a = 0,4 \text{ m/s}^2$ . W jakim czasie  $t$  i na jakim odcinku drogi  $s$  tramwaj uzyska potrzebną prędkość  $v = 16 \text{ m/s}$ ?

– 2.39. Tramwaj wyrusza z przystanku ruchem jednostajnie przyspieszonym i po przebyciu drogi  $s = 28,5 \text{ m}$  uzyskuje prędkość  $v = 18 \text{ km/h}$ . Obliczyć przyspieszenie  $a$  oraz czas  $t$ , w którym tramwaj przebył drogę  $s$ .

– 2.40. Kula opuszcza lufę karabinu o długości  $s = 120 \text{ cm}$  z prędkością  $v = 720 \text{ m/s}$ . Jak duże przyspieszenie wywołuje gaz wybuchowy, jeżeli założymy, że ciśnienie gazu jest równomierne? Jak długo pozostaje pocisk w lufie?

– 2.41. Pociąg pospieszny poruszający się z prędkością  $v_0 = \text{m/s}$  zaczyna hamować i zatrzymuje się w ciągu czasu  $t = 15 \text{ s}$ . Obliczyć wartość przyspieszenia  $a$  i drogę  $s$  przebytą przez pociąg do momentu zatrzymania się, zakładając, że jego ruch podczas hamowania jest jednostajnie opóźniony.

– 2.42. Pociąg porusza się z prędkością  $v = 50 \text{ km/h}$ . W jakiej odległości  $s$  od przystanku należy rozpocząć hamowanie, jeżeli podczas hamowania ruch pociągu jest jednostajnie opóźniony z opóźnieniem  $a = 0,3 \text{ m/s}^2$ ?

2.43. Po dwóch okręgach współśrodkowych poruszają się dwa punkty ruchem jednostajnym o okresach obiegu  $T_1$  i  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ). W momencie  $t = 0$  promienie wodzące tych punktów pokrywają się. Po jakim czasie  $T$  promienie spotkają się powtórnie?

2.44. Obie wskazówki zegara pokrywają się o godzinie dwunastej. Po jakim czasie pokryją się wskazówki ponownie?

2.45. Synodyczny czas obiegu planety Wenus wynosi  $1^{\text{a}} 218, ^{\text{a}}7$ , planety Mars  $2^{\text{a}} 49, ^{\text{a}}0$ . Obliczyć sydereczny czas obiegu tych planet dookoła Słońca, jeżeli czas obiegu Ziemi dookoła Słońca wynosi  $365, ^{\text{a}}24$ .

2.46. Z jaką maksymalną prędkością musi jechać rowerzysta po okręgu



o promieniu  $r = 10$  m, jeżeli maksymalny kąt nachylenia roweru wynosi  $\varphi = 30^\circ$  do pionu?

2.47. Określić promień  $r$  krzywizny toru kolejowego, jeżeli szyna zewnętrzna jest podniesiona o  $h = 12,4$  cm powyżej szyny wewnętrznej, szerokość toru wynosi  $l = 1,524$  m, a maksymalna prędkość pociągu  $v = 72$  km/h.

2.48. Kula wylatuje z lufy z prędkością  $v = 800$  m/s i z powodu gwintu wykonuje jeden pełny obrót w lufie. Określić czas przelotu kuli wewnątrz lufy, przyspieszenie kątowe, końcową prędkość kątową oraz częstotliwość obrotów kuli, jeżeli długość lufy wynosi  $l = 1$  m.

2.49. Z jaką prędkością kątową porusza się koło, jeżeli fotografując je przy czasie ekspozycji  $t = 0,02$  s każda szprycha koła pokrywa na zdjęciu połowę sektora między sąsiednimi szprychami, a koło ma  $n = 18$  szprych?

2.50. Z jaką prędkością powinien lecieć samolot ze wschodu na zachód na szerokości geograficznej  $\varphi = 77^\circ 35'$ , aby lotnikowi wydawało się, że słońce stoi nieruchomo na orbicie? Co będzie przy locie bliżej bieguna z obliczoną powyżej prędkością?

2.51. Ile obrotów  $N$  dokona koło od momentu włączenia hamulca do momentu zatrzymania się, jeżeli w chwili rozpoczęcia hamowania wykonywało ono  $n = 1500$  obrotów na minutę, a zatrzymało się po upływie czasu  $t = 30$  s od chwili rozpoczęcia hamowania? Jakie jest przyspieszenie (opóźnienie)?

2.52. Wał poruszając się ruchem jednostajnie przyspieszonym wykonał  $n = 100$  obrotów w ciągu  $t_1 = 20$  s. Określić prędkość kątową wału przy końcu dwudziestej sekundy, jeżeli w chwili  $t = 0$  wał znajdował się w spoczynku?

2.53. Koło z czarnym sektorem o kącie środkowym  $\varphi = 40^\circ$  obraca się dokoła osi, przechodzącej przez środek koła prostopadle do powierzchni koła, dając  $n = 1500$  obrotów na minutę. Co zobaczymy na kole, jeżeli będziemy go oświetlać w ciemnym pokoju światłem migającym  $n_1 = 100$  razy na sekundę, przy czym każdy błysk trwa przez czas  $t = 0,003$  s (np. lampa neonowa zasilana prądem zmiennym)? Należy wziąć pod uwagę, że powierzchnia oświetlona światłem migającym częściej niż 10 razy na sekundę wydaje się tym jaśniejsza, im dłuższe są chwile, podczas których powierzchnia jest oświetlona.

2.54. Pociąg porusza się po łuku o promieniu krzywizny  $r = 400$  m, przy czym jego przyspieszenie styczne wynosi  $a_t = 0,2$  m/s<sup>2</sup>. Określić

przyspieszenie normalne  $a_n$  i całkowite przyspieszenie  $a$  pociągu w chwili, gdy jego prędkość wynosi  $v = 10$  m/s.

2.55. Koło o promieniu  $r = 10$  cm obraca się z takim przyspieszeniem, że liczba jego obrotów wzrasta o  $n_0 = 1/2$  na s. Znaleźć w końcu drugiej sekundy: 1) prędkość kątową obrotów koła, 2) prędkość liniową punktów na obwodzie koła, 3) normalne, styczne i pełne przyspieszenie punktów na obwodzie.

2.56. Po włączeniu silnika elektrycznego wirnik osiąga  $n = 1000$  obrotów na minutę w ciągu  $t = 5$  s. Określić przyspieszenie kątowe wirnika.

## 2.2. SPADANIE SWOBODNE CIAŁ. RZUT POZIOMY. RZUT UKOŚNY

Przykładami ruchu jednostajnie przyspieszonego są swobodny spadek i rzut pionowy w dół, przykładem zaś ruchu jednostajnie opóźnionego jest rzut pionowy do góry. Dla swobodnego spadku ciał słuszne są wzory:  $v_0 = 0$ ,  $v = gt$ ,  $s = \frac{1}{2}gt^2$ , dla rzutu zaś pionowego w dół, wzory:  $a = g$ ,  $v_0 \neq 0$ ,

$$v = v_0 + gt, \quad (2.24)$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2. \quad (2.25)$$

Dla rzutu pionowego do góry słuszne są wzory:

$$a = -g, \quad v_0 \neq 0,$$

$$v = v_0 - gt, \quad (2.26)$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (2.27)$$

Maksymalna wysokość  $h$  ciała rzuconego pionowo w górę z prędkością  $v_0$  wynosi

$$h = \frac{v_0^2}{2g}, \quad (2.28)$$

gdzie  $g$  oznacza przyspieszenie ziemskie, równe  $9,81$  m/s<sup>2</sup>.

**Rzut ukośny.** W rzucie ukośnym przyspieszenie  $\mathbf{a} = \mathbf{g} = \text{const}$  i prędkość  $v_0$ , w odróżnieniu od ruchu prostoliniowego jednostajnie przyspieszo-

nego, nie leżą na tej samej prostej. Jeżeli rzut ukośny zachodzi w płaszczyźnie  $x, y$ , przy czym prędkość początkowa  $v_0$  tworzy z osią  $x$  kąt  $\alpha$ , to ruch ten opisują następujące wzory:

$$\begin{aligned}
 a_x &= \frac{dv_x}{dt} = 0, & a_y &= \frac{dv_y}{dt} = -g, \\
 v_x &= \frac{dx}{dt} = v_{0x} = v_0 \cos \alpha; & v_y &= \frac{dy}{dt} = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt, \\
 x &= v_0 t \cos \alpha, \\
 y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Wysokość rzutu

$$h = y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \tag{2.30}$$

a zasięg rzutu

$$l = x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \tag{2.31}$$

## Zadania

– 2.57. Obliczyć drogę ciała swobodnie spadającego po upływie 1, 2, 3, 4 i 5 sekundy dla  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

– 2.58. Obliczyć prędkości chwilowe ciała swobodnie spadającego po upływie 1, 2, 3, 4 i 5 sekundy, gdy  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

– 2.59. Obliczyć prędkości ciała swobodnie spadającego po przebyciu drogi  $s = 1, 2, 3, 4$  i  $5 \text{ m}$ .

– 2.60. W jakim czasie ciało swobodnie spadające przebywa pierwszy centymetr drogi ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ )?

2.61. Ciało poruszające się ruchem jednostajnie przyspieszonym przebyło w ciągu czasu  $t = 10 \text{ s}$  drogę  $s = 30 \text{ m}$ , przy czym jego prędkość wzrosła  $n = 5$  razy. Obliczyć przyspieszenie.

2.62. Ciało porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, przebywając kolejno dwa równe odcinki drogi  $s = 15 \text{ m}$  w czasach  $t_1 = 2 \text{ s}$  i  $t_2 = 1 \text{ s}$ . Znaleźć przyspieszenie ciała  $a$  i prędkość na początku pierwszego odcinka.

– 2.63. W jakim czasie  $t$  spadnie ciało z wysokości  $h = 200$  m i jaką uzyska prędkość  $v$  po przebyciu tej drogi (opór powietrza zanedbać);  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>?

2.64. Z określonego miejsca wyruszyły w tym samym kierunku dwa ciała: jedno ruchem jednostajnym z prędkością  $v = 96$  m/s, a drugie ruchem jednostajnie przyspieszonym z prędkością początkową  $v_0 = 10$  m/s i przyspieszeniem  $a = 8,8$  m/s<sup>2</sup>. Po jakim czasie drugie ciało dogoni pierwsze?

2.65. Z wysoko wzniesionego miejsca opuszczamy kolejno co  $\frac{1}{4}$  s sześć kul. W jakich odstępach od siebie znajdą się kule po upływie  $1\frac{1}{4}$  s, licząc od momentu opuszczenia pierwszej kuli?

2.66. W jakim odstępie czasu  $T$  oderwały się dwie krople wody od krawędzi dachu, jeżeli po upływie czasu  $t = 2,5$  s, licząc od oderwania się drugiej kropli, odległość między kroplami wynosiła  $s = 30$  m?

2.67. Z jaką prędkością początkową  $v_0$  należy rzucić piłkę w dół, aby podskoczyła ona na wysokość  $h = 15$  m powyżej poziomu wyrzucenia (tarcie powietrza zanedbać, a piłkę uważać za doskonale sprężystą)?

– 2.68. Ciało, spadając swobodnie, ma w punkcie  $A$  prędkość  $v_1 = 29,43$  m/s, a w punkcie  $B$  prędkość  $v_2 = 49,05$  m/s. Jaka jest długość  $AB$  i w jakim czasie ciało przebyło tę drogę?

2.69. W szybie z punktu  $A$  spada swobodnie kulka. Po upływie czasu  $t_1 = 1,5$  s zaczyna spadać swobodnie druga kulka z punktu  $B$ . Obie kulki osiągają równocześnie punkt  $C$ . Obliczyć odległość  $s = BC$  i czas  $t$  spadania kulki z punktu  $B$ , jeżeli odległość  $AB$  wynosi  $l = 58,86$  m.

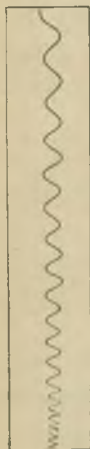
2.70. W celu wyznaczenia głębokości studni opuszcza się kamień tak, aby mógł swobodnie spadać. Po upływie czasu  $T = 6$  s słyszy się uderzenie kamienia o powierzchnię wody. Jak głęboka jest studnia, jeżeli prędkość głosu  $v = 334$  m/s?

2.71. Obliczyć czas wznoszenia się oraz osiągniętą wysokość  $h$  ciała rzuconego pionowo w górę z prędkością  $v_0 = 50$  m/s.

2.72. Obliczyć prędkość wznoszenia się oraz wysokość, na jakiej znajduje się pocisk po upływie czasu  $t = 4$  s od chwili wystrzału, jeżeli jest on wystrzelony pionowo w górę z prędkością początkową  $v_0 = 200$  m/s. Przyspieszenie ziemskie  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>.

2.73. Z jaką prędkością początkową  $v$  należy rzucić ciało pionowo do góry, aby wróciło ono po upływie czasu  $t = 12$  s od momentu wyrzutu?

**2.74.** Krzywą falową na rys. 2.2 uzyskano na zakopconej płycie szklanej, która spadając pionowo w dół dotyka ostrza przymocowanego do drgających swobodnie widełek stroikowych. Przekonać się, że ruch płytki był w przybliżeniu jednostajnie przyspieszony. Obliczyć przyspieszenie, jeżeli widełki stroikowe dają  $N = 128$  drgań na sekundę.



Rys. 2.2

**2.75.** Pomiary krzywej rysowanej (rys. 2.2) przez widełki stroikowe  $N = 128$  na spadającej w dół okopconej płycie szklanej dały następujące rezultaty:

a) przy  $n = 5$ , kolejne wartości na  $s_i = 6,31; 7,28; 8,20; 9,15; 10,10$  cm.

b) przy  $n = 4$ , kolejne  $s_i = 8,00; 9,50; 11,00; 12,46$  cm. Obliczyć przyspieszenie ziemskie (patrz rozwiązanie zadania 2.74).

**2.76.** Ciało spadając swobodnie przebywa ostatnie  $h_1 = 20$  m swej drogi w ciągu  $\tau = 0,5$  s. Znaleźć wysokość  $h$ , z jakiej spada ciało. Przyspieszenie ziemskie  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>.

**2.77.** Z jakiej wysokości  $h$  spadało ciało, jeżeli w ostatniej sekundzie padania przebyło ono drogę  $h_1 = 24,5$  m?

**2.78.** Ciało swobodnie spadające przebyło w ostatniej sekundzie  $2/3$  swojej drogi. Znaleźć drogę  $s_2$  przebytą przez to ciało oraz czas  $t$  spadania.

**2.79.** Z jaką prędkością początkową  $v_0$  należy rzucić ciało pionowo w dół z wysokości  $h = 45$  m, by spadło ono o  $t = 1$  s wcześniej niż przy swobodnym spadaniu?

**2.80.** Dlaczego ciągły strumień cieczy, wypływającej z rury, rozrywa się na pewnej wysokości na poszczególne krople?

**2.81.** Z pionowej rury wysypuje się piasek tak, że struga piasku zachowuje przekrój rury. Jaka jest gęstość  $\rho$  strugi w odległości  $s = 4,9$  m od wylotu rury, jeżeli prędkość wylotu wynosi  $v_0 = 2$  m/s, gęstość zaś strugi u wylotu wynosi  $\rho_0 = 1,8$  g/cm<sup>3</sup>?

**2.82.** Ciało  $A$  zostaje rzucone w górę z prędkością  $v_1 = 49$  m/s, a równocześnie z wierzchołka jego toru z tą samą prędkością zostaje rzucone ciało  $B$  na dół. Kiedy, gdzie i z jaką prędkością spotkają się te ciała?

**2.83.** Ciało  $A$  zostaje rzucone pionowo w górę z prędkością  $v = 50$  m/s, a po upływie czasu  $t = 1$  s zostaje wyrzucone ciało  $B$  z tą samą prędkością w tym samym kierunku. Kiedy, gdzie i z jaką prędkością spotkają się te ciała?

**2.84.** Z prędkością początkową  $v_0 = 2$  m/s rzucamy do góry kulkę



po płaszczyźnie nachylonej pod kątem  $\alpha = 35^\circ$  do poziomu. Jak długą drogę przebędzie kulka do góry? Na jakiej wysokości  $h$  nad poziomem będzie się znajdowała w momencie najwyższego wzniesienia?

**2.85.** Ciało porusza się po płaszczyźnie nachylonej pod kątem  $\alpha = 32^\circ$  w górę z prędkością początkową  $v_0 = 54$  m/s. Jak długo będzie się ciało poruszało i w jakim czasie przebiegnie drogę  $s$ ?

**2.86.** Wyznaczyć czas spadania i prędkość końcową ciała spadającego z najwyższego punktu wzdłuż cięciwy koła o promieniu  $r$ . Koło znajduje się w płaszczyźnie pionowej, cięciwa tworzy z kierunkiem pionowym kąt  $\alpha$ .

**2.87.** Z pewnego punktu  $M$  wyrzuca się szereg kuleczek we wszystkich kierunkach płaszczyzny pionowej, równocześnie i z jednakową prędkością  $v$ . Udowodnić, że (jeśli zaniedbamy opór powietrza) w każdej chwili wszystkie te kuleczki znajdują się na wspólnym okręgu. Obliczyć promień okręgu po upływie czasu  $t$  od momentu wyrzutu.

**2.88.** Ciało zostało rzucone w kierunku poziomym z prędkością  $v_0$ . Jaką prędkość skalarną ma ono zniżywszy się o  $s$  pod poziom tego punktu, z którego było rzucone?

**2.89.** Z jakiej wysokości  $h$  rzucono poziomo kamień z prędkością początkową  $v = 30$  m/s, jeżeli spadł on na ziemię w odległości  $s = 80$  m od miejsca wyrzutu?

**2.90.** Z wysokości  $h = 4,9$  m nad poziomem ziemi wystrzelono w kierunku poziomym kulę z prędkością początkową  $v = 700$  m/s. Jak daleko od miejsca wystrzału spadnie kula na ziemię (tarcie powietrza zaniedbać)?

**2.91.** Z jaką prędkością należy rzucić ciało z pewnej wysokości  $h$  w kierunku poziomym, żeby droga pozioma przebyta przez to ciało była  $n$  razy większa od wysokości spadania?

**2.92.** Kamień rzucony w kierunku poziomym z wysokości  $h = 2$  m nad poziomem spadł w odległości  $s = 7$  m od miejsca wyrzucenia. Znaleźć prędkość  $v_0$ , z jaką kamień został wyrzucony oraz prędkość końcową  $v$  kamienia.

**2.93.** Oznaczając przez  $x$  odciętą punktu, w jakim znajduje się w chwili  $t$  ciało rzucone ukośnie z prędkością  $v_0$  pod kątem  $\alpha$  do góry, a przez  $y$  rzędną tego punktu, znaleźć równanie toru. Z otrzymanego równania wyprowadzić wzory na wysokość rzutu oraz zasięg rzutu. Przedyskutować wyniki w zależności od wartości kąta. Obliczyć czas trwania rzutu.

**2.94.** Kamień wyrzucono z prędkością  $v_0 = 20$  m/s pod kątem  $60^\circ$ . Obliczyć czas, jaki upłynął od momentu wyrzucenia kamienia do momentu, gdy uderzy o Ziemię.



2.95. Kamień rzucono z prędkością  $v_0 = 30$  m/s pod kątem  $\alpha = 45^\circ$  do poziomu. Wyznaczyć promień krzywizny toru: a) w najwyższym punkcie, b) w chwili uderzenia o Ziemię.

2.96. Obliczyć wysokość  $h$  i zasięg  $l$  rzutów ukośnych pod kątami  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $60^\circ$  dla prędkości początkowej  $v_0 = 20$  m/s bez uwzględniania oporu powietrza.

2.97. Wyrzucono kamień pod kątem  $\alpha = 40^\circ$  do poziomu z prędkością początkową  $v_0 = 36$  m/s. Na jaką wysokość  $h$  wzniesie się kamień i jaki czas  $t$  będzie przebywał w powietrzu? W jakiej odległości  $l$  od miejsca wyrzutu spadnie i gdzie będzie się znajdował po upływie czasu  $t_1 = 3$  s?

2.98. Pod jakim kątem  $\alpha$  do poziomu należy rzucić ciało, żeby wysokość wzniesienia równała się zasięgowi rzutu?

2.99. Struga wody opuszcza rurę z prędkością  $v = 30$  m/s pod kątem  $\alpha = 40^\circ$  do poziomu. Na jakiej wysokości trafia ona ścianę, znajdującą się w odległości  $d = 60$  m od wylotu strugi (zaniedbać tarcie powietrza)?

2.100. Określić prędkość początkową kuli armatniej wystrzelonej pod kątem  $\alpha = 30^\circ$  do poziomu, jeżeli upadła ona na Ziemię w odległości  $s = 10,5$  km od miejsca wystrzału, a tarcie powietrza zmniejszyło długość lotu kuli  $n = 4$  razy.

2.101. Z tego samego miejsca na pewnej wysokości  $h$  wyrzucono równocześnie dwa ciała, jedno do góry, drugie w dół pod kątem  $\alpha = 45^\circ$  do poziomu z prędkością  $v = 30$  m/s. Określić różnicę poziomów, na których znajdują się oba ciała po upływie czasu  $t = 2$  s od momentu wyrzutu.

2.102. Kamień wyrzucony z wysokości  $h = 2,1$  m nad poziomem Ziemi pod kątem  $\alpha = 45^\circ$  do poziomu, spadł na ziemię w odległości  $s = 42$  m od miejsca wyrzutu. Z jaką prędkością  $v$  kamień został wyrzucony, jak długo był w ruchu i jaką maksymalną wysokość osiągnął?

2.103. Pod jakim kątem do poziomu należy rzucić ciało, aby wysokość  $h$  jego wzniesienia równała się  $0,5$  zasięgowi rzutu?

2.104. Bomba rzucona z samolotu lecącego na wysokości  $h = 1200$  m trafiła cel znajdujący się na Ziemi. Obliczyć prędkość  $v$  samolotu, który wyrzucił bombę z odległości  $s = 900$  m od celu, liczonej w kierunku poziomym.

2.105. Samolot leci na wysokości  $h$  po linii poziomej z prędkością  $v$ . Lotnik ma rzucić bombę na cel znajdujący się na Ziemi przed samolotem. Pod jakim kątem do pionu powinien widzieć lotnik swój cel w momencie

wyrzucania bomby? Jaka jest w tym momencie jego odległość do celu liczona w kierunku poziomym?

**2.106.** Z jaką prędkością wyrzucono kamień w kierunku poziomym. z góry mającej średnią pochyłość  $\alpha$  do horyzontu, jeżeli kamień upadł na zbocze góry w odległości  $l$  od miejsca wyrzutu?

**2.107.** Całkowicie elastyczna kula spadła swobodnie na płaszczyznę pochyłą o kącie nachylenia  $\alpha = 30^\circ$ , przebywając drogę  $h$  do punktu zderzenia się, odbija się i uderza powtórnie tę płaszczyznę w drugim punkcie. Znaleźć odległość tych punktów.

**2.108.** Obliczyć prędkość danego punktu w ruchu obrotowym Ziemi: a) na równiku, b) na szerokości geograficznej  $\varphi = 48^\circ 24'$ . Obliczyć przyspieszenie odśrodkowe w punkcie o szerokości geograficznej  $\varphi$ . Promień kuli ziemskiej wynosi 6370 km.

**2.109.** Prędkość kuli można obliczyć z obniżenia jej toru  $h$  na danej odległości  $L$  przy wystrzale poziomym. Obniżenie toru wyznacza się z przebiccia kulą dwu kartonów umieszczonych w odległości  $L$  na torze kuli. Wykonać przeliczenia.

**2.110.** Kula przebija dwie tarcze obracające się równocześnie na wspólnej osi z częstotliwością  $n = 2810/\text{min}$ . Odległość tarcz wynosi  $l = 32$  cm. Kąt przesunięcia przebitego otworu w drugiej tarczy względem pierwszej wynosi  $\varphi = 16^\circ$ . Obliczyć prędkość pocisku.

### 2.3. ZASADY DYNAMIKI. PRACA, MOC, ENERGIA

Podstawą dynamiki są trzy prawa dynamiki Newtona, które obowiązują w układach inercjalnych.

**Pierwszą zasadę dynamiki** (prawo bezwładności) można wyrazić następująco: istnieje taki układ odniesienia, w którym punkt materialny, na który nic nie działa, spoczywa lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Układ taki nazywamy inercjalnym. Pierwszą zasadę można zatem wypowiedzieć następująco: istnieje układ inercjalny.

Jeżeli wzajemne oddziaływanie ciał określimy mianem siły, wówczas pierwszą zasadę dynamiki można również wyrazić następująco: istnieje taki układ odniesienia, w którym punkt materialny, na który nie działają żadne siły, spoczywa lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

**Drugą zasadę dynamiki** można wyrazić następująco: siła  $F$ , działająca

na punkt materialny  $m$ , jest proporcjonalna do iloczynu masy i przyspieszenia, czyli

$$F = m \cdot a. \quad (2.32)$$

Jeżeli na punkt materialny działa kilka sił, to  $F$  w powyższym wzorze określa wypadkową wszystkich sił działających na punkt materialny, a zaś — uzyskane przez punkt przyspieszenie. Powyższy związek można napisać również w postaci

$$F \Delta t = \Delta(mv), \quad (2.33)$$

gdzie  $\Delta t$  oznacza czas działania siły,  $mv$  — pęd ciała,  $\Delta(mv)$  — przyrost pędu.

Wzór (2.33) można przedstawić również następująco, w postaci całkowej

$$\int F dt = p - p_0. \quad (2.34)$$

Całkę  $\int F dt = i$  nazywamy popędem siły  $F$ . Szczególnym przykładem siły jest ciężar ciała

$$G = mg, \quad (2.35)$$

gdzie  $g$  oznacza przyspieszenie ziemskie, a  $m$  — masę ciała.

W obowiązującym obecnie, międzynarodowym układzie jednostek miar SI, jednostką siły jest 1 niuton,  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2$ .

Dotychczas w mechanice był najczęściej w użyciu ciężarowy układ jednostek. Jednostką siły w tym układzie jest

$$1 \text{ kG} = 1 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 9,81 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 9,81 \text{ N}.$$

**Trzecia zasada dynamiki** (prawo akcji i reakcji) brzmi następująco: Siły, z jakimi oddziałują na siebie wzajemnie dwa punkty materialne są równe co do wielkości, lecz przeciwnie skierowane.

Układ poruszający się względem układu inercyjnego z przyspieszeniem nazywa się nieinercyjnym.

**W układach nieinercjalnych**, oprócz sił  $F$ , będących wynikiem wzajemnego oddziaływania ciał, występują siły bezwładności  $F_b$ . W układach nieinercjalnych II zasadę dynamiki napiszemy w postaci

$$F + F_b = ma. \quad (2.36)$$

Jeżeli układ nieinercjalny porusza się względem układu inercyjnego z przyspieszeniem  $a_1$ , wówczas

$$F_b = -ma_1. \quad (2.37)$$

W przypadku, gdy układ nieinercyjny porusza się ruchem obrotowym ze stałą prędkością kątową  $\omega$  względem układu inercyjnego, siły oporu bezwładnego mają postać:

$$\mathbf{F}_b = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_c, \quad (2.38)$$

gdzie

$$\mathbf{F}_0 = m(\omega \times \mathbf{r}) \times \omega \quad (2.39)$$

i nazywa się siłą odśrodkową, zaś

$$\mathbf{F}_c = -2m(\omega \times \mathbf{u}) \quad (2.40)$$

i nazywa się siłą Coriolisa. Jeżeli  $\omega \perp \mathbf{r}$ , wówczas wartość liczbowa

$$F_0 = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r. \quad (2.41)$$

W powyższych wzorach  $\mathbf{r}$  jest wektorem wodzącym punktu materialnego o masie  $m$  względem punktu odniesienia leżącego na osi obrotu, a wektor  $\mathbf{u}$  oznacza prędkość punktu materialnego względem układu nieinercyjnego.

**Moment siły  $\mathbf{F}$**  względem pewnego punktu odniesienia  $O$  określamy wzorem

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (2.42)$$

gdzie  $\mathbf{r}$  jest wektorem wodzącym punktu przyłożenia siły  $\mathbf{F}$ .

**Moment pędu albo kręt  $\mathbf{L}$**  punktu materialnego względem punktu odniesienia  $O$  określamy wzorem

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}, \quad (2.43)$$

gdzie  $\mathbf{r}$  jest wektorem wodzącym punktu materialnego.

Między momentem siły działającym na punkt materialny a krętem punktu materialnego względem tego samego punktu odniesienia istnieje związek

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (2.44)$$

Jest to odmienna postać II zasady dynamiki.

## Układ punktów materialnych

Podobnie jak dla pojedynczego punktu materialnego, również dla układu punktów materialnych można napisać II zasadę dynamiki w dwóch postaciach.

Suma wszystkich sił zewnętrznych działających na poszczególne punkty układu równa się pochodnej względem czasu wypadkowego pędu punktów układu

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (2.45)$$

gdzie  $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$ , zaś  $\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_i$ .

Powyższe prawo jest równoważne tzw. prawu ruchu środka masy, które mówi, że pod działaniem sił zewnętrznych środek masy układu punktów materialnych (ciała) porusza się tak, jak gdyby była w nim skupiona cała masa układu i przyłożona wypadkowa wszystkich sił działających na układ. Powyższe prawo można wyrazić następującym równaniem

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}, \quad (2.46)$$

gdzie  $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$  jest sumą wektorową sił działających na układ punktów materialnych (ciało), a  $M$  — masą całkowitą układu punktów materialnych. Wzory określające współrzędną środka masy oraz zadania na ten temat zamieszczone są w rozdziale 2.5.

Jeżeli na układ nie działają siły zewnętrzne lub suma sił zewnętrznych jest równa 0, wówczas środek masy układu porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym lub pozostaje w spoczynku. Powyższe stwierdzenie można napisać następująco:

$$\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{v}_i = \text{const.} \quad (2.47)$$

Układ, na który nie działają siły zewnętrzne lub wypadkowa sił równa jest 0, nazywamy układem odosobnionym (izolowanym). Wzór (2.47) wyraża zasadę zachowania pędu: całkowity pęd układu odosobnionego jest stały.

Prawo krętu i impulsu momentu siły można wyrazić następująco: suma momentów sił zewnętrznych, działających na poszczególne punkty materialne układu względem pewnego punktu odniesienia, jest równa pochodnej względem czasu całkowitego krętu układu

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (2.48)$$

gdzie  $\mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ , zaś  $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$ .

W przypadku, gdy  $M = 0$

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \text{const.} \quad (2.49)$$



Powyższy wzór wyraża zasadę zachowania krętu: całkowity kręt układu odosobnionego jest wielkością stałą.

Pracę  $A$  siły  $\mathbf{F}$  na określonym odcinku drogi wyrażamy wzorem

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} dr = \int_{r_1}^{r_2} F dr \cos(\mathbf{F}, dr), \quad (2.50)$$

gdzie  $\mathbf{r}_1$  jest wektorem wodzącym w początkowym, a  $\mathbf{r}_2$  — w końcowym punkcie drogi, po której porusza się punkt przyłożenia siły  $\mathbf{F}$ .

Moc wyraża się wzorem

$$P = \frac{dA}{dt}. \quad (2.51)$$

Jeżeli wartość pracy rośnie proporcjonalnie do czasu, wówczas moc można wyrazić wzorem

$$P = \frac{A}{t}, \quad (2.52)$$

gdzie  $A$  oznacza pracę wykonaną w czasie  $t$ .

Punkt materialny poruszający się z prędkością  $v$  ma energię kinetyczną

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.53)$$

**Energia potencjalna.** Ciało, wzniesione na wysokość  $h$  nad poziom morza i będące w spoczynku, ma energię potencjalną

$$E_p = mgh. \quad (2.54)$$

**Zasada zachowania energii.** W układzie odosobnionym  $E_k + E_p = \text{const}$ .

Całkowita energia układu odosobnionego jest wielkością stałą. Dobrą ilustracją zasady zachowania energii mechanicznej i zasady zachowania pędu jest zjawisko zderzenia się kul.

**Zderzenia kul.** Rozróżniamy zderzenia kul: a) niesprężyste, b) sprężyste.

a) W przypadku zderzenia niesprężystego kule po zderzeniu poruszają się z tą samą prędkością wspólną  $v$ . Przy zderzeniu niesprężystym część energii mechanicznej zamienia się na ciepło, dlatego w tym przypadku stosuje się jedynie zasadę zachowania pędu. Jeżeli  $m$ ,  $M$  i  $v_1$ ,  $V_1$  oznaczają odpowiednio masy i prędkości kul przed zderzeniem,  $v$  zaś wspólną prędkość obu kul po zderzeniu, to

$$mv_1 + MV_1 = mv + Mv, \quad (2.55)$$



$$v = \frac{mv_1 + MV_1}{m + M}; \quad (2.56)$$

b) w przypadku zderzenia sprężystego kule poruszają się po zderzeniu każda ze swoją prędkością  $v_2$  i  $V_2$ . W tym przypadku słuszne są obie zasady, tj. zasada zachowania pędu

$$mv_1 + MV_1 = mv_2 + MV_2$$

oraz zasada zachowania energii mechanicznej

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{MV_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{MV_2^2}{2},$$

skąd

$$v_2 = \frac{M - m}{M + m} v_1 + \frac{2M}{M + m} V_1, \quad (2.57)$$

$$V_2 = \frac{M - m}{M + m} V_1 + \frac{2m}{M + m} v_1.$$

## Zadania

2.111. Na ciało o masie  $m = 500$  g działa siła  $F = 10$  N przez czas  $t = 4$  s. Jakim ruchem porusza się ciało podczas działania siły? Jaka będzie prędkość końcowa  $v$  ciała? Ile wynosi droga  $s$  przebyta przez to ciało? Jaka jest prędkość średnia?

2.112. Siła  $F = 5$  kG działa na swobodną masę  $m = 20$  kg na drodze  $s = 2$  m. Z jaką prędkością poruszać się będzie ciało, gdy siła przestanie działać?

2.113. Obliczyć przyspieszenie, jakiego doznaje ciało o masie  $m = 25$  kg pod działaniem siły  $F = 30$  kG. Przeprowadzić obliczenia w jednostkach układu CGS i w jednostkach układu ciężarowego.

2.114. Obliczyć w  $\text{cm/s}^2$  i  $\text{m/s}^2$  przyspieszenia, jakich doznaje ciało o masie  $m = 10$  kg pod działaniem sił: 1) 1000 dyn, 2) 1 kG.

2.115. Siła  $F = 12$  kG działając na ciało przez  $t = 15$  s przesunęła je o  $s = 600$  m. Jaka jest masa danego ciała w jednostkach układu SI?

2.116. Obliczyć siłę  $F$ , pod której działaniem ciało o masie  $m = 20$  kg uzyskało prędkość  $v = 100$  m/s w czasie  $t = 5$  s.

— 2.117. Jaką siłą musi działać lokomotywa, by pociąg o masie  $m = 600$  ton nabrał prędkości  $v = 72$  km/h po upływie czasu  $t = 5$  minut? Siłę tarcia pomijamy.

2.118. Samochód ważący  $Q = 3$  Tony porusza się z prędkością  $v = 36$  km/h. Jak wielka musi być siła hamowania, by mogła zatrzymać ten samochód na drodze  $s = 50$  m?

2.119. Lokomotywa o ciężarze  $Q = 93$  Tony i prędkości  $v = 40$  m/s hamowana jest stałą siłą; przebywa ona w ten sposób drogę  $s = 6,4$  km. Jaka jest siła hamowania?

2.120. Wagon o masie  $m = 16$  ton porusza się z prędkością  $v = 5$  m/s. Obliczyć średnią siłę działającą na wagon, gdy: a) zatrzymuje się on pod wpływem tarcia w ciągu jednej minuty, b) gdy zostaje zahamowany w ciągu 15 s, c) gdy natrafia na przeszkodę i zatrzymuje się w ciągu 0,5 s.

2.121. Pojazd o masie  $m = 200$  kg porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym i przebywa w czasie  $t = 15$  s drogę  $s = 225$  m. Z jakim przyspieszeniem poruszał się pojazd? Obliczyć siłę, która nadała to przyspieszenie. Tarcie pominąć.

2.122. Jaką pochyłość muszą mieć dachy, żeby woda spływała po nich w najkrótszym czasie?

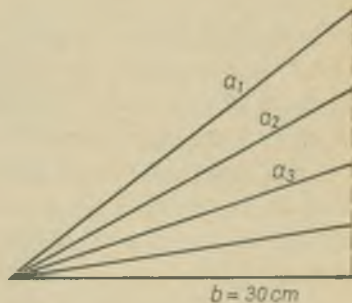
2.123. Płaszczyzny  $a_1, a_2, a_3$ , nachylone do poziomu, mają wspólny rzut poziomy o długości  $b = 30$  cm (rys. 2.3). Jaki powinien być kąt nachylenia płaszczyzny, aby czas ześlizgiwania się po niej wynosił  $t = 0,5$  s?

2.124. Wyjaśnić, jak działa maszyna Atwooda i jak za jej pomocą można wyznaczyć przyspieszenie ziemskie?

2.125. Na końcach nici przerzuconej przez krążek o bardzo małej masie zawieszono są dwa ciężarki o masach  $m_1 = 500$  g i  $m_2 = 520$  g. Z jakim przyspieszeniem porusza się większy z tych ciężarków w dół?

2.126. Na maszynie Atwooda zawieszono są masy  $m_1 = 99$  g i  $m_2 = 101$  g. Przyspieszenie ruchu wynosi  $a = 9,8$  cm/s<sup>2</sup>. Obliczyć przyspieszenie ziemskie.

2.127. Dwa odważniki, każdy o masie  $m = 400$  g, zrównoważone są na krążku nieruchomym na wysokości  $h = 4,9$  m nad powierzchnią Ziemi.



Rys. 2.3

Po jakim czasie spadnie jeden z odważników na Ziemię, jeżeli położy się na niego bez pchnięcia ciało o masie  $m_1 = 100$  g? Zakładamy, że krążek porusza się bez tarcia i jego masę można zaniedbać.

**2.128.** Jakie jest przyspieszenie układu ciał w maszynie Atwooda, jeżeli  $M = 70$  g, zaś  $m = 2$  g, a wpływ ruchu krążka uwzględnia się przyjmując  $\mu = 54$  g. Wykonać przeliczenie dla  $M = 160$  g i  $m = 4$  g oraz  $M = 264$  g i  $m = 6$  g.

**2.129.** Używając maszyny Atwooda przy zadanych wartościach na  $M = 70$  g,  $m = 4$  g i  $\mu = 54$  g, uzyskano następujące wartości: na drogę przebytą ruchem jednostajnie przyspieszonym  $s = (50; 80; 110; 140 \text{ i } 170)$  cm, na czas spadania po tej drodze  $t = (2,37; 2,93; 3,39; 3,75; 9,15)$  s. Obliczyć przyspieszenie ziemskie z poszczególnych pomiarów oraz wartość średnią.

**2.130.** Obliczyć przyspieszenie układu maszyny Atwooda, jeżeli dodatkową masę  $m$  zdjęto po przebyciu drogi  $s_0 = 80$  cm; całkowita droga wynosiła  $s = 140$  cm, a czas spadania  $t = 5,89$  s.

**2.131.** Na nici przerzuconej przez blok zawieszono są nierówne masy  $M = 200$  g i  $M + m = 210$  g. Znaleźć przyspieszenie mas, napięcie nici  $T$  i siłę  $F$  działającą na oś bloku. Blok i nić przyjąć jako bardzo lekkie. Pominąć tarcie.

**2.132.** Nieruchomy blok zawieszony jest na dynamometrze. Przez blok przerzucony jest sznurek z ciężarkami. Co pokaże dynamometr? Masy ciężarków  $M = 3$  kg i  $M + m = 10$  kg.

**2.133.** Na końcach nici przerzuconej przez krążek wiszą na tej samej wysokości dwa ciała o różnych masach. Po upływie czasu  $t = 2$  s od momentu rozpoczęcia ruchu pod wpływem siły ciężkości, różnica poziomów pomiędzy odważnikami wynosiła  $h = 1,0$  m. Ile waży cięższy odważnik, jeżeli masa lżejszego wynosi  $M = 0,3$  kg?

**2.134.** Na gładkiej poziomej płaszczyźnie znajduje się ciało o masie  $m$ . Druga masa  $M$  zawieszona jest na nici przerzuconej przez blok i przyczepionej do masy  $m$ . Znaleźć przyspieszenie, z jakim poruszają się obie masy.

**2.135.** Na gładkiej poziomej płaszczyźnie znajdują się trzy ciała o masach  $m_1, m_2, m_3$ , połączone ze sobą lekkimi nićmi. Masa  $M$  zawieszona jest na lekkiej nici przerzuconej przez krążek. Drugi koniec tej nici zaczepiony jest do masy  $m_3$ . Znaleźć przyspieszenie, z jakim poruszają się ciała. Tarcie na płaszczyźnie i bloczku zaniedbujemy. Bloczek przyjmujemy jako bardzo lekki. Znaleźć naciąg  $N$  poszczególnych nici.

**2.136.** Na równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha$  do poziomu znajduje się

ciało o masie  $m$ . Na górnej krawędzi równi przymocowano krążek, przez który została przerzucona nić. Jeden koniec nici został przywiązany do ciała  $m$ , na drugim końcu wisi ciało o masie  $M$ . Znaleźć przyspieszenie  $a$ , z jakim poruszają się ciała i naciąg nici  $N$ , zaniedbując tarcie, masę nici i masę krążka.

2.137. Kula o masie  $m = 10$  g opuszcza lufę karabinu z prędkością  $v = 875$  m/s. Określić średnią siłę, wywieraną na kulę przez gazy prochu oraz czas lotu kuli w lufie, jeżeli długość lufy wynosi  $l = 1,2$  m.

2.138. Młot parowy o masie  $m = 3,5$  tony pada na kowadło z wysokości  $h = 2,5$  m. Obliczyć siłę uderzenia młota, jeżeli uderzenie trwa  $t = 0,01$  s.

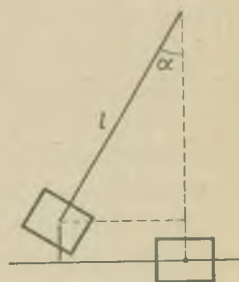
2.139. Zderzają się dwie kule niesprężyste o masach  $m = 4$  kg i  $M = 5$  kg poruszające się z prędkościami  $v_1 = 3$  m/s i  $V_1 = 6$  m/s. Obliczyć prędkość  $v$  kul po zderzeniu.

2.140. Dwie kule o masach  $M = 8$  kg i  $m = 4$  kg poruszające się po tej samej linii prostej zatrzymują się w zderzeniu centralnym. Określić prędkość większej kuli przed zderzeniem, jeżeli mniejsza kula poruszała się z prędkością  $v_1 = 3$  m/s.

2.141. Dwie kule o masach  $M = 5$  kg i  $m = 3$  kg poruszające się z prędkościami  $V_1 = 12$  cm/s i  $v_1 = 4$  cm/s zderzają się centralnie. Obliczyć prędkości kul po zderzeniu: a) w przypadku kul niesprężystych, b) w przypadku kul doskonale sprężystych.

2.142. Łódź o ciężarze  $Q = 150$  kG stoi w nieruchomej wodzie. Znajdujący się w łodzi człowiek o ciężarze  $P = 70$  kG przechodzi z dzioba łodzi na rufę. Jaka jest długość łodzi  $l$ , jeżeli przesunęła się ona przy tym o  $s = 1,4$  m, a tarcie w wodzie można zaniedbać?

2.143. W celu zmierzenia prędkości pocisku posługujemy się tak zwanym wahadłem balistycznym. Składa się ono z ciała o dużej masie (worek z piaskiem) zawieszono na sztywnym pręcie (rys. 2.4). Gdy kula wystrzelona zostanie zahamowana w danej masie wahadła, jej pęd udzieli się tej masie. Z kąta wychylenia wahadła  $\alpha = 31^\circ$  i długości wahadła  $l = 90$  cm obliczyć prędkość  $v$  kuli o masie  $m = 10$  g, jeżeli masa wahadła wynosi  $M = 5$  kg.



Rys. 2.4

2.144. Kula stalowa o masie  $m = 5$  kg pada z wysokości  $h = 51,0$  cm



na gładką powierzchnię poziomą i po odbiciu wznosi się ponownie na wysokość  $h_1 = 39,3$  cm. Jaki pęd oddaje kula płaszczyźnie w czasie uderzenia?

**2.145.** Platforma kolejowa o ciężarze  $Q_1 = 19$  Ton porusza się z prędkością  $v = 20$  km/h. Na platformie znajduje się armata o ciężarze  $Q_2 = 1,5$  Ton, której lufa skierowana jest poziomo w kierunku ruchu platformy. Jaka prędkość  $v_2$  uzyska platforma po wystrzale z armaty, jeżeli pocisk o masie  $m_3 = 60$  kg wylatuje z prędkością  $v_1 = 800$  m/s?

**2.146.** Trzy doskonale sprężyste kulki o masach  $m_1 = 60$  g,  $m_2 = 50$  g i  $m_3 = 40$  g wiszą na pionowych równoległych nitkach tak, że ich środki leżą na jednej prostej, a powierzchnie stykają się ze sobą. Pierwsza z nich, odchylna w płaszczyźnie zawieszenia, uderza o drugą z prędkością  $\alpha = 30$  cm/s. Jaka prędkość uzyska ostatnia z kulek?

**2.147.** Rozwiązać poprzednie zadanie, w przypadku gdy kulki mają równe masy  $m_1 = m_2 = m_3$ , a pierwsza kulka odchylna w płaszczyźnie zawieszenia uderza o drugą z prędkością  $v = \alpha$ .

**2.148.** Piłka o masie  $m = 200$  g uderza o ścianę i odbija się bez straty prędkości, tworząc z normalną do ściany kąt  $\alpha = 60^\circ$ . Kąt odbicia równy jest kątowi padania. Prędkość piłki  $v = 5$  m/s, czas zetknięcia się piłki ze ścianą  $t = 0,05$  s. Obliczyć siłę uderzenia.

**2.149.** Kula wylatuje z lufy karabinu z prędkością  $v = 600$  m/s, masa kuli wynosi  $m = 10$  g, masa karabinu  $M = 3,75$  kg. Wyznaczyć prędkość  $v$  odskoku karabinu podczas wystrzału.

**2.150.** Wyznaczyć, z jaką siłą działa karabin na ramię strzelca przy wystrzale, przyjmując, że ze strony karabinu działa stała siła i przesuwam ramię strzelca o  $s = 1,5$  cm, jednocześnie zaś kula opuszcza lufę. Masa karabinu  $M = 5$  kg, masa kuli  $m = 10$  g, prędkość kuli przy wylocie z lufy  $v = 500$  m/s.

**2.151.** Ciężar o masie  $m = 1,5$  ton spadając z wysokości  $h = 1$  m wbija pal do Ziemi na głębokość  $l = 5$  cm. Znaleźć siłę  $P$  oporu Ziemi oraz czas  $t$  trwania uderzenia zakładając, że uderzenie jest niesprężyste.

**2.152.** Młot o masie  $m = 1,5$  kg porusza się z prędkością  $v = 10$  m/s. Uderza on w głowę gwoźdźcia i wciska go w drzewo na głębokość  $h = 1$  cm. Jaka siłą go wciska?

**2.153.** Ciężar o masie  $m = 1$  kg zawieszony jest na nici, za pomocą której raz jest podnoszony do góry, raz opuszczany na dół z przyspieszeniem  $a = 0,5$  m/s<sup>2</sup>. Jaki jest naciąg nici w obu przypadkach?

**2.154.** W windzie zawieszony jest na wadze sprężynowej ciężar

$P = 1 \text{ kG}$ . Jak porusza się winda w chwili, gdy waga sprężynowa pokazuje wychylenie odpowiadające ciężarowi  $Q = 1,100 \text{ kG}$ ?

**2.155.** Przesuwając równię pochyłą tak, by zawsze tworzyła z poziomem ten sam kąt  $\alpha$ , można tak dobrać przyspieszenie i kierunek tego ruchu, by ciało znajdujące się na równi pozostawało w spoczynku. Znaleźć to przyspieszenie dla ciała o masie  $m \text{ kg}$ . Tarcie między deską a ciałem zaniedbać.

**2.156.** Jaki będzie okres wahań wahadła matematycznego o długości  $l$  zawieszonego w windzie spadającej ze stałym przyspieszeniem  $a$ ? Co będzie, gdy  $a = g$  i gdy  $a < g$ ?

**2.157.** W windzie znajduje się ciało o masie  $m = 120 \text{ kg}$ . Winda porusza się z przyspieszeniem  $a = 2,4 \text{ m/s}^2$ . Jak wielki jest nacisk tego ciała przy wznoszeniu się windy ku górze i w ruchu na dół?

**2.158.** W windzie przymocowano wagę sprężynową, na której zawieszono ciało o masie  $m = 1 \text{ kg}$ . Co będzie pokazywać waga, gdy: a) winda rusza do góry z przyspieszeniem  $a = 4,9 \text{ m/s}^2$  skierowanym w dół, b) winda rusza na dół z przyspieszeniem  $4,9 \text{ m/s}^2$  skierowanym w górę, c) winda rusza w dół z przyspieszeniem  $1 \text{ m/s}^2$  skierowanym w dół?

**2.159.** Przez krążek o osi poziomej przerzucona jest lina, na której końcach zawieszono ciężary o masach  $m_1 = 19,62 \text{ kg}$  i  $m_2 = 29,43 \text{ kg}$ . Jakim ruchem będą poruszać się ciężary, gdy krążek przesunięty zostanie pionowo w górę z przyspieszeniem  $a = 2,19 \text{ m/s}^2$ ?

**2.160.** Jakie jest przyspieszenie ciała w ruchu po okręgu o promieniu  $r = 1,8 \text{ m}$  przy okresie ruchu  $T = 3 \text{ s}$ ?

**2.161.** Jak wielka powinna być częstotliwość  $n$  ruchu jednostajnego po okręgu o promieniu  $r = 1 \text{ m}$ , aby przyspieszenie dośrodkowe tego ruchu było równe przyspieszeniu ziemskiemu  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ?

**2.162.** Obliczyć przyspieszenie dośrodkowe ciała poruszającego się po obwodzie koła o promieniu  $r = 1 \text{ m}$  z prędkością  $\omega = 120$  obrotów na minutę. Porównać je z przyspieszeniem ziemskim.

**2.163.** Szklankę napełnioną wodą zawieszamy na sznurku i wprawiamy w ruch po okręgu w płaszczyźnie pionowej. Przy jakiej prędkości ruchu woda nie będzie wylewać się ze szklanki, jeżeli promień okręgu, po którym krąży szklanka wynosi  $r = 0,8 \text{ m}$ ?

**2.164.** Kula o masie  $M = 810 \text{ g}$  zostaje wprowadzona w ruch po okręgu w płaszczyźnie pionowej. Koło ma promień  $r = 1,20 \text{ m}$ , częstotliwość ruchu  $n = 96 \text{ obr/min}$ . Jaki jest naciąg  $N$  sznurka, gdy kula przechodzi przez najwyższy górny i najniższy dolny punkt na obwodzie koła?



**2.165.** Kulkę o masie  $m = 100$  g przywiązano do końca nici, której drugi koniec trzymamy w ręku i poruszamy po okręgu o promieniu  $R = 30$  cm w płaszczyźnie pionowej z prędkością  $v = 210$  cm/s. Z jaką siłą nić ciągnie kulkę w momencie, kiedy kulka znajduje się: a) w najwyższym punkcie płaszczyzny pionowej, b) w najniższym punkcie tej płaszczyzny?

**2.166.** Samolot wykonuje pętlę pionową o promieniu  $R = 100$  m, poruszając się z prędkością  $v = 280$  km/h. Jaką siłą będzie działać na samolot ciało lotnika o masie  $m = 80$  kg w dolnym i górnym punkcie pętli?

**2.167.** Jaki jest naciąg  $N$  sznurka o długości  $r = 120$  m, na którego końcu zawieszono jest ciało o masie  $m = 500$  g, poruszające się po okręgu w płaszczyźnie poziomej 42 razy na minutę?

**2.168.** Jaki musiałyby być okres obrotu Ziemi, aby na równiku zostało zniesione przyspieszenie ziemskie? Promień kuli ziemskiej wynosi 6378 km.

**2.169.** W jakiej odległości od powierzchni Ziemi przyspieszenie ziemskie równe jest przyspieszeniu dośrodkowemu wskutek obrotu Ziemi dokoła swej osi?

**2.170.** Z jaką prędkością należy wystrzelić w kierunku poziomym pocisk, aby obiegł on Ziemię równoległe do jej powierzchni, zakładając, że nie ma atmosfery? Jaki byłby okres obiegu satelity dokoła Ziemi oraz jakie posiadałby on przyspieszenie?

**2.171.** Obrót Ziemi dokoła swej osi prowadzi do odchylenia pocisków artyleryjskich w płaszczyźnie poziomej w kierunku prostopadłym do południka ziemskiego. Obliczyć wielkość tego odchylenia w pierwszej sekundzie po wystrzale dla pocisku wystrzelonego poziomo w kierunku południka ziemskiego. Wystrzału dokonano w szerokości geograficznej  $\varphi = 55^\circ 45'$ . Początkowa prędkość pocisku  $v = 1000$  m/s. Wskazać, w jaką stronę odchylił się pocisk, jeżeli w momencie wystrzału lufa była skierowana na południe. Opór powietrza zaniedbać. Rozwiązać zadanie w układzie związanym z Ziemią.

**2.172.** Obrót Ziemi dokoła swej osi powoduje odchylenie się spadających ciał na wschód. Obliczyć, na jaką odległość  $s$  odchylił się od pionu (promienia skierowanego ku środkowi Ziemi) ciało spadające na równiku z wysokości  $h = 100$  m na powierzchnię Ziemi. Przeprowadzić rachunek w układzie związanym z Ziemią.

**2.173.** Tramwaj o ciężarze  $Q = 15$  Ton porusza się po moście wypukłym o promieniu krzywizny  $R = 70$  m. Określić prędkość tramwaju, jeżeli jego parcie na most wynosi  $P = 14,5$  Ton.

**2.174.** Tramwaj o ciężarze  $Q = 10$  Ton porusza się po moście z prędkością  $v = 40$  km/h. Określić jego parcie na most, jeżeli promień krzywizny mostu wynosi  $R = 90$  m.

**2.175.** Ciężar o masie  $m$  zawieszony na nici nierozciągliwej o długości  $l$  waha się wychylając się o kąt  $\alpha$  w obie strony. a) Obliczyć naciąg nici w położeniach skrajnych i środkowym, b) przy jakim kącie  $\alpha$  naciąg nici w położeniu środkowym jest dwa razy większy od zawieszonoego ciężaru?

**2.176.** Model szkolny regulatora Watta obraca się z prędkością kątową  $\omega = 3$  obr/s. O jaki kąt podniosą się pręty, na których zawieszono są kule, jeżeli długość prętów wynosi  $l = 14$  cm? Wszystkie masy z wyjątkiem mas kul można zaniedbać.

**2.177.** Z jaką maksymalną prędkością może jechać motocyklista po płaszczyźnie poziomej, opisując okrąg o promieniu  $R = 90$  m, jeżeli współczynnik tarcia opon o drogę wynosi  $f = 0,4$ ?

**2.178.** Łyżwiarz porusza się po okręgu o promieniu  $r = 12$  m z prędkością  $v = 9$  m/s. Pod jakim kątem względem pionu jest on nachylony, by zachować równowagę?

**2.179.** Wagon kolejowy porusza się po torze kołowym o promieniu krzywizny  $r = 240$  m dla środka toru. Odległość szyn  $d = 1,435$  m, środek ciężkości wagonu znajduje się na wysokości  $h = 1,5$  m nad powierzchnią szyn. Jaka jest dopuszczalna prędkość wagonu i przy jakiej prędkości grozi wykolejenie?

**2.180.** O ile musi być wzniesiona wyżej szyna zewnętrzna toru kolejowego, jeżeli przy prędkości  $v$  i promieniu krzywizny  $r$  toru o szerokości  $s$  ciśnienia na obie szyny są równe?

**2.181.** W przedstawieniach cyrkowych bardzo często popisują się akrobaci jazdą po ścianie wewnętrznej walca. Z jaką minimalną prędkością może jechać motocyklista po wewnętrznej powierzchni walca o średnicy  $d = 18$  m, jeżeli środek ciężkości motocykla wraz z motocyklistą znajduje się w odległości  $h = 1$  m od miejsca styku kół ze ścianą, a współczynnik tarcia opon kół motocykla o ściany wynosi  $f = 0,4$ . Pod jakim kątem  $\alpha$  względem poziomu jedzie motocyklista, jeżeli jego prędkość wynosi  $v = 20$  m/s?

**2.182.** Obliczyć energię potencjalną, kinetyczną oraz sumę tych energii dla ciała o masie  $m = 200$  g wzniesionego na wysokość  $H = 4$  m i puszczono swobodnie. Obliczenie przeprowadzić dla wysokości 4 m, 3 m, 1 m, 0 m.

**2.183.** Kamień o masie  $m = 250$  g rzucono z wysokości  $h = 50$  m pod pewnym kątem do poziomu z prędkością początkową  $v_0 = 20$  m/s. Kamień upadł na powierzchnię Ziemi z prędkością  $v = 30$  m/s. Obliczyć pracę zużytą na pokonanie oporu powietrza.

**2.184.** Jaka pracę  $A$  należy wykonać, aby przewrócić skrzynię w kształcie sześcianu o krawędzi  $l = 50$  cm z jednego boku na drugi, jeżeli masa skrzyni wynosi  $m = 1$  tona i jest rozmieszczona równomiernie w całej skrzyni?

**2.185.** Jaka pracę należy wykonać, by przewrócić jednorodny sześcian z żelaza o masie  $m = 100$  kg z jednej płaszczyzny na drugą?

**2.186.** Jaka pracę należy wykonać, aby przesunąć ciężar  $Q = 1$  Tona wzdłuż drogi  $s = 3$  m po równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha = 30^\circ$  względem poziomu? Tarcie zaniedbać.

**2.187.** Pociąg o masie  $m = 1000$  ton, poruszający się z prędkością  $v = 30$  km/h, zostaje zahamowany w ciągu czasu  $t = 50$  s. Obliczyć moc hamowania.

**2.188.** Pociąg o masie  $m = 900$  ton rusza ze stacji i po czasie  $t = 3$  min (jazdy) nabywa prędkości  $v = 90$  km/h. Obliczyć moc lokomotywy.

**2.189.** Dźwig budowlany podnosi w ciągu  $t = 8$  h ciężar  $Q = 3000$  Ton materiału na wysokość  $h = 9$  m. Jaka jest moc silnika tego dźwigu, jeżeli współczynnik sprawności całego urządzenia wynosi  $\eta = 60\%$ ?

**2.190.** Jaka jest moc wodospadu Niagara, jeżeli w ciągu  $t = 1$  minuty spada  $V = 54 \cdot 10^4$  m<sup>3</sup> wody z wysokości  $h = 65$  m?

**2.191.** Górski potok o przekroju poprzecznym  $S$  m<sup>2</sup> płynie z prędkością  $v$  m/s. Obliczyć moc strumienia.

**2.192.** Górski potok o przekroju poprzecznym  $S$  m<sup>2</sup> tworzy wodospad o wysokości  $h$  m. Prędkość strumienia wynosi  $v$  m/s. Obliczyć moc wodospadu w KM.

**2.193.** Koło zamachowe o promieniu  $R$  m wykonuje  $n$  obrotów na minutę i przekazuje wałowi za pomocą pasa moc  $P$  KM. Obliczyć napięcie  $T$  pasa poruszającego się po kole bez poślizgu.

**2.194.** Winda towarowa o masie  $m = 1000$  kg podnosi w ciągu czasu  $t = 10$  min masę  $m' = 2500$  kg na wysokość  $h = 100$  m. Obliczyć moc silnika windy.

**2.195.** W celu wyznaczenia mocy silnika ściska się jego wał specjalnymi kleszczami, których docisk tak się reguluje, aby ciężar zawieszony na ramieniu  $R$  (długość od środka osi wału) utrzymywał to ramię w pozycji poziomej. Jaka jest moc silnika, jeśli przy  $n$  obrotach na minutę

trzeba w tym celu zawiesić na ramieniu o długości  $R$  cm ciężar  $Q$  kG?

2.196. Jaką energię ma tramwaj o ciężarze  $Q = 10$  Ton poruszający się z prędkością  $v = 36$  km/h?

2.197. Turysta ważący  $Q = 75$  kG wznosi się w ciągu czasu  $t = 2$  h na wysokość  $h = 600$  m. Jaką pracę wykonuje turysta przy wchodzeniu (w kGm, dżulach, ergach)? Jaka jest jego średnia moc w kGm/s, KM?

2.198. Silnik obracający się  $n = 900$  razy na minutę przekazuje moc  $P = 28$  KM pasem za pośrednictwem koła o średnicy  $d = 300$  mm. Z jaką prędkością porusza się pas i jaką siłą działa?

## 2.4. GRAWITACJA POWSZECHNA

Prawo powszechnego ciążenia wyrażamy wzorem

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.58)$$

gdzie  $F$  oznacza siłę wzajemnego przyciągania się dwu mas punktowych  $m_1, m_2$  znajdujących się w odległości  $r$ , zaś  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  jest stałą grawitacyjną. Kule jednorodne lub kule o jednorodnych warstwach koncentrycznych przyciągają się jak punkty materialne.

**Prawa Keplera.** Z prawa powszechnego ciążenia wynikają trzy prawa Keplera, którym podlega ruch planet dokoła Słońca. Trzecie prawo Keplera wyrażamy wzorem

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}, \quad (2.59)$$

gdzie  $T_1, T_2$  są to okresy obiegu planet dokoła Słońca, zaś  $R_1$  i  $R_2$  — średnie odległości tych planet od Słońca.

### Zadania

2.199. Jaką siłą przyciągają się dwie przylegające kule ołowiane o promieniu  $r = 1$  m każda?

2.200. W kuli miedzianej o promieniu  $R = 50$  cm zrobione jest wydrążenie kuliste o promieniu  $r = 25$  cm. Powierzchnia wydrążenia jest



styczna do powierzchni kuli. Jaką siłą  $F_0$  kula mosiężna z wydrążeniem będzie przyciągała małą kulkę o masie  $m = 20$  g, która znajduje się w odległości  $d = 90$  cm od środka kuli miedzianej po stronie przeciwnej od wydrążenia?

**2.201.** Obliczyć masę Ziemi przyjmując jej promień  $r = 6370$  km,  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup> oraz stałą grawitacyjną  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup>·kg<sup>-1</sup>·s<sup>-2</sup>.

**2.202.** Jaką siłą przyciągają się dwa okręty, każdy o masie  $m = 4000$  ton z odległości  $r = 100$  m?

**2.203.** Znając czas obiegu Ziemi dokoła Słońca  $T = 365,24$  dni słonecznych oraz średni promień orbity ziemskiej  $R = 1,495 \cdot 10^{11}$  m obliczyć masę Słońca.

**2.204.** Obliczyć przyspieszenie  $g_1$  siły ciężkości na wysokości  $h = 20$  km nad powierzchnią Ziemi, przyjmując przyspieszenie siły ciężkości na powierzchni Ziemi równe  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>, promień Ziemi zaś  $R = 6370$  km.

**2.205.** Obliczyć przyspieszenie siły ciężkości  $g_1$  na małej planecie o średnicy  $d = 30$  km zakładając, że jej średnia gęstość jest taka sama, jak średnia gęstość Ziemi. Średnica Ziemi  $D = 12740$  km.

**2.206.** Jak zmieni się przyspieszenie siły ciężkości: a) przy zanurzeniu się w głąb Ziemi aż do środka kuli ziemskiej, b) przy oddalaniu się od powierzchni Ziemi aż do odległości równej pięciu promieniom Ziemi?

**2.207.** Na jakiej wysokości nad biegunem Ziemi przyspieszenie ziemskie ma tę samą wartość co na równiku? Wartość przyspieszenia ziemskiego na biegunach  $g = 9,83$  m/s<sup>2</sup>, na równiku zaś  $g_h = 9,78$  m/s<sup>2</sup>.

**2.208.** Przyspieszenie ziemskie na biegunach wynosi 9,83 m/s<sup>2</sup>. O ile zmniejszy się ono na szerokości geograficznej  $\varphi$  wskutek ruchu obrotowego Ziemi dookoła swej osi?

**2.209.** Jaką siłą przyciąga Słońce masę 1 g znajdującą się na powierzchni Ziemi?

**2.210.** Masa Księżyca jest 81 razy mniejsza od masy Ziemi, stosunek zaś promieni Księżyca i Ziemi wynosi 3/11. Obliczyć przyspieszenie siły ciężkości  $g$  na powierzchni Księżyca.

**2.211.** W jakiej odległości od środka kuli ziemskiej między Ziemią a Księżycem znajduje się punkt, w którym siły przyciągania wywierane przez Księżyc i Ziemię na ciało trzecie są równe? Średnia odległość Księżyca od środka kuli ziemskiej wynosi  $R = 384\,000$  km, masa Księżyca zaś jest 81 razy mniejsza od masy Ziemi.

**2.212.** Promień planety krążącej wokół gwiazdy Syriusz jest siedem

razy większy od promienia Ziemi, a średnia gęstość 1000 razy większa od średniej gęstości Ziemi. Obliczyć przyspieszenie siły ciężkości na powierzchni tej planety.

**2.213.** Czas obiegu  $T_J$  Jowisza dookoła Słońca jest 12 razy dłuższy od czasu obiegu  $T_Z$  Ziemi dookoła Słońca. Jaka jest odległość  $a_J$  Jowisza od Słońca, jeżeli odległość  $a_Z$  Ziemi od Słońca wynosi  $150 \cdot 10^6$  km? Przyjąć orbity obu planet jako kołowe.

**2.214.** Znaleźć odległość  $D$  planety od Słońca, jeżeli znamy masę Słońca  $M$  i okres obiegu planety dookoła Słońca.

**2.215.** Największa odległość komety Halleya od Słońca wynosi 35,4, najmniejsza 0,59 odległości Ziemi od Słońca. Prędkość liniowa komety w położeniu najdalszym od Słońca (aphelium) wynosi 0,91 km/s. Jaka jest prędkość liniowa komety, gdy znajduje się ona w położeniu najbliższym (perihelium)?

**2.216.** Średnia odległość wyrażona w promieniach orbity ziemskiej wynosi dla planety Wenus  $a_w = 0,723$ , dla Saturna  $a_s = 9,539$ . Obliczyć okresy obiegu tych planet dookoła Słońca.

**2.217.** Odległości Ziemi i planety Wenus od Słońca wynoszą odpowiednio  $R_Z = 150 \cdot 10^6$  km,  $R_W = 108 \cdot 10^6$  km. Znaleźć stosunek ich liniowych prędkości w ruchu dookoła Słońca.

**2.218.** Na powierzchnię Ziemi spada z bardzo dużej odległości meteoryt. Z jaką prędkością upadłby on na Ziemię, gdyby nie było hamowania atmosfery?

## 2.5. STATYKA. WSPÓLRZĘDNE ŚRODKA MASY

**Środek masy punktów materialnych.** Współrzędne środka masy punktów materialnych wyrażają się następującymi wzorami:

$$x_s = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad y_s = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad z_s = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}, \quad (2.60)$$

gdzie  $m_i$  są to masy poszczególnych punktów materialnych o współrzędnych  $x_i$ ,  $y_i$  i  $z_i$ .

**Środek masy ciała sztywnego** o masie  $m$  ma następujące współrzędne

$$x_s = \frac{\int x dm}{m}, \quad y_s = \frac{\int y dm}{m}, \quad z_s = \frac{\int z dm}{m}. \quad (2.61)$$



Siły są wektorami, więc ich dodawanie i odejmowanie odbywa się według prawa równoległoboku.

Warunek równowagi punktu brzmi:

$$\sum F_{xi} = 0, \quad \sum F_{yi} = 0, \quad \sum F_{zi} = 0, \quad (2.62)$$

gdzie  $F_{xi}$ ,  $F_{yi}$ ,  $F_{zi}$  są to składowe poszczególnych sił. W przypadku ciała sztywnego do poprzedniego warunku dochodzi warunek znikania wypadkowego momentu sił:

$$\sum M_{xi} = 0, \quad \sum M_{yi} = 0, \quad \sum M_{zi} = 0, \quad (2.63)$$

gdzie  $M_{xi}$ ,  $M_{yi}$ ,  $M_{zi}$  oznaczają składowe momentu siły  $M_i$ .

Dla ciała w równowadze stałej energia potencjalna ma minimalną wartość.

## Zadania

**2.219.** Udowodnić, że środek mas punktowych  $m_1, m_2, m_3, \dots$  leżących na jednej prostej w odległości  $x_1, x_2, x_3, \dots$  od pewnego stałego punktu tej prostej, znajduje się w odległości

$$X = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}.$$

**2.220.** Na linii prostej znajdują się trzy masy  $m_1 = 10$  g,  $m_2 = 20$  g,  $m_3 = 28$  g, a odległości między tymi masami wynoszą kolejno 20 cm i 30 cm. Znaleźć położenie środka tych mas.

**2.221.** Udowodnić, że w przestrzennym układzie odniesienia współrzędne środka masy zbioru  $n$  punktów materialnych o masach  $m_1, m_2, \dots, m_3$  i współrzędnych  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$  są

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},$$

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i},$$

$$Z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$

2.222. W wierzchołkach trójkąta  $ABC$  leżą masy punktowe  $m_1 = 70$  g,  $m_2 = 30$  g i  $m_3 = 40$  g. Znaleźć środek tych mas wiedząc, że  $AB = 100$  cm,  $BC = 80$  cm,  $CA = 60$  cm.

2.223. Określić środek masy płyty w kształcie koła o promieniu  $r_1 = 50$  cm, wewnątrz której wycięty jest otwór o promieniu  $r_2 = 30$  cm, przy czym środek otworu leży w odległości  $d = 10$  cm od środka płyty.

2.224. Znaleźć środek masy jednolitej bryły kulistej o promieniu  $r_1 = 50$  cm, w której wewnątrz znajduje się kuliste wydrążenie o promieniu  $r_2 = 10$  cm, przy czym środek kuli mniejszej oddalony jest o  $d = 5$  cm od środka kuli większej.

2.225. W jakiej odległości leży środek masy boków trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych  $a = 18$  cm i  $b = 5$  cm, jeżeli masa jest rozmieszczona równomiernie na bokach trójkąta?

2.226. Pręt żelazny o długości  $l = 80$  cm i przekroju  $q = 2$  cm<sup>2</sup> zakończony jest kulą żelazną o promieniu  $r = 5$  cm. W jakiej odległości od wolnego końca pręta znajduje się środek ciężkości układu?

2.227. Udowodnić, że środek masy trójkąta o niewielkiej grubości znajduje się w punkcie przecięcia się środkowych tego trójkąta.

2.228. W równoramiennym prostokątnym trójkącie o przyprostokątnych  $a = b = 15$  cm wycięto koło wpisane w ten trójkąt. Określić środek ciężkości powstałej w ten sposób figury.

2.229. Obliczyć odległość środka koła od środka masy łuku jednorodnego o promieniu  $r = 10$  cm i kącie środkowym  $2\alpha = 90^\circ$ .

2.230. Dany jest promień  $r = 24$  cm i kąt środkowy  $2\alpha = 120^\circ$  wycinka koła. Gdzie znajduje się środek masy, jeżeli masa jest równomiernie rozmieszczona na powierzchni?

2.231. Znaleźć środek masy odcinka koła o promieniu  $r = 18$  cm i kącie środkowym  $2\alpha = 90^\circ$ .

2.232. Wyznaczyć położenie środka masy paraboloidy obrotowej o wysokości  $a$ , która powstaje przez obrót paraboli  $y^2 = 2px$  dookoła osi  $x$ .

2.233. Wyznaczyć położenie środka masy stożka prostego o wysokości  $h$ .

2.234. Latarnia uliczna o ciężarze  $Q = 80$  N zawieszona jest na dwóch linach, które z kierunkiem poziomym tworzą kąt  $\alpha = 30^\circ$ . Jaki jest naciąg lin?

2.235. W ścianie na równym poziomie w odległości  $l = 1,5$  m wbito dwa gwoździe, do których przymocowane są końce sznura o długości  $l_1 = 1,7$  m. Obliczyć naciąg sznura, jeżeli na nim zawieszono ciężar  $Q = 20$  N.

**2.236.** Ciężar  $Q = 200 \text{ N}$  zawieszono na końcu pręta poziomego  $AB$ , który ma taką podporę  $BC$ , że kąt  $ABC$  wynosi  $30^\circ$ . Pozostałe końce prętów ( $A, C$ ) są umocowane w ścianie. Obliczyć siły wywierane przez ciężar  $Q$  na pręty  $AB$  i  $BC$ .

**2.237.** Trzech ludzi dźwiga płytę stalową w postaci trójkąta równobocznego podtrzymując ją w wierzchołkach trójkąta. Udowodnić, że każdy z nich niesie jednakowy ciężar.

**2.238.** Cztery siły  $F_1 = 70 \text{ N}$ ,  $F_2 = 80 \text{ N}$ ,  $F_3 = 110 \text{ N}$  i  $F$  wychodzące z punktu  $A$  równoważą się. Pierwsze trzy są do siebie prostopadłe. Obliczyć wielkość siły  $F$  oraz kąty między siłą  $F$  a siłami pozostałymi.

**2.239.** Dwu ludzi dźwiga na barkach końce dwumetrowego drążka, na którym wisi ciężar  $Q = 300 \text{ N}$  w odległości  $l = 60 \text{ cm}$  od przedniego końca drążka. Jakimi siłami podtrzymują oni końce drążka?

**2.240.** Na równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha = 10^\circ$  do poziomu stoi walec jednorodny o promieniu  $r$ . Jaka jest maksymalna wysokość  $h$  walca, przy której on się jeszcze nie wywróci?

**2.241.** Trzech robotników niesie rurę żelazną. Jeden z nich trzyma rurę za jeden koniec, dwóch innych podtrzymuje rurę na drążku w pewnej odległości od drugiego końca rury. Obliczyć tę odległość, jeżeli długość rury wynosi  $l = 8 \text{ m}$ , a wszyscy robotnicy dźwigają jednakowy ciężar.

**2.242.** Dwóch ludzi dźwiga rurę żelazną o ciężarze  $Q = 1000 \text{ N}$ , jeden z nich trzyma rurę w jednym końcu, drugi zaś podtrzymuje ją w odległości  $d = 60 \text{ cm}$  od drugiego końca. Obliczyć, jaką część ciężaru dźwiga każdy z robotników, jeżeli długość rury wynosi  $l = 6 \text{ m}$ .

**2.243.** Klin, którego boki mają długość  $l = 20 \text{ cm}$ , a podstawa szerokość  $b = 6 \text{ cm}$ , został wbity siłą  $F = 200 \text{ N}$ . Obliczyć siły działające na boki klina.

**2.244.** Jaki kąt tworzą siły  $F_1 = 286 \text{ N}$  i  $F_2 = 338 \text{ N}$  ze swoją wypadkową  $F = 520 \text{ N}$ ?

**2.245.** Ciężar  $Q$  wisi na dwu sznurkach, z których jeden tworzy z poziomem kąt  $\alpha$ , a drugi kąt  $\beta$ . Wyznaczyć naciągi obu sznurów.

**2.246.** Ciężar  $Q$   $\text{N}$  leży na gładkiej równi pochyłej tworzącej z poziomem kąt  $\alpha$ . Aby ciężar się nie zsunął, jest on uwiązany do sznura umocowanego drugim końcem do stropu; sznur tworzy z równią pochyłą kąt  $\beta$ . Wyznaczyć naciąg sznura  $N$  i reakcję  $R$  równi pochyłej. Znaleźć warunek, aby ciężar był istotnie w równowadze.

**2.247.** Belka  $OA$  o długości  $l = 4,5 \text{ m}$  osadzona jest końcem  $O$  przegubowo, a na drugim końcu  $A$  dźwiga ciężar  $Q = 2200 \text{ N}$ . Belka utrzymy-

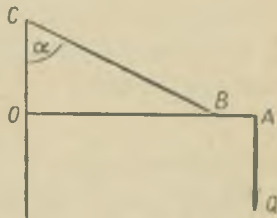
wana jest w położeniu poziomym za pomocą liny  $BC$  umocowanej do pionowej ściany, tak że tworzy z nią kąt  $\alpha = 54^\circ$ ,  $OB = a = 2,7$  m (rys. 2.5). Wyznaczyć naciąg liny  $S$  oraz wartość liczbową i kierunek reakcji  $R$  przegubu, pomijając ciężar belki.

**2.248.** Walec o ciężarze  $Q = 2500$  N leży na dwóch płaszczyznach, tworzących z poziomem kąty  $\alpha = 55^\circ$  i  $\beta = 18^\circ$ . Wyznaczyć reakcję obu płaszczyzn w miejscach zetknięcia.

**2.249.** Linę o długości  $s = 15$  m umocowano w punktach  $A$  i  $B$  takich, że rzut pionowy ich odległości wynosi  $h = 2$  m, a rzut poziomy  $l = 10$  m. Na linie zawieszono ciężar  $Q = 600$  N na pierścieniu przesuwalnym wzdłuż liny. Jakie będzie położenie równowagi pierścienia i jakie powstają naciągi  $P$  w gałęziach liny?

**2.250.** Drabina o długości  $l = 6$  m, o ciężarze  $Q = 200$  N opiera się górnym końcem o pionową gładką ścianę. Drugi koniec drabiny wciśnięty jest w ziemię w odległości  $s = 2$  m od ściany. Obliczyć pionową i poziomą składową parcia wywieranego na ziemię oraz parcie na ścianę.

**2.251.** Do ściany przystawiona jest drabina. Współczynnik tarcia drabiny o ścianę wynosi  $f_1 = 0,3$ , o podłogę  $f_2 = 0,4$ . Środek ciężkości znajduje się w środku drabiny. Określić najmniejszy kąt, jaki tworzy drabina z podłogą, nie padając na nią. Zakładając, że drabina tworzy minimalny kąt z podłogą, przy którym jest jeszcze w równowadze, odpowiedzieć, czy drabina upadnie, jeżeli: a) człowiek stanie na jej najwyższym stopniu, b) na jej najniższym stopniu.



Rys. 2.5

## 2.6. DYNAMIKA RUCHU OBROTOWEGO CIAŁA SZTYWNEGO

Dowolny ruch ciała sztywnego można wyobrazić sobie jako złożony z ruchu postępowego środka masy tego ciała oraz ruchu obrotowego względem pewnej osi. Środek masy ciała można uważać za punkt materialny. Ruch postępowy ciała sztywnego sprowadza się więc do ruchu punktu materialnego opisanego w poprzednich paragrafach. Do opisanego ruchu obrotowego posługujemy się odmiennymi pojęciami od używanych do opisanego ruchu postępowego.

**Druga zasada dynamiki ruchu obrotowego** jest podstawowym prawem ruchu obrotowego

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (2.64)$$

gdzie  $\mathbf{M}$  jest momentem siły względem obranego punktu odniesienia, a  $\mathbf{L}$  — krętem względem tego samego punktu odniesienia.

Jeżeli obrót odbywa się względem osi stałej (osi o maksymalnym momencie bezwładności) lub osi sztywnej (umocowanej w łożyskach), wówczas druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego może być napisana w następujący sposób

$$\mathbf{M} = J \frac{d\omega}{dt} = J\epsilon. \quad (2.65)$$

We wzorze tym  $\mathbf{M}$  oznacza moment siły,  $J$  — moment bezwładności względem wspomnianej osi obrotu.

Niekiedy ta sama siła powoduje ruch postępowy i obrotowy. Wówczas dzieląc obie strony poprzedniego równania przez  $r$  oraz dodając po prawej stronie wyraz odnoszący się do ruchu postępowego otrzymujemy II zasadę dynamiki w postaci bardziej ogólnej:

$$\mathbf{F} = \frac{J\epsilon}{r} + m\mathbf{a}. \quad (2.66)$$

Gdy brak momentu sił zewnętrznych  $\mathbf{M} = 0$ , z równania (2.65) otrzymujemy zasadę zachowania krętu

$$\mathbf{L} = J\omega = \text{const}.$$

**Moment bezwładności  $J$  punktu materialnego** o masie  $m$  znajdującej się w odległości  $r$  od osi obrotu wyraża się wzorem

$$J = mr^2. \quad (2.67)$$

**Moment bezwładności układu punktów materialnych** wyraża się wzorem

$$J = \sum m_i r_i^2. \quad (2.68)$$

W przypadku ciała o ciągłym rozmieszczeniu mas sumowanie zastępujemy całkowaniem

$$J = \int r^2 dm. \quad (2.69)$$



**Prawo Steinera.** Między momentem bezwładności  $J_0$  ciała względem osi przechodzącej przez środek ciężkości, a momentem bezwładności  $J$  względem osi znajdującej się w odległości  $a$  i równoległej do poprzedniej, zachodzi związek

$$J = J_0 + ma^2. \quad (2.70)$$

Moment bezwładności dowolnego ciała możemy wyrazić wzorem

$$J = k^2 m, \quad (2.71)$$

gdzie  $k$  nazywamy ramieniem bezwładności.

## Zadania

**2.252.** Obliczyć moment bezwładności rury o przekroju kołowym względem osi. Długość rury wynosi  $l$ , promień wewnętrzny  $R_1$ , zewnętrzny  $R_2$ , gęstość materiału  $\rho$ .

**2.253.** Wyznaczyć moment bezwładności walca kołowego względem jego osi. Promień podstawy walca wynosi  $R$ , wysokość  $h$ , gęstość materiału walca  $\rho$ .

**2.254.** Jaki jest moment bezwładności kuli o promieniu  $R$  z materiału o gęstości  $\rho$  dla osi przechodzącej przez środek kuli?

**2.255.** Wyznaczyć moment bezwładności pręta cienkiego o długości  $l$ , powierzchni przekroju  $S$ , względem osi:

1. prostopadłej do pręta, przechodzącej przez: a) środek pręta, b) koniec pręta,
2. przechodzącej przez środek pręta i tworzącej z prętem kąt  $\alpha$ ,
3. równoległej do pręta i znajdującej się w odległości  $a$  od niego.

**2.256.** Obliczyć moment bezwładności prostokąta o bokach  $a$  i  $b$  i gęstości powierzchniowej  $\rho$ : 1) względem jego podstawy  $a$  jako osi, 2) względem osi prostopadłej do boku  $b$ , przechodzącej przez środek prostokąta.

**2.257.** Jaki jest moment bezwładności trójkąta o podstawie  $a$  i wysokości  $h$  oraz gęstości powierzchniowej  $\rho$ : 1) względem podstawy jako osi, 2) względem osi przechodzącej przez wierzchołek  $A$  równoległe do podstawy  $a$ ?

**2.258.** Obliczyć moment bezwładności koła o promieniu  $R$  i gęstości powierzchniowej  $\rho$ : 1) względem średnicy jako osi, 2) względem stycznej jako osi.

**2.259.** Krążek, którego moment bezwładności wynosi  $J = 0,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  osadzony jest na wale o promieniu  $r = 30 \text{ mm}$ . Na wał nawinięty jest sznur, za który ciągniemy siłą  $F = 150 \text{ N}$ . Jaka prędkość kątową osiągnie koło po upływie czasu  $t = 5 \text{ s}$ ? Zaniedbać moment bezwładności wału oraz siłę tarcia.

**2.260.** Obliczyć, jaką drogę przebędzie koniec sznura w zadaniu 2.259 w ciągu czasu działania siły  $F$ . Jaką pracę wykona ta siła? Porównać tę pracę z energią krążka.

**2.261.** Jednolity walec kołowy o masie  $m$  i promieniu  $r$  stacza się po płaszczyźnie pochylonej do poziomu pod kątem  $\alpha$  wzdłuż drogi  $s$ . Obliczyć prędkość końcową oraz przyspieszenie osi walca.

**2.262.** Drewniany klocek o masie  $m = 500 \text{ g}$  i długości  $l = 50 \text{ cm}$  może obracać się wokół osi prostopadłej do osi klocka i przechodzącej przez jego środek. W koniec klocka uderza kula o masie  $m_1 = 15 \text{ g}$  i prędkości  $v = 300 \text{ m/s}$  prostopadłej do klocka. Określić prędkość kątową, jaką uzyska klocek.

**2.263.** Walec jednorodny toczy się bez poślizgu po równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha = 30^\circ$  do poziomu. W jakim czasie przebędzie drogę  $s = 150 \text{ cm}$ ? Rozwiązać to samo zadanie dla kuli jednorodnej.

**2.264.** Na wale o średnicy  $d = 4 \text{ cm}$  nawinięta jest nić, do której końca przymocowano ciężar o masie  $m = 100 \text{ g}$ . Obliczyć moment bezwładności walca, jeżeli ciężar opada z przyspieszeniem  $a = 9,8 \text{ cm/s}^2$ .

**2.265.** a) Pionowy słup o wysokości  $h = 5 \text{ m}$  po podpiłowaniu przy podstawie pada na Ziemię. Znaleźć liniową prędkość jego górnego końca w chwili uderzenia o Ziemię; b) który punkt słupa będzie w dowolnej chwili padania tego słupa miał taką samą prędkość, jaką miałyby ciało spadające z tej samej wysokości co dany punkt słupa?

**2.266.** Na bloczek w kształcie walca o promieniu  $r = 5 \text{ cm}$  i masie  $m = 120 \text{ g}$  nawinięta jest nić, do której końca przymocowane jest ciało o masie  $m_1 = 60 \text{ g}$ . Z jakim przyspieszeniem opada ciężar w dół? Tarcie bloczka zaniedbać.

**2.267.** Koło osadzone na osi podtrzymywane jest dwiema nitkami, umocowanymi tak, jak to pokazano na rysunku 2.6. Oś obrotu koła jest pozioma. Nitki stopniowo odwijają się, a koło obniża się. Znaleźć siłę  $F$  naciągającą każdą z nitek, jeśli masa koła wraz z osią wynosi  $m = 1 \text{ kg}$ , moment bezwładności względem osi  $J = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , promień zaś osi  $r = 5 \text{ mm}$ .

**2.268.** Koło zamachowe o masie  $m = 500 \text{ kg}$  i o ramieniu bezwładności

$k = 1$  m obraca się z prędkością kątową  $\omega = 50$  obr/min. Jaka siła powinna działać na obwód koła pasowego o średnicy  $d = 70$  cm, połączonego z wałem, aby koło zamachowe zatrzymać w przecięgu czasu  $t = 4$  min.

**2.269.** Obliczyć moment obracający koło napędowe silnika, jeżeli przy rozwijanej mocy  $P = 5$  kW daje on  $n = 2880$  obr/min.

**2.270.** Jaką pracę należy wykonać, aby rozpędzić koło napędowe do prędkości  $n = 120$  obr/min, jeżeli masa koła  $m = 0,5$  ton jest rozmieszczona równomiernie na obwodzie koła o promieniu  $r = 0,75$  m<sup>2</sup>.

**2.271.** Koło w postaci dysku o masie  $m = 3$  kg toczy się bez poślizgu po płaszczyźnie poziomej z prędkością  $v = 3$  m/s. Na jakiej drodze może ono być zatrzymane, jeżeli do obwodu koła przyłożymy siłę  $F = 1,5$  kG?

**2.272.** Z jaką prędkością stoczy się bez poślizgu pełny walec po powierzchni pochyłej z wysokości  $h = 3$  m?

**2.273.** Moment bezwładności koła napędowego silnika wynosi  $J = 0,2$  kg·m<sup>2</sup>. W jakim czasie uzyska on prędkość kątową  $n = 1800$  obr/min, jeżeli moc silnika wynosi  $P = 200$  W?

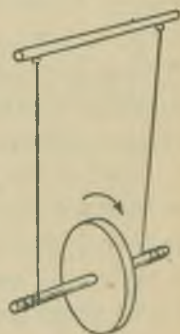
**2.274.** Kula o masie  $m = 150$  g toczy się po płaszczyźnie poziomej z prędkością  $v = 8$  m/s. Jaką siłą na drodze  $s = 12$  m można ją zahamować aż do zatrzymania się?

**2.275.** Obliczyć moment siły hamującej  $M$ , która zatrzyma w czasie  $t = 15$  s dysk o masie  $m = 10$  kg, o promieniu  $r = 12$  cm, obracający się z prędkością  $n = 1800$  obr/min.

**2.276.** Określić całkowitą energię kinetyczną przy toczeniu się bez poślizgu po powierzchni płaskiej z prędkością  $v$ : a) walca o masie  $m$ , b) kuli o masie  $m$ , c) wózka, którego masa (bez kół) wynosi  $m_1$ , a 4 kółka, każde o równomiernie rozmieszczonej masie  $m_2$ , mają kształt dysków.

**2.277.** Obliczyć, jaką część całkowitej energii kinetycznej stanowi energia obrotu w przypadku toczących się bez poślizgu po poziomej płaszczyźnie: a) obręczy, b) pełnego walca, c) kuli.

**2.278.** Z równi pochyłej o wysokości  $h$  staczają się: a) obręcz, b) pełny walec, c) kula. Znaleźć prędkości ruchu postępowego, jakie będą miały te ciała przy końcu równi. Porównać te prędkości, zaniedbując tarcie, z prędkością ciała (na końcu równi) zsuwającego się z równi.



Rys. 2.6

2.279. Obliczyć przyspieszenie mas  $m_1$  i  $m_2$  zawieszonych na nieważkiej, nierozdzielnej nici przerzuconej przez blok obracający się bez tarcia. Blok ma moment bezwładności  $J$  i promień  $R$ . Nici nie ślizga się po bloku. Obliczyć naciąg  $T_1$  i  $T_2$  nici.

2.280. Jednorodny cylinder o masie  $M$  i promieniu  $R$  obraca się bez tarcia dokoła osi poziomej pod działaniem ciężaru  $P$  przyłączonego do lekkiej nici nawiniętej na cylinder. Znaleźć zależność kąta obrotu od czasu  $t$ .

2.281. Model kołowrotu umieszczono na jednej szalce wagi. Na kołowrót o momencie bezwładności  $J$  i promieniu  $r$  nawinięta jest nić, na której wolnym końcu wisi ciężarek o masie  $m$ . Waga została zrównoważona, gdy kołowrót był zahamowany. O ile należy zmienić ciężar odważników na drugiej szalce, aby uzyskać równowagę, gdy kołowrót obraca się pod wpływem opadającego ciężarka.

2.282. O ile cm spadnie w czasie  $t = 2$  s masa  $m = 5$  kg zawieszona na sznurku nawiniętym na walec o promieniu  $r = 2$  cm napędzającym koło o momencie bezwładności  $J = 200$  kg·cm<sup>2</sup>? Obliczyć pracę  $A$  ciężaru w tym czasie, porównać ją z energią kinetyczną koła oraz z energią kinetyczną spadającej masy.

2.283. Do koła o promieniu  $R = 0,5$  m i o momencie bezwładności  $J = 20$  kg·m<sup>2</sup> przyłożono stały moment siły  $M = 50$  Nm. Znaleźć: a) przyspieszenie kątowe, b) prędkość liniową punktów na obwodzie koła w końcu dziesiątej sekundy. Prędkość początkową przyjąć równą zero.

2.284. Dwie linijki ustawiono równoległe w odległości  $d = 2$  cm pod kątem  $\alpha = 5^\circ$  do poziomu. Z jakim przyspieszeniem będzie się po nich toczyła kulka o promieniu  $r = 1,5$  cm? Poślizg nie występuje.

2.285. Kula o promieniu  $r$  stacza się po pochyłości i przebiega „martwą pętlę“ o promieniu  $R$ . Zaniedbując tarcie znaleźć mniejszą wysokość  $h$  środka kuli nad środkiem pętli, przy której jest to możliwe.

## 2.7. TARCIE

Siłę tarcia w ruchu postępowym wyraża wzór

$$T = fN, \quad (2.72)$$

gdzie  $T$  jest siłą tarcia,  $f$  — współczynnikiem tarcia,  $N$  — siłą nacisku skierowaną prostopadle do powierzchni.



Druga zasada dynamiki ruchu postepowego przy uwzględnieniu tarcia przyjmuje postać

$$F - T = ma, \quad (2.73)$$

gdzie  $F$  jest siłą bezpośrednio przyłożoną do ciała o masie  $m$ ,  $a$  zaś jest uzyskanym przez ciało przyspieszeniem.

Siła tarcia w ruchu obrotowym ciała po powierzchni gładkiej wyraża się wzorem

$$T = \frac{f'}{r} N, \quad (2.74)$$

gdzie  $f'$  oznacza współczynnik tarcia w ruchu obrotowym (wymiar cm),  $r$  — promień ciała.

$$f' N = Tr$$

jest momentem hamującym siły tarcia w ruchu obrotowym.

## Zadania

2.286. Obliczyć współczynnik tarcia ciała o masie  $m = 2,5$  kg po płaszczyźnie poziomej, jeżeli wiadomo, że do jego poruszenia się z prędkością stałą potrzebna jest siła  $F = 0,85$  N.

2.287. W celu określenia współczynnika tarcia  $f$  poruszamy po płaszczyźnie poziomej klocek o masie  $m = 2000$  g siłą  $F$  za pomocą sznura przerzuconego przez blok. Mierzmy czas  $t$  potrzebny do przebycia drogi  $s = 76$  cm. Obliczyć  $f$  z następujących danych pomiarowych:

$F$ w N	0,75	0,85	0,95	1,05	11,59
$t$ w s	4,16	3,46	2,91	2,54	2,22

2.288. Po jakim czasie  $t$  oraz na jakim odcinku drogi  $s$  wagon kolejowy, poruszający się po torze poziomym z prędkością początkową  $v_0 = 6$  m/s, zatrzyma się pod wpływem tarcia? Siła tarcia  $T = 1/200$  ciężaru wozu.

2.289. Na poziomej desce leży ciężar; współczynnik tarcia tego ciężaru o deskę wynosi  $f = 0,1$ . Jakie przyspieszenie w kierunku poziomym należy nadać desce, by spowodować w ten sposób zsuniecie się z niej ciężaru?

2.290. Na stole leży deska o masie  $M = 1$  kg, a na niej ciało o masie  $m = 2$  kg. Jaką siłą  $F$  należy działać na deskę, by ją wysunąć spod ciała?



Współczynnik tarcia między ciałem a deską  $f_1 = 0,25$ , między deską zaś a stołem  $f_2 = 0,5$ .

**2.291.** Jaka jest prędkość początkowa ciała, które zatrzymuje się pod wpływem tarcia ( $f = 0,02$ ) na drodze poziomej  $s = 100$  m?

**2.292.** Wyznaczyć współczynnik tarcia dla ruchu sanek, które zeszliżgują się z górkę lodowej o wysokości  $h$  i zatrzymują się na lodowisku tak, że suma drogi poziomej i rzutu drogi wzdłuż górkę lodowej na kierunku poziomy wynosi  $s$ .

**2.293.** Z jakim przyspieszeniem  $a$  zsuwa się ciało z równi pochyłej nachylonej pod kątem  $\alpha$  do poziomu, jeżeli współczynnik tarcia wynosi  $f$ ?

**2.294.** Pociąg o ciężarze  $Q = 150$  Ton porusza się po torze poziomym z prędkością  $v_0 = 12$  m/s; jaką drogę  $s$  przebędzie pociąg po zatrzymaniu dopływu pary, jeżeli siła tarcia wynosi  $1/200$  część ciężaru pociągu?

**2.295.** Obliczyć stałą siłę  $F$ , pod której wpływem wagon kolejowy o ciężarze  $Q = 20$  Ton uzyskuje na torze płaskim przy współczynniku tarcia  $f = 1/200$  w ciągu  $t = 1$  min prędkość  $v = 10$  m/s. Obliczyć włożoną pracę. Jaka moc jest potrzebna, aby utrzymać wagon przy stałej prędkości  $v$ ?

**2.296.** Ile wynosi energia kinetyczna lokomotywy o ciężarze  $Q = 60$  Ton, jadącej z prędkością  $v = 72$  km/h? W jakim czasie  $t$  maszyna uzyskuje tę prędkość, jeżeli współczynnik tarcia wynosi  $f = 0,02$ , efektywna zaś moc maszyny  $P = 300$  KM? Jaka została przy tym wykonana praca  $A$ ? W jakim czasie  $t_0$  i na jakiej drodze  $s_0$  maszyna zatrzyma się po zamknięciu dopływu pary? Jaką siłą  $F_1$  należy hamować lokomotywę, ażeby zatrzymać ją na drodze  $s = 500$  m?

**2.297.** Pociąg wychodzi ze stacji i po czasie  $t = 4$  min, poruszając się ruchem jednostajnie przyspieszonym, nabywa prędkości  $v = 48$  km/h. Obliczyć współczynnik tarcia pociągu na tej drodze wiedząc, że na pokonanie tarcia lokomotywa wykonuje tyle samo pracy, co i na przyspieszenie pociągu.

**2.298.** Na równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha = 45^\circ$  do poziomu znajduje się ciało o masie  $m = 200$  kg. Jaką siłą należy działać równoległe do drogi, by ciało było w równowadze? Współczynnik tarcia  $f = 0,01$ .

**2.299.** Jakiej siły należy użyć, aby podnieść masę  $m = 300$  kg po równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha = 30^\circ$ , jeżeli współczynnik tarcia wynosi  $f = 0,2$ ?

**2.300.** Jak będzie poruszać się ciało o masie  $m = 10$  kg po równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha = 30^\circ$  do poziomu, jeżeli współczynnik tarcia dla tego ruchu wynosi  $f = 0,05$ ?

2.301. Ciało zsuwa się z wierzchołka równi pochyłej o długości  $l = 10$  m i wysokości  $h = 5$  m. Obliczyć prędkość ciała przy końcu równi, jeżeli współczynnik tarcia  $f = 0,05$ .

2.302. Wagon kolejowy toczy się po równi pochyłej ruchem jednostajnym z prędkością  $v = 10$  km/h. Obliczyć kąt nachylenia drogi do poziomu, jeżeli współczynnik tarcia  $f = 0,02$ .

2.303. Współczynnik tarcia między ciałem a nachyloną deską wynosi  $f = 0,2$ . Na jaką wysokość podniesie się to ciało po desce, jeżeli nadano mu prędkość początkową w górę równoległą do deski  $v_0 = 10$  m/s? Jaka będzie prędkość ciała przy końcu deski na dole, gdy ono zawróci? Kąt nachylenia deski do poziomu wynosi  $\alpha = 45^\circ$ .

2.304. Wóz elektryczny o ciężarze  $Q = 500$  Ton porusza się ze stałą prędkością w górę po drodze  $s = 6$  km nachylonej 1 m na 1 km drogi. Współczynnik tarcia  $f = 0,002$ . Obliczyć pracę  $A$  wykonaną przez wóz. Obliczyć średnią moc  $P$  wozu, jeżeli drogę  $s = 6$  km przebywa on w ciągu czasu  $t = 5$  min.

2.305. Obliczyć pracę potrzebną na podniesienie ciała o masie  $m = 300$  kg na wysokość  $h = 4$  m wzdłuż równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha = 30^\circ$  do poziomu, jeżeli współczynnik tarcia wynosi  $f = 0,1$ .

2.306. Koń ciągnie sanie pod górę, której zbocze nachylone jest do poziomu pod kątem  $\alpha$ . Sanie ważące  $Q$  N poruszają się ze stałą prędkością  $v$ . Z jaką mocą pracuje koń ciągnący sanie? Współczynnik tarcia sanii wynosi  $f$ .

2.307. Lokomotywa może pracować mocą  $P = 2500$  KM. Z jaką średnią prędkością może ona ciągnąć pociąg towarowy, którego ciężar wraz z lokomotywą wynosi  $Q = 2800$  Ton. Współczynnik tarcia wynosi  $f = 0,005$ .

2.308. Jaka jest moc lokomotywy, która ciągnie pociąg o masie  $m = 3000$  ton po torze o nachyleniu  $n_1 = 0,01$  z prędkością  $v_1 = 20$  km/h, a po torze o nachyleniu  $n_2 = 0,008$  z prędkością  $v_2 = 22$  km/h. Uwzględnić tarcie.

2.309. Skrzynię w kształcie sześcianu przemieszcza się na odległość  $s$ : a) przez toczenie jej z jednej krawędzi na drugą, b) przez suwanie jej na jednej ze ścian. W pierwszym przypadku tarcie można zaniedbać, w drugim współczynnik tarcia ściany sześcianu o podłogę wynosi  $f$ . Przy jakiej wartości  $f$  praca w obu przypadkach jest równa?

2.310. Pociąg o ciężarze  $Q = 600$  Ton wyrusza ze stacji i w czasie  $t = 5$  min przebywa drogę  $s = 2,5$  km, uzyskując prędkość  $v = 60$  km/h.

Jaką średnią moc ma lokomotywa, jeżeli stały współczynnik tarcia  $f = 0,005$ ?

**2.311.** W jakiej odległości od osi może utrzymać się ciało na powierzchni obracającego się koła, jeżeli koło wykonuje  $n = 0,5$  obrotów na sekundę, a współczynnik tarcia  $f = 0,3$ ?

**2.312.** Jaki powinien być najmniejszy współczynnik tarcia  $f$  między oponami kół samochodu i asfaltem, by samochód mógł przejechać po poziomym zakręcie o promieniu krzywizny  $R = 200$  m z prędkością  $v = 100$  km/h?

**2.313.** Lokomotywa ciągnie skład pociągu siłą  $F = 2000$  kG. W jakim czasie pociąg uzyska prędkość  $v = 15$  m/s, jeżeli masa pociągu wynosi  $m = 1000$  ton, a współczynnik tarcia  $f = 0,001$ ?

**2.314.** Jakie maksymalne wzniesienie może pokonać parowóz rozwijający moc  $P = 400$  KM, ciągnąc skład pociągu o ciężarze  $Q = 1000$  Ton z prędkością  $v = 15$  km/h, jeżeli współczynnik tarcia wynosi  $f = 0,001$ ?

**2.315.** Na wale o promieniu  $r = 5$  cm osadzone jest koło zamachowe, które wprawiamy w obrót ciągnąc za sznur nawinięty na wale siłą  $F = 50$  N. Ile wynosi prędkość kątowna wału wraz z kołem po upływie czasu  $t = 15$  s, jeżeli koło razem z wałem ma masę  $m = 50$  kg oraz ramię bezwładności  $k = 25$  cm. Moment tarcia osi w łożyskach wynosi 1% momentu siły poruszającej wał.

**2.316.** Koło zamachowe, mające wraz z wałem moment bezwładności  $J = 200$  kg·m<sup>2</sup> obraca się wykonując  $n = 180$  obrotów na minutę. Po dwóch minutach, od chwili, gdy na koło przestał działać moment siły zewnętrznej, zatrzymało się ono pod działaniem sił tarcia w łożyskach. Przyjmując to tarcie jako stałe obliczyć moment siły tarcia.

**2.317.** Kula o promieniu  $r = 3$  cm toczy się po podłodze i zatrzymuje się pod wpływem tarcia po upływie czasu  $t = 2$  s przebywszy drogę  $s = 2,8$  m. Określić współczynnik tarcia  $f$  w ruchu obrotowym.

## 2.8. WŁASNOŚCI SPRĘŻYSTE CIAŁ

Prawo Hooke'a dla wydłużenia sprężystego piszemy w postaci

$$p = E \frac{\Delta l}{l} = E \lambda, \quad (2.75)$$

gdzie  $p$  oznacza ciśnienie powodujące wydłużenie  $\Delta l$  pręta o długości początkowej  $l$ , a  $E$  jest modułem Younga.

Liczbę Poissona  $\mu$  określamy jako stosunek  $\mu = \lambda'/\lambda$ , gdzie  $\lambda = \Delta l/l$  jest przyrostem jednostkowej długości w kierunku siły działającej, a  $\lambda'$  jest ubytkiem jednostkowej długości w kierunku prostopadłym do siły działającej.

Zmiana objętości ciała spowodowana ciśnieniem  $p$  wyraża się wzorem

$$\Delta V = V(1 - 2\mu) \frac{p}{E}, \quad (2.76)$$

gdzie  $V$  oznacza objętość początkową.

Odształcenie postaci określone jest wzorem

$$p = G\alpha, \quad (2.77)$$

gdzie  $G$  jest modułem sztywności,  $\alpha$  — miarą odkształcenia.

Moduł sztywności  $G$  możemy wyznaczyć z wzoru

$$G = \frac{2L}{\pi r^4 \varphi} M, \quad (2.78)$$

mierząc kąt skręcenia  $\varphi$  pręta o długości  $L$  i o promieniu  $r$  przekroju kołowego pod wpływem działania momentu skręcającego  $M$ .

## Zadania

**2.318.** Wyznaczyć minimalną długość, przy której zostanie rozerwany pod wpływem własnego ciężaru pręt metalowy: a) ze stali, b) z miedzi, c) z ołowiu, zawieszony pionowo i umocowany w swoim górnym końcu. Wytrzymałość na rozerwanie dla stali, miedzi i ołowiu wynosi odpowiednio  $7000 \text{ kG/cm}^2$ ,  $2400 \text{ kG/cm}^2$  i  $200 \text{ kG/cm}^2$ .

**2.319.** Pręt aluminiowy o długości  $l = 10 \text{ m}$  i średnicy przekroju kołowego  $d = 5 \text{ cm}$  umocowany jest górnym swoim końcem tak, że zwisa pionowo w dół. Obliczyć, o ile się wydłuży, jeżeli na jego dolnym końcu zawiesimy ciężar  $Q = 50 \text{ kG}$ . Moduł Younga dla aluminium  $E = 7200 \text{ kG/mm}^2$ .

**2.320.** Jaką średnicę  $d$  powinien mieć hak żelazny o przekroju kołowym, który ma dźwigać ciężar  $Q = 5 \text{ Ton}$  przy sześciokrotnym zabezpieczeniu. Wytrzymałość żelaza na rozerwanie wynosi  $6000 \text{ kG/cm}^2$ .

**2.321.** Określić moduł Younga materiału pręta o przekroju  $s = 5 \text{ cm}^2$ , który pod wpływem ciężaru  $Q = 1200 \text{ kG}$  wydłuży się o  $25 \cdot 10^{-5}$  część swojej długości początkowej.



2.322. Pręt miedziany o długości  $l = 1,5$  m obraca się wokół osi pionowej, przechodzącej przez środek pręta prostopadle do jego osi podłużnej. Przy jakiej prędkości kątowej pręt może ulec rozerwaniu, jeżeli wytrzymałość  $W$  miedzi na rozerwanie wynosi  $2400 \text{ kG/cm}^2$ .

2.323. Stalowe koło zamachowe obraca się z prędkością  $n = 30$  obr/min. Średni promień obwodu koła wynosi  $r = 0,8$  m. Określić wzrost średnicy koła zaniedbując działanie szprych. Moduł Younga dla stali wynosi  $E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$ .

2.324. Drut aluminiowy o długości  $l = 5$  m i przekroju kołowym o średnicy  $d = 6$  mm jest rozciągany siłą  $F = 100$  kG. O ile zmieni się przy tym: a) objętość pręta, b) jego powierzchnia boczna? Moduł Younga w przypadku aluminium wynosi  $E = 7200 \text{ kG/mm}^2$ , a współczynnik Poissona  $\mu = 0,33$ .

2.325. Jakie ciśnienie wewnętrzne  $P$  wytrzyma: a) rura szklana o średnicy zewnętrznej  $d_1 = 10$  mm i wewnętrznej  $d_2 = 9$  mm, b) kolba szklana w postaci kuli o średnicach  $d_1 = 152$  mm i  $d_2 = 150$  mm. Wytrzymałość szkła na rozerwanie wynosi  $p = 300 \text{ kG/cm}^2$ .

2.326. Kocioł parowy ma kształt walca, zamkniętego z obu końców półkulami. Wykazać, że ściany kotła mają jednakową wytrzymałość, jeżeli ściany walca są dwa razy grubsze od ścian półkul.

2.327. Na nici kwarcowej, o długości  $l = 10$  cm i średnicy  $d = 10 \mu\text{m}$  zawieszony jest poziomo pręt. Obliczyć moment siły, który skręci nicę kwarcową o kąt  $\varphi = 5^\circ$ , jeżeli moduł sztywności dla kwarcu wynosi  $G = 3 \cdot 10^{10} \text{ dyn/cm}^2$ .

## 2.9. AERO- I HYDROSTATYKA

Przy rozwiązywaniu zadań tego paragrafu posługujemy się prawami Pascala, Archimedesesa i Boyle'a-Mariotte'a.

### Zadania

2.328. Kawałek metalu waży w powietrzu  $Q = 91,6$  G, w wodzie  $Q_1 = 83,5$  G. Jaki jest jego ciężar właściwy?

2.329. Kawałek szkła, o gęstości  $\rho_1 = 2,5 \text{ g/cm}^3$  i o masie  $m = 150$  g, zawieszony na drucie zanurza się całkowicie w kwasie siarkowym o gęstości  $\rho_2 = 1,8 \text{ g/cm}^3$ . Obliczyć napięcie  $F$  drutu.



2.330. W jakim stosunku należy wziąć stal i korek, by połączone ze sobą dawały się umieścić w zawieszeniu w wodzie? Ciężar właściwy stali  $\gamma_1 = 7,5 \text{ G/cm}^3$ , korka  $\gamma_2 = 0,2 \text{ G/cm}^3$ .

2.331. Złoty łańcuch waży w powietrzu  $Q_1 = 48 \text{ G}$ , w wodzie  $Q_2 = 45 \text{ G}$ . Jaki jest skład tego złota, jeśli wiadomo, że ciężar właściwy czystego złota  $\gamma_1 = 19 \text{ G/cm}^3$ , srebra  $\gamma_2 = 10,5 \text{ G/cm}^3$ ?

2.332. Cienki pręt o długości  $l = 100 \text{ cm}$ , wykonany z drzewa o gęstości  $D = 0,8 \text{ g/cm}^3$ , zawieszono za jeden z końców na wysokości  $h = 30 \text{ cm}$  nad powierzchnią wody, w której zanurzony jest drugi koniec. Znaleźć kąt, jaki utworzy się między kierunkiem pręta a pionem.

2.333. Na powierzchni wody pływa metalowa boja w kształcie kuli, pustej w środku, o średnicy zewnętrznej  $D_1$  i wewnętrznej  $D_2$ . Gęstość materiału ścianek wynosi  $\rho_1$ , a gęstość wody —  $\rho_2$ . Jaki ciężar  $P$  należy umieścić wewnątrz boi, aby pływała ona do połowy zanurzona w wodzie? Gęstość powietrza wynosi  $\rho_3$ .

2.334. Na dźwigni o nierównych ramionach przymocowano dwa różne ciężarki z identycznego materiału, uzyskując równowagę dźwigni. Czy równowaga zachowa się w wodzie?

2.335. Jak wielką siłę  $F$  trzeba zastosować, aby rozerwać dobrze od-pompowaną kulę o promieniu wewnętrznym  $R$ , utworzoną z dwóch półkul magdeburskich?

2.336. Do rurki w kształcie litery U nalano rtęci, a na jej powierzchnię w jednym ramieniu wlało oliwy o ciężarze właściwym  $\gamma_0 = 0,92 \text{ G/cm}^3$ , a w drugim ramieniu nafty o ciężarze właściwym  $\gamma_n = 0,80 \text{ G/cm}^3$ . Wysokość słupków oliwy i nafty wynosiła odpowiednio  $h_1 = 48 \text{ cm}$  i  $h_2 = 20 \text{ cm}$ . Obliczyć różnicę poziomów rtęci w obu ramionach rurki wiedząc, że ciężar właściwy rtęci wynosi  $\gamma_r = 13,60 \text{ G/cm}^3$ .

2.337. Kula o średnicy  $2r = 10 \text{ cm}$ , zważona w powietrzu odważnikami mosiężnymi o ciężarze właściwym  $\gamma = 8,4 \text{ G/cm}^3$ , waży  $P = 800 \text{ G}$ . Ile waży ona w próżni, jeżeli ciężar właściwy powietrza wynosi  $\gamma_p = 0,00129 \text{ G/cm}^3$ ?

2.338. W powietrzu odważono za pomocą odważników mosiężnych (gęstość  $\rho_1 = 8,4 \text{ g/cm}^3$ )  $100 \text{ g}$  wody. Obliczyć prawdziwy ciężar wody.

2.339. Jedno ramię manometru, napełnionego rtęcią, ma przekrój poprzeczny  $20 \text{ cm}^2$ , drugie  $3 \text{ cm}^2$ . O ile  $\text{cm}$  ( $z_1$ ) obniży się powierzchnia rtęci w ramieniu szerszym, a o ile ( $z_2$ ) podwyższy się w ramieniu węższym, jeżeli ciśnienie w ramieniu szerszym podwyższy się o  $1 \text{ atm}$ ?

2.340. Do rurki w kształcie litery U, o jednakowym przekroju ramion, nalano rtęci, następnie do lewego ramienia dolano pewną ilość wody. Stwierdzono, że dolny poziom rtęci znajdował się na wysokości  $h_1 = 38,5$  cm, górny na wysokości  $h_2 = 41,6$  cm, górny poziom wody zaś na wysokości  $h_3 = 80,7$  cm. Jaki jest ciężar właściwy rtęci?

2.341. Rurka w kształcie litery U, składająca się z części poziomej o długości  $l$  i z dwu ramion pionowych  $A$  i  $B$ , zawiera ciecz. Znaleźć różnicę wysokości powierzchni cieczy w ramionach pionowych, jeżeli rurka obraca się ruchem jednostajnym około ramienia  $A$  jako osi.

2.342. Wysokość słupka barometru, poprawiona względem temperatury, była ta sama na równiku, co na biegunie. W którym z tych miejsc było większe ciśnienie atmosferyczne i w jakim stosunku?

2.343. Rurka szklana o długości  $l = 45$  cm z zatopionym górnym końcem zostaje zanurzona dolnym końcem do naczynia z rtęcią na głębokość  $H = 40$  cm. Na jaką wysokość  $h$  podniesie się rtęć w rurce licząc od końca zanurzonego? Ciśnienie barometryczne  $p = 760$  mm Hg.

2.344. Rurka szklana, mająca w górnym końcu kurek, zostaje zanurzona do naczynia z rtęcią przy otwartym kurku, tak że długość słupa powietrza w rurce wynosi  $l$ . Obliczyć długość  $l$ , jeżeli po zamknięciu kurka i podniesieniu rurki o  $H = 20$  cm rtęć podniosła się w rurce o  $h = 10$  cm nad poziom w naczyniu. Ciśnienie atmosferyczne  $p = 720$  mm Hg.

2.345. W prasie hydraulicznej średnica tłoka wynosi  $b = 1,6$  cm, średnica prasy  $B = 32$  cm, ramię siły  $k = 60$  cm, ramię tłoka  $l = 10$  cm. Jaka jest siła  $Q$  wywierana przez prasę, jeżeli obsługuje ją robotnik, działający siłą  $P = 12$  kG? Czy wywarte ciśnienie wystarczy do rozgniecenia kostki cementowej o krawędzi  $a = 6$  cm i wytrzymałości na zgniecenie  $F = 600$  kG/cm<sup>2</sup>?

2.346. Tłok pompy powietrznej ma powierzchnię  $S = 24$  cm<sup>2</sup>. Ciśnienie zewnętrzne  $p = 700$  Tr; wewnątrz zbiornika wypróżnionego ciśnienie wynosi  $p_1 = 14$  Tr. Jaka siła  $F$  jest konieczna do podniesienia tłoka? Ciężar właściwy rtęci  $\gamma = 13,6$  G/cm<sup>3</sup>.

2.347. Głębokość morza wynosi w pewnym miejscu  $h = 8513$  m. Jak duże jest ciśnienie na tej głębokości, jeśli gęstość wody morskiej  $\rho = 1,026$  g/cm<sup>3</sup>. O ile zmniejszy się na tej głębokości objętość jednego litra (1 dm<sup>3</sup>) wody, jeżeli współczynnik ściśliwości wody wynosi  $c = 0,00005/\text{atm}$ ?

2.348. Dwa zbiorniki o objętościach  $V_1 = 14$  i  $V_2 = 56$  litrów połączone są rurką z kranem. W pierwszym zbiorniku znajduje się gaz pod

ciśnieniem  $p_1 = 760$  mm Hg. Jakie będzie ciśnienie po otwarciu kranu, zakładając  $t = \text{const}$ , jeżeli: a) w drugim zbiorniku jest próżnia, b) jeżeli ciśnienie w drugim naczyniu wynosi  $p_2 = 400$  mm Hg?

**2.349.** Do barometru naczyniowego dostał się pęcherzyk powietrza, wskutek czego barometr wskazuje ciśnienie niższe od rzeczywistego. Przy porównaniu wskazań tego barometru z barometrem dokładnym okazało się, że przy ciśnieniu zewnętrznym  $p_0 = 768$  mm Hg wskazywał on tylko  $h_0 = 748$  mm Hg, a odległość menisku rtęci do zatopionego końca rurki barometru wynosiła  $h_1 = 80$  mm. Obliczyć, jaka jest poprawna wartość ciśnienia  $p$ , jeśli zły barometr wskazuje  $h' = 734$  mm Hg. Temperatura powietrza jest stała.

**2.350.** Pewna ilość gazu zajmuje objętość  $V_1 = 10,5$  litrów przy ciśnieniu  $p_1 = 710$  Tr. Jaką objętość zajmuje ta sama ilość gazu przy ciśnieniu  $p_2 = 760$  Tr?

**2.351.** Kompresor pobrał  $V_1 = 4$  m<sup>3</sup> powietrza przy ciśnieniu  $p_1 = 770$  Tr i sprężył je do ciśnienia  $p_2 = 5$  atm. Jaką objętość zajmie to powietrze po sprężeniu, jeżeli temperatura gazu pozostaje stała?

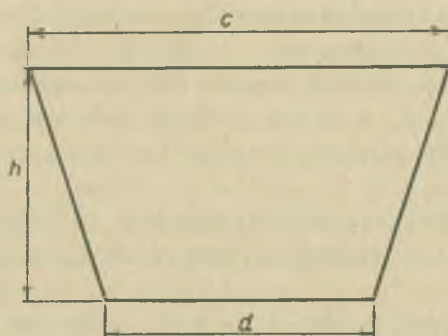
**2.352.** Rurka cylindryczna o długości  $l = 100$  cm, zatopiona na jednym końcu, została napełniona rtęcią do wysokości  $h = 80$  cm. Następnie zamknięto otwarty koniec palcem, odwrócono rurkę i zanurzono ją do naczynia z rtęcią, wsuwając ją na głębokość  $a = 10$  cm. Jaką długość ma słup powietrza w rurce po ustaleniu się równowagi, jeżeli ciśnienie zewnętrzne wynosi  $p_0 = 700$  Tr?

**2.353.** Cienka rurka cylindryczna, zamknięta z jednego końca, zawiera powietrze oddzielone od powietrza atmosferycznego słupkiem rtęci o wysokości  $h$ . Gdy rurka odwrócona jest zamkniętym końcem w górę, powietrze w niej zawarte zajmuje wysokość  $l_1$ , gdy zaś rurkę odwrócimy otwartym końcem w górę, to słupek powietrza w niej ma długość  $l_2$ . Wyznaczyć ciśnienie atmosferyczne.

**2.354.** W zasklepionym, krótszym ramieniu rurki U zamknięto kroplą rtęci słup powietrza o wysokości  $l_1 = 18$  cm. Do jakiego poziomu  $H$  należy dolać rtęci do dłuższego ramienia rurki, by zamknięty słup powietrza w rurce skrócił się do  $2/3$  swej pierwotnej wysokości? Ciśnienie atmosferyczne  $p_0 = 700$  Tr.

**2.355.** Znaleźć siłę naporu (hydrostatycznego) wody na zaporę rzeczną o wymiarach trapezu (rys. 2.7), jeżeli  $h = 5$  m,  $d = 10$  m,  $c = 15$  m. Znaleźć moment tej siły względem dolnej krawędzi zapory.

2.356. Powietrze przy powierzchni Ziemi zawiera w przeliczeniu na liczbę cząsteczek w jednostkowej objętości 20% tlenu i 80% azotu. Przy założeniu statycznej i izotermicznej atmosfery znaleźć procentowy udział tlenu na wysokości  $h = 10 \text{ km}$  ( $t = 0^\circ \text{C}$ ).



Rys. 2.7

## 2.10. AERO- I HYDRODYNAMIKA

**Prawo ciągłości** słuszne jest w przypadku ruchu ustalonego. Dla dowolnego miejsca w rurze prądu iloczyn prędkości  $v$  cieczy i powierzchni przekroju  $S$  jest wielkością stałą

$$vS = \text{const.} \quad (2.79)$$

**Prawo Bernoulliego** opisuje ruch ustalony cieczy doskonałej ( $\eta = 0$ )

$$h\rho g + p + \frac{1}{2}v^2\rho = \text{const.}, \quad (2.80)$$

gdzie  $h$  oznacza wysokość wzniesienia danego poziomu nad poziom odniesienia (tzw. wysokość geometryczna),  $p$  oznacza ciśnienie hydrostatyczne,  $\rho$  — gęstość cieczy,  $v$  — prędkość cieczy,  $g$  — przyspieszenie ziemskie.

**Prawo Torricellego** otrzymuje się z prawa Bernoulliego. Podaje ono zależność prędkości wypływu cieczy  $v$  od różnicy ciśnień  $p$

$$v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}, \quad (2.81)$$

gdzie  $\rho$  oznacza gęstość wypływającej cieczy. W szczególnym przypadku



prędkość wypływu cieczy przez otwór w naczyniu znajdujący się na głębokości  $h$  pod powierzchnią swobodną wynosi

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (2.82)$$

**Powierzchnia przekroju strumienia** wypływającego z otworu o przekroju  $s$  wynosi  $ks$ , gdzie  $k$  nazywa się *współczynnikiem kontrakcji*.

**Prawo Stokesa** podaje siłę tarcia  $F$  kuli o promieniu  $r$  spadającej ze stałą prędkością  $v$  w ośrodku o współczynniku lepkości  $\eta$

$$F = 6\pi\eta rv. \quad (2.83)$$

**Wzór Poiseuille'a** wyraża zależność objętości  $V$  cieczy, przepływającej w czasie  $t$  przez rurę o długości  $l$  i powierzchni przekroju  $\pi r^2$ , od różnicy ciśnienia  $p$ , jeżeli lepkość cieczy wynosi  $\eta$

$$V = \frac{\pi r^2 p t}{8l\eta}. \quad (2.84)$$

## Zadania

**2.357.** Przez rurę o zmiennym przekroju przepływa stacjonarny strumień wody. Obliczyć prędkość przepływu  $v$  wody w miejscu o przekroju  $S_1 = 4 \text{ cm}^2$ , jeżeli w miejscu o przekroju  $S_2 = 8 \text{ cm}^2$  prędkość przepływu wynosi  $v_2 = 1 \text{ m/s}$ .

**2.358.** Obliczyć prędkość przepływu wody w rurze, jeżeli ciśnienie hydrodynamiczne wynosi  $p_v = 20 \text{ cm}$  słupa wody ( $\text{cm H}_2\text{O}$ ).

**2.359.** Na jaką wysokość nad poziom wody w jeziorze podniesie się słup wody w pionowej rurze, która porusza się z prędkością  $v = 5 \text{ m/s}$ , jeżeli koniec rury znajdujący się w wodzie jest zagięty pod kątem prostym i zwrócony w kierunku ruchu rury?

**2.360.** Z jaką prędkością przepływa: a) powietrze o gęstości  $\rho_p = 1,293 \text{ g/l}$ , b) dwutlenek węgla o gęstości  $\rho = 1,53 \rho_p$  do obszaru próżniowego, jeżeli ciśnienie powietrza i dwutlenku węgla wynosi  $b = 760 \text{ mm Hg}$ , gęstość rtęci zaś równa się  $\rho_r = 13,6 \text{ g/cm}^3$ ? Jaki jest stosunek obu prędkości?

**2.361.** Zasadniczą częścią wodomierza jest rura pozioma o zmiennym



przekroju. W miejscach o przekrojach  $S_1$  i  $S_2$  wmontowano rury manometryczne. Wyznaczyć zużycie wody, jeżeli różnica poziomów w rurkach manometrycznych wynosi  $h$  cm  $H_2O$ .

**2.362.** Przekrój tłoka strzykawki wynosi  $S_1 = 1,8$  cm<sup>2</sup>, przekrój otworu zaś  $S_2 = 2$  mm<sup>2</sup>. W jakim czasie wypłynie woda ze strzykawki, jeżeli na tłok działamy siłą  $F = 0,75$  kG, a tłok ma się przesunąć o odcinek drogi  $l = 4$  cm?

**2.363.** Z rurki o promieniu wewnętrznym  $r = 2$  mm wypływa strumień wody z prędkością  $v = 5$  m/s. Jaką siłę wywiera ten strumień na płytkę, w którą uderza prostopadłe do powierzchni?

**2.364.** Sikawka w postaci rurki metalowej o długości  $l = 40$  cm wyrzuca strumień wody pod kątem  $\varphi = 60^\circ$  do poziomu, obracając się równocześnie w ciągu czasu  $t = 2$  s o kąt  $\alpha = 90^\circ$  wokół osi pionowej, przechodzącej przez dolny koniec rurki. Wyznaczyć moment siły obracającej, jeżeli sikawka w ciągu czasu  $t$  wyrzuca  $m = 10$  kg wody.

**2.365.** Do naczynia, w którego dnie znajduje się otwór o przekroju  $S = 1$  cm<sup>2</sup>, wpływa równomierną strugą woda z prędkością  $q = 200$  cm<sup>3</sup>/s. Na jakiej wysokości ustali się poziom wody w naczyniu?

**2.366.** Z jaką prędkością  $v$  wypływa ciecz przez otwór w ścianie naczynia, który znajduje się o  $h = 4,9$  m poniżej poziomu cieczy w naczyniu?

**2.367.** Z jaką prędkością wypływa woda przez otwór, który znajduje się o  $h = 2$  m poniżej poziomu wody, ciśnienie zaś wywierane na powierzchnię swobodną wody jest większe od ciśnienia atmosferycznego o  $b = 1$  atm?

**2.368.** Ile wody wypłynie w czasie  $t = 50$  s przez otwór o powierzchni przekroju  $s = 10$  cm<sup>2</sup>, jeżeli otwór znajduje się o  $h = 1$  m poniżej poziomu wody, który nie zmienia się w czasie wypływu? Współczynnik kontrakcji strumienia wynosi  $k = 0,7$ .

**2.369.** W dnie naczynia cylindrycznego o wysokości  $H = 1$  m i powierzchni przekroju  $S = 500$  cm<sup>2</sup> znajduje się otwór o przekroju  $s = 1$  cm<sup>2</sup>. Jak porusza się powierzchnia swobodna cieczy w naczyniu? W jakim czasie naczynie zostanie opróżnione?

**2.370.** Naczynie w kształcie walca o wysokości  $H = 40$  cm i średnicy  $2r = 10$  cm zostaje napełnione wodą. W czasie  $t_0 = 1$  h naczynie to zostaje opróżnione poprzez kołowy otwór znajdujący się w dnie naczynia. Na jakiej wysokości znajduje się poziom wody w naczyniu po upływie czasu  $t_1 = \frac{1}{4}$  h,  $t_2 = \frac{1}{2}$  h,  $t_3 = \frac{3}{4}$  h od chwili otwarcia kurka? Obliczyć

powierzchnię przekroju otworu kołowego, jeżeli współczynnik kontrakcji  $k = 0,6$ .

**2.371.** Naczynie o ścianach pionowych, gdzie poziom wody znajduje się na wysokości  $H$ , opróżnia się z wody poprzez otwór umieszczony w dnie naczynia w ciągu  $t_0$  s. W jakim czasie  $t$  poziom wody w naczyniu obniży się do wysokości  $h$ ?

**2.372.** Naczynie w postaci walca o wysokości  $H = 1$  m i średnicy  $2r = 50$  cm napełniono wodą. Ile wody wypłynie w ciągu  $t = 4$  min przez znajdujący się w dnie naczynia otwór o przekroju  $s = 1$  cm<sup>2</sup>, jeżeli współczynnik kontrakcji wynosi 0,7?

**2.373.** Z otworu znajdującego się w pionowej ścianie naczynia na wysokości  $h = 80$  cm od podłogi tryska poziomo strumień wody, który uderza o podłogę w odległości  $l$  od ściany naczynia. Obliczyć odległość  $l$ , jeżeli poziom wody w naczyniu jest stale utrzymywany na tej samej wysokości  $H = 160$  cm nad podłogą.

**2.374.** Na jakiej wysokości  $H$  nad podłogą musi się znajdować poziom wody w naczyniu, aby strumień wody wypływającej poziomo z otworu znajdującego się w pionowej ścianie naczynia na wysokości  $h$  nad podłogą trafił w podłogę w odległości  $l$  od pionowej ściany naczynia?

**2.375.** Na jakiej wysokości  $h$  od dna naczynia o ścianach pionowych należy umieścić otwór, aby strumień wody padł na podłogę najdalej od podstawy, jeżeli wysokość powierzchni swobodnej cieczy w naczyniu wynosi  $H$ ?

**2.376.** W pionowej ścianie naczynia ustawionego na podłodze wykonano dwa otwory: jeden w odległości  $h$  od dna, drugi w odległości  $h$  od powierzchni swobodnej cieczy. Z obu otworów wypływają poziomo strumienie wody. Który ze strumieni uderza o podłogę bliżej pionowej ściany naczynia?

**2.377.** Poziom wody w naczyniu o pionowych ścianach utrzymuje się na wysokości  $H = 170$  cm. W ścianie naczynia znajdują się pionowo nad sobą dwa otwory. Strumienie wody wypływające z tych otworów trafiają w podłogę w tym samym miejscu. Obliczyć wysokość  $h_1$  i  $h_2$  położenia otworów nad podłogą, jeżeli: a) górny otwór znajduje się o  $a = 50$  cm poniżej poziomu wody w naczyniu, b) odstęp między otworami wynosi  $b = 50$  cm.

**2.378.** Pod jakim ciśnieniem należy tłoczyć wodę do rury wodociągowej o przekroju  $s = 30$  cm<sup>2</sup> i długości  $l = 3$  km, aby przepływ wody wynosił  $v = 10$  l/s? Współczynnik lepkości  $\eta = 0,12$  puaza.

2.379. Obliczyć prędkość kątową koła młyńskiego o promieniu  $R$ , przy której moc spadającej wody jest wykorzystana w maksymalnym stopniu. Wysokość słupa wody wynosi  $h = 5$  m, poprzeczny przekrój strumienia  $S = 0,06$  m<sup>2</sup>, promień koła  $R = 1,5$  m.

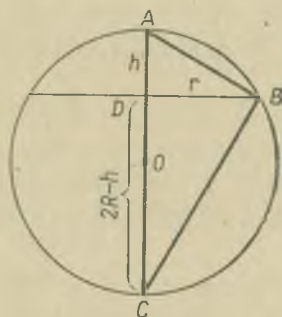
2.380. Jaką maksymalną prędkość osiąga kula żelazna o promieniu  $r = 10$  cm spadając w powietrzu z bardzo dużej wysokości, jeżeli współczynnik tarcia wynosi  $\alpha = 0,05$ ?

2.381. Z jaką prędkością spada kula o średnicy  $2r = 1$  mm w wodzie o współczynniku lepkości  $\eta = 0,01$  puaza, jeżeli gęstość materiału kulki wynosi  $\rho = 1,2$  g/cm<sup>3</sup>?

## 2.11. ROZWIĄZANIA ZADAŃ

2.1. Jeżeli obierzemy na noniuszu długość odpowiadającą  $n-1$  podziałkom na skali i utworzymy z tej długości  $n$  podziałek noniusza, wówczas dokładność odczytu na noniuszu wynosi  $1/n$ . W naszym przypadku

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{20}, \quad n = 20, \quad 0,5' \cdot \frac{1}{20} = 1,5''.$$



Rys. 2.8

2.2. Z podobieństwa trójkątów  $ABC$  i  $ADB$  (rys. 2.8) wynika, że

$$(2R-h):r = r:h, \quad 2R-h = \frac{r^2}{h},$$

$$2R = \frac{r^2+h^2}{h}, \quad R = \frac{r^2+h^2}{2h} = 28,43 \text{ mm}.$$

2.3. Masę kartki otrzymujemy mnożąc objętość kartki przez jej gęstość  $\rho$ . Ponieważ grubość kartki wynosi  $h/10$ , powierzchnia zaś  $S$ , stąd objętość kartki wynosi  $S h/10$ , masa zaś  $m = S \frac{h\rho}{10}$ , stąd  $S = \frac{10 m}{h\rho} = 51,52 \text{ cm}^2$ .

2.4. 1 rok = 365,2422 średnich dób słonecznych = 366,2422 dób gwiazdowych; średnia doba słoneczna =  $\frac{1}{365,2422}$  roku; doba gwiazdowa =  $\frac{1}{366,2422}$  roku; średnia

$$\begin{aligned} \text{doba słoneczna} - \text{doba gwiazdowa} &= \frac{1}{365,2422} \text{ roku} - \frac{1}{366,2422} \text{ roku} = \\ &= \frac{1}{365,2422 \cdot 366,2422} \text{ roku} = \frac{1}{365,2422 \cdot 366,2422} \cdot 365,2422 \text{ śr. dób słon.} = \\ &= \frac{24 \cdot 60}{366,2422} \text{ min} = 3 \text{ min } 55,9 \text{ s.} \end{aligned}$$

$$2.5. t = \frac{s}{v} = \frac{100 \text{ m}}{100 \text{ km/h}} = \frac{0,1 \text{ km} \cdot \text{h}}{100 \text{ km}} = 0,001 \text{ h} = 0,001 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 3,6 \text{ s.}$$

$$2.6. s_0 = vt_0, \quad v = \frac{s_0}{t_0}, \quad s = vt = \frac{s_0}{t_0} t = 70,7 \text{ km.}$$

$$2.7. s = vt = \frac{72 \cdot 10^3}{3600} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,4 \text{ cm.}$$

$$2.8. v_1 = \frac{s}{t_1}, \quad v_2 = \frac{s}{t_2}.$$

Ze związków tych otrzymujemy  $t_1$  i  $t_2$ . Średnią prędkość otrzymujemy z wzoru

$$v = \frac{2s}{t_1 + t_2},$$

po podstawieniu wartości  $t_1$  i  $t_2$  otrzymujemy

$$v = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 44,4 \text{ km/h.}$$

2.9. Prędkość na drodze od  $A$  do  $B$  wynosi  $v = \frac{s}{t}$ , gdzie  $t$  jest czasem trwania ruchu. Droga od  $A$  do  $B$  i z powrotem od  $B$  do  $A$  wynosi  $2s$ . Oznaczając czas potrzebny na przebycie drogi powrotnej przez  $t_1$  otrzymujemy związek  $2v = \frac{2s}{t + t_1}$ . Ponieważ  $v = \frac{s}{t}$ , więc

$$2v = \frac{2s}{t} = \frac{2s}{t + t_1}, \quad \text{czyli } t_1 = 0, \quad \text{a stąd } v_1 = \frac{s}{t_1} = \infty.$$

2.10. Z warunków zadania i według rysunku 2.9 otrzymujemy

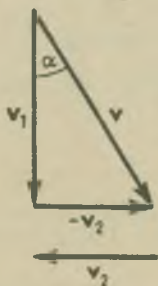
$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 76,2 \text{ m/s}, \quad \text{tg} \alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{7}, \quad \alpha = 23^\circ 12'.$$

Z pociągu oglądane krople leżą po torze, który tworzy kąt  $\alpha = 23^\circ 12'$  z pionem i poruszają się z prędkością  $v = 76,2$  m/s.

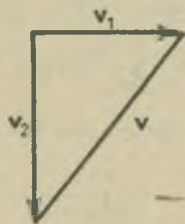
2.11. Z rysunku 2.10 otrzymujemy

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 36,06 \text{ km/h},$$

$$s = vt = 36,06 \text{ km/h} \cdot 4 \text{ h} = 144,2 \text{ km}.$$



Rys. 2.9



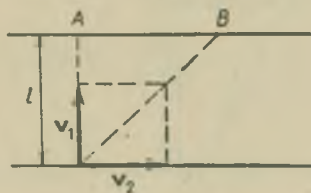
Rys. 2.10

2.12. Odległość  $AB = x$  (rys. 2.11)

skąd

$$l = v_1 t, \quad x = v_2 t,$$

$$x = v_2 \frac{l}{v_1} = 80 \text{ m}.$$



Rys. 2.11

2.13.  $v_1 = v_3 - v_4$ ,  $v_2 = v_3 + v_4$ . Dodając i odejmując równania od siebie otrzymujemy

$$v_2 = \frac{v_1 + v_3}{2} = 5 \text{ km/h}, \quad v_4 = \frac{v_3 - v_1}{2} = 1,2 \text{ km/h}.$$

2.14. Z rysunku 2.12 wynika, że

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 34 \text{ m/s}.$$



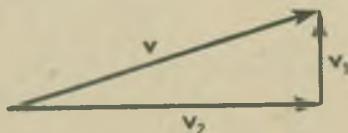
2.15. Z rysunku 2.13 otrzymujemy

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 18,5 \text{ m/s},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_1}{v_2}, \quad \alpha = 25^\circ 40'.$$



Rys. 2.12

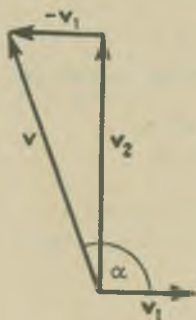


Rys. 2.13

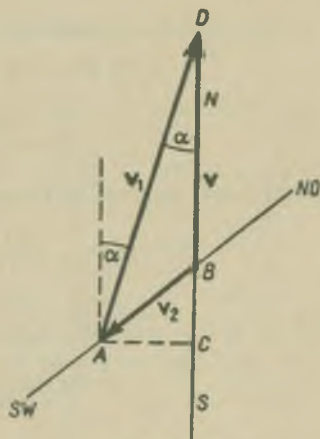
2.16. Jeżeli prędkość pociągu wynosi  $v_1$ , to prędkość kuli względem pociągu  $v$  jest sumą  $v_2$  i  $-v_1$ . Z rysunku 2.14 otrzymujemy więc

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 201,2 \text{ m/s},$$

$$\alpha = 96^\circ 22'.$$



Rys. 2.14



Rys. 2.15

2.17. Na rys. 2.15  $v_2$  przedstawia prędkość wiatru,  $v_1$  — prędkość własną sterowca, zaś  $v$  — prędkość wypadkową sterowca. Kierunek steru tworzy z kierunkiem SN kąt  $\alpha$ . Z rysunku 2.15 otrzymujemy

$$\sin \alpha = \frac{AC}{v_1}, \quad \text{ponieważ} \quad AC = v_2 \cos 45^\circ,$$

więc

$$\sin \alpha = \frac{v_2 \cos 45^\circ}{v_1},$$

skąd

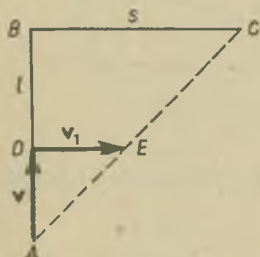
$$\alpha = 11^\circ 29'.$$

Wartość liczbową prędkości własnej sterowca otrzymujemy z wzoru

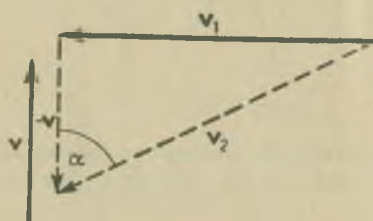
$$v = CD - CB,$$

co daje po przekształceniu  $v = v_1 \cos \alpha - v_2 \cos 45^\circ$ , skąd

$$v = 21,5 \text{ m/s}.$$



Rys. 2.16



Rys. 2.17

2.18. Z podobieństwa trójkątów  $ABC$  i  $ADE$  (rys. 2.16) mamy

$$BC:AB = DE:AD, \quad s:l = v_1:v,$$

skąd

$$v_1 = \frac{sv}{l} = 0,5 \text{ m/s}.$$

2.19. Wzajemna prędkość podróźnego względem pociągu towarowego wynosi

$$v = v_1 + v_2, \quad \text{skąd} \quad t = \frac{l}{v} = \frac{l}{v_1 + v_2} = 9 \text{ s}.$$

$$2.20. \quad t_1 = \frac{2AB}{v_1}, \quad t = \frac{AB}{v_1 + v_2} + \frac{AB}{v_1 - v_2},$$

$$t_1 = \frac{t(v_1^2 - v_2^2)}{v_1^2} = 1 \text{ h } 45,6 \text{ min}.$$

$$2.21. \quad t = \frac{l}{v_1 - v} + \frac{l}{v_1 + v} = \frac{2v_1 l}{v_1^2 - v^2} = 9,9 \text{ min}.$$

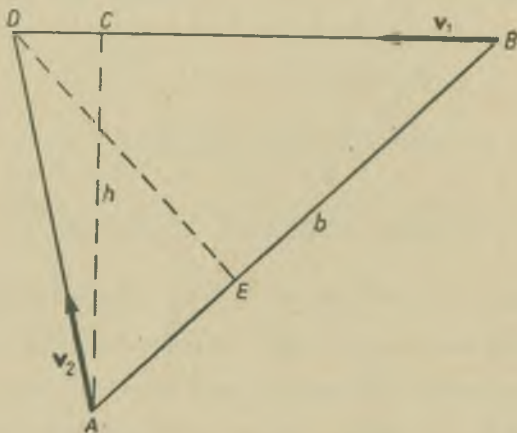
2.22. W układzie związanym z okrętem okręt spoczywa, natomiast łódź otrzymuje dodatkową prędkość  $-v$  (rys. 2.17). Korzystając z rys. 2.17 otrzymujemy

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + (-v)^2} = 47,2 \text{ km/h},$$

$$\text{tga} = \frac{v_1}{v}, \quad \alpha = 58^\circ.$$

Z okrętu wydaje się, że łódź przybliży się pod kątem  $58^\circ$  do kursu okrętu z prędkością  $47,2 \text{ km/h}$ .

2.23. Człowiek znajduje się w punkcie  $A$ , samochód zaś w punkcie  $B$ . Zwroty prędkości człowieka i samochodu pokazane są na rys. 2.18.  $BD = v_1 t$ ,  $AD = v_2 t$ . Odcinek  $DE$  jest prostopadły do  $AB$ .



Rys. 2.18

nek  $DE$  jest prostopadły do  $AB$ . Wartość powierzchni trójkąta  $ABD$  można zapisać w dwojaki sposób:

$\frac{v_1 \cdot t \cdot h}{2} = \frac{b \cdot DE}{2}$ , przy czym  $DE = v_2 t \sin \alpha$ , skąd  $v_1 t h = b v_2 t \sin \alpha$  oraz  $\sin \alpha = \frac{h v_1}{b v_2} = \frac{50 \cdot 10}{200 \cdot 3} = \frac{5}{6}$ ,  $\alpha = 56^\circ 27'$ . Prędkość  $v_2 = \frac{h v_1}{b \sin \alpha}$ ,  $v_2$  ma wartość najmniejszą, gdy  $\sin \alpha = 1$ , wówczas

$$v_2 = \frac{h v_1}{b} = \frac{50 \cdot 10 \text{ m}}{200 \text{ s}} = \frac{5 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2.24. Oznaczmy czas przejścia odcinka  $s$  w górę rzeki przez  $t_1$ , czas przejazdu tego samego odcinka z powrotem przez  $t_2$ . Wówczas możemy napisać

$$s = (v_2 - v_1) t_1 = (v_2 + v_1) t_2,$$

skąd

$$t_1 + t_2 = \frac{s}{v_2 - v_1} + \frac{s}{v_2 + v_1} = \frac{2s v_2}{v_2^2 - v_1^2}.$$

Czas przejazdu odcinka drogi  $2s$  w wodzie stojącej wynosi  $t = \frac{2s}{v_2}$ ,

$$\frac{t_1 + t_2}{t} = \frac{v_2^2}{v_2^2 - v_1^2} = \frac{25}{25 - 4} = \frac{25}{21}.$$

2.25. Oznaczmy długość wagonu przez  $l$ , przyspieszenie pociągu przez  $a$ . Czas mijania  $n$ -tego wagonu jest równy różnicy czasu mijania pociągu o  $n$  wagonach i czasu mijania pierwszych  $n-1$  wagonów pociągu.

$$t = t_n - t_{n-1}, \quad l = \frac{a\tau^2}{2} \quad \text{oraz} \quad \tau = \sqrt{\frac{2l}{a}}, \quad nt = \frac{1}{2}at_n^2, \quad t_n = \sqrt{\frac{2nl}{a}},$$

$$(n-1)l = \frac{1}{2}at_{n-1}^2, \quad t_{n-1} = \sqrt{\frac{2(n-1)l}{a}},$$

$$t = \sqrt{\frac{2nl}{a}} - \sqrt{\frac{2(n-1)l}{a}}.$$

Podstawiając do powyższego związku  $l = \frac{a\tau^2}{2}$  otrzymujemy

$$t = \tau(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 3(\sqrt{6} - \sqrt{5}) \text{ s} = 3(2,495 - 2,236) \text{ s} = 3 \cdot 0,259 \text{ s} = 0,777 \text{ s}.$$

2.26. Przesunięcie samochodu w czasie fotografowania wynosi  $vt$ ; na kliszy to przesunięcie jest zmniejszone w stosunku  $f:l$ , czyli wynosi  $vt \frac{f}{l} = 0,67 \text{ mm}$ .

2.27. Prędkość samolotu możemy rozłożyć na dwie składowe: pionową  $v_{\perp}$  i poziomą  $v_{\parallel}$ , która jest równocześnie prędkością ruchu cienia samolotu po powierzchni Ziemi.

$$v_{\perp} = \frac{h}{t} = 1 \text{ km/min} = 60 \text{ km/h},$$

$$v_{\parallel} = \sqrt{v^2 - v_{\perp}^2} = \sqrt{v^2 - \frac{h^2}{t^2}} = \sqrt{486400} \text{ km/h} = 697,4 \text{ km/h}.$$

2.28. a) Składowe prędkości są:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = r\omega \cos \omega t \quad \text{oraz} \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -r\omega \sin \omega t.$$

Składowe przyspieszenia

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -r\omega^2 \sin \omega t \quad \text{oraz} \quad a_y = -r\omega^2 \cos \omega t,$$

$$\text{b) } x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \omega t + r^2 \cos^2 \omega t = r^2,$$

$$\text{c) } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2.$$

2.29. a) Składowe prędkości są:  $v_x = \frac{dx}{dt} = c$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt} = 2bt$ .

Składowe przyspieszenia  $a_x = 0$ ,  $a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2b$ .

b) Dla  $a = 0$ ,  $b = \frac{g}{2}$ ,  $c = v_0$  równanie ruchu w zapisie parametrycznym ma postać

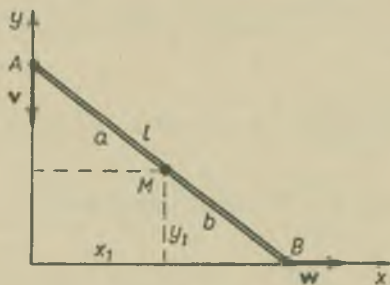
$$x = v_0 t, \quad y = \frac{gt^2}{2}.$$

Wzdłuż osi  $x$  ruch jest jednostajny, zaś wzdłuż osi  $y$  — jednostajnie przyspieszony. Jest to rzut poziomy. Po wyrzutowaniu  $t$  otrzymujemy:

$$y = \frac{g}{2} \left( \frac{x}{v_0} \right)^2 = \frac{g}{2v_0^2} x^2. \text{ Jest to równanie paraboli.}$$

2.30. a)  $v(t) = \int a dt = v_0 + \int 12kt dt = v_0 + 6kt^2$ . Ponieważ dla  $t = 0$ ,  $v = 0$ , więc wynika stąd, że  $v_0 = 0$ , a zatem  $v(t) = 6kt^2$ .

b)  $x(t) = \int v(t) dt = x_0 + 2kt^3$ ; ponieważ dla  $t = 0$  również  $x = 0$ , więc wynika stąd, że  $x_0 = 0$ , a  $x(t) = 2kt^3$ .



Rys. 2.19



Rys. 2.20

2.31. Oznaczmy współrzędną punktu  $A$  przez  $y$ , współrzędną zaś punktu  $B$  — przez  $x$ . Prędkość punktu  $A$  niech będzie  $v = \left| \frac{dy}{dt} \right|$ , prędkość zaś punktu  $B$  oznaczmy przez

$$w = \left| \frac{dx}{dt} \right| \text{ (rys. 2.19).}$$

$$w = \left| \frac{dx}{dt} \right| = \left| \frac{dx}{dy} \right| \cdot \left| \frac{dy}{dt} \right|, \quad x^2 = l^2 - y^2 \text{ oraz}$$

$$x = \sqrt{l^2 - y^2}, \text{ skąd } \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{\sqrt{l^2 - y^2}},$$

$$w = v \frac{y}{\sqrt{l^2 - y^2}}, \text{ dla } y = 30 \text{ cm,}$$



$$w = 4 \frac{30}{\sqrt{2500-900}} \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 4 \frac{30}{\sqrt{1600}} \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 4 \frac{30}{40} \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 3 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

2.32. Prędkość kątowna ruchu obrotowego latarni wynosi

$$\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n, \quad \alpha = 2\pi nt.$$

Korzystając z rys. 2.20 możemy napisać:

$$x = R_0 \operatorname{tg} \alpha; \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{R_0}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{R_0 2\pi n}{\cos^2(2\pi nt)} = \frac{6 \cdot 2\pi}{\cos^2 0,4\pi} \approx \frac{37,68 \text{ m}}{0,08 \text{ s}} \approx 419 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2.33. Dla współrzędnych biegunowych równanie toru ruchu ma postać:  $r = Ae^{\varphi}$ . Jest to równanie tzw. spirali logarytmicznej, dla której promień  $r$  wzrasta eksponencjalnie ze wzrostem kąta  $\varphi$ . Prędkość ruchu punktu materialnego obliczymy z wzoru

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \text{ przy czym } x = r \cos \varphi \text{ oraz } y = r \sin \varphi, \text{ zaś } r = Ae^{k\varphi} \text{ i } \varphi = kt.$$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\left(\frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(rk \cos \varphi - rk \sin \varphi)^2 + (rk \sin \varphi + rk \cos \varphi)^2} = \sqrt{2r^2 k^2} = rk \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Przyspieszenie ruchu obliczymy z wzoru

$$a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}.$$

Z poprzednich przeliczeń można odczytać, że  $\frac{dx}{dt} = rk(\cos \varphi - \sin \varphi)$ , skąd

$$\frac{d^2x}{dt^2} = rk^2(\cos \varphi - \sin \varphi) + rk^2(-\sin \varphi - \cos \varphi) = -2rk^2 \sin \varphi.$$

$$\frac{dy}{dt} = rk(\sin \varphi + \cos \varphi),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = rk^2(\sin \varphi + \cos \varphi) + rk^2(\cos \varphi - \sin \varphi) = 2rk^2 \cos \varphi,$$

skąd

$$a = \sqrt{4r^2 k^4 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = 2rk^2.$$

Promień krzywizny  $R$  można obliczyć z wzoru

$$v = \omega R = R \frac{d\varphi}{dt} = Rk.$$

Ponieważ  $v = rk\sqrt{2}$ , więc

$$R = \frac{v}{k} = r\sqrt{2}.$$

2.34. Między przyspieszeniem i czasem zachodzi zależność  $a = bt$ , gdzie  $b = \frac{a_1}{t_1} = \frac{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{10 \text{ s}} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-3}$ .

Prędkość i drogę ruchu obliczamy z wzorów

$$v = \int a dt = \int bt dt = \frac{1}{2}bt^2, \quad s = \int v dt = \int \frac{1}{2}bt^2 dt = \frac{1}{6}bt^3,$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-3} \cdot 10^2 \text{ s}^2 = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \quad s_1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-3} \cdot 10^3 \text{ s}^3 = 166,66 \text{ m}.$$

2.35. Z wzoru (2.8) wynika, że  $s = \frac{v^2}{2a} = 375 \text{ m}$ .

2.36.  $v = 0 = v_1 - at$ ,  $a = \frac{v_1}{t} = 1,2 \text{ m/s}^2$ .

2.37. Z wzoru (2.8) wynika, że  $a = \frac{v^2}{2s} = 0,185 \text{ m/s}^2 = 18,5 \text{ cm/s}^2$ .

Z wzoru  $s = \frac{1}{2}st^2$  otrzymujemy

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 90 \text{ s}.$$

2.38. Z wzoru (2.8) otrzymujemy

$$s = \frac{v^2}{2a} = 320 \text{ m}.$$

Z wzoru  $v = at$  wynika, że  $t = \frac{v}{a} = 40 \text{ s}$ .

2.39. Z wzoru (2.8) otrzymujemy

$$a = \frac{v^2}{2s} = 0,44 \text{ m/s}^2,$$

czas zaś wynosi

$$t = \frac{2s}{v} = 11,4 \text{ s}.$$

2.40.  $a = \frac{v^2}{2s} = 216 \text{ 000 m/s}^2$ ,  $t = \frac{2s}{v} = \frac{1}{300} \text{ s}$ .

2.41. Z wzoru  $v = 0 = v_0 - at$  oraz  $s = v_0 t = \frac{1}{2}at^2$  otrzymujemy

$$s = \frac{v_0 t}{2} = 135 \text{ m},$$

natomiast

$$a = \frac{v_0}{t} = 1,2 \text{ m/s}^2.$$

2.42. Z wzorów zadania 2.41 otrzymujemy  $s = \frac{v^2}{2a} = 322 \text{ m}$ .

2.43. W celu uproszczenia zadania rozważmy dwa koła o promieniu jednostkowym, wtedy drogi przebyte w czasie  $t$  wyrażają się wzorami

$$s_1 = \frac{2\pi}{T_1}t, \quad s_2 = \frac{2\pi}{T_2}t.$$

Do momentu ponownego pokrycia się obu promieni wodzących  $t = T$  różnica dróg musi wynosić  $2\pi$ , to znaczy jeden z promieni musi wykonać dodatkowy obieg po okręgu, żeby dogonić drugi.

$$s_1 \pm s_2 = 2\pi \quad \text{albo} \quad \frac{1}{T_1} \pm \frac{1}{T_2} = \frac{1}{T} \quad \text{lub} \quad \omega_1 \pm \omega_2 = \omega.$$

Znak minus stosuje się przy obiegu promieni w tym samym kierunku, znak plus przy obiegu przeciwnym.

W astronomii okresy  $T_1$  i  $T_2$  nazywają się okresami syderycznymi,  $T$  — okresem synodycznym

$$T = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}.$$

2.44. Zgodnie z wzorem z zadania 2.43

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2},$$

$T_1 = 60 \text{ min}$ ,  $T_2 = 12 \text{ h}$ ,

$$T = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} = \frac{12}{11} \text{ h} = 1 \text{ h } 5,45 \text{ min}.$$

2.45. Stosujemy wzór  $\frac{1}{T} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}$  wyprowadzony w zadaniu 2.43

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T}, \quad T_2 = \frac{T_1 T}{T - T_1}.$$

Po podstawieniu danych  $T_1 = 365,24^d$  oraz  $T = 1^a 218,7^d$  i  $2^a 49^d 0$  otrzymujemy

$$T_2 = 2^a 241,5^d \quad \text{i} \quad 1^a 321^d.$$

2.46. Położenie roweru jest zgodne z wypadkową przyspieszeń  $a$  i  $g$  (rys. 2.21) i wobec tego

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{g} = \frac{v^2}{rg},$$

skąd

$$v = \sqrt{rg \operatorname{tg} \varphi} = 7,52 \text{ m/s}.$$

2.47. Z rysunku 2.22 otrzymujemy

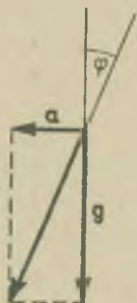
$$\sin \varphi = \frac{h}{l} \approx \operatorname{tg} \varphi,$$

z rozwiązania zaś zadania 2.46 mamy

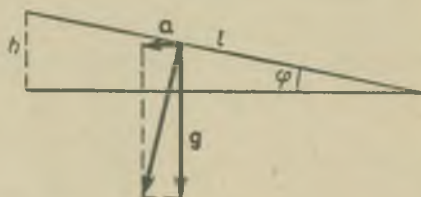
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{g} = \frac{v^2}{rg} \approx \frac{h}{l}, \quad r = \frac{h^2}{g} = 501 \text{ m}.$$

**2.48.** Ruch kuli wewnątrz lufy jest ruchem jednostajnie przyspieszonym (przy założeniu działania stałej siły w czasie wystrzału), dla którego słuszne są następujące wzory:

$$v = at, \quad s = l = \frac{1}{2}at^2,$$



Rys. 2.21



Rys. 2.22

stąd

$$l = \frac{vt}{2} \quad \text{oraz} \quad t = \frac{2l}{v} = \frac{1}{400} \text{ s}.$$

Kula wylatując z lufy ma prędkość  $v$ , a na drodze  $l$  wykonuje jeden pełny obrót. Odpowiadający tej prędkości okres ruchu obrotowego wynosi

$$T = \frac{l}{v} = \frac{1}{800} \text{ s}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 1600\pi \text{ s}^{-1}, \quad n = \frac{1}{T} = 800 \text{ s}^{-1}.$$

Ponieważ ruch postępowy kuli wewnątrz lufy jest jednostajnie przyspieszony, a częstotliwość kątowna jest proporcjonalna do prędkości, więc także ruch obrotowy jest jednostajnie przyspieszony, o przyspieszeniu kątowym  $\varepsilon$

$$\omega = \varepsilon t, \quad \varepsilon = \frac{\omega}{t} = 1600 \cdot 400\pi \text{ s}^{-2} = 640000\pi \text{ s}^{-2}.$$

$$2.49. \quad \omega = \frac{a}{t} = \frac{2\pi}{2nt} = \frac{2\pi}{2 \cdot 18 \cdot 0,02} = 2,7\pi \text{ s}^{-1}.$$

**2.50.** Prędkość samolotu musi być równa przeciwnie skierowanej prędkości punktu o danej szerokości geograficznej w ruchu obrotowym Ziemi

$$v = \omega r.$$

Z rysunku 2.23 otrzymujemy

$$r = R \cos \varphi.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych do pierwszego wzoru mamy

$$v = \frac{2\pi}{365,24 \cdot 24} \cdot 6370 \cos 77^\circ 35',$$

$$v = 360 \text{ km/h}.$$

W czasie lotu z tą prędkością bliżej bieguna Słońce będzie wschodziło dla lotnika na zachodzie, a zachodziło na wschodzie, czyli efekt będzie taki sam, jak gdyby Ziemia obracała się w kierunku przeciwnym.

2.51. Zakładając, że ruch obrotowy koła w czasie hamowania był jednostajnie opóźniony, możemy napisać wzory analogiczne do wzorów w ruchu postępowym

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t = 0, \quad \varphi = N2\pi = \omega_0 t - \frac{1}{2} \varepsilon t^2,$$

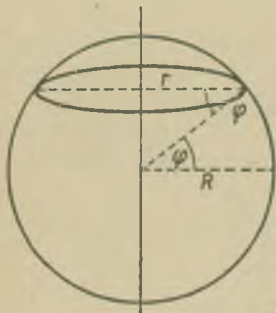
$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t} = \frac{2\pi n}{t} = 5,24 \frac{1}{s^2},$$

$$N = \frac{\omega_0 t}{2\pi} - \frac{1}{4\pi} \varepsilon t^2 = \frac{\omega_0 t}{4\pi};$$

$$N = \frac{\omega_0 t}{4\pi} = \frac{2\pi n t}{4\pi} = \frac{n t}{2} = 375 \text{ obr.}$$

2.52.  $\omega = \varepsilon t, \quad \varphi = n2\pi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2, \quad \varepsilon = \frac{4n\pi}{t^2},$

$$\omega = \frac{4n\pi}{t} = 20\pi \frac{1}{s} = 10 \text{ obr/s}.$$



Rys. 2.23

2.53.  $n = 1500 \text{ obr/min} = 25 \text{ obr/s}$ . Częstość migotania  $n_1 = 4n$ , czyli w ciągu jednego obrotu lampa neonowa zaświeci się 4 razy zastając za każdym razem sektor przesunięty o kąt  $\varphi_1 = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ . W czasie oświetlenia (błysk) sektor czarny przesunął się o kąt  $\varphi_2 = n t 360^\circ = 27^\circ$ . Kąt, w którym znajdował się czarny sektor, przez cały czas oświetlenia wynosi  $\varphi - \varphi_2 = 13^\circ$ . Obraz koła przedstawia się następująco: mamy 4 sektory jasne, z których każdy ma kąt środkowy  $\frac{360^\circ - 4(\varphi + \varphi_2)}{4} = 29^\circ$  oraz

4 sektory ciemne. Środki ciemnych sektorów o kącie środkowym  $\varphi - \varphi_2 = 13^\circ$  są czarne, natomiast po obu stronach czarnych sektorów mamy sektory o kącie środkowym  $\varphi_2 = 27^\circ$  o narastającej na zewnątrz jasności.

2.54. Korzystając z wzorów (2.10) i (2.12) otrzymujemy

$$a_n = \frac{v^2}{r} = 0,25 \text{ m/s}^2, \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 0,32 \text{ m/s}^2.$$

2.55. 1)  $\omega = \varepsilon t$ , ale  $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot \frac{1}{2} \text{ s}^{-2}}{1} = \pi \text{ s}^{-2}, \quad \omega = 2\pi \text{ s}^{-1},$

2)  $v = \omega r = 20\pi \text{ m/s} = 62,83 \text{ m/s},$

3)  $a_n = \omega^2 r = 4\pi^2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 394,8 \text{ m/s}^2,$

$$a_t = \varepsilon r = 10\pi \text{ m/s}^2 = 31,42 \text{ m/s}^2,$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = 396,0 \text{ m/s}^2.$$



2.56.  $\omega = 2\pi n = \varepsilon t$ , skąd  $\varepsilon = \frac{2\pi n}{t} = 20,9 \text{ s}^{-2}$ .

2.57.  $s = \frac{1}{2}gt^2$ , podstawiając na miejsce  $t$  poszczególne wartości 1, 2, 3, 4 i  $t$  s, otrzymujemy odpowiednio

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2}g = 490,5 \text{ cm}, & s_2 &= 2g = 1962 \text{ cm}, \\ s_3 &= \frac{9}{2}g = 4414,5 \text{ cm}, & s_4 &= 8g = 7848 \text{ cm}, \\ s_5 &= \frac{25}{2}g = 12262,5 \text{ cm}. \end{aligned}$$

2.58.  $v = gt$ ; dla konkretnych wartości liczbowych  $t = 1, 2, 3, 4, 5$  s otrzymujemy odpowiednio

$$\begin{aligned} v_1 &= g = 981 \text{ cm/s}, & v_2 &= 2g = 1962 \text{ cm/s}, \\ v_3 &= 3g = 2943 \text{ cm/s}, & v_4 &= 4g = 3924 \text{ cm/s}, \\ v_5 &= 5g = 4905 \text{ cm/s}. \end{aligned}$$

2.59. Prędkość ciała w ruchu jednostajnie przyspieszonym wyraża się wzorem  $v = gt$ , przy czym  $t$  otrzymujemy z wzoru

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \quad t = \sqrt{2\frac{s}{g}},$$

skąd

$$v = gt = \sqrt{2sg};$$

dla poszczególnych wartości  $s = 1, 2, 3, 4$  oraz 5 m otrzymujemy odpowiednio

$$\begin{aligned} v_1 &= 443 \text{ cm/s}, & v_2 &= 626,4 \text{ cm/s}, & v_3 &= 767,2 \text{ cm/s}, \\ v_4 &= 885,9 \text{ cm/s}, & v_5 &= 990,5 \text{ cm/s}. \end{aligned}$$

2.60. Z wzoru  $s = \frac{1}{2}gt^2$  wynika  $t = \sqrt{\frac{2S}{g}} = 0,045 \text{ s}$ .

2.61. Z układu 2 równań można obliczyć dwie niewiadome  $v_0$  i  $a$ .

$$\begin{cases} s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \\ v = nv_0 = v_0 + at, \end{cases}$$

skąd  $(n-1)v_0 = at$  i  $v_0 = \frac{at}{n-1}$ .

Podstawiając tę wartość do drugiego równania otrzymujemy

$$s = \frac{at^2}{n-1} + \frac{at^2}{2} = \frac{(n+1)at^2}{2(n-1)},$$

skąd

$$a = \frac{2s(n-1)}{(n+1)t^2} = \frac{4s}{3t^2} = 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

2.62. Oznaczając prędkość na początku pierwszego odcinka drogi przez  $v_1$ , otrzymujemy dla tego odcinka związek

$$s = v_1 t_1 + \frac{1}{2}at_1^2.$$

Drugi odcinek drogi wyraża się następującym wzorem:

$$s = (v_1 + at_1)t_2 + \frac{1}{2}at_2^2,$$

gdzie  $v_1 + at_1$  jest prędkością na początku drugiego odcinka. Z tych dwu równań otrzymujemy

$$a = \frac{2s(t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 5 \text{ m/s}^2, \quad v_1 = \frac{s(2t_1 t_2 + t_2^2 - t_1^2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 2,5 \text{ m/s}.$$

2.63.  $v = gt, h = \frac{1}{2}gt^2,$

skąd

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 6,38 \text{ s} \quad \text{oraz} \quad v = \sqrt{2gh} = 62,7 \text{ m/s}.$$

2.64.  $vt = v_0 t + \frac{1}{2}at^2, t = 0$  nie może być rozwiązaniem tego równania, wobec tego możemy je podzielić przez  $t$

$$t = \frac{2(v - v_0)}{a} = 19,6 \text{ s}.$$

2.65. Jeżeli czas zaczynamy liczyć od chwili wyrzucenia pierwszej kuli, wówczas drogi przebyte przez kolejne kule wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2}gt^2, & s_2 &= \frac{1}{2}g(t - \frac{1}{4})^2, & s_3 &= \frac{1}{2}g(t - \frac{3}{4})^2, \\ s_4 &= \frac{1}{2}g(t - \frac{5}{4})^2, & s_5 &= \frac{1}{2}g(t - \frac{7}{4})^2, & s_6 &= \frac{1}{2}g(t - \frac{9}{4})^2. \end{aligned}$$

Podstawiając  $t = 1\frac{1}{4}$  s otrzymujemy

$$\begin{aligned} s_1 - s_2 &= 275,9 \text{ cm}, & s_4 - s_5 &= 91,9 \text{ cm}, \\ s_2 - s_3 &= 214,6 \text{ cm}, & s_5 - s_6 &= 30,7 \text{ cm}, \\ s_3 - s_4 &= 153,3 \text{ cm}. \end{aligned}$$

2.66. Droga przebyta przez pierwszą kroplę wynosi  $\frac{1}{2}a(t+T)^2$ , przez drugą zaś kroplę  $\frac{1}{2}at^2$ . Stąd odległość  $s$  między kroplami wyraża się wzorem

$$s = \frac{1}{2}a(t+T)^2 - \frac{1}{2}at^2.$$

Rozwiązując równanie względem  $T$ , otrzymujemy

$$T^2 + 2Tt - \frac{2s}{a} = 0,$$

skąd

$$T = -t + \sqrt{t^2 + \frac{2s}{a}} = 1 \text{ s}.$$

2.67. Piłka doskonale sprężysta wróci po odbiciu się na daną wysokość z tą samą prędkością, z jaką została z tej wysokości rzucona. Wobec tego prędkość wyrzucenia  $v$  musi odpowiadać rzędnej wysokości wzniesienia  $h$  nad miejscem wyrzucenia. Z wzoru (2.8) wynika

$$v_0 = \sqrt{2gh} = 17,2 \text{ m/s}.$$

2.68.  $AB = s_2 - s_1 = \frac{1}{2}at_2^2 - \frac{1}{2}at_1^2$ ,  $v_1 = at_1$ ,  $v_2 = at_2$ . Odejmując dwa ostatnie równania od siebie otrzymujemy czas, w jakim ciało przebyło drogę  $AB$

$$t_2 - t_1 = \frac{v_2 - v_1}{a} = 2\text{s}.$$

Pierwsze równanie po przekształceniu daje drogę przebytą przez ciało

$$s_2 - s_1 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} = 78,4 \text{ m}.$$

2.69. Korzystając ze związku  $AB + BC = AC$  i wyrażając go przez czas spadania obu kulek, otrzymujemy równanie

$$l + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g(t_1 + t)^2,$$

skąd

$$t = \frac{l}{gt_1} - \frac{1}{2}t_1 = 3,25 \text{ s}, \quad s = \frac{1}{2}gt^2 = 51,8 \text{ m}.$$

2.70. Jeżeli czas spadania kamienia wynosi  $t$ , wówczas

$$\frac{1}{2}gt^2 = v(T - t),$$

skąd po rozwiązaniu równania drugiego stopnia

$$t = 5,55 \text{ s}, \quad s = \frac{1}{2}gt^2 = 151 \text{ m}.$$

2.71. Z wzoru (2.28)

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = 127,4 \text{ m}.$$

Czas wznoszenia się ciała w górę wynosi

$$t = \frac{v_0}{g} = 5,1 \text{ s}.$$

2.72.  $v = v_0 - gt = 160 \text{ m/s}$ ,  $h = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = 720 \text{ m}$ .

2.73. Czas wznoszenia się = czas spadania =  $\frac{1}{2}t$ . Wysokość wznoszenia się

$$h_1 = \frac{1}{2}g\left(\frac{1}{2}t\right)^2 = \frac{1}{8}gt^2.$$

Ciało rzucone z prędkością  $v$  osiąga wysokość

$$h_2 = \frac{v^2}{2g}, \quad \text{ale} \quad h_1 = h_2, \quad \text{więc} \quad \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{8}gt^2$$

skąd

$$v = \frac{1}{2}gt = 58,86 \text{ m/s}.$$

2.74. Opisane w zadaniu 2.74 urządzenie służy do wyznaczania przyspieszenia ziemskiego. Wskaźnikami czasu są widełki stroikowe równomiernie drgające, których każdorazowe położenie dla dowolnego położenia płyty swobodnie spadającej jest zaznaczone na płycie krzywą pokazaną na rys. 2.2. Mierząc drogę  $s$ , o jaką przesunęła się płyta,

oraz odpowiadającą tej drodze liczbę drgań  $n$  widełek (tzn. czas  $t = n/N$ ), możemy określić przyspieszenie ziemskie z wzoru na ruch jednostajnie przyspieszony

$$s = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{n}{N}\right)^2, \quad g = 2s\left(\frac{N}{n}\right)^2.$$

Początek krzywej nie zawsze jednak nadaje się do pomiarów. Wtedy wykorzystujemy krzywą nie od początku, ale od jakiegoś późniejszego miejsca  $s_0$ , któremu odpowiada nieznaną czas  $t_0$ . Następnie obieramy kolejne odcinki  $s$ , odpowiadające tej samej liczbie drgań. Odcinki te oznaczamy kolejno  $s_1, s_2, s_3, \dots$

Z definicji ruchu jednostajnie przyspieszonego wynika, że drogi przebyte w 1, 2, 3, 4, ... sekundzie mają się tak jak 1:3:5:7:9:..., różnice zaś tych dróg mają się do siebie jak 2:2:2:2..., czyli że różnice dróg przebyte w kolejnych sekundach są stałe. Jest to słuszne nie tylko dla odstępów czasu co jedną sekundę, ale dla dowolnych kolejnych równych odstępów czasu  $\Delta t$ .

Skorzystamy z tej własności i obliczymy związek między  $\Delta t$ , a  $s_2 - s_1 = \Delta s_{12}$  albo  $s_3 - s_2 = \Delta s_{23}$ ,

$$s_0 = \frac{1}{2}gt_0^2, \quad s_0 + s_1 = \frac{1}{2}g(t_0 + \Delta t)^2, \quad s_0 + s_1 + s_2 + s_3 = \frac{1}{2}g(t_0 + 3\Delta t)^2 \quad \dots$$

Różnice kolejnych równości dają

$$s_1 = \frac{1}{2}g(2t_0\Delta t + \Delta t^2), \quad s_2 = \frac{1}{2}g(2t_0\Delta t + 3\Delta t^2), \quad s_3 = \frac{1}{2}g(2t_0\Delta t + 5\Delta t^2) \quad \text{itd.}$$

Obliczamy stąd różnicę dróg

$$s_2 - s_1 = \Delta s_{12} = g\Delta t^2 = g\left(\frac{n}{N}\right)^2, \quad s_3 - s_2 = \Delta s_{23} = g\Delta t^2,$$

$$s_4 - s_3 = \Delta s_{34} = g\Delta t^2 \quad \dots$$

Przyspieszenie ziemskie wynosi więc

$$g = \Delta s_{12} \left(\frac{N}{n}\right)^2 = \Delta s_{23} \left(\frac{N}{n}\right)^2 \quad \dots$$

**2.75.** Zgodnie z ogólnym rozwiązaniem zadania 2.74

a) kolejne  $\Delta s = 0,97; 0,92; 0,95; 0,95$  cm, średnie  $\Delta s = 0,9475$  cm, przyspieszenie ziemskie wynosi

$$g = 0,9475 \cdot \left(\frac{128}{4}\right)^2 \text{ cm/s}^2 = 970 \text{ cm/s}^2,$$

b) kolejne  $\Delta s = 1,50; 1,50; 1,46$  cm; średnie  $\Delta s = 1,487$  cm, przyspieszenie ziemskie wynosi

$$g = 1,487 \cdot \left(\frac{128}{5}\right)^2 \text{ cm/s}^2 = 974 \text{ cm/s}^2$$

$$2.76. \quad h = \frac{gt^2}{2}; \quad h - h_1 = \frac{g(t-\tau)^2}{2},$$

$$h = h_1 + \frac{gt^2}{2} - g\tau\tau + \frac{g\tau^2}{2} = h_1 + h + \frac{g\tau^2}{2} - g\tau\tau$$

$$h_1 = g t \tau - \frac{g \tau^2}{2}; \quad g t \tau = h_1 + \frac{g \tau^2}{2},$$

$$t = \frac{h_1}{g \tau} + \frac{\tau}{2}; \quad h = \frac{g \tau^2}{2} = \frac{g}{2} \left( \frac{h_1}{g \tau} + \frac{\tau}{2} \right)^2 = \frac{g}{2} \left( \frac{2h_1 + g \tau^2}{2g \tau} \right)^2 =$$

$$= \frac{(2h_1 + g \tau^2)^2}{8g \tau^2} = 91,9 \text{ m}.$$

2.77. Korzystając z wzoru zadania poprzedniego

$$h = \frac{(2h_1 + g \tau^2)^2}{8g \tau^2} \text{ otrzymujemy } h = 44,08 \text{ m}.$$

2.78. Treść zadania można ująć następującym układem równań:

$$s_2 = \frac{1}{2} g t^2, \quad s_1 = \frac{1}{2} g (t-1)^2, \quad s_2 - s_1 = \frac{2}{3} s_1.$$

Z tego układu otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{2} g [t^2 - (t-1)^2] = \frac{1}{3} g t^2.$$

Stąd czas spadania wynosi  $t = 2,37 \text{ s}$  oraz droga  $s_2 = 27,6 \text{ m}$ .

2.79. Prędkość wyrzucenia ciała pionowo w górę  $v_0$  otrzymujemy przez rozwiązanie następujących 2 równań:

$$h = \frac{1}{2} g T^2, \quad h = v_0(T-t) + \frac{1}{2} g (T-t)^2, \quad T = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3 \text{ s}.$$

Po rozwiązaniu równania

$$h = v_0 \left( \sqrt{\frac{2h}{g}} - t \right) + \frac{1}{2} g \left( \sqrt{\frac{2h}{g}} - t \right)^2 \text{ mamy}$$

$$v_0 = \frac{g t (\sqrt{8gh} - g t)}{\sqrt{8gh} - 2g t}.$$

Po podstawieniu  $t = 1 \text{ s}$  otrzymujemy

$$v_0 = 12,5 \text{ m/s}.$$

2.80. Z powodu wzrostu prędkości spadania przekrój strumienia cieczy maleje i zaczynają odgrywać rolę siły napięcia powierzchniowego, pod których wpływem tworzą się krople.

2.81. Proporcjonalnie do wzrostu prędkości rośnie wzajemna odległość ziaren piasku i odpowiednio średnia gęstość strugi. Z wzoru (2.8) otrzymujemy

$$v^2 - v_0^2 = 2g s, \quad v = \sqrt{2g s + v_0^2} = 10 \text{ m/s},$$

$$\rho : \rho_0 = v_0 : v, \quad \rho = \frac{\rho_0 v_0}{v} = 0,36 \text{ g/cm}^3.$$

2.82. Wspólna długość toru dla ciał  $A$  i  $B$  wynosi  $h = \frac{v_1^2}{2g}$ , przy czym  $h$  równe jest sumie dróg ciała  $A$  i  $B$

$$h = s_A + s_B,$$



gdzie

$$s_A = v_1 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad s_B = v_1 t + \frac{1}{2} g t^2.$$

Stąd otrzymujemy

$$2v_1 t = \frac{v_1^2}{2g}$$

oraz

$$t = \frac{v_1}{4g} = 1,25 \text{ s},$$

$$s_A = 53,6 \text{ m}, \quad v_A = v_1 - g t = 36,74 \text{ m/s}, \quad v_B = v_1 + g t = 61,26 \text{ m/s}.$$

**2.83.** Drogi ciała  $A$  i  $B$  są sobie równe

$$s_A = s_B,$$

gdzie  $s_A = vt - \frac{1}{2} g t^2$ ,  $s_B = v(t-1) - \frac{1}{2} g (t-1)^2$ . Z równań tych otrzymujemy

$$t = \frac{v}{g} + \frac{1}{2} \text{ s} = 5,6 \text{ s}, \quad s_B = \frac{v^2}{2g} - \frac{1}{8} g = 126,1 \text{ m},$$

$$v_A = v - g \left( \frac{v}{g} + \frac{1}{2} \text{ s} \right) = -\frac{1}{2} g = -4,9 \text{ m/s},$$

$$v_B = v - g \left( \frac{v}{g} - \frac{1}{2} \text{ s} \right) = \frac{1}{2} g = 4,9 \text{ m/s},$$

gdzie  $v_A$  i  $v_B$  są to prędkości ciał  $A$  i  $B$  w chwili spotkania. Z tego, że w chwili spotkania

$$v_A = v_B = g t = 4,9 \text{ m/s}, \quad t = \frac{1}{2} \text{ s}$$

wynika, że ciała spotkają się po  $\frac{1}{2}$  sekundy od momentu uzyskania przez ciało  $A$  maksymalnego wzniesienia; ciało  $A$  opada, ciało  $B$  wznosi się nadal do góry, przy czym oba ciała mają te same prędkości, tylko przeciwnie skierowane.

Ten sam wynik można uzyskać za pomocą prostego rozumowania. Ciało  $B$  nie może przegonić ciała  $A$ , więc te ciała mogą się spotkać wtedy, gdy ciało  $A$  jest już w drodze powrotnej. W chwili gdy ciało  $A$  osiągnęło maksymalne wzniesienie, ciało  $B$  potrzebuje 1 sekundy na dojsię do tego miejsca. Ponieważ czas wznoszenia się ciała w rzucie pionowym równy jest czasowi opadania, więc do chwili spotkania się obu ciał ciało  $B$  potrzebuje tyle czasu na osiągnięcie maksymalnego wzniesienia, ile czasu potrzebuje ciało  $A$  na przebycie drogi od punktu maksymalnego wzniesienia do punktu spotkania się obu ciał. Ponieważ w sumie czas ten równy jest 1 sekundzie, więc ciało  $A$  spadało  $\frac{1}{2}$  sekundy od punktu maksymalnego wzniesienia, a w punkcie spotkania prędkości muszą być równe  $v_A = v_B$ . Z wzoru

$$v = g t$$

otrzymujemy więc

$$v = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \text{ m/s} = 4,9 \text{ m/s}.$$

**2.84.** Czas wznoszenia się kuli do góry otrzymujemy z równania

$$v = 0 = v_0 - g t \sin \alpha.$$

Drógę  $s$  przebytą do góry oraz wysokość wznoszenia się  $h$  kulki podają wzory

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha, \quad h = s \sin \alpha,$$

z których otrzymujemy

$$s = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha} = 0,355 \text{ m}, \quad h = \frac{v_0^2}{2g} = 0,204 \text{ m}.$$

Ciało rzucone w górę po równi pochyłej osiąga (bez uwzględniania tarcia) taką wysokość wzniesienia, jaką osiągnęłoby rzucone pionowo w górę z tą samą prędkością początkową.

**2.85.** Z układu równań

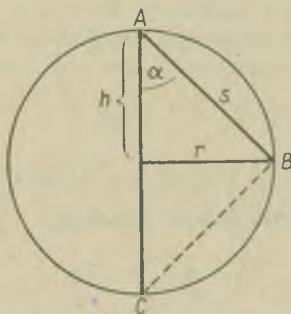
$$v = 0 = v_0 - g t \sin \alpha, \quad s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha$$

otrzymujemy

$$t = \frac{v_0}{g \sin \alpha} = 10,39 \text{ s}$$

oraz

$$s = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha} = 280,4 \text{ m}.$$



Rys. 2.24

**2.86.** Spadanie wzdłuż cięciwy koła jest ruchem jednostajnie przyspieszonym, ponieważ na ciało działa stała składowa siły przyciągania ziemskiego. Prędkość w tym ruchu wynosi

$$v = at,$$

gdzie  $a = g \cos \alpha$ , droga zaś

$$s = \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2. \quad (1)$$

Z trójkąta prostokątnego  $ABC$  wynika (rys. 2.24)

$$s = 2r \cos \alpha \quad (2)$$

oraz

$$h = s \cos \alpha = 2r \cos^2 \alpha.$$

Z porównania równości (1) i (2) mamy

$$\frac{1}{2}gt^2 \cos \alpha = 2r \cos \alpha .$$

Z równania tego obliczamy czas

$$t = 2 \sqrt{\frac{r}{g}},$$

wtedy prędkość

$$v = g \cos \alpha \cdot 2 \sqrt{\frac{r}{g}} = \sqrt{4rg \cos^2 \alpha} = \sqrt{2gh} .$$

Czas spadania ciała wzdłuż dowolnej cięciwy jest ten sam, zależy tylko od promienia koła i od przyspieszenia ciężkości. Prędkość końcowa jest taka, jaką osiąga ciało spadające swobodnie z wysokości równej rzutowi cięciwy na pionową średnicę koła.

**2.87.** Kuleczki uczestniczą równocześnie w dwóch ruchach: w ruchu jednostajnym ze stałą prędkością  $v_0$  i w ruchu jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem  $g$  skierowanym pionowo w dół. Weźmy układ współrzędnych, którego początek w pierwszej chwili liczenia czasu pokrywa się z punktem  $M$  i który opada pionowo w dół z przyspieszeniem  $g$ . W tym układzie kuleczki będą poruszać się ruchem jednostajnym, tak że w każdej chwili  $t$  znajdują się na okręgu o promieniu  $v_0 t$ . Udowodniliśmy zatem, że w każdej chwili  $t$  kuleczki znajdują się w płaszczyźnie pionowej na wspólnym okręgu o promieniu  $v_0 t$ , który spada ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem  $g$ .

**2.88.** Składowa pozioma prędkości  $v_0$  jest stała, składowa pionowa zaś wynosi

$$v_1 = \sqrt{2gs},$$

skąd

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gs} .$$

**2.89.** W kierunku poziomym ruch jest jednostajny, w kierunku pionowym — jednostajnie przyspieszony

$$s = vt, \quad h = \frac{1}{2}gt^2,$$

skąd

$$h = \frac{gs^2}{2v^2} = 34,9 \text{ m} .$$

**2.90.** Piszemy te same równania co w zadaniu 2.89

$$s = vt, \quad h = \frac{1}{2}gt^2,$$

skąd

$$s = v \sqrt{\frac{2h}{g}} = 700 \text{ m} .$$

**2.91.** Treść zadania ujmują równania

$$s = vt = nh, \quad h = \frac{1}{2}gt^2,$$

skąd

$$v = n \sqrt{\frac{gh}{2}} .$$

2.92. Ruch kamienia przedstawiają równania

$$s = v_0 t, \quad h = \frac{1}{2} g t^2,$$

z których otrzymujemy

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

oraz prędkość wyrzucenia kamienia

$$v_0 = s \sqrt{\frac{g}{2h}} = 10,96 \text{ m/s}.$$

Składowa pionowa prędkości końcowej wynosi

$$v_1 = g t = \sqrt{2gh}.$$

Składowa pozioma

$$v_0 = s \sqrt{\frac{g}{2h}},$$

więc prędkość końcowa

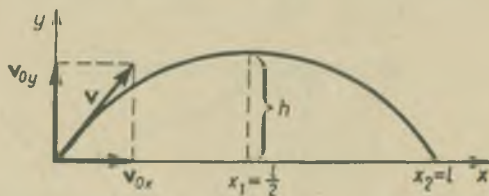
$$v = \sqrt{v_1^2 + v_0^2} = \sqrt{2gh + \frac{g s^2}{2h}} = 12,63 \text{ m/s}.$$

2.93. Składowe prędkości początkowej  $v_{0x}$  w kierunku osi  $x$  oraz  $v_{0y}$  w kierunku osi  $y$  wynoszą odpowiednio

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha.$$

Drogę ciała opisują równania

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2.$$



Rys. 2.25

Po wyrugowaniu czasu  $t$  z obu równań otrzymujemy

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Jest to równanie paraboli (rys. 2.25). Dla  $y = 0$ ,  $x_1 = 0$ , a zasięg  $x_2 = l$  wynosi

$$x_2 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (2.85)$$

Odpowiadająca współrzędnej  $x = \frac{x_1}{2} = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha$  wartość  $y$  przedstawia wysokość wierzchołka paraboli. Wartość ta daje wysokość rzutu

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha. \quad (2.86)$$

Zasięg rzutu jest maksymalny wówczas, gdy  $\sin 2\alpha = 1$ , czyli gdy  $\alpha = 45^\circ$ . Wysokość rzutu jest maksymalna dla  $\sin^2 \alpha = 1$ , czyli dla  $\alpha = 90^\circ$ . Z wzoru  $x = v_0 \cos \alpha t$  oraz z wzoru na zasięg rzutu  $x_1 = l = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$  otrzymujemy czas trwania rzutu

$$t = \frac{x_1}{v_0 \cos \alpha} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g v_0 \cos \alpha} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (2.87)$$

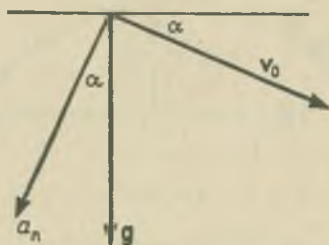
2.94. Z wzoru  $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$  otrzymujemy

$$t = \frac{2v_0 \sin 60^\circ}{g} = \frac{v_0 \sqrt{3}}{g} = 3,52 \text{ s}.$$

2.95. Korzystamy z wzoru  $a_n = \frac{v^2}{R}$ , gdzie  $a_n$  jest przyspieszeniem normalnym,  $v$  — prędkością,  $R$  — promieniem krzywizny.

a) w punkcie najwyższego wzniesienia pionowa prędkość  $v_{\perp} = 0$ , składowa zaś pozioma  $v_{\parallel} = v_1 \cos \alpha$ , przyspieszenie normalne  $a_n$  równa się przyspieszeniu ziemskiemu  $g$ ,  $a_n = g$ .

$$R = \frac{v_0 \cos^2 \alpha}{g} = \frac{30^2 \cdot \frac{1}{2} \text{ m}}{9,81} = \frac{30 \cdot 15}{9,81} \text{ m} = 45,9 \text{ m}.$$



Rys. 2.26

W chwili uderzenia o Ziemię prędkość równa się prędkości początkowej  $v_0$  (i skierowana jest pod kątem  $\alpha$  poniżej płaszczyzny poziomej), przyspieszenie zaś dośrodkowe

$$a_n = g \cos \alpha \text{ (patrz rys. 2.26), } R = \frac{v_0^2}{g \cos^2 \alpha} = 183,6 \text{ m}.$$



2.96. Po podstawieniu do wzoru  $h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$ , podane w zadaniu  $v_0$  oraz kolejne wartości kąta  $\alpha$ , otrzymujemy

$$5,1 \text{ m}, \quad 10,2 \text{ m}, \quad 15,2 \text{ m}.$$

Analogicznie z wzoru

$$l = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

otrzymujemy dla poszczególnych kątów  $\alpha$  zasięg rzutów

$$35,3 \text{ m}, \quad 40,8 \text{ m}, \quad 35,3 \text{ m}.$$

2.97.  $h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha = 27,3 \text{ m}$ ,  $l = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha = 130,1 \text{ m}$ . W punkcie maksymalnego wzniesienia prędkość

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt = 0.$$

Stąd czas przebywania kamienia w powietrzu

$$2t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 4,7 \text{ s},$$

$$x_3 = v_0 t_1 \cos \alpha = 82,7 \text{ m},$$

$$y_3 = v_0 t_1 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_1^2 = 25,3 \text{ m},$$

gdzie  $x_3$  i  $y_3$  są to współrzędne punktu, w którym znajdzie się kamień po upływie 3 sekund od chwili wyrzucenia.

2.98. Przyrównując  $h$  do  $l$  we wzorach (2.85) i (2.86) zadania 2.93 otrzymujemy

$$\frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha,$$

więc

$$\frac{\sin^2 \alpha}{2} = \sin 2\alpha, \text{ to znaczy } \operatorname{tg} \alpha = 4,$$

skąd

$$\alpha = 75^\circ 58'.$$

2.99. Z rozwiązania zadania 2.93 mamy

$$x = tv_0 \cos \alpha = d, \quad y = tv_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2,$$

skąd

$$t = \frac{d}{v_0 \cos \alpha}, \quad y = d \operatorname{tg} \alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 16,1 \text{ m}.$$

2.100. Z wzoru (2.85) zadanie 2.93 otrzymujemy

$$l = ns = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha,$$

skąd

$$v_0 = \sqrt{\frac{nsg}{\sin 2\alpha}} = 692 \text{ m/s}.$$

**2.101.** Oznaczamy przez  $h_y$  wysokość poziomą, na którym znajduje się ciało rzucone do góry po 2 s, przez  $h_{-y}$  to samo dla ciała rzuconego w dół

$$h_y = v \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2, \quad h_{-y} = v \sin \alpha t + \frac{1}{2} g t^2,$$
$$h_y + h_{-y} = 2vt \sin \alpha = 84,8 \text{ m}.$$

**2.102.** Równania rzutu ukośnego

$$x = tv_0 \cos \alpha, \quad y = tv_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

są słuszne, jeżeli układ współrzędnych jest obrany w ten sposób, że miejsce wyrzutu ma współrzędne (0, 0). W tym zadaniu obieramy układ współrzędnych tak, aby miejsce wyrzutu miało współrzędne (0,  $h$ ). Powyższe równania przyjmują wówczas postać

$$x = tv \cos \alpha = s, \quad y = h + tv \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Rugując  $t$  otrzymujemy

$$y = h + s \operatorname{tg} \alpha - \frac{g s^2}{2v^2 \cos^2 \alpha}.$$

Dla  $y = 0$

$$v = \frac{s}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(h + s \operatorname{tg} \alpha)}} = 19,9 \text{ m/s},$$

$$t = \frac{s}{v \cos \alpha} = \sqrt{\frac{2(h + s \operatorname{tg} \alpha)}{g}} = 2,98 \text{ s}.$$

Wysokość wzniesienia  $H$  otrzymujemy z wzoru (2.8) jako

$$H = h_1 + h = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \alpha + h = 12,2 \text{ m}.$$

**2.103.** Z wzoru (2.85), (2.86) zadania 2.93 oraz z danych zadania mamy układ równań:

$$s = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha, \quad h = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \alpha, \quad h = 0,5 \text{ s}.$$

Rozwiązanie tego układu równań daje

$$\operatorname{tg} \alpha = 2, \quad \alpha = 63^\circ 26'.$$

**2.104.** Bomba wyrzucona z samolotu porusza się dalej z prędkością samolotu  $v$ , a równocześnie spada ruchem jednostajnie przyspieszonym

$$s = vt, \quad h = \frac{1}{2} g t^2,$$

skąd

$$v = s \sqrt{\frac{g}{2h}} = 57,5 \text{ m/s}.$$

2.105. Z rysunku 2.27 otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{s}{h},$$

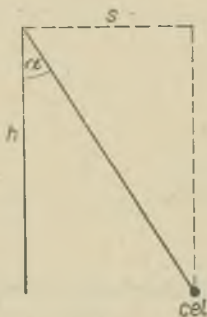
przy czym  $h = \frac{1}{2}gt^2$  oraz  $s = vt$ .

Z dwu ostatnich równań otrzymujemy

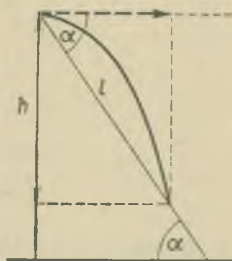
$$s = v \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Po podstawieniu tej wartości do wzoru pierwszego otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \alpha = v \sqrt{\frac{2}{gh}}.$$



Rys. 2.27



Rys. 2.28

2.106. W kierunku poziomym ruch jest jednostajny, w kierunku pionowym jednostajnie przyspieszony. Korzystając z rysunku 2.28 otrzymujemy więc

$$s = l \cos \alpha = vt, \quad h = l \sin \alpha = \frac{1}{2}gt^2,$$

skąd

$$t = \sqrt{\frac{2l \sin \alpha}{g}} \quad \text{oraz} \quad v = \sqrt{\frac{gl \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha}}.$$

2.107. Układ współrzędnych  $xy$  obieramy tak, jak to zaznaczono na rysunku 2.29. Kula w chwili uderzenia o płaszczyznę ma prędkość

$$v_0 = \sqrt{2gh}, \quad v = v_0 \sin \alpha + g \sin \alpha \cdot t,$$

$$y_y = v_0 \cos \alpha - g \cos \alpha \cdot t, \quad y = v_0 \cos \alpha \cdot t - \frac{1}{2}g \cos \alpha \cdot t^2$$

dla  $y = 0$ ,  $t = t_0$ , gdzie

$$t_0 = \frac{2v_0}{g} = 2 \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

skąd

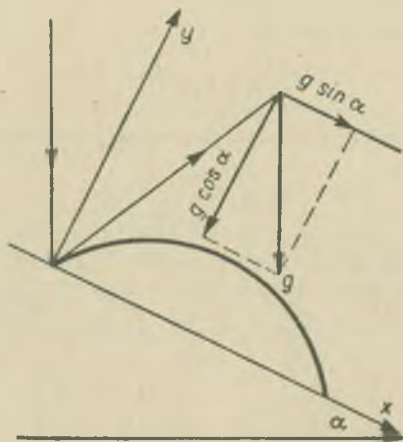
$$x = v_0 \sin \alpha \cdot t + \frac{1}{2}g \sin \alpha \cdot t^2.$$

Dla

$$t_0 = \frac{2v_0}{g}, \quad x = x_0,$$

gdzie

$$x_0 = \frac{4v_0^2}{g} \sin \alpha = 4h.$$



Rys. 2.29

**2.108.** Według danych z rozwiązania zadania 2.4 doba gwiazdowa jest o 3 min 56 s krótsza od średniej doby słonecznej, czyli wynosi 86164 s. W tym właśnie czasie Ziemia wykonuje jeden pełny obrót wokół osi, czyli prędkość kątowna Ziemi wynosi

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} \text{ s}^{-1} = 7,8 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

Odległość miejsca o szerokości geograficznej  $\varphi$  od osi obrotu wynosi

$$r = R \cos \varphi.$$

a) Na równiku prędkość

$$v_0 = R\omega = 0,49 \text{ km/s}.$$

b) Dla szerokości geograficznej  $\varphi$

$$v = R\omega \cos \varphi = 0,326 \text{ km/s}.$$

Przyspieszenie odśrodkowe w punkcie o szerokości geograficznej  $\varphi$

$$a_\varphi = \omega^2 r = \omega^2 R \cos \varphi = 2,38 \text{ cm/s}^2.$$

**2. 109.** Zakładamy, że kula przebija pierwszy karton lecąc w kierunku poziomym tzn. że w chwili przebicia składowa pionowa prędkość równa się zeru

$$L = vt,$$

gdzie  $t$  jest czasem przelotu między kartonami

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

$$L = v \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad v = L \sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

2.110.  $n = \frac{1}{T}$ . Z wzoru  $\varphi = \omega t$  otrzymujemy  $t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\varphi}{2\pi} T$ . Jeżeli kąt mierzony jest w stopniach, to ten ostatni wzór ma postać

$$t = \frac{\varphi}{360} T.$$

Podstawiając powyższą wartość do wzoru na prędkość otrzymujemy

$$v = \frac{l}{t} = \frac{nl360}{\varphi} = 337,2 \text{ m/s}.$$

2.111. Ciało porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym o przyspieszeniu  $a$

$$a = \frac{F}{m} = 20 \text{ m/s}^2, \quad v = at = 80 \text{ m/s},$$

$$s = \frac{1}{2} at^2 = 160 \text{ m}, \quad v_{\text{sr}} = \frac{s}{t} = 40 \text{ m/s}.$$

2.112. Podczas działania siły  $F$

$$F = 5 \text{ kG} = 5000 \cdot 981 \text{ dyn} = 49,05 \text{ N}$$

ciało porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym

$$a = \frac{F}{m}.$$

Z wzoru (2.8)

$$v = 2 \sqrt{\frac{Fs}{m}} = 3,14 \text{ m/s}.$$

2.113.  $a = \frac{F}{m}$ ;  $F = 30 \text{ kG} = 30000 \cdot 981 \text{ dyn} = 294,3 \text{ N}$ ,  $a = 11,77 \text{ m/s}^2$ .

2.114.  $a = \frac{F}{m}$ ,  $F = 1000 \text{ dyn} = 10^{-2} \text{ N}$ ,

$$1. \quad a = \frac{10^{-2} \text{ N}}{10 \text{ kg}} = 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,1 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

$$2. \quad a = \frac{1 \text{ kG}}{10 \text{ kg}} = \frac{9,81 \text{ N}}{10 \text{ kg}} = 0,981 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

2.115.  $s = \frac{1}{2} at^2$ ,  $a = \frac{2s}{t^2}$ ,

$$m = \frac{F}{a} = \frac{F}{2s} t^2 = 2,25 \text{ jedn. układu ciężarowego}.$$



Jednostka masy w układzie ciężarowym ma wymiar

$$\frac{1 \text{ kG}}{1 \text{ m/s}^2} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{1 \text{ m/s}^2} = 9,81 \text{ kg},$$

zatem

$$m = 2,25 \cdot 9,81 \text{ kg} = 22,07 \text{ kg}.$$

$$2.116. Ft = mv, F = \frac{mv}{t} = 400 \text{ N}.$$

$$2.117. Ft = mv, F = \frac{mv}{t} = 4 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

2.118.  $Fs = \frac{1}{2}mv^2$ . Samochód o ciężarze  $Q = 3$  Ton ma masę  $m = 3000$  kg,

$$Fs = \frac{mv^2}{2s} = 3000 \text{ N}.$$

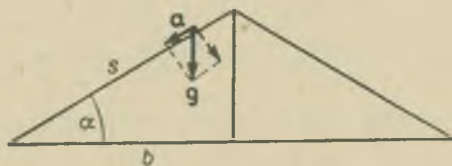
2.119.  $Fs = \frac{1}{2}mv^2$ . Ciało o ciężarze  $Q = 93$  Ton ma masę  $m = 93000$  kg,

$$F = \frac{mv^2}{2s} = 11625 \text{ N}.$$

2.120.  $Ft = mv$ ,  $F = \frac{mv}{t}$ , a)  $F = \frac{4000}{3}$  N; b)  $\frac{16000}{3}$  N; c)  $16 \cdot 10^4$  N.

2.121.  $s = \frac{1}{2}at^2$ ,  $a = \frac{2s}{t^2} = 2 \text{ m/s}^2$ .

$$F = ma = m \frac{2s}{t^2} = 400 \text{ N}.$$



Rys. 2.30

2.122. Oznaczmy przez  $2b$  szerokość podstawy dachu (rys. 2.30)

$$b = s \cos \alpha, \quad \text{gdzie} \quad s = \frac{1}{2}at^2$$

oraz

$$a = g \sin \alpha,$$

skąd

$$b = \frac{1}{2}g \sin \alpha \cos \alpha \cdot t^2,$$

a zatem

$$t^2 = \frac{4b}{g \sin 2\alpha}.$$

Czas spływania wody  $t$  będzie miał wartość minimalną, gdy  $\sin 2\alpha$  będzie maksymalne, tzn. gdy  $\sin 2\alpha = 1$ , czyli dla  $\alpha = 45^\circ$ .

$$2.123. s = \frac{1}{2}at^2, s = \frac{b}{\cos \alpha}, a = g \sin \alpha,$$

skąd

$$s = \frac{b}{\cos \alpha} = \frac{1}{2}g \sin \alpha t^2,$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2b}{gt^2} \cdot 2 = \frac{4b}{gt^2},$$

$$\sin 2\alpha = \frac{4b}{gt^2} = \frac{4 \cdot 0,3}{9,81 \cdot 0,25} = \frac{4,8}{9,81} = 0,49,$$

$$2\alpha = \arcsin 0,49 = 29^\circ 20',$$

$$\alpha = 14^\circ 40'.$$

2.124. Masy  $M$  oraz  $M+m$  połączone nicią przerzuconą przez krążek stanowią układ ruchomy maszyny (patrz rys. 2.31). Siłą poruszającą ten układ jest ciężar masy  $m$ , którą można zdejmować z masy  $M$  za pomocą odpowiedniego pierścienia. Po zdjęciu masy  $m$  układ, który początkowo poruszał się ruchem jednostajnie przyspieszonym, porusza się dalej ruchem jednostajnym. Mierząc odcinek drogi  $s$  przebytej ruchem jednostajnie przyspieszonym oraz czas  $t$ , w którym droga  $s$  została przebyta, można wyznaczyć przyspieszenie  $a$  ruchu, gdyż

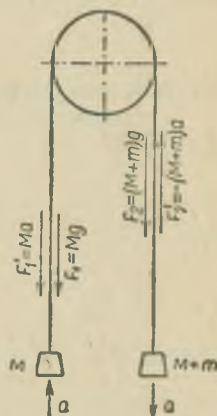
$$s = \frac{1}{2}at^2.$$

Z równania dynamicznego

$$(2M+m)a = mg \quad (2.88)$$

można wyznaczyć przyspieszenie ziemskie  $g$ . Ruch łożeczka można uwzględnić wprowadzając dodatkową masę i wtedy równanie dynamiczne ma postać

$$(2M+m+\mu)a = mg. \quad (2.89)$$



Rys. 2.31

2.125. Podstawiając do wzoru (2.88) (z rozwiązania zadania 2.124)  $m_1+m_2$  w miejsce  $2M+m$ , zaś  $m_2-m_1$  w miejsce  $m$  otrzymujemy

$$(m_1+m_2)a = (m_2-m_1)g, \quad a = \frac{(m_2-m_1)g}{m_1+m_2} = 19,2 \text{ cm/s}^2.$$

$$2.126. (m_1+m_2)a = (m_2-m_1)g,$$

$$g = \frac{(m_1+m_2)a}{m_2-m_1} = 980 \text{ cm/s}^2 = 9,8 \text{ m/s}^2.$$

2.127.  $s = \frac{1}{2}at^2$ ,  $(2M+m)a = mg$  (wzór 2.88), skąd

$$t = \sqrt{\frac{2s(2M+m)}{mg}} = 3 \text{ s}.$$

2.128. Korzystając z wzoru (2.89) podanego w rozwiązaniu zadania 2.124 mamy

$$(2M+m+\mu)a = mg,$$

skąd

$$a = \frac{mg}{2M+m+\mu} = 10 \text{ cm/s}^2.$$

2.129.  $s = \frac{1}{2}at^2$ ,  $(2M+m+\mu)a = mg$ ,

skąd

$$g = \frac{2M+m+\mu}{mt^2} 2s.$$

$$g = [885, 923, 952, 988, 977] \text{ cm/s}^2, \text{ średnio } g = 945 \text{ cm/s}^2.$$

2.130. Załóżmy, że ruch jednostajnie przyspieszony trwał  $x$  sekund, ruch jednostajny zaś  $(t-x)$  s. Otrzymujemy następujący układ równań:

$$s_0 = \frac{1}{2}ax^2,$$

$$s-s_0 = v(t-x) = ax(t-x) = ax t - 2s_0,$$

mamy więc dwa równania

$$s_0 = \frac{1}{2}ax^2, \quad s+s_0 = ax t.$$

Stąd

$$x = \frac{2s_0 t}{s+s_0} = 4,27 \text{ s}$$

oraz

$$a = \frac{(s+s_0)^2}{2s_0 t^2} = 8,75 \text{ cm/s}^2.$$

2.131.  $a = \frac{mg}{2M+m} = 23,9 \text{ cm/s}^2$ . Masa  $M$  porusza się z przyspieszeniem  $a$  do góry, masa  $M+m$  z przyspieszeniem  $a$  na dół (rys. 2.31). Naciągiem sznurka dla masy  $M$  jest siła, która pokonuje siłę przyciągania ziemskiego  $F_1 = Mg$  i nadaje jej przyspieszenie  $a$ , tzn. siła

$$F_1' = Ma,$$

czyli w sumie

$$T = F_1 + F_1' = Mg + Ma = Mg \left( 1 + \frac{m}{2M+m} \right) = Mg \frac{2(M+m)}{2M+m}.$$

Naciąg sznurka można także obliczyć stosując zasadę d'Alemberta (dotyczy to zwłaszcza masy  $M+m$ ). W układzie poruszającym się z pewnym przyspieszeniem obok sił bezpośrednio przyłożonych

$$F_1 = mg \quad \text{i} \quad F_2 = (M+m)g$$

występują siły d'Alemberta

$$F'_1 = Ma$$

oraz

$$F'_2 = -(M+m)a,$$

skąd

$$T_1 = F_1 + F'_1 = Mg + Ma,$$

$$T_2 = F_2 + F'_2 = (M+m)g - (M+m)a.$$

Ponieważ

$$a = \frac{mg}{2M+m}, \quad \text{więc} \quad T_1 = 2Mg \frac{M+m}{2M+m}$$

oraz

$$T_2 = 2Mg \frac{M+m}{2M+m}, \quad \text{czyli} \quad T_1 = T_2 = T.$$

Siła działająca na oś bloku wynosi więc

$$T_1 + T_2 = 2T = 4Mg \frac{M+m}{2M+m}.$$

2.132. Korzystając z wzoru wyprowadzonego w rozwiązaniu zadania 2.131 mamy

$$F = 2T = 4Mg \frac{M+m}{2M+m},$$

przy  $M = 3$  kg,  $m = 7$  kg, to znaczy  $P_1 = Mg$ ,  $P_2 = (M+m)g$ , otrzymujemy

$$F = 4 \cdot 3 \cdot 9,81 \cdot \frac{10}{13} \text{ N} = 90,5 \text{ N}.$$

2.133. Droga przebyta przez każdy z odważników wynosi

$$s = \frac{h}{2} = \frac{1}{2}st^2, \quad \text{skąd} \quad a = \frac{2s}{t^2}.$$

Z wzoru  $(2M+m)a = mg$  otrzymujemy

$$m = \frac{2Ma}{g-a} = \frac{4Ms}{gt^2-2s} = \frac{2Mh}{gt^2-h} = 15,7 \text{ g}.$$

$$M = 0,3 \text{ kg}; \quad M+m = 0,3157 \text{ kg}.$$

2.134. Masa  $M$  porusza się pod wpływem własnego ciężaru  $Mg$  oraz naciągu nici  $N$

$$Ma = Mg - N.$$

Masa  $m$  porusza się pod wpływem naciągu nici  $N$  i siły tarcia  $T = fmg$ .

$$ma = N - fmg, \quad N = Mmg \frac{1+f}{M+m}, \quad a = \frac{g(M-fm)}{M+m}.$$

Zaniedbując tarcie ( $f = 0$ )

$$N = \frac{mgM}{M+m} \quad \text{oraz} \quad a = \frac{gM}{M+m}.$$

2.135. Wszystkie masy poruszają się pod wpływem siły ciężkości masy  $M$  (rys. 2.32)

$$(m_1 + m_2 + m_3 + M)a = Mg, \quad a = \frac{Mg}{m_1 + m_2 + m_3 + M}$$

Naciąg nici  $N_1$  porusza masę  $m_1$ ,  
 naciąg nici  $N_2$  porusza masę  $m_1 + m_2$ ,  
 naciąg nici  $N_3$  porusza masę  $m_1 + m_2 + m_3$ ,

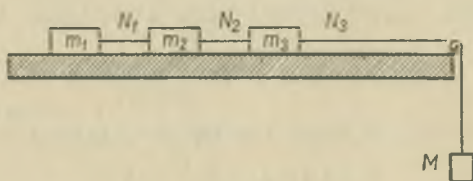
skąd

$$N_1 = m_1 a = \frac{m_1 Mg}{m_1 + m_2 + m_3 + M}$$

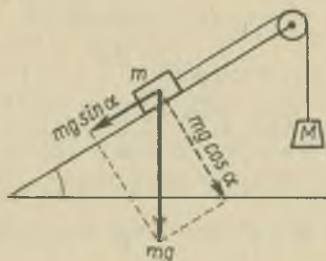
$$N_2 = (m_1 + m_2)a = \frac{(m_1 + m_2)Mg}{m_1 + m_2 + m_3 + M}$$

$$N_3 = (m_1 + m_2 + m_3)a = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)Mg}{m_1 + m_2 + m_3 + M}$$

Zadanie to można też rozwiązać sposobem przedstawionym w rozwiązaniu zadania 2.134.



Rys. 2.32



Rys. 2.33

2.136. Postępując według schematu podanego w rozwiązaniu zadania 2.134 oraz na podstawie rysunku 2.33

$$Ma = Mg - N, \quad ma = N - mg \sin \alpha,$$

$$a = g \frac{M - m \sin \alpha}{m + M}, \quad N = Mmg \frac{1 + \sin \alpha}{M + m}$$



2.137. Z wzorów ruchu jednostajnie przyspieszonego

$$s = \frac{1}{2}at^2 = l, \quad v = at$$

otrzymujemy

$$t = \frac{2s}{v} = 0,00274 \text{ s} \quad \text{oraz} \quad a = \frac{v^2}{2s},$$

skąd

$$F = ma = m \frac{v^2}{2s} = 3,19 \cdot 10^8 \text{ dyn} = 3190 \text{ N}.$$

2.138. Z wzorów  $Ft = mv$ ,  $v = \sqrt{2gh}$  otrzymujemy

$$F = \frac{m \sqrt{2gh}}{t} = 2,45 \cdot 10^6 \text{ N} = 250 \text{ Ton}.$$

2.139. Do zderzenia sprężystego stosuje się zasadę zachowania pędu i zasadę zachowania energii. W zderzeniu niesprężystym część energii mechanicznej zamienia się na ciepło, tak że słuszną jest w tym przypadku tylko zasada zachowania pędu. Dla kul poruszających się przed zderzeniem w tym samym kierunku mamy

$$mv_1 + MV_1 = (m+M)v, \quad v = \frac{mv_1 + MV_1}{m+M} = \frac{14}{3} \text{ m/s}.$$

Dla kul poruszających się przed zderzeniem w przeciwnych kierunkach

$$MV_1 - mv_1 = (m+M)v, \quad v = \frac{MV_1 - mv_1}{m+M} = 2 \text{ m/s}$$

w kierunku ruchu kuli o masie  $M$ .

2.140. W tym przypadku kule przed zderzeniem mogły poruszać się jedynie w kierunkach przeciwnych.

$$mv_1 = MV_1, \quad V_1 = \frac{mv_1}{M} = 1,5 \text{ m/s}.$$

2.141. a) Jeszcze raz należy podkreślić, że do zderzenia niesprężystego stosuje się zasadę zachowania pędu. Po zderzeniu obie kule poruszają się z tą samą prędkością.

Dla kul poruszających się w zgodnym kierunku mamy

$$mv_1 + MV_1 = (m+M)v, \quad v = \frac{mv_1 + MV_1}{m+M} = 9 \text{ cm/s}.$$

W przypadku kul poruszających się w kierunkach przeciwnych

$$MV_1 - mv_1 = (m+M)v, \quad v = \frac{MV_1 - mv_1}{m+M} = 6 \text{ cm/s}.$$

Po zderzeniu kule poruszają się w kierunku ruchu kulki o masie  $M$ .

b) Do zderzenia sprężystego stosuje się zasadę zachowania pędu i zachowania energii mechanicznej. Po zderzeniu każda z kulek będzie poruszała się ze swoją prędkością, którą oznaczymy dla kulki o masie  $M$  przez  $V_2$ , dla kulki o masie  $m$  przez  $v_2$ . Na podstawie dwu wspomnianych wyżej zasad piszemy dwa równania, z których możemy wyznaczyć dwie niewiadome:  $V_2$  i  $v_2$

$$mv_1 + MV_1 = mv_2 + MV_2, \quad \frac{mv_1^2}{2} + \frac{MV_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{MV_2^2}{2},$$

skąd

$$v_2 = \frac{M-m}{M+m} v_1 + \frac{2M}{M+m} V_1 = 16 \text{ cm/s}$$

$$V_2 = \frac{M-m}{M+m} V_1 + \frac{2M}{M+m} v_1 = 8 \text{ cm/s}.$$

Jeżeli kulki początkowo poruszały się w przeciwnych kierunkach, to obieramy dodatni kierunek prędkości, a kierunek przeciwny będzie ujemny, np.

$$V_1 = 12 \text{ cm/s}, \quad v_1 = -4 \text{ cm/s},$$

wtedy

$$V_2 = 2 \text{ cm/s}, \quad v_2 = 14 \text{ cm/s}.$$

**2.142.** Siły wewnętrzne nie zmieniają położenia środka masy. Jeżeli początek układu współrzędnych pokrywa się ze środkiem masy, to powyższe twierdzenie możemy napisać w postaci

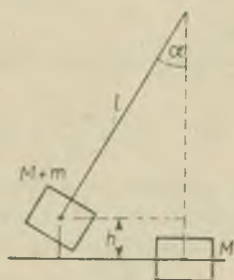
$$\sum m_i x_i = 0$$

oraz dla wszelkich zmian

$$\sum m_i \Delta x_i = 0, \quad \text{albo} \quad \sum m_i g dx_i = \sum F_i dx_i = 0,$$

skąd

$$Q_S = Pl, \quad l = \frac{Q_S}{P} = 3 \text{ m}.$$



Rys. 2.34

**2.143.** Zderzenie jest niesprężyste

$$mv = (M+m)V, \quad \frac{(M+m)V^2}{2} = (M+m)gh.$$

Z rysunku 2.34 otrzymujemy

$$h = l - l \cos \alpha,$$

skąd

$$v = \frac{M+m}{m} \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = 251 \text{ m/s}.$$

**2.144.**  $\Delta p = m \Delta v = m(v - v_1)$ , gdzie  $\Delta p$  — zmiana pędu oraz

$$v = \sqrt{2gh}, \quad v_1 = \sqrt{2gh_1}.$$

Na podstawie wartości liczbowych, przeliczonych na jednostki układu SI otrzymujemy

$$\Delta p = m(\sqrt{2gh} + \sqrt{2gh_1}) = 29,9 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

2.145. Ciało o ciężarze  $Q_1 = 19$  Ton ma masę  $m_1 = 19\,000$  kg, ciało o ciężarze  $Q_2 = 1,5$  Ton ma masę  $m_2 = 1500$  kg.

Suma pędów przed i po wystrzale jest ta sama

$$(m_1 + m_2 + m_3)v = (m_1 + m_2)v_2 + m_3v_1,$$

$$v_2 = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)v - m_3v_1}{m_1 + m_2} = 7,91 \text{ m/s}.$$

2.146. Oznaczmy prędkości kulek przez  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , dodając po pierwszym zderzeniu wskaźniki 1, po drugim zderzeniu wskaźniki 2. Po zderzeniu się pierwszej kulki z drugą mamy

$$m_1\alpha = m_1\alpha_1 + m_2\beta_1 \quad \text{oraz} \quad \frac{m_1\alpha^2}{2} = \frac{m_1\alpha_1^2}{2} + \frac{m_2\beta_1^2}{2},$$

skąd

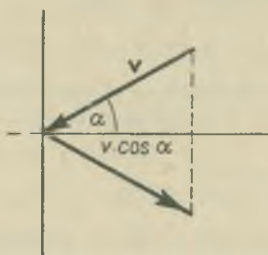
$$\alpha_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\alpha, \quad \beta_1 = \frac{2m_1\alpha}{m_1 + m_2}.$$

Z kolei zderzenie drugiej kulki z trzecią daje

$$m_2\beta_1 - m_2\beta_2 = m_3\gamma_2, \quad \frac{m_2\beta_1^2}{2} - \frac{m_2\beta_2^2}{2} = \frac{m_3\gamma_2^2}{2},$$

$$\gamma_2 = \frac{4m_1m_2\alpha}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)} = 36,4 \text{ cm/s}.$$

2.147. W tym przypadku  $\beta_1 = \alpha$  i  $\gamma_2 = \alpha$ . Rozwiązanie jest również słuszne dla większej ilości kulek. Kulki środkowe służą jako ośrodki, które przekazują prędkości



Rys. 2.35

pierwszej kulki (w całości) kuli ostatniej — same w rezultacie nie uzyskując żadnej prędkości.

2.148.  $F\Delta t = -m\Delta v$ . Z rysunku 2.35 otrzymujemy

$$\Delta v = v \cos \alpha - (-v \cos \alpha) = 2v \cos \alpha.$$

Po podstawieniu wartości  $\Delta v$  do poprzedniego wzoru otrzymujemy

$$F = \frac{m2v \cos \alpha}{\Delta t}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych w jednostkach SI

$$F = 20 \text{ N}.$$

$$2.149. \quad mv = MV,$$

$$V = \frac{mv}{M} = 1,6 \text{ m/s}.$$

2.150. W chwili wystrzału w bardzo krótkim czasie karabin nabiera pędu zgodnie z zasadą zachowania pędu

$$MV = mv.$$

Następnie zaś karabin traci swoją prędkość w ruchu jednostajnie opóźnionym (stała siła ze strony ramienia strzelca) przesuując ramię strzelca o drogę  $s$

$$Fs = \frac{1}{2}MV^2, \quad F = \frac{m^2V^2}{2sM} = 167 \text{ N}.$$

2.151. Ponieważ zderzenie było niesprężyste, więc w czasie zderzenia ciężar spadający stracił całkowicie swój pęd

$$s = l = \frac{1}{2}at^2, \quad v = 0 = v_0 - at, \quad F = ma,$$

$$l = \frac{v_0 t}{2}, \quad \text{gdzie} \quad v_0 = \sqrt{2gh}; \quad t = l \sqrt{\frac{2}{gh}} = 0,0226 \text{ s},$$

$$a = \frac{v_0}{t} = \frac{gh}{l}, \quad F = m \frac{gh}{l} = Q \frac{h}{l} = 30 \text{ Ton}.$$

Do tego dochodzi jeszcze siła ciężkości  $Q$ , czyli]

$$P = F + Q = 31,5 \text{ Ton} = 9,81 \cdot 31,5 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

Energia kinetyczna ( $mgh$ ) ciężaru zamienia się na pracę wbijania pala. Siłę, z jaką pal jest wbijany, można również obliczyć z zasady zachowania energii, jak to uczyniono w zadaniu 2.152.

$$2.152. \quad Fh = \frac{1}{2}mv^2, \quad F = \frac{mv^2}{2h} = 7500 \text{ N}.$$

2.153. W myśl zasady d'Alemberta w układzie poruszającym się z pewnym przyspieszeniem oprócz siły rzeczywiście przyłożonej  $P$  (ciężar ciała) występuje siła oporu bezwładnego  $F_1 = -ma$ , czyli w sumie na sznur działa siła  $Q = P + F_1$ ; w przypadku ruchu ciała do góry

$$Q = 1 \text{ kg} \cdot g + 1 \text{ kg} \cdot 0,5 \text{ m/s}^2 = 9,81 \text{ N} + 0,5 \text{ N} = 10,31 \text{ N};$$

w przypadku ruchu ciała w dół

$$Q = 1 \text{ kg} \cdot g - 0,5 \text{ N} = 9,81 \text{ N} - 0,5 \text{ N} = 9,31 \text{ N}.$$

$$2.154. Q = 1100 \text{ G}, P = 1000 \text{ G}, Q = P + F_1,$$

$$F_1 = -ma = Q - P, \quad a = -\frac{Q - P}{m} = -98,1 \text{ cm/s}^2.$$

Winda porusza się do góry (przeciwnie niż działa siła ciężkości) z przyspieszeniem  $98,1 \text{ cm/s}^2$ .

2.155. Ciężar ciała rozkładamy na dwie składowe w kierunku prostopadłym do równi pochyłej  $mg \cos \alpha$  i w kierunku równoległym do poziomu  $mg \sin \alpha$  (rys. 2.36). Pierwsza składowa zniesiona jest przez opór równi. Przesuwając równię pochyłą wraz z ciałem z pewnym przyspieszeniem w kierunku poziomym można zrównoważyć według zasady d'Alemberta składową poziomą

$$F_1 = -ma = -mg \sin \alpha, \quad a = g \sin \alpha, \\ Q = mg + F_1.$$

2.156. Okres wahadła matematycznego wyraża się wzorem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Jeżeli wahadło znajduje się w windzie spadającej z przyspieszeniem  $a$ , to wypadkowa siła działająca na to wahadło wynosi

$$F = mg - ma = m(g - a),$$

wobec tego okres wahań określony jest wzorem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - a}}, \quad \text{gdy } a \rightarrow g, \quad \text{to } T \rightarrow \infty.$$

Dla  $a > g$  punkt zawieszenia wahadła będzie znajdował się poniżej środka masy wahadła, a okres wahadła będzie wynosił

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{a - g}}.$$

2.157. Siła oporu bezwładnego  $F_1 = -ma$ ,

$$Q = mg + F_1 = mg - ma = m(g - a),$$

w przypadku wznoszenia się windy

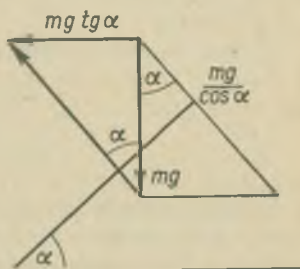
$$Q = m(g + a) = 120(9,81 + 2,4) \text{ N},$$

w przypadku spadania windy

$$Q = m(g - a) = 90,6 \text{ kG} = 120(9,81 - 2,4) \text{ N}.$$

2.158. O sile oporu bezwładnego  $F_1$  decyduje jedynie przyspieszenie i jego kierunek

$$F_1 = -ma.$$



Rys. 2.36



Kierunek siły ciężkości uważamy za dodatni. Wtedy

$$\text{a) } a = 4,9 \text{ m/s}^2, \quad Q = mg - ma = m(g - a) = 0,5 \text{ kG} = 1(9,81 - 4,9) \text{ N},$$

$$\text{b) } a = -4,9 \text{ m/s}^2, \quad Q = mg + ma = m(g + a) = 1,5 \text{ kG} = 1(9,81 + 4,9) \text{ N},$$

$$\text{c) } a = 1 \text{ m/s}^2, \quad Q = mg - ma = m(g - a) = 0,9 \text{ kG} = (9,81 - 1) \text{ N} = 8,81 \text{ N}.$$

2.159. Ponieważ układ jako całość porusza się z przyspieszeniem  $a$ , wobec tego do układu obok siły ciężkości jest przyłożona siła  $F = -ma$ , prócz siły ciężkości  $P = mg$  działa obecnie na ciała siła  $F$ , zatem  $Q = P + F = mg - ma = m(g - a)$ . Dany układ zachowuje się tak, jak gdyby znajdował się w polu grawitacyjnym o przyspieszeniu  $|g - a| = g + a$ . Ciężarom  $P_1 = 19,62 \text{ kG}$  i  $P_2 = 29,43 \text{ kG}$  odpowiadają masy  $m_1 = 19,62 \text{ kg}$  i  $m_2 = 29,43 \text{ kg}$ .

Zgodnie z wzorem podanym w rozwiązaniu zadania 2.125

$$(m_1 + m_2)\gamma = (m_2 - m_1)(g + a),$$

$$\gamma = \frac{(m_2 - m_1)(g + a)}{m_1 + m_2} = 2,4 \text{ m/s}^2.$$

W układzie odniesienia poruszającym się względem powierzchni ziemi pionowo w górę z przyspieszeniem  $a = 2,19 \text{ m/s}^2$  ciężar  $P_1$  porusza się pionowo w górę, ciężar  $P_2$  pionowo na dół z przyspieszeniem  $\gamma = 2,4 \text{ m/s}^2$ .

Względem powierzchni ziemi przyspieszenie ciężaru  $P_1$  wynosi  $a_1 = \gamma + a = 4,59 \text{ m/s}^2$  i jest skierowane do góry, przyspieszenie zaś ciężaru  $P_2$  wyniesie  $a_2 = \gamma - a = 0,21 \text{ m/s}^2$  skierowane pionowo na dół.

2.160. Zgodnie z wzorami (2.16) i (2.15) przyspieszenie dośrodkowe wynosi

$$a_r = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = 7,896 \text{ m/s}^2.$$

$$2.161. \quad \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = (2\pi n)^2 r = g,$$

skąd

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{r}} = 0,499 \text{ m/s}.$$

$$2.162. \quad a = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = (2\pi n)^2 r = 157,8 \text{ m/s}^2 = 16,1 g.$$

2.163. Woda ze szklanki się nie wyleje, jeżeli

$$\frac{v^2}{r} = g, \quad v = \sqrt{gr} = 2,801 \text{ m/s}.$$

2.164. Naciąg sznura  $N$  jest wypadkową siły odśrodkowej i siły ciężkości

$$\text{a) } N = ma_n - P, \quad a_n = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = (2\pi n)^2 r,$$

gdzie

$$N = m(2\pi n)^2 r - P.$$

Przeliczając powyższy wzór w układzie SI należy wszystkie wielkości wyrazić w jednostkach układu SI

$$m = 0,81 \text{ kg}, \quad P = mg = 0,81 \cdot 9,81 \text{ N}, \quad n = 96 \text{ obr/min} = \frac{96}{60} \text{ obr/s}.$$

$$N = [0,81(2\pi \frac{96}{60})^2 \cdot 1,2 - 0,81 \cdot 9,81] \text{ N} = 90,25 \text{ N},$$

$$b) N = ma_n + P = 106,14 \text{ N}.$$

2.165. Analogicznie do poprzedniego zadania

$$a) N = ma_n - mg = m \frac{v^2}{r} - mg = 48900 \text{ dyn} = 0,489 \text{ N}.$$

$$b) N = ma + mg = 245100 \text{ dyn} = 2,451 \text{ N}.$$

$$2.166. F_1 = m \frac{v^2}{R} + mg, \quad F_2 = m \frac{v^2}{R} - mg,$$

$$\frac{v^2}{R} = 60,5 \text{ m/s}^2 = 6,17 \text{ g},$$

$$F_1 = 573,6 \text{ kG}, \quad F_2 = 413,6 \text{ kG}.$$

$$2.167. N = m(2\pi n)^2 r = 116 \cdot 10^4 \text{ dyn} = 11,6 \text{ N}.$$

$$2.168. \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = g,$$

skąd

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 5066 \text{ s} = 1 \text{ h } 24 \text{ min } 26 \text{ s}.$$

2.169. Gdyby przyspieszenie siły ciężkości  $g$  nie zmieniało się z odległością, zachodziłby warunek  $\omega^2 R = g$  skąd

$$R = \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{4\pi^2} T^2 = 1,85 \cdot 10^{11} \text{ cm} = 1,85 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

Zgodnie z prawem powszechnego ciężenia należy jednak uwzględnić zmianę przyspieszenia ciężkości z odległością i wtedy

$$\frac{g}{g_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2,$$

gdzie  $g_0$  oznacza przyspieszenie siły ciężkości na powierzchni Ziemi,  $R_0 = 6380 \text{ km}$  — promień kuli ziemskiej,  $g$  — przyspieszenie siły ciężkości w odległości  $R$  od środka Ziemi

$$g = g_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2, \quad \omega^2 R = g_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2, \quad R^3 = g_0 \left(\frac{R_0}{\omega}\right)^2,$$

$$R = \sqrt[3]{g_0 \left(\frac{R_0}{\omega}\right)^2} = 74,8 \cdot 10^{27} \text{ cm} = 4,21 \cdot 10^9 \text{ cm} = 4,21 \cdot 10^4 \text{ km}.$$

2.170. Pocisk musi poruszać się z taką prędkością, żeby siła odśrodkowa równoważyła siłę przyciągania ziemskiego, wtedy jego przyspieszenie dośrodkowe wynosiłoby

$$\frac{v^2}{R} = g, \text{ a prędkość}$$

$$v = \sqrt{Rg} = 7,9 \cdot 10^5 \text{ cm/s} = 7,9 \text{ km/s}.$$

Okres obiegu takiego pocisku dokoła Ziemi oblicza się z równania

$$\omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = g,$$

skąd

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 5066 \text{ s} = 1 \text{ h } 24 \text{ min } 26 \text{ s}.$$

2.171. Prędkość liniowa armaty w ruchu obrotowym Ziemi wynosi dla szerokości  $\varphi$  (rys. 2.37)

$$v_1 = R\omega \cos\varphi.$$

Kula wystrzelona na południe, przechodząc do mniejszych szerokości, ma prędkość obrotową liniową mniejszą niż odpowiednie punkty na Ziemi. Ziemia w tych miejscach będzie uciekać szybciej z zachodu na wschód niż kula. Wobec czego kula będzie się odchyłać ku zachodowi.

Zmiana prędkości w ruchu kuli wynosi

$$dv_1 = -R\omega \sin\varphi d\varphi, \quad \text{gdzie} \quad d\varphi = \frac{v dt}{R}.$$

Prędkość  $v$  pocisku zakładamy stałą,  $dv_1 = -v\omega \sin\varphi dt$  odchylenie  $\Delta s = \Delta v_1 \Delta t = -v\omega \sin\varphi (\Delta t)^2$ ,  $\Delta s = 6,01 \text{ cm}$ .

2.172. Ciało spadające odchyła się od pionu z prędkością  $v_1 = \omega dh$ . Odchylenie od pionu wynosi

$$ds = \omega dh dt.$$

Czas  $T$ , po którym ciało spadnie na Ziemię, otrzymujemy z wzoru  $h = \frac{1}{2}gT^2$  jako

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Całkując  $ds$  względem  $dT$  i  $dh$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} s &= \int_0^H \int_0^T \omega dh dT = \int_0^H \omega dh \int_0^T dT = \int_0^H \omega dh T = \\ &= \omega \int_0^H dh \sqrt{\frac{2h}{g}} = \omega \sqrt{\frac{2}{g}} \int_0^H h^{1/2} dh = \frac{2}{3} \omega \sqrt{\frac{2}{g}} H^{3/2} = 2,19 \text{ cm} \approx 2,2 \text{ cm}. \end{aligned}$$

$$2.173. Q - ma = Q - m \frac{v^2}{R} = P.$$

Dla

$$Q = 15 \text{ T}, \text{ masa } m = \frac{15000}{9,81} \text{ kG} \cdot \text{s}^2/\text{m},$$

$$v = \sqrt{\frac{Q-P}{m}} R = 4,78 \text{ m/s}.$$

$$2.174. P = Q = m \frac{v^2}{R}, \quad m = \frac{10000}{9,81} \text{ kG} \cdot \text{s}^2/\text{m}, \quad P = 8,6 \text{ T}.$$



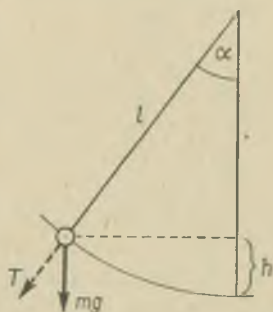
Rys. 2.37

2.175. a) Naciąg w położeniach skrajnych wynosi, jak widać z rysunku 2.38,

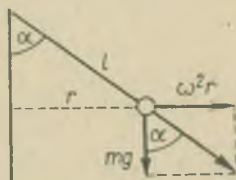
$$N = mg \cos \alpha.$$

Naciąg  $N$  nici w położeniu środkowym równa się ciężarowi kulki powiększonemu o siłę  $\frac{v^2}{l}m$ , czyli

$$N = mg + \frac{v^2}{l}m.$$



Rys. 2.38



Rys. 2.39

Prędkość kulki w położeniu środkowym obliczamy z równości

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh, \quad v^2 = 2gh = 2g(l - l \cos \alpha),$$

więc

$$N = mg + 2mg(1 - \cos \alpha) = mg(3 - 2 \cos \alpha),$$

b)  $mg(3 - 2 \cos \alpha) = 2mg$ ,  $1 - 2 \cos \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .

2.176. Z rysunku 2.39 otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 r}{g},$$

gdzie

$$r = l \sin \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 l \sin \alpha}{g} = \frac{(2\pi n)^2 l \sin \alpha}{g},$$

skąd

$$\cos \alpha = \frac{g}{(2\pi n)^2 l}, \quad \alpha = 78^\circ 40'.$$

2.177. Siła tarcia musi zrównoważyć siłę odśrodkową  $\frac{v^2}{R}m$  (rys. 2.40)

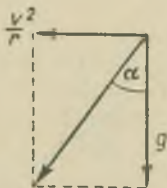
$$fmg = \frac{v^2}{R}m, \quad \text{skąd} \quad v = \sqrt{Rfg} = 19 \text{ m/s.}$$

Kąt nachylenia obliczamy z wzoru

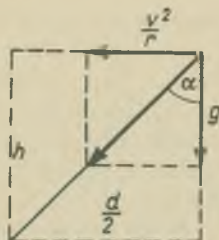
$$\operatorname{tga} = \frac{v^2}{Rg} = \frac{Rfg}{Rg} = f, \quad \alpha = 21^\circ 48'$$

2.178. Z rysunku 2.41 otrzymujemy

$$\operatorname{tga} = \frac{v^2}{rg}, \quad \text{skąd} \quad \alpha = 34^\circ 32'.$$



Rys. 2.40



Rys. 2.41

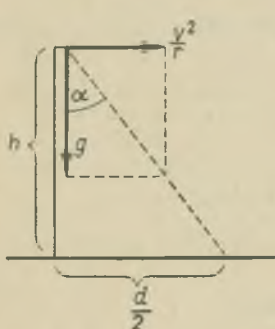
2.179. Wagon nie wykołei się, dopóki wypadkowa siły ciężkości i siły odśrodkowej będzie skierowana między szyny. W granicznym przypadku, jak to wynika z rysunku 2.42,

$$\operatorname{tga} = \frac{d}{2h} = \frac{v^2}{r} : g,$$

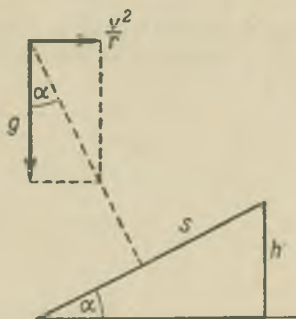
skąd

$$v = \sqrt{\frac{drg}{2h}} = 33,56 \text{ m/s}.$$

Jest to maksymalna dopuszczalna wartość prędkości, powyżej której grozi wykołnienie



Rys. 2.42



Rys. 2.43

2.180. Z rysunku 2.43 otrzymujemy

$$h = s \sin \alpha, \quad \operatorname{tga} = \frac{v^2}{rg}, \quad \operatorname{tga} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{v^2}{rg},$$



$$\sin^2 \alpha = \frac{v^2}{(rg)^2} (1 - \sin^2 \alpha), \quad \sin^2 \alpha \left( 1 + \frac{v^2}{(rg)^2} \right) = \frac{v^2}{(rg)^2},$$

$$\sin \alpha = \frac{v^2}{\sqrt{(rg)^2 + v^2}}, \quad h = s \frac{v^2}{\sqrt{(rg)^2 + v^2}}.$$

2.181. Tarcie kół motocykla o ścianę walca spowodowane siłą odśrodkową  $fm \frac{v^2}{r}$  musi zrównoważyć siłę ciężkości  $mg$

$$\frac{fmv^2}{r} = mg,$$

skąd

$$v = \sqrt{\frac{rg}{f}},$$

gdzie  $r$  jest promieniem koła, po którym porusza się środek ciężkości motocykla i motocyklisty

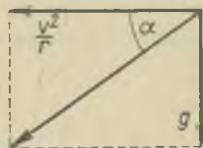
$$r = 0,5d - h$$

oraz

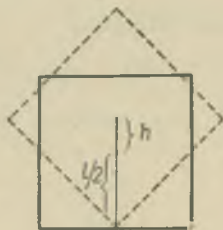
$$v = \sqrt{\frac{(0,5d - h)g}{f}} = 14 \text{ m/s}.$$

Z rysunku 2.44 otrzymujemy

$$\operatorname{tga} = g : \frac{v^2}{r} = \frac{gr}{v^2}, \quad \operatorname{tga} = g \frac{0,5d - h}{v^2}, \quad \alpha = 11^\circ.$$



Rys. 2.44



Rys. 2.45

2.182.  $E_p = mgh = [7,848, 5,886, 3,924, 1,962, 0] \text{ J},$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, \quad \text{gdzie } v^2 = 2gh = 2g(H-h),$$

$$E_k = [0, 1,962, 3,924, 5,886, 7,848] \text{ J},$$

$$E_p + E_k = E = mgH = 7,848 \text{ J}.$$

2.183. Praca zużyta wynosi

$$A = E_0 - E_k = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} - E_k = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh - \frac{1}{2}mv^2,$$

$$A = \frac{1}{2}m(v_0^2 - v^2 + 2gh) = \frac{1}{2} \cdot 0,25(20^2 - 30^2 + 2 \cdot 9,81 \cdot 50) \text{ J} = \\ = \frac{0,25}{2} (400 - 900 + 981) \text{ J} = \frac{0,25}{2} 481 \text{ J} = 60,1 \text{ J}.$$

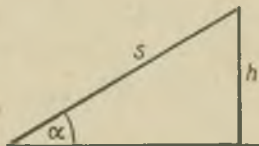
2.184. Przy przewracaniu skrzyni należy podnieść środek ciężkości o wysokość  $h$  (rys. 2.45)

$$h = \sqrt{(\frac{1}{2}l)^2 + (\frac{1}{2}l)^2} - \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}l\sqrt{2} - \frac{1}{2}l = 0,207l,$$

$$A = mgh = Q \cdot h = 0,207Ql = 103,5 \text{ kG} \cdot \text{m} = 103,5 \cdot 9,81 \text{ J}.$$

2.185. Zadanie analogiczne do zadania 2.184; należy dodatkowo obliczyć krawędź sześcianu; masa sześcianu  $m = \rho l^3$ , gdzie  $m = 100 \text{ kg}$ ,  $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$ , skąd

$$l = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}} = 23,4 \text{ cm}, \quad A = 0,207Ql = 4,85 \text{ kG} \cdot \text{m} = 4,85 \cdot 9,81 \text{ J}.$$



Rys. 2.46

2.186. Przy zaniedbaniu tarcia wykonana praca wynosi

$$A = Qh.$$

Z rysunku 2.46 otrzymujemy

$$h = s \sin \alpha, \quad A = Qs \sin \alpha = 1500 \text{ kGm} = 14\,715 \text{ J}.$$

2.187.  $P = \frac{A}{t}$ . Praca wykonana równa się energii kinetycznej pociągu  $A = \frac{1}{2}mv^2$ .

Skąd

$$P = \frac{mv^2}{2t}.$$

Ponieważ

$$m = 10^9 \text{ g}, \quad v = 30 \text{ km/h} = \frac{2500}{3} \text{ cm/s},$$

więc

$$P = \frac{615}{9} 10^{11} \text{ erg/s} = 69,4 \cdot 10^{11} \text{ erg/s} = 69,4 \cdot 10^4 \text{ W}.$$

$$2.188. P = \frac{mv^2}{2t} = 159\,200 \text{ kG} \cdot \text{m/s} = 2123 \text{ KM} = 159\,200 \cdot 9,81 \text{ W}.$$

$$2.189. A = Qh = 27 \cdot 10^6 \text{ kG} \cdot \text{m} = 27 \cdot 9,81 \cdot 10^6 \text{ J},$$

$$P = \left[ \frac{27 \cdot 10^6}{8 \cdot 36 \cdot 10^3} \cdot \frac{60}{100} \right] \text{ kG} \cdot \text{m/s} = 1560 \text{ kG} \cdot \text{m/s} = 20,8 \text{ KM} = 1560 \cdot 9,81 \text{ W}.$$

$$2.190. P = \frac{A}{t}, \quad A = U = mgh = Qh,$$

$$Q = mg = V \rho g = 54 \cdot 10^3 \text{ m}^3 \frac{1000 \text{ kG}}{\text{m}^3} = 54 \cdot 10^7 \text{ kG} = 54 \cdot 9,81 \cdot 10^7 \text{ N},$$

$$P = \frac{54 \cdot 10^7 \text{ kG} \cdot 65 \text{ m}}{60 \text{ s}} = 585 \cdot 10^6 \text{ kG} \cdot \text{m/s} = 7,8 \cdot 10^6 \text{ KM} = 585 \cdot 9,81 \cdot 10^6 \text{ W}.$$

$$2.191. P = \frac{E_k}{t} = \frac{mv^2}{2t}; \text{ masa wody spływającej w czasie } 1 \text{ s}$$

$$m = Sv \cdot 10^3 \text{ kg},$$

$$P = \frac{Sv \cdot 10^3 v^2}{2} = \frac{Sv^3 \cdot 10^3}{2} \text{ (watów)},$$

2.192. Masa wody spływającej w czasie 1 s według zadania 2.191

$$m = Sv \cdot 10^3 \text{ kg}, \quad P = \frac{mgh}{t} = Sv h \cdot 10^3 \text{ (watów)}.$$

$$2.193. P = Tv,$$

gdzie

$$v = \omega R = 2\pi NR,$$

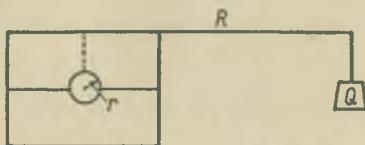
$N$  zaś oznacza liczbę obrotów na sekundę, czyli  $N = n/60$ ,

$$P = T2\pi NR,$$

skąd

$$T = \frac{P}{2\pi NR}, \quad T = \frac{P \cdot 60 \cdot 75}{2\pi nR} \text{ kG} = \frac{P \cdot 60 \cdot 75}{2\pi nR} \cdot 9,81 \text{ N}.$$

$$2.194. P = \frac{A}{t} = \frac{(mg + m'g)h}{t} = \frac{(Q + Q')h}{t \cdot 60} \text{ kG} \cdot \text{m/s} = 583,3 \text{ kG} \cdot \text{m/s} = 7,8 \text{ KM} = 583,3 \cdot 9,81 \text{ W}.$$



Rys. 2.47

2.195. Rachunek przeprowadzimy w układzie ciężarowym jednostek. Siłę tarcia szcęk o wał oznaczmy przez  $F$  kG, a promień wału przez  $r$  (patrz rysunek 2.47). Równowaga będzie utrzymana wtedy, gdy

$$Fr = QR,$$

skąd

$$F = \frac{QR}{r}, \quad P = Fv = F2\pi \frac{n}{60} \frac{r}{100}, \quad P = \frac{\pi QRn}{3000} \text{ kG} \cdot \text{m/s}.$$

$$2.196. E = \frac{mv^2}{2}, \quad m = 10^4 \text{ kg}, \quad v = 10 \text{ m/s},$$

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{10^4 \cdot 10^2}{2} \text{ J} = 5 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

$$2.197. A = Qh = 45000 \text{ kG} \cdot \text{m} = 441000 \text{ J},$$

$$P = \frac{A}{t} = \frac{Qh}{t} = 6,25 \text{ kG} \cdot \text{m/s} = 61,3 \text{ W} = 0,0833 \text{ KM}.$$

$$2.198. P = Fv, \text{ gdzie } v = \pi dn = 14,1 \text{ m/s}, \quad P = F\pi dn,$$

$$F = \frac{P}{\pi dn} = 149 \text{ kG}.$$

$$2.199. m_1 = m_2 = \rho V, \text{ gdzie } V = \frac{4}{3} \pi r^3, \text{ natomiast gęstość ołowiu}$$

$$\rho = 11,3 \text{ g/cm}^3 = 11300 \text{ kg/m}^3.$$

Z prawa ciążenia powszechnego

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2},$$

gdzie

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{(\frac{4}{3} \pi r^3)^2 \rho^2}{(2r)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{4}{9} \pi^2 r^4 \rho^2,$$

$$\rho = 11300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad \rho^2 = 12769 \cdot 10^4 \text{ kg}^2 \cdot \text{m}^{-6},$$

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{4}{9} \cdot 9,87 \cdot 12769 \cdot 10^4 \text{ N} = 3,740 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

2.200. Przez  $F$  oznacza się siłę przyciągania kul pełnych, przez  $F_1$  — siłę przyciągania się kuli mosiężnej i miedzianej wypełniającej wydrążenie

$$F = F_0 + F_1, \quad F_0 = F - F_1, \quad F = G \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 \rho m}{d^2},$$

$$\rho = 8,9 \text{ g/cm}^3 \text{ (dla miedzi)}, \quad F_1 = G \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho m}{(d+r)^2},$$

$$F_0 = G \frac{4}{3} \pi \rho m \left( \frac{R^3}{d^2} - \frac{r^3}{(d+r)^2} \right) = 7,12 \cdot 10^{-9} \text{ N}.$$

2.201. Masa 1 kilograma przyciągana jest na powierzchni Ziemi siłą 9,81 N

$$9,81 = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{1 \cdot M}{(6370)^2 \cdot 10^6},$$

$$M = 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

$$2.202. F = G \frac{m^2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{4^2 \cdot 10^{12}}{10^4} \text{ N} = 1,07 \cdot 10^{-1} \text{ N}.$$

$$2.203. \frac{4\pi^2}{T^2} RM_z = G \frac{M_z M_s}{R^2},$$

$$M_s = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 2 \cdot 10^{27} \text{ ton}.$$

$$2.204. mg = G \frac{mM}{R^2}, \quad mg_1 = G \frac{mM}{(R+h)^2}, \quad g_1 = g \frac{R^2}{(R+h)^2} = 9,747 \text{ m/s}^2.$$

$$2.205. mg_1 = G \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 \rho}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}, \text{ gdzie } \rho \text{ oznacza } \text{średnią gęstość}$$

$$mg = G \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 \rho}{\left(\frac{D}{2}\right)^2}, \quad \frac{g_1}{g} = \frac{d}{D}, \quad g_1 = g \frac{d}{D} \text{ W} = 2,3 \text{ cm/s}^2.$$

2.206. Wartość przyspieszenia ziemskiego w odległości  $h$  od powierzchni Ziemi dana jest wzorem (patrz zadanie 2.204)

$$g_h = g \frac{R^2}{(R+h)^2}.$$

W głębi kuli ziemskiej, w odległości  $r$  od jej środka, siła grawitacji  $F_r$  oraz wartość przyspieszenia  $g_r$  zależą tylko od masy Ziemi znajdującej się wewnątrz kuli o promieniu  $r$ , działania mas zewnętrznych wzajemnie się znoszą

$$F_r = G \frac{mM}{r^2},$$

$$\text{gdzie } M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \quad F_r = G \frac{m \frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r^2} = Gm \frac{4}{3}\pi r \rho = mg_r.$$

Siła grawitacji  $F_R$  na powierzchni Ziemi wynosi

$$F_R = G \frac{m \frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R^2} = Gm \frac{4}{3}\pi R \rho = mg, \quad g = \frac{4}{3}G\pi R \rho$$

dla  $r \leq R$

$$g_r = g \frac{r}{R}.$$

Przyspieszenie wewnątrz kuli ziemskiej jest proporcjonalne do odległości danego punktu od środka kuli ziemskiej. Zależność przyspieszenia ziemskiego od odległości od środka kuli ziemskiej przedstawia rysunek 2.48.



2.207. Z wzoru (zad. 2.204)

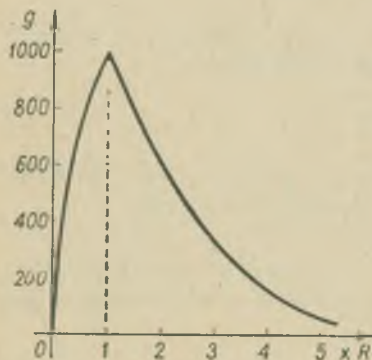
$$g_h = g \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

otrzymujemy dla  $g = 983 \text{ cm/s}^2$  i  $g_h = 978 \text{ cm/s}^2$ ,

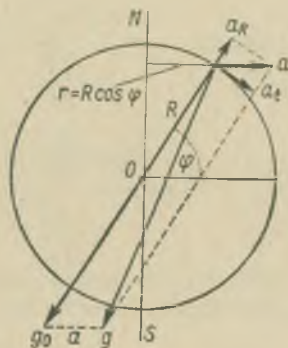
$$h = \sqrt{\frac{R^2}{g_h} - R^2} = 16 \text{ km}.$$

2.208. Według rysunku 2.49 przyspieszenie odśrodkowe spowodowane obrotem Ziemi dookoła osi w szerokości geograficznej  $\varphi$  wynosi

$$a = \omega^2 r = \omega^2 R \cos \varphi.$$



Rys. 2.48



Rys. 2.49

To przyspieszenie  $a$  możemy rozłożyć na składową  $a_R$  w kierunku promienia Ziemi oraz składową  $a_t$  styczną do powierzchni Ziemi

$$a_R = a \cos \varphi = \omega^2 R \cos^2 \varphi = 3,4 \cos^2 \varphi,$$

$$a_t = a \sin \varphi = \omega^2 R \cos \varphi \sin \varphi = 3,4 \cos \varphi \sin \varphi.$$

Gdyby Ziemia była w spoczynku, mielibyśmy skierowane do środka Ziemi przyspieszenie ziemskie  $g_0$ , wynikające z prawa powszechnego ciążenia. Przyspieszenie  $a_R$  ma kierunek  $g_0$ , lecz zwrot przeciwny niż  $g_0$ ; ma ono wartość zerową na biegunach, maksymalną zaś na równiku. To, co potrafimy mierzyć i nazywamy przyspieszeniem ziemskim  $g$ , jest różnicą między  $g_0$  i  $a_R$ .

Zależność  $g$  od szerokości geograficznej wyrażamy wzorem

$$g = g_0 - 3,4 \cos^2 \varphi.$$

2.209. Przyspieszenie w ruchu Ziemi dookoła Słońca spowodowane jest przyciąganiem Ziemi przez Słońce, więc

$$a = \omega^2 R = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 R,$$

gdzie  $R$  oznacza średnią odległość Ziemi od Słońca,  $T$  — okres obiegu Ziemi dokoła Słońca; przy  $T = 365,24$  średnich dób słonecznych i  $R = 149,5 \cdot 10^6$  km,

$$a = 0,59 \text{ cm/s}^2, \quad F = ma = 0,59 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

$$2.210. \quad mg = G \frac{mM}{R^2}, \quad g = G \frac{M}{R^2}, \quad g_k = G \frac{M_k}{R_k^2}, \text{ ale}$$

$$M_k = \frac{M}{81}, \quad R_k = \frac{3}{11}R,$$

więc

$$g_k = G \frac{M}{81 \left(\frac{3}{11}\right)^2 R^2} = G \frac{M}{R^2} \frac{11^2}{81 \cdot 9} = g \frac{121}{729} = 0,166g.$$

2.211. Zadanie analogiczne do zadania 2.210.

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{M_1}{M_k}} = 9, \quad R_1 + R_2 = R \quad (R = 384000 \text{ km}),$$

$$R_2 = \frac{1}{10}R = 38400 \text{ km od środka Księżyca}.$$

2.212. Na powierzchni Ziemi

$$mg = G \frac{mM_z}{R_z^2}, \quad \text{skąd} \quad g = G \frac{M_z}{R_z^2}.$$

Na powierzchni planety

$$ma = G \frac{mM_p}{R_p^2}, \quad \text{skąd} \quad a = G \frac{M_p}{R_p^2}.$$

Lecz

$$M_z = \varrho \cdot \frac{4}{3}\pi R_z^3, \quad M_p = \varrho_p \cdot \frac{4}{3}\pi R_p^3, \quad \varrho_p = 1000\varrho_z, \quad R_p = 7R_z,$$

$$M_p = 1000\varrho_z \cdot \frac{4}{3}\pi (7R_z)^3 = 1000 \cdot 343\varrho_z \cdot \frac{4}{3}\pi R_z^3 = 343 \cdot 10^3 M_z,$$

$$a = G \frac{343 \cdot 10^3 M_z}{(7R_z)^2} = 7 \cdot 10^3 G \frac{M_z}{R_z^2} = 7 \cdot 10^3 g.$$

$$2.213. \quad T_j^2 : T_z^2 = a_j^3 : a_z^2,$$

$$a_j = a_z^3 \sqrt{\left(\frac{T_j}{T_z}\right)^2} = 786 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

$$2.214. \quad ma = G \frac{mM}{D^2}, \quad a = \omega^2 D = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 D,$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} D = \frac{GM}{D^2}, \quad D = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}.$$

2.215. Pola, zakreślone przez promienie wodzące w jednostce czasu, są sobie równe.

$$\frac{1}{2} \cdot 0,91 \cdot 35,4 = \frac{1}{2} v \cdot 0,59, \quad v = 54,5 \text{ km/s}.$$

### 2.216. Z trzeciego prawa Keplera

$$\frac{a_w^3}{a_z^3} = \frac{T_w^2}{T_z^2},$$

podstawiając  $a_z = 1$  i  $T_z = 1$  otrzymujemy

$$T_w^2 = a_w^3.$$

Dla Wenus

$$T_w = 0,615 \text{ lat.}$$

Analogicznie dla Saturna

$$T_s^2 = a_s^3; \quad T_s = 29,5 \text{ lat.}$$

$$2.217. \frac{v_z}{v_w} = \frac{\omega_z R_z}{\omega_w R_w} = \frac{T_w R_z}{T_z R_w}.$$

Z trzeciego prawa Keplera

$$\frac{T_w}{T_z} = \sqrt{\frac{R_w^3}{R_z^3}},$$

a zatem

$$\frac{v_z}{v_w} = \sqrt{\frac{R_w^3}{R_z^3}} \cdot \frac{R_z}{R_w} = \sqrt{\frac{R_w}{R_z}} = 0,85,$$

gdzie  $v_z$  i  $v_w$  są to prędkości liniowe Ziemi i planety Wenus.

2.218. Uzyskana przez meteoryt energia kinetyczna  $T = \frac{1}{2}mv^2$  równa jest pracy  $A$  wykonanej przez siłę przyciągania ziemskiego

$$F = G \frac{mM}{r^2},$$

gdzie  $m$  oznacza masę meteorytu,  $v$  — jego prędkość,  $M$  — masę Ziemi,  $r$  — odległość meteorytu do środka kuli ziemskiej.

Na powierzchni Ziemi

$$F_0 = G \frac{mM}{R^2} = mg,$$

gdzie  $R$  oznacza promień kuli ziemskiej,  $g$  — przyspieszenie ziemskie. Odległość meteorytu  $r$  zmienia się od wartości bardzo dużej ( $\infty$ ) do wartości  $R$ . Prędkość meteorytu obliczamy z wzoru na jego energię kinetyczną w momencie uderzenia o Ziemię

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = A = \int_R^{\infty} F dr.$$

Skorzystamy przy tym z następujących wzorów

$$F = G \frac{mM}{r^2}, \quad F_0 = G \frac{mM}{R^2} = mg,$$

skąd

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \text{oraz} \quad F = mg \frac{R^2}{r^2}.$$

Po podstawieniu tych wartości na energię kinetyczną otrzymujemy

$$v^2 = 2gR^2 \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = -2gR^2 \left[ \frac{1}{r} \right]_R^{\infty} = 2gR, \quad v = 11,2 \text{ km/s}.$$

2.219. Bierzemy za punkt wyjścia definicję środka masy dla dwu punktów materialnych (2.60)

$$x_s = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Dla punktu trzeciego

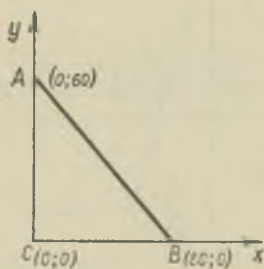
$$X = \frac{x_s(m_1 + m_2) + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

2.220.  $x_1 = 0 \text{ cm}$ ,  $x_2 = 20 \text{ cm}$ ,  $x_3 = 30 \text{ cm}$ ,

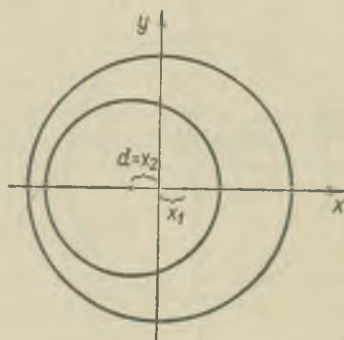
$$m_1 = 10 \text{ g}, \quad m_2 = 20 \text{ g}, \quad m_3 = 28 \text{ g}.$$

Stosujemy wzór (2.60)

$$x_s = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 21 \frac{11}{29} \text{ cm}.$$



Rys. 2.50



Rys. 2.51

2.221. Dowód analogiczny do przeprowadzonego w zadaniu 2.219.

2.222. Trójkąt ABC (rys. 2.50) jest trójkątem prostokątnym, kąt przy wierzchołku C wynosi  $90^\circ$ , ponieważ  $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

$$x_s = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = 17 \frac{1}{2} \text{ cm}, \quad y_s = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i} = 30 \text{ cm}.$$

2.223. Pełna płyta w kształcie koła o promieniu  $r_1$  składa się z małej płyty w kształcie koła o promieniu  $r_2$  (masa  $m_2$ ) oraz z dużej płyty w kształcie koła o promieniu  $r_1$  z wydrążeniem (masa  $m_1$ ). Dla pełnej płyty kołowej środek masy ma w układzie współrzędnych, podanych na rysunku 2.51, współrzędną (według wzoru 2.60)

$$x_s = 0 = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

skąd współrzędne środka masy  $m_1$

$$x_1 = -\frac{x_2 m_2}{m_1} = \frac{d \pi r_2^3 \rho h}{\pi (r_1^2 - r_2^2) \rho h},$$

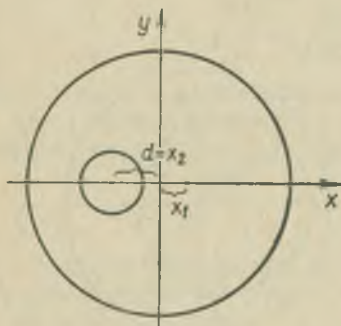
gdzie  $h$  oznacza grubość płyty,  $\rho$  — gęstość płyty,

$$x_1 = \frac{d r_2^3}{r_1^2 - r_2^2} = \frac{45}{8} \text{ cm} = 5,625 \text{ cm}.$$

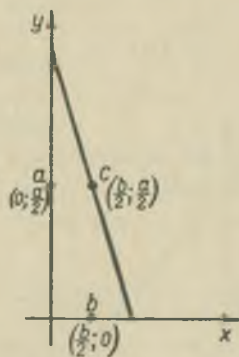
2.224. Analogicznie do zadania 2.223 środek masy pełnej bryły kulistej (rys. 2.52) ma współrzędną

$$x_s = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = 0,$$

$$x_1 = -\frac{x_2 m_2}{m_1} = \frac{d \frac{4}{3} \pi r_2^3 \rho}{\frac{4}{3} \pi (r_1^3 - r_2^3) \rho} = \frac{d r_2^3}{r_1^3 - r_2^3} = \frac{5}{124} \text{ cm}.$$



Rys. 2.52



Rys. 2.53

2.225. Środek masy odcinków  $a$ ,  $b$ ,  $c$  znajduje się w środku geometrycznym tych odcinków (rys. 2.53) i ma współrzędne: dla odcinka  $a$  —  $(0, \frac{a}{2})$ , dla odcinka  $b$  —  $(\frac{b}{2}, 0)$ , dla odcinka  $c$  —  $(\frac{b}{2}, \frac{a}{2})$ . Masa danego odcinka jest proporcjonalna do jego długości, więc

$$x_s = \frac{0a + \frac{b}{2}b + \frac{b}{2}c}{a + b + c}, \text{ ponieważ } c = \sqrt{a^2 + b^2} = 18,7 \text{ cm},$$

więc

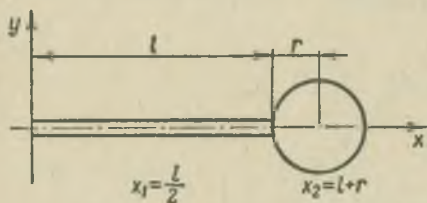
$$x_s = \frac{b^2 + bc}{2(a + b + c)} = 1,42 \text{ cm},$$



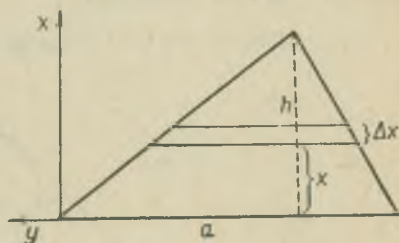
$$y_s = \frac{\frac{a}{2}a + 0 \cdot b + \frac{a}{2}c}{a+b+c} = \frac{a^2 + ac}{2(a+b+c)} = 7,92 \text{ cm.}$$

2.226. Masa pręta  $m_1 = ql\varrho$ , masa kuli  $m_2 = \frac{4}{3}\pi r^3\varrho$ . Środek ciężkości pręta oraz kuli żelaznej ma współrzędną (rys. 2.54)

$$x_s = \frac{q\varrho \cdot \frac{1}{2}l^2 + (l+r)\frac{4}{3}\pi r^3\varrho}{q\varrho l + \frac{4}{3}\pi r^3\varrho} = \frac{3q\frac{1}{2}l^2 + 4\pi r^3l + 4\pi r^4}{3ql + 4\pi r^3} = 74,4 \text{ cm.}$$



Rys. 2.54



Rys. 2.55

2.227. Oznaczmy podstawę dowolnego trójkąta (rys. 2.55) przez  $a$ , jego wysokość przez  $h$ . Obierzmy pasek o szerokości  $\Delta x$  w odległości  $x$  od podstawy.

Długość paska  $b$  obliczymy z proporcji

$$\frac{b}{a} = \frac{h-x}{h}, \quad b = \frac{h-x}{h} a.$$

Powierzchnia paska = elementowi masy  $\Delta m = b \cdot \Delta x = \frac{h-x}{h} a \Delta x$ .

Według wzoru (2.57)

$$x_s = \frac{\sum \Delta m x}{\sum \Delta m}$$

Wyrazy sumy w granicznym przypadku zastępujemy całkami

$$x_s = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^h \frac{h-x}{h} a x dx}{\int_0^h \frac{h-x}{h} a dx} = \frac{\frac{a}{h} \int_0^h (h-x)x dx}{\frac{a}{h} \int_0^h (h-x) dx} = \frac{\left[ h\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^h}{\left[ hx - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^h} = \frac{h}{3}.$$

Środek masy trójkąta znajduje się licząc od dowolnej podstawy trójkąta w odległości równej  $1/3$  odpowiedniej wysokości trójkąta, czyli środek masy pokrywa się z punktem przecięcia się środkowych trójkąta.

2.228. Środek masy pełnego trójkąta  $ABC$  leży na prostej  $CE$  w odległości  $x_1 = \frac{1}{3}CE$  od podstawy  $AB$  (rys. 2.56)

$$CE = AE = \frac{1}{2}a\sqrt{2},$$

więc

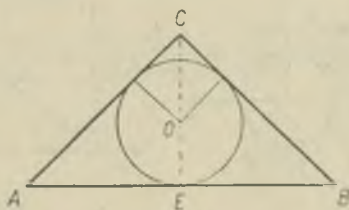
$$x_1 = \frac{1}{3}CE = \frac{1}{6}a\sqrt{2}.$$

Środek masy pełnego koła leży w punkcie  $O$ , przy czym

$$OE = x_k = r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

gdzie  $2p = a+b+c$ . Otrzymujemy

$$r = \frac{1}{2}a\sqrt{6-4\sqrt{2}}.$$



Rys. 2.56

Masa trójkąta  $m_t =$  powierzchni trójkąta  $= AE \cdot CE = \frac{1}{2}a^2$ . Masa koła  $m_k = \pi r^2 = \frac{1}{2}\pi a^2(3-2\sqrt{2})$ . Masa otrzymanej figury

$$m_f = m_t - m_k = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}\pi a^2(3-2\sqrt{2}) = \frac{1}{2}a^2 [1 - \pi(3-2\sqrt{2})].$$

Według wzoru (2.60)

$$x_t = \frac{x_f m_f + x_k m_k}{m_t},$$

$$x_f = \frac{x_t m_t - x_k m_k}{m_f},$$

$$x_f = \frac{\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\pi}{4} \sqrt{(6-4\sqrt{2})^2}}{1 - \pi(3-2\sqrt{2})} = a \frac{0,236 - 0,158}{0,459} = 0,17a = 2,55 \text{ cm}.$$

2.229. Element łuku  $ds = r d\varphi$ ,  $dm = \rho ds$ . Współrzędne tego elementu łuku (rys. 2.57)

$$x = r \cos \varphi.$$

Według wzoru (2.61)

$$x_s = \frac{\int x \rho ds}{\int \rho ds} = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} r^2 \cos \varphi d\varphi}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} r d\varphi} = \frac{r}{\alpha} \sin \alpha = 9 \text{ cm}.$$

2.230. Element powierzchni koła (rys. 2.58)

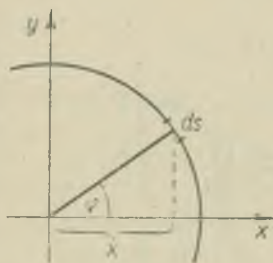
$$d\sigma = \frac{1}{2}r^2 d\varphi, \quad dm = \rho d\sigma \quad (\rho - \text{gęstość}).$$

Środek masy tego elementu (patrz rozwiązanie zadania 2.227)

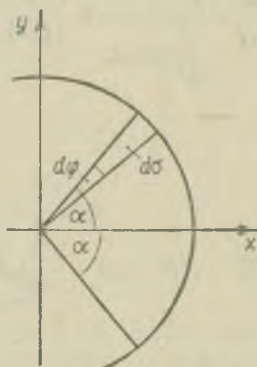
$$x = \frac{2}{3}r \cos \varphi,$$

$$x_s = \frac{\int x \rho d\sigma}{\int \rho d\sigma} = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} r^2 \frac{1}{2} r \cos \varphi d\varphi}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{r^2}{2} d\varphi} = \frac{2}{3\alpha} r \sin \alpha = 13,23 \text{ cm}.$$

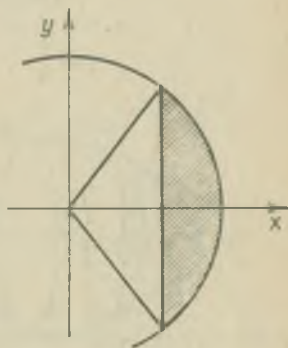
Środek masy wycinka koła znajduje się w odległości 13,23 cm od środka koła.



Rys. 2.57



Rys. 2.58



Rys. 2.59

2.231. Środek masy wycinka koła (rys. 2.59)  $x_w = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$ , masa wycinka koła

$$m_w = r^2 \alpha \text{ (opuszczamy } \rho \text{)}.$$

Środek masy trójkąta

$$x_t = \frac{2}{3}r \cos \alpha,$$

masa trójkąta

$$m_t = r \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2}r^2 \sin 2\alpha.$$

Środek masy odcinka koła oznaczamy przez  $x_0$ .

Masa odcinka koła

$$m_0 = r^2(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha).$$

Według wzoru (2.60)

$$x_w = \frac{x_t m_t + x_0 m_0}{m_w},$$

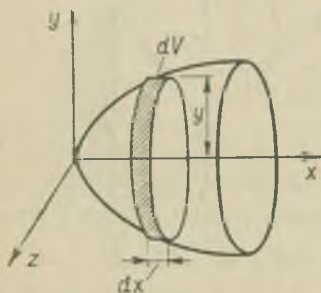
skąd

$$x_0 = \frac{x_w m_w - x_t m_t}{m_0} = \frac{\frac{2r \sin a}{3a} r^2 a - \frac{2}{3} r \cos a \frac{1}{2} r^2 \sin 2a}{r^2 (a - \frac{1}{2} \sin 2a)} = \frac{4r \sin 3a}{3(2a - \sin 2a)} = \frac{2\sqrt{2}}{3(\pi - 2)} r = 14,7 \text{ cm.}$$

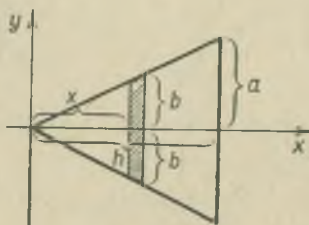
2.232. Element objętości paraboloidy (rys. 2.60)

$$dV = dm = \pi y^2 dx = 2\pi p x dx,$$

$$x_s = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^a 2\pi p x^2 dx}{\int_0^a 2\pi p x dx} = \left[ \frac{\frac{2}{3} x^3}{\frac{1}{2} x^2} \right]_0^a = \frac{2}{3} a.$$



Rys. 2.60



Rys. 2.61

2.233. Rysunek 2.61 przedstawia przecięcia stożka wzdłuż jego osi. Z rysunku otrzymujemy

$$\frac{b}{a} = \frac{x}{h}, \quad b = \frac{ax}{h}.$$

Element objętości stożka wynosi

$$dV = dm = \pi b^2 dx = \pi \left( \frac{ax}{h} \right)^2 dx,$$

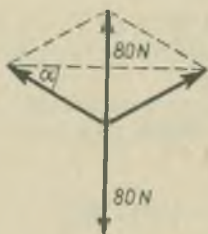
$$x_s = \frac{\int_0^h \left( \frac{ax}{h} \right)^2 x dx}{\int_0^h \pi \left( \frac{ax}{h} \right)^2 dx} = \frac{\int_0^h x^3 dx}{\int_0^h x^2 dx} = \left[ \frac{\frac{1}{4} x^4}{\frac{1}{3} x^3} \right]_0^h = \frac{3h}{4}.$$

2.234. Odpowiedź widoczna z rysunku 2.62.

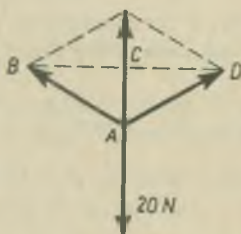
2.235.  $BD = l, BA + AD = l_1$ . Wartość sił jest proporcjonalna do długości odcinków na rysunku 2.63.  $AC = \frac{Q}{2}$ , mamy obliczyć siłę wzdłuż odcinka  $AB$

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 40 \text{ cm}, \quad AB:AC = 85:40 = F:\frac{Q}{2}$$

$$F = \frac{85Q}{2 \cdot 40} = 21,3 \text{ N}.$$



Rys. 2.62



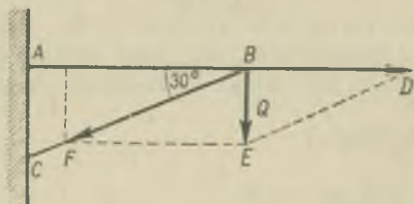
Rys. 2.63

2.236. Z trójkąta  $BDE$  (rys. 2.64)

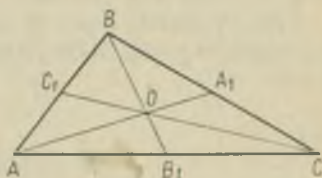
$$BE = DE \sin \alpha, \quad DE = \frac{BE}{\sin \alpha} = 2Q = BF, \quad BD = \sqrt{DE^2 - BE^2} = Q\sqrt{3}.$$

Pręt  $AB$  jest rozrywany siłą  $Q\sqrt{3}$ , pręt  $BC$  jest zgniatany siłą  $2Q$ .

2.237. Przy założeniu, że twierdzenie jest słuszne, należy udowodnić, że wypadkowa wszystkich sił i wypadkowy moment znikają. Pierwszy związek jest oczywisty. Jeżeli



Rys. 2.64



Rys. 2.65

założymy, że ciężar płyty wynosi  $Q$ , to siły przyłożone w wierzchołkach  $ABC$  (rys. 2.65) są równe i każda z nich wynosi  $\frac{1}{3}Q$ , więc w sumie znoszą się z ciężarem  $Q$ .

Łatwo udowodnić, że wypadkowy moment sił względem jednego z punktów  $A_1, B_1$  lub  $C_1$  jest równy 0. Na przykład dla punktu  $C_1$  siły przyłożone w punktach  $A$  i  $B$  są równe, ramiona tych sił  $AC_1 = C_1B$  są równe, czyli momenty są równe, lecz przeciwnie skierowane.

Pozostają siły  $Q$  oraz  $\frac{1}{3}Q$  przyłożone w punkcie  $O$  i w punkcie  $C$ .



Ponieważ  $CC_1 = 3OC_1$ , więc siły te mają także momenty równe co do bezwzględnej wartości, lecz przeciwnie skierowane, tak że wypadkowy moment względem punktu  $C_1$  równa się zero. W przypadku znoszących się sił moment wypadkowy nie zależy od punktu odniesienia, czyli ogólnie równy jest zero. Wobec tego rozkład sił jest taki, że każdy z podtrzymujących niesie  $\frac{1}{3}$  ciężaru płyty.

2.238. Siły  $F_1$ ,  $F_2$  i  $F_3$  można uważać za składowe siły  $F'$  na poszczególnych osiach układu prostokątnego współrzędnych w przestrzeni (rys. 2.66)

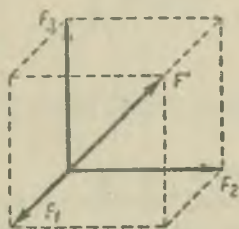
$$F' = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = 15,297 \text{ N}.$$

Szukana siła  $F$  równoważąca siły  $F_1$ ,  $F_2$  i  $F_3$  jest równa sile  $F'$ , lecz jest przeciwnie skierowana. Kąty, jakie tworzy siła  $F'$  ze swymi składowymi  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  obliczamy z wzorów

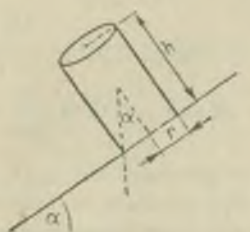
$$\cos \alpha = \frac{F_1}{F'}, \quad \cos \beta = \frac{F_2}{F'}, \quad \cos \gamma = \frac{F_3}{F'},$$

a siła  $F$  tworzy z siłami  $F_1$ ,  $F_2$  i  $F_3$  kąty

$$\alpha + 90^\circ = 117^\circ 13' 58'', \quad \beta + 90^\circ = 121^\circ 31' 54'', \\ \gamma + 90^\circ = 135^\circ 58' 45''.$$



Rys. 2.66



Rys. 2.67

2.239. W zadaniu mamy do czynienia z dźwignią dwustronną. Jeżeli siłę podtrzymującą przedni koniec drążka oznaczymy przez  $F_1$ , to z warunku równowagi dla dźwigni wynika

$$F_1 l = (Q - F_1)(200 - l),$$

skąd

$$F_1 = 210 \text{ N}, \quad F_2 = Q - F_1 = 90 \text{ N}.$$

2.240. Walec nie wywróci się, dopóki pion spuszczonego ze środka ciężkości walca będzie przechodził przez podstawę walca (rys. 2.67).

W przypadku granicznym

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2r}{h}, \quad \text{skąd} \quad h = \frac{2r}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

2.241. Możemy uważać, że ciężar rury jest skupiony w środku ciężkości — w środku rury. Przez  $d_1$  i  $d_2$  oznaczamy odległości od środka ciężkości punktu przyłożenia sił  $F_1$  i  $F_2$ , z jakimi robotnicy podtrzymują rurę na obu jej końcach,

$$F_1 = \frac{1}{3}Q, \quad F_2 = \frac{2}{3}Q;$$

$d_1 = \frac{1}{2}l$ ;  $d_2$  obliczamy z warunku równowagi  $F_1 d_1 = F_2 d_2$ ;  $d_2 = \frac{1}{4}l$  od środka rury.

$$d_1 = 4 \text{ m}, \quad d_2 = 2 \text{ m}.$$

2.242. Oznaczenia analogiczne, jak w zadaniu 2.241,  $d_1 = \frac{1}{2}l$ ;  $d_2 = \frac{1}{2}l - d$ ;

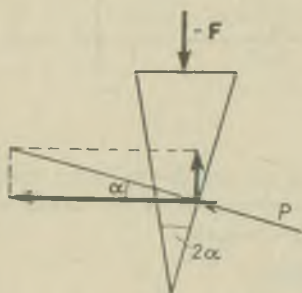
$$F_1 d_1 = F_2 d_2, \quad F_1 + F_2 = Q,$$

skąd

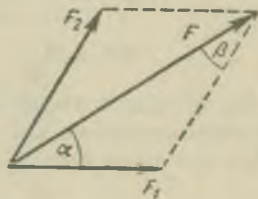
$$F_1 = \frac{Q d_2}{d_1 + d_2} = Q \frac{l - 2d}{2(l - d)} = 444 \text{ N},$$

$$F_2 = Q \frac{d_1}{d_1 + d_2} = Q \frac{l}{2(l - d)} = 556 \text{ N}.$$

2.243. Siłę  $P$  (rys. 2.68) prostopadłą do boku klina można rozłożyć na dwie składowe: na składową równoległą do podstawy klina, zniesioną przez taką samą siłę z przeciwnej



Rys. 2.68



Rys. 2.69

strony, oraz na składową prostopadłą, równą  $P \sin \alpha$ . Składowe prostopadłe do podstawy sumują się na siłę  $F$ , więc

$$2P \sin \alpha = F, \quad \text{ale} \quad \sin \alpha = \frac{b}{2l},$$

skąd

$$P = F \frac{l}{b} = 667 \text{ N}.$$

2.244. Korzystając z rys. 2.69 można napisać następujące związki:

$$F_2^2 = F^2 + F_1^2 \pm 2FF_1 \cos \alpha, \quad F_1^2 = F^2 + F_2^2 \pm 2FF_2 \cos \beta.$$

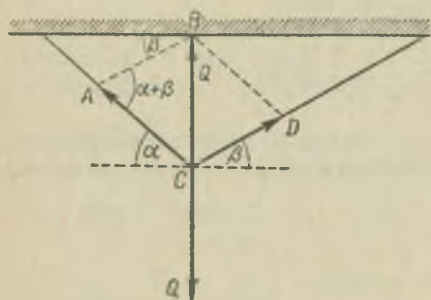
Ponieważ  $F_1 < F$  i  $F_2 < F_1$ , więc używamy w poprzednich wzorach znaku (-)

$$\cos \alpha = \frac{F^2 + F_1^2 - F_2^2}{2FF_1}, \quad \alpha = 30^\circ 30',$$

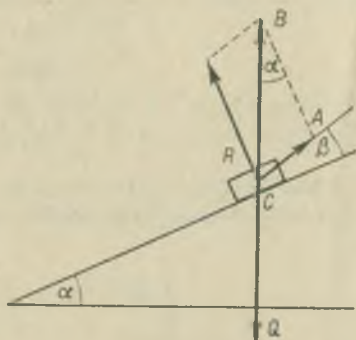
$$\cos \beta = \frac{F^2 + F_2^2 - F_1^2}{2FF_2}, \quad \beta = 36^\circ 30'.$$

2.245. Zadanie sprowadza się do rozwiązania trójkąta o danym boku i dwu kątach doń przyległych (rys. 2.70)

$$AC = \frac{Q \sin(90^\circ - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{Q \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad CD = AB = \frac{Q \sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{Q \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$



Rys. 2.70

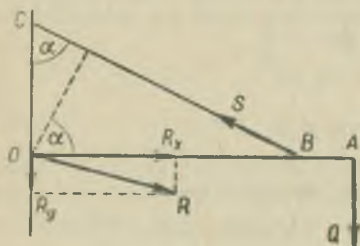


Rys. 2.71

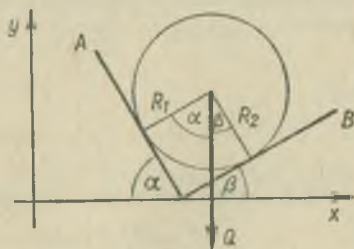
2.246. W trójkącie ABC (rys. 2.71) kąt  $C = 90^\circ - (\alpha + \beta)$ . Kąt  $B = \alpha$  (kąty o bokach wzajemnie prostopadłych). Kąt  $A = 90^\circ + \beta$ . Zadanie sprowadza się do rozwiązywania trójkąta o danym boku  $BC = Q$  i kątach jemu przyległych

$$AC = N = \frac{Q \sin B}{\sin A} = \frac{Q \sin \alpha}{\cos \beta}$$

$$AB = R = Q \frac{\sin C}{\sin A} = Q \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$$



Rys. 2.72



Rys. 2.73

2.247.  $R_x - S \sin \alpha = 0$  (równanie rzutów sił na oś  $x$ , rys. 2.72),  $S \cos \alpha - R_y - Q = 0$  (równanie rzutów sił na oś  $y$ ).

$$Ql - S \cos \alpha = 0, \quad S = \frac{Ql}{\cos \alpha} = 6240 \text{ N}$$

$$R_x = S \sin \alpha = Q \frac{l}{a} \operatorname{tg} \alpha = 5050 \text{ N},$$

$$R_y = S \cos \alpha - Q = Q \frac{l-a}{a} = 1470 \text{ N},$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 5260 \text{ N}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{R_y}{R_x}, \quad \varphi = 16^\circ 10'.$$

2.248. Oznaczamy reakcję prostopadłą do płaszczyzny  $A$  przez  $R_1$ , a prostopadłą do płaszczyzny  $B$  przez  $R_2$  (rys. 2.73). Rzuty sił  $R_1$ ,  $R_2$  i  $Q$  na oś  $x$  i  $y$  dają zero, ponieważ siły równoważą się

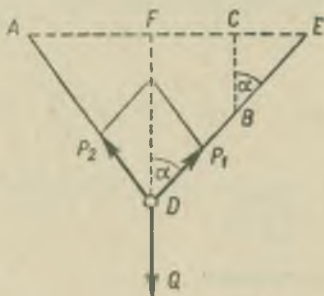
$$R_1 \cos(90^\circ - \alpha) + R_2 \cos(90^\circ + \beta) = 0,$$

$$R_1 \cos \alpha + R_2 \cos \beta - Q = 0,$$

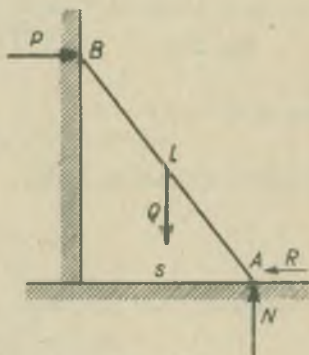
$$R_1 \sin \alpha - R_2 \sin \beta = 0, \quad \sin \alpha = 0,82,$$

$$R_1 \cos \alpha + R_2 \cos \beta = Q, \quad \sin \beta = 0,3085, \quad \sin(\alpha + \beta) = 0,96,$$

$$R_1 = \frac{Q \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = 810 \text{ N}, \quad R_2 = \frac{Q \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = 2140 \text{ N}.$$



Rys. 2.74



Rys. 2.75

2.249. Pierścień będzie w równowadze, gdy napięcia  $P_1$  i  $P_2$  w obu gałęziach linii będą jednakowe  $P_1 = P_2 = P$ , ponieważ wówczas punkt  $D$  ma najniższe położenie. Przedłużamy odcinek  $DB$  tak, aby punkt  $E$  był na tym samym poziomie co punkt  $A$  (rys. 2.74)

$$AC = l, \quad CB = h, \quad AD + DB = s,$$

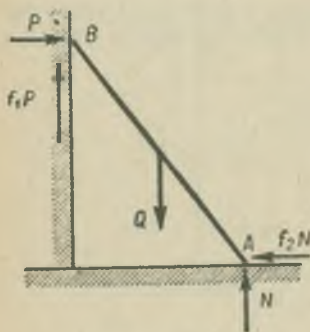
$$EF = \frac{AE}{2} = \frac{l + h \operatorname{tg} \alpha}{2}, \quad DE = \frac{s + \frac{h}{\cos \alpha}}{2},$$

$$l + h \operatorname{tg} \alpha = \left( s + \frac{h}{\cos \alpha} \right) \sin \alpha, \quad l + h \operatorname{tg} \alpha = s \sin \alpha + h \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\sin \alpha = \frac{l}{s}, \quad \alpha = 41^\circ 10', \quad P \cos \alpha + P \cos \alpha = Q,$$

$$P = 402,5 \text{ N}, \quad EF = AF = 5,87 \text{ m}, \quad DF = 6,59 \text{ m}.$$

2.250. Ponieważ ściana jest gładka, więc w punkcie  $B$  (rys. 2.75) występuje siła  $P$  prostopadła do ściany; w punkcie  $A$  mamy składową  $N$  prostopadłą do Ziemi i składową  $R$  równoległą do Ziemi. Moment sił względem punktu  $A$  daje równość



Rys. 2.76

$$P \sqrt{l^2 - s^2} - Q \frac{s}{2} = 0, \quad P = Q \frac{s}{2 \sqrt{l^2 - s^2}} = 35,3 \text{ N}.$$

Z równowagi sił wynika, że

$$P = -R = 35,3 \text{ N}, \quad Q = -N = 200 \text{ N}.$$

2.251. Gdyby nie było tarcia, mieliśmyby tylko siły  $P$  i  $N$  (rys. 2.76). Tarcie powoduje występowanie sił  $f_1P$  i  $f_2N$ . W stanie równowagi moment siły względem punktu  $A$

$$P l \sin \varphi - Q \frac{l}{2} \cos \varphi + f_1 P l \cos \varphi = 0,$$

oraz składowe sił na oś  $y$

$$f_1 P + N - Q = 0,$$

składowe sił na oś  $x$

$$f_2 N - P = 0.$$

Z ostatnich dwóch równań wynika

$$N = \frac{Q}{f_1 f_2 + 1}, \quad P = \frac{f_2 Q}{f_1 f_2 + 1}.$$

Po wstawieniu  $P$  do pierwszego równania otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1 - f_1 f_2}{2 f_2} = 1,1; \quad \varphi = 47^\circ 44'. \quad (1)$$

W przypadku gdy środek ciężkości układu drabina-człowiek przesunie się o odcinek  $a$  bliżej dolnego końca drabiny, otrzymujemy związek

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{(\frac{1}{2}l - a) - f_1 f_2 (\frac{1}{2}l + a)}{f_2 l}. \quad (2)$$

Wzór (1) podaje warunek równowagi drabiny nieobciążonej, wzór (2) podaje warunek równowagi drabiny z człowiekiem. Z porównania wzorów (1) i (2) widać, że  $\varphi_1 < \varphi$ , co oznacza, że drabina nie upadnie, gdy człowiek stanie na jej najniższym szczeblu. Upadnie dopiero wówczas, gdy człowiek stanie powyżej środka drabiny.

2.252. Dzielimy rurę na rury współśrodkowe o bardzo małej grubości  $dr$ . Jeżeli



promień takiej rury elementarnej wynosi  $r$ , to jej masa  $dm = 2\pi r dl \rho$ , a moment bezwładności

$$dJ = 2\pi r dl \rho r^2 = 2\pi r^3 l \rho dr,$$

$$J = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r^3 l \rho dr = 2\pi l \rho \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi l \rho \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{1}{2} \pi l \rho (R_2^4 - R_1^4).$$

Ponieważ masa rury  $M = \rho h \pi (R_2^2 - R_1^2)$ , więc  $J = \frac{1}{2} M (R_2^2 + R_1^2)$ .

2.253.  $J = \int_0^R 2\pi r^3 h \rho dr = \frac{1}{2} \pi h \rho R^4$ . Masa walca  $M = \pi R^2 h \rho$ ,  $J = \frac{1}{2} M R^2$ .

2.254. Dzielimy kulę na bardzo cienkie krążki płaszczyznami prostopadłymi do osi. Dowolny krążek o grubości  $dx$  w odległości  $x$  od środka jest walcem o promieniu np.  $r$ . Z zadania 2.253 wiemy, że

$$dJ = \frac{1}{2} \pi \rho r^4 dx,$$

przy czym

$$r^2 = R^2 - x^2, \quad dJ = \frac{1}{2} \pi \rho (R^2 - x^2)^2 dx,$$

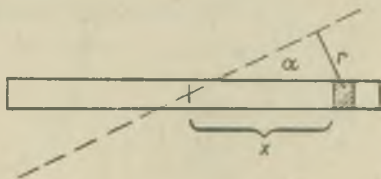
$$J = \int_{-R}^R \frac{1}{2} \pi \rho (R^2 - x^2)^2 dx = \frac{1}{8} \pi \rho R^5 = \frac{1}{2} m R^2; \quad (m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho).$$

2.255. Dzielimy pręt na bardzo małe odcinki o długości  $dx$ . Masa takiego odcinka wynosi  $dm = S \rho dx$ , gdzie  $\rho$  jest gęstością materiału pręta

1) 
$$dJ = S \rho x^2 dx;$$

a) 
$$J = \int_{-l/2}^{+l/2} S \rho x^2 dx = S \rho \frac{1}{3} l^3; \quad m = S \rho l; \quad J = \frac{1}{12} m l^2;$$

b) 
$$J = \int_0^l S \rho x^2 dx = S \rho \frac{1}{3} l^3 = \frac{1}{3} m l^2.$$



Rys. 2.77

2)  $dJ = r^2 dm$  (patrz rys. 2.77),  $r = x \sin \alpha$ ;

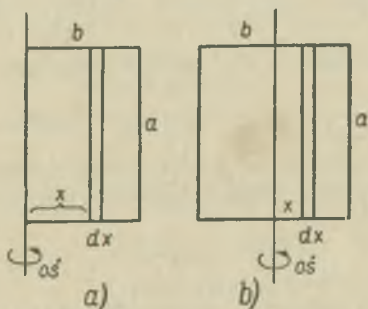
$$J = 2 \int_0^{l/2} x^2 \sin^2 \alpha \rho S dx = 2 S \rho \sin^2 \alpha \int_0^{l/2} x^2 dx = 2 S \rho \sin^2 \alpha \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{l/2} =$$

$$= 2 S \rho \sin^2 \alpha \frac{l^3}{24} = S \rho l \frac{\sin^2 \alpha l^2}{12} = m \frac{\sin^2 \alpha l^2}{12}; \quad J = m \frac{\sin^2 \alpha l^2}{12};$$

3)  $dJ = a^2 dm; \quad J = \int a^2 dm = m a^2.$

2.256. Rys. 2.78a przedstawia przypadek, gdy oś obrotu pokrywa się z podstawą  $a$  prostokąta

$$J = \int_0^b \rho a x^2 dx = \frac{1}{2} \rho a b^3.$$

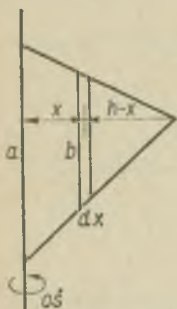


Rys. 2.78

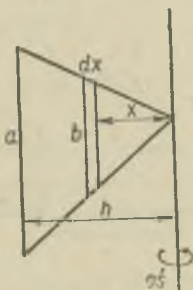
Na rys. 2.78 b oś przechodzi przez środek prostokąta równolegle do podstawy  $a$

$$J = \int_{-b/2}^{+b/2} \rho a x^2 dx = \frac{1}{12} \rho a b^3.$$

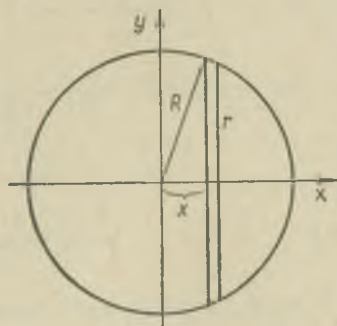
2.257. Dzielimy trójkąt (rys. 2.79) na bardzo wąskie paski i rozpatrujemy dowolny pasek o długości  $b$  i grubości  $dx$ ; jego masa  $dm = b \rho dx$



Rys. 2.79



Rys. 2.80



Rys. 2.81

1)  $b : a = (h - x) : h$ , (rys. 2.79)

$$b = \frac{h-x}{h} a, \quad J = \rho \int_0^h \frac{h-x}{h} a x^2 dx = \frac{1}{12} \rho a h^3;$$

2)  $x : h = b : a$ , (rys. 2.80)

$$b = \frac{ax}{h}, \quad J = \rho \int_0^h a \frac{x}{h} x^2 dx = \frac{1}{4} \rho a h^3.$$

2.258. Dzielimy koło (rys. 2.81) na bardzo wąskie paski o szerokości  $dx$  równoległe do osi  $y$ . Długość paska =  $2r$ , jego powierzchnia =  $2r dx$

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad dJ = 2r dx \rho x^2,$$

$$J_0 = \int_{-R}^R 2r \rho x^2 dx = \int_{-R}^R 2 \sqrt{R^2 - x^2} \rho x^2 dx.$$

Podstawiając  $x = R \sin \varphi$  wprowadzamy nową zmienną  $\varphi$  i następnie względem niej całkujemy

$$J_0 = \frac{1}{2} R^4 \int_0^{\pi/2} \rho (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \pi R^4 \rho = \frac{1}{2} m R^2.$$

Zgodnie z twierdzeniem Steinerja moment bezwładności względem stycznej wyraża się wzorem

$$J_0 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2.$$

2.259. Z drugiej zasady dynamiki ruchu obrotowego  $Fr = I\epsilon$  otrzymujemy przyspieszenie kątowe

$$\epsilon = \frac{Fr}{J} = 5,6 \text{ s}^{-2}, \quad \text{skąd} \quad \omega = \epsilon t = 28 \text{ s}^{-1}.$$

2.260.  $s = \frac{1}{2} at^2$ , przy czym  $a = \epsilon r$ , skąd

$$s = \frac{1}{2} \epsilon r t^2 = 2,1 \text{ m}.$$

Praca wykonana wynosi

$$A = Fs = 315 \text{ J},$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} 0,8 \cdot 28^2 \text{ J} = 0,4 \cdot 784 \text{ J} = 313,6 \text{ J}.$$

2.261. Energia kinetyczna walca w najniższym położeniu równa jest energii potencjalnej dla maksymalnego wzniesienia  $smg \sin \alpha$

$$T = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J \omega^2,$$

gdzie

$$\omega = \frac{v}{r}, \quad J = \frac{1}{2} mr^2.$$

Po podstawieniu otrzymujemy

$$T = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mr^2 \frac{v^2}{r^2} = \frac{3}{4} mv^2 = smg \sin \alpha,$$

$$v = \frac{2}{3} \sqrt{3sg \sin \alpha}, \quad s = \frac{v^2}{2a},$$

skąd

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{2}{3} g \sin \alpha.$$

2.262. Według zasady zachowania krętu

$$m_1 v \cdot \frac{1}{2} l = (J_1 + J_2) \omega,$$

$$J_1 = m_1 \left(\frac{1}{2} l\right)^2; \quad J_2 = \frac{1}{2} m l^2 \quad (\text{zadanie 2.255}),$$

$$\omega = \frac{m_1 v l}{2(I_1 + I_2)} = \frac{m_1 v l \cdot 12}{2l^2(3m_1 + m)} = \frac{6m_1 v}{l(3m_1 + m)} = 99 \text{ s}^{-1}.$$

2.263. Według rozwiązania zadania 2.261

$$a = \frac{2}{3} g \sin \alpha, \quad s = \frac{1}{2} a t^2, \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{3s}{g \sin \alpha}} = 0,96 \text{ s}.$$

W przypadku kuli

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2, \quad \omega = \frac{v}{r}, \quad J = \frac{2}{5} m r^2 \quad (\text{zadanie 2.254}).$$

Po podstawieniu

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m r^2 \frac{v^2}{r^2} = \frac{7}{10} m v^2 = m g s \sin \alpha, \quad v = \sqrt{\frac{10}{7} g s \sin \alpha},$$

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{5}{7} g \sin \alpha, \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{14s}{5g \sin \alpha}} = 0,91 \text{ s}.$$

2.264. Korzystając z wzoru (2.66)

$$F = \frac{J\varepsilon}{r} + ma, \quad \varepsilon = \frac{a}{r}, \quad F = mg$$

otrzymujemy

$$J = \frac{(F - ma)r^2}{a} = \frac{m g r^2}{a} - m r^2 = 39640 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 = 3,964 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

2.265. Korzystamy z zasady zachowania energii przyrównując energię potencjalną stojącego słupa do energii kinetycznej słupa w momencie uderzenia o powierzchnię Ziemi:

$$\text{a) } E_k = E_p = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{mgh}{2}; \quad J = \frac{m h^2}{3},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{h}}, \quad v = \omega \cdot h = \sqrt{3gh} = \sqrt{147,15} \text{ m/s} = 12,14 \text{ m/s}.$$

$$\text{b) } \sqrt{2xg} = v = \omega x = \sqrt{\frac{3g}{h}} x,$$

skąd

$$x = \frac{2h}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ m}.$$

2.266. Opadający z przyspieszeniem  $a$  ciężar  $Q = m_1 g$  porusza masę  $m_2$  oraz obraca walec. Siła poruszająca masę  $m_1$  wynosi  $F = m_1 a_1$ , wobec tego siła poruszająca walec wynosi  $Q - F = m_1(g - a)$ , a moment tej siły równy jest

$$M = m_1(g - a)r, \quad M = J\varepsilon, \quad a = \varepsilon r, \quad J = \frac{1}{2} m r^2,$$

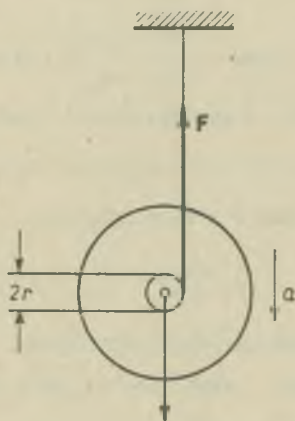
$$m_1(g - a)r = \frac{1}{2} m r^2 \frac{a}{r}, \quad a = \frac{2m_1 g}{m + 2m_1} = 490 \text{ cm/s}^2 = 4,9 \text{ m/s}^2.$$

$$2.267. F = \frac{1}{2}m(g-a); a = \varepsilon r = \frac{M}{J}r = \frac{2Fr^2}{J} = \frac{m(g-a)r^2}{J};$$

gdzie  $a$  jest przyspieszeniem opadającego przyrządu (patrz rys. 2.82).  $Ja = mgr^2 - mar^2$ ,

$$a = \frac{mgr^2}{mr^2 + J}, \text{ skąd}$$

$$F = \frac{1}{2}m(g-a) = \frac{1}{2}mg \left( 1 - \frac{mr^2}{mr^2 + J} \right) = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^{-5} + 2,5 \cdot 10^{-3}} \text{ N} = 4,85 \text{ N}.$$



Rys. 2.82

2.268. W czasie hamowania koło zamachowe porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym z opóźnieniem kątowym  $\varepsilon$ ,

$$M = J\varepsilon, \quad \omega = \omega_0 - \varepsilon t = 0, \quad M = Fr, \quad J = mk^2,$$

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t}, \quad Fr = k^2 m \frac{\omega_0}{t},$$

$$F = \frac{k^2 m \omega_0}{t \cdot r} = \frac{2k^2 m \omega_0}{td}, \quad F = 311,5 \text{ N}.$$

2.269. Moc  $P$  w ruchu postępowym wyraża się wzorem

$$P = F \frac{s}{t} = Fv,$$

w ruchu obrotowym zaś przez analogię

$$P = M\omega,$$

$$\omega = \frac{2880 \text{ obr}}{60 \text{ s}} = 48 \frac{\text{obr}}{\text{s}} = 96\pi \frac{\text{rd}}{\text{s}},$$

$$M = \frac{P}{\omega} = 16,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = 16,6 \text{ N} \cdot \text{m}.$$



$$2.270. T = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = 2 m r^2 \pi^2 n^2, \quad m = 500 \text{ kg}, \quad r = 0,75 \text{ m}, \quad \omega = 2\pi n = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$T = 2,22 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

2.271. Stosujemy zasadę zachowania energii; energia kinetyczna równa jest pracy zużytej przy hamowaniu

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = Fs,$$

dla walca

$$J = \frac{1}{2} m r^2, \quad s = \frac{3mv^2}{4F} = 1,38 \text{ m}.$$

2.272. Korzystamy z faktu, że energia potencjalna walca  $U$  zamienia się całkowicie na energię kinetyczną  $T$

$$T = U,$$

przy czym  $T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$  oraz  $U = E_p = mgh$ ,  
gdzie

$$J = \frac{1}{2} m r^2, \quad \omega = \frac{v}{r}.$$

Po podstawieniu do wzoru pierwszego otrzymujemy

$$\frac{3}{2} m v^2 = mgh, \quad \text{skąd} \quad v = \frac{2}{3} \sqrt{3gh} = 6,26 \text{ m/s}.$$

$$2.273. \frac{1}{2} J \omega^2 = Pt, \quad \omega = 2\pi n, \quad t = \frac{J\omega^2}{2P} = 18 \text{ s}.$$

$$2.274. Fs = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

$$\text{dla kuli } J = \frac{2}{5} m r^2, \quad F = \frac{7mv^2}{10s} = 0,56 \text{ N}.$$

2.275. W ruchu postępowym zachodzi związek

$$F\Delta t = m\Delta v;$$

analogiczny związek zachodzi w ruchu obrotowym

$$M\Delta t = J\Delta\omega, \quad M = \frac{J\Delta\omega}{\Delta t}, \quad J = \frac{1}{2} m r^2, \quad \Delta\omega = 2\pi n = 60\pi,$$

$$M = \frac{m r^2 60\pi}{2\Delta t} = 0,904 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}.$$

$$2.276. T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2,$$

$$\text{a) dla walca } J = \frac{1}{2} m r^2, \quad \omega = \frac{v}{r}, \quad T = \frac{3}{4} m v^2,$$

$$\text{b) dla kuli } J = \frac{2}{5} m r^2, \quad \omega = \frac{v}{r}, \quad T = 0,7 m v^2,$$

c) dla wózka

energię kinetyczną  $T_2$  kół obliczamy według wzoru dla walca (punkt a)

$$T_2 = 4 \cdot \frac{1}{2} m_2 v^2 = 3 m_2 v^2 .$$

Energia kinetyczna wózka bez kół

$$T_1 = \frac{m_1 v^2}{2} .$$

Energia kinetyczna wózka z kołami

$$T = T_1 + T_2 = 0,5 v^2 (m_1 + 6 m_2) .$$

$$2.277. \text{ a) } E_{\text{obr}} = \frac{J \omega^2}{2}, \quad \omega = \frac{v}{R}, \quad J = m R^2,$$

$$E_{\text{obr}} = \frac{m R^2 v^2}{2 R^2} = \frac{m v^2}{2} .$$

$$E_{\text{kp}} = \text{energia kinetyczna ruchu postępowego} = \frac{m v^2}{2} ,$$

$$E_c = E_{\text{obr}} + E_{\text{kp}} = m v^2, \quad E_{\text{obr}} = \frac{1}{2} E_c ,$$

$$\text{b) } E_{\text{obr}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{4} m v^2 \quad (J = \frac{1}{2} m R^2) ,$$

$$E_{\text{kp}} = \frac{1}{2} m v^2, \quad E_c = \frac{3}{4} m v^2, \quad E_{\text{obr}} = \frac{1}{3} E_c ,$$

$$\text{c) } E_{\text{obr}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m R^2 \cdot \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{5} m v^2 \quad (J = \frac{2}{5} m R^2) ,$$

$$E_{\text{kp}} = \frac{1}{2} m v^2, \quad E_c = \frac{7}{10} m v^2, \quad E_{\text{obr}} = \frac{2}{7} E_c .$$

2.278. Całkowita energia kinetyczna

$$E_{\text{kin c}} = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{V^2}{2} \left( m + \frac{1}{r^2} \right) ,$$

gdzie  $V$  oznacza prędkość liniową ciała staczającego się z równi

$$E_{\text{kin c}} = E_p = mgh, \quad \frac{1}{2} V^2 \left( m + \frac{J}{r^2} \right) = mgh ,$$

skąd

$$V = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{J}{r^2}}} .$$

Prędkość przy zsuwaniu się ciała bez tarcia wynosi

$$v = \sqrt{2gh} ,$$

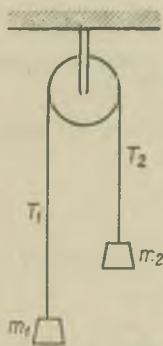
$$\text{a) } J = m R^2, \quad V = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{m R^2}{R^2}}} = \sqrt{\frac{2mgh}{2m}} = \sqrt{gh}, \quad \frac{V}{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

$$b) J = \frac{1}{2}mR^2, \quad v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{1}{2}m \frac{R^2}{R^2}}} = \sqrt{\frac{2mgh}{\frac{3}{2}m}} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}; \quad \frac{V}{v} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

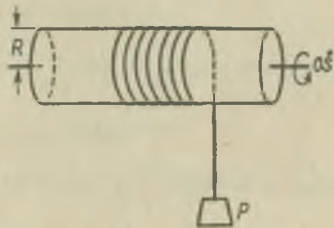
$$c) J = \frac{2}{5}mR^2, \quad v = \sqrt{\frac{10gh}{7}}; \quad \frac{V}{v} = \sqrt{\frac{5}{7}}$$

2.279. Niech  $m_1 > m_2$ , wówczas ciało o masie  $m_1$  spada w dół, ciało o masie  $m_2$  unosi się do góry z przyspieszeniem  $a$  (rys. 2.83). Blok obraca się z przyspieszeniem kątowym  $\varepsilon$ .

$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a + \frac{J\varepsilon}{r}$$



Rys. 2.83



Rys. 2.84

Siła styczna do obwodu bloku nadaje mu przyspieszenie  $\varepsilon = \frac{a}{r}$

$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a + \frac{Ja}{r^2},$$

skąd

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}$$

$$T_1 = m_1g - \frac{m_1(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} = g \frac{m_2^2 + m_1 \cdot m_2 + \frac{Jm_1}{r^2} - m_1^2 + m_1 m_2}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} = g \frac{2m_1 m_2 + \frac{Jm_1}{r^2}}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}$$

$$T_2 = m_2g + \frac{m_2(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} = g \frac{m_1 m_2 + m_2^2 + \frac{Jm_2}{r^2} + m_1 m_2 - m_2^2}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} = g \frac{2m_1 m_2 + \frac{Jm_2}{r^2}}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}$$

2.280.  $\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2$ , gdzie  $\varepsilon$  oznacza przyspieszenie kątowe, z jakim obraca się cylinder. W przypadku gdy równocześnie zachodzi ruch postępowy i obrotowy II zasadę dynamiki można napisać w następującej postaci

$$F = ma + \frac{J\varepsilon}{R},$$

co przy oznaczeniach wprowadzonych w zadaniu napiszemy w postaci

$$P = \frac{P}{g}a + \frac{\frac{1}{2}MR^2}{R}\varepsilon,$$

$$a = R\varepsilon \quad (\text{patrz rys. 2.84})$$

$$P = \frac{P}{g}R\varepsilon + \frac{1}{2}MR\varepsilon,$$

skąd

$$\varepsilon = \frac{P}{\frac{PR}{g} + \frac{MR}{2}} = \frac{g}{R\left(1 + \frac{Mg}{2P}\right)}$$

oraz

$$\varphi = \frac{gt^2}{2R\left(1 + \frac{Mg}{2P}\right)}.$$

2.281.  $\Delta Q = ma$ , gdzie  $a$  jest przyspieszeniem spadającego ciężarka

$$mg = ma + \varepsilon \frac{J}{r}, \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon = \frac{a}{r},$$

skąd

$$mg = ma + \frac{Ja}{r^2}, \quad a = \frac{mg}{m + \frac{J}{r^2}} = \frac{g}{1 + \frac{J}{mr^2}}, \quad \Delta Q = \frac{mg}{1 + \frac{J}{mr^2}}.$$

2.282. Energia potencjalna  $A$  spadającego ciała zamienia się na energię kinetyczną  $E_k$  tegoż ciała oraz energię kinetyczną  $E_r$  obracanego koła (rys. 2.85)

$$A = E_r + E_k, \quad \text{czyli} \quad mgh = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

Ponieważ

$$v = \omega r \quad \text{oraz} \quad h = \frac{1}{2}vt,$$

więc

$$mg \frac{1}{2}vt = \frac{1}{2}J \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv^2, \quad mgt = \frac{Jv}{r^2} + mv,$$

skąd

$$v = \frac{mgt}{m + \frac{J}{r^2}} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 981 \cdot 2}{5 \cdot 10^3 + \frac{200 \cdot 10^3}{4}} \frac{\text{cm}}{\text{s}} = \frac{981 \cdot 2}{11} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \approx 178 \frac{\text{cm}}{\text{s}},$$

$$h = \frac{1}{2} 178 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot 2 \text{ s} = 178 \text{ cm},$$

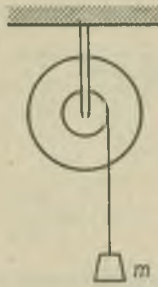
$$A = mgh = 5 \cdot 10^3 \cdot 981 \cdot 178 \text{ erg} = 8,73 \cdot 10^8 \text{ erg} = 87,3 \text{ J},$$

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = 7,9 \cdot 10^7 \text{ erg} = 7,9 \text{ J},$$

$$E_r = \frac{1}{2} J \frac{v^2}{r^2} = 7,92 \cdot 10^8 \text{ erg} = 79,2 \text{ J}.$$

$$2.283. \text{ a) } \varepsilon = \frac{M}{J} = \frac{50 \text{ N} \cdot \text{m}}{20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 2,5 \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{kg} \cdot \text{m}} = 2,5 \frac{1}{\text{s}^2},$$

$$\text{b) } \omega = \varepsilon t; v = \omega R = \varepsilon t R = 2,5 \cdot 10 \cdot 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 12,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Rys. 2.85

2.284. Przyspieszenie  $a$  otrzymujemy z wzoru  $a = \varepsilon r_1$ , gdzie  $\varepsilon = \frac{M}{J}$ , zaś  $r_1$  (patrz rys. 2.86a),  $J$  i  $M$  otrzymujemy ze związków  $r_1^2 = r^2 - \frac{d^2}{4}$ ,  $J = \frac{2}{5} mr^2 + mr_1^2 = m \left( \frac{2}{5} r^2 - \frac{d^2}{4} \right)$ ;

$$M = mg \sin \alpha \cdot r_1 = m \left( \frac{7}{5} r^2 - \frac{d^2}{4} \right) \varepsilon \text{ (patrz rys. 2.86b)}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$a = \frac{g \sin \alpha \cdot r_1^2}{\frac{7}{5} r^2 - \frac{d^2}{4}} = 5g \sin \alpha \frac{4r^2 - d^2}{28r^2 - 5d^2} = 49,7 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

2.285. Energia kinetyczna kuli w miejscu najwyższego wzniesienia w pionowej pętli kołowej wynosi

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} mr^2 \omega^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{5} mv^2 = \frac{7}{10} mv^2.$$

Energia ta powstaje z energii potencjalnej kuli (patrz rys. 2.87)

$$m [h - (R-r)]g, \quad \text{czyli} \quad \frac{7}{10} mv^2 = m [h - (R-r)]g;$$

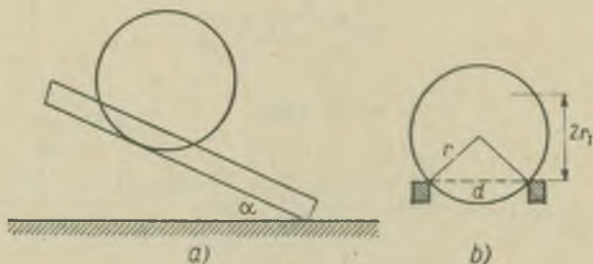


skąd

$$v^2 = \sqrt[1,0]{[h - (R-r)]g}.$$

Siła odśrodkowa w ruchu kuli po okręgu musi zrównoważyć siłę przyciągania ziemskiego  $mg$ , czyli

$$\frac{v^2}{R-r} = g;$$



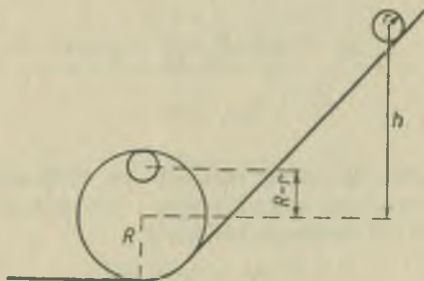
Rys. 2.86

podstawiając do powyższego wzoru obliczoną wartość  $v^2$  otrzymujemy

$$\frac{\sqrt[1,0]{[h - (R-r)]g}}{R-r} = g \quad \text{i stąd} \quad h = 1,7(R-r).$$

2.286.  $T = fN$ ;  $N = mg$ ;

$$f = \frac{T}{N} = \frac{T}{mg} = \frac{0,85}{2,5 \cdot 9,81} \frac{N}{N} = \frac{17}{5 \cdot 98,1} = 0,0334.$$



Rys. 2.87

2.287. Część siły  $F$  równoważy tarcie  $T$ , druga część nadaje kłocowi przyspieszenie  $a$ ;

$$F - T = ma, \quad s = \frac{1}{2}at^2, \quad T = F - m\frac{2s}{t^2}, \quad T = fN, \quad N = \text{nacisk} = mg, \quad f = \frac{T}{N} = \frac{F - m\frac{2s}{t^2}}{N} =$$

$$= \frac{F}{N} - \frac{2s}{gt^2}.$$

Wartość liczbową  $f$  otrzymamy podstawiając wartości wszystkich wielkości wyrażone w jednym układzie SI

$$f = \frac{0,75}{2 \cdot 9,81} - \frac{2 \cdot 0,76}{9,81(4,16)^2} = 0,028 .$$

2.288.  $T = ma, v = 0 = v_0 - at, s = v_0 t - \frac{1}{2} at^2,$

skąd

$$t = \frac{v_0}{a}, \quad s = \frac{v_0^2}{2} \cdot \frac{m}{T};$$

ponieważ

$$T = fmg,$$

więc

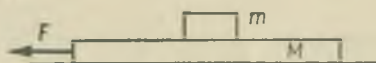
$$s = \frac{v_0^2}{2fg} = 368 \text{ m}, \quad t = \frac{v_0}{fg} = 122,5 \text{ s}.$$



Rys. 2.88

2.289. Dopóki siła tarcia  $T$  jest większa od oporu bezwładnego  $ma$  ( $T > ma$ ), ciało pozostanie na desce (rys. 2.88).

Gdy  $ma > T$ , ciało przesunie się po desce, wtedy  $ma > fmg; a > fg; a > 0,1 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2; a > 0,981 \text{ m/s}^2.$



Rys. 2.89

2.290. Aby deska dała się wysunąć spod ciała (rys. 2.89), musi ona mieć przyspieszenie  $a > f_1 g$ . Siła, która nada desce potrzebne przyspieszenie i pokona siłę tarcia deski o ciało i deski o stół wyraża się równością

$$F = Ma + f_1 mg + f_2(m + M)g,$$

w przypadku  $a = f_1 g$

$$F = (f_1 + f_2)(m + M)g, \quad F = 22,07 \text{ N}.$$

2.291. Korzystając z wzoru

$$s = \frac{v_0^2}{2fg},$$

z zadania 2.288 mamy

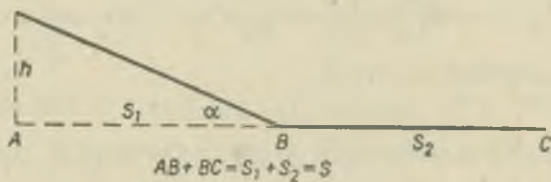
$$v_0 = \sqrt{2fgs} = 6,26 \text{ m/s}.$$

2.292. Energia potencjalna sanek  $mgh$  zostaje zużyta na pokonanie tarcia. Praca wykonana na odcinku  $AB$  (patrz rys. 2.90) wynosi  $ABfN = \frac{s_1}{\cos\alpha} fmg \cos\alpha = s_1 fmg$ , praca zaś wykonana na odcinku  $BC$  równa się  $s_2 fmg$ . Możemy zatem napisać związek

$$mgh = s_1 fmg + s_2 fmg = s fmg,$$

skąd

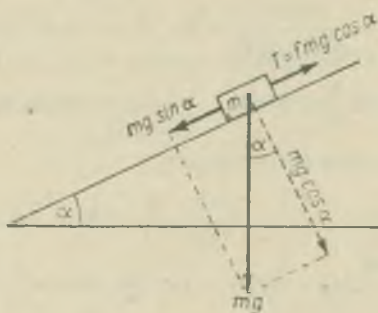
$$f = \frac{h}{s}.$$



Rys. 2.90

2.293. Korzystając z wzoru (2.73) oraz z rys. 2.91 otrzymujemy  $ma = mg \sin\alpha - fmg \cos\alpha$ , skąd

$$a = g(\sin\alpha - f \cos\alpha).$$



Rys. 2.91

2.294.  $F = \frac{1}{2} Q = ma, v = v_0 - at = 0,$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} at^2, \quad m = 150 \cdot 10^6 \text{ g},$$

$$Q = 150 \cdot 10^3 \text{ kG} = 150 \cdot 9,81 \cdot 10^3 \text{ N},$$

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2 \cdot 200 \text{ m}}{2Q} = 1468 \text{ m}.$$

2.295. Korzystając z wzoru (2.73) oraz z oznaczeń wprowadzonych w zadaniu otrzymujemy

$$ma = \frac{Q}{g}a = F - T = F - fQ \quad \frac{Q}{g}a = F - fQ, \quad m = 2 \cdot 10^4 \text{ kg},$$

$$Q = mg; \quad Q = 2 \cdot 10^4 \cdot 9,81 \text{ N}; \quad v = at,$$

$$F = Q \left( \frac{v}{gt} + f \right) = mg \left( \frac{v}{gt} + f \right) = \frac{mv}{t} + fmg = 4314 \text{ N}$$

Praca włożona wynosi

$$A = Fs = Q \left( \frac{v}{gt} + f \right) \frac{vt}{2} = Q \frac{v}{2} \left( \frac{v}{g} + ft \right), \quad A = 12,94 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

Dla  $v = \text{const}$  potrzebna moc wynosi

$$P = Tv = fQv = 9810 \text{ W}.$$

2.296.  $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 12 \cdot 10^{13} \text{ erg} = 12 \cdot 10^6 \text{ J} = 12,23 \cdot 10^5 \text{ kG} \cdot \text{m}$ . Czas obliczamy z równania

$$Pt = Ts + E_k = fQ \frac{vt}{2} + \frac{Qv^2}{2g}, \quad t = \frac{Qv^2}{2g \left( P - f \frac{Qv}{2} \right)} = 116,4 \text{ s}.$$

W przeliczeniu liczbowym należy uważać, aby wszystkie wielkości były wyrażone w jednostkach tego samego układu, np. ciężarowego.

Praca

$$A = Pt = \frac{PQv^2}{g(2P - fQv)} = 262 \cdot 10^4 \text{ kG} \cdot \text{m} = 257 \cdot 10^5 \text{ J},$$

$$t_0 = \frac{v}{fg} = 101,9 \text{ s}, \quad s_0 = \frac{v^2}{2fg} = 1019 \text{ m}.$$

Siłę  $F_1$  hamowania obliczymy ze związku,

$$E_k = (T + F_1)s, \quad F_1 = Q \left( \frac{v^2}{2gs} - f \right) = 1245,6 \text{ kG} = 12\,219 \text{ N}.$$

2.297.  $A = fQs = \frac{mv^2}{2}$ ,  $Q = mg$ ,  $s = \frac{1}{2}vt$ . We wzorach tych  $Q$  oznacza ciężar,  $m$  — masę pociągu.

$$f = \frac{mv^2}{2Qs}, \quad f = \frac{mv^2 2}{2mgvt} = \frac{v}{gt}, \quad f = 0,0056.$$

2.298.  $F = F_1 - T$ ,  $F_1 = mgs \sin \alpha$  (patrz rys. 2.92),

$$T = fmg \cos \alpha, \quad F = 140 \text{ kG} = 140 \cdot 9,81 \text{ N} = 1373,4 \text{ N}.$$

2.299.  $F = F_1 + T$  (rysunek 2.92),  $F_1 = Q \sin \alpha$ ,  $Q = mg$ . Jeżeli  $m = 300 \text{ kg}$ , to  $Q = 300 \text{ kG}$ .

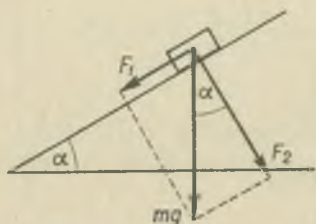
$$T = fQ \cos \alpha, \quad F = Q(\sin \alpha + f \cos \alpha) = 0,673Q = 201,9 \text{ kG} = 1980,6 \text{ N}.$$

2.300. Korzystamy z wzoru (2.73)

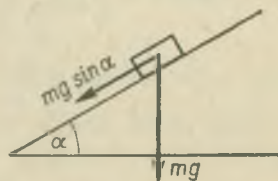
$$F - T = ma, \quad F = mg \sin \alpha \quad (\text{patrz rys. 2.93}), \quad T = fmg \cos \alpha,$$

więc

$$a = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = 0,4567 g.$$



Rys. 2.92



Rys. 2.93

2.301. Załóżmy, że masa ciała wynosi  $m$ , ciężar ciała  $Q = mg$ . Siła poruszająca ciało

$$Q \sin \alpha - fQ \cos \alpha = ma, \quad a = (\sin \alpha - f \cos \alpha)g.$$

Z równań

$$s = \frac{1}{2}at^2, \quad v = at,$$

wynika

$$s = \frac{v^2}{2a}, \quad v = \sqrt{2as} = \sqrt{2s(\sin \alpha - f \cos \alpha)g},$$

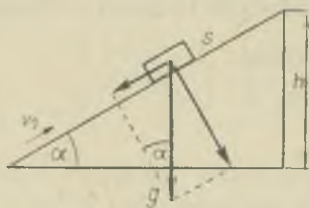
przy czym

$$\sin \alpha = \frac{h}{l} = \frac{1}{2}, \quad v = 9,46 \text{ m/s}.$$

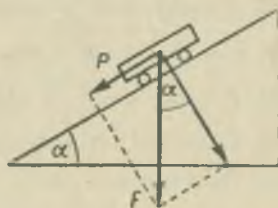
2.302. W przypadku ruchu jednostajnego wypadkowa siła jest równa zero, czyli

$$Q \sin \alpha - fQ \cos \alpha = 0, \quad \sin \alpha - f \cos \alpha = 0,$$

$$f = \tan \alpha = 0,02, \quad \alpha = 1^\circ 9'.$$



Rys. 2.94



Rys. 2.95

2.303. Opóźnienie ruchu ciała

$$a = g \sin \alpha + f g \cos \alpha \quad (\text{patrz rys. 2.94}).$$

Droga, jaką przebiegnie ciało do chwili zatrzymania się

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$



Wysokość, na jaką ciało wzniesie się

$$h = s \sin \alpha = \frac{v_0^2 \sin \alpha}{2g(\sin \alpha + f \cos \alpha)} = \frac{v_0^2}{2g(1 + f \operatorname{ctg} \alpha)} = 4,25 \text{ m}.$$

Przyspieszenie spadania

$$a_1 = g \sin \alpha - f g \cos \alpha,$$

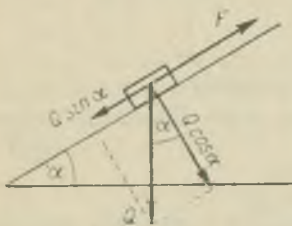
$$\frac{mv^2}{2} = mgh - fmg \cos \alpha \frac{h}{\sin \alpha},$$

$$v = \sqrt{2gh \left(1 - \frac{f}{\operatorname{tg} \alpha}\right)} = 8,16 \text{ m/s}.$$

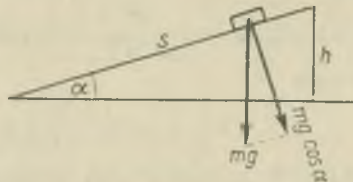
2.304. Siła tarcia  $T = fQ \cos \alpha$ . Aby wóz mógł poruszać się w górę, musi działać siła (rys. 2.95)

$$F = Q \sin \alpha + fQ \cos \alpha, \quad A = Fs = 9 \cdot 10^4 \text{ kG} \cdot \text{m} = 8,83 \cdot 10^7 \text{ J},$$

$$P = \frac{A}{t} = 400 \text{ KM}, \quad P = 294,4 \text{ kW}.$$



Rys. 2.96



Rys. 2.97

$$2.305. A = mgh + fmg \frac{h}{\sin \alpha} \cos \alpha = mgh + mgh f \operatorname{ctg} \alpha = 1,38 \cdot 10^{11} \text{ ergów} = 1,38 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

$$2.306. P = Fv = Q(\sin \alpha + f \cos \alpha)v \text{ (patrz rys. 2.96).}$$

$$2.307. P = fQv, \quad v = \frac{P}{Qf} = 13,4 \text{ m/s} = 48,2 \text{ km/h}.$$

2.308. Z rysunku 2.97 otrzymujemy

$$\sin \alpha = \frac{h}{s} = n.$$

Dla jednostki czasu

$$s = v \quad \text{oraz} \quad h_1 = v_1 n_1, \quad h_2 = v_2 n_2.$$

Siła tarcia

$$T_1 = fmg \cos \alpha_1 \approx fmg, \quad T_2 = fmg \cos \alpha_2 \approx fmg,$$

ponieważ

$$\cos \alpha_1 \approx \cos \alpha_2 \approx 1, \quad P = mgh_1 + fmgv_1 = mgh_2 + fmgv_2,$$

stąd

$$f = \frac{h_2 - h_1}{v_1 - v_2}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} P &= mg \left( h_1 + \frac{h_2 - h_1}{v_1 - v_2} v_1 \right) = mg \frac{v_1 v_2 (n_1 - n_2)}{v_2 - v_1} = Q \frac{v_1 v_2 (n_1 - n_2)}{v_2 - v_1} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 10^5 \text{ kG} \cdot \text{m/s} = 4880 \text{ KM} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ W}. \end{aligned}$$

2.309. Praca wykonana przy jednorazowym przewróceniu skrzyni przemieszcza skrzynię o odcinek drogi równy krawędzi  $l$  skrzyni i wynosi (patrz zadanie 2.184)

$$A_1 = 0,207 Ql.$$

Przy przesuwanie skrzyni o odcinek  $l$  wykonuje się pracę

$$A_2 = fQl, \quad \text{gd}y \quad f = 0,207, \quad A_1 = A_2.$$

Rozwiązanie to jest słuszne dla dowolnego odcinka drogi.

$$2.310. P = \frac{A}{t}. \quad \text{Je}zeli \quad T = fQ = \text{si}ła \quad \text{tarcia}, \quad \text{to} \quad A = Ts + \frac{mv^2}{2} = fQs + \frac{Qv^2}{2},$$

$$P = 53300 \text{ kG} \cdot \text{m/s} = 710 \text{ KM} = 522560 \text{ W}.$$

2.311. Warunek, aby siła tarcia równa była sile odśrodkowej zapiszemy w postaci

$$fmg = m\omega^2 R, \quad \text{skąd} \quad R = \frac{fg}{\omega^2},$$

$$\text{przy czym} \quad \omega = 2\pi n, \quad \text{czyli} \quad R = \frac{fg}{4\pi^2 n^2} = 29,8 \text{ cm}.$$

$$2.312. fmg = \frac{mv^2}{R}, \quad f = \frac{v^2}{gR} \approx 0,39.$$

$$2.313. F - T = ma, \quad Q = mg, \quad T = fQ, \quad a = \frac{F - T}{m} = \frac{F}{m} - fg,$$

$$v = at, \quad t = \frac{v}{a} = \frac{vm}{F - fmg} = \frac{v}{\frac{F}{m} - fg} = 200 \text{ s}.$$

2.314. Maksymalne wzniesienie wyznaczone jest przez kąt  $\alpha$ , pod jakim nachylony jest do poziomu tor pociągu (rys. 2.98);  $\alpha$  obliczamy z wzoru

$$P = Fv = (Q \sin \alpha + fQ \cos \alpha) v.$$

Wiadomo, że kąt nachylenia toru jest mały, popełnimy więc bardzo mały błąd, podstawiając  $\cos \alpha = 1$ , tym bardziej że wyraz  $Q \cos \alpha$  jest mnożony przez bardzo małą liczbę  $f$ . Wtedy

$$(Q \sin \alpha + fQ) v = P, \quad \sin \alpha = \frac{P - fQv}{Qv} = 0,0062.$$

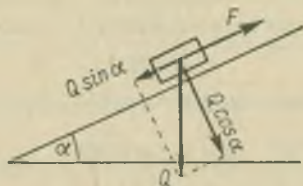
$$2.315. 0,99M = J\varepsilon, \quad \omega = \varepsilon t, \quad J = mk^2,$$

$$\omega = \frac{0,99M}{J}t = \frac{0,99Fr}{mk^2}t = 11,88 \text{ s}^{-1}.$$

$$2.316. \frac{1}{2}J\omega^2 = Ma, \quad a = \frac{1}{2}\omega_0 t \text{ (ruch jednostajnie opóźniony)}$$

$$M = \frac{J\omega_0^2}{2a} = \frac{J\omega_0^2}{\omega_0 t} = \frac{J\omega_0}{t}, \quad n = 180 \frac{\text{obr}}{\text{min}} = 3 \frac{\text{obr}}{\text{s}},$$

$$\omega_0 = 2\pi n = 6\pi/\text{s}, \quad M = 10\pi \text{ N}\cdot\text{m} = 31,4 \text{ N}\cdot\text{m}.$$



Rys. 2.98

2.317. Przy toczeniu się kula obraca się względem stycznej do powierzchni w punkcie każdorazowego styku. Moment bezwładności względem tej osi wynosi (patrz zadanie 2.254)

$$J = mr^2 + J_k = mr^2 + \frac{2}{5}mr^2 = \frac{7}{5}mr^2.$$

Moment hamujący  $M = fQ = fmg$ .

Z drugiej strony zaś

$$M = J\varepsilon.$$

Ponieważ

$$s = \frac{1}{2}at^2, \quad \text{gdzie} \quad a = \varepsilon r$$

oraz

$$fmg = \frac{7}{5}mr^2\varepsilon,$$

skąd

$$\varepsilon = \frac{2s}{rt^2} \quad \text{oraz} \quad f = \frac{7r^2\varepsilon}{5g} = \frac{2,8rs}{gt^2} = 0,6 \text{ cm}.$$

2.318. Oznaczając wytrzymałość danego materiału przez  $W$  (w  $\text{kG}/\text{cm}^2$ ); ciężar właściwy przez  $\gamma$  otrzymujemy wzór

$$l\gamma = W, \quad l = \frac{W}{\gamma},$$

$$\text{a) } \gamma = 7,8 \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}, \quad l = 8,97 \cdot 10^5 \text{ cm} = 8,97 \text{ km},$$

$$\text{b) } \gamma = 8,9 \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}, \quad l = 27 \cdot 10^5 \text{ cm} = 2,7 \text{ km},$$

$$\text{c) } \gamma = 11,3 \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}, \quad l = 1,77 \cdot 10^4 \text{ cm} = 177 \text{ m}.$$

2.319. Z wzoru (2.72,

$$\Delta l = l \frac{p}{E}, \quad p = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{4Q}{\pi d^2}, \quad \Delta l = l \frac{4Q}{\pi d^2 E} = 0,035 \text{ mm}.$$

2.320. Oznaczając wytrzymałość na rozerwanie żelaza przez  $W$ , możemy napisać z wzoru (2.75)

$$\frac{W}{6} = \frac{4Q}{\pi d^2}, \quad d = \sqrt{\frac{24Q}{\pi W}} = 2,52 \text{ cm}.$$

2.321. Z wzoru (2.72)

$$\Delta l = \frac{lp}{E} = 25,10^{-5} l,$$

$$E = \frac{p}{25 \cdot 10^{-5}} = \frac{Q}{s \cdot 25 \cdot 10^{-5}} = \frac{Q \cdot 10^5}{s \cdot 25} = 9,6 \cdot 10^5 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}.$$

2.322. Siła odśrodkowa  $dF$  działająca na element masy  $dm$  znajdującej się w odległości  $x$  od osi obrotu wynosi

$$dF = \omega^2 x dm.$$

Siła działająca na każdą połowę pręta

$$F = \omega^2 \int x dm = \omega^2 x_s m, \quad x_s = \frac{l}{2},$$

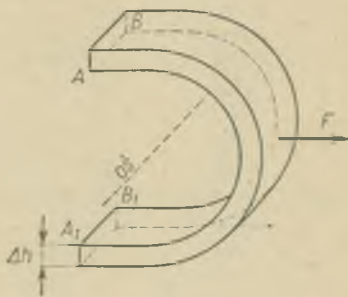
$$m = \frac{\pi d^2 l}{4 \cdot 2 \cdot \varrho}, \quad W = \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{\omega^2 l^2 \varrho}{8},$$

skąd

$$\omega = \sqrt{\frac{8W}{l^2 \varrho}} = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{2W}{\varrho}} = 306 \text{ s}^{-1}.$$

2.323. Z wzoru (2.72)

$$\Delta l = l \frac{p}{E}, \quad l = 2\pi r.$$



Rys. 2.99

Niech grubość obwodu koła wynosi  $\Delta h$  (rys. 2.99). Siła odśrodkowa, działająca na kostkę o przekroju  $1 \text{ cm}^2$  i wysokościach  $\Delta h$ , wynosi  $\Delta h \varrho \omega^2 r$ .

Mamy obliczyć, jakie napięcie  $p$  wewnątrz obwodu koła wywołuje siła odśrodkowa, działająca na całym obwodzie koła. Możemy sobie wyobrazić, że zamiast siły odśrodkowej na obwód koła działa od wewnątrz ciśnienie  $P = \Delta h \varrho \omega^2 r$ . Ciśnienie to daje siłę wypadkową  $F$ , działającą na pas obwodu koła, przedstawiony na rysunku 2.99

$$F = AB \cdot 2rP = 2ABr^2 \Delta h \varrho \omega^2, \quad p = \frac{F}{2AB \Delta h} = \varrho \omega^2 r^2,$$

$$\Delta l = \frac{2\pi \varrho \omega^2 r^3}{E}, \quad \Delta d = \frac{2\varrho \omega^2 r^3}{E} = \frac{\pi^2 \varrho n^2 d^3}{E} = 3,66 \cdot 10^{-5} \text{ cm}.$$

2.324. Na podstawie wzoru (2.76) otrzymujemy

$$\Delta V = V(1-2\mu)\frac{p}{E} = \frac{\pi d^2}{4} l(1-2\mu)\frac{p}{E}, \quad p = \frac{4F}{\pi d^2},$$

więc

$$\Delta V = \frac{F}{E}(1-2\mu)l = 0,0236 \text{ cm}^3.$$

Powierzchnia boczna  $s = \pi dl$

$$\Delta s = \pi d(1-\lambda')l(1+\lambda) - \pi dl = \pi dl(\lambda - \lambda' - \lambda\lambda'),$$

$$\lambda = \frac{p}{E}, \quad \lambda' = \mu\lambda = \mu\frac{p}{E},$$

$$\Delta s = \pi dl \frac{p}{E} \left(1 - \mu - \mu \frac{p}{E}\right) = \frac{4Fl}{Ed} \left(1 - \mu - \mu \frac{4F}{\pi d^2 E}\right) \approx \frac{4Fl(1-\mu)}{Ed} = 0,31 \text{ cm}^3.$$



Rys. 2.100



Rys. 2.101

2.325. a) Ciśnienie, działające na powierzchnię przedstawioną na rysunku 2.100, daje wypadkową siłę  $F$  prostopadłą do płaszczyzny  $ABB_1A_1$

$$F = AB \cdot A_1A \cdot P = d_2 \cdot AA_1 \cdot P.$$

Ciśnienie wywierane na powierzchnię zakreskowaną, działające prostopadle do płaszczyzny rysunku, wynosi

$$p = \frac{F}{AA_1(d_1-d_2)} = \frac{d_2 P}{d_1-d_2}, \quad P = \frac{p(d_1-d_2)}{d_2} = 33,3 \text{ kG/cm}^2,$$

$$\text{b) } F = \frac{P_2 \pi d_2^2}{4}, \quad p = \frac{4F}{\pi(d_1^2-d_2^2)} = \frac{P_2 d_2^2}{d_1^2-d_2^2} \quad (\text{rys. 2.101}),$$

$$P_2 = p \frac{d_1^2-d_2^2}{d_2^2} = 8,04 \text{ kG/cm}^2.$$



2.326. Według rozwiązania zadania 2.235 możemy napisać dla walca

$$P_1 = \frac{p(d'_1 - d_2)}{d_2}$$

dla kuli

$$P_2 = p \frac{d_1^3 - d_2^3}{d_2^3} \approx \frac{2p(d_1 - d_2)}{d_2}$$

Jeżeli  $P_1 = P_2$ , to  $d'_1 - d_2 = 2(d_1 - d_2)$ , czyli ścianki walca są dwa razy grubsze od ścianek półkul.

2.327. Z wzoru (2.79) możemy napisać

$$M = G \frac{\pi d^4 \varphi}{32l} = 2,57 \cdot 10^{-5} \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-2} = 2,57 \cdot 10^{-12} \text{ N} \cdot \text{m}.$$

2.328.  $P$  jest siłą parcia cieczy.

$$P = Q - Q_1 = V\gamma_c, \quad V = \frac{P}{\gamma_c},$$

$$\gamma = \frac{Q}{V} = \frac{Q\gamma_c}{Q - Q_1} = 11,3 \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}.$$

Badany metal jest ołowiem.

2.329.  $F = Q - P$ ,  $Q = mg$ ,  $P = \frac{m}{\rho_2} \rho_2 g$ ,  $F = 42 \text{ G}$ .

2.330. Bierzemy  $p_1$  gramów stali i  $p_2$  gramów korka,  $\gamma$  jest ciężarem właściwym wody.

$$\left( \frac{p_1}{\gamma_1} + \frac{p_2}{\gamma_2} \right) \gamma \cdot p_2 = (p_1 + p_2) \cdot p_2,$$

$$\frac{p_1}{p_2} \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} = \frac{p_1}{p_2} + 1, \quad \frac{p_1}{p_2} \left( 1 - \frac{1}{\gamma_1} \right) = \frac{1 - \gamma_2}{\gamma_2}, \quad \frac{p_1}{p_2} = 4,6.$$

2.331. Bierzemy  $p_1$  gramów złota,  $p_2$  gramów srebra.

$$p_1 + p_2 = Q_1, \quad \frac{p_1}{\gamma_1} + \frac{p_2}{\gamma_2} = V, \quad Q_1 - Q_2 = V\gamma_c$$

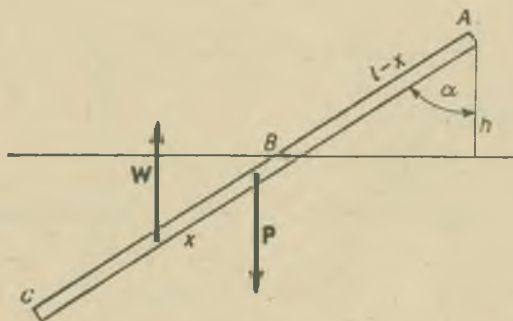
( $\gamma_c$  = ciężar właściwy wody),

$$V = \frac{Q_1 - Q_2}{\gamma_c}, \quad p_1 = 37 \text{ G}, \quad p_2 = 11 \text{ G}.$$

2.332. Oznaczmy część zanurzoną  $CB$  pręta  $l = AC$  przez  $x$ , wówczas  $CB = x = l - AB = l - \frac{h}{\cos \alpha}$  (patrz rys. 2.102). Siła parcia  $W$  działająca na odcinek  $x$  wynosi  $W = Sxdg$ ; ciężar zaś pręta  $P = SlDg$ , gdzie  $g$  jest przyspieszeniem ziemskim, zaś

$d$  — gęstością wody. Momenty obu tych sił względem punktu  $A$  muszą być równe, tzn.  $W \left( l - \frac{x}{2} \right) = P \frac{l}{2}$ , czyli

$$\begin{aligned} Sx dg \left( l - \frac{x}{2} \right) &= S l D g \frac{l}{2}, \\ \left( l - \frac{l}{\cos \alpha} \right) d \left( l - \frac{l}{2} + \frac{h}{2 \cos \alpha} \right) &= \frac{l^2 D}{2}, \\ \frac{1}{2} \left( l - \frac{h}{\cos \alpha} \right) d \cdot \left( l + \frac{h}{\cos \alpha} \right) &= \frac{l^2 D}{2}, \\ l^2 - \frac{h^2}{\cos^2 \alpha} &= \frac{l^2 D}{d}, \quad \frac{h^2}{\cos^2 \alpha} = l^2 - \frac{l^2 D}{d}, \\ \cos \alpha &= \frac{h}{l} \sqrt{\frac{d}{d-D}}. \end{aligned}$$



Rys. 2.102

2.333. Parcie do góry wynosi  $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \left( \frac{D_1}{2} \right)^3 \varrho_2 g$  i równoważę ciężar boi

$$\frac{1}{2} \pi \left[ \left( \frac{D_1}{2} \right)^3 - \left( \frac{D_2}{2} \right)^3 \right] \varrho_1 g,$$

ciężar powietrza zawartego wewnątrz boi

$$\frac{1}{2} \pi \left( \frac{D_2}{2} \right)^3 \varrho_2 g$$

oraz ciężar  $P$ , czyli

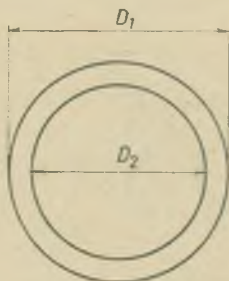
$$\frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi \left( \frac{D_1}{2} \right)^3 \varrho_2 g = \frac{1}{2} \pi \left[ \left( \frac{D_1}{2} \right)^3 - \left( \frac{D_2}{2} \right)^3 \right] \varrho_1 g + \frac{1}{2} \pi \left( \frac{D_2}{2} \right)^3 \varrho_2 g + P \quad (\text{patrz rys. 2.103}).$$

Stąd

$$P = \left[ \frac{1}{2} \pi \left( \frac{D_1}{2} \right)^2 \left( \frac{\varrho_1}{2} - \varrho_1 \right) + \frac{1}{2} \pi \left( \frac{D_1}{2} \right)^2 (\varrho_1 - \varrho_2) \right] g,$$

$$P = \frac{\pi}{6} \left[ D_1^2 \left( \frac{\varrho_1}{2} - \varrho_1 \right) + D_2^2 (\varrho_1 - \varrho_2) \right] g.$$

W rozważaniach tych zaniedbano objętość ciężarka  $P$ .



Rys. 2.103

2.334. Oznaczmy zawieszono ciężarki przez  $P_1$  i  $P_2$ , a odpowiadające im ramiona dźwigni przez  $a$  i  $b$ . Oznaczmy dalej gęstość materiału ciężarka  $P_1$  przez  $\varrho_1$ , ciężarka  $P_2$  — przez  $\varrho_2$ , gęstość zaś materiału dźwigni przez  $\varrho$ . Wówczas dla równowagi dźwigni umieszczonej w próżni możemy napisać

$$P_1 a + g \cdot \varrho S \frac{a^2}{2} = P_2 b + g \cdot \varrho S \frac{b^2}{2}. \quad (1)$$

W powyższym wzorze  $S$  oznacza powierzchnię przekroju poprzecznego dźwigni. Dla dźwigni znajdującej się w powietrzu napiszemy wzór

$$\left( P_1 - \frac{P_1}{\varrho_1} \cdot \varrho_p \right) a + g S (\varrho_1 - \varrho_p) \frac{a^2}{2} = \left( P_2 - \frac{P_2}{\varrho_2} \cdot \varrho_p \right) b + g S (\varrho_1 - \varrho_p) \frac{b^2}{2}. \quad (2)$$

Równania (1) i (2) mogą być równocześnie i przy tych samych wartościach  $P_1$  i  $P_2$  spełnione jedynie wtedy, gdy

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho.$$

2.335. Na każdy element  $dS$  powierzchni  $S$  kuli działa siła  $p dS$  skierowana w kierunku promienia kuli. Nas interesuje składowa siły prostopadła do powierzchni przekroju  $\pi R^2$ , czyli  $p dS \cos \alpha$  (patrz rys. 2.104). Interesująca nas siła rozerwania półkul równowagi wypadkową wszystkich sił, czyli  $F = \iint p dS \cos \alpha$ , zaś  $\iint dS \cos \alpha$  (wzięte po całej powierzchni półkuli) wynosi  $\pi R^2$ . Stąd

$$F = \iint p dS \cos \alpha = p \cdot \iint dS \cos \alpha = p \pi R^2.$$

Wyraz  $dS \cos \alpha$  daje rzut elementu powierzchni  $dS$  na powierzchnię przekroju kuli  $\pi R^2$ .

2.336. Z prawa naczyń połączonych oraz z rys. 2.105 otrzymujemy

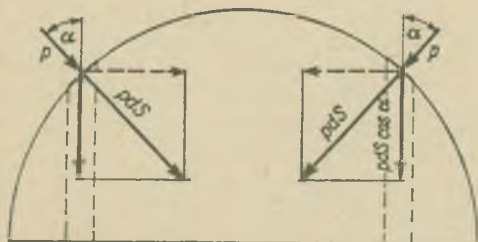
$$h_1 \gamma_0 = h_2 \gamma_n + h_3 \gamma_r, \quad h_3 = 2,1 \text{ cm}.$$

2.337. Strata kuli na ciężarze

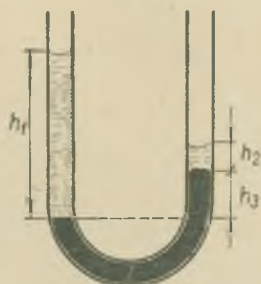
$$\Delta P' = \frac{1}{2} \pi r^3 \gamma_p = 0,675 \text{ G} .$$

Strata odważników na ciężarze

$$\Delta P'' = \frac{P}{\gamma} \gamma_p = 0,123 \text{ G} , \quad \Delta P = \Delta P' - \Delta P'' = 0,552 \text{ G} .$$



Rys. 2.104

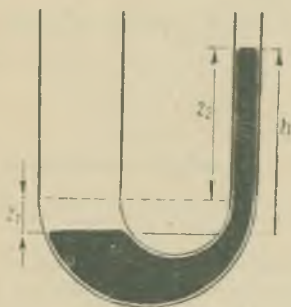


Rys. 2.105

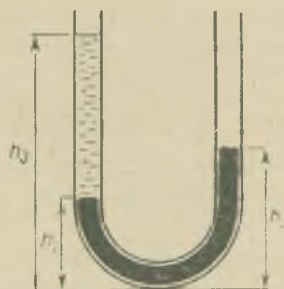
Prawdziwy ciężar ciała

$$P_0 = 800,552 \text{ G} .$$

2.338. Z powodu parcia powietrza rzeczywisty ciężar wody jest większy od wyniku, uzyskanego przy ważeniu. Oznaczywszy przez  $M$  i  $\rho$  masę i gęstość danego ciała, a przez



Rys. 2.106



Rys. 2.107

$m$  i  $\rho_1$  masę i gęstość odważników oraz przez  $\mu$  gęstość powietrza, możemy napisać warunek równowagi dla wagi

$$Mg - \frac{M}{\rho} \mu g = mg - \frac{m}{\rho_1} \mu g , \quad M = m \frac{\rho_1 - \mu}{\rho - \mu} \frac{\rho}{\rho_1} = 100,11 \text{ g} .$$

2.339. Na podstawie danych zadania oraz z rys. 2.106 otrzymujemy następujące związki:

$$h = 76 \text{ cm Hg, co odpowiada wzrostowi ciśnienia o 1 atmosferę;}$$

$$h = z_1 + z_2, \quad s_1 z_1 = s_2 z_2, \quad z_1 = 9,9 \text{ cm Hg,} \quad z_2 = 66,1 \text{ cm Hg.}$$

2.340. Na podstawie prawa naczyni połączonych oraz z rys. 2.107 otrzymujemy

$$\gamma_w(h_3 - h_1) = \gamma(h_2 - h_1), \quad \text{skąd} \quad \gamma = 13,6 \text{ G/cm}^3.$$

2.341. Wskutek obrotu w poziomej części rurki powstanie ciśnienie (zakładamy, że przekrój pionowej rurki równy jest  $1 \text{ cm}^2$ ). Siła odśrodkowa, wywierana na element masy  $dm$  wynosi  $\omega^2 r dm$ , ale  $dm = \rho dr$ , gdzie  $\rho$  jest gęstością cieczy. Cała siła parcia w części poziomej długości  $l$  wynosi

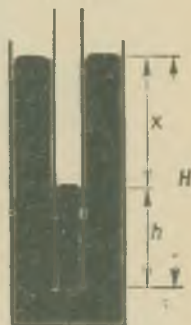
$$\int_0^l \omega^2 r \rho dr = \frac{\rho \omega^2 l^2}{2}.$$

Siła ta jest zrównoważona w ramieniu  $B$  wskutek różnicy poziomów  $h$

$$h \rho g = \frac{\rho \omega^2 l^2}{2}, \quad h = \frac{\omega^2 l^2}{2g}.$$

2.342. Ciśnienie barometryczne  $b = \rho gh$ . Poprawka temperaturowa obejmuje gęstość cieczy  $\rho$  i wysokość słupka  $h$ . Poprawka na szerokość geograficzną uwzględnia zmiany przyspieszenia ziemskiego  $g$  z szerokością geograficzną  $g_r = 9,78 \text{ m/s}^2$ ,  $g_b = 9,83 \text{ m/s}^2$ . Ciśnienie barometryczne  $b_r$  i  $b_b$  są proporcjonalne do wartości  $g$

$$b_r : b_b = 9,83 : 9,78.$$



Rys. 2.108

2.343. Na podstawie prawa Boyle'a oraz rys. 2.108 otrzymujemy

$$pl = (p+x)(l-H+x),$$

$$x^2 + x(p+l-H) - pH = 0,$$

$$x = -\frac{p+l-H}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p+l-H}{2}\right)^2 + pH},$$

$$x = \left(-\frac{81}{2} \pm \frac{136,8}{2}\right) \text{ cm} = 27,9 \text{ cm}, \quad h = H - x = 12,1 \text{ cm}.$$

2.344. Na podstawie prawa Boyle'a mamy

$$lp = (l+H-h)(p-h),$$

skąd

$$l = \frac{pH}{h} - (p+H-h) = 62 \text{ cm}.$$



2.345. Ciśnienie w obu ramionach prasy hydraulicznej jest to samo. Korzystając z tego faktu, z rys. 2.109 oraz z prawa dźwigni, możemy napisać dwa równania

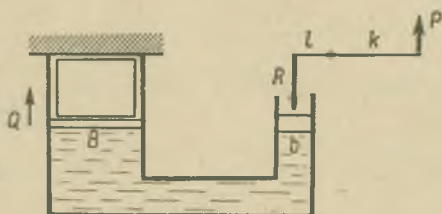
$$\frac{Q}{\frac{1}{4}\pi B^2} = \frac{R}{\frac{1}{4}\pi b^2}, \quad \frac{Q}{B^2} = \frac{R}{b^2},$$

$$Pk = Rl, \quad R = \frac{Pk}{l},$$

$$Q = \frac{B^2}{b^2} \frac{Pk}{l} = 28800 \text{ kG},$$

$$Fa^2 = 21600 \text{ kG}, \quad Q > 21600 \text{ kG},$$

czyli ciśnienie wywierane przez prasę zgniecie kostkę cementową.



Rys. 2.109

2.346.  $F = (p - p_1)Sy = 22,4 \text{ kG}$ .

2.347.  $P = P_0 + h\gamma = 874,5 \text{ kG/cm}^2$ .

Zmiana objętości  $1 \text{ m}^3$  wody wynosi

$$\Delta V = 0,00005 \cdot 1000 \cdot 874,5 \text{ dm}^3, \quad \Delta V = 43,2 \text{ dm}^3.$$

2.348. Korzystając z prawa Boyle'a oraz z rysunku 2.110 otrzymujemy

a)  $V_1 p_1 = (V_1 + V_2)p$ ,  $p = 152 \text{ mm Hg}$ ,

b)  $V_1 p_1 + V_2 p_2 = (V_1 + V_2)p$ ,  $p = 476 \text{ mm Hg}$ .

2.349.  $h_2$  oznacza odległość menisku rtęci od wierzchołka rurki, gdy barometr wskazuje ciśnienie  $h'$ ,  $p_1$  — ciśnienie powietrza wewnątrz rurki barometrycznej nad słupem rtęci przy wysokości słupa rtęci  $h_0$  ( $p_1 = 20 \text{ mm Hg}$ , patrz rys. 2.111),  $p_2$  — ciśnienie powietrza wewnątrz rurki barometrycznej nad słupem rtęci przy wysokości słupa rtęci  $h'$ ,  $p_0 = 768 \text{ mm Hg}$ , ciśnienie otoczenia w pierwszym przypadku,  $p$  — ? mm Hg, ciśnienie otoczenia w drugim przypadku,

$$h_1 p_1 = h_2 p_2, \quad 80 p_1 = h_2 p_2, \quad h_2 = h_1 + h_0 - h',$$

$$h_2 = (80 + 748 - 734) \text{ mm} = 94 \text{ mm},$$

$$p_2 = \frac{p_1 h_1}{h_2} = 17,1 \text{ mm Hg},$$

$$p = h' + p_2 = 751,1 \text{ mm Hg}.$$

2.350.  $p_1 v_1 = p_2 V_2$ ,  $V_2 = 9,8$  litrów.

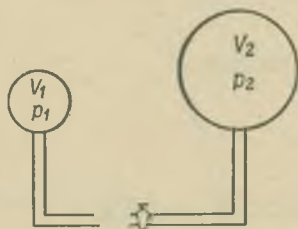
2.351.  $p_2 V_2 = p_1 V_1$ ,  $V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2} = 810$  litrów.

2.352. Korzystając z prawa Boyle'a oraz z rys. 2.112 otrzymujemy następujące związki:

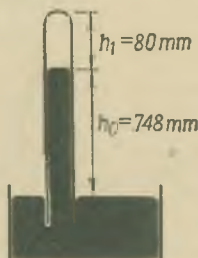
$$p_0(l-h) = px, \quad p+l-a-x = p_0,$$

skąd

$$x = 48,7 \text{ cm}.$$



Rys. 2.110



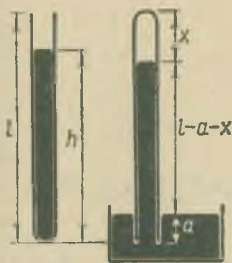
Rys. 2.111

2.353. Z prawa Boyle'a oraz z rys. 2.113 otrzymujemy

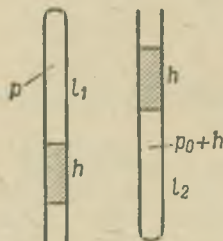
$$p l_1 = (p_0 + h) l_2, \quad p + h = p_0,$$

skąd

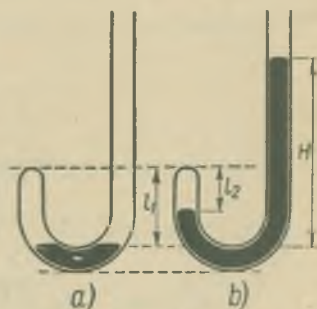
$$p_0 = \frac{h(l_1 + l_2)}{l_1 - l_2}.$$



Rys. 2.112



Rys. 2.113



Rys. 2.114

2.354. Rys. 2.114a przedstawia stan wyjściowy; korzystając z prawa Boyle'a, z danych zadania oraz z rys. 2.114b otrzymujemy następujące związki

$$l_1 p_0 = l_2 [p_0 + H - (l_1 - l_2)], \quad l_1 - l_2 = \frac{1}{3} l_1,$$

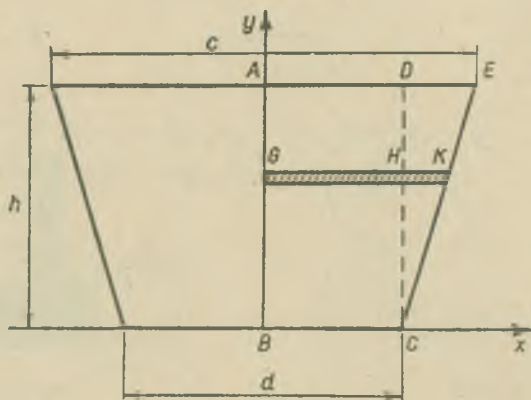
co daje

$$l_1 p_0 = \frac{2}{3} l_1 (p_0 + H - \frac{1}{3} l_1),$$

skąd

$$H = 41 \text{ cm.}$$

2.355. Obierzmy układ współrzędnych tak, jak to pokazano na rys. 2.115. Ciśnienie, jakie panuje wzdłuż paska  $GKdy$  wynosi  $p = \rho g AG = \rho g(h-y)$ . Wartość siły dzia-



Rys. 2.115

łającej wzdłuż paska  $dS = GKdy$  wynosi  $dF = p dS = \rho g(h-y)GKdy$ . Odcinek  $GK = \frac{d}{2} + HK$ , zaś  $HK$  otrzymujemy z podobieństwa trójkątów  $DEC$  i  $HKC$ :

$$\frac{HK}{DE} = \frac{CH}{CD}; \quad HK = \frac{CH}{CD} \cdot DE = \frac{y}{h} \frac{c-d}{2},$$

skąd

$$GK = \frac{d}{2} + \frac{y}{h} \frac{c-d}{2}$$

oraz

$$\begin{aligned} dF &= \rho g(h-y) \left( \frac{d}{2} + \frac{y}{h} \frac{c-d}{2} \right) dy. \\ F &= 2 \int_0^h \rho g(h-y) \left( \frac{d}{2} + \frac{y}{h} \frac{c-d}{2} \right) dy = 2\rho g \left[ \frac{hd}{2} \int_0^h dy - \frac{d}{2} \int_0^h y dy + \frac{c-d}{2} \int_0^h y dy - \right. \\ &\quad \left. - \frac{c-d}{2h} \int_0^h y^2 dy \right] = 2\rho g \left[ \frac{h^2 d}{2} - \frac{d}{2} \frac{h^2}{2} + \frac{c-d}{2} \frac{h^2}{2} - \frac{c-d}{2h} \frac{h^3}{3} \right] = 2\rho g \left( \frac{dh^2}{4} + \frac{c-d}{12} h^2 \right) = \\ &= \rho g h^3 \left( \frac{c}{6} + \frac{d}{3} \right) = \rho g h^3 \frac{c+2d}{6}, \\ F &= \rho g h^3 \frac{c+2d}{6} = 146 \text{ Ton} = 9,81 \cdot 146 \cdot 10^3 \text{ N.} \end{aligned}$$

Moment siły  $M$  względem dolnej krawędzi zapory otrzymamy przez całkowanie wyrazu  $2dFy$

$$\begin{aligned}
 M &= 2 \int_0^h dF \cdot y = 2\varrho g \int_0^h (h-y) \left( \frac{d}{2} + \frac{y}{h} \frac{c-d}{2} \right) y dy = \\
 &= 2\varrho g \left[ \frac{dh}{2} \int_0^h y dy + \frac{c-d}{2} \int_0^h y^2 dy - \frac{d}{2} \int_0^h y^2 dy - \frac{c-d}{2h} \int_0^h y^3 dy \right] = \\
 &= 2\varrho g \left[ \frac{dh}{2} \frac{y^2}{2} + \frac{c-d}{2} \frac{y^3}{3} - \frac{d}{2} \frac{y^3}{3} - \frac{c-d}{2h} \frac{y^4}{4} \right]_0^h = \\
 &= 2\varrho g \left( \frac{dh^3}{4} + \frac{c-d}{6} h^3 - \frac{d}{6} h^3 - \frac{c-d}{8} h^3 \right) = \\
 &= 2\varrho gh^3 \frac{6d+4c-4d-4d-3c+3d}{24} = \varrho gh^3 \frac{c+d}{12}.
 \end{aligned}$$

2.356. Skorzystamy z wzoru barometrycznego

$$p = p_0 e^{-\frac{gMh}{RT}} \quad (1)$$

Oznaczmy wielkości dotyczące azotu wskaźnikiem 1, tlenu — wskaźnikiem 2. Wówczas ciśnienia parcjalne azotu i tlenu na wysokości  $h$  wynoszą odpowiednio

$$p_1 = p_{01} e^{-\frac{gM_1 h}{RT}}, \quad (2)$$

$$p_2 = p_{02} e^{-\frac{gM_2 h}{RT}} \quad (3)$$

Według danych w zadaniu  $\frac{p_{01}}{p_{02}} = \frac{80}{20} = \frac{4}{1}$ ; z wzorów (2) i (3) otrzymujemy

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_{01}}{p_{02}} e^{\frac{g(M_1 - M_2)h}{RT}} = 5.$$

Ponieważ  $p_1 + p_2$  stanowi 100% ciśnienia, więc  $p_2$  wynosi 17% całości ciśnienia na wysokości  $h$ .

2.357. Z wzoru  $S_1 v_1 = S_2 v_2$  otrzymujemy

$$v_1 = \frac{S_2 v_2}{S_1} = 2 \text{ m/s}.$$

2.358. Zgodnie z wzorem (2.77) ciśnienie hydrostatyczne wynosi

$$\frac{\varrho v^2}{2} = h_e \varrho g,$$

skąd

$$v = \sqrt{2gh_e} = 1,98 \text{ m/s}.$$

2.359. Z wzoru (rozwiązanie zadania 2.358)  $v = \sqrt{2gh}$  otrzymujemy

$$h = \frac{v^2}{2g} = 1,27 \text{ m.}$$

2.360. Z wzoru (2.81) otrzymujemy

$$v_p = \sqrt{\frac{2p}{\rho_p}}, \quad \text{przy czym} \quad p = b\rho_r g,$$

skąd

$$v_p = \sqrt{\frac{2b\rho_r g}{\rho_p}} = 395 \text{ m/s.}$$

Prędkość wypływu dwutlenku węgla  $v$  wynosi 320 m/s, a z wzoru (2.81)

$$\frac{v_p}{v} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_p}} = 1,23.$$

2.361. Wydatek prądu wynosi  $S_1 v_1 = S_2 v_2$ . Korzystając z tego związku oraz z prawa Bernoulliego (2.80)

$$h + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g}, \quad \text{czyli} \quad v_2^2 = 2gh + v_1^2,$$

otrzymujemy

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = \sqrt{2gh + v_1^2} S_2.$$

Podnosząc równość  $v_1 S_1 = \sqrt{2gh + v_1^2} S_2$  do kwadratu otrzymujemy

$$v_1^2 S_1^2 = (2gh + v_1^2) S_2^2.$$

Stąd

$$v_1^2 (S_1^2 - S_2^2) = 2gh S_2^2,$$

albo

$$v_1^2 = S_2^2 \frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}$$

oraz

$$v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}}.$$

Stąd wydatek prądu

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}}.$$

2.362. Prawo Bernoulliego dla przekroju wewnątrz strzykawki i dla otworu strzykawki napiszemy w postaci

$$p_1 + \frac{v_1^2 \rho}{2} = \frac{1}{2} \rho v_2^2, \quad (1)$$

ponieważ  $p_2 = 0$ , zaś

$$p_1 = \frac{F}{S_1} \quad \text{i} \quad v_1 = \frac{l}{t}. \quad (2)$$



Z prawa ciągłości mamy

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad \text{i stąd} \quad v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} = \frac{l}{t} \frac{S_1}{S_2}. \quad (3)$$

Po podstawieniu wyrazów (2) i (3) do wzoru (1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{F}{S_1} + \frac{1}{2} \rho \frac{l^2}{t^2} &= \frac{1}{2} \rho \frac{l^2 S_1^2}{t^2 S_2^2}, \\ \frac{1}{2} \rho \frac{l^2}{t^2} \left( \frac{S_1^2 - S_2^2}{S_2^2} \right) &= \frac{F}{S_1}, \\ t^2 &= \frac{\rho l^2 S_1 (S_1^2 - S_2^2)}{2 S_2^2 F}, \\ t &= \frac{l}{S_2} \sqrt{\frac{S_1 (S_1^2 - S_2^2)}{2 F}}. \end{aligned}$$

Ponieważ  $S_1 \gg S_2$ , więc zaniedbując  $S_2^2$  wobec  $S_1^2$  otrzymujemy

$$t = \frac{l S_1}{S_2} \sqrt{\frac{S_1 \rho}{2 F}}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy  $t = 0,4$  s.

2.363.  $F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$ , ponieważ  $v = \text{const}$ , więc

$$F = v \frac{dm}{dt}; \quad dm = \rho dV = \rho \pi r^2 dx$$

i

$$\frac{dm}{dt} = \rho \pi r^2 \frac{dx}{dt} = \rho \pi r^2 v,$$

$$\begin{aligned} F = \pi r^2 \rho v^2 &= 3,14 (2 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10^3 \cdot 5^2 \text{ N} = \\ &= 3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \text{ N} = 0,314 \text{ N}. \end{aligned}$$

2.364. Na element  $dm$  masy wody działa siła Coriolisa i siła odśrodkowa. Moment siły odśrodkowej równa się zero, gdyż siła jest równoległa do promienia dla każdego elementu masy. Wobec tego obliczymy moment siły Coriolisa względem osi pionowej. Na siłę Coriolisa mamy ogólny wzór

$$F = 2mv \times \omega.$$

Ponieważ prędkość kątowna  $\omega$  jest skierowana w kierunku osi pionowej, więc wartość liczbową siły Coriolisa wynosi

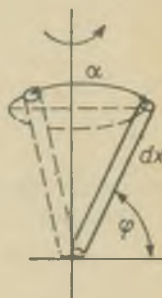
$$F = 2mv\omega \sin(90 - \varphi) = 2mv\omega \cos \varphi$$

oraz

$$dF = 2dmv\omega \cos \varphi; \quad dm = \rho S dx \quad (\text{patrz rys. 2.116}),$$

czyli siła działająca na słupek wody o długości  $dx$  wynosi

$$dF = 2\rho S v \omega \cos \varphi dx.$$



Rys. 2.116

Z powyższego wzoru można wyrugować  $\omega$  i  $v$

$$\omega = \frac{\alpha}{t}; \quad v = \frac{x}{t} = \frac{V_x}{St} = \frac{m}{\rho St} = \text{const},$$

gdzie  $V_x$  oznacza objętość słupa cieczy o wysokości  $x$  i przekroju  $S$

$$dF = 2\rho Sv \frac{\alpha}{t} dx \frac{m}{\rho St} \cos\varphi = \frac{2am\cos\varphi}{t^2} dx.$$

Moment  $dM$  siły Coriolisa  $dF$  zapiszemy następująco

$$dM = \mathbf{r} \times d\mathbf{F},$$

czyli

$$dM = dFx \sin(90^\circ - \varphi) = dFx \cos\varphi = \frac{2amx \cos^2\varphi}{t^2} dx,$$

$$M = \int_0^l dM = \int_0^l \frac{2amx \cos^2\varphi}{t^2} dx = \frac{2am \cos^2\varphi}{t^2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^l =$$

$$= \frac{am \cos^2\varphi l^2}{t^2} = \frac{\pi \cdot 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,4^2}{2 \cdot 2^2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} =$$

$$= \frac{\pi \cdot 10 \cdot 0,4^2}{2 \cdot 2^2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = 0,157 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = 0,157 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

2.365. Wydatek prądu  $q = vs$ , czyli  $v = \frac{q}{s}$ . Prędkość wypływu

$$v = \sqrt{2gH}, \tag{2.365.1}$$

czyli

$$H = \frac{v^2}{2g} = \frac{q^2}{2gs^2}.$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy  $H = 20,2$  cm.

2.366. Z wzoru (2.365.1) otrzymujemy

$$v = \sqrt{2gh} = 9,81 \text{ m/s}.$$

2.367. Ciśnienie  $b$  wywierane na powierzchnię swobodną wody zastępujemy równoznaczącym słupem wody  $h_1 = b \cdot 10$  m. Prędkość wypływu otrzymujemy z wzoru

$$v = \sqrt{2gH},$$

gdzie  $H = h + h_1$ . Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy  $v = 20,8$  m/s.

2.368. Objętość  $V$  wody otrzymujemy z wzoru  $V = skvt$ , gdzie  $v = \sqrt{2gh}$ , czyli

$$V = skt \sqrt{2gh} = 0,155 \text{ m}^3.$$

2.369. Prędkość wypływu otrzymujemy z prawa Torricellego (2.365.1)

$$v_1 = \sqrt{2g(H-x)}. \tag{2.365.1}$$

Prędkość obniżania się powierzchni swobodnej

$$v = \frac{s}{S} \sqrt{2g(H-x)}.$$

We wzorach tych  $x$  oznacza drogę przebytą przez swobodną powierzchnię cieczy. Ostatni wzór można napisać w postaci równania różniczkowego

$$\frac{dx}{dt} = \frac{s}{S} \sqrt{2g(H-x)},$$

którego rozwiązanie, po uwzględnieniu warunków początkowych, ma postać

$$x = \frac{s}{S} \sqrt{2gH} t - \frac{1}{2} \frac{gs^2}{S^2} t^2. \quad (2.369.1)$$

Powierzchnia swobodna cieczy porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym z opóźnieniem

$$a = \frac{gs^2}{S^2}.$$

Korzystając z wzoru na prędkość poruszania się tej powierzchni w momencie, gdy naczynie zostanie opróżnione, otrzymujemy

$$v = v_0 - at_0 = 0, \quad t_0 = \frac{v_0}{a} = \frac{s}{S} \sqrt{2gH} \frac{S^2}{gs^2}, \quad (2.369.2)$$

skąd

$$t_0 = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2H}{g}} = 226 \text{ s}.$$

**2.370.** Korzystamy z wzoru (2.369.1) zadania 2.369

$$x = vt - \frac{1}{2} at^2,$$

czyli

$$x = \frac{s}{S} \sqrt{2gH} t - \frac{1}{2} \frac{gs^2}{S^2} t^2.$$

Podstawiając zamiast  $t$  kolejne wartości  $t_1 = \frac{1}{4}t_0$ ,  $t_2 = \frac{1}{2}t_0$ ,  $t_3 = \frac{3}{4}t_0$ , w których

$$t_0 = \frac{S}{ks} \sqrt{\frac{2H}{g}}, \quad x_1 = \frac{1}{16}H, \quad H-x_1 = \frac{15}{16}H, \quad (2.370.1)$$

$$x_2 = \frac{3}{4}H, \quad H-x_2 = \frac{1}{4}H, \quad x_3 = \frac{15}{16}H, \quad H-x_3 = \frac{1}{16}H,$$

$$s = \frac{S}{kt_0} \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{\pi r^2}{kt_0} \sqrt{\frac{2H}{g}} = 1,04 \text{ mm}^2.$$

**3.371.** Korzystając z wzoru (2.369.1) oraz wprowadzając oznaczenia  $\frac{t}{t_0} = t_1$ , gdzie  $t_0$  jest wyrażone wzorem (2.369.2) otrzymujemy

$$x = \frac{s}{S} \sqrt{2gH} t_1 t_0 - \frac{1}{2} \frac{gs^2}{S^2} t_1^2 t_0^2.$$

Po podstawieniu wartości  $t_0$  z wzoru (2.369.2) otrzymujemy

$$x = 2Ht_1 - Ht_1^2.$$

Wprowadzając oznaczenie  $x = H-h$ ,  $h_1 = h/H$  otrzymujemy

$$t_1^2 - 2t_1 + 1 - h_1 = 0,$$

skąd

$$t_1 = 1 \pm \sqrt{h_1};$$

ponieważ  $t_1 < 1$ , więc

$$t_1 = 1 - \sqrt{h_1}.$$

3.372. Z wzoru (2.369.1) w rozwiązaniu zadania 2.369

$$x = \frac{sk}{S} \sqrt{2gH} t - \frac{1}{2} \frac{gs^2k^2}{S^2} t^2, \quad xS = sk \sqrt{2gH} t - \frac{1}{2} \frac{gs^2k^2}{S} t^2.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy

$$xS = 67600 \text{ cm}^3 = 67,6 \text{ dm}^3.$$

2.373. Ruch strumienia w kierunku poziomym jest ruchem jednostajnym z prędkością  $v = \sqrt{2g(H-h)}$ , zaś  $l = vt$ . Ruch w kierunku pionowym jest jednostajnie przyspieszony

$$h = \frac{1}{2}gt^2,$$

czyli

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}};$$

skąd otrzymujemy

$$l = 2\sqrt{(H-h)h}. \quad (2.373.1)$$

Po podstawieniu wartości liczbowych  $l = 160 \text{ cm}$ .

2.374. Z wzoru (2.373.1) w rozwiązaniu zadania 2.373

$$H = \frac{l^2 + 4h^2}{4h}.$$

2.375. Dla  $l = l_{\max}$

$$\frac{dl}{dh} = (H - \frac{1}{2}h) = 0,$$

skąd

$$h = \frac{1}{2}H.$$

2.376. Z wzoru (2.373.1) wynika, że oba strumienie uderzają o posadzkę w tym samym miejscu.

2.377. Aby obydwa strumienie padły w jedno miejsce podłogi, odległość od dna naczynia do dolnego otworu musi być taka sama, jak odległość górnego otworu od powierzchni swobodnej cieczy (rozwiązanie podane w zadaniu 2.376). Stąd

$$\text{a) } h_1 = a, \quad h_2 = H - a,$$

$$\text{b) } h_1 = \frac{1}{2}(H - b), \quad h_2 = h_1 + b = \frac{1}{2}(H + b).$$

2.378. Z wzoru (2.81) otrzymujemy

$$p = \frac{8l\eta V}{\pi r^4 t}$$

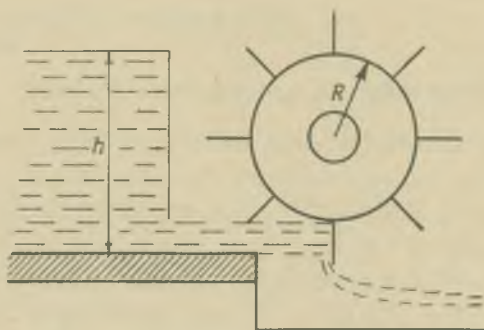
Po podstawieniu wartości liczbowych

$$p = 3,2\pi \cdot 10^6 \text{ dyn/cm}^2 = 9,95 \text{ atm}.$$

2.379. Oznaczmy prędkość wody przez  $v$ , prędkość zaś liniową obwodu koła młyńskiego przez  $v_1$  (patrz rys. 2.117). Strata  $\Delta p$  pędu wody równa się sile  $F$ , działającej na łopatkę, pomnożonej przez  $\Delta t$

$$\Delta p = F\Delta t;$$

$$m(v-v_1) = \rho v \Delta t S(v-v_1) = F\Delta t.$$



Rys. 2.117

Moc wytwarzana przez koło

$$P = \frac{Fx}{\Delta t} = Fv_1 = \rho v v_1 S(v-v_1).$$

Zrózniczkowanie tego wzoru względem  $v_1$

$$\frac{dP}{dv_1} = \rho v^2 S - 2\rho S v v_1 = 0$$

i przyrównanie uzyskanej pochodnej do zera pozwala ustalić wartość  $v_1 = v/2$ , przy której moc ma wartość maksymalną

$$P_{\max} = \rho v \frac{v}{2} S \left( v - \frac{v}{2} \right) = \rho S \frac{v^3}{4} = \rho S \frac{(2gh)^{3/2}}{4};$$

skąd

$$\omega_{\max} = \frac{v_{1\max}}{R} = \frac{v}{2R} = \frac{\sqrt{2gh}}{2R} = \frac{\sqrt{98,1}}{3} \text{ s}^{-1} = 3,14 \text{ s}^{-1}.$$



2.380. Uwzględniając fakt, że siłę oporu równoważy siła przyciągania ziemskiego, otrzymujemy maksymalną prędkość kuli

$$\frac{4\pi r^3}{3} \rho g = \alpha \pi r^2 \rho_p v^2,$$

skąd

$$v = 2 \sqrt{\frac{r \rho g}{3 \alpha \rho_p}}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy  $v = 398$  m/s.

2.381. Z prawa Stokesa (2.83)

$$\frac{4\pi r^3}{3} (\rho - \rho_w) g = 6\pi \eta r v,$$

skąd

$$v = \frac{2r^2(\rho - \rho_w)g}{9\eta}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy  $v = 10,9$  cm/s.

### 3.1. ROZSZERZALNOŚĆ LINIOWA I OBJĘTOŚCIOWA

Jedną z podstawowych jednostek układu jednostek SI jest jednostka temperatury — *Kelvin* (K). Ze względu na to należy temperaturę wyrażać w K, a nie jak dotychczas w °C. Różnice temperatur wyrażone w °C oraz w K są takie same i oznaczamy je deg. Oznaczając temperaturę w K przez  $T$ , a w °C przez  $t$ , otrzymujemy  $\Delta T = \Delta t$ . Przez  $T_0$  będziemy oznaczali temperaturę zero °C, a więc  $T_0 = 273,16$  K.

Średni współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej (którym posługujemy się przy rozwiązywaniu zadań) określamy wzorem

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta T} = \frac{l - l_0}{l_0 \Delta T} \left[ \frac{1}{\text{K}} \right], \quad (3.1)$$

gdzie  $l$  oznacza długość pręta w temperaturze  $T$ , a  $l_0$  — w temperaturze  $T_0$ .

Średni współczynnik objętościowej rozszerzalności cieplnej określamy wzorem

$$\gamma = \frac{\Delta V}{V_0 \Delta T} = \frac{V - V_0}{V_0 \Delta T} \left[ \frac{1}{\text{K}} \right], \quad (3.2)$$

gdzie  $V$  oznacza objętość ciała w temperaturze  $T$ , a  $V_0$  — w temperaturze  $T_0$ .

Współczynnik  $\gamma$  wyznacza się dla gazów, cieczy oraz dla ciał stałych. Dla izotropowych ciał stałych zachodzi związek

$$\gamma = 3\alpha, \quad (3.3)$$

dla ciał stałych anizotropowych

$$\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad (3.4)$$

gdzie  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  są współczynnikami liniowej rozszerzalności cieplnej wzdłuż odpowiednio wybranych trzech osi krystalograficznych danego anizotropowego ciała stałego.

## Zadania

3.1. Na aluminiowym liniale wykonano dokładną podziałkę w temperaturze  $T_0$ . Zmierzono tym liniałem długość pręta żelaznego w temperaturze  $T_1 = 293,16 \text{ K}$  i otrzymano wynik  $l = 1,5 \text{ m}$ . Obliczyć długość tego pręta w temperaturze  $T_0$ , jeżeli współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej aluminium wynosi  $\alpha = 25,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ , a żelaza  $\alpha_1 = 12,1 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

3.2. Mosiężne wahadło wykonywa jedno wahanie w temperaturze  $T_0$  w czasie  $\tau = 3 \text{ s}$ . Jaki jest okres tego wahadła w temperaturze  $T = 298,16 \text{ K}$ , jeżeli współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej mosiądzu wynosi  $\alpha = 18,9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ? (Zakładamy, że wahadło jest wahadłem matematycznym.)

3.3. Długość zredukowana mosiężnego wahadła fizycznego wynosi  $l_0 = 0,25 \text{ m}$  w temperaturze  $T_0$ . Obliczyć zmianę procentową okresu tego wahadła, jeśli jego temperatura wzrośnie do  $T = 298,16 \text{ K}$ . Dla mosiądzu  $\alpha = 18,9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

3.4. Wahadło fizyczne z miedzi o  $\alpha = 16,8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  ma w temperaturze  $T = 300 \text{ K}$  okres wahań  $\tau = 2 \text{ s}$ . Jaki będzie jego okres w temperaturze  $T_1 = 400 \text{ K}$ ?

3.5. W naszych warunkach geograficznych, w zamkniętych pomieszczeniach, maksymalna zmiana temperatury wynosi około  $\Delta T = 70 \text{ K}$ . O ile procent zmieniać się będzie okres mosiężnego wahadła sekundowego między zimą a latem? Dla mosiądzu  $\alpha = 18,9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

3.6. Do żelaznego pręta o długości  $l_1 = 1 \text{ m}$  przytwierdzony jest pręt cynkowy o takiej samej długości w temperaturze  $T_0$ . Jaki jest liniowy współczynnik rozszerzalności cieplnej tego złożonego pręta, jeżeli dla żelaza  $\alpha_1 = 12,1 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ , a dla cynku  $\alpha_2 = 26,4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ?

3.7. Płyta miedziana ma powierzchnię  $S_1 = 10^{-2} \text{ m}^2$  w temperaturze  $T_1 = 283,16 \text{ K}$ . Obliczyć powierzchnię tej płyty  $S_2$  w temperaturze  $T_2 = 373,16 \text{ K}$ , jeśli dla miedzi  $\alpha = 16,8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

3.8. Obliczyć, o ile procent zmieni się moment bezwładności ciała z miedzi o  $\alpha = 16,8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ , jeżeli temperatura tego ciała zmieni się od  $T_1 = 300 \text{ K}$  do  $T_2 = 400 \text{ K}$ , a moment bezwładności w temperaturze równowagi lodu z wodą wynosi  $I_0 = 5 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

3.9. Płyta mosiężna w temperaturze  $T_1 = 283,16 \text{ K}$  ma objętość  $V_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ . O ile procent wzrośnie jej objętość, gdy temperatura jej wzrośnie do  $T_2 = 373,16 \text{ K}$ ? Dla mosiądzu  $\alpha = 18,9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

3.10. O ile mm rozszerzy się stalowa sztaba o długości  $l_1 = 1 \text{ m}$  w temperaturze  $T_1 = 283,16 \text{ K}$ , jeżeli jej temperatura wzrośnie do  $T_2 = 323,16 \text{ K}$ ? Jakie ciśnienie wywarłaby ta sztabka na swych końcach, gdybyśmy chcieli przeciwstawić się jej wydłużeniu? Dla stali  $\alpha = 11,9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ , a moduł Younga na wydłużenie  $E = 21,3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ .

3.11. Jakie ciśnienie styczne panuje w temperaturze  $T_1 = 373,16 \text{ K}$  między cynkiem a żelazem na końcach spojenia bimetalu złożonego z cynku i żelaza, jeżeli sporządzono go w temperaturze  $T_0$ ? Dla cynku  $\alpha_{\text{Zn}} = 26,4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ , dla żelaza  $\alpha_{\text{Fe}} = 12,1 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ , moduły Younga na wydłużenie dla żelaza  $E_{\text{Fe}} = 21,3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ , a dla cynku  $E_{\text{Zn}} = 9,81 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ .

3.12. Drut stalowy o polu przekroju  $S = 10^{-6} \text{ m}^2$  oraz  $\alpha = 11,9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  obciążony jest w temperaturze  $T_0$  ciężarem  $F = 981 \text{ N}$ , a następnie ogrzewany do temperatury  $T_1 = 373,16 \text{ K}$ . O ile należy zmniejszyć ciężar  $F$ , aby długość drutu pod wpływem ogrzewania nie uległa zmianie? Moduł Younga na wydłużenie dla stali  $E = 21,3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ .

3.13. W temperaturze  $T = 303,16 \text{ K}$  probówka ma objętość  $V = 56 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ . Jaką będzie miała objętość w temperaturze  $T_1 = 473,16 \text{ K}$ ? Dla szkła  $\gamma = 0,23 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ .

3.14. Do szklanego dylatometru dokładnie wyskalowanego w temperaturze  $T_0$  wlano naftę. W tej temperaturze dylatometr wskazuje objętość nafty  $V_0 = 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ ; w temperaturze zaś  $T = 323,16 \text{ K}$  wskazuje objętość  $V = 52 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ . Dla szkła  $\alpha = 0,23 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ . Obliczyć  $\gamma$  dla nafty.

3.15. Jedno ramię rurki w kształcie litery U ma temperaturę  $T_1 = 283,16 \text{ K}$ , a drugie — temperaturę  $T_2 = 293,16 \text{ K}$ . Rurka wypełniona jest oliwą. W ramieniu zimniejszym słupek oliwy wznosi się do wysokości  $w_1 = 0,3 \text{ m}$ . Obliczyć wysokość słupka oliwy w ramieniu cieplejszym, jeżeli dla oliwy  $\gamma = 7,4 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ .

3.16. Wysokość słupka rtęci w barometrze rtęciowym wynosi  $w = 775 \text{ mm}$ . Temperatura sali, w której on wisi,  $T = 298,16 \text{ K}$ . Na jaką

wysokość wzniosłaby się rtęć w tym barometrze, gdyby temperatura sali spadła do  $T_0$ ? Dla rtęci  $\gamma = 18,8 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ . Rozszerzalność szkła zaniedbujemy.

3.17. Barometr wskazuje ciśnienie  $p_1 = 1,003 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  w temperaturze  $T_1 = 284,16 \text{ K}$ . Jaka byłaby wysokość słupka rtęci w barometrze w tych samych warunkach atmosferycznych, lecz w temperaturze  $T_0$ ? Dla rtęci  $\alpha = 18,8 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ . Rozszerzalność szkła pomijamy.

3.18. O ile procent zmieni się prędkość wypływu alkoholu metylowego wypływającego z naczynia kwarcowego ( $\gamma = 0$ ) pod wpływem własnego ciśnienia, jeżeli otwór znajduje się na głębokości  $w = 0,5 \text{ m}$ , a temperatura zmieniła się od  $T_1 = 283,16 \text{ K}$  do  $T_2 = 333,16 \text{ K}$ ? Dla alkoholu metylowego  $\gamma = 0,0014 \text{ K}^{-1}$ .

### 3.2. KALORYMETRIA

We wszelkich rozważaniach z dziedziny kalorymetrii przyjmujemy, że pomiary przeprowadzamy w układzie zamkniętym. Możemy więc zawsze stosować zasadę zachowania energii, którą w przypadku kalorymetrii nazywamy *bilansem cieplnym*. W takim układzie suma energii cieplnej nie ulega zmianie: jeżeli jedne ciała tracą energię cieplną, to drugie ją zyskują, tak że zawsze *straty energii cieplnej ciał wchodzących w skład układu są równe zyskom energii cieplnej ciał wchodzących w skład układu*.

W zadaniach wchodzących w zakres kalorymetrii posługujemy się tylko dwoma wzorami:

1. Jeden z nich określa ilość energii cieplnej dostarczonej lub odebranej ciału, powodującą tylko zmianę temperatury tego ciała

$$Q = mc \Delta T, \quad (3.5)$$

gdzie  $m$  wyrażamy w kg,  $c$  wyrażamy w  $\text{J/kg} \cdot \text{K}$ ,  $\Delta T$  wyrażamy w deg,  $Q$  wyrażamy w J.

2. Drugi z nich określa ilość energii cieplnej potrzebnej do zmiany stanu danego ciała, bez zmiany jego temperatury

$$Q = mq, \quad (3.6)$$

gdzie  $m$  wyrażamy w kg,  $q$  wyrażamy w  $\text{J/kg}$ ,  $Q$  wyrażamy w J.

Uwagi do zapamiętania:

1. Najbardziej zakorzenionym błędem wśród studentów jest w tej dziedzinie zagadnienie wiążące się z pytaniem: „Co się dzieje z lodem



znajdującym się w temperaturze np. 253 K, gdy dostarczamy mu energii cieplnej?”

Powszechna odpowiedź brzmi: „Lód się topi“.

Zapominają oni prawie stale o przemianach stanu. W celu uniknięcia tego błędu, należy starannie powtórzyć zadanie 3.19.

2. Należy zapamiętać, że

$$1 \text{ cal} = 4,1868 \text{ J}, \quad (3.7)$$

a w skrócie (w zadaniach)

$$1 \text{ cal} = 4,19 \text{ J}. \quad (3.8)$$

3. W kalorymetrii wprowadzony został konsekwentnie układ jednostek SI. Dlatego jednostką ciepła właściwego danego ciała będziemy nazywali ilość energii potrzebnej do ogrzania 1 kg tego ciała o  $\Delta T = 1 \text{ deg}$

$$[c] = \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right]. \quad (3.9)$$

Warto tu zapamiętać wartości ciepła właściwego wody oraz lodu, podane we wstępie.

4. Jednostką ciepła przemiany będziemy nazywali ilość energii (J) potrzebną do przemiany 1 kg ciała w stałej temperaturze przemiany

$$[q] = \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]. \quad (3.10)$$

Warto tu zapamiętać, ile wynosi ciepło krzepnięcia wody oraz ciepło parowania wody podane we wstępie.

Zadania w tym rozdziale są częściowo zadaniami typu szkolnego. Ze względu jednak na to, że przemysł nie produkuje jeszcze termometrów ze skalą Kelvina, a podręczniki ogólne oraz tablice fizyczne nie podają przeliczonych danych na układ jednostek SI, pozostawiono jeszcze w tym wydaniu ten rozdział bez zmian. Przerobienie bowiem tych zadań pomoże każdemu do lepszego przyswojenia sobie układu SI w tej dziedzinie.

## Zadania

3.19. Podać obliczenie ilości ciepła potrzebnego do zamiany  $10^{-2} \text{ kg}$  lodu o temperaturze 243,16 K w parę o temperaturze 373,16 K. Ponadto, podać wykres zależności temperatury dostarczonego lodowi ciepła. Ciepło

właściwe lodu  $c_1 = 2092,8 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , wody  $c_2 = 4185,6 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , ciepło właściwe topnienia lodu  $q_1 = 3,33 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ , ciepło parowania wody  $q_2 = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ .

3.20. Czy można czerpać ciepło z ciała o temperaturze zera bezwzględnego?

3.21. Do mieszaniny wody z lodem, o masie  $m_1 = 0,2 \text{ kg}$ , wpuszczamy parę wodną o masie  $m_2 = 0,015 \text{ kg}$  i temperaturze  $T_2 = 373,16 \text{ K}$ . Po ustaleniu się równowagi termicznej temperatura wody podniosła się do  $T = 273,56 \text{ K}$ . Ile było lodu w wodzie? Ciepło parowania wody  $q_1 = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ , ciepło topnienia lodu  $q_2 = 3,33 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ , ciepło właściwe wody  $c = 4185,6 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ .

3.22. Ile kg śniegu o temperaturze  $T_1 = 258,16 \text{ K}$  można stopić ilością  $m = 2 \text{ kg}$  pary wodnej o temperaturze  $T_2 = 373,16 \text{ K}$ ? Ciepło parowania wody  $q_1 = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ , ciepło topnienia lodu  $q_2 = 3,33 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ , ciepło właściwe lodu  $c = 2092,8 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ .

3.23. Do naczynia zawierającego  $m = 6 \text{ kg}$  wody, pół na pół z lodem, wpuszczono parę wodną o temperaturze  $T_1 = 373,16 \text{ K}$ . Ile kg pary wodnej wpuszczono, jeżeli równowaga termiczna została ustalona w temperaturze  $T = 313,16 \text{ K}$ ? Ciepło topnienia lodu  $q_1 = 3,33 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ , ciepło parowania wody  $q_2 = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ , ciepło właściwe wody  $c = 4185,6 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ .

3.24. Ile trzeba wlać wrzącej wody o temperaturze  $T_1 = 373,16 \text{ K}$ , aby mieszanina  $m_1 = 0,6 \text{ kg}$  lodu oraz  $m_2 = 0,8 \text{ kg}$  wody, będąca w równowadze termicznej, została doprowadzona do temperatury  $T = 293,16 \text{ K}$ ? Ciepło właściwe wody  $c = 4185,6 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , ciepło topnienia lodu  $q = 3,33 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ .

3.25. W mosiężnym kalorymetrze o masie  $m = 0,152 \text{ kg}$ , zawierającym  $m_1 = 0,2902 \text{ kg}$  wody, skroplono  $m_2 = 0,02171 \text{ kg}$  pary alkoholu w mosiężnej wężownicy o masie  $m_3 = 0,1205 \text{ kg}$  w temperaturze wrzenia alkoholu  $T_1 = 351,46 \text{ K}$ . Początkowa temperatura kalorymetru wynosiła  $T_2 = 288,16 \text{ K}$ , a końcowa  $T_3 = 303,96 \text{ K}$ , ciepło właściwe mosiądzu  $c_1 = 3,85 \cdot 10^2 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , ciepło właściwe alkoholu  $c_2 = 2,24 \cdot 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ . Obliczyć ciepło parowania alkoholu.

3.26. Do mosiężnego kalorymetru o masie  $m_1 = 0,12 \text{ kg}$ , zawierającego  $m_2 = 0,45 \text{ kg}$  wody o temperaturze  $T_1 = 288,16 \text{ K}$ , wprowadzono  $m_3 = 0,01705 \text{ kg}$  pary wodnej o temperaturze  $T_2 = 373,16 \text{ K}$ . Równowaga termiczna ustaliła się w temperaturze  $T = 310,46 \text{ K}$ . Ciepło właściwe mosiądzu  $c_1 = 3,85 \cdot 10^2 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ . Obliczyć ciepło parowania wody.

**3.27.** Kalorymetr miedziany o masie  $m_1 = 0,1$  kg zawiera  $m_2 = 1$  kg wody o temperaturze  $T_1 = 288,16$  K. Do tego kalorymetru wrzucamy  $m_3 = 0,07545$  kg lodu o temperaturze  $T_0$ . Po ustaleniu się równowagi termicznej końcowa temperatura wyniosła  $T = 281,56$  K. Ciepło właściwe miedzi wynosi  $c_1 = 3,89 \cdot 10^2$  J/kg·K. Obliczyć ciepło topnienia lodu.

**3.28.** Zmieszano  $m_1 = 0,3$  kg lodu o temperaturze  $T_0$  oraz  $m_1 = 1,8$  kg wody o temperaturze  $T_1 = 283,16$  K. Do tej mieszaniny wpuszczono  $m_3 = 0,15$  kg pary wodnej o temperaturze  $T_2 = 373,16$  K. Ciepło topnienia lodu  $q_1 = 3,33 \cdot 10^5$  J/kg, ciepło parowania wody  $q_2 = 2,26 \cdot 10^6$  J/kg. Obliczyć końcową temperaturę powstałej wody.

**3.29.** Naczynie kalorymetru miedzianego waży  $m_1 = 0,1$  kg i zawiera  $m_2 = 0,7$  kg wody o temperaturze  $T_1 = 288,16$  K. Do małego miedzianego naczynka o masie  $m_3 = 0,02$  kg wlewamy  $m_4 = 0,096$  kg oliwy i umieszczamy go w kąpeli wrzącej wody. Po osiągnięciu równowagi termicznej naczynko z oliwą umieszczamy w kalorymetrze. Po ustaleniu się z kolei równowagi termicznej w kalorymetrze końcowa temperatura kalorymetru wynosi  $T = 293,36$  K. Ciepło właściwe miedzi  $c_1 = 3,89 \cdot 10^2$  J/kg·K. Obliczyć ciepło właściwe oliwy.

**3.30.** Kawalek lodu o masie  $m_1 = 0,03$  kg oraz o temperaturze  $T_1 = 245,66$  K wrzucono do kalorymetru o równoważniku wodnym  $R = 20,93$  J/K, zawierającego  $m_2 = 0,1$  kg wody o temperaturze  $T_2 = 308,16$  K. Po ustaleniu się równowagi termicznej temperatura końcowa wyniosła  $T = 279,66$  K. Ciepło topnienia lodu  $q = 3,33 \cdot 10^5$  J/kg. Obliczyć ciepło właściwe lodu.

**3.31.** Jeden kilogram żelaza o temperaturze  $T = 293,16$  K umieszczono w strumieniu suchej pary wodnej o temperaturze  $T_1 = 373,16$  K aż do zupełnego nagrzania się żelaza. Ile skropliło się pary wodnej na tym żelazie? Ciepło właściwe żelaza  $c = 4,60 \cdot 10^2$  J/kg·K, ciepło parowania wody  $q = 2,26 \cdot 10^6$  J/kg.

**3.32.** Ile kilogramów lodu o temperaturze  $T = 263,16$  K należy wrzucić do wody o temperaturze  $T_1 = 353,16$  K oraz masie  $m = 0,3$  kg, aby oziębic ją do temperatury  $T_2 = 283,16$  K? Ciepło właściwe lodu  $c_1 = 2092,8$  J/kg·K, ciepło topnienia lodu  $q = 3,33 \cdot 10^5$  J/kg.

**3.33.** Obliczyć wydajność procentową pieca odlewniczego, w którym do odlania  $m = 7 \cdot 10^3$  kg wyrobów z żeliwa zużyto  $m_1 = 1,1 \cdot 10^3$  kg koksu. Początkowa temperatura żeliwa wynosiła  $T_0$ , ciepło właściwe żeliwa  $c_1 = 4,60 \cdot 10^2$  J/kg·K, ciepło topnienia żeliwa  $q = 2,30 \cdot 10^4$  J/kg,

temperatura topnienia żeliwa  $T_1 = 1808,16\text{ K}$ , wartość opałowa koksu  $q_2 = 2,93 \cdot 10^4\text{ J/kg}$ .

**3.34.** Do bryły lodu, znajdującej się w równowadze termicznej z wodą, wlano  $m = 30\text{ kg}$  roztopionego żelaza, znajdującego się w temperaturze jego topnienia  $T = 1808,16\text{ K}$ . Ciepło właściwe żelaza  $c_1 = 4,60 \cdot 10^2\text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , ciepło topnienia żelaza  $q_1 = 2,30 \cdot 10^4\text{ J/kg}$ , ciepło topnienia lodu  $q_2 = 3,33 \cdot 10^5\text{ J/kg}$ . Ile lodu uległo stopnieniu?

**3.35.** Ile było kilogramów wody o temperaturze  $T_1 = 293,16\text{ K}$ , jeżeli kosztem spalania  $m = 1\text{ kg}$  węgla woda w całości wyparowała wskutek pobrania ciepła (zakładając, że połowa uzyskanego ciepła ze spalania węgla została pochłonięta przez wodę)? Ciepło spalania węgla wynosi  $q = 25,1 \cdot 10^3\text{ J/kg}$ , ciepło parowania wody  $q_1 = 2,26 \cdot 10^6\text{ J/kg}$ .

**3.36.** Wymiary pokoju są  $5\text{ m} \times 4\text{ m} \times 3\text{ m}$ . Ile ciepła trzeba dostarczyć, aby temperatura powietrza w pokoju podniosła się o  $T = 1\text{ K}$ ? Masa właściwa powietrza w pokoju  $\rho = 1,29\text{ kg/m}^3$ , ciepło właściwe powietrza pod stałym ciśnieniem  $c_p = 100,5\text{ J/kg} \cdot \text{K}$ . Ogrzewanie się ścian zaniedbujemy. Ile wody można ogrzać o  $1\text{ K}$  tą samą ilością ciepła?

**3.37.** Naczynie o objętości  $V_0 = 0,51\text{ dm}^3$  zawiera  $m = 0,5\text{ kg}$  przechłodzonej wody do temperatury  $T_1 = 263\text{ K}$ . Obliczyć wzrost objętości mieszaniny wody i lodu wskutek eksplozyjnego skrzepnięcia wody.

**3.38.** Przez wrzucenie małego kawałka lodu wywołujemy skrzepnięcie wody w ilości  $m = 0,5\text{ kg}$ , która poprzednio została przechłodzona do temperatury  $T = 268,16\text{ K}$ . Ciepło krzepnięcia lodu  $q_1 = 3,33 \cdot 10^5\text{ J/kg}$ , ciepło właściwe lodu  $c_1 = 2092,8\text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , ciepło właściwe wody  $c_2 = 4185,6\text{ J/kg} \cdot \text{K}$ . Obliczyć, ile skrzepło wody przechłodzonej, jeżeli temperatura otoczenia wody wynosi  $T_0$ ?

**3.39.** Ile procent  $p$  wody przechłodzonej do temperatury  $T_1 = 265,16\text{ K}$  skrzepnie po wrzuceniu do niej znikomo małego kawałka lodu jako załączka? Ciepło krzepnięcia wody  $q = 3,33 \cdot 10^5\text{ J/kg}$ , ciepło właściwe lodu  $c_1 = 2092,8\text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , ciepło właściwe wody  $c_2 = 4185,6\text{ J/kg} \cdot \text{K}$ .

**3.40.** Do przechłodzonego fosforu o masie  $m_1 = 0,5\text{ kg}$  wrzucono mały kawałek stałego fosforu. Wskutek tego skrzepło  $m_2 = 0,05\text{ kg}$  przechłodzonego fosforu. Ciepło właściwe przechłodzonego fosforu wynosi  $c_1 = 858\text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , ciepło krzepnięcia fosforu  $q = 8,12 \cdot 10^4\text{ J/kg}$ . Ile stopni poniżej temperatury krzepnięcia przechłodzono fosfor? Ciepło właściwe stałego fosforu  $c_2 = 690,6\text{ J/kg} \cdot \text{K}$ .

**3.41.** Znając ciepło właściwe rtęci jako ciała stałego  $c_1 = 133,5\text{ J/kg} \cdot \text{K}$



oraz ołowiu  $c_2 = 126,4 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , obliczyć w przybliżeniu ich ciężary atomowe. Ciepło atomowe tych ciał  $c = 26,4 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ .

**3.42.** Wartości ciepła atomowego pierwiastków wchodzących w skład związków chemicznych są inne niż w stanie wolnym. Na przykład dla wodoru  $c_1 = 10,0 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ , dla tlenu  $c_2 = 16,7 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ , dla miedzi  $c_3 = 25,1 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ , dla siarki  $c_4 = 22,6 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ . Mając te dane obliczyć ciepło właściwe dla lodu oraz dla siarczanu miedzi o wzorze  $\text{CuSO}_4 + 5\text{H}_2\text{O}$ . Przyjmujemy ciężar atomowy miedzi 63,54, siarki 32,06, tlenu 16, a wodoru 1.

**3.43.** W dwutlenku węgla rozchodzi się fala dźwiękowa o częstotliwości 100 Hz z prędkością  $v_1 = 260 \text{ m/s}$ , fala dźwiękowa zaś o częstotliwości 1000 Hz z prędkością  $v_2 = 267 \text{ m/s}$ . Znaleźć procentowy spadek ciepła właściwego w stałej objętości, jeżeli w dwutlenku węgla panuje ciśnienie  $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ , a masa właściwa dwutlenku węgla  $\rho = 1,9767 \text{ kg/m}^3$ .

**3.44.** Jak wielka jest prędkość rozchodzenia się fal głosowych w helu, powietrzu oraz  $\text{CO}_2$  w warunkach normalnych?

**3.45.** Obliczyć prędkość rozchodzenia się fal głosowych w wodrze.

### 3.3. RÓWNANIA GAZÓW

Gazy rzeczywiste zachowują się podobnie jak gazy doskonałe, jeżeli tylko znajdują się pod małymi ciśnieniami oraz w temperaturze stosunkowo wysokiej w porównaniu z własną temperaturą krytyczną.

#### Równania gazów doskonałych

##### 1. Dla mola dowolnego gazu

$$pV = RT, \quad (3.11)$$

gdzie  $p$  oznacza ciśnienie wewnętrzne gazu,  $V$  — objętość gazu,  $T$  — temperaturę gazu,  $R$  — stałą gazów dla mola gazu. Oznaczenia te będą się stale powtarzały.

##### 2. Dla kilomola gazu

$$pV = BT, \quad \text{gdzie } B \text{ — stała gazu dla kilomola.} \quad (3.12)$$



### 3. Dla kilomola

$$pV = R'T, \quad \text{gdzie} \quad R' = 10^3 R/A, \quad (3.13)$$

$A$  – ciężar cząsteczkowy gazu,

$$pV = B'T, \quad \text{gdzie} \quad B' = B/A. \quad (3.14)$$

### 4. Dla $m$ kilogramów gazu

$$pV = mR'T, \quad (3.15)$$

$$pV = mB'T. \quad (3.16)$$

## Równania gazów rzeczywistych

W przypadku gazów, które nie spełniają powyższych warunków, właściwości ich odbiegają od właściwości gazów doskonałych. W celu dostosowania powyższych równań do gazów rzeczywistych wprowadzono empiryczne poprawki. Najstynniejsze z tych dostosowanych równań są równania Van der Waalsa, które podajemy poniżej:

#### 1. dla mola dowolnego gazu

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \quad (3.17)$$

#### 2. dla kilomola gazu

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = BT. \quad (3.18)$$

#### 3. dla kilograma gazu

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = R'T, \quad (3.19)$$

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = B'T. \quad (3.20)$$

#### 4. dla $m$ kilogramów gazu

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = mR'T, \quad (3.21)$$

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = mB'T, \quad (3.22)$$

gdzie  $a$  i  $b$  są stałymi charakterystycznymi dla danego gazu, dającymi poprawki na ciśnienie spowodowane oddziaływaniem cząsteczek gazu między sobą oraz na objętość własną cząsteczek.

**5. Temperatura inwersji  $T_i$**  gazu rzeczywistego jest to taka temperatura, powyżej której gaz rozprężając się adiabatycznie ogrzewa się. Gdy rozprężanie odbywa się w tej temperaturze, to podczas rozprężania adiabatycznego temperatura gazu nie ulega zmianie. Oziębianie następuje podczas rozprężania adiabatycznego tylko wtedy, gdy proces ten zachodzi w temperaturze niższej od temperatury inwersji

$$T_i = \frac{2a}{Rb}. \quad (3.23)$$

#### Uwagi do zapamiętania

Ze względu na to, że technicy nie zawsze posługują się takimi samymi oznaczeniami jak fizycy i często używana jest stała gazów w innych jednostkach aniżeli w jednostkach układu SI, należy przerobić dobrze zadanie pierwsze tego rozdziału oraz zapamiętać niektóre wartości stałej gazów. Bardzo ważne jest opanowanie działań na jednostkach, dlatego przy niektórych zadaniach działania te wykonamy bez uproszczeń.

#### Zadania

**3.46.** Stała gazów odgrywa zasadniczą rolę przy obliczaniu wyników z zakresu materiału objętego równaniem gazów. Jej wartość należy dobrze poznać. W celu nabrania sprawności w przeliczaniu należy obliczyć jej wartość dla masy 1 kg oraz 1 g, mola oraz kilomola, wyrażając jej wartość w  $\text{J/kg} \cdot \text{mol} \cdot \text{K}$ ;  $\text{kGm/kmol} \cdot \text{K}$ ;  $\text{kGm/mol} \cdot \text{K}$ ; litroatmosferach/ $\text{kmol} \cdot \text{K}$ ; litroatmosferach/ $\text{mol} \cdot \text{K}$ ;  $\text{kcal/kmol} \cdot \text{K}$ ;  $\text{kcal/mol} \cdot \text{K}$ .

**3.47.** Wyprowadzić równanie charakterystyczne gazów doskonałych dla mieszaniny gazów nie łączących się ze sobą chemicznie.

**3.48.** Znaleźć w warunkach normalnych wartość stałej gazów, ciężar właściwy oraz objętość właściwą dla jednego kilograma dwutlenku węgla  $\text{CO}_2$ .

**3.49.** W jakiej temperaturze pewna ilość gazu przyjmuje objętość  $V_1 = 0,136 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$  pod ciśnieniem  $p_1 = 9,86 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ , jeżeli w tem-

peraturze  $T = 281,16 \text{ K}$  oraz pod ciśnieniem  $p_2 = 10,00 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  przyjmuje ona objętość  $V_2 = 0,112 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ .

**3.50.** Obliczyć, w jakiej temperaturze ciśnienie gazu jest dwa razy większe aniżeli w temperaturze  $T = 290,16 \text{ K}$ , jeżeli gaz nie zmienia swej objętości.

**3.51.** Powietrze o temperaturze  $T_1 = 283,16 \text{ K}$ , znajdujące się pod ciśnieniem  $p_1 = 2,026 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ , ogrzano do temperatury  $T_2 = 473,16 \text{ K}$  w stałej objętości. Jakie będzie ciśnienie tego powietrza w końcowym stanie?

**3.52.** Butelkę z powietrzem wstawiono do wrzącej wody i po pewnej chwili zatkało szczelnie. Jaką prężność uzyska powietrze zawarte w tej butelce, jeżeli ostygnie ona do temperatury pokojowej  $T_1 = 293,16 \text{ K}$ ? Ciśnienie atmosferyczne powietrza  $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ . Rozszerzalność cieplną butelki zanedbujemy.

**3.53.** Obliczyć stałą gazów dla  $1 \text{ kg}$  powietrza, którego masa właściwa w warunkach normalnych wynosi  $\rho = 1,29283 \text{ kg/m}^3$ .

**3.54.** W zbiorniku o objętości  $V = 1,5 \text{ m}^3$  znajduje się powietrze. Temperatura otoczenia wynosi  $T = 303,16 \text{ K}$ : Ciśnienie gazu w zbiorniku wynosi  $p = 1,026 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ . Ile trzeba zużyć ciepła na ogrzanie tego powietrza do temperatury  $T_1 = 323,16 \text{ K}$ ? Ciepło właściwe powietrza przy stałej objętości wynosi  $c_v = 753,4 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , masa właściwa powietrza w warunkach normalnych  $\rho = 1,29283 \text{ kg/m}^3$ .

**3.55.** Dwie jednakowe kule z inwaru połączone cienką rurką o bardzo małej pojemności cieplnej (można ją zanedbać) zawierają powietrze w temperaturze pokojowej  $T = 293,16 \text{ K}$  pod ciśnieniem  $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ . Jedną z tych kul wstawiono do naczynia, zawierającego mieszaninę wody z lodem, znajdującą się w równowadze termicznej, a drugą wstawiono do naczynia z wrzącą siarką. Obliczyć stosunek, w jakim rozdzielają się masy powietrza w kulach oraz ciśnienie powietrza, które zapanuje w tych kulach po ustaleniu się równowagi termicznej wewnątrz nich. Temperatura wrzenia siarki  $T = 717,76 \text{ K}$ .

**3.56.** Gaz przyjmuje przy prężności  $p = 6,078 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  oraz w temperaturze  $T = 473,16 \text{ K}$  objętość  $V = 3,25 \text{ m}^3$ . Obliczyć dla tego gazu: a) ilość moli w nim zawartą, b) objętość, jaką zajmuje kilomol tego gazu w temperaturze  $T_1 = 288,16 \text{ K}$  pod ciśnieniem  $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ .

**3.57.** Ile waży  $V = 1 \text{ m}^3$  powietrza w temperaturze  $T = 303,16 \text{ K}$  przy stanie barometru  $p = 1,00 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ ? Ile wynosi objętość  $m = 1 \text{ kg}$  powietrza w tych warunkach? Ciężar właściwy powietrza w warunkach

normalnych wynosi  $\gamma = 12,6827 \text{ N/m}^3$ . Warunki normalne cechują ( $T_0, 1,013 \cdot 10^5$  paskali).

3.58. W zbiorniku znajduje się  $V = 1,5 \text{ m}^3$  powietrza o temperaturze  $T = 303,16 \text{ K}$ . Załączony do zbiornika manometr wykazuje nadciśnienie  $p_1 = 23,99 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2$ . Ciśnienie atmosferyczne wynosi  $p = 1,002 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ . Ile trzeba ciepła na ogrzanie tego gazu w stałej objętości do temperatury  $T_2 = 323,16 \text{ K}$ ? Ciepło właściwe powietrza w stałej objętości  $c_p = 753,4 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ . Objętość masy  $m = 1 \text{ kg}$  powietrza w warunkach normalnych wynosi  $V_0 = 0,773 \text{ m}^3/\text{kg}$ .

3.59. Bomba kalorymetryczna zawierająca  $V = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$  tlenu o temperaturze  $T = 289,16 \text{ K}$  pod ciśnieniem  $p = 16,208 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  została ogrzana prądem elektrycznym tak, że do tlenu doprowadzona została energia cieplna  $Q = 5,02 \cdot 10^4 \text{ J}$ . Jaka będzie końcowa temperatura oraz prężność gazu? Ciepło właściwe tlenu pod stałym ciśnieniem wynosi  $c_p = 912,5 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ .

3.60. Obliczyć ciśnienie powietrza w bańce powietrza znajdującej się na głębokości  $h = 1 \text{ m}$  pod powierzchnią wody, jeżeli promień bańki wynosi  $r = 2 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ , a na powierzchni wody panują warunki normalne. Jaką objętość miałaby ta bańka na powierzchni wody?

3.61. Normalnie koło samochodowe zawiera powietrze pod ciśnieniem  $1,8 \text{ atm}$  w temperaturze  $297 \text{ K}$ . Wskutek tarcia temperatura opon wzrasta podczas jazdy do  $307 \text{ K}$ . Obliczyć wzrost ciśnienia w oponie podczas jazdy, pomijając jej nieznaczny wzrost objętości.

3.62. Nurek, znajdując się w jeziorze na głębokości  $h = 50 \text{ m}$  wypuścił bańkę powietrza o objętości  $V = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ . Jaką objętość będzie miała ta bańka przy wypływie na powierzchnię, jeżeli temperatura na powierzchni wynosi  $293 \text{ K}$ , a ciśnienie  $1 \text{ atm}$ ?

3.63. Dwa identyczne naczynia, każde o kształcie naczyń połączonych, wypełnione rtęcią, podłączone są do identycznych zbiorników powietrza, mających możliwość wyrównywania ciśnień z otaczającym je powietrzem. Na początku ciśnienia były identyczne, potem jeden zbiornik wstawiono do cieczy o temperaturze  $T_1 = 273,16 \text{ K}$ , a drugi — do cieczy o temperaturze  $T_2$ . Wskutek tego powstała różnica ciśnień w zbiornikach  $\Delta p = 26,66 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2$ . Obliczyć temperaturę  $T_2$ , jeżeli ciśnienie w zbiorniku o temperaturze  $T_1$  wynosi  $p_1 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ .

3.64. Ile pozostało cząsteczek wodoru w  $\text{m}^3$ , jeżeli ciśnienie wodoru spadło od ciśnienia  $1 \text{ atm}$  do ciśnienia  $10^{-10} \text{ N/m}^2$ ?

3.65. Naczynie o objętości  $V = 2 \text{ dcm}^3$  zawiera  $m = 0,5 \text{ kg}$  wody



przegrzanej do temperatury 383 K. Obliczyć końcowe ciśnienie pary w naczyniu, które zapanuje po eksplozyjnym wyparowaniu wody (zaniedbać wpływ ciśnienia na temperaturę wrzenia wody).

3.66. Naczynie o objętości  $V_0 = 0,51 \text{ dcm}^3$  zawiera  $m = 0,5 \text{ kg}$  przefrzudzonej wody do temperatury  $T_1 = 263 \text{ K}$ . Jakie końcowe ciśnienie zapanuje w naczyniu wskutek eksplozyjnego skrzepnięcia wody założywszy, że naczynie jest nieściśliwe?

3.67. Znając stałe krytyczne dla benzenu: masa właściwa krytyczna  $\rho_c = 304 \text{ kg/m}^3$ , temperatura krytyczna  $T_c = 561,66 \text{ K}$ , ciśnienie krytyczne  $p_c = 79,54 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  — obliczyć z równania Van der Waalsa stałe  $R$ ,  $a$ ,  $b$ .

3.68. Obliczyć moduł ściśliwości dla gazu rzeczywistego stosującego się do równania Van der Waalsa. Temperatura gazu jest stała.

3.69. Obliczyć moduł ściśliwości dla gazu doskonałego. Temperatura gazu stała.

3.70. Obliczyć moduł ściśliwości dla gazu rzeczywistego przyjmując, że raz zachowuje się on jako gaz doskonały, a drugi raz — jako gaz rzeczywisty stosujący się do równania Van der Waalsa oraz porównać wyniki ze sobą.

3.71. Znaleźć stałe  $a$  i  $b$  równania Van der Waalsa dla  $\text{CO}_2$ , jeżeli jego ciśnienie krytyczne  $p_c = 73,85 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ , temperatura krytyczna  $T_c = 304,16 \text{ K}$ . Stała gazów  $R = 8,314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ .

3.72. Stałe  $a$  i  $b$  z równania Van der Waalsa dla tlenu wynoszą  $a = 0,1378 \text{ N} \cdot \text{m}^4/\text{mol}^2$ ,  $b = 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{mol}$ . Znaleźć wartości krytyczne  $p_c$ ,  $V_c$  oraz  $T_c$  dla tlenu oraz porównać je z wynikami otrzymanymi doświadczalnie. Stała gazów  $R = 8,314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ .

3.73. Obliczyć ciśnienie krytyczne oraz temperaturę krytyczną dla wody, jeżeli stałe Van der Waalsa wynoszą  $a = 0,5531 \text{ N} \cdot \text{m}^4/\text{mol}^2$ ,  $b = 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{mol}$ . Stała gazów  $R = 8,314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ .

3.74. Obliczyć masę właściwą  $\text{CO}_2$  w stanie krytycznym, jeżeli stała Van der Waalsa  $b = 4,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{mol}$ .

3.75. W jakiej temperaturze chlor o stałych Van der Waalsa  $a = 0,6577 \text{ N} \cdot \text{m}^4 \cdot \text{mol}^{-2}$  oraz  $b = 5,622 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$  zacznie się wskutek adiabatycznego rozprężania oziębiać?

3.76. Obliczyć temperaturę inwersji dla etanu o stałych Van der Waalsa  $a = 0,4529 \text{ N} \cdot \text{m}^4 \cdot \text{mol}^{-2}$  oraz  $b = 5,714 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ .

3.77. Obliczyć, ile ciepła odda mol chloru rozprężając się od ciśnienia  $p_1 = 101,3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  do ciśnienia  $p_2 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  w tempera-



turze  $T = 1000\text{ K}$ , jeżeli stałe Van der Waalsa dla tego gazu wynoszą  $a = 0,6577\text{ N}\cdot\text{m}^4\cdot\text{mol}^{-2}$  oraz  $b = 5,622\cdot 10^{-5}\text{ m}^3\cdot\text{mol}^{-1}$ .

**3.78.** Obliczyć, ile ciepła odda mol amoniaku rozprężając się od ciśnienia  $p_1 = 101,3\cdot 10^5\text{ N/m}^2$  do ciśnienia  $p_2 = 1,013\cdot 10^5\text{ N/m}^2$  w temperaturze  $T = 1000\text{ K}$ , jeżeli stałe Van der Waalsa dla tego gazu wynoszą  $a = 0,4224\text{ N}\cdot\text{m}^4\cdot\text{mol}^{-2}$  oraz  $b = 3,707\cdot 10^{-5}\text{ m}^3\cdot\text{mol}^{-1}$ .

**3.79.** W poniższej tabelce podana jest zależność ciśnienia pary nasyconej  $\text{CO}_2$  od temperatury

$T$ w K	273,16	283,16	293,16	303,16
$p_p$ w Tr	26 142	33 763	42 959	54 686

Obliczyć, ile kg  $\text{CO}_2$  wyparuje dodatkowo w temperaturze  $T = 303,16\text{ K}$  w porównaniu z ilością wyparowaną w temperaturze  $T_0$ .

**3.80.** W poniższej tabelce podana jest zależność ciśnienia pary nasyconej alkoholu etylowego  $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$  od temperatury

$T$ w K	273,16	278,16	283,16	288,16	293,16	298,16	303,16
$p_p$ w Tr	12,3	17,3	23,6	32,2	43,9	59,0	78,8

Obliczyć, ile kg alkoholu etylowego wyparuje dodatkowo w temperaturze  $T = 303,16\text{ K}$  w porównaniu z ilością wyparowaną w temperaturze  $T_0$ .

**3.81.** Wykieslić zależność ciśnienia pary nasyconej amoniaku w zakresie temperatur od  $T = 100\text{ K}$  do  $T = 200\text{ K}$ , wiedząc, że stałe wynoszą  $a = 31211\text{ K}$  oraz  $b = 9,9974$ .

**3.82.** Obliczyć ciśnienie pary nasyconej amoniaku w temperaturze  $T = 200\text{ K}$ , jeżeli stałe dla tej pary wynoszą  $a = 31211\text{ K}$  oraz  $b = 9,9974$ .

### 3.4 ROZTWORY, WILGOTNOŚĆ, PRZEWODZENIE CIEPŁA

**Prawo Raoult'a.** Na podstawie prawa Raoult'a otrzymujemy dogodny wzór do obliczania:

obniżenia temperatury krzepnięcia roztworu

$$-\Delta T = R \frac{m}{M} \frac{T^2}{Aq}, \quad (3.24)$$

$$+\Delta T = R \frac{m}{M} \frac{T^2}{Aq}, \quad (3.25)$$

w porównaniu z czystym rozpuszczalnikiem.  $m$  oznacza ilość (kg) ciała rozpuszczonego,  $A$  — ciężar cząsteczkowy ciała rozpuszczonego,  $M$  — ilość (kg) rozpuszczalnika,  $T$  — temperaturę krzepnięcia lub wrzenia czystego rozpuszczalnika,  $q$  — energię cieplną wydzielaną przy krzepnięciu względnie parowaniu czystego rozpuszczalnika,  $R$  — stałą gazów

$$R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}. \quad (3.26)$$

**Wilgotność względna.** Oznaczmy przez  $m$  ilość pary wodnej znajdującej się w  $1 \text{ m}^3$  powietrza, przez  $p$  — ciśnienie tej pary wodnej, przez  $M$  — ilość pary wodnej (jaką zawierałby  $1 \text{ m}^3$  powietrza nasyconego parą wodną w tej samej temperaturze), a przez  $P$  — ciśnienie pary wodnej nasyconej w tej temperaturze. Na wilgotność względną, wyrażoną w procentach, otrzymujemy wzór

$$W = \frac{p}{P} 100\% = \frac{m}{M} 100\%. \quad (3.27)$$

**Łość ciepła przewodzonego przez pręt.** Jeżeli przez  $Q$  oznaczmy ilość energii cieplnej przewodzonej w czasie  $t$  przez pręt (ciało) o długości  $l$  oraz powierzchni przekroju  $S$ , gdy na końcach tego pręta panuje różnica temperatur  $\Delta T$ , a przez  $\lambda$  oznaczmy współczynnik przewodnictwa cieplnego danego materiału, to na  $Q$  otrzymujemy wzór

$$Q = \lambda S \tau \frac{\Delta T}{l}. \quad (3.28)$$

Jednostką  $\lambda$  jest  $[\lambda] = \frac{\text{J}}{\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}}$ , a więc przewodnictwo takiego ciała, które przy różnicy temperatur  $1 \text{ K}$  w czasie  $1 \text{ s}$  przewodzi przez pręt (zrobiony z tego ciała) o długości  $1 \text{ m}$  i powierzchni przekroju  $1 \text{ m}^2$  — energię cieplną  $1 \text{ J}$ .

**Uwaga.** Wiele zadań z przewodnictwa gazów umieszczono w następnym rozdziale.

## Zadania

3.83. O ile stopni obniży się temperatura krzepnięcia roztworu soli kuchennej w wodzie, jeżeli rozpuścimy  $m = 0,02$  kg NaCl w  $V = 10^{-3}$  m<sup>3</sup> wody, a obniżenie cząsteczkowe dla wody wynosi  $\Delta T = 18,5$  K? Ciężar cząsteczkowy soli kuchennej wynosi  $S = 58,46$ .

3.84. Roztwór  $m = 0,01$  kg cukru w objętości  $V = 10^{-3}$  m<sup>3</sup> wody zamarza w temperaturze  $T = 273,106$  K. Jeżeli w masie  $m_1 = 0,1$  kg wody rozpuścimy mol cukru, to obniżenie temperatury, tzw. obniżenie cząsteczkowe, wynosi  $\Delta T = 18,5$  K. Z tych danych obliczyć ciężar cząsteczkowy cukru.

3.85. Roztwór  $m = 0,005$  kg pewnego związku chemicznego w  $m_1 = 0,1$  kg eteru etylowego wrze w temperaturze o  $T = 1,89$  K wyższej od temperatury wrzenia czystego eteru, która wynosi  $T = 307,76$  K. Obliczyć ciężar cząsteczkowy ciała rozpuszczonego w eterze. Ciepło parowania czystego eteru etylowego  $q = 3,51 \cdot 10^5$  J/kg.

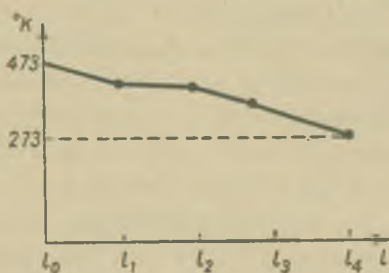
3.86. W sali o rozmiarach  $5 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 5 \text{ m}$  znajduje się wilgotne powietrze o temperaturze  $T_1 = 293,16$  K. Rosa tworzy się w temperaturze  $T_2 = 278,16$  K. Masa właściwa powietrza atmosferycznego w warunkach normalnych  $\rho = 1,293$  kg/m<sup>3</sup>, ciśnienie nasyconej pary wodnej w temperaturze  $T_2$  wynosi  $p_2 = 871,8$  N/m<sup>2</sup>, masa właściwa pary wodnej względem powietrza  $\rho = 0,662$ . Obliczyć ilość kilogramów pary wodnej znajdującej się w tej sali.

3.87. W powietrzu o temperaturze  $T_1 = 298,16$  K tworzy się rosa w temperaturze  $T_2 = 278,16$  K. Masa właściwa pary wodnej względem powietrza  $\rho = 0,662$ , masa właściwa powietrza atmosferycznego w warunkach normalnych wynosi  $\rho = 1,293$  kg/m<sup>3</sup>, ciśnienie nasyconej pary wodnej w temperaturze  $T_1$  wynosi  $p_1 = 3167$  N/m<sup>2</sup>, w temperaturze zaś  $T_2$  wynosi  $p_2 = 871,8$  N/m<sup>2</sup>. Obliczyć wilgotność względną oraz bezwzględną tego powietrza.

3.88. Obliczyć ilość przewodzonego ciepła przez ścianę mieszkania w zimie w czasie  $t = 12$  godzin, jeżeli przewodnictwo cieplne ściany  $\lambda = 837,12 \cdot 10^{-3}$  J/m $\cdot$ s $\cdot$ K, grubość ściany  $d = 0,25$  m oraz powierzchnia ściany  $S = 12$  m<sup>2</sup>. Temperatura w mieszkaniu  $T_1 = 293,16$  K, a na zewnątrz  $T_2 = 253,16$  K. Ile należy spalić węgla w celu wyrównania ubytku ciepła przez przewodnictwo zakładając, że tylko 20% ciepła dostarczonego przez spalanie węgla idzie na wyrównanie tego braku. Ze spalania 1 kg węgla otrzymujemy  $2,51 \cdot 10^7$  J.

3.89. Naczynie szklane o powierzchni  $S = 10^{-2} \text{ m}^2$ , zawierające mieszaninę lodu z wodą w równowadze termicznej, pozostawiono w pokoju o temperaturze  $T_1 = 291,16 \text{ K}$ . Wiedząc, że każdy  $\text{m}^2$  powierzchni szkła traci przy różnicy temperatur  $\Delta T = 1 \text{ K}$  w każdej sekundzie ilość energii cieplnej  $Q = 10,88 \text{ J/m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{K}$ , obliczyć ilość stopionego lodu w tym naczyniu w czasie  $\tau = 20 \text{ min}$ . Ciepło topnienia lodu  $q = 3,33 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ .

3.90. Zakładając proporcjonalny spadek temperatury wzdłuż pręta złożonego z czterech równych pod względem geometrycznym prętów: żelaznego, miedzianego, cynkowego i niklowego (rys. 3.1), podać rozkład temperaturowy na końcach poszczególnych prętów.  $T_0 = 473 \text{ K}$ ,  $T_k = 273 \text{ K}$ ,  $\lambda_{\text{Fe}} = \lambda_{\text{Zn}} = 62,79 \text{ J/m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}$ ,  $\lambda_{\text{Cu}} = 376,74 \text{ J/m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}$  oraz  $\lambda_{\text{Ni}} = 54,42 \text{ J/m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}$ .



Rys. 3.1

3.91. W piecu o wysokiej temperaturze umieszczono próbkę w kształcie sześciangu, o krawędzi  $a$  w temperaturze topnienia materiału próbki. Próbka pobiera ciepło w jednostce czasu proporcjonalnie do swej powierzchni. Współczynnik proporcjonalności wynosi  $k$ , masa właściwa materiału próbki  $\rho$ , ciepło topnienia materiału próbki  $q$ . Obliczyć czas potrzebny do stopienia tej próbki.

### 3.5. TEORIA KINETYCZNA MATERII

**Rozkład Maxwella.** Cząsteczki dowolnego gazu w dowolnej temperaturze  $T$  przyjmują zawsze prędkości od wartości  $v = 0$  do wartości  $v = c$  (prędkości światła). Maxwell wyprowadził wzór na liczbę cząste-

czek  $\Delta n$  znajdujących się w przedziale prędkości  $u$  oraz  $u + \Delta u$ . Jeżeli liczbę wszystkich cząsteczek oznaczymy przez  $n$ , to

$$\Delta n = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u n. \quad (3.29)$$

Do obliczania zadań opartych na rozkładzie Maxwella dobrze jest znać wartość całek

$$\int_0^{\infty} e^{-px^2} x^{2a} dx = \frac{(2a-1)!}{2(2p)^a} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad \text{dla } p > 0, \quad (3.30)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-p^2 x^2}}{x^{2a}} dx = \frac{(-1)^a p^{2a-1} 2^{a-1} \sqrt{\pi} [1 - \Phi(pu)]}{(2a-1)!} +$$

$$+ \frac{e^{-p^2 u^2}}{2u^{2a-1}} \sum_{k=0}^{a-1} \frac{(-1)^k 2^{k+1} (pu)^{2k}}{(2a-1)(2a-3)\dots(2a-2k-1)},$$

gdzie wyraz

$$\Phi(pu) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{pu} e^{-t^2} dt, \quad (3.31)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (3.32)$$

Ciśnienie gazu o masie właściwej  $\rho$ , jeżeli średni kwadrat prędkości cząsteczek tego gazu wynosi  $\bar{v}^2$ , obliczyć można z wzoru

$$p = \frac{1}{3} \rho \bar{v}^2. \quad (3.33)$$

Średnią energię kinetyczną cząsteczki gazu o masie  $m$  znajdującego się w temperaturze  $T$  określamy wzorem

$$\bar{E} = f \frac{kT}{2}, \quad (3.34)$$

gdzie  $f$  oznacza ilość stopni swobody cząsteczek tego gazu, a  $k$  — tzw. stałą Boltzmann

$$k = \frac{R}{N} = \frac{8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}. \quad (3.35)$$



**Średnia droga swobodna** cząsteczki gazu, gdy  $\sigma$  oznacza średnicę cząsteczki oraz  $n$  — liczbę cząsteczek danego gazu w  $\text{m}^3$ , wyraża się wzorem

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n}. \quad (3.36)$$

**Napięcie powierzchniowe.** Pracę  $dE$ , którą należy wykonać, aby zwiększyć powierzchnię swobodną cieczy o  $dS$ , jeżeli jej napięcie powierzchniowe wynosi  $T$ , obliczamy z wzoru

$$dE = T dS. \quad (3.37)$$

Jeżeli powierzchnia cieczy ma promienie krzywizny  $r_1$  i  $r_2$  oraz jej napięcie powierzchniowe wynosi  $T$ , to ciśnienie dodatkowe (dodatnie lub ujemne) na powierzchnię cieczy, wynikające z działania tego napięcia powierzchniowego i działające na tę powierzchnię, można obliczyć z wzoru

$$p = \left( \frac{T}{r_1} + \frac{T}{r_2} \right), \quad (3.38)$$

a jeżeli promienie krzywizn są jednakowe, to

$$p = \frac{2T}{r}. \quad (3.39)$$

## Zadania

**3.92.** W pewnej objętości znajduje się  $n_1 = 10^{18}$  cząsteczek o prędkości  $v_1 = 50$  m/s,  $n_2 = 5 \cdot 10^{18}$  cząsteczek o prędkości  $v_2 = 100$  m/s,  $n_3 = 10 \cdot 10^{18}$  cząsteczek o prędkości  $v_3 = 150$  m/s,  $n_4 = 20 \cdot 10^{18}$  cząsteczek o prędkości  $v_4 = 200$  m/s,  $n_5 = 5 \cdot 10^{18}$  cząsteczek o prędkości  $v_5 = 300$  m/s,  $n_6 = 1 \cdot 10^{18}$  cząsteczek o prędkości  $v_6 = 400$  m/s,  $n_7 = 0,5 \cdot 10^{18}$  cząsteczek o prędkości  $v_7 = 500$  m/s. Znaleźć średnią prędkość oraz pierwiastek ze średniego kwadratu prędkości cząsteczek tego gazu oraz porównać te wyniki ze sobą.

**3.93.** Podać wartość najbardziej prawdopodobnej prędkości  $v_p$  w temperaturze  $T$ .

**3.94.** Obliczyć najbardziej prawdopodobną prędkość średnią kwadratową cząsteczek w temperaturze  $T$ .

3.95. Podać najbardziej prawdopodobną wartość prędkości względnej w danej temperaturze  $T$ .

3.96. Obliczyć prędkość prawdopodobną, średnią arytmetyczną oraz średnią kwadratową dla wodoru w temperaturze pokojowej, a więc w przybliżeniu  $T = 300\text{ K}$ .

3.97. Podczas wybuchu bomby wodorowej powstaje temperatura około  $3 \cdot 10^5\text{ K}$ . Podać średnią prędkość wolnych protonów oraz wolnych neutronów znajdujących się w tej temperaturze.

3.98. Obliczyć średnią wartość energii kinetycznej cząsteczek, przypadającą na jeden stopień swobody na podstawie wzoru Maxwella.

3.99. Podać najbardziej prawdopodobną wartość energii kinetycznej w danej temperaturze  $T$ .

3.100. Obliczyć energię kinetyczną mola dowolnego gazu trój- lub więcej atomowego znajdującego się w temperaturach  $T_1 = 73,16\text{ K}$ ,  $T_2 = 173,16\text{ K}$ ,  $T_3 = T_0$ ,  $T_4 = 373,16\text{ K}$ ,  $T_5 = 473,16\text{ K}$ .

3.101. Znaleźć średnią energię kinetyczną cząsteczek gazu znajdującego się w temperaturze  $T_1 = 173,16\text{ K}$ ,  $T_2 = T_0$ ,  $T_3 = 373,16\text{ K}$  oraz  $T_4 = 1273,16\text{ K}$ . Wyniki wyrazić również w eV.

3.102. Wykreślić zależność średniej prędkości cząsteczek tlenu od temperatury w zakresie temperatur od  $T = 173,16\text{ K}$  do  $T_1 = 1273,16\text{ K}$ .

3.103. Znaleźć średnią prędkość cząsteczek pary wodnej oraz  $\text{CO}_2$  w temperaturze  $T = 773,16\text{ K}$ , przyjmując je za gazy doskonałe.

3.104. Obliczyć średni kwadrat prędkości cząsteczek helu w temperaturze  $T = 3\text{ K}$ . Masa protonu  $m_p = 1,672 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$ .

3.105. Znaleźć liczbę cząsteczek o prędkości większej od prędkości względnej  $u_1 = 1,2u$ .

3.106. Obliczyć procent cząsteczek wodoru znajdującego się w temperaturze pokojowej  $T = 300\text{ K}$ , o prędkościach zawartych w przedziale  $\sqrt{v^2} \mp \Delta v$ , gdzie  $\Delta v = \sqrt{v^2} - v_p$ .

3.107. Obliczyć procent cząsteczek wodoru znajdującego się w temperaturze pokojowej  $T = 300\text{ K}$ , o prędkościach zawartych w przedziale  $\bar{v} \mp \Delta v$ , gdzie  $\Delta v = \bar{v} - v_p$ .

3.108. Dla dwutlenku węgla wartość ciepła właściwego przy stałej objętości wynosi  $c_v = 644,64\text{ J/kg}\cdot\text{K}$  oraz ciepło właściwe dla mola tego gazu w tych samych warunkach wynosi  $28464,8\text{ J/kmol}\cdot\text{K}$ . Obliczyć ciężar cząsteczkowy  $\text{CO}_2$  oraz masę cząsteczki  $\text{CO}_2$ .

3.109. Wyznaczyć średnice atomów i cząsteczek bromu, helu oraz wody, znajdujących się w stanie gazu, na podstawie znajomości stałej  $b$  Van der

Waalaa. Stałe te wynoszą  $b_{Br} = 45,29 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kmol}$ ,  $b_{He} = 23,70 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kmol}$ ,  $b_{H_2O} = 30,49 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kmol}$ .

**3.110.** W naczyniu o temperaturze  $T_1 = 273,16 \text{ K}$  jest rozrzedzone powietrze do ciśnienia  $p_1 = 1,013 \text{ N/m}^2$ . Jest ono połączone z drugim naczyniem o temperaturze  $T_2 = 323,16 \text{ K}$  wypełnionym również rozrzedzonym powietrzem. Obliczyć, w warunkach równowagi, ciśnienie panujące w drugim naczyniu.

**3.111.** Obliczyć temperaturę naczynia  $T_2$  połączonego z naczyniem o temperaturze  $T_1 = 273,16 \text{ K}$  wypełnionym powietrzem pod ciśnieniem  $p_1 = 0,1013 \text{ N/m}^2$ , jeżeli różnica ciśnień w obu naczyniach w warunkach równowagi ma wartość  $\Delta p = p_2 - p_1 = 0,0101 \text{ N/m}^2$ .

**3.112.** Obliczyć rzeczywistą drogę swobodną dla azotu w temperaturze  $T = 100 \text{ K}$  pod ciśnieniem normalnym, jeżeli stała Southerlanda dla azotu wynosi  $C = 102,7 \text{ K}$  oraz średnica cząsteczki azotu  $\sigma = 3,1 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ .

**3.113.** Obliczyć ciśnienie argonu  $p_1$ , pod którym średnia droga swobodna atomów wynosi  $\lambda_1 = 1,5 \cdot 10^8 \text{ m}$ , jeżeli pod ciśnieniem  $p_2 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  średnia droga swobodna tych atomów wynosi  $\lambda_2 = 3 \cdot 10^9 \text{ m}$ , a temperatury w obu przypadkach są takie same.

**3.114.** Obliczyć średnią drogę swobodną atomów helu o masie  $m = 36,44 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  w temperaturze  $T_1 = 273,16 \text{ K}$ , jeżeli jego lepkość wynosi  $\eta = 186,0 \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ .

**3.115.** Średnia droga swobodna azotu znajdującego się pod ciśnieniem jednej atmosfery fizycznej wynosi  $\lambda_1 = 6 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ . Pod jakim ciśnieniem powinien znajdować się azot, aby jego średnia droga swobodna wyniosła  $\lambda = 10^{-3} \text{ m}$ ?

**3.116.** Mamy termos o ściankach odległych od siebie o  $d = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ , pomiędzy którymi znajduje się wodór o temperaturze  $T = 293,16 \text{ K}$ . Średnica cząsteczek wodoru  $\sigma = 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ . Obliczyć, jakie może istnieć maksymalne ciśnienie pomiędzy ścianami naczynia, aby przewodnictwo tej warstwy wodoru było mniejsze od przewodnictwa wodoru znajdującego się pod ciśnieniem jednej atm.

**3.117.** Obliczyć ciśnienie, do którego należy odpompować powietrze w termosie, aby spełniał swą rolę jako naczynie chłodzące, jeżeli odległość ścianek termosu  $d = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  oraz średnica cząsteczki azotu  $\sigma = 3,1 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ .

**3.118.** Obliczyć średnią średnicę cząsteczek powietrza w temperaturze  $T_0$ , jeżeli stała Southerlanda dla powietrza wynosi  $C = 117 \text{ K}$ , a rzeczy-

wista średnia droga swobodna powietrza w tych warunkach wynosi  $\bar{\lambda} = 7 \cdot 10^{-8}$  m.

3.119. Znając rzeczywistą drogę swobodną dla tlenu  $\bar{\lambda} = 6,47 \cdot 10^{-8}$  m w temperaturze  $T = 273,16$  K pod ciśnieniem  $p = 1,013 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup>, obliczyć stałą Southerlanda  $C$ . Średnica atomu tlenu  $\sigma = 2,9 \cdot 10^{-10}$  m.

3.120. Znając współczynnik lepkości  $\eta = 87,4 \cdot 10^{-7}$  N·s/m<sup>2</sup> dla pary alkoholu etylowego oraz jego ciepło właściwe  $c_v = 1,7 \cdot 10^3$  J/kg·K obliczyć współczynnik przewodnictwa cieplnego tej pary.

3.121. Znając współczynnik dyfuzji dla alkoholu etylowego  $D = 0,102 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup> w temperaturze  $T_1 = 273,16$  K oraz  $D_2 = 0,137 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup> w temperaturze  $T_2 = 313,65$  K, obliczyć liczbę cząsteczek pary alkoholu etylowego w temperaturze  $T_2$ .

3.122. Znaleźć współczynnik dyfuzji wodoru w temperaturze  $T_0$ , jeżeli jego średnia droga swobodna w tej temperaturze wynosi  $\bar{\lambda} = 1,6 \cdot 10^{-7}$  m.

3.123. Znaleźć liczbę zderzeń cząsteczek w temperaturze  $T = 273,16$  K, jeżeli masa atomu helu  $m = 36,44 \cdot 10^{-31}$  kg, a średnia droga swobodna atomów w tych warunkach wynosi  $l = 6,13 \cdot 10^{-12}$  m.

3.124. Mając dany współczynnik dyfuzji dla wodoru  $D = 0,63 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup> w temperaturze  $T_0$  oraz masę właściwą wodoru  $\rho = 89,88$  kg·m<sup>-3</sup>, obliczyć jego współczynnik lepkości w tej temperaturze.

3.125. W roztworze wodnym kwasu siarkowego rozpadło się 80% cząsteczek kwasu siarkowego na jony  $H^+$ ,  $H^+$ ,  $SO_4^{--}$ . Obliczyć wzrost ciśnienia osmotycznego tego roztworu wskutek zaistniałej dysocjacji  $H_2SO_4$ .

3.126. Kropelka wody o promieniu  $r = 10^{-3}$  m, wisząca u wylotu skraplacza, oderwała się od niego i spadła na tarczę szklaną rozpryskując się na mniejsze kropelki, z których każda miała promień  $r_1 = 10^{-6}$  m. Opisać i przeliczyć przemianę energetyczną w tym zjawisku. Napięcie powierzchniowe wody  $T = 0,073$  N/m.

3.127. Z wysokości  $w = 0,3$  m spada kropelka wody o promieniu  $r = 5 \cdot 10^{-4}$  m. Zakładając, że  $n = 0,2$  części jej energii potencjalnej położenia idzie na wzrost energii kropelki wskutek jej rozprysnięcia się przy zderzeniu na  $n_1 = 50$  mniejszych kropelek, obliczyć promień powstałych kropelek, jeżeli każda z nich ma taki sam promień. Masa właściwa wody  $\rho = 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, napięcie powierzchniowe wody  $T = 0,073$  N/m.

3.128. Z rurki, zwężonej u wylotu, wypływa kropelka oliwy. Temperatura otoczenia  $T = 291,16$  K, napięcie powierzchniowe oliwy w tej tempera-

turze  $T' = 0,076 \text{ N/m}$ , średnica rurki u wylotu  $d = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ . Obliczyć masę odrywającej się kropelki.

**3.129.** Do naczynia, składającego się z dwóch połączonych ze sobą rurek (w kształcie litery U), o promieniach  $r_1 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  oraz  $r_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ , wlewo wodę. Różnica wysokości poziomów wody w tych rurekach wyniosła  $r = 2,25 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ . Obliczyć napięcie powierzchniowe wody.

**3.130.** Wewnątrz banieczki tlenu znajdującej się na głębokości  $h = 0,76 \text{ m}$  pod powierzchnią rtęci panuje ciśnienie  $p = 12,160 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ . Napięcie powierzchniowe rtęci wynosi  $T = 0,481 \text{ N/m}$ , ciśnienie atmosferyczne  $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ . Obliczyć promień tej banieczki.

### 3.6. TERMODYNAMIKA

**Mechaniczny równoważnik ciepła.** Ze względu na używanie w codziennej praktyce kalorii jako jednostki energii cieplnej należy jeszcze przez pewien czas używać pojęcia mechanicznego równoważnika ciepła oraz zapamiętać jego wartość

$$J = \frac{W}{Q} = 4,1856 \frac{\text{dżul}}{\text{cal}}, \quad (3.40)$$

$$\frac{1}{J} = 0,2389 \frac{\text{cal}}{\text{dżul}}. \quad (3.41)$$

**Pierwsza zasada termodynamiki** wyrażona jest zwykle w postaci

$$dW + dQ = dU, \quad (3.42)$$

gdzie  $dW$ ,  $dQ$ ,  $dU$  oznaczają nieskończenie małe zmiany ilości pracy, energii cieplnej oraz energii wewnętrznej danego gazu. Wszystkie te wielkości muszą być wyrażane w tych samych jednostkach.

**Zastosowanie pierwszej zasady termodynamiki**

**1. Do zjawiska izotermicznego** daje w wyniku

$$dU = 0, \quad \text{tzn.} \quad U = \text{const}. \quad (3.43)$$

**2. Do zjawiska izobarycznego**

$$C_p - C_v = R. \quad (3.44)$$



### 3. Do zjawiska izochorycznego

$$\Delta U = mc_v \Delta T. \quad (3.45)$$

### 4. Do zjawiska adiabatycznego

$$p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa}, \quad (3.46)$$

$$T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}, \quad (3.47)$$

$$\frac{p_1^{\kappa-1}}{T_1^{\kappa}} = \frac{p_2^{\kappa-1}}{T_2^{\kappa}}, \quad (3.48)$$

**5. Do zjawiska procesu politropowego.** Ciepło właściwe podczas takiego procesu jest wielkością stałą. Oznaczając, tak jak wyżej, dla mola gazu ciepło właściwe przez  $C$ , ciepło właściwe w stałej objętości przez  $C_v$ , a w stałym ciśnieniu przez  $C_p$  otrzymujemy równania politropy

$$p_1 V_1^{\frac{C_p-C}{C_v-C}} = p_2 V_2^{\frac{C_p-C}{C_v-C}}, \quad (3.49)$$

$$T_1 V_1^{\frac{C_p-C_v}{C_v-C}} = T_2 V_2^{\frac{C_p-C_v}{C_v-C}}, \quad (3.50)$$

$$\frac{T_1^{\frac{C_p-C}{C_p-C_v}}}{p_1} = \frac{T_2^{\frac{C_p-C}{C_p-C_v}}}{p_2}. \quad (3.51)$$

Praca w zjawisku izotermicznym może być wyrażona wzorem

$$W = m \frac{R}{A} T \ln \frac{V_1}{V_2}, \quad (3.52)$$

gdzie  $n$  oznacza ilość kg gazu,  $A$  — jego ciężar atomowy (cząsteczkowy),  $T$  — jego temperaturę, a  $V$  — objętość w  $\text{m}^3$ . Jeżeli  $W > 0$ , oznacza to, iż gaz pobrał pracę;  $W < 0$ , oznacza to, iż gaz wykonał pracę.

**Praca w zjawisku adiabatycznym**

$$\begin{aligned} W &= \frac{RT_1}{\kappa-1} \frac{m}{A} \left[ \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} - 1 \right] = \frac{RT_1}{\kappa-1} \frac{m}{A} \left[ \frac{T_2}{T_1} - 1 \right] = \\ &= \frac{R}{A} \frac{m}{\kappa-1} [T_2 - T_1] = [c_p - c_v] \frac{m}{\frac{C_p}{C_v} - 1} [T_2 - T_1] = mc_v \Delta T. \end{aligned} \quad (3.53)$$

**Całkowita praca wykonana w cyklu Carnota**

$$W = m \frac{R}{A} \Delta T \ln \frac{V_1}{V_2}. \quad (3.54)$$

**Sprawność odwracalnej maszyny termodynamicznej w procentach**

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} 100\%. \quad (3.55)$$

**Zmiana entropii gazu doskonałego**

$$dS = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T}. \quad (3.56)$$

**Entropia gazu doskonałego**

$$S = S_0 + mc_v \ln T + m \frac{R}{A} \ln V, \quad (3.57)$$

gdzie  $S_0$  oznacza entropię w temperaturze 0 K (a więc wartość niemożliwa do znalezienia).

## Zadania

**3.131.** Wyrzucić wartość mechanicznego równoważnika ciepła w ergach/cal, kGm/cal, kGm/kcal oraz eV/cal.

**3.132.** Wskutek tarcia nastąpiła strata energii równoważna pracy  $W = 19,62 \cdot 10^4$  J. Ile można by stopić kilogramów lodu ciepłem uzyskanym z tej pracy? Ciepło topnienia lodu  $q = 3,33 \cdot 10^5$  J/kg.

**3.133.** Platynowy drucik o masie  $m = 10^{-4}$  kg zbombardowany został strumieniem elektronów, poruszających się z prędkością  $v = 0,9c$ , gdzie  $c$  jest prędkością światła. Temperatura drucika wzrosła od  $T = 293,16$  K do  $T_1 = 1073,16$  K. Połowa ciepła powstałego przy bombardowaniu drucika została rozproszona. Ciepło właściwe platyny  $c = 133,97$  J/kg·K, masa elektronu  $m_e = 9,10^{-31}$  kg. Obliczyć ilość elektronów, które uderzyły o drucik.

**3.134.** Z jaką prędkością powinna się zderzyć kulka ołowiana z tarczą, aby stopić się wskutek zderzenia? Temperatura topnienia ołowiu  $T_1 = 600,56$  K, ciepło właściwe ołowiu  $c_1 = 133,97$  J/kg·K, ciepło topnie-

nia ołowiu  $q = 2,45 \cdot 10^4$  J/kg, temperatura poruszającej się kulki  $T_2 = 288,16$  K. Zakładamy, że tylko połowa straconej energii kinetycznej idzie na ogrzanie kulki.

**3.135.** W ciągu ośmiogodzinnego treningu zapaśnik wykonuje pracę  $W = 1,7 \cdot 10^7$  J. Jaka jest jego moc oraz ile pożywienia musi spożyć dziennie w celu uzupełnienia kalorycznego swego organizmu?

**3.136.** Jakiego uzupełnienia kalorycznego wymagałby mistrz świata o ciężarze  $F_c = 75$  kG po rekordowym przebiegnięciu odległości  $s = 100$  m, a więc w czasie  $t = 10,0$  s, zakładając, że dwa razy więcej pracy idzie na wydalane przez zawodnika ciepło zarówno podczas biegu, jak i podczas rozprężania się po biegu?

**3.137.** Powietrze o masie  $m = 4$  kg znajduje się pod ciśnieniem  $p_1 = 4,052 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup> oraz w temperaturze  $T_1 = 298,16$  K. Ciśnienie powietrza w warunkach stałej objętości zostało obniżone do  $p_2 = 1,013 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup>. Obliczyć końcową temperaturę powietrza oraz pracę i ciepło zużyte do dokonania tego procesu. Ciepło właściwe powietrza w stałej objętości  $c_v = 753,6$  J/kg·K.

**3.138.** Powietrze o masie  $m = 4$  kg znajduje się pod ciśnieniem  $p_1 = 4,052 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup> oraz w temperaturze  $T_1 = 298,16$  K. Ciśnienie powietrza spadło w warunkach  $T = \text{const}$  do  $p_2 = 1,013 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup>. Obliczyć pracę oraz ciepło pobrane (oddane) przez powietrze podczas tego procesu. Stała gazów dla  $m = 1$  kg powietrza wynosi  $B' = 287,1$  J/kg·K.

**3.139.** Powietrze o masie  $m = 4$  kg znajduje się pod ciśnieniem  $p_1 = 4,052 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup> oraz w temperaturze  $T_1 = 298,16$  K. Ciśnienie powietrza spadło w warunkach adiabatycznych do  $p_2 = 1,013 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup>. Obliczyć końcową temperaturę, pracę i ciepło pobrane (oddane) przez powietrze podczas tego procesu. Stała gazów dla masy  $m = 1$  kg powietrza wynosi  $B' = 287,1$  J/kg·K.

**3.140.** Dwutlenek węgla w ilości  $m = 2$  kg znajdujący się pod ciśnieniem  $p_1 = 6,078 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup> oraz w temperaturze  $T_1 = 293,16$  K został w procesie izotermicznym rozprężony do ciśnienia  $p_2 = 1,013 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup>. Ile było kilomoli CO<sub>2</sub>? Jaka praca oraz jaka ilość ciepła została wykonana (pobrana) przez ten gaz? Stała gazów dla kilomola  $B = 8319$  J/kmol·K.

**3.141.** Powietrze pod ciśnieniem  $p_1 = 10,13 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup> znajduje się w temperaturze  $T_1 = 373,16$  K. Wskutek adiabatycznego rozprężania ciśnienie jego spadło do  $p_2 = 1,013 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup>. Obliczyć końcową temperaturę powietrza.

**3.142.** Powietrze zajmuje objętość  $V_1 = 10$  m<sup>3</sup> pod ciśnieniem  $p_1 =$

=  $10,13 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ . Wskutek adiabatycznego rozprężenia ciśnienie jego spadło do wartości  $p_2 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ . Obliczyć końcową wartość objętości zajmowanej przez powietrze.

**3.143.** Powietrze o masie  $m = 3 \text{ kg}$  znajduje się pod ciśnieniem  $p = 10,13 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  oraz w temperaturze  $T = 573,16 \text{ K}$ . Rozprężamy je adiabatycznie do ciśnienia  $p_1 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ . Jaka będzie jego temperatura oraz objętość po rozprężeniu? Ciężar właściwy powietrza  $\gamma = 12,8 \text{ N/m}^3$ .

**3.144.** Jak wielki nastąpi wzrost temperatury wewnątrz krzesiwka pneumatycznego, jeżeli temperatura pokojowa wynosi  $T = 293,16 \text{ K}$ , a objętość powietrza została zredukowana do  $1/40$  pierwotnej objętości?

**3.145.** Podać cechy charakterystyczne procesu politropowego ogrzewania gazu, jeżeli ciepło właściwe ogrzewania będzie wynosiło  $x C_v$ , gdzie  $x$  jest wielkością stałą.

**3.146.** Podać cechy charakterystyczne procesu politropowego ogrzewania gazu, jeżeli ciepło właściwe ogrzewania będzie wynosiło  $C_p$ .

**3.147.** Podać cechy charakterystyczne procesu politropowego ogrzewania gazu, jeżeli ciepło właściwe ogrzewania będzie wynosiło  $C_v$ .

**3.148.** Ciepło właściwe gazów charakteryzuje proces, w którym występuje zmiana temperatury gazu. Przyjmując proces politropowy o cieple właściwym  $c = 2 \cdot 10^4 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$  dla etanu oraz znając jego ciepło właściwe  $c_p = 3500 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , obliczyć jego objętość  $V_1$  w temperaturze  $T_1 = 373,16 \text{ K}$ , jeżeli w temperaturze  $T_0$  jego objętość wynosiła  $V_0 = 2,24 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ .

**3.149.** Znając ciepło właściwe etanu  $c_p = 3,5 \cdot 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$  oraz wiedząc, że zmiana objętości odbywa się w sposób politropowy o cieple właściwym  $c = 2 \cdot 10^4 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$ , obliczyć ciśnienie  $p_1$  w przypadku, gdy objętość tego gazu wzrośnie dwukrotnie w porównaniu z objętością pod ciśnieniem  $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ .

**3.150.** Znając ciepło właściwe etanu  $c_p = 3,5 \cdot 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$  oraz wiedząc, że zmiana ciśnienia odbywa się w sposób politropowy o cieple właściwym  $c = 2 \cdot 10^4 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$ , obliczyć ciśnienie tego gazu w temperaturze  $T_1 = 373,16 \text{ K}$ , jeżeli w temperaturze  $T_0$  wynosiło ono  $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ .

**3.151.** Zakładając, że zależność ciśnienia pary wodnej od temperatury jest podana na podstawie doświadczenia wzorem  $\frac{dp}{dT} = 37,35 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2 \cdot \text{K}$  oraz znając zależność ciepła parowania wody od temperatury

na podstawie poniższej tabelki przeliczyć zmianę objętości wody podczas parowania.

$T$ w K	373	484,4	582,5	637,2	647
$L$ w $\frac{\text{J}}{\text{kg}}$	$2252,2 \cdot 10^3$	$1900,3 \cdot 10^3$	$1305,5 \cdot 10^3$	$616,7 \cdot 10^3$	0

**3.152.** Obliczyć zmianę objętości alkoholu etylowego podczas krzepnięcia, jeżeli krzepnie on w temperaturze  $T = 143,16$  K, ciepło krzepnięcia alkoholu etylowego  $q = 1,043 \cdot 10^5$  J/kg, zmiana temperatury krzepnięcia wynosi  $\Delta T = 2,01$  K, a ciśnienie podwyższamy o  $\Delta p = 10,13 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup>.

**3.153.** Jak wielka nastąpi zmiana temperatury rtęci, jeżeli zwiększymy ciśnienie o  $\Delta p = 1,013 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup>? Ciepło krzepnięcia rtęci  $q = 1,17 \cdot 10^4$  J/kg, temperatura topnienia 334,16 K, a zmiana objętości rtęci przy topnieniu  $\Delta V = 3,7\%$ .

**3.154.** Obliczyć ciepło parowania wody powodujące zmianę energii wewnętrznej wody. Porównać tę część ciepła z częścią powodującą wykonanie pracy zewnętrznej: zmiana objętości 1 m<sup>3</sup> wody, znajdującej się pod ciśnieniem normalnym na skutek wyparowania, wynosi  $\Delta V = 1674$  m<sup>3</sup>.

**3.155.** Obliczyć część ciepła topnienia lodu powodującego zmianę energii wewnętrznej lodu oraz porównać ją z częścią ciepła powodującą wykonanie pracy zewnętrznej. Zmiana objętości 1 kg lodu, znajdującego się pod ciśnieniem normalnym, wskutek stopienia wynosi  $\Delta V = -8,3 \cdot 10^{-5}$  m<sup>3</sup>.

**3.156.** O ile uległa zmianie energia wewnętrzna  $m = 2$  kg powietrza, jeżeli ogrzano je od temperatury  $T_1 = 283,16$  K do  $T_2 = 373,16$  K w stałej objętości? Ciepło właściwe powietrza  $c_v = 753,6$  J/kg · K.

**3.157.** Obliczyć zmianę energii wewnętrznej wody, jeżeli masa wody  $m = 0,1$  kg znajdująca się pod ciśnieniem  $p_1 = 1,00 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup> oraz w temperaturze  $T_1 = 373,16$  K całkowicie wyparowała. Ciepło parowania wody  $q = 2,26 \cdot 10^6$  J/kg, objętość  $m_1 = 1$  kg pary wodnej pod ciśnieniem  $p_1 = 1,013 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup> wynosi  $V = 1,675 \cdot 10^{-3}$  m<sup>3</sup> (parę uważamy za gaz doskonały).

**3.158.** Pod stałym ciśnieniem ogrzano  $m = 0,05$  kg CO<sub>2</sub> od temperatury  $T_0 = 273$  K do temperatury 373 K. Obliczyć ilość ciepła dostarczonego dla CO<sub>2</sub> oraz procentowy udział tego ciepła idącego na zmianę energii wewnętrznej oraz na wykonanie pracy. Ciepło właściwe dla mola CO<sub>2</sub> pod stałym ciśnieniem wynosi  $C_p = 840,05$  J/kg · K.



**3.159.** Obliczyć, jaka część energii cieplnej potrzebna jest do wykonania pracy zewnętrznej, a jaka — do zmiany energii wewnętrznej  $m = 5$  kg fosforu, którego temperatura krzepnięcia  $T = 321,26$  K, a zmiana objętości podczas topnienia wynosi  $\Delta V = V_c - V_{st} = 0,03$  m<sup>3</sup>/kg oraz ciepło krzepnięcia fosforu  $q = 21059,6$  J/kg.

**3.160.** Obliczyć moc urządzenia chłodniczego, które w czasie  $t = 5$  minut potrafi zamienić  $m = 1$  kg wody o temperaturze pokojowej  $T_1 = 293,16$  K na lód o temperaturze  $T_0$ , zakładając iż urządzenie to pracuje tak, jak maszyna Carnota.

**3.161.** Obliczyć pracę, którą wykona  $m = 5$  kg powietrza, jeśli zostanie sprężone adiabatycznie od temperatury  $T_1 = 173,16$  K do temperatury  $T_2 = 373,16$  K. Stała gazów dla powietrza  $B' = 287,1$  J/kg·K.

**3.162.** W temperaturze  $T = 293,16$  K znajduje się  $m = 2$  kg powietrza pod ciśnieniem  $p_1 = 10,13 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup>. Powietrze to zostało rozprężone izotermicznie do ciśnienia  $p_2 = 1,013 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup>. Jaką wykonało ono pracę podczas tego procesu? Stała gazów dla powietrza  $B' = 287,1$  J/kg·K.

**3.163.** Obliczyć i porównać prace potrzebne do zagęszczenia  $V = 1$  m<sup>3</sup> powietrza znajdującego się w warunkach normalnych do objętości końcowej  $V_k = 10^{-3}$  m<sup>3</sup> raz w stałej temperaturze, a drugi raz w warunkach adiabatycznych. Stała gazów dla powietrza wynosi  $B' = 287,1$  J/kg·K, a masa właściwa powietrza w warunkach normalnych  $\rho_0 = 1,293$  kg/m<sup>3</sup>, ciepło właściwe powietrza pod stałym ciśnieniem wynosi  $c_p = 3252,5$  J/kg·K.

**3.164.** Obliczyć pracę wykonaną przez  $m = 5$  kg CO<sub>2</sub> rozprężającego się od objętości  $V_1 = 1$  m<sup>3</sup> do objętości  $V_2 = 10$  m<sup>3</sup> w temperaturze stałej  $T = 300$  K. Stałe Van der Waalsa dla CO<sub>2</sub> wynoszą  $a = 370$  N·m<sup>4</sup>/mol,  $b = 43 \cdot 10^{-3}$  m<sup>3</sup>/kmol.

**3.165.** W ilu punktach adiabata może przeciąć izotermę?

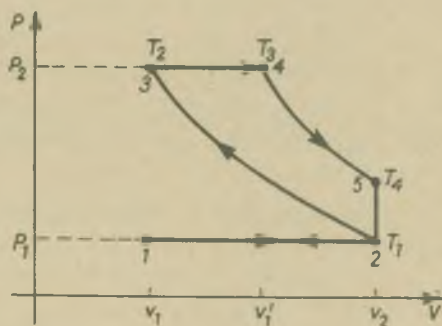
**3.166.** Powietrze w ilości  $m = 1$  kg wykonuje cykl Carnota pomiędzy temperaturami  $T_1 = 573$  K oraz  $T_2 = 300$  K. W czasie przebiegu tego cyklu objętość powietrza zmienia się od  $V_1 = 0,042$  m<sup>3</sup> do  $V_3 = 0,878$  m<sup>3</sup>. Stała gazów dla powietrza  $B' = 287,1$  J/kg·K, ciepło właściwe powietrza  $c_p = 1046,6$  J/kg·K. Obliczyć: a) ciśnienie i objętość w zwrotnych punktach cyklu, b) pracę na poszczególnych odcinkach cyklu, c) ciepło na poszczególnych odcinkach cyklu, d) całkowitą pracę oraz całkowite ciepło cyklu, e) wydajność cyklu.

**3.167.** Mol wodoru znajduje się w temperaturze  $T = 348,16$  K oraz

pod ciśnieniem  $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ , a następnie przebiega odwracalny cykl Carnota, rozszerzając się izotermicznie do podwójnej objętości początkowej. Obliczyć pracę na poszczególnych odcinkach cyklu. Wyznaczyć wydajność cyklu. Stała gazów  $R = 8,314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ .

**3.168.** W cylindrze silnika Diesla temperatura początkowa powinna wzrosnąć przez sprężenie co najmniej do temperatury zapłonu ropy wstrzykniętej do cylindra. W jakim stosunku powinna być objętość po sprężeniu do objętości początkowej  $V_1 = 10^{-3} \text{ m}^3$ , aby została osiągnięta temperatura zapłonu  $T_2 = 923,16 \text{ K}$ , jeżeli początkowa temperatura w cylindrze wynosiła  $T_1 = 373,16 \text{ K}$ ? Jakie ciśnienie powstało po sprężeniu, jeżeli początkowe ciśnienie wynosiło  $p_1 = 0,96 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ ? Ile pracy zostało zużytej na sprężenie tego gazu? Zakładamy, że proces sprężania był procesem adiabatycznym. Ciepło właściwe powietrza  $c_p = 1046,6 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , masa właściwa powietrza w warunkach normalnych  $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$ .

**3.169.** Obliczyć wydajność cyklu silnika Diesla, przebiegającego według rys. 3.2.



Rys. 3.2

**3.170.** Obliczyć wydajność silnika Diesla, jeżeli stosunek maksymalnej objętości (wsysania)  $V_2$  do minimalnej objętości (wydechu)  $V_1$  wynosi 2 oraz stosunek maksymalnej objętości podczas trwania spalania gazów  $V_1'$  do objętości  $V_1$  wynosi 1,5.

**3.171.** Obliczyć stosunek objętości  $V_2/V_1$  dla silnika Diesla (patrz zadanie nr 3.169), jeżeli wydajność silnika Diesla wynosi  $\eta = 0,4$  oraz stosunek objętości  $V_1'/V_1 = 1,25$ .

**3.172.** Znając temperaturę wydechu w silniku Diesla  $T_1 = 400 \text{ K}$

oraz stosunek  $V_1'/V_1 = 1,5$  obliczyć temperaturę  $T_4$ , panującą w silniku Diesla tuż przed otwarciem zaworu.

**3.173.** Znając temperaturę panującą podczas wydechu silnika Diesla  $T_1 = 400$  K oraz skokową objętość silnika  $V_2/V_1 = 4$  obliczyć temperaturę uzyskaną przy końcu spalania  $T_3$ .

**3.174.** Obliczyć zmianę entropii dwóch mas wody,  $m_1 = 10^{-2}$  kg o temperaturze  $T_1 = 373,16$  K oraz  $m_2 = 2 \cdot 10^{-2}$  kg o temperaturze  $T_2 = 288,16$  K, powstałą wskutek ich wymieszania.

**3.175.** Znaleźć zmianę entropii wody, jeżeli  $m = 10^{-3}$  kg wody o temperaturze  $T_0$  zostało zamienione na parę wodną o temperaturze  $T_2 = 423,16$  K znajdującą się pod ciśnieniem  $p_1 = 1,013 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup>. Ciepło parowania wody  $q = 2,26 \cdot 10^6$  J/kg, średnie ciepło właściwe pary wodnej  $c = 1997,0$  J/kg · K.

**3.176.** Obliczyć zmianę entropii przy wyparowaniu mola alkoholu w temperaturze  $T = 351,4$  K. Ciepło parowania alkoholu  $q = 8,45 \cdot 10^5$  J/kg. Wzór chemiczny alkoholu  $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$ .

**3.177.** Obliczyć zmianę entropii mola rtęci przy przejściu ze stanu stałego w stan płynny w temperaturze topnienia  $T = 234,29$  K. Ciepło topnienia rtęci  $q = 0,12 \cdot 10^5$  J/kg, ciężar atomowy rtęci  $A = 200,6$ .

**3.178.** Obliczyć zmianę entropii mola wody przechłodzonej do temperatury  $T_1 = 263,16$  K przy przejściu jej w stan stały (lód) o tejże samej temperaturze. Ciepło topnienia lodu  $q = 3,33 \cdot 10^5$  J/kg, ciepło właściwe lodu  $c = 2092,8$  J/kg · K.

**3.179.** Znaleźć zmianę entropii  $n = 2$  moli wodoru o objętości  $V_1 = 3 \cdot 10^{-3}$  m<sup>3</sup> i ciśnieniu  $p_1 = 2,026 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup> przy przejściu do objętości  $V_2 = 0,1$  m<sup>3</sup> pod ciśnieniem  $p_2 = 1,013 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup>. Ciepło właściwe wodoru  $c_p = 30,98$  J/mol · K (zakładamy, że wodór zachowuje się jak gaz doskonały).

**3.180.** Obliczyć przyrost entropii tlenu, jeżeli  $n = 10$  moli tlenu znajdującego się w temperaturze  $T_1 = 298,16$  K zostało rozprężonych od objętości  $V_1 = 2 \cdot 10^{-2}$  m<sup>3</sup> do objętości  $V_2 = 0,2$  m<sup>3</sup> w warunkach izotermicznych.

**3.181.** Kulki szklane o masie  $m = 0,1$  kg oraz o ciepłe właściwym  $c = 837,5$  J/kg · K znajdują się w początkowej temperaturze  $T_0$ . Następnie ogrzano je (po połowie) do temperatury  $T_1 = 303,16$  K oraz  $T_2 = 373,16$  K, a potem zmieszano razem. Porównać ciepła zredukowane kulek przed oraz po ich wymieszaniu.

**3.182.** Zmieszano 1/2 mola gazu znajdującego się w temperaturze  $T_1$

i 1/2 mola tego gazu znajdującego się w temperaturze  $T_2$ . Obliczyć zmianę entropii powstałą wskutek wymieszania obu części gazu.

**3.183.** Obliczyć entropię mola gazu rzeczywistego stosującego się do równania Van der Waalsa.

**3.184.** Obliczyć entropię mola  $\text{Cl}_2$  znajdującego się w warunkach normalnych, dla którego stałe Van der Waalsa wynoszą  $a = 0,6577 \text{ N} \cdot \text{m}^4/\text{mol}^2$  oraz  $b = 5,622 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{mol}$  oraz  $c_v = 481,06 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ .

### 3.7. ROZWIĄZANIA ZADAŃ

**3.1.** Oznaczywszy długość pręta żelaznego w temperaturze  $T_0$  przez  $l_0$ , otrzymujemy z warunków zadania, że długość tego pręta w temperaturze pomiaru wynosi

$$l_t = l_0(1 + \alpha_1 \Delta T).$$

Długość ta równa się długości wskazywanej przez liniał w tej samej temperaturze

$$l'_t = l(1 + \alpha \Delta T).$$

Z warunku  $l_t = l'_t$  otrzymujemy

$$l_0 = l \frac{1 + \alpha \Delta T}{1 + \alpha_1 \Delta T} = 1,5004 \text{ m}.$$

**3.2.** Ze wzorów na okres wahań po przeliczeniu otrzymujemy

$$T_1 = T_0 \sqrt{1 + \alpha \Delta T} = 3,0006 \text{ s}.$$

**3.3** Długość wahadła zredukowanego obliczymy za pomocą wzoru

$$l_1 = \frac{I_1}{md},$$

a więc w naszym przypadku

$$l_T = \frac{I_T}{md_T}.$$

Ponieważ ze wzrostem temperatury moment bezwładności każdej części wahadła zmienia się jak

$$I'_t = mr_t^2 = I_0(1 + \alpha \Delta T)^2,$$

a więc u nas moment bezwładności

$$I_T = I_0(1 + \alpha \Delta T)^2,$$

odległość zaś środka ciężkości od osi obrotu w temperaturze  $T$  wynosi

$$d_T = d_0(1 + \alpha \Delta T).$$

Wobec tego

$$l_T = \frac{I_0(1 + \alpha \Delta T)^2}{m d_0(1 + \alpha \Delta T)} = l_0(1 + \alpha \Delta T).$$

Okres wahań tego wahadła w temperaturze  $0^\circ\text{C}$  wynosi

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}},$$

w temperaturze zaś 298,16 K

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_T}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}} \sqrt{1 + \alpha \Delta T} = T_0(1 + \alpha \Delta T)^{1/2}.$$

Zatem zmiana procentowa okresu wahań wynosi

$$\frac{\Delta T}{T_0} 100 = \frac{T - T_0}{T_0} 100 = 0,02\%.$$

3.4. Oznaczając odpowiednio okresy wahań przez  $\tau_0$  oraz przez  $\tau_1$  otrzymujemy

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgd_0}} \quad \text{oraz} \quad \tau_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{mgd_1}},$$

gdzie  $d_0 = d'(1 + \alpha \Delta T_1)$  oraz  $d_1 = d'(1 + \alpha \Delta T_2)$ . Po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy

$$\frac{\tau_1^2 - \tau_0^2}{\tau_0^2} = \frac{I(1 + \alpha \Delta T_2) - I_0(1 + \alpha \Delta T_1)}{I_0(1 + \alpha \Delta T_1)}$$

przyjmując, że w przybliżeniu  $1 + \alpha \Delta T = 1$  oraz  $I_1 = I_2$  i  $\tau_1 = \tau_0$ , otrzymujemy

$$\Delta \tau = \frac{1}{2} \tau_0 \alpha \Delta T = -16 \cdot 10^{-4} \text{ s}.$$

3.5. Oznaczając przez  $l_1$  długość wahadła w temperaturze  $T_1$ , a przez  $l_2$  długość tego wahadła w temperaturze  $T_2$ , mamy

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} = T_0 \sqrt{1 + \alpha \Delta T_1},$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}} = T_0 \sqrt{1 + \alpha \Delta T_2}$$

dla  $T_2 > T_1$  szukaną wartość procentowej zmiany okresu wahań

$$p = \frac{T_2 - T_1}{T_1} 100 = \left( \sqrt{\frac{1 + \alpha \Delta T_2}{1 + \alpha \Delta T_1}} - 1 \right) 100 = 0,07\%.$$

3.6. Długość żelaznego pręta w temperaturze  $t$  wynosiła  $l_2 = l_1(1 + \alpha_1 \Delta T)$ , cynkowego zaś  $l_c = l_2(1 + \alpha_2 \Delta T)$ . Pręt złożony będzie miał długość  $l_z = l_2 + l_c$ , a więc

$$\begin{aligned} l_z &= l_1 + \alpha_1 l_1 \Delta T + l_2 + \alpha_2 l_2 \Delta T = (l_1 + l_2) + (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2) \Delta T = \\ &= (l_1 + l_2) \left( 1 + \frac{\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2}{l_1 + l_2} \Delta T \right), \end{aligned}$$



a więc współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej pręta złożonego

$$a = \frac{a_1 l_1 + a_2 l_2}{l_1 + l_2};$$

w naszym przypadku  $l_1 = l_2$ , zatem

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2} = 19,2 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}.$$

3.7. Powierzchnia płyty w temperaturze  $T_0$  wynosi  $S_0$ , gdzie np.  $S_0 = ab$ , przy czym  $a$  oznacza długość płyty, a  $b$  — jej szerokość. Zatem

$$S_T = a_T b_T = S_0(1 + a\Delta T)^2.$$

Tak więc

$$S_2 = S_0(1 + a\Delta T_2)^2 = S_1 \left( \frac{1 + a\Delta T_2}{1 + a\Delta T_1} \right)^2 = 1,03 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2.$$

3.8. Oznaczmy przez  $I_1$  oraz przez  $I_2$  momenty bezwładności w odpowiednich temperaturach, to na elementy momentów bezwładności w odpowiednich temperaturach otrzymujemy

$$dI_1 = dm_1 x_1^2 = \rho_1 dV_1 x_1^2 = \frac{\rho_0}{1 + a\Delta T_1} 3a dV_0 \Delta T_1 x_0^2 (1 + a\Delta T_1)^2 \doteq dI_0 3a\Delta T_1 (1 + a\Delta T_1),$$

$$dI_2 = dI_0 3a\Delta T_2 (1 + a\Delta T_1).$$

Biorąc różnicę tych elementarnych momentów bezwładności oraz całkując obustronnie równanie, otrzymujemy

$$\Delta(I_2 - I_1) = I_0 3a\Delta T, \quad \text{skąd} \quad \frac{\Delta(I_2 - I_1)}{I_0} = 0,5\%.$$

3.9. Oznaczmy objętość płyty w temperaturze  $T_2$  przez  $V_2$ ; zatem procentowy przyrost objętości równa się

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} 100,$$

a więc

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} 100 = \frac{V_0(1 + 3a\Delta T_2) - V_0(1 + 3a\Delta T_1)}{V_0(1 + 3a\Delta T_1)} 100 = \frac{3a(T_2 - T_1)}{1 + 3a\Delta T_1} 100 = 0,5\%.$$

3.10. Oznaczmy długość sztaby w temperaturze  $T_0$  przez  $l_0$ , a w temperaturze  $T_1$  przez  $l_2$ . Zatem wydłużenie wynosi

$$\Delta l = l_2 - l_1 = l_1 \frac{1 + a\Delta T_2}{1 + a\Delta T_1} - l_1 = l_1 \frac{a(T_2 - T_1)}{1 + a\Delta T_1} = 47,6 \cdot 10^{-8} \text{ m}.$$

Oznaczmy przez  $p$  szukane ciśnienie, a wydłużenie przez  $\Delta l$ . Na podstawie prawa Hooke'a otrzymujemy

$$p = E \frac{\Delta l}{l_1} = E \frac{l_2 - l_1}{l_1} = 1,01 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2.$$

3.11. Oznaczmy długość ściany łączącej pręty w temperaturze  $T_0$  przez  $l_0$ , a przez  $l_1$  — długość tej ściany w temperaturze  $T_1$ . Ponadto przez  $l_{Fe}$  oraz  $l_{Zn}$  długość tych prętów swobodnych w temperaturze  $T_1$ . Jasne jest, że żelazny pręt swobodny będzie miał



Rys. 3.3

długość mniejszą od  $l_1$ , a cynkowy większą od  $l_1$  w temperaturze  $T_1$ . Chcąc, aby oba pręty miały takie same długości, trzeba na nie wywrzeć ciśnienie; na pręt żelazny — rozciągające, a na pręt cynkowy — ściskające

$$p_{Fe} = E_{Fe} \frac{l_1 - l_{Fe}}{l_{Fe}} \quad \text{oraz} \quad p_{Zn} = E_{Zn} \frac{l_{Zn} - l_1}{l_{Zn}}.$$

W przypadku spojenia oba te ciśnienia muszą być sobie równe, a więc

$$E_{Fe} \frac{l_1 - l_{Fe}}{l_{Fe}} = E_{Zn} \frac{l_{Zn} - l_1}{l_{Zn}},$$

skąd

$$l_1 = \frac{(E_{Fe} + E_{Zn})l_{Zn}l_{Fe}}{E_{Fe}l_{Zn} + E_{Zn}l_{Fe}},$$

a więc szukane ciśnienie wynosi

$$\begin{aligned} p = p_{Fe} = p_{Zn} &= \frac{E_{Zn}}{l_{Zn}} \left[ l_{Zn} - \frac{(E_{Fe} + E_{Zn})l_{Zn}l_{Fe}}{E_{Fe}l_{Zn} + E_{Zn}l_{Fe}} \right] = \\ &= E_{Zn} \frac{E_{Fe}l_{Zn} + E_{Zn}l_{Fe} - E_{Fe}l_{Fe} - E_{Zn}l_{Fe}}{E_{Fe}l_{Zn} + E_{Zn}l_{Fe}} = \frac{E_{Zn}E_{Fe}(l_{Zn} - l_{Fe})}{E_{Fe}l_{Zn} + E_{Zn}l_{Fe}}, \end{aligned}$$

ale

$$l_{Zn} = l_0(1 + \alpha_{Zn}\Delta T) \quad \text{oraz} \quad l_{Fe} = l_0(1 + \alpha_{Fe}\Delta T),$$

skąd

$$l_{Zn} - l_{Fe} = l_0(\alpha_{Zn} - \alpha_{Fe})\Delta T,$$

a więc

$$\begin{aligned} p &= \frac{E_{Zn}E_{Fe}l_0(\alpha_{Zn} - \alpha_{Fe})\Delta T}{E_{Fe}(1 + \alpha_{Zn}\Delta T) + E_{Zn}l_0(1 + \alpha_{Fe}\Delta T)} = \\ &= \frac{E_{Zn}E_{Fe}(\alpha_{Zn} - \alpha_{Fe})\Delta T}{(E_{Fe} + E_{Zn}) + \Delta T(E_{Fe}\alpha_{Zn} + E_{Zn}\alpha_{Fe})} = 9,60 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2. \end{aligned}$$

3.12. Oznaczmy długość drutu w temperaturze  $T_0$  przez  $l_0$ . Na podstawie prawa Hooke'a długość tego drutu pod wpływem obciążenia wynosi

$$l = l_0 \left( 1 + \frac{F}{SE} \right).$$

Oznaczmy przez  $l'$  długość tegoż drutu w temperaturze  $T_0$ , pod wpływem obciążenia  $F'$

$$l' = l_0 \left( 1 + \frac{F'}{SE} \right).$$

Gdy drut obciążony ciężarem  $F'$  ogrzejemy do temperatury  $T_1$  przybierze on długość

$$l_1 = l'(1 + \alpha \Delta T) = l_0(1 + \alpha \Delta T) \left( 1 + \frac{F'}{SE} \right).$$

Warunkiem rozwiązania zadania jest równość

$$l_1 = l,$$

zatem

$$l_0 \left( 1 + \frac{F'}{SE} \right) (1 + \alpha \Delta T) = l_0 \left( 1 + \frac{F}{SE} \right),$$

skąd

$$F' = \frac{F - SE\alpha \Delta T}{1 + \alpha \Delta T}.$$

Szukane zmniejszenie ciężaru

$$\Delta F = F - F' = \frac{\alpha \Delta T}{1 + \alpha \Delta T} (F + SE) = 253,6 \text{ N}.$$

3.13.  $V_1 = V \frac{1 + \gamma \Delta T_1}{1 + \gamma \Delta T} = 56,218 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$

3.14. Poprawnie napisana objętość nafty wynosi

$$V' = V_0(1 + \gamma_1 \Delta T).$$

Wskazywana zaś przez dylatometr objętość wynosi  $V$ . Jeżeli uwzględnimy rozszerzalność dylatomtru, to w temperaturze  $T$  objętość  $V$  przyjmuje wartość

$$V' = V(1 + \gamma \Delta T).$$

Zatem

$$V_0(1 + \gamma_1 \Delta T) = V(1 + \gamma \Delta T),$$

skąd

$$\gamma_1 = \frac{V - V_0}{V_0 \Delta T} + \frac{V}{V_0} \gamma = 8,24 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$$

3.15. Warunek rozwiązania zadania: wywierane przez słupy oliwy ciśnienia na dno w obu ramionach (rys. 3.4) powinny być równe. (Zaniedbujemy rozszerzalność cieplną rurki, przyjmując np., że jest sporządzona z kwarcu). Oznaczając odpowiednie wysokości oliwy w obu ramionach przez  $w_1$  oraz  $w_2$  otrzymujemy jako warunek rozwiązania równość

$$w_1 \rho_1 g = w_2 \rho_2 g,$$

gdzie  $\rho_1$  oraz  $\rho_2$  oznaczają masy właściwe oliwy w temperaturach  $T_1$  oraz  $T_2$ . Lecz

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{1 + \gamma \Delta T_1} \quad \text{oraz} \quad \rho_2 = \frac{\rho_0}{1 + \gamma \Delta T_2}.$$

Zatem

$$w_1 \frac{\rho_0}{1 + \gamma \Delta T_1} = w_2 \frac{\rho_0}{1 + \gamma \Delta T_2},$$

skąd

$$w_2 = w_1 \frac{1 + \gamma \Delta T_2}{1 + \gamma \Delta T_1} = 30,219 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

3.16. Zaniedbując rozszerzalność rurki szklanej barometru i oznaczając ciśnienie w temperaturze  $T_1$  przez  $p_1$ , a wysokość słupka rtęci oraz masę właściwą rtęci w tej temperaturze odpowiednio przez  $w_1$  i  $\rho_1$ , podobnie dla warunków w temperaturze  $T$  oznaczając odpowiednie wartości bez wskaźników otrzymujemy na warunek rozwiązania zadania, że

$$p_1 = p,$$

gdzie  $p_1 = w_1 \rho_1 g$  oraz  $p = w \rho g$ ,  
zatem

$$w_1 = w \frac{\rho}{\rho_1} = w \frac{1}{1 + \gamma \Delta T} = 0,7713 \text{ m}.$$

3.17. Zaniedbujemy rozszerzalność szklanej rurki barometru. Zadanie to rozwiązujemy tak, jak zadanie poprzednie i otrzymujemy jako wynik rozwiązania

$$w_2 = \frac{w_1}{1 + \gamma \Delta T} = 0,7491 \text{ m}, \quad \text{bo} \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{w_2}{w_1}.$$

3.18. Zaniedbując zmianę lepkości, prędkość wypływu alkoholu można obliczyć z wzoru

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Jeśli oznaczymy przez  $h_0$  wysokość alkoholu w temperaturze  $T_0$ , to wysokości wynoszą w temperaturze  $T_1$

$$h_1 = h_0(1 + \alpha \Delta T_1)$$

oraz w temperaturze  $T_2$

$$h_2 = h_0(1 + \alpha \Delta T_2).$$

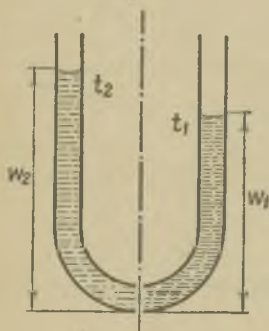
Na prędkość wypływu w tych temperaturach otrzymujemy wartości

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} \quad \text{oraz} \quad v_2 = \sqrt{2gh_2},$$

a więc zmiana procentowa prędkości wypływu wynosi

$$\frac{v_2 - v_1}{v_1} 100 = \left[ \sqrt{\frac{1 + \alpha \Delta T_2}{1 + \alpha \Delta T_1}} - 1 \right] 100 \approx$$

$$\approx [(1 + \frac{1}{2} \alpha \Delta T_2)(1 - \frac{1}{2} \alpha \Delta T_1) - 1] 100 \approx \frac{5}{3} \gamma \Delta T \approx 1,2\%.$$



Rys. 3.4

3.19. W celu rozwiązania pierwszej części zadania należy obliczyć:

a) ciepło potrzebne do ogrzania lodu od temperatury 243,16 K do  $T_0$

$$Q_1 = mc_1\Delta T = 627,84 \text{ J},$$

b) ciepło potrzebne do przemiany lodu na wodę w temperaturze przemiany  $T_0$

$$Q_2 = mq_1 = 3335,92 \text{ J},$$

c) ciepło potrzebne do ogrzania wody od temperatury  $T_0$  do 373,16 K

$$Q_3 = mc_2\Delta T = 4185,6 \text{ J},$$

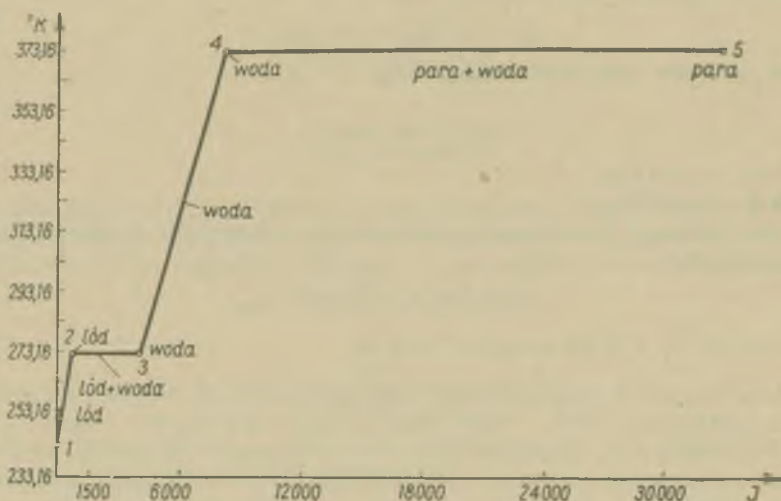
d) ciepło potrzebne do wyparowania wody w temperaturze wrzenia 373,16 K

$$Q_4 = mq_2 = 22585,50 \text{ J}.$$

A więc w celu spełnienia warunków zadania należy dostarczyć ciepła w ilości

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 30734,86 \text{ J}.$$

Wykres zależności temperatury od ilości dostarczonego ciepła przedstawiony został na rys. 3.5. Należy zwrócić uwagę na pochylenie pierwszego i trzeciego odcinka. Pochylenie świadczy o szybkości ogrzewania się. Co więc szybciej ogrzewa się woda czy lód? Poziome odcinki podają ilości ciepła potrzebnych do przemiany. Co więc łatwiej ulega przemianie?



Rys. 3.5

3.20. Nie, nie można, bo wskutek utraty ciepła musiałaby się obniżyć temperatura tego ciała, co jest jednak już niemożliwe.

3.21. Stracone ciepło wskutek skroplenia pary oraz stracone ciepło wskutek ziębienia wody powstałej z pary powoduje stopienie lodu, ogrzanie wody powstałej z lodu



o  $\Delta T = 0,4 \text{ K}$  oraz ogrzanie uprzednio istniejącej już wody także o  $\Delta T$ . Bilans cieplny dla naszego przypadku będzie miał postać

$$m_2 q_1 + m_2 c (T_2 - T) = x q_2 + m_1 c \Delta T,$$

skąd

$$x = \frac{m_2 q_1 + m_2 c (T_2 - T) - m_1 c \Delta T}{q_2} = 0,1193 \text{ kg}.$$

3.22.  $x c (T_0 - T_1) + x q_2 = m q_1 + m c_w (T_2 - T_0)$ ,  $x = 14,67 \text{ kg}$ .

3.23.  $x = 0,799 \text{ kg}$ .

3.24.  $x = 0,9478 \text{ kg}$ .

3.25.  $q = 8,54 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ .

3.26.  $q = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ .

3.27.  $q = 3,33 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$ .

3.28.  $T = 313,16 \text{ K}$ .

3.29.  $c = 1947 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ .

3.30.  $c = 2092,8 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ .

3.31.  $m = 0,0163 \text{ kg}$ .

3.32.  $m = 0,2217 \text{ kg}$ .

3.33. Ze spalania koksu otrzymaliśmy ilość ciepła  $Q_1 = 3,22 \cdot 10^{10} \text{ J}$ . Do odlania żeliwa potrzebne było ciepło  $Q_2 = 4,96 \cdot 10^9 \text{ J}$  na ogrzanie żeliwa oraz  $Q_3 = 1,61 \cdot 10^9 \text{ J}$  na stopienie żeliwa, a więc razem ilość ciepła

$$Q = Q_2 + Q_3 = 5,12 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

Zatem sprawność pieca odlewniczego wynosi

$$\eta = \frac{Q}{Q_1} \cdot 100 = 16\%.$$

3.34.  $x = 109,5 \text{ kg}$ .

3.35.  $x = 4,832 \text{ kg}$ .

3.36. Jeśli przez  $V$  oznaczymy objętość pokoju, to ilość ciepła potrzebna do jego ogrzania wynosi

$$Q = V \rho c_p \cdot 1 = 7,78 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

Zatem  $m = \frac{Q}{c_p \cdot 1} = 18,576 \text{ kg}$  wody o jeden K.

3.37. Eksplozyjne krzepnięcie wody będzie trwało dotąd, dopóki woda nie ogrzeje się do temperatury  $273 \text{ K}$ . Ciepło właściwe wody jest znane i wynosi  $c_w = 4,185 \cdot 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , a ciepło przemiany przy krzepnięciu jest także powszechnie znane i wynosi w układzie SI  $q_k = 333,5 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$ . Na podstawie zasady zachowania energii (bilansu cieplnego) wynika, że ilość skrzepłej wody wynosi

$$m_x = \frac{m c_w \Delta T}{q_k} = 0,063 \text{ kg}.$$

Wiemy również, że objętość lodu jest 9% razy większa od objętości wody, a więc zmiana objętości, powstała tylko wskutek wzrostu objętości powstałego lodu, wynosi

$$\Delta V = 0,01 \cdot 0,063 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3.$$

3.38. Układamy bilans cieplny dla tego przypadku. Ciepło wydzielone podczas krzepnięcia lodu powoduje ogrzanie wody oraz powstałego z wody lodu, a więc

$$xq = (m-x)c_2\Delta T + xc_1\Delta T,$$

gdzie

$$T = T_0 - T,$$

skąd

$$x = \frac{mc_2\Delta T}{q + c_2\Delta T - c_1\Delta T} = 0,0304 \text{ kg}.$$

3.39. Po wrzuceniu do wody zarodka rozpoczyna się gwałtowne krzepnięcie powodujące to, że całe ciepło krzepnięcia  $Q_k$  zostaje w wodzie, powodując dopóty ogrzanie zarówno wody  $Q_w$ , jak i powstałego z niej lodu  $Q_l$ , dopóki cała ta mieszanina nie osiągnie temperatury krzepnięcia. Zakładając, że od razu wytworzył się cały lód  $m$  oraz że został ogrzany od temperatury  $T$  do  $T_0$  piszemy w tym przypadku bilans cieplny w postaci

$$m_1q = (m-m_1)c_2\Delta T + m_1c_1\Delta T,$$

gdzie  $m$  oznacza masę początkową wody, zatem

$$\frac{m_1}{m}q = c_2\Delta T - \frac{m_1}{m}c_2\Delta T + \frac{m_1}{m}c_1\Delta T,$$

czyli

$$\frac{m_1}{m} = \frac{c_2\Delta T}{q + c_2\Delta T - c_1\Delta T},$$

zatem

$$p = \frac{m_1}{m}100 = 9,5\%.$$

3.40. Ponieważ ciepło wydzielone podczas krzepnięcia fosforu zostało zużyte na ogrzanie ciekłego fosforu aż do temperatury krzepnięcia oraz na ogrzanie skrzepłego fosforu również do temperatury krzepnięcia, w tym wypadku bilans cieplny wynosi

$$m_2q = (m_1 - m_2)c_1\Delta T + m_2c_2\Delta T,$$

skąd

$$\Delta T = \frac{m_2q}{(m_1 - m_2)c_1 + m_2c_2} = 9,6 \text{ K}.$$

3.41. Oznaczmy przez  $A_1$  oraz  $A_2$  szukane masy atomowe rtęci oraz ołowiu. Na podstawie reguły Dulonga-Petita otrzymujemy

$$A_1c_1 = A_2c_2 = c,$$

zatem

$$A_1 = \frac{c}{c_1} = 197 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}, \quad A_2 = \frac{c}{c_2} = 208 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}},$$

w porównaniu do dokładniejszych pomiarów, które podają na  $A_1$  wartość

$$200,61 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \quad \text{oraz na } A_2 \text{ wartość } 207,21 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}.$$

3.42. Oznaczmy przez  $A_1, A_2, A_3, A_4$  masy atomowe wodoru, tlenu, miedzi oraz siarki. Otrzymujemy ciężary cząsteczki lodu oraz siarczanu miedzi

$$A_L = 2A_1 + A_2 = 0,018 \frac{\text{kg}}{\text{mol}},$$

$$A_S = 5A_L + A_3 + A_4 + 4A_2 = 0,2496 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}.$$

Oznaczmy przez  $q_L$  ciepło cząsteczkowe lodu oraz przez  $q_S$  ciepło cząsteczkowe siarczanu miedzi oraz przez  $n_1 = 2$  ilość atomów wodoru, przez  $n_2 = 1$  ilość atomów tlenu wchodzących w skład cząsteczek lodu, przez  $n_3 = n_4 = 1$  ilość atomów miedzi oraz siarki, a przez  $n_5 = 4$  ilość atomów tlenu, wchodzących w skład cząsteczek siarczanu miedzi. Na podstawie reguły Neumanna-Koppa otrzymujemy

$$q_L = n_1 c_1 + n_2 c_2 = 36,83 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}},$$

$$q_S = 5q_L + n_3 c_3 + n_4 c_4 + n_5 c_5 = 298,75 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}.$$

Oznaczając przez  $c'_L$  oraz przez  $c'_S$  szukane ciepło właściwe lodu oraz siarczanu miedzi otrzymamy

$$c_L = c'_L A_L \quad \text{oraz} \quad c_S = c'_S A_S,$$

zatem

$$c'_L = \frac{c_L}{A_L} = 2,05 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

oraz

$$c'_S = \frac{c_S}{A_S} = 1,21 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.$$

3.43. Z rozważań teoretycznych wynika związek pomiędzy prędkością rozchodzenia się fali głosowej oraz stosunkiem  $\kappa$

$$v_1 = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \kappa = \sqrt{\frac{p}{\rho} \frac{c_{p1}}{c_{v1}}} = \sqrt{\frac{p}{\rho} \frac{c_{v1} + R}{c_{v1}}} = \sqrt{\frac{p}{\rho} \left(1 + \frac{R}{c_{v1}}\right)},$$

zatem

$$v_1^2 = \frac{p}{\rho} \left(1 + \frac{R}{c_{v1}}\right), \quad \text{skąd} \quad c_{v1} = R \frac{p}{v_1^2 \rho - p}.$$

Analogicznie, prędkości drugiej ( $v_2$ ) odpowiada ciepło właściwe

$$c_{v2} = R \frac{p}{v_2^2 \rho - p}.$$

Zatem procentowy wzrost ciepła właściwego wynosi

$$\frac{c_{v2} - c_{v1}}{c_{v1}} 100 = \left| \frac{R p \left( \frac{1}{v_2^2 \rho - p} - \frac{1}{v_1^2 \rho - p} \right)}{R p \frac{1}{v_1^2 \rho - p}} \right| 100 = \left| \left( \frac{v_1^2 \rho - p}{v_2^2 \rho - p} - 1 \right) \right| 100 = 18,5\%.$$

3.44. Z teorii wiadomo, że  $v^2 = \frac{dp}{d\rho}$ , ale  $pV^\kappa = \text{const}$ , skąd  $p = \text{const } \rho^\kappa$ , a uwzględniając równanie gazów doskonałych otrzymamy

$$v = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0} \cdot \kappa}$$

w naszych warunkach  $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  oraz  $\rho_0 = \frac{A}{22,41} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , zatem  $v = 10^3 \sqrt{227,01 \frac{A}{\kappa}}$ ; dla helu  $v = 972 \text{ m/s}$ , dla powietrza  $v = 331 \text{ m/s}$ , dla dwutlenku węgla  $v = 257 \text{ m/s}$ .

3.45.  $v = 336 \text{ m/s}$ .

3.46. Objętość kilogramocząsteczki w warunkach normalnych wynosi  $V_0 = 22,4207 \text{ m}^3 \cdot \text{kmol}^{-1}$ . Temperatura  $0^\circ \text{C}$  w skali Kelvina  $T_0 = 273,16 \text{ K}$ . Ciśnienie normalne zaś  $p_0 = 1 \text{ atm} = 1,033 \text{ at} = 1,033 \text{ kG} \cdot \text{cm}^{-2} = 1,033 \cdot 10^4 \text{ kG} \cdot \text{m}^{-2} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ . Podstawiając tę wartość, otrzymujemy na stałą gazów wartość

$$B = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{22,4207 \text{ m}^3 \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot 1,033 \cdot 10^4 \text{ kG} \cdot \text{m}^{-2}}{273,16 \text{ K}} = 847,87 \frac{\text{kG} \cdot \text{m}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \approx 848 \frac{\text{kG} \cdot \text{m}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$$

Litroatmosfera fizyczna oznacza pracę wykonaną przez stałe ciśnienie atmosfery fizycznej przy zmianie objętości gazu o jeden liter ( $1 \text{ dcm}^3$ ) pod wpływem tego ciśnienia, a więc

$$\begin{aligned} \text{litroatmosfera fizyczna} &= pV = 1 \text{ dcm}^3 \cdot 1 \text{ atm} = 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 1,033 \text{ kG/cm}^2 = \\ &= 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 1,033 \cdot 10^4 \text{ kG/m}^2 = 10,33 \text{ kG} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} B &= \frac{847,87}{10,33} \frac{\text{latm}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} = 82,08 \frac{\text{latm}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \approx \\ &\approx 82 \frac{\text{latm}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} = 0,082 \frac{\text{latm}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \end{aligned}$$

W taki sam sposób obliczamy stałą gazów  $R$

$$\begin{aligned} R &= \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 22420,7 \text{ cm}^3 \cdot \text{mol}^{-1}}{273,16 \text{ K}} = \\ &= \frac{1,033 \cdot 10^6 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} \cdot 22420,7 \frac{\text{cm}^3}{\text{mol}}}{173,16 \text{ K}} = 8,314 \cdot 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{mol} \cdot \text{K}}, \end{aligned}$$

$$R = 8,314 \frac{\text{dżul}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 8,314 \frac{\text{dżul}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$$

$$R = 8,314 \frac{2,389 \cdot 10^{-4} \text{ kcal}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 1,986 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kcal}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 1,986 \frac{\text{kcal}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$$

3.47. W przypadku mieszaniny stosuje się prawo Daltona. Oznaczamy przez  $A_i$  ciężar cząsteczkowy danego gazu, przez  $p_i$  wywierane przez niego ciśnienie cząsteczkowe we wspólnej objętości gazów  $V$  oraz przez  $m_i$  ilość kilogramów danego rodzaju gazu: temperatura tej mieszaniny gazów wyrażona w skali Kelvina będzie  $T$  K.

Na ciśnienie cząstkowe  $p_i$  otrzymamy wzór

$$p_i = m_i \frac{B T}{A_i V},$$

zatem na podstawie prawa Daltona

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \frac{BT}{V} \left( \frac{m_1}{A_1} + \frac{m_2}{A_2} + \dots + \frac{m_n}{A_n} \right)$$

oraz z równania charakterystycznego gazów doskonałych mamy

$$p = \frac{BT}{V} \frac{m}{A}.$$

Porównując ze sobą te dwa wyniki, gdzie masa całej mieszaniny

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

otrzymamy

$$\frac{m}{A} = \frac{m_1}{A_1} + \frac{m_2}{A_2} + \dots + \frac{m_n}{A_n} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{A_i},$$

a więc ciężar cząsteczkowy całej mieszaniny wyrażony jest wzorem

$$A = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{\frac{m_1}{A_1} + \frac{m_2}{A_2} + \dots + \frac{m_n}{A_n}} = \frac{m}{\frac{m_1}{A_1} + \frac{m_2}{A_2} + \dots + \frac{m_n}{A_n}} = \frac{m}{\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{A_i}}.$$

3.48. W naszym przypadku

$$A = A_c + 2A_0 = 44 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}.$$

Zatem

$$R' = \frac{B}{A} = \frac{848 \text{ kG} \cdot \text{m}}{44 \text{ kg} \cdot \text{K}} = 19,28 \frac{\text{kG} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.$$

Jeden kilomol dwutlenku węgla zawiera 44 kg  $\text{CO}_2$  oraz zajmuje objętość 22,4 m<sup>3</sup> w warunkach normalnych, zatem ciężar właściwy  $\text{CO}_2$  w warunkach normalnych wynosi

$$\gamma = \frac{44 \text{ kG}}{22,4 \text{ m}^3} = 1,96 \frac{\text{kG}}{\text{m}^3} = 19,23 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}.$$

Zatem masa właściwa  $\text{CO}_2$

$$\rho \approx 1,96 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$



a objętość właściwa  $\text{CO}_2$  wynosi

$$V = \frac{1}{\rho} \approx 0,51 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}.$$

3.49. Przyjmując, że dany gaz zachowuje się jak gaz doskonały oraz pisząc równanie gazu doskonałego dla tych dwóch stanów, otrzymamy

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}, \quad \text{skąd} \quad T_1 = T_2 \frac{p_1}{p_2} \frac{V_1}{V_2} = 336,86 \text{ K}.$$

3.50. Z warunków zadania mamy

$$V_1 = V_2,$$

a

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \quad \text{zatem} \quad T_2 = 580,32 \text{ K}.$$

3.51. Z warunków zadania mamy

$$V_1 = V_2,$$

skąd

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 3,34 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

3.52. W chwili zamykania butelki korkiem przyjmujemy, że ciśnienie powietrza w butelce było takie, jak ciśnienie atmosferyczne, temperatura powietrza  $T_1 = 373,16 \text{ K}$ , objętość powietrza  $V_1 =$  objętości butelki.

Po ostudzeniu butelki do temperatury  $T_2 = 293,16 \text{ K}$  objętość powietrza jest nadal równa objętości butelki  $V_2$ , a ciśnienie osiągnęło wartość  $p_2$ ; z równania charakterystycznego

gazu doskonałych mamy więc  $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$ , skąd

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 0,80 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

3.53. Wiemy, że  $B' = B/A$ , gdzie  $B$  jest stałą gazów kilomola dowolnego gazu,  $A$  zaś jest ciężarem cząsteczkowym kilomola. Z definicji wielkości  $B$  mamy

$$B = \frac{p_0 V_0}{T_0},$$

gdzie  $p_0$ ,  $V_0$  oraz  $T_0$  odniesione zostały do kilomola w warunkach normalnych, zaś

$$\rho_0 = \frac{A}{V_0}, \quad \text{a więc} \quad A = \rho_0 V_0.$$

Podstawiając te dane otrzymujemy

$$B' = \frac{p_0}{\rho_0 T_0} = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.$$

3.54. Ilość ciepła potrzebna do ogrzania tego gazu wynosi

$$Q = m C_v \Delta T,$$

Z równania, charakterystycznego gazów doskonałych mamy

$$m = \frac{pV}{T} \frac{A}{B}.$$

Oznaczając masę właściwą gazu w warunkach normalnych przez  $\varrho_0$  otrzymujemy

$$\varrho_0 = \frac{A}{V_0}, \quad \text{skąd} \quad A = \varrho_0 V_0,$$

gdzie  $V_0$  oznacza objętość kilomola w warunkach normalnych.

Zatem

$$\frac{A}{B} = \frac{\varrho_0 T_0}{p_0}.$$

A więc

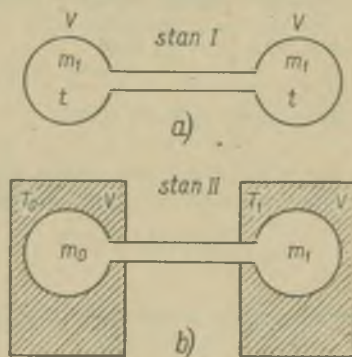
$$Q = \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} \varrho_0 V C_v \Delta T = 2,67 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

3.55. W stanie I (rys. 3.6a) dla każdej z tych kul można napisać równanie charakterystyczne gazów doskonałych. Otrzymamy wtedy

$$pV = m_1 \frac{R}{A} T \quad \text{oraz} \quad pV = m_2 \frac{R}{A} T.$$

Z równań tych wynika, że  $m_1 = m_2$ , czyli masy powietrza zostały równomiernie rozdzielone w obu kulach.

W stanie II (rys. 3.6b) masy powietrza zostały nierównomiernie rozdzielone, gdyż temperatury obu kul są różne. Temperatura jednej wynosi  $T_0$ , a drugiej  $T_1 = 717,76 \text{ K}$ .



Rys. 3.6

Cięnienie w obu kulach jest takie samo, gdyż kule te są ze sobą połączone, objętości nie ulegają zmianie, gdyż inwar niewiele się rozszerza, tak iż można w tym przypadku przyjąć, że

$$p_1 V = m_1 \frac{R}{A} T_1 \quad \text{oraz} \quad p_2 V = m_2 \frac{R}{A} T_2.$$

Zatem, ponieważ  $p_1 = p_0$ ,

$$m_1 T_1 = m_0 T_0 .$$

A więc szukany stosunek mas

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{T_0}{T_1} = 0,381 .$$

Pisząc te równania dla stanu *I*, np. dla kuli cieplejszej

$$pV = \frac{m_1 + m_0}{2} \frac{R}{A} T$$

oraz dla stanu *II* tejże kuli

$$p_1 V = m_1 \frac{R}{A} T_1$$

otrzymujemy z tych równań

$$p_1 = p \frac{2T_0}{T_0 + T_1} \frac{T_1}{T} = 1,37 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 .$$

3.56. Jeżeli oznaczymy ilość kilomoli danego gazu przez *n*, to z równania charakterystycznego gazów doskonałych otrzymujemy

$$\frac{pV}{T} = nB ,$$

skąd

$$n = \frac{pV}{BT} = 0,405 \text{ kmol} .$$

Szukana objętość w warunkach podanych w punkcie 2 zadania wynosi

$$V = \frac{BT}{p} = 24,44 \frac{\text{m}^3}{\text{kmol}} .$$

3.57. Oznaczając wskaźnikiem „0” dane gazu odnoszące się do warunków normalnych, otrzymujemy

$$V_0 = V \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} = 0,889 \text{ m}^3 ,$$

a więc szukany ciężar powietrza .

$$G = V_0 \gamma = 11,27 \text{ N} .$$

Objętość 1 kg powietrza w warunkach normalnych wynosi

$$V_1 = \frac{G_1}{\gamma} = 0,773 \text{ m}^3 ,$$

a w podanych w zadaniu 3.57 warunkach objętość ta wynosi

$$V = V_1 \frac{p_0}{p} \frac{T}{T_0} = 0,896 \text{ m}^3 .$$

3.58. Ilość ciepła potrzebna do ogrzania powietrza wynosi

$$Q = mc_v \Delta T.$$

Napiszmy równanie charakterystyczne gazów doskonałych dla 1 kg powietrza. Otrzymujemy zgodnie z podanymi w zadaniu warunkami

$$\frac{p_2 V}{T} = mB', \quad \text{skąd} \quad m = \frac{p_2 V}{TB'}.$$

Zatem ilość ciepła wynosi

$$Q = \frac{p_2 V}{TB'} c_v \Delta T = \frac{p_2}{p_0} \frac{V}{V_0} \frac{T_0}{T} c_v \Delta T = 2,67 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

3.59. Oznaczmy przez  $m$  ilość kg tlenu znajdującego się w bombie kalorymetrycznej, przez  $c_v$  jego ciepło właściwe oraz przez  $\Delta T$  szukany przyrost temperatury; otrzymujemy wtedy

$$Q = mc_v \Delta T, \quad \text{skąd} \quad \Delta T = \frac{Q}{mc_v},$$

ponieważ  $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ , zatem  $c_v = \frac{c_p}{\kappa}$  (ogrzewanie odbywa się bowiem w całej objętości); ponadto

$$\frac{pV}{T} = m \frac{B}{A}, \quad \text{a więc} \quad m = \frac{pV}{BT} A.$$

Podstawiając te dane otrzymujemy

$$\Delta T = \frac{\kappa}{A} \frac{BT}{pV} \frac{Q}{c_p} = 1224,3 \text{ K},$$

skąd

$$T_1 = 1513,46 \text{ K}.$$

Końcowe ciśnienie panujące w gazie obliczamy z zależności

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{pV}{T},$$

skąd

$$p_1 = p \frac{T_1}{T} = 84,47 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

3.60. Ciśnienie panujące wewnątrz bańki składa się z ciśnienia atmosferycznego panującego na powierzchni, z ciśnienia słupa wody oraz ciśnienia cząsteczkowego powstałego na skutek zakrzywienia powierzchni cieczy i wynosi

$$p_c = p_a + \rho g r + \frac{2T}{r} = 1,83 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Objętość tej bańki na tej głębokości wynosi

$$V_h = \frac{4}{3} \pi r^3 = 3,351 \cdot 10^{-17} \text{ m}^3.$$

Jeżeli zaniedbamy nieznaczną zmianę promienia krzywizny oraz uwzględnimy, że we wnętrzu cieczy panuje temperatura  $T_h = 277 \text{ K}$ , to na podstawie równania gazów doskonałych otrzymujemy

$$V_0 = V_h \frac{T_0}{T_h} \frac{p_h}{p_0} = 3,551 \cdot 10^{-17} \text{ m}^3 \frac{273,16}{277,16} \frac{1,81}{0,81} = 7,791 \cdot 10^{-17} \text{ m}^3.$$

Chcąc obliczyć poprawniej objętość, należałoby obliczyć promień powierzchni tej kulki, a następnie ciśnienie cząsteczkowe tej kulki. Po dodaniu do ciśnienia atmosferycznego otrzymalibyśmy wartość ciśnienia poprawniejszą, a w związku z tym otrzymalibyśmy poprawniejszą również wartość na  $V_0$ .

$$r_0 = 4,29 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \quad p_{m0} = 3,40 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2, \quad p_0 = 1,353 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2,$$

a więc po poprawieniu  $V_0 = 4,233 \cdot 10^{-17} \text{ m}^3$ .

Jeśli przeprowadzilibyśmy jeszcze raz kolejne przybliżone rachunki, to otrzymalibyśmy jeszcze dokładniejszą wartość na  $V_0$ .

**3.61.** Ponieważ  $at = 9,81 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$ , zatem oznaczając dane ciśnienie przez  $p_n$ , a szukane przez  $p$  na podstawie równania gazów doskonałych otrzymujemy

$$p = p_n \frac{T}{T_n} = 18,1 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2.$$

**3.62.** Uwzględniając, że na takiej głębokości stale temperatura wody wynosi  $277 \text{ K}$ , z równania gazów doskonałych otrzymujemy

$$V_2 = V_1 \frac{p_1}{p_2} \frac{T_1}{T_2} = 5,45 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

**3.63.** Oznaczając ciśnienia, które zapanowały w odpowiednich naczyniach przez  $p$  oraz przez  $p_2$ , otrzymujemy,

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 + \beta \Delta T_1}{1 + \beta \Delta T_2}$$

oraz oznaczając  $T_2 = T_1 + \Delta T$  otrzymujemy

$$\frac{1}{\beta} \left[ \frac{p_1}{p_2} - 1 \right] = \left[ 1 - \frac{p_1}{p_2} \right] \Delta T_1 - \frac{p_1}{p_2} \Delta T,$$

skąd

$$\left[ \frac{p_1}{p_2} - 1 \right] \left[ \frac{1}{\beta} + \Delta T_1 \right] = - \frac{p_1}{p_2} \Delta T,$$

a więc podstawiając  $p_2 = p_1 + \Delta p$ , otrzymujemy

$$\Delta T = \frac{\Delta p}{p_1} \left[ \frac{1}{\beta} + \Delta T_1 \right],$$

a ponieważ  $\Delta T_1 = 0$  otrzymujemy

$$\Delta T = 7,28 \text{ K}, \quad \text{zatem} \quad T_2 = 280,44 \text{ K}.$$

**3.64.** Na ilość cząsteczek w  $\text{m}^3$  pod ciśnieniem  $1 \text{ atm}$  w temperaturze  $T \text{ K}$  otrzymujemy wzór

$$p_0 V_0 = N_0 k T,$$



analogicznie, w tych samych warunkach temperaturowych dla ciśnienia  $p$  otrzymujemy  $pV_0 = NkT$ , a więc  $N = N_0 \frac{p}{p_0}$ , gdzie  $p = 10^{-10} \text{ N/m}^2$ ,  $p_0 = 1,003 \cdot 10^4 \cdot 9,81 \text{ N/m}^2$ ,  $N_0 = 6,02 \cdot 10^{23}$  cząsteczek, a więc  $N = 2600$  cząsteczek  $\cdot \text{m}^{-3}$ .

3.65. Eksplozyjne wyparowywanie wody polega na tym, że woda wyparowuje dotąd, dopóki jej temperatura wrzenia nie osiągnie 373 K (zakładając normalne ciśnienie, które panuje nad wodą). Ponieważ ciepło właściwe wody jest każdemu znane i wynosi w układzie SI  $c_w = 4,185 \cdot 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$  oraz ciepło parowania  $q = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ , otrzymujemy na wyparowaną masę wartość

$$m_x = \frac{mc_w \Delta T}{q} = 5,56 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

Wiadomo również, że przez wyparowanie  $10^{-6} \text{ kg}$  wody tworzy się pod ciśnieniem atmosferycznym około  $1,65 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$  pary wodnej. W naszym przypadku powstałoby więc pod ciśnieniem atmosferycznym

$$V_0 = 9,174 \text{ m}^3 \text{ pary wodnej}.$$

Do dyspozycji mamy zaś tylko  $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = V_k$  i w tej objętości gromadzi się ta para wodna. Oznaczając przez  $p_p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  ciśnienie atmosferyczne na początku, otrzymujemy na wartość ciśnienia końcowego  $p_k$  na podstawie prawa Boyle'a

$$p_k = p_p \frac{V_k + V_0}{V_k} = 6,20 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2.$$

3.66. Pod ciśnieniem początkowym  $p_p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  w temperaturze  $T_p = 263,16 \text{ K}$  powietrze zajmowało objętość  $V_p = 10 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ ; po skrzepnięciu w temperaturze końcowej  $T_k = 273,16 \text{ K}$  powietrze zajmowało objętość tylko  $V_k = 4,33 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3$ , wobec tego ciśnienie końcowe tego powietrza obliczymy na podstawie równania gazów doskonałych

$$p_k = p_p \frac{V_p}{V_k} \frac{T_k}{T_p} = 2,43 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2.$$

3.67. Równanie Van der Waalsa dla jednej gramocząsteczki ma postać

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT.$$

Po uporządkowaniu tego równania według potęg  $V$ , otrzymujemy równanie trzeciego stopnia ze względu na  $V$

$$V^3 - V^2 \left(b + \frac{RT}{p}\right) + V \frac{a}{p} - \frac{ab}{p} = 0.$$

Punkt krytyczny odznacza się tym, że wszystkie trzy pierwiastki rozwiązania tego równania są sobie równe i można to równanie przedstawić w postaci

$$(V - V_c)^3 = 0,$$

a po rozwinięciu otrzymujemy

$$V^3 - 3V^2V_c + 3VV_c^2 - V_c^3 = 0.$$

Porównując współczynniki równań otrzymanych wyżej mamy zależność

$$3V_c = \frac{RT_c}{p_c} + b, \quad 3V_c^3 = \frac{a}{p_c}, \quad V_c^3 = \frac{ab}{p_c}.$$

Rozwiązując te równania ze względu na  $a$ ,  $b$  oraz  $R$  otrzymujemy

$$a = 3p_c V_c^3, \quad b = \frac{V_c}{3}, \quad R = \frac{8}{3} \frac{p_c V_c}{T_c}.$$

Do rozwiązania zadania możemy dowolnie przyjąć masę benzenu. Przyjmujemy więc do dalszych obliczeń, że masa benzenu  $m = 1$  kg, a więc

$$V = \frac{m}{\rho} = 3,3 \text{ m}^3,$$

zatem

$$a = 3 \cdot 47,7 \text{ atm} (3,3 \text{ cm}^3 \cdot \text{g}^{-1})^3 = 1,579 \cdot 10^8 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^4}{\text{kg}^3},$$

$$b = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg},$$

$$R' = 75,67 \text{ J/kg} \cdot \text{K}.$$

3.68. Na podstawie definicji modułu ściśliwości  $K$  wyrażony jest związkiem

$$dp = -K \frac{dV}{V}, \quad \text{a więc} \quad K = -V \frac{dp}{dV}.$$

Zakładając, że  $T = \text{const}$ , na podstawie równania Van der Waalsa otrzymujemy dla gramocząsteczki gazu

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2},$$

a więc

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = -\left(\frac{RT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^3}\right),$$

zatem

$$K = \frac{RTV}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^2}$$

3.69. Z definicji modułu ściśliwości wynika, że

$$K = -V \frac{dp}{dV}.$$

W przypadku gramocząsteczki gazu otrzymujemy

$$pV = RT, \quad \text{zatem} \quad p = \frac{RT}{V},$$

a więc

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{RT}{V^2}, \quad \text{zatem} \quad K = \frac{RT}{V}.$$

3.70. W przypadku gramocząsteczki gazu doskonałego (zadanie 3.68 i 3.69) moduł ściśliwości wynosi

$$K_d = \frac{RT}{V},$$

w przypadku gazu rzeczywistego

$$K_r = \frac{RTV}{(V-b)^3} - \frac{2a}{V^2}. \quad \text{a więc} \quad \frac{K_r}{K_d} = \frac{V^2}{(V-b)^3} - \frac{2a}{RTV},$$

pomijając drugi wyraz jako bardzo mały w porównaniu z pierwszym, otrzymujemy

$$\frac{K_r}{K_d} = \left( \frac{V}{V-b} \right)^3 = \left( \frac{1}{1 - \frac{b}{V}} \right)^3 = 1 + 2 \frac{b}{V}.$$

3.71. Według zadania 3.67 mamy

$$a = 3p_c V_c^3, \quad \text{lecz} \quad V_c = \frac{3}{8} \frac{RT_c}{p_c},$$

zatem

$$a = \frac{27}{64} \frac{R^3 T_c^3}{p_c} = 0,365 \frac{\text{J}}{\text{mol}^3},$$

$$b = \frac{RT_c}{8p_c} = 4,26 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}^2}.$$

3.72. Na podstawie zadania 3.67 wiemy, że

$$V_c = 3b = 9,9 \text{ m}^3/\text{kmol},$$

$$p_c = \frac{a}{3V_c^3} = \frac{a}{27b^3} = 56,6 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2,$$

$$T_c = \frac{8p_c V_c}{3R} = \frac{8a}{27bR} = 163,8 \text{ K}.$$

Dane doświadczalne wynoszą

$$T_c = 154,36 \text{ K}, \quad p_c = 50,35 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

3.73. Na podstawie zadania 3.67 mamy

$$p_c = \frac{a}{27b^3} = 2,28 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2, \quad T_c = \frac{8a}{27bR} = 657,6 \text{ K}.$$

Dane doświadczalne

$$p_c = 2,20 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2, \quad T_c = 647,16 \text{ K}.$$

3.74. Na podstawie zadania 3.67

$$V_c = 3b, \quad A_{\text{CO}_2} = 44 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}, \quad \text{zatem} \quad \rho_c = \frac{A_{\text{CO}_2}}{3b} = 341 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Dane doświadczalne  $\rho_c = 460 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

3.75. Z pierwszej zasady termodynamiki wiadomo, że dla gazów doskonałych

$$dU = dQ + dW.$$

Dla procesu adiabatycznego gazu doskonałego  $dQ = 0$ , a więc  $dU = dW$ , czyli  $U_2 - U_1 = -p_1 V_1 + p_2 V_2$ . Dla gazów rzeczywistych  $dQ$  nie będzie równało się zeru tylko będzie wynosiło

$$dQ = U_2 - U_1 - (p_2 V_2 - p_1 V_1).$$

Zmiana  $U$  następuje pod wpływem pracy ciśnienia wewnętrznego i wynosi

$$dU = -p_w dV = -\frac{a}{V^2} dV,$$

skąd

$$U = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V^2} dV = \frac{a}{V_2} - \frac{a}{V_1},$$

zatem

$$-dQ = \frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_2} + p_2 V_2 - p_1 V_1.$$

Ale z równania Van der Waalsa, pomijając wyraz  $b/V^3$  otrzymujemy

$$pV + \frac{a}{V} - pb = RT.$$

Przyjmując w przybliżeniu, że  $\frac{1}{V} = \frac{p}{RT}$  otrzymujemy

$$p_1 V_1 = -\frac{ap_1}{RT} + p_1 b + RT,$$

$$p_2 V_2 = -\frac{ap_2}{RT} + p_2 b + RT.$$

Zatem

$$p_2 V_2 - p_1 V_1 = \frac{a}{RT} (p_1 - p_2) + (p_2 - p_1) b = \left( \frac{a}{RT} - b \right) (p_1 - p_2).$$

Ponadto,

$$\frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_2} = \frac{a}{RT} (p_1 - p_2).$$

A więc

$$-dQ = (p_1 - p_2) \left( \frac{2a}{RT} - b \right), \quad \text{gdzie zawsze } p_1 > p_2.$$

A więc, aby gaz zaczął się oziębiać w warunkach podanych w zadaniu, musi być

$$\frac{2a}{RT} - b > 0,$$

czyli

$$T < \frac{2a}{Rb}$$

W wypadku równości temperaturę taką nazywamy temperaturą inwersji. W naszym przypadku musi zachodzić nierówność

$$T < 2831 \text{ K}.$$

3.76. Na podstawie zadania 3.75 otrzymujemy wartość na tę temperaturę

$$T_i = \frac{2a}{RT} = 1906 \text{ K}.$$

3.77. Na podstawie zadania 3.75 otrzymujemy

$$-dQ = (p_1 - p_2) \left( \frac{2a}{RT} - b \right) = 0,0102 \text{ J/mol}.$$

3.78. Na podstawie zadania 3.75 otrzymujemy

$$-dQ = 0,0917 \text{ J/mol}.$$

3.79. Na podstawie równania gazów doskonałych liczymy zależność ciśnienia gazu doskonałego od temperatury zakładając, że w temperaturze  $T_0$  ciśnienie gazu i pary są takie same.

$T$ w K	273,16	283,16	293,16	303,16
$p_g$ w Tr	26142	26837	28062	28516

Z tego wynika, że  $\Delta p = 3,49 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ , a ponieważ  $A = 44 \text{ kg/kmol}$ , zatem

$$\frac{m}{V} = 153 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

3.80. Zakładając, że ciśnienie gazu doskonałego w temperaturze  $T_0$  jest takie samo jak ciśnienie pary nasyconej alkoholu etylowego w tej temperaturze, otrzymujemy na podstawie równania gazów doskonałych zależność ciśnienia gazu doskonałego od temperatury  $p_T = p_0 (1 + \beta \Delta T)$

$T$ w K	273,16	278,16	283,16	288,16	293,16	298,16	303,16
$p_g$ w Tr	12,2	12,4	12,6	12,9	13,1	13,3	13,5

Różnica ciśnień wynosi więc dla żądanej temperatury

$$\Delta p = 65,3 \text{ Tr} = 87,04 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2.$$



Dla alkoholu etylowego

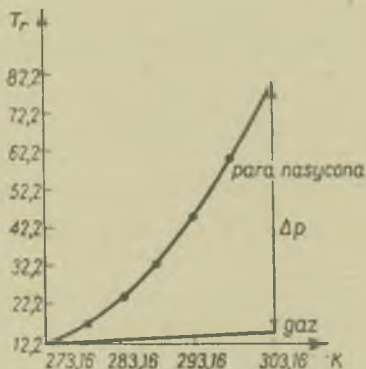
$$A = 46 \text{ kg/kmol} \quad \text{oraz} \quad T = 303,16 \text{ K},$$

$$R = 8314 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}.$$

Z równania gazów otrzymujemy więc, że

$$\frac{m}{V} = \frac{\Delta p A}{RT} = 0,159 \text{ kg/m}^3.$$

Rysunek przedstawia charakter zależności pary nasyconej oraz gazu od temperatury (rys. 3.7).



Rys. 3.7

3.81. Stosując zależność ciśnienia pary nasyconej od temperatury podanej wzorem

$$\log p = -0,05223 \frac{a}{T} + b,$$

otrzymujemy następujące wartości (ograniczając się do obliczeń co 10 K).

$T$ w K	$\log p$	$p$ w Tr	$p$ w $\text{N/m}^2$
100	7,7059	$5,8 \cdot 10^{-7}$	$6,67 \cdot 10^{-5}$
110	5,6873	$4,868 \cdot 10^{-5}$	$6,49 \cdot 10^{-3}$
120	4,4112	$3,638 \cdot 10^{-4}$	$4,84 \cdot 10^{-2}$
130	3,4655	$2,921 \cdot 10^{-3}$	$3,89 \cdot 10^{-1}$
140	2,3606	$2,294 \cdot 10^{-2}$	3,06
150	1,1316	$1,354 \cdot 10^{-1}$	17,1
160	1,8155	0,654	$0,87 \cdot 10^2$
170	0,4150	2,60	$3,47 \cdot 10^2$
180	0,9460	8,83	$1,18 \cdot 10^3$
190	1,4224	26,45	$3,53 \cdot 10^3$
200	1,8516	71,05	$9,47 \cdot 10^3$

3.82. Zależność ciśnienia pary nasyconej amoniaku (wyrażonej w Tr) od temperatury można oddać wzorem

$$\log p = -\frac{0,05223a}{T} + b,$$

a więc u nas

$$\log p = -0,05223 \frac{31211}{200} + 9,9974 = 1,8516,$$

skąd

$$p = 71,05 \text{ Tr} = 9,47 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2.$$

3.83. Jeżeli rozpuścimy  $m = A$  kg ciała w  $M = 0,1$  kg rozpuszczalnika, otrzymujemy obniżenie temperatury nazywane obniżeniem molowym, z którego obliczamy stałą gazów  $R$

$$R = -\frac{\Delta T \cdot 0,1 \cdot q}{T^2}.$$

Szukane przez nas obniżenie temperaturowe

$$-\Delta T' = \frac{\Delta T \cdot 0,1 \cdot q}{T^2} \frac{m}{M} \frac{T^2}{Aq} = 0,63 \text{ K}.$$

3.84. Oznaczając obniżenie cząsteczkowe przez  $\Delta T$ , a obniżenie dla warunków podanych w zadaniu przez  $\Delta T_1$ , otrzymujemy wartość  $A$

$$A = \frac{0,1 \cdot m}{M} \frac{\Delta T}{\Delta T_1} = 0,3426 \text{ kg/mol}, \quad \text{bo } M = 1 \text{ kg}.$$

Obliczona wartość na podstawie wzoru  $C_{12}H_{22}O_{11}$  wynosi 0,342 kg/mol.

3.85.  $A = 0,059$  kg/mol.

3.86. Masa pary wodnej, znajdującej się na sali, wynosi

$$m = \varrho_1 V,$$

gdzie  $V = 100 \text{ m}^3$  a  $\varrho_1$  jest masą właściwą pary wodnej w temperaturze  $T_1$ . Natomiast

$$\varrho_1 = s \varrho_1',$$

gdzie  $\varrho_1'$  oznacza masę właściwą powietrza w temperaturze otoczenia pod ciśnieniem równym ciśnieniu pary wodnej znajdującej się na sali. Oznaczając przez  $\varrho_2$  masę właściwą powietrza w temperaturze  $T_0$ , lecz pod ciśnieniem pary wodnej  $p_2$ , otrzymujemy

$$\varrho_1' = \frac{\varrho_2}{1 + \gamma \Delta T_1}, \quad \text{gdzie } \Delta T_1 = 20 \text{ K}.$$

Sprowadzając masę właściwą powietrza  $\varrho$  do warunków normalnych otrzymamy

$$\varrho_2 = \varrho \frac{p_2}{p_0},$$

zatem

$$m = Vs \varrho \frac{p_2}{p_0} \frac{1}{1 + \gamma \Delta T_1} = 0,6445 \text{ kg}.$$

3.87. W celu obliczenia bezwzględnej wilgotności powietrza należy obliczyć ilość pary wodnej znajdującej się w objętości  $1 \text{ m}^3$ . Jeśli oznaczymy jej masę właściwą w temperaturze  $T_1$  przez  $\rho_1'$  otrzymamy

$$m = V\rho_1'$$

Ponieważ

$$\rho_1' = s\rho_1,$$

gdzie  $\rho_1$  oznacza masę właściwą powietrza w warunkach podanych w zadaniu, zatem

$$m = Vs\rho_1.$$

Natomiast wiemy, że

$$\rho_1 = \frac{\rho}{1 + \gamma \Delta T_1} \frac{p_1}{p_0},$$

$$m = Vs \frac{\rho}{1 + \gamma \Delta T_1} \frac{p_1}{p_0} = 0,0245 \text{ kg}.$$

Wilgotność względna tego powietrza wyrażona w procentach wynosi

$$w = \frac{p_2}{p_1} 100\% = 27,5\%.$$

3.88. Ilość ciepła przewodzonego obliczamy, podstawiając dane do wzoru

$$Q = \lambda S \tau \frac{T_1 - T_2}{d} = 6,94 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

Należy więc spalić ilość węgla równą

$$m = 13,82 \text{ kg}.$$

3.89. Ilość ciepła przewodzonego przez ścianki szklane wynosi

$$Q = qS\Delta T_1\tau = 2351 \text{ J}.$$

Zatem ilość gramów stopionego lodu przez to ciepło wynosi

$$m = \frac{Q}{q} = 0,007 \text{ kg}.$$

3.90. Ilość ciepła przewodzonego przez każdy pręt w warunkach równowagi jest taka sama. Wyrażamy ją wzorem

$$Q = \lambda S \frac{\Delta T}{l} \tau.$$

Ponieważ pole przekrojów  $S$ , długości prętów  $l$  oraz czas przepływu ciepła  $\tau$  przez każdy z tych prętów jest taki sam, otrzymujemy w warunkach równowagi równania

$$\lambda_1 \Delta T_1 = \lambda_2 \Delta T_2 = \lambda_3 \Delta T_3 = \lambda_4 \Delta T_4$$

oraz

$$\Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3 + \Delta T_4 = \Delta T = T_0 - T_K.$$

Obliczając poszczególne dane otrzymujemy

$$\Delta T_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Delta T_1, \quad \Delta T_3 = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \Delta T_1, \quad \Delta T_4 = \frac{\lambda_1}{\lambda_4} \Delta T_1,$$

a więc

$$\Delta T_1 = \frac{\Delta T}{1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_1}{\lambda_4}} = 60,3 \text{ K},$$

$$\Delta T_2 = \frac{\Delta T}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_4}} = 10,0 \text{ K},$$

$$\Delta T_3 = \frac{\Delta T}{\frac{\lambda_3}{\lambda_1} + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} + 1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_4}} = 60,3 \text{ K},$$

$$\Delta T_4 = \frac{\Delta T}{\frac{\lambda_4}{\lambda_1} + \frac{\lambda_4}{\lambda_2} + \frac{\lambda_4}{\lambda_3} + 1} = 69,4 \text{ K}.$$

3.91. Oznaczmy całkowitą ilość ciepła potrzebną do stopienia próbki. Wynosi ona

$$Q = mq.$$

Różniczkując obie strony względem czasu otrzymujemy

$$\frac{dQ}{dt} = q \frac{dm}{dt}. \quad (3.91.1)$$

Całkowita powierzchnia próbki wynosi  $S = 6a^2$ . Ilość ciepła na sekundę pobierana przez próbkę jest proporcjonalna do jej powierzchni. Wprowadzając zatem współczynnik proporcjonalności  $k$  oraz uwzględniając, że  $dm/dt$  jest ujemne (ze wzrostem czasu masa maleje) otrzymamy

$$q \frac{dm}{dt} = -6ka^2,$$

skąd

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{6ka^2}{q}. \quad (3.91.2)$$

Ponieważ objętość próbki oraz masa właściwa wyznaczają masę próbki, więc

$$m = \rho V$$

oraz

$$a^2 = V^{2/3}. \quad (3.91.3)$$

Stąd zmienna masy w czasie wynosi

$$\frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} \quad (3.91.4)$$

oraz

$$a = V^{1,3}.$$

Podstawiając wzór (3.91.3) i (3.91.4) do wzoru (3.91.2) otrzymujemy

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{6k}{\rho q} V^{2/3}. \quad (3.91.5)$$

Całkujemy obie strony wzoru (3.91.5)

$$\int \frac{dV}{V^{2/3}} = - \int \frac{6k}{\rho q} dt.$$

Otrzymujemy stąd

$$3V^{1/3} = -\frac{6k}{\rho q} t + c.$$

W chwili początkowej  $t = 0$  stała całkowania wynosi

$$c = 3a.$$

W każdej chwili długość próbki wynosi  $a' = V^{1/3}$ . Otrzymujemy więc

$$3a' = \frac{6k}{\rho q} t + 3a, \quad \text{skąd} \quad t = \frac{\rho q}{6k} 3(a - a').$$

Próbka ulega stopieniu wtedy, gdy  $a' = 0$ ; czas topnienia wynosi więc

$$t = \frac{aq\rho}{2k}.$$

3.92. Średnia wartość prędkości wynosi

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^7 \frac{n_i \bar{v}_i}{n_i} = \frac{n_1 \bar{v}_1 + n_2 \bar{v}_2 + n_3 \bar{v}_3 + n_4 \bar{v}_4 + n_5 \bar{v}_5 + n_6 \bar{v}_6 + n_7 \bar{v}_7}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7} = 193 \text{ m/s}.$$

Pierwiastek ze średniego kwadratu prędkości równa się

$$v_1 = \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{n_1 v_1^2 + n_2 v_2^2 + n_3 v_3^2 + n_4 v_4^2 + n_5 v_5^2 + n_6 v_6^2 + n_7 v_7^2}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7}} = 206,5 \text{ m/s}.$$

Widzimy więc, że pierwiastek ze średniego kwadratu prędkości jest większy od średniej prędkości

$$v_1 > \bar{v}.$$

3.93. Na podstawie wzoru Maxwella mamy

$$\frac{dn}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} e^{-\frac{E}{kT}} \sqrt{E} dE, \quad \text{ale} \quad E = \frac{1}{2}mv^2, \quad dE = mv dv,$$

zatem

$$\frac{dn}{n} = f(v)dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$



Najbardziej prawdopodobną prędkością będzie ta, dla której  $f(v)$  osiąga wartość maksymalną, a więc

$$\frac{df(v)}{dv} = 0, \quad \text{skąd} \quad v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}},$$

a podstawiając  $k = \frac{R}{N}$  oraz  $A = mN$  otrzymujemy

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{A}}.$$

3.94. Na podstawie wzoru Maxwella otrzymujemy

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^4 \frac{dn}{n} = \int_0^{\infty} v^2 \sqrt{\frac{2}{\pi} \left(\frac{m}{kT}\right)^3} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$

Podstawiając  $v^2 = \frac{2kT}{m} x^2$ ,  $v^4 = \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 x^4$

$$dv = \sqrt{\frac{2kT}{m}} dx$$

otrzymujemy

$$\overline{v^2} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \frac{kT}{m} \int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \frac{kT}{m} \frac{3}{8} \sqrt{\pi} = 3 \frac{kT}{m},$$

ale  $k = \frac{R}{N}$  oraz  $mN = A$ , zatem

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{A}}.$$

3.95. Na podstawie wzoru Maxwella

$$\frac{dn}{n} = f(u) du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 du.$$

Najbardziej prawdopodobna prędkość względna jest tą prędkością, dla której  $dn/n$  osiąga wartość maksymalną, a więc

$$\frac{df(u)}{du} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} (-u^2) 2u e^{-u^2} u^2 + \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} 2u = 0,$$

skąd

$$-u^4 + 1 = 0, \quad \text{a więc} \quad u = 1.$$

Najbardziej prawdopodobna prędkość względna wynosi więc w każdej temperaturze 1.

3.96. Dla wodoru  $A = 2$  kg/kmol, zatem

$$v_p = 1,41 \sqrt{\frac{8314 \cdot 300}{2}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1575 \text{ m/s},$$

$$\bar{v} = 1,60 \sqrt{\frac{8314 \cdot 300}{2}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1787 \text{ m/s},$$

$$\sqrt{\bar{v}^2} = 1,73 \sqrt{\frac{8314 \cdot 300}{2}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1932 \text{ m/s}.$$

3.97. Na podstawie teorii kinetycznej gazów wiemy, że

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT,$$

a więc uwzględniając, że  $m_d = 2m_p$  otrzymujemy

$$\bar{v}_d^2 = \frac{3kT}{m_d} = \frac{1}{2} \bar{v}_p^2.$$

Uwzględniając wartość stałej Boltzmanna otrzymujemy

$$\sqrt{\bar{v}_p^2} = 8,4 \cdot 10^4 \text{ m/s}, \quad \sqrt{\bar{v}_d^2} = 7 \cdot 10^4 \text{ m/s}.$$

Stosunek tych prędkości

$$\frac{\sqrt{\bar{v}_d^2}}{\sqrt{\bar{v}_p^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,83.$$

3.98. Bierzemy cząsteczkę o trzech stopniach swobody  $f = 3$ , tzn. uwzględniamy tylko energię kinetyczną ruchu postępowego. Na średnią wartość otrzymujemy wzór

$$\bar{E} = \int_0^{\infty} E \frac{dn}{n} = \int_0^{\infty} E \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} e^{-\frac{E}{kT}} \sqrt{E} dE.$$

Podstawiając  $E = \frac{1}{2} m v^2$ , zatem  $dE = m v dv$  otrzymujemy

$$\bar{E} = \frac{2m}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^3} \int_0^{\infty} v^4 e^{-\frac{m}{2kT} v^2} dv.$$

Podstawiając  $v^2 = x^2 \frac{2kT}{m}$ , zatem  $v = \sqrt{\frac{2kT}{m}} x$  oraz  $dv = \sqrt{\frac{2kT}{m}} dx$  otrzymujemy

$$\bar{E} = \frac{4kT}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx.$$

Całkę tę można sprowadzić do tzw. całki  $H(x)$ , a więc

$$\bar{E} = \frac{4kT}{\sqrt{\pi}} \frac{3\sqrt{\pi}}{8} = 3 \frac{kT}{2} = f \frac{kT}{2},$$

a więc

$$\frac{\bar{E}}{f} = \frac{1}{2} kT.$$

3.99. Na podstawie wzoru Maxwella otrzymujemy

$$\frac{dn}{n} = f(E) dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} e^{-\frac{E}{kT}} \sqrt{E} dE.$$

Energia najbardziej prawdopodobna to ta, dla której  $f(E)$  osiąga maksimum

$$\frac{df(E)}{dE} = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} \left( -\frac{E}{kT} \right) e^{-\frac{E}{kT}} \sqrt{E} + \frac{4}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} e^{-\frac{E}{kT}} \frac{1}{2} \sqrt{E} = 0,$$

skąd

$$E = \sqrt{\frac{kT}{2}}.$$

3.100. Wiemy z teorii, że średnia energia kinetyczna cząsteczki gazu przypadająca na jeden stopień swobody wynosi

$$\frac{\bar{E}_k}{f} = \frac{1}{2} kT,$$

gdzie  $k$  — oznacza stałą Boltzmana, a u nas  $f = 5$ , więc

$$\bar{E}_k = \frac{5}{2} kT$$

dla cząsteczki. Dla mola takiego gazu otrzymujemy na wartość energii kinetycznej  $E_k = \frac{5}{2} kNT = 2,5RT$ , gdzie  $R$  jest stałą gazów. Przeprowadzając szczegółowe obliczenia otrzymujemy

$$E_1 = 1518 \text{ J/mol}, \quad E_2 = 3594 \text{ J/mol}, \quad E_3 = 5669 \text{ J/mol},$$

$$E_4 = 7445 \text{ J/mol}, \quad E_5 = 9820 \text{ J/mol}.$$

3.101. Na podstawie teorii kinetycznej gazów średnia energia kinetyczna cząsteczki gazu w temperaturze  $T$  wynosi

$$\bar{E} = \frac{3}{2} kT,$$

a więc w pierwszym przypadku

$$\bar{E}_1 = \frac{3}{2} kT_1 = 3,58 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,022 \text{ eV}.$$

Analogicznie w przypadkach dalszych otrzymujemy

$$\bar{E}_2 = 5,65 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,035 \text{ eV},$$

$$\bar{E}_3 = 7,72 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,048 \text{ eV},$$

$$\bar{E}_4 = 2,64 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0,165 \text{ eV}.$$

3.102. Średnia prędkość cząsteczek tlenu w podanych warunkach wynosi

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}, \quad \text{gdzie} \quad \rho = \frac{m}{V}.$$

Wartość  $V$  można obliczyć z równania charakterystycznego gazu doskonałego

$$V = \frac{m}{A} \frac{RT}{p}, \quad \text{zatem} \quad \rho = \frac{A}{RT} p,$$

a więc

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{A}}.$$

Na podstawie danych w zadaniu otrzymujemy w przypadku  $T$

$$\bar{v}_1 = 27,80 \sqrt{T} \text{ m/s} = 365,7 \text{ m/s}.$$

Pozostałym wartościom temperatur odpowiadają następujące wartości prędkości:

Temperatura (K)	Prędkość (m/s)	Temperatura (K)	Prędkość (m/s)
$T_0$	$\bar{v}_2 = 460,6$	$T_6 = 873,16$	$\bar{v}_8 = 826,4$
$T_1 = 373,16$	$\bar{v}_3 = 538,8$	$T_7 = 973,16$	$\bar{v}_9 = 871,0$
$T_2 = 473,16$	$\bar{v}_4 = 605,8$	$T_8 = 1073,16$	$\bar{v}_{10} = 912,9$
$T_3 = 573,16$	$\bar{v}_5 = 667,2$	$T_9 = 1173,16$	$\bar{v}_{11} = 954,8$
$T_4 = 673,16$	$\bar{v}_6 = 725,9$	$T_{10} = 1273,16$	$\bar{v}_{12} = 993,9$
$T_5 = 773,16$	$\bar{v}_7 = 776,1$		

Z otrzymanych wartości sporządzamy wykres zależności prędkości od czasu (rys. 3.8).

3.103. Prędkości obliczamy z wzoru

$$\bar{v}_1 = \sqrt{\frac{3RT}{A_1}} = 1035 \text{ m/s},$$

$$\bar{v}_2 = \sqrt{\frac{3RT}{A_2}} = 662 \text{ m/s}.$$

3.104. Średni kwadrat prędkości wynosi

$$\bar{v}^2 = \frac{3RT}{m},$$

lecz masa helu  $m = 4m_p$ , zatem

$$\bar{v}^2 = \frac{2kT}{4m_p} = 1,857 \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

3.105. Na podstawie wzoru Maxwella otrzymujemy

$$n = \int_{1,2u}^{\infty} \frac{dn}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{1,2u}^{\infty} u^2 e^{-u^2} du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{10} = 0,4.$$

Całki tego typu są trudne do obliczania, należy więc wartości takich całek  $u^n$ , gdy  $n$  jest parzyste, wziąć z tablic wartości funkcji  $H(x)$ .

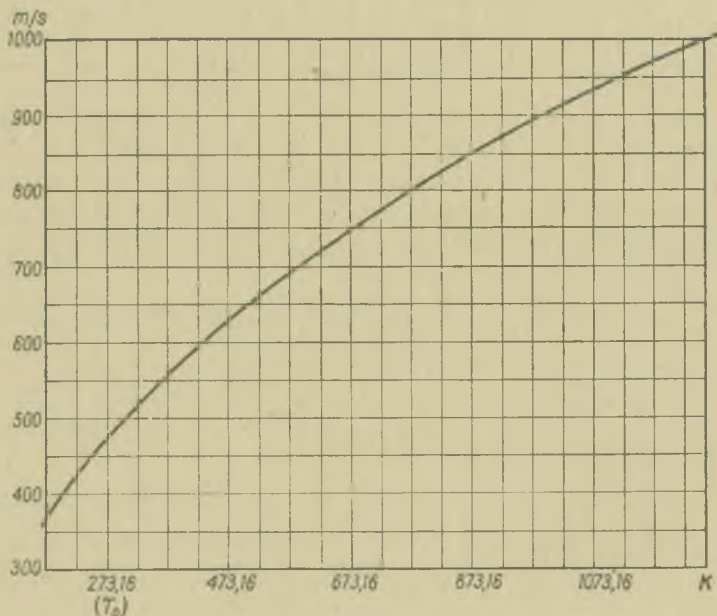
3.106. Stosując wzór Maxwella dla tego przypadku otrzymamy  $\frac{\Delta n}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{u_1^2}{u_1^2} \Delta u =$

$= 1,18$ , a zatem więcej niż 100%. Dlatego zadanie to należy rozwiązywać w inny sposób. W zadaniu tym  $\Delta u$  jest za duże. Należy sporządzić krzywą zależności  $n'/n$  w zależności od  $u$ , gdzie  $n'$  oznacza liczbę cząsteczek o prędkościach większych od  $u$ . W naszym przypadku  $u' = \frac{2280}{1575} = 1,4u$ . Otrzymujemy więc, że  $n'/n = 0,3$ , co oznacza, że 30% cząstek ma prędkość większą od  $u'$ , a więc w naszym przedziale znajduje się około 70%

cząstek. Porównanie z zadaniem 3.107 wskazuje od razu, że zadanie 3.107 jest w przybliżeniu rozwiązane. Zadanie to obliczone w ten sam sposób co obecne daje

$$u' = \frac{1999}{1575} = 1,2u, \quad \text{a więc} \quad \frac{n'}{n} = 0,42,$$

czyli w żądanym przedziale prędkości byłoby tylko 58% cząsteczek, a nie 71%, jak to otrzymaliśmy pierwotnie.



Rys. 3.8

**3.107.** Mamy  $v_p = 1575$  m/s oraz  $\Delta v = 212$  m/s, a więc szukamy procentu cząsteczek o prędkościach zawartych w przedziale  $v_1 = 1575$  m/s oraz  $v_2 = 1999$  m/s. Przedział ten dla prędkości względnych wynosi

$$u_1 = \frac{1575}{1575} = 1 \quad \text{oraz} \quad u_2 = \frac{1999}{1575} = 1,269.$$

Stosując więc rozkład Maxwella, otrzymamy wartości przybliżone z powodu dużego przedziału prędkości względnych  $\Delta u = 0,269$

$$\frac{\Delta n}{n} \approx \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u_1^2} u_1^2 \Delta u = \frac{4}{0,564} \frac{1}{2,718} 0,269 = 0,71,$$

czyli 71%.



3.108. Na masę kmola otrzymujemy wartość ze związku  $A = \frac{C_v}{c_v} = 44 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$ , a więc ciężar cząsteczkowy wynosi 44. Znając liczbę Avogadra  $N = 6,0 \cdot 10^{26} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$  otrzymujemy na masę cząsteczki  $\text{CO}_2$  wartość

$$m_{\text{CO}_2} = \frac{A}{N} = 7,3 \cdot 10^{-26} \text{ kg}.$$

3.109. Jeżeli przez  $\sigma$  oznaczymy średnicę atomu, atom ten, uderzając o ścianę naczynia i odbijając się od niej, a następnie uderzając drugi atom, nie będzie przebywał drogi swobodnej  $\lambda$ , lecz drogę mniejszą,  $\lambda - \sigma$ . Gdy uwzględnimy różne zderzenia, a więc i zderzenia skośne, to zmniejszenie to będzie mniejsze i będzie wynosiło  $\lambda - \frac{\sigma}{2}$ . Ciśnienie więc dla gazów rzeczywistych wzrośnie wskutek wzrostu ilości zderzeń w stosunku

$$\frac{\lambda}{\lambda - \frac{\sigma}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{\sigma}{2\lambda}}.$$

Przyjmując, że droga swobodna wynosi  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n_0 \sigma^2}$  otrzymujemy na ten stosunek wartość

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi n_0 \sigma^3},$$

gdzie  $n_0$  oznacza liczbę cząsteczek w  $\text{m}^3$ , a więc  $n_0 = \frac{N}{V_0}$ , gdzie  $N$  oznacza liczbę cząstek znajdującą się w objętości kmola  $V_0$ . Po wprowadzeniu tej wartości otrzymujemy na poprawkę ciśnienia w równaniu Van der Waalsa wartość

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi N \sigma^3, \quad \text{skąd} \quad \sigma = 3 \sqrt{\frac{b\sqrt{2}}{\pi N}}.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy

$$\sigma = \frac{9}{10^{10}} \sqrt[3]{b}.$$

Uwzględniając dane na  $b$  dla poszczególnych atomów (cząsteczek) otrzymamy

$$\sigma_{\text{Br}} = 3,2 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \quad \sigma_{\text{He}} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \\ \sigma_{\text{H}_2\text{O}} = 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

3.110. Wiemy, że  $p = nkT$ , gdzie  $n$  oznacza liczbę cząsteczek w  $\text{m}^3$ . Oznaczając przez  $\bar{v}_1$  oraz  $\bar{v}_2$  średnie prędkości cząsteczek w obu naczyniach, z równania ciągłości otrzymujemy

$$\bar{n}_1 \bar{v}_1 = \bar{n}_2 \bar{v}_2,$$

a więc z teorii gazów oraz z teorii kinetycznej gazów otrzymujemy

$$\frac{\bar{p}_1 v_1}{T_1} = \frac{\bar{p}_2 v_2}{T_2} \quad \text{oraz} \quad \frac{\bar{v}_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}},$$

skąd

$$p_1 = p_2 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}},$$

skąd

$$\Delta p = p_2 - p_1 = p_1 \left[ \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1 \right] = 0,081 \text{ N/m}^2.$$

A zatem  $p_2 = 1,094 \text{ N/m}^2$ .

$$3.111. T_2 = T_1 \left[ \frac{p_1 + \Delta p}{p_1} \right]^2 = 330,56 \text{ K}.$$

$$3.112. \lambda_{\text{rzecz}} = \frac{V}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 N}, \quad \text{gdzie } V = 6,02 \cdot 10^{26} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1} \quad N = 22,422 \frac{\text{m}^3}{\text{kmol}}, \quad \text{a więc}$$

$$\lambda_{\text{rzecz}} = 4,9 \cdot 10^{-12} \text{ m}.$$

$$3.113. \text{Wiemy, że } \frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \text{ale } \frac{p_1}{p_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad \text{Zatem } p_2 = p_1 \frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} = 5,06 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2.$$

$$3.114. \text{Wiadomo, że } \bar{l} = \frac{3\eta}{\rho v}, \quad \text{gdzie } \rho = \frac{A}{V}, \quad \text{gdzie } A = 4 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \quad \text{oraz } V =$$

$$= 22,422 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{kmol}} \quad \text{oraz z teorii kinetycznej gazów}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3k}{m}} T, \quad \text{gdzie } k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Na podstawie tych danych otrzymujemy

$$\bar{l} = \frac{3\eta V}{A} \sqrt{\frac{m}{3kT}} = 6,13 \cdot 10^{-12} \text{ m}.$$

3.115. Oznaczając przez  $n_1$  liczbę cząstek azotu pod ciśnieniem 1 atm, a przez  $n_0$  — liczbę cząstek pod szukanym ciśnieniem, otrzymujemy

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n_1} \quad \text{oraz} \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n_0},$$

skąd

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_0}. \quad (3.115.1)$$

Z równania charakterystycznego gazów doskonałych mamy

$$p_1 = \frac{RT}{V_1} = \frac{kNT}{V_1} = kn_1 T \quad (3.115.2)$$

oraz

$$p_0 = kn_0T. \quad (3.115.3)$$

Z wzorów (3.115.1), (3.115.2) i (3.115.3) wynika, że

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{p_1}{p_0},$$

a więc

$$p_0 = p_1 \frac{\lambda_1}{\lambda} = 6,078 \text{ N/m}^2.$$

**3.116.** Chcąc, aby przewodnictwo cieplne wodoru spełniało żądany warunek, średnia droga swobodna  $\lambda$  powinna być większa od odległości  $d$  ścianek termosu, a więc

$$\lambda > d,$$

gdzie

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n}. \quad (3.116.1)$$

Z równania charakterystycznego gazów doskonałych mamy

$$p = \frac{RT}{V} = \frac{kNT}{V} = knT,$$

zatem

$$n = \frac{p}{kT} \quad (3.116.2)$$

Z wzorów (3.116.1) i (3.116.2) otrzymujemy

$$\frac{kT}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 p} > d, \quad (3.116.3)$$

a stąd

$$p < \frac{kT}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 d} = 3,45 \text{ N/m}^2.$$

**3.117.** Przyjmując, że termos ma działać w temperaturze otoczenia, można w przybliżeniu przyjąć, że  $T = 300 \text{ K}$ . Przewodnictwo warstwy azotu obniży się dopiero pod takim ciśnieniem, pod którym droga swobodna będzie większa od odległości ścianek naczyńa termosu. Zatem musi być

$$\frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n_0} > d, \quad \text{gdzie } p = n_0 kT,$$

skąd

$$p < \frac{kT}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 d} = 0,025 \text{ N/m}^2.$$

**3.118.**  $\bar{\lambda}_{\text{rzeczywiste}} = \bar{\lambda}_{\text{teoretyczne}} \frac{T_0}{C+T_0}$ , zatem

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sqrt{2} \pi n_0 \bar{\lambda}_{\text{rzecz}}} \frac{T_0}{C+T_0} = 0,812 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2,$$

skąd

$$\sigma = 9 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

**3.119.** Zależność średniej drogi swobodnej od temperatury podaje wzór

$$\bar{\lambda}_{\text{rzeczywiste}} = \bar{\lambda}_{\text{teoretyczne}} \frac{T}{C+T},$$

a więc

$$C = T \left[ \frac{\bar{\lambda}_t}{\bar{\lambda}_{rz}} - 1 \right], \quad \text{gdzie} \quad \bar{\lambda}_t = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n_0},$$

gdzie

$$n_0 = \frac{N}{V_{\text{kmola}}} = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \text{ kmol}^{-1}}{22,422 \text{ m}^3 \cdot \text{kmol}^{-1}} = 26,8 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}.$$

Zatem  $\bar{\lambda}_t = 1,00 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ , a stała Southerlanda  $C = 147,5 \text{ K}$ .

**3.120.** Jeżeli przez  $f$  oznaczymy liczbę stopni swobody cząsteczki pary alkoholu, przez  $r$  jej promień, a przez  $A$  ciężar cząsteczkowy oraz przez  $\bar{v}$  jej średnią prędkość, to na współczynnik przewodnictwa cieplnego otrzymamy wzór

$$\lambda = \frac{fk\bar{v}}{24\sqrt{2}\pi r^2}, \quad \text{gdzie} \quad k \text{ oznacza stałą Boltzmanna,}$$

a na współczynnik tarcia wewnętrznego wzór

$$\eta = \frac{A\bar{v}}{12\sqrt{2}\pi r^2},$$

skąd wynika, że

$$\frac{\lambda}{\eta} = \frac{fR}{2AN} = \frac{fR}{2m},$$

gdzie  $m$  oznacza masę mola tej pary. Na podstawie zasady ekwipartycji energii

$$C_v = \frac{1}{2} fR = mc_v.$$

Otrzymujemy więc

$$\lambda = c_v \eta = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{K} \cdot \text{s}^2.$$

Zadanie to wykazuje wyraźnie, że mechanizm ogrzewania oraz tarcia wewnętrznego jest taki sam, tylko przy ogrzewaniu chodzi o transport energii, a przy tarcu wewnętrznym — o transport pędu.

$$\mathbf{3.121.} \quad D_1 = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT_1}{\pi A}} \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n_1},$$

$$D_2 = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT_2}{\pi A}} \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n_2},$$

skąd

$$n_2 = n_1 \frac{D_1}{D_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \frac{N}{V} \frac{D_1}{D_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 2,08 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}.$$

3.122. Współczynnik dyfuzji jest wyrażony wzorem

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}, \quad \text{gdzie} \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi A}},$$

gdzie dla wodoru  $A = 1 \text{ kg/kmol}$ . A więc

$$D = 1,53 \bar{\lambda} \sqrt{\frac{T}{A}} = 0,404 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}.$$

3.123.  $z = \frac{\bar{v}}{l} = 9,1 \cdot 10^{20} \text{ s}^{-1}$ .

3.124.  $\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} = \rho D = 5,66 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$ .

3.125. Niech  $n$  oznacza ilość cząsteczek  $\text{H}_2\text{SO}_4$  w  $1 \text{ m}^3$  roztworu. Rozpadowi uległo  $\frac{4}{5}$  cząsteczek, a więc po dysocjacji ilość cząsteczek w  $1 \text{ m}^3$  roztworu wynosi  $n' = \frac{4}{5} \cdot 3 \cdot n + (1 - \frac{4}{5})n$ , gdyż każda z cząsteczek rozpadła się na trzy cząsteczki, a więc  $n' = \frac{1}{5} \cdot 3 \cdot n$ .

Ponieważ ciśnienie osmotyczne roztworu jest wprost proporcjonalne do liczby cząsteczek roztworu, więc stosunek ciśnienia osmotycznego  $p'$  po dysocjacji do ciśnienia osmotycznego przed dysocjacją wynosi  $\frac{p'}{p} = \frac{13}{5}$ .

Szukany wzrost ciśnienia osmotycznego wynosi więc  $\frac{8}{5}$  pierwotnego ciśnienia

3.126. Gdy kropla rozprysnie się, jej powierzchnia ulegnie zwiększeniu, a więc zwiększy się jej energia o pracę potrzebną do zwiększenia powierzchni

$$\Delta E = T \Delta S, \quad \text{ale} \quad \Delta S = n 4\pi r_1^2 - 4\pi r^2,$$

gdzie  $n$  oznacza ilość utworzonych kropelek, które obliczymy z warunku, że objętość  $n$  kropelek jest równa objętości kropelki pierwotnej

$$\frac{4}{3} n \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r_1^3, \quad \text{zatem} \quad n = \frac{r^3}{r_1^3}.$$

A więc powiększenie powierzchni równa się

$$\Delta S = 4\pi \left( \frac{r^3}{r_1^3} r_1^2 - r^2 \right) = 4\pi r^2 \left( \frac{r}{r_1} - 1 \right).$$

Stąd przyrost energii wynosi

$$\Delta E = 4\pi r^2 T \left( \frac{r}{r_1} - 1 \right) = 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2 \cdot 73 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}} \left( \frac{1}{10^{-3}} - 1 \right) = 9,2 \cdot 10^{-4} \text{ J}.$$

3.127. Energia potencjalna pierwotnej kropelki

$$E_p = \frac{4}{3} r^3 \rho g w,$$

a więc

$$\frac{4}{3} n \pi r^3 \rho g w = (4\pi n_1 r_1^2 - 4\pi r^2) T,$$

skąd

$$r_1 = \sqrt{\frac{\pi r^3 \rho g w + 3r^2 T}{3n_1 T}} = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}.$$



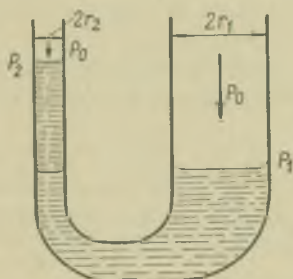
3.128. Jeżeli ciężar kuleczki osiągnie taką wartość, że może przewyciężyć siłę przeciwstawiającą się oderwaniu kropelki, wynającą z działania sił spójności, to kropelka oderwie się. Możemy to przedstawić następującym równaniem:

$$Q = 2\pi r \frac{T}{2} = \pi r T = 4,77 \cdot 10^{-4} \text{ N},$$

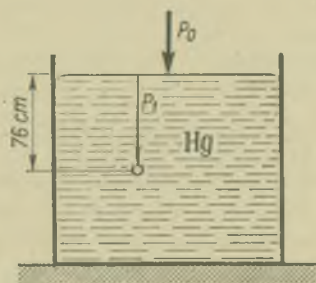
gdzie  $r$  oznacza promień wylotu rurki. Zatem masa odrywającej się kropelki oliwy wynosi  $m = 4,9 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$ .

3.129. Oznaczmy ciśnienie panujące na poziomie przechodzącym przez powierzchnię cieczy w rurce szerszej (rys. 3.9) przez  $p_1$ , a w rurce węższej przez  $p_2$ , ciśnienie atmosferyczne przez  $p_0$ , masę właściwą wody przez  $\rho$ , a przyspieszenie ziemskie przez  $g$ . Z warunków zadania wynika, że

$$p_1 + p_0 = p_2 + w \rho g + p_0,$$



Rys. 3.9



Rys. 3.10

gdzie  $p_1$  oraz  $p_2$  są to ciśnienia wynikające z istnienia napięcia powierzchniowego cieczy i wynoszą one

$$p_1 = \frac{2T}{r_1}, \quad p_2 = \frac{2T}{r_2}, \quad \text{a więc} \quad \frac{2T}{r_1} = \frac{2T}{r_2} + w \rho g,$$

skąd

$$\frac{2T(r_2 - r_1)}{r_1 r_2} = w \rho g,$$

a więc

$$T = \frac{r_1 r_2 w \rho g}{2(r_2 - r_1)} = 0,0735 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

3.130. Na ciśnienie panujące wewnątrz banieczki (rys. 3.10) składają się: 1) ciśnienie atmosferyczne  $p_0$ , 2) ciśnienie  $p_1$  wynikające z zanurzenia banieczki, 3) ciśnienie wynikające z napięcia powierzchniowego rtęci otaczającej tę banieczkę. Zachodzi więc związek

$$p = p_0 + p_1 + \frac{2T}{r}, \quad \text{skąd} \quad r = \frac{2T}{p - p_0 - p_1}.$$

Podstawiając podane w temacie wartości, otrzymujemy

$$r = 9,7 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

3.131. Na podstawie danych z § 1.5 mamy

$$J = 4,186 \cdot 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{cal}}$$

lub

$$J = 4,186 \frac{\text{dżul}}{\text{cal}} = 0,4268 \frac{\text{kGm}}{\text{cal}} = 426,8 \frac{\text{kGm}}{\text{kcal}},$$

albo

$$J = 2,613 \cdot 10^{19} \frac{\text{eV}}{\text{cal}} = 2,613 \cdot 10^{13} \frac{\text{MeV}}{\text{cal}},$$

gdzie

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-6} \text{ erg} = 1,602 \cdot 10^{-13} \text{ J}.$$

3.132. Ilość lodu, którą można by tym ciepłem stopić, wynosi więc

$$x = \frac{W}{q} = 0,588 \text{ kg}.$$

3.133. Nie uwzględniając poprawek relatywistycznych otrzymujemy, że energia kinetyczna jednego poruszonego się elektronu wynosi

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 32,805 \cdot 10^{-15} \text{ J}.$$

Energia równoważna ciepłu potrzebnemu do ogrzania drucika wynosi

$$E = mc\Delta T = 10,45 \cdot 10^{14} \text{ J}.$$

Ilość elektronów, które uderzyły o drucik, wynosi więc

$$n = \frac{E}{\frac{1}{2}E_k} = 6,5 \cdot 10^{14} \text{ elektronów}.$$

3.134. Ilość ciepła potrzebna do stopienia kulki wynosi

$$Q = m(c\Delta T + q).$$

Ciepło to powstało wskutek utracenia przez kulkę energii kinetycznej. Energię kinetyczną, która jest równoważna powstałemu ciepłu, obliczymy ze wzoru

$$E_k = \frac{1}{2}(mv^2),$$

zatem

$$0,5 \cdot \frac{1}{2}mv^2 = m(c_1\Delta t + q),$$

skąd

$$v^2 = 26,5496 \cdot 10^4 \text{ m}^2/\text{s}^2,$$

a więc

$$v = 515 \text{ m/s}.$$

3.135. Moc zawodnika  $P = \frac{W}{t} = \frac{1,7 \cdot 10^7}{8 \cdot 3600}$  watów = 3,48 W. W celu uzupeł-

nienia kalorycznego swego organizmu zawodnik ten musi przyjąć dzienne pożywienie o wartości kalorycznej około 4000 kcal.

3.136. Zakładając, że zawodnik otrzymuje przez cały czas biegu jednakowe tempo, ilość pracy wykonywana w każdej sekundzie przez zawodnika jest równa jego energii kinetycznej, a więc

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = 3750 \text{ J},$$

w każdej sekundzie całkowita praca na przebiegnięcie wynosić więc będzie

$$W_1 = 37500 \text{ J}.$$

Dochodzi do tego jeszcze dwa razy tyle pracy na wydalane ciepło, a więc całkowita praca wykonana przez zawodnika wynosi

$$W_c = 112500 \text{ J}.$$

Przeliczając tę pracę na kcal otrzymujemy  $Q = 27 \text{ kcal}$ .

3.137. Ponieważ z warunków zadania wynika, że  $V_1 = V_2$ , zatem z równania charakterystycznego gazów doskonałych otrzymujemy

$$T_2 = T_1 \frac{P_2}{P_1} = 74,54 \text{ K}.$$

Na podstawie pierwszej zasady termodynamiki mamy

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W,$$

w naszym przypadku

$$\Delta W = -p\Delta V = 0,$$

a więc zużyta praca równa się zeru.

Ponadto

$$\Delta U = \Delta Q = mc_v\Delta T = -6,74 \cdot 10^5 \text{ J} < 0.$$

Ciepło zostało więc przez powietrze oddane na zewnątrz.

3.138. Na podstawie warunków zadania otrzymujemy

$$T_1 = T_2 = 298,16 \text{ K}.$$

Z teorii wiemy, że

$$\Delta U = 0,$$

zatem na podstawie pierwszej zasady termodynamiki

$$\Delta W = -\Delta Q.$$

Z drugiej strony wiemy, że

$$\Delta W = mB^*T \ln \frac{V_1}{V_2} = -4,75 \cdot 10^5 \text{ J} < 0,$$

a więc praca została oddana, ciepło zaś w ilości

$$\Delta Q = -\Delta W > 0$$

zostało przez powietrze pobrane.

3.139. Dla warunków adiabatycznych mamy

$$\Delta Q = 0.$$

Z prawa Poissona otrzymujemy

$$\frac{p_2^{\kappa-1}}{T_1^{\kappa}} = \frac{p_2^{\kappa-1}}{T_2^{\kappa}},$$

a więc temperatura podczas tego procesu spadła do

$$T_2 = T_1 \sqrt[\kappa]{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\kappa-1}} = 200,7 \text{ K}.$$

Wykonana podczas tego procesu praca wyniosła

$$W = -\frac{R}{A} m \frac{T_1}{\kappa-1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = B' m \frac{T_1 - T_2}{\kappa-1} = -2,80 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

Praca ta została wykonana kosztem energii wewnętrznej powietrza.

**3.140.** Ciężar cząsteczkowy dwutlenku węgla

$$A = A_1 + 2A_2 = 44,$$

a więc ilość kilomoli w podanej w zadaniu ilości  $\text{CO}_2$  wynosi

$$n = \frac{2 \text{ kg}}{44 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}} = \frac{1}{22} \text{ kilomoli}.$$

Na podstawie prawa Boyle'a mamy

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{6},$$

a więc praca wykonana w tym procesie wynosi

$$\Delta W = nBT \ln \frac{V_1}{V_2} = -1,99 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

Z pierwszej zasady termodynamiki otrzymujemy

$$\Delta Q = -\Delta W = 1,99 \cdot 10^6 \text{ J} > 0.$$

Ciepło zostało przez gaz pobrane.

**3.141.** Na podstawie prawa Poissona otrzymujemy

$$\frac{T_2^{\kappa}}{p_2^{\kappa-1}} = \frac{T_1^{\kappa}}{p_1^{\kappa-1}}, \quad \text{czyli} \quad T_2 = T_1 \sqrt[\kappa]{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\kappa-1}},$$

$$\log T_2 = \log T_1 + \frac{\kappa-1}{\kappa} (\log p_2 - \log p_1) = \log 373,16 +$$

$$+ \frac{0,4}{1,4} (\log 1 - \log 10) = 2,5719 - 0,2857 = 2,2862,$$

skąd

$$T_2 = 193,28 \text{ K}.$$

3.142. Na podstawie prawa Poissona otrzymujemy

$$p_2 V_2^\kappa = p_1 V_1^\kappa, \quad \text{zaem} \quad V_2 = V_1 \sqrt[\kappa]{\frac{p_1}{p_2}},$$

a więc

$$\log V_2 = \log V_1 + \frac{1}{\kappa} (\log p_1 - \log p_2) = 1,7143,$$

skąd

$$V_2 = 51,8 \text{ m}^3.$$

3.143. Jeden kilogram powietrza w warunkach normalnych zajmuje objętość

$$V_0' = \frac{1}{\gamma} = 0,08 \frac{\text{m}^3}{\text{N}} = 0,77 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}.$$

Można to również napisać w postaci

$$V_0' = 0,77 \text{ m}^3/\text{kg}.$$

Zatem podana w zadaniu masa powietrza w warunkach normalnych zajmuje objętość

$$V_0 = m V_0' = 2,31 \text{ m}^3,$$

a w warunkach podanych w zadaniu powietrze to zajmuje objętość

$$V = V_0 \frac{p_0}{p} \frac{T}{T_0} = 0,48 \text{ m}^3.$$

Na podstawie prawa Poissona obliczymy objętość powietrza po rozprężeniu ze wzoru

$$V' = V \left( \frac{p}{p_1} \right)^{1/\kappa},$$

skąd

$$\log V' = \log V + \frac{1}{\kappa} (\log p - \log p_1) = 0,3954,$$

a więc

$$V' = 2,49 \text{ m}^3.$$

Temperaturę końcową obliczymy również na podstawie prawa Poissona

$$T_1 = T \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}},$$

zatem

$$\log T_1 = \log T + \frac{\kappa-1}{\kappa} (\log p_1 - \log p) = 2,4726,$$

skąd

$$T_1 = 296,9 \text{ K}.$$



3.144. Z teorii wiadomo, że  $T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}$ , a więc  $T_2 = T_1 (40)^{0,41} = 1330,3 \text{ K}$ , zatem

$$\Delta T = 1037,14 \text{ K}.$$

3.145. Z równania politropy wynika, że

$$TV \frac{C_p - C_v}{C_v - C} = TV \frac{\kappa - 1}{1 - \kappa} = T \text{const}, \quad \text{czyli} \quad T = \text{const}.$$

Analogicznie, na podstawie innego równania politropy można wykazać, że  $p = \text{const}$ . Wynika więc z tego, że ani ciśnienie, ani temperatura nie zależą w takich procesach od  $C_p$  czy  $C_v$ , a więc są dla wszystkich gazów takie same. Można przedyskutować charakter tych równań ze względu na wartość  $\kappa$ .

3.146. Z równania politropy  $TV \frac{C_p - C_v}{C_v - C} = \text{const}$  wynika, że  $T = \text{const}$ .

Z równania politropy  $pV \frac{C_p - C_v}{C_v - C} = \text{const}$  wynika, że  $p = \text{const}$ .

3.147. Z równania politropy  $TV \frac{C_p - C_v}{C_v - C} = \text{const}$  wynika, że  $TV^\infty = \text{const}$ , a więc proces taki byłby możliwy tylko w temperaturze zera bezwzględnego, praktycznie biorąc taki proces jest jednak niemożliwy.

3.148. Z pierwszej zasady termodynamiki wiemy, że  $dU = dQ - p dV$ , dla procesu politropicznego zachodzi związek  $dQ = c dT$ . Podstawiając otrzymujemy, że dla mola gazu

$$C_v dT = c dT - RT \frac{dV}{V},$$

skąd

$$(C_v - C) dT + (C_p - C_v) T \frac{dV}{V} = 0,$$

a więc

$$T^{C_v - C} \cdot V^{C_p - C_v} = \text{const}.$$

skąd

$$TV \frac{C_p - C_v}{C_v - C} = \text{const}.$$

Ponieważ  $C = \frac{C_p}{\kappa}$ , dla metanu ciężar atomowy  $A = 24 + 6 = 30$ , zatem

$$C_p = 10,5 \cdot 10^4 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \quad \text{oraz} \quad \kappa = 1,33,$$

zatem

$$V_1 = V_0 \frac{C_v - C}{C_p - C} \sqrt{\frac{T_0}{T_1}} = V_0 \frac{C_p - \kappa C}{C_p(\kappa - 1)} \sqrt{\frac{T_0}{T_1}} = \frac{2,262}{1} \sqrt{\frac{T_0}{T_1}} \cdot V_0 = 4,52 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3.$$

3.149. Przeprowadzając potrzebne obliczenia

$$p_1 V_1 \frac{C_p - C}{C_v - C} = p_0 V_0 \frac{C_p - C}{C_v - C},$$

a więc

$$p_1 = p_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{C_p - C}{C_v - C}}.$$

Ale

$$C_p = A c_p = 10,5 \cdot 10^4 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}},$$

$$C_v = \frac{C_p}{\kappa} = 7,89 \cdot 10^4 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}},$$

zatem

$$p_1 = \frac{p_0}{21,44} = 3,725 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2.$$

3.150. Przeprowadzając potrzebne obliczenia otrzymujemy

$$\frac{T_0 C_p - C}{T_1 C_v - C} = \frac{C_p - C}{C_p - C_v},$$

skąd

$$p_1 = p_0 \left[ \frac{T_1}{T_0} \right]^{\frac{C_p - C}{C_p - C_v}},$$

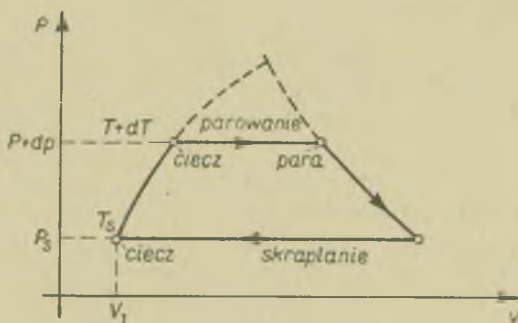
ale

$$C_p = A c_p = 10,5 \cdot 10^4 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}},$$

$$C_v = \frac{C_p}{1,33} = 7,89 \cdot 10^4 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}},$$

skąd

$$p_1 = p_0 \left[ \frac{T_1}{T_0} \right]^{3,25} = 2,79 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2.$$



Rys. 3.11

3.151. Na rysunku (3.11) przedstawiono odpowiednie procesy. Rozważamy odwracalne zjawisko kołowe:

1) na początku mamy ciecz o objętości  $V_1$  w temperaturze  $T_1$ ;

2) idąc wzdłuż krzywej granicznej ciecz tę ogrzewamy do temperatury  $T+dT$  dostarczając ciepła molowego  $dQ = C_2 dT$ ;

3) w temperaturze  $T+dT$  pod stałym ciśnieniem  $p+dp$  dostarczamy ciepła przemiany  $q'$  i zamieniamy ciecz na parę;

4) oziębiamy parę, odbierając jej tyle ciepła, aż wzdłuż krzywej granicznej osiągniemy temperaturę  $T_1$  oraz objętość  $V_1$ , oddając ciepło molowe  $dQ_1 = -C_1 dT$ ;

5) pod stałym ciśnieniem  $p$  w temperaturze  $T_1$  skraplamy parę na ciecz odbierając od niej ciepło  $q$ .

Można założyć, że  $q' = q + \frac{dq}{dT} dT$ . Na podstawie pierwszej zasady termodynamiki otrzymujemy

$$dQ = C_2 dT + q' - C_1 dT - q = (C_2 - C_1) dT + \frac{dq}{dT} dT,$$

$$dW = -dp(V_p - V_c) \quad \text{obszar zakreskowany,}$$

a więc

$$(C_2 - C_1) dT + \frac{dq}{dT} dT = dp(V_p - V_c).$$

Zgodnie z drugą zasadą termodynamiki  $\sum \frac{dQ}{T} = 0$  otrzymujemy

$$\frac{C_2 dT}{T} + \frac{q + \frac{dq}{dT} dT}{T+dT} - \frac{C_1 dT}{T} - \frac{q}{T} = 0.$$

Po odpowiednich przekształceniach

$$(C_2 - C_1) dT + \frac{dq}{dT} dT = \frac{q}{T} dT.$$

Z porównania obu wzorów wynika, że

$$dp(V_p - V_c) = \frac{q}{T} dT,$$

a więc

$$V = \frac{q}{T} \frac{dT}{dp}.$$

Obliczenia przedstawiamy w poniższej tabelce:

$T$ w K	373	484,4	582,5	637,2	647,0
$\Delta V$ w $\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$	1,616	1,050	0,595	0,027	0

A więc dla stanu krytycznego, zgodnie z doświadczeniem,  $\Delta V = 0$  oraz  $q = 0$ . Warto zapamiętać, że stosuje się to w stanie krytycznym dla wszystkich cieczy.

$$3.152. \Delta V = \frac{\Delta T}{\Delta p} \frac{q}{T} = 1,4 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}.$$

$$3.153. \Delta T = \Delta V \cdot \Delta p \frac{q}{T} = 3,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \cdot 1,013 \cdot 10^5 \frac{334,26 \text{ K}}{1,17 \cdot 10^4 \frac{\text{J}}{\text{kg}}} = 0,107 \text{ K}.$$

3.154. Energia potrzebna do zmiany objętości 1 m<sup>3</sup> cieczy na objętość 1675 m<sup>3</sup> pary wodnej pod normalnym ciśnieniem wynosi

$$E_Z = -p\Delta V = -0,002 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}},$$

a więc część ciepła parowania

$$q_Z = E_Z$$

powoduje wzrost objętości (pracę zewnętrzną), pozostałą zaś część

$$q_w = q - q_Z = 2,258 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

powoduje zmianę energii wewnętrznej. Stosunek więc

$$\frac{q_Z}{q_w} 100 = 0,8\%,$$

zaś

$$\frac{q_Z}{q} 100 = 0,1\%,$$

a więc 99,9% całkowitej energii cieplnej powoduje podczas procesu parowania zmianę energii wewnętrznej wody, 0,1% zaś tej energii — wykonanie pracy zewnętrznej.

3.155. Energia potrzebna do zmiany objętości 1 kg lodu podczas topnienia pod normalnym ciśnieniem wynosi

$$E_Z = -p\Delta V = 8,4 \cdot 10^{-5} \text{ J}.$$

Do ciepła topnienia lodu trzeba więc doliczyć część energii

$$E_Z = q_Z$$

wykonaną przez ciśnienie zewnętrzne. Na zmianę energii wewnętrznej 1 kg lodu podczas jego topnienia w warunkach normalnych przypada ilość ciepła

$$q_w = q + q_Z \approx q,$$

a więc stosunek  $q_1/q_2 = 0,002\%$  jest znikomo mały, czyli prawie całe ciepło powoduje zmianę energii wewnętrznej lodu.

3.156. Na podstawie danych zadania, stosując pierwszą zasadę termodynamiki do zjawiska izochorycznego, otrzymujemy

$$\Delta U = mc_v \Delta T = 1,77 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

3.157. Na podstawie pierwszej zasady termodynamiki

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$$

otrzymujemy

$$\Delta Q = mq = 2,26 \cdot 10^5 \text{ J},$$

$$\Delta W = -p\Delta V = -0,13 \cdot 10^5 \text{ J},$$

a więc zmiana energii wewnętrznej wynosi

$$\Delta U = (2,26 - 0,13) \cdot 10^5 \text{ J}.$$

3.158. Na podstawie teorii całkowite ciepło potrzebne do tego ogrzania wynosi

$$Q = mc_p \Delta T = 4196 \text{ J}.$$

Do zmiany energii wewnętrznej tego gazu potrzeba ciepła w ilości

$$Q_1 = mc_v \Delta T.$$

Znając  $c_p$  oraz  $\kappa$  dla  $\text{CO}_2$  (jako gazu dwuatomowego) obliczamy  $c_v$  i otrzymujemy

$$Q_1 = \Delta U = 3235 \text{ J}.$$

Na wykonanie pracy potrzebne było ciepło

$$Q_2 = W = \Delta Q = -961 \text{ J},$$

skąd wynika, że na zmianę energii wewnętrznej zużyto 77% dostarczonego ciepła, a na wykonanie pracy podczas tego rozprężania — 23% dostarczonego ciepła.

3.159. Praca zewnętrzna  $W_z = -pV = -1,013 \cdot 10^5 \cdot 0,035 \text{ J} = -15,2 \cdot 10^3 \text{ J}$ ; praca całkowita  $W_c = qm = 1,052 \cdot 10^8 \text{ J}$ .

Zmiana energii wewnętrznej  $\Delta U_w = W_c - W_z = 120,4 \cdot 10^3 \text{ J}$ ,  $q = 21,06 \cdot 10^8 \text{ J/kg}$ .

3.160. Obliczymy pracę potrzebną do skrzepnięcia wody  $W_2$  oraz pracę  $W_1$  potrzebną do ochłodzenia wody do temperatury  $T_0$ .

$$W_2 = -mq \frac{\Delta T}{T_0},$$

gdzie  $q$  oznacza ciepło krzepnięcia wody, a więc u nas

$$W_2 = 24,446,8 \text{ J}.$$

Oznaczając przez  $dW$  pracę potrzebną do obniżenia temperatury o  $dT$  otrzymujemy że  $dW = -mcdT$ , gdzie  $c$  jest ciepłem właściwym wody

$$dW_1 = -mcdT \frac{T_1 - T}{T},$$

a po scałkowaniu otrzymujemy

$$W_1 = mcT_1 \ln \frac{T_1}{T_0} - mc\Delta T = 2914,0 \text{ J}.$$

Całkowita praca wyniosła  $W = W_1 + W_2 = 27360,8 \text{ J}$ . A więc moc tego, oziębiającego urządzenia wynosi

$$P = \frac{W}{t} = 91,2 \text{ W}.$$



3.161. Na pracę w zjawisku adiabatycznym otrzymujemy równanie

$$W = mc_v \Delta T. \quad (3.161.1)$$

Ponieważ

$$c_p - c_v = B', \quad \text{zatem} \quad c_v \left( \frac{c_p}{c_v} - 1 \right) = B',$$

skąd

$$c_v = \frac{B'}{\kappa - 1}. \quad (3.161.2)$$

Podstawiając wzór (3.161.2) do (3.161.1) otrzymujemy

$$W = \frac{B'}{\kappa - 1} m \Delta T = 7,18 \cdot 10^8 \text{ J}.$$

3.162. Na pracę w zjawisku izotermicznym otrzymujemy wzór

$$W = mB'T \ln \frac{V_1}{V_2}, \quad (3.162.1)$$

lecz w przypadku zjawiska izotermicznego stosuje się prawo Boyle'a, otrzymujemy zatem

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1}. \quad (3.162.2)$$

Podstawiając wzór (3.162.2) do (3.162.1) otrzymamy

$$W = mB'T \ln \frac{p_2}{p_1} = -1,65 \cdot 10^8 \text{ J}.$$

3.163. Praca w zjawisku izotermicznym wynosi

$$W = m \frac{R'}{A} T \ln \frac{V_1}{V_2} = \rho_0 V R T 2,3 \cdot \log \frac{V}{V_k} = 1,817 \cdot 10^8 \text{ J}.$$

Pracę w zjawisku adiabatycznym obliczymy ze zmiany energii wewnętrznej gazu, a więc

$$W_{\text{ad}} = \Delta U = m \frac{c_p}{\kappa} T,$$

gdzie dla powietrza  $\kappa = 1,4$ , zaś  $\Delta T$  oznacza różnicę temperatur pomiędzy temperaturą końcową powietrza a temperaturą normalną. Obliczymy ją na podstawie jednego z równań Poissone'a

$$T_2 = T_1 \left( \frac{V}{V_k} \right)^{\kappa - 1} = 1804 \text{ K},$$

a więc  $\Delta T = T_2 - T_0 = (1804 - 273) \text{ K} = 1531 \text{ K}$ , zatem

$$W_{\text{ad}} = 4,599 \cdot 10^8 \text{ J}.$$

Na szukany stosunek obu prac otrzymujemy wartość

$$\frac{W_{\text{ad}}}{W_{\text{izot}}} = 25.$$

3.164. Wiemy, że pracę obliczymy z wzoru

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Z równania Van der Waalsa

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V-b) = m \frac{R}{A} T$$

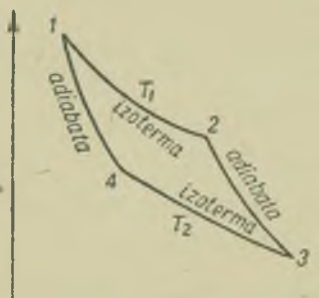
otrzymujemy na ciśnienie odpowiednią wartość, którą podstawiamy do całki i otrzymujemy

$$\begin{aligned} W &= -m \frac{R}{A} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V+b} + a \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V(V+b)} - ab \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2(V+b)} = \\ &= m \frac{R}{A} T \ln \frac{V_1+b}{V_2+b} - \frac{a}{b} \ln \frac{V_1}{V_2} + \frac{a}{b} \ln \frac{V_1+b}{V_2+b} - a \frac{\Delta V}{V_1 V_2} - \frac{a}{b} \ln \frac{V_1}{V_2} + \frac{a}{b} \ln \frac{V_1+b}{V_2+b}. \end{aligned}$$

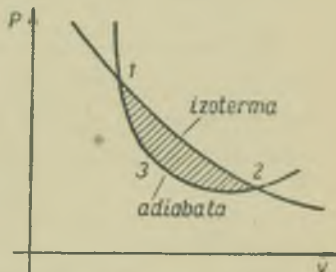
Podstawiając dane z zadania oraz  $A = 44 \text{ kg/kmol}$  otrzymujemy po obliczeniu na wartość wykonanej pracy

$$W = -6,4 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

3.165. Tylko w jednym. Gdyby adiabata przecinała izotermę w dwu lub więcej punktach (rys. 3.12), to otrzymalibyśmy pewne powierzchnie zamknięte; np. na ry-



Rys. 3.12



Rys. 3.13

sunku 3.12 taką powierzchnią jest 1231. Gdyby gaz rozprężał się izotermicznie na odcinku 12, a następnie był sprężany adiabatycznie na odcinku 231 lub rozprężał się adiabatycznie na odcinku 132, a był sprężany izotermicznie na odcinku 21, to za każdym razem otrzymalibyśmy powierzchnię 1231 lub 1321. Przedstawiałaby ona zawsze pracę oddaną lub pobraną przez gaz podczas tego obiegu. Nic nie zmieniając w stanie gazu, gdyż za każdym razem gaz wracałby do stanu 1 i przeprowadzając gaz po drodze 1231 otrzymalibyśmy perpetuum mobile, gdyż za każdym razem otrzymalibyśmy pewną pracę reprezentowaną przez powierzchnię 1231 bez zmiany stanu gazu. Jest to niemożliwe, więc adiabata nie może przecinać izoterm w więcej niż w jednym punkcie.

3.166. Obliczenie danych w punktach zwrotnych cyklu. Z równania charakterystycznego gazu doskonałego dla warunków panujących w punkcie 1 (rys. 3.13) otrzymujemy wartość ciśnienia

$$p_1 = \frac{mB'T_1}{V_1} = 40,52 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2,$$

analogicznie obliczamy ciśnienie dla punktu 3

$$p_3 = \frac{mB'T_3}{V_3} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Stosując prawo Poissona do przemiany adiabatycznej odbywającej się na odcinku 23 otrzymujemy

$$\frac{p_2^{\kappa-1}}{T_1^{\kappa}} = \frac{p_3^{\kappa-1}}{T_3^{\kappa}}, \quad \text{a więc} \quad \frac{p_2}{p_3} = \left( \frac{T_1}{T_3} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}},$$

skąd

$$\lg \frac{p_2}{p_3} = \frac{1,4}{0,4} (\lg 573 - \lg 300) = 0,9839,$$

a więc

$$\frac{p_2}{p_3} = 9,636, \quad \text{skąd} \quad p_2 = 9,636 \quad p_3 = 9,72 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Również na podstawie prawa Poissona otrzymujemy

$$\frac{p_1}{p_4} = \frac{T_1^{\kappa-1}}{T_4^{\kappa-1}}, \quad \text{lecz} \quad \frac{T_1^{\kappa-1}}{T_2^{\kappa-1}} = \frac{p_2}{p_3},$$

a więc porównując oba te wyniki z sobą otrzymujemy

$$p_4 = \frac{p_1}{9,636} = 4,25 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Objętości w punktach 2 oraz 4 znajdziemy stosując równanie charakterystyczne gazu doskonałego dla warunków panujących w tych punktach. Dla punktu 2 otrzymujemy więc

$$V_2 = \frac{mB'T_2}{p_2} = 0,1747 \text{ m}^3;$$

analogicznie dla punktu 4 otrzymujemy

$$V_4 = \frac{mB'T_4}{p_4} = 0,209 \text{ m}^3.$$

*Obliczenie pracy na poszczególnych odcinkach cyklu.* Znając już wszystkie dane dla czterech punktów zwrotnych cyklu, możemy przystąpić do obliczenia prac odpowiadających poszczególnym odcinkom cyklu.

Praca wykonana przy rozprężaniu izotermicznym (wykonana przez powietrze kosztem pobranego ciepła) wynosi

$$W_{12} = mB'T_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = -2,35 \cdot 10^5 \text{ J.}$$

Praca wykonana przy rozprężaniu adiabatycznym (wykonana przez powietrze kosztem energii wewnętrznej) wynosi

$$\begin{aligned} W_{23} &= m \frac{R}{A(\kappa-1)} T_1 \left[ \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} - 1 \right] = m \frac{c_p - c_v}{\kappa-1} T_1 \left[ \frac{T_2}{T_1} - 1 \right] = \\ &= mc_p \frac{1 - \frac{c_v}{c_p}}{\kappa-1} \Delta T = mc_p \frac{\frac{\kappa-1}{\kappa}}{\kappa-1} \Delta T = m \frac{c_p}{\kappa} \Delta T = -454 \text{ J.} \end{aligned}$$

Praca wykonana przy zagęszczeniu izotermicznym (pobrana przez powietrze i zwrócona chłodnicy pod postacią ciepła) wynosi

$$W_{34} = mB'T_2 \ln \frac{V_3}{V_4} = 1,24 \cdot 10^5 \text{ J.}$$

Praca wykonana przy zagęszczeniu adiabatycznym (pobrana przez powietrze powodując wzrost jego energii wewnętrznej) wynosi

$$W_{41} = mc_v \Delta T' = -mc_v \Delta T = -m \frac{c_p}{\kappa} (T_2 - T_1) = 454 \text{ J.}$$

*Obliczanie ciepła na poszczególnych odcinkach cyklu.* Na podstawie warunków panujących na poszczególnych odcinkach cyklu mamy

$$Q_{12} + W_{12} = \Delta U_{12}, \quad \text{lecz} \quad \Delta U_{12} = 0,$$

zatem

$$Q_{12} = -W_{12} = 2,35 \cdot 10^5 \text{ J.}$$

Ciepło  $Q_{12}$  zostało przez powietrze pobrane podczas rozprężania izotermicznego ze zbiornika ciepła

$$Q_{23} = 0,$$

jak wynika z definicji procesu adiabatycznego

$$Q_{34} + W_{34} = \Delta U_{34}, \quad \text{lecz} \quad \Delta U_{34} = 0,$$

zatem

$$Q_{34} = -W_{34} = -1,24 \cdot 10^5 \text{ J.}$$

Ciepło  $Q_{34}$  zostało przez powietrze zwrócone do chłodnicy.  $Q_{41} = 0$ , jak wynika z definicji procesu adiabatycznego.

*Całkowita zatem praca wykonana przez powietrze w tym cyklu wynosi*

$$W_c = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} = W_{12} + W_{34} = -1,11 \cdot 10^5 \text{ J.}$$

*Całkowite ciepło, którego kosztem wykonana została praca przez powietrze w tym cyklu, wynosi*

$$Q_c = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41} = Q_{12} + Q_{34} = 1,11 \cdot 10^5 \text{ J.}$$

A więc

$$|W_c| = |Q_c|.$$

Wydajność cyklu Carnota możemy obliczyć albo z wzoru

$$\eta = \left| \frac{W_c}{W_{12}} \right| 100\% = 47,3\%,$$

albo z wzoru

$$\eta = \left| \frac{Q_c}{Q_{12}} \right| 100\% = 47,3\%,$$

albo z wzoru

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} 100\% = 47,6\%.$$

Różnica w obliczeniu  $\eta$  wynika z zaokrąglenia wyników rachunkowych w przeprowadzonych obliczeniach.

3.167. Praca podczas rozprężania izotermicznego, a więc na pierwszym odcinku tego cyklu, wynosi

$$W_{12} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = -2004 \text{ J}.$$

Praca na odcinku rozprężenia adiabatycznego wynosi

$$W_{23} = \frac{nR}{\kappa - 1} \Delta T = \frac{nR}{\kappa - 1} (T_1 - T),$$

gdzie  $T_1$  obliczamy z prawa Poissona zastosowanego do zwrotnych punktów adiabaty, których dane oznaczymy przez  $(T, V_3, p_3)$  oraz  $(T_1, V_1, p_1)$

$$TV_3^{\kappa-1} = T_1V_1^{\kappa-1},$$

gdzie

$$V_3 = 2V_1, \quad V_3 = 4V_1, \quad T = 348,16 \text{ K},$$

zatem

$$T_1 = T \frac{1}{2^{\kappa-1}} = \frac{348,16 \text{ K}}{2^{0,41}} = \frac{348,16 \text{ K}}{1,33} = 261,6 \text{ K},$$

a więc

$$W_{23} = -1722 \text{ J}.$$

Praca na odcinku sprężania izotermicznego wynosi

$$W_{34} = nRT_1 \ln \frac{V_3}{V_4}.$$

Nieznaną wartość objętości w czwartym punkcie zwrotnym cyklu możemy obliczyć z prawa Poissona zastosowanego do punktów adiabaty o współrzędnych  $(p_1, V_1, T)$  oraz  $(p_4, V_4, T_1)$

$$T_1V_4^{\kappa-1} = TV_1^{\kappa-1}, \quad \text{zatem} \quad \frac{V_4}{V_1} = \frac{\kappa-1}{\kappa-1} \sqrt{\frac{T}{T_1}} = 2,006,$$

skąd

$$V_4 = 2,006V_1,$$

a więc

$$W_{34} = 1519 \text{ J.}$$

Pracę na odcinku sprężania adiabatycznego (czwartym odcinku cyklu) obliczymy, stosując wyniki rozważań teoretycznych, że wartość pracy na drugim odcinku cyklu równa się wartości pracy na czwartym odcinku cyklu, zatem

$$W_{41} = -W_{33} = 1722 \text{ J.}$$

Wydajność cyklu

$$\eta = \frac{T - T_1}{T} 100 = 24,8\%.$$

3.168. Oznaczając przez  $V_2$  szukaną objętość, otrzymujemy ją z równania Poissona

$$V_2^{\kappa-1} T_2 = V_1^{\kappa-1} T_1, \quad \text{zatem} \quad V_2 = V_1 \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}},$$

skąd

$$\frac{V_2}{V_1} = \left( \frac{373}{923} \right)^{1/0,11} = 0,1095, \quad \text{a więc} \quad V_2 = 2,19 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Stosując do tych samych punktów zwrotnych równanie Poissona w postaci zawierającej związek ciśnienia i temperatury otrzymujemy

$$\frac{p_2^{\kappa-1}}{T_2^{\kappa}} = \frac{p_1^{\kappa-1}}{T_1^{\kappa}},$$

skąd

$$p_2 = p_1 \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 21,6 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Praca potrzebna do sprężenia w tym procesie wynosi

$$W = mc_v \Delta T = m \frac{c_p}{\kappa} \Delta T = V_1 \varrho_1 \frac{c_p}{\kappa} \Delta T,$$

masę właściwą  $\varrho_1$  należy obliczyć z równania charakterystycznego zastosowanego do warunków normalnych oraz do warunków początkowych podanych w zadaniu 3.168, a więc równanie charakterystyczne wynosi

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0}.$$

Podstawiając zamiast objętości wartość masy i masy właściwej otrzymujemy

$$\frac{p_1 m}{T_1 \varrho_1} = \frac{p_0 m}{T_0 \varrho_0},$$

skąd

$$\varrho_1 = \varrho_0 \frac{p_1 T_0}{p_0 T_1} = 0,897 \text{ kg/m}^3,$$



a więc praca zużyta na sprężenie gazu w tych warunkach wynosi

$$W = 7377 \text{ J}.$$

3.169. Na podstawie zasady zachowania energii otrzymujemy na pracę cyklu wyrażenie

$W = Q_1$  (ciepło podczas spalania) —  $Q_2$  (ciepło odprowadzone na zewnątrz), ale ciepło spalania odbywa się izobarycznie, a więc wynosi

$$Q_1 = \frac{m}{A} c_p (T_2 - T_1),$$

a ciepło odprowadzane na zewnątrz odbywa się w sposób izochoryczny, a więc

$$Q_2 = \frac{m}{A} c_v (T_3 - T_0).$$

Całkowita praca cyklu wynosi więc

$$W = \frac{mc_v}{A} [\kappa(T_2 - T_1) - (T_3 - T_0)].$$

Na wydajność cyklu otrzymujemy więc wyrażenie

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{\kappa(T_2 - T_1) - (T_3 - T_0)}{\kappa(T_2 - T_1)},$$

co po uproszczeniu daje

$$\eta = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1}.$$

Istotnymi parametrami dla cyklu silnika Diesla nie są jednak dane temperaturowe, ale dane objętościowe, a więc objętości krytyczne  $V_1$ ,  $V_1'$  oraz  $V_2$ . Z równania gazów doskonałych dla izobary mamy

$$T_1 = T_2 \frac{V_2}{V_1'}$$

Na podstawie równań Poissone'a dla adiabatycznego rozprężania otrzymujemy

$$T_3 = T_2 \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1},$$

analogicznie z równania adiabaty uzyskanej przy sprężaniu mieszanki mamy

$$T_2 = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} = T_1 \frac{V_1}{V_2} \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1}.$$

Podstawiając te dane do otrzymanego powyżej wzoru oraz przeprowadzając odpowiednie uproszczenia otrzymujemy ostatecznie wynik na wydajność cyklu w silniku Diesla

$$\eta = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{\left( \frac{V_1'}{V_1} \right)^{\kappa} - 1}{\left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1} \left( \frac{V_1'}{V_1} - 1 \right)}.$$

Przez dobór parametrów  $V_1$ ,  $V_1'$  oraz  $V_2$  można dla każdej mieszanki dobrać te wartości w taki sposób, aby wydajność cyklu osiągnęła maksimum. Teoretycznie biorąc, można przyjąć, że  $\kappa = 1,33$  w każdym przypadku, a więc można powyższy wzór przedyskutować teoretycznie dla każdego przypadku i powyższe parametry dobrać w sposób teoretyczny dla przypadku maksimum.

3.170. Na rysunku 3.2, na którym mamy przedstawiony schemat pracy silnika Diesla widzimy, że:

1) Odcinek 12 pod stałym ciśnieniem  $p_1$  przedstawia wssanie powietrza atmosferycznego w temperaturze stałej  $T_1$ .

2) Odcinek 23 przedstawia jego sprężanie adiabatyczne od ciśnienia  $p_1$  do ciśnienia  $p_2$ . Temperatura podczas tego sprężania wzrasta od temperatury  $T_1$  do temperatury  $T_2$ .

3) Odcinek 34 przedstawia spalanie wstrzykniętej do cylindra mieszanki pod stałym ciśnieniem  $p_2$ , podczas którego następuje dalszy wzrost temperatury od  $T_2$  do  $T_3$ .

4) Odcinek 45 (po zakończeniu spalania) przedstawia adiabatyczne rozprężanie mieszanki gazów spalinowych i powietrza od objętości  $V_1'$  do objętości  $V_2$ . Temperatura spada od  $T_3$  do  $T_4$ .

5) Odcinek 52 przedstawia (po otwarciu zaworu) wydalenie mieszaniny gazów spalinowych i powietrza w stałej objętości  $V_2$ . Podczas tego ciśnienie spada do wartości  $p_1$  oraz temperatura do wartości  $T_1$ .

6) Odcinek 21 przedstawia wydalenie spalin pod stałym ciśnieniem  $p_1$  z cylindra przez ruch tłoka od objętości  $V_2$  do objętości  $V_1$ .

Całkowita praca cyklu

$$W = Q_1 - Q_2,$$

gdzie  $Q_1$  oznacza ciepło uzyskane podczas spalania mieszanki i wynosi

$$Q_1 = \frac{m}{A} C_p (T_3 - T_2) \text{ — odcinek 34}$$

oraz  $Q_2$  oznacza ciepło odprowadzone na zewnątrz

$$Q_2 = \frac{m}{A} C_v (T_4 - T_1) \text{ — odcinek 52,}$$

a więc całkowita praca

$$W = \frac{m}{A} C_v [\kappa (T_3 - T_2) - (T_4 - T_1)],$$

skąd wydajność silnika Diesla wynosi

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2},$$

ale dla odcinka 34 (izobara) otrzymujemy na podstawie równania gazów doskonałych

$$\frac{V_3}{T_3} = \frac{V_1}{T_2}, \quad \text{a stąd} \quad T_3 = T_2 \frac{V_3'}{V_1}.$$

Dla odcinka 45 na podstawie równań adiabatycznych otrzymujemy

$$T_4 = T_3 \left( \frac{V_1'}{V_2} \right)^{\kappa-1} = T_2 \left( \frac{V_1'}{V_2} \right)^{\kappa-1} \frac{V_3'}{V_1}.$$

Dla odcinka 23 na podstawie równań adiabatycznych otrzymujemy

$$T_3 = T_1 \left( \frac{V_3}{V_1} \right)^{\kappa-1}, \quad \text{a więc} \quad T_4 = T_1 \left( \frac{V_1'}{V_1} \right)^{\kappa}.$$

Podstawiając te dane do wzoru na  $\eta$ , otrzymujemy

$$\eta = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{\left( \frac{V_1'}{V_1} \right)^{\kappa} - 1}{\left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1} \left( \frac{V_1'}{V_1} - 1 \right)},$$

u nas  $\frac{V_2}{V_1} = 2$  oraz  $\frac{V_1'}{V_1} = 1,5$ ,

zatem

$$\eta = 1 - \frac{1}{1,4} \frac{1,5^{1,4} - 1}{2^{0,4}(1,5 - 1)} = 1 - \frac{1}{1,4} \frac{1,76 - 1}{1,32 \cdot 0,5} = 0,18,$$

a więc wydajność takiego silnika Diesla wynosi 18%.

3.171. Na podstawie rozwiązania zadania 3.169

$$\eta = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{\left( \frac{V_1'}{V_1} \right)^{\kappa} - 1}{\left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1} \left( \frac{V_1'}{V_1} - 1 \right)},$$

oznaczając  $\left( \frac{V_1'}{V_1} \right)^{\kappa-1} = x$  otrzymujemy

$$x = \frac{1,25^{1,4} - 1}{0,25 \cdot 0,6 \cdot 1,4} = 1,7,$$

skąd

$$\frac{V_2}{V_1} = 1,7^{2,5} = 3,8.$$

3.172. Na podstawie zadania 3.169 otrzymujemy

$$T_4 = T_1 \left( \frac{V_1'}{V_1} \right)^{\kappa} = 400 \text{ K} \cdot 1,5^{1,4} = 704 \text{ K}.$$

3.173. Na podstawie zadania 3.169 otrzymujemy

$$T_3 = T_1 \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1} \left( \frac{V_1'}{V_1} \right) = 400 \text{ K} \cdot 4^{0,4} \cdot 1,5 = 1044 \text{ K}.$$

3.174. Początkowa entropia obu mas wody jest sumą entropii obu mas, zatem

$$S_p = S_1 + S_2 = \int_{T_0}^{T_1} m_1 \frac{cdT}{T} + \int_{T_0}^{T_2} m_2 \frac{cdT}{T} = m_1 c \ln \frac{T_1}{T_0} + m_2 c \ln \frac{T_2}{T_0},$$

gdzie przez  $T_0$  oznaczyliśmy temperaturę stanu początkowego, który obraliśmy w sposób dowolny.

Obliczamy teraz temperaturę końcową, którą obie masy wody przyjmą po ich wymieszaniu, stosując rozważania kalorymetrii

$$m_1 c(T_1 - x) = m_2 c(x - T_2),$$

skąd

$$x = \frac{m_1 \Delta T_1 + m_2 \Delta T_2}{m_1 + m_2} = 316,4 \text{ K} = T.$$

Zatem entropia końcowa wody powstałej po zmieszaniu obu mas, gdy przyjmiemy za stan początkowy ten sam co uprzednio, równa się

$$S_k = \int_{T_0}^T (m_1 + m_2) c \frac{dT}{T} = (m_1 + m_2) c \ln \frac{T}{T_0}.$$

Zatem zmiana entropii obu mas wody wynosi

$$\begin{aligned} \Delta S &= S_k - S_p = m_1 c \ln \frac{T}{T_0} - m_1 c \ln \frac{T_1}{T_0} + m_2 c \ln \frac{T}{T_0} - m_2 c \ln \frac{T_2}{T_0} = \\ &= m_1 c (\ln T - \ln T_1) + m_2 c (\ln T - \ln T_2) = 0,95 \cdot 10^3 \text{ J/K}. \end{aligned}$$

Jak widzimy, entropia wzrosła.

**3.175.** Całkowita zmiana entropii składa się ze zmiany entropii przy przejściu wody ze stanu o temperaturze  $T_0$  do stanu o temperaturze  $T_1 = 373,16 \text{ K}$ , dalej ze zmiany entropii powstałej przez wyparowanie tej wody w temperaturze wrzenia  $373,16 \text{ K}$ , oraz ze zmiany entropii wskutek ogrzania pary wodnej od temperatury  $373,16 \text{ K}$  do  $523,16 \text{ K}$ . Zatem

$$S = \int_{T_0}^{T_1} \frac{mc_2 dT}{T} + \frac{mq}{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc_1 dT}{T} = mc_2 \ln \frac{T_1}{T_0} + \frac{mq}{T_1} + mc_1 \ln \frac{T_2}{T_1} = 7,66 \cdot 10^3 \text{ J/K}.$$

Widzimy więc, że entropia wzrosła.

**3.176.** Zmiana entropii wskutek wyparowania alkoholu w temperaturze wrzenia wynosi

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{Aq}{T},$$

gdzie  $A$  oznacza ciężar cząsteczkowy alkoholu i wynosi on

$$A = 2A_1 + A_2 + 6A_3 = 46,$$

a więc

$$\Delta S = 1,10 \cdot 10^4 \text{ J/K}.$$

Entropia wzrosła.

**3.177.** Zmiana entropii przy przejściu rtęci ze stanu stałego do stanu ciekłego w temperaturze topnienia wynosi

$$\Delta S = \frac{Aq}{T} = 1,00 \cdot 10^4 \text{ J/K}.$$

Entropia wzrosła.

**3.178.** Całkowita zmiana entropii przechłodzonej cząsteczki wody składa się ze zmiany entropii powstałej wskutek ogrzania gramocząsteczki wody od temperatury

263,16 K do  $T_0$ , następnie ze zmiany entropii powstałej podczas krzepnięcia tej gramo-  
cząsteczki w temperaturze  $T_0$  oraz ze zmiany entropii powstałej wskutek oziębnienia  
gramocząsteczki lodu od temperatury  $T_0$  do 263,16 K. Zatem

$$S = \int_{T_1}^{T_0} \frac{Ac dT}{T} + \frac{Aq}{T_0} + \int_{T_0}^{T_1} \frac{Ac_1 dT}{T} = Ac \ln \frac{T_0}{T_1} + \frac{Aq}{T_0} + Ac_1 \ln \frac{T_1}{T_0} = 2,3 \cdot 10^4 \text{ J/K}.$$

Entropia wzrosła.

**3.179.** Zmiana entropii wodoru podczas jego ogrzewania wynosi

$$\Delta S = nc_v \ln \frac{T_2}{T_1} + n \frac{R}{A} \ln \frac{V_2}{V_1} = n \left[ \frac{c_p}{\kappa} \ln \frac{T_2}{T_1} + (c_p - c_v) \ln \frac{V_2}{V_1} \right].$$

Stosunek temperatur  $T_2/T_1$  możemy obliczyć z równania charakterystycznego gazów  
doskonałych dla warunków początkowych oraz końcowych zadania 3.179, a więc z rów-  
nania

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad \text{otrzymujemy} \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{V_2}{V_1},$$

skąd

$$\Delta S = n \left[ \frac{c_p}{\kappa} \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{c_p}{\kappa} \ln \frac{V_2}{V_1} + c_p \frac{\kappa - 1}{\kappa} \ln \frac{V_2}{V_1} \right] = n \left[ \frac{c_p}{\kappa} \ln \frac{p_2}{p_1} + c_p \ln \frac{V_2}{V_1} \right] = 4,38 \cdot 10^4 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Entropia wzrosła.

**3.180.** Zupełnie podobnie jak w rozwiązaniu 3.179 otrzymujemy na zmianę entropii  
tłenu równanie

$$\Delta S = n \left[ c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right],$$

ponieważ  $T_2 = T_1$ , więc

$$\ln \frac{T_1}{T_2} = 0,$$

skąd

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = 191,7 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Entropia wzrosła.

**3.181.** Przed wymieszaniem kulek ciepło zredukowane tego układu wynosiło

$$\left[ \frac{\frac{1}{2} mc 30}{303,16} + \frac{\frac{1}{2} mc 100}{373,16} \right] \frac{\text{J}}{\text{K}} = 11 904,0 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Po wymieszaniu kulek temperatura równowagi będzie wynosiła

$$T = 338,16 \text{ K}.$$

Ciepło zredukowane będzie więc wynosiło

$$\frac{mc 65}{T} = 16098,1 \frac{\text{J}}{\text{K}},$$

a więc zgodnie z teorią wzrosło.

3.182. Przed wymieszaniami entropia obu części wynosiła

$$\Delta S_p = C_v \ln(T_1 T_2)^{1/2} + R \ln V,$$

po wymieszanii zaś

$$\Delta S_k = C_v \ln T + R \ln V, \quad \text{gdzie} \quad T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2).$$

Szukana więc zmiana entropii wynosi

$$\Delta S = C_v \ln \frac{\frac{1}{2}(T_1 + T_2)}{\sqrt{T_1 T_2}} > 0,$$

bo

$$(T_1 - T_2)^2 > 0, \quad \text{gd}y \quad T_1 \neq T_2.$$

Proces wymieszania gazów o różnych temperaturach jest więc procesem nieodwracalnym.

3.183.  $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU + pdV}{T}$ , ale  $dU = C_v dT$ ,  $pdV = \frac{RT}{V-b} dV - \frac{a}{V^2} dV$ , a więc

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V-b} - \frac{a}{T} \frac{dV}{V^2},$$

skąd

$$\Delta S = C_v \ln T + R \ln(V-b) + \frac{a}{TV}.$$

3.184.  $\Delta S = 191\,373,06 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}.$



## 4.1. UWAGI WSTĘPNE

**4.1.1.** Przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań z dziedziny elektryczności czy magnetyzmu należy zapoznać się z jednostkami (określeniem, wzorem i przeliczeniem) podanymi we wstępie (rozdział 1).

**4.1.2. Przenikalność dielektryczną próżni** (przy rozwiązywaniu zadań) piszemy zawsze w postaci

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}, \quad (4.1)$$

choć z powodu

$$\frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{\text{J} \cdot \text{m}} = \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\frac{\text{J}}{\text{A} \cdot \text{s}} \cdot \text{m}} = \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}} = \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

powinno być zawsze pisane w postaci poprawnej

$$\epsilon_0 = 8,854\,16 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}. \quad (4.2)$$

**4.1.3. Przenikalność magnetyczną próżni** z tych samych powodów piszemy w postaci

$$\mu_0 = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}, \quad (4.3)$$

choć z takiego samego powodu

$$\frac{\text{N}}{\text{A}^2} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}}{\text{s}} \cdot \text{m}} = \frac{\text{J} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{A} \cdot \text{m}} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \frac{\text{H}}{\text{m}},$$

powinno być zawsze pisane w postaci poprawnej

$$\mu_0 = 1,256\ 64 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}}. \quad (4.4)$$

**4.1.4.** Ze względu na to, że jeszcze nie we wszystkich podręcznikach, tabelkach, wykładach, publikacjach itp. układ SI jest powszechnie stosowany, w magnetostatyce pozostawiamy jeszcze rozwiązania w układzie EM CGS oraz w elektrostatyce rozwiązania w układzie ES CGS. Niektóre zadania w tych rozdziałach są przeprowadzone tylko w układzie SI.

## 4.2. MAGNESY TRWAŁE ORAZ MAGNETYZM ZIEMSKI

Prawo Coulomba, natężenie pola magnetycznego, wektor indukcji magnetycznej, moment magnetyczny magnesu trwałego

Wzory wprowadzające te pojęcia, ich jednostki oraz przeliczenia między jednostkami podano we wstępie (rozdział 1).

**Przejście pól magnetycznych przez powierzchnię graniczną dwu ciał o różnych właściwościach magnetycznych.**

**4.2.1.** Natężenie pola magnetycznego nie zmienia przy przejściu składowej stycznej

$$H_{1s} = H_{2s}. \quad (4.5)$$

**4.2.2.** Wektor indukcji magnetycznej nie zmienia przy przejściu składowej normalnej

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (4.6)$$

Gęstość energii magnetycznej znajdującej się w polu magnetycznym określona jest wzorem

$$e_m = \frac{1}{2}HB \quad \text{i wyrażona w } \frac{\text{J}}{\text{m}^3}. \quad (4.7)$$

**Okres wahań** swobodnej sztabki magnetycznej o momencie magnetycznym  $M$ , momencie bezwładności  $J$ , wahającej się w polu magnetycznym o natężeniu  $H$ , można wyrazić przy pomocy wzoru

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{MH}} \text{ [s]}. \quad (4.8)$$

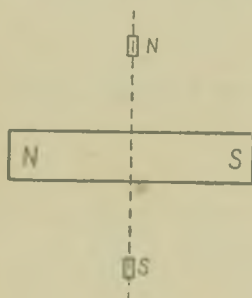
## Zadania

4.1. Narysować schemat przebiegu linii sił pola magnetycznego:

- wokół bieguna  $N$  bardzo długiego magnesu sztabkowego,
- wokół bieguna  $N$  bardzo krótkiego magnesu sztabkowego,
- dwu biegunów magnetycznych leżących obok siebie jednakowymi biegunami magnetycznymi,
- dwu biegunów magnetycznych leżących obok siebie przeciwnymi biegunami magnetycznymi,
- magnesu w kształcie podkowy,
- magnesu liniowego jako: a) całości, b) podzielonego na dwie części, c) podzielonego na cztery części, przy czym części te są odsunięte tylko niewiele od siebie wzdłuż linii sztabki.

4.2. W jednorodnym polu magnetycznym  $H$  umieszczamy pierścień z materiału ferromagnetycznego (np. żelaza lub gadolinu): a) narysować przebieg linii pola magnetycznego w pobliżu pierścienia; b) narysować przebieg linii sił pola magnetycznego w przypadku, gdy pierścień ten zastąpimy pierścieniem z materiału paramagnetycznego, np. glinu, lub diamagnetycznego, np. grafitu.

4.3. Osie dwu identycznych magnesów liniowych skrzyżowano ze sobą oraz złączono trwale punkty środkowe tych magnesów. Taki układ dwu



Rys. 4.1

magnesów umieszczono na pionowej osi przechodzącej przez wspólny środek tych magnesów (punkt ich złączenia). Jakie położenie przyjmie ten układ w polu magnetycznym ziemskim?

4.4. Igiełkę magnetyczną możemy oprzeć na pionowej osi. Będzie ona wskazywała biegunem  $N$  na północ, biegunem  $S$  na południe. Gdzie należy podeprzeć tę igiełkę, aby wisała swobodnie na osi w płaszczyźnie poziomej?

4.5. Na symetrycznej sztabki magnetycznej umieszczono w pobliżu z jednej strony biegun północny  $N$  bardzo długiego magnesu liniowego, a z drugiej strony — biegun południowy  $S$  innego długiego magnesu o takim samym natężeniu bieguna magnetycznego (rys. 4.1). Wykonać rysunki: a) linii pola magnetycznego w warunkach określonych przez zadanie, b) gdy bieguna  $N$  oraz  $S$  tych długich magnesów będziemy ogrzewali (podać rysunek stanu przed osiągnięciem punktu Curie oraz powyżej punktu Curie).

4.6. Z jakiej odległości przyciągają się dwa bieguny magnetyczne o natężeniach biegunów  $m_1 = 10$  j. EM CGS oraz  $m_2 = 20$  j. EM CGS siłą  $F = 10^{-7}$  N, jeżeli zaniedbamy działanie pozostałych biegunów obu magnesów na oba przyciągające się bieguny? Przyciąganie odbywa się w próżni.

4.7. Znaleźć wartość oraz kierunek pola magnetycznego  $\mathbf{H}$  bardzo długiego oraz cienkiego magnesu w odległości  $r = 0,03$  m od północnego bieguna tego magnesu, jeżeli natężenie bieguna magnetycznego w każdym z tych magnesów wynosi  $m = 36$  j. EM CGS.

4.8. Natężenia biegunów magnetycznych  $N$  oraz  $S$  magnesu liniowego o długości  $l = 0,1$  m wynoszą odpowiednio  $m_1 = +10$  j. EM CGS oraz  $m_2 = -10$  j. EM CGS. Jakie pole magnetyczne  $\mathbf{H}$  (co do wartości oraz co do kierunku) panuje: a) w punktach  $P$  oraz  $Q$ , leżących na przedłużeniu osi  $SN$  w odległości  $r_1 = 0,2$  m od biegunów oraz b) jakie pole magnetyczne  $\mathbf{H}$ , też co do wielkości oraz co do kierunku, panuje w punktach  $R$  oraz  $T$ , leżących w odległości  $r_2 = 0,2$  m od magnesu  $SN$  na jego symetralnej?

4.9. Cienki namagnesowany pręt o długości  $l = 0,12$  m oraz o natężeniu bieguna magnetycznego  $m = 500$  j. EM CGS w każdym biegunie znajduje się w jednostajnym polu magnetycznym o natężeniu  $H = 200$  Oe. Oś magnesu tworzy kąt  $\alpha = 90^\circ$  z kierunkiem pola magnetycznego  $\mathbf{H}$ . Obliczyć: a) moment sił działających na ten magnes oraz b) pracę wykonaną podczas skręcania tego magnesu o kąt  $\alpha = 90^\circ$ .

4.10. Dwie jednakowe długie sztabki o bokach  $a = 0,1$  m umieszczono w przeciwległych bokach kwadratu o tej samej długości. Natężenie każdego z tych biegunów magnetycznych sztabek wynosi  $m = 10$  j. EM CGS. Obliczyć: a) natężenie pola magnetycznego w środkowych punktach pozostałych boków oraz b) w środku kwadratu. c) Podać wartość oraz kierunek natężenia pola magnetycznego w tych punktach.

4.11. Za pomocą długiego liniowego magnesu o natężeniu biegunów magnetycznych  $m = 100$  j. EM CGS odchyłono północny biegun igły magnetycznej tak, że obrócił się o kąt równy  $90^\circ$ . Wzajemna odległość północnego bieguna igły od południowego bieguna magnesu po odchyleniu wynosi  $d = 0,1$  m. Igiełka magnetyczna tworzy po odchyleniu z osią liniowego magnesu kąt  $\beta = 166^\circ$ . Obliczyć składową poziomą pola magnetycznego ziemskiego w tym miejscu.

4.12. Jaką przenikalność magnetyczną ma blacha żelazna, jeżeli pole magnetyczne o natężeniu kolejno:  $H_1 = 1$  Oe,  $H_2 = 10$  Oe,  $H_3 = 100$  Oe

oraz  $H_4 = 1000$  Oe wywołuje w niej powstanie wektora indukcji magnetycznej o wartości kolejno:  $B_1 = 4000$  Gs,  $B_2 = 12000$  Gs,  $B_3 = 17500$  Gs,  $B_4 = 24000$  Gs. Narysować: a) wykres zależności przenikalności magnetycznej tego żelaza od  $H$  oraz b) wykres zależności wektora indukcji magnetycznej od  $H$ .

4.13. Składowa pozioma natężenia pola magnetycznego ziemskiego w Krakowie wynosiła w roku 1935  $H = 0,196$  Oe, a kąt inklinacji magnetycznej  $I = 65^\circ 08'$ . Obliczyć natężenie pola magnetycznego ziemskiego w Krakowie w tym czasie.

4.14. Sztabka magnetyczna o momencie bezwładności  $I = 5 \cdot 10^{-6}$  kg·m<sup>2</sup> oraz o długości  $l = 0,1$  m, podparta na osi pionowej, wykonuje drgania w polu magnetycznym ziemskim oraz polu magnetycznym o natężeniu  $H_1 = 2$  Oe, pochodzącym od znajdującego się w pobliżu magnesu. Pola magnetyczne  $H$  oraz  $H_1$  są wzajemnie równoległe. Czas drgania sztabki  $T = 0,67$  s. Natężenie bieguna magnetycznego w każdym biegunie sztabki wynosi  $m = 200$  j. EM CGS. Obliczyć składową poziomą pola magnetycznego ziemskiego w tym miejscu.

4.15. Sztabka magnetyczna o momencie bezwładności  $I = 5 \cdot 10^{-6}$  kg·m<sup>2</sup> oraz długości  $l = 0,1$  m, podparta na osi pionowej, wykonuje drgania w polu magnetycznym ziemskim. Okres drgania  $T = 2,3$  s. Natężenie bieguna magnetycznego w każdym biegunie sztabki tego magnesu wynosi  $m = 200$  j. EM CGS. Obliczyć składową poziomą pola magnetycznego ziemskiego w tym miejscu.

4.16. Składowa pozioma natężenia pola magnetycznego ziemskiego w Warszawie wynosiła w roku 1938  $H_1 = 0,18568$  Oe. Można ją było wyznaczyć za pomocą drgań zawieszono poziomo magnesu. Okres drgań wynosił  $T_1 = 1,5$  s. Ile wynosi składowa pozioma w Warszawie teraz, jeżeli wyznaczając ją za pomocą takiego samego pomiaru i taką samą sztabką magnetyczną uzyskano na okres drgań wartość  $T_2 = 1,45$  s?

4.17. Znaleźć współczynnik załamania linii pola magnetycznego padającego pod kątem  $\alpha = 45^\circ$  na granicę glinokrzemu (alsiferu) o przenikalności magnetycznej  $\mu_1 = 22$  oraz prasowanego permaloju o przenikalności magnetycznej  $\mu_2 = 75$ .

4.18. Do naczynia połączonego wiano alkohol o podatności magnetycznej  $\kappa_2 = 8,2 \cdot 10^6$ ; podatność powietrza w warunkach normalnych  $\kappa_1 = 0,36 \cdot 10^{-6}$ , masa właściwa alkoholu  $\rho = 791$  kg/m<sup>3</sup>. Jedno z ramion tego naczynia umieszczono w polu magnetycznym elektromagnesu, wskutek czego poziom cieczy obniżył się wykazując różnicę w obu ramionach



$h = 2 \cdot 10^{-2}$  m. Obliczyć panujące tam natężenie pola magnetycznego.

4.19. W naczyniu połączonym umieszczono ciekły tlen o podatności magnetycznej  $\kappa_2 = 3400 \cdot 10^{-6}$ . Jedno z ramion umieszczono w polu magnetycznym elektromagnesu o natężeniu  $H = 10^6$  A/m. Podatność magnetyczna powietrza  $\kappa_1 = 0,36 \cdot 10^{-6}$ , masa właściwa ciekłego tlenu  $\rho = 950$  kg/m<sup>3</sup>. Obliczyć różnicę poziomów powstałą w obu ramionach.

### 4.3. ELEKTROSTATYKA

Konsekwentne stosowanie układu SI wymagałoby wyrażania wyników w jednostkach podstawowych, a więc w kg, m, s, A; w praktycznym zastosowaniu wyrażamy je jednak w skrótach, np.

zamiast  $\text{kg}^1 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$  piszemy volt (V),

zamiast  $\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$  piszemy farad (F) itd.

Należy więc dobrze pamiętać, co oznaczają te skróty i jak je na podstawie wzorów wyprowadzać. Jednym z takich skrótów jest *kulomb* (C), który zastępuje amper·sekunda. W zadaniach nie posługujemy się tym skrótem, ale pozostawiamy ze względów dydaktycznych zawsze A·s.

Prawo Coulomba, gęstość powierzchniowa ładunku elektrycznego, gęstość objętościowa ładunku elektrycznego, natężenie pola elektrycznego, strumień natężenia pola elektrycznego, napięcie elektryczne, pojemność elektrostatyczna przewodnika — wzory określające te pojęcia, jednostki i związki między jednostkami podaliśmy w rozdziale 1.

**Twierdzenie Gaussa.** Jeżeli ładunek  $Q$  otoczony jest przez powierzchnię  $S$ , to strumień natężenia pola elektrycznego lub wektora indukcji elektrycznej przechodzący przez tę powierzchnię możemy obliczyć przy pomocy wzoru

$$\psi = \oint_S E dS \quad (4.9)$$

lub

$$\psi = \oint_S B dS, \quad (4.10)$$

w układzie SI otrzymujemy

$$\psi = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (4.11)$$

dla strumienia natężenia pola elektrycznego oraz

$$\psi = Q \quad (4.12)$$

dla strumienia wektora indukcji elektrycznej.



Związek między gęstością powierzchniową ładunku elektrycznego a natężeniem pola elektrycznego wyprowadzamy na podstawie twierdzenia Gaussa z wzoru

$$E = \frac{\psi}{S},$$

który, zastosowany do układu SI, daje

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (4.13)$$

Związek między napięciem elektrycznym a natężeniem pola elektrycznego pomiędzy dwoma punktami pola  $A$  oraz  $B$  określamy przy pomocy wzoru

$$E = - \frac{dU}{dx} \left( \frac{V}{m} \right), \quad (4.14)$$

gdzie  $dU$  oznacza napięcie elektryczne między tymi punktami, a  $dx$  — ich odległość.

Związek między napięciem elektrycznym a różnicą potencjałów między dwoma punktami pola  $A$  oraz  $B$  wyrażamy wzorem

$$U_{AB} = U_A - U_B. \quad (4.15)$$

Zachowanie się składowych pola elektrycznego przy przejściu przez powierzchnię graniczną dwu dielektryków:

1) Składowa styczna natężenia pola elektrycznego pozostaje stała

$$E_{1s} = E_{2s}. \quad (4.16)$$

2) Składowa normalna wektora indukcji elektrycznej pozostaje stała

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (4.17)$$

**Równanie pola elektrycznego.** Jeżeli przez  $V(x, y, z)$  oznaczymy potencjał punktu  $(x, y, z)$  znajdujący się w tym polu, to wartość potencjału tego pola elektrycznego w każdym punkcie pola wyznaczmy z wzoru

$$\varepsilon_0 \nabla^2 V = -\rho, \quad (4.18)$$

gdzie  $\rho$  oznacza gęstość elektryczną ładunków elektrycznych znajdujących się w tym polu oraz  $\nabla^2 V$  — tzw. laplasjan, który możemy wyrazić w różnych układach współrzędnych w różnej postaci. Należy pamiętać (ze względu na symetrię kulistą) wartość laplasjanu we współrzędnych kulistych oraz cylindrycznych:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \quad (4.19)$$

we współrzędnych kulistych oraz

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (4.20)$$

we współrzędnych cylindrycznych.

**Pojemność elektrostatyczna kondensatora kulistego**, oznaczając przez  $r$  promień powierzchni mniejszej, a przez  $R$  — promień powierzchni większej oraz przez  $\varepsilon$  — wartość stałej dielektrycznej dielektryka wypełniającego kondensator w układzie SI, wyrażona jest wzorem

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon \frac{rR}{R-r} \text{ (F)}, \quad (4.21)$$

a w układzie ES CGS

$$C = \varepsilon \frac{rR}{R-r} \text{ (cm)}. \quad (4.22)$$

**Pojemność elektrostatyczna kondensatora płaskiego**, oznaczając przez  $S$  powierzchnię jego okładki, przez  $d$  — odległość pomiędzy okładkami, przez  $\varepsilon$  — wartość stałej dielektrycznej materiału wypełniającego dielektryk, wyrażona jest w układzie SI wzorem

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S}{d} \text{ (F)}, \quad (4.23)$$

a w układzie ES CGS wzorem

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} \text{ (cm)}. \quad (4.24)$$

**Gęstość energii pola elektrycznego** określona na podstawie definicji

$$q_e = \frac{\text{energia pola elektrycznego}}{\text{objętość zajmowana przez to pole}}, \quad (4.25)$$

w układzie SI wyrażona jest wzorem

$$q_e = \frac{1}{2} \varepsilon BE = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2, \quad (4.26)$$

a w układzie ES CGS wzorem

$$q_e = \frac{1}{8\pi} \varepsilon BE = \frac{1}{8\pi} \varepsilon \varepsilon_0 E^2. \quad (4.27)$$

4.20. Udowodnić, że pole elektryczne jest polem zachowawczym.

4.21. Dwie kuleczki zawieszono obok siebie na izolowanych niciach mają jednakowe ładunki elektryczne. Masa kuleczek  $m_1 = m_2 = m = 10^{-5}$  kg, długość nici  $l = 0,2$  m. Gdy nitki zaczepimy w tym samym punkcie, kuleczki wskutek odpychania oddalały się na odległość  $r = 0,04$  m. Obliczyć ładunek elektryczny każdej z tych kuleczek.

4.22. W celu oceny wielkości siły elektrostatycznej obliczyć: a) przyciąganie dwu elementarnych ładunków  $Q_1 = Q_2 = e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  A·s z odległości rozmiarów atomu, a więc dla  $r = 10^{-10}$  m. b) przyciąganie ładunku dodatniego oraz równoważnego mu ładunku ujemnego o wielkości takiej, jaką mają razem jony w gramocząsteczce jodku sodu, jeżeli założymy, że ładunki te umieścimy na przeciwnych biegunach kuli ziemskiej, a więc w odległości  $r = 12700$  km.

4.23. Kulka  $A$  mająca ładunek elektryczny  $Q_1 = \frac{40}{5 \cdot 10^9}$  A·s przyciąga drugą kuleczkę  $B$  znajdującą się w odległości  $r = 0,06$  m pewną siłą. Przyciąganie to jest zrównoważone przez działanie siły przyciągania pochodzącej od naelektryzowanej pałeczki, mającej ładunek  $Q_2 = \frac{160}{5 \cdot 10^9}$  A·s, umieszczonej po drugiej stronie kulki  $B$ . W jakiej odległości od kuleczki  $B$  umieszczono tę pałeczkę?

4.24. Dwa ładunki elektryczne  $Q_1 = \frac{50}{9 \cdot 10^9}$  A·s oraz  $Q_2 = \frac{100}{9 \cdot 10^9}$  A·s znajdują się w odległości  $r = 0,08$  m w powietrzu, a następnie w oleju parafinowym o stałej dielektrycznej  $\epsilon = 1,8$ . Obliczyć w pierwszym oraz w drugim przypadku ich wzajemną siłę przyciągania.

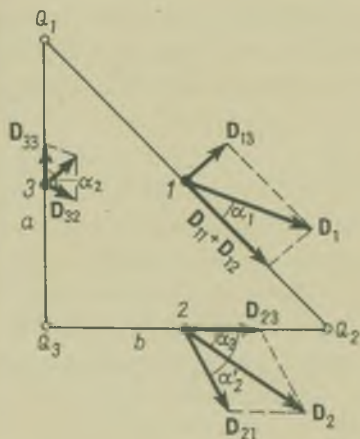
4.25. Dwa ładunki elektryczne  $Q_1 = \frac{50}{9 \cdot 10^9}$  A·s oraz  $Q_2 = \frac{10}{9 \cdot 10^9}$  A·s oddalone są od siebie o  $r = 0,06$  m. Gdzie należy umieścić próbny ładunek dodatni  $Q$ , aby pod wpływem sił elektrostatycznych pochodzących od ładunków  $Q_1$  i  $Q_2$  znajdował się w równowadze?

4.26. W wierzchołkach kwadratu o bokach  $a = 0,1$  m umieszczono kolejno, zgodnie z ruchem wskazówek zegara, 4 ładunki elektryczne  $Q_1 = Q_2 = \frac{10}{9 \cdot 10^9}$  A·s oraz  $Q_3 = Q_4 = -\frac{100}{9 \cdot 10^9}$  A·s. Obliczyć co do

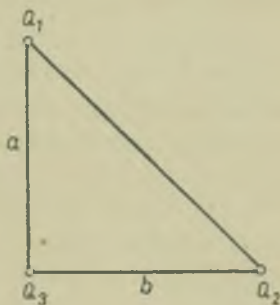
wielkości oraz co do kierunku natężenie pola elektrycznego panujące w środku kwadratu.

4.27. Na okręgu koła o promieniu  $r = 0,05$  m w równych odstępach znajdują się trzy ładunki:  $Q_1 = Q_2 = \frac{10}{9 \cdot 10^9} \text{ A} \cdot \text{s}$  oraz  $Q_3 = -\frac{10}{9 \cdot 10^9} \text{ A} \cdot \text{s}$  ES CGS. Obliczyć natężenie pola elektrycznego co do wartości oraz co do kierunku w środku tego koła.

4.28. Z pewnego ładunku elektrycznego wychodzi  $n = 500$  linii sił pola elektrycznego. Obliczyć, jak wielki jest ten ładunek. Dane zadania odnoszą się do natężenia pola elektrycznego podanego w układzie ES CGS.



Rys. 4.2



Rys. 4.3

4.29. W wierzchołkach trójkąta prostokątnego umieszczone są ładunki<sup>i</sup> (rys. 4.2)  $Q_1 = 2 \cdot 10^9 \text{ A} \cdot \text{s}$ ,  $Q_2 = -2 \cdot 10^9 \text{ A} \cdot \text{s}$ ,  $Q_3 = 5 \cdot 10^9 \text{ A} \cdot \text{s}$ . Boki trójkąta  $a = b = 1$  m. Obliczyć wektory indukcji elektrycznej w środkach boków tego trójkąta.

4.30. W wierzchołkach trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych  $a = b = 1$  m umieszczone są ładunki (rys. 4.3)  $Q_1 = 2 \cdot 10^9 \text{ A} \cdot \text{s}$ ,  $Q_2 = -2 \cdot 10^9 \text{ A} \cdot \text{s}$ ,  $Q_3 = 5 \cdot 10^9 \text{ A} \cdot \text{s}$ . Obliczyć wektory indukcji elektrycznej w wierzchołkach tego trójkąta.

4.31. Układ dwu ładunków elektrycznych o przeciwnych znakach  $Q_1 = -Q_2$ , znajdujących się w odległości  $r$  od siebie, nazywamy dipolem. Obliczyć co do wartości oraz podać kierunek natężenia pola elektrycznego dipola w punktach:

a) leżących na linii łączącej oba ładunki w odległości  $r_1 = 0,2$  m od ładunku dodatniego oraz;

b) leżących w odległości  $r_2 = 0,1$  m na symetrycznej odcinka łączącego oba ładunki.

Odległość ładunków tego dipola  $r = 0,05$  m.

4.32. Obliczyć wartość i kierunek wektora indukcji elektrycznej na osi prostopadłej do dipola o rozmiarach  $d = 10^{-3}$  m i ładunkach  $Q = \pm 2 \cdot 10^6$  A·s w punkcie odległym od  $d$  o  $r = 10^{-1}$  m.

4.33. Obliczyć wartość i kierunek wektora indukcji elektrycznej na osi prostopadłej do dipola o rozmiarach  $d = 10^{-3}$  m oraz ładunkach elektrycznych  $Q = \pm 2 \cdot 10^6$  A·s w punkcie odległym od  $d$  o  $r = d$ .

4.34. Obliczyć siłę wywieraną na dipol znajdujący się w zewnętrznym polu elektrycznym o gradiencie  $\text{grad} \mathbf{E} = 2$  N/A·s·m, jeżeli jego moment elektryczny  $\mathbf{p} = 5$  A·s·m oraz kąt ustawienia dipola w stosunku do linii pola elektrycznego  $\alpha = 60^\circ$ .

4.35. Obliczyć energię elektryczną dipola  $\mathbf{p} = 5$  A·s·m znajdującego się w polu elektrycznym  $\mathbf{E} = 2$  N/A·s, jeżeli kąt ustawienia dipola w stosunku do linii tego pola  $\alpha = 60^\circ$ .

4.36. Zakładając liniową zależność gradientu natężenia pola elektrycznego, obliczyć pracę potrzebną do przeniesienia dipola o momencie elektrycznym  $\mathbf{p} = 5$  A·s·m, ustawionego pod kątem  $\alpha = 60^\circ$  do kierunku linii pola  $\mathbf{E}$  od punktu pola o gradiencie  $\text{grad} \mathbf{E} = 2$  N/A·s·m do punktu o gradiencie  $\text{grad} \mathbf{E} = 20$  N/A·s·m. Odległość tych punktów wynosi  $dx = 0,02$  m.

4.37. Obliczyć wartość i kierunek wektora indukcji elektrycznej na symetrycznej osi przechodzącej przez centrum i leżącej w płaszczyźnie kwadrupola o rozmiarach  $d = 10^{-3}$  m i ładunkach elektrycznych  $Q = \pm 2 \cdot 10^6$  A·s w punkcie odległym od centrum kwadrupola o  $r = 1,5d$ .

4.38. Obliczyć wartość i kierunek wektora indukcji elektrycznej przechodzącej przez centrum i prostopadłej do płaszczyzny kwadrupola o rozmiarach  $d$  oraz ładunkach  $\pm Q$  w punkcie  $P$  odległym od centrum kwadrupola o  $r$ .

4.39. Obliczyć wartość i kierunek wektora indukcji elektrycznej w punkcie  $P$  leżącym na przekątnej kwadrupola, o rozmiarach  $d = 10^{-3}$  m i ładunku elektrycznym  $Q = \pm 2 \cdot 10^6$  A·s, odległym o  $r = d$  od wierzchołka.

4.40. Obliczyć wartość i kierunek wektora indukcji elektrycznej w punkcie  $P$  leżącym na przekątnej głównej oktopola o ładunku elektrycznym



$Q = \pm 2 \cdot 10^9 \text{ A}\cdot\text{s}$ , rozmiarach  $d = 10^{-1} \text{ m}$  w odległości  $d$  od najbliższego wierzchołka.

4.41. Obliczyć wartość i kierunek wektora indukcji elektrycznej na osi przechodzącej przez centrum oraz środek dowolnej krawędzi oktupola o rozmiarach  $d = 10^{-3} \text{ m}$  i ładunkach  $Q = \pm 2 \cdot 10^9 \text{ A}\cdot\text{s}$  w punkcie  $P$  odległym o  $r = d$  od krawędzi.

4.42. Obliczyć wartość i kierunek wektora indukcji elektrycznej na symetrycznej osi przechodzącej przez centrum oktupola i prostopadłej do którejkolwiek z bocznych płaszczyzn oktupola w dowolnym punkcie odległym od centrum oktupola oraz o dowolnych jego rozmiarach i ładunkach elektrycznych.

4.43. Obliczyć gęstość powierzchniową przewodnika w miejscu, w pobliżu którego natężenie pola elektrycznego  $E = 2 \text{ V/m}$ .

4.44. Obliczyć współczynnik załamania strumienia wektora indukcji elektrycznej przechodzącego z acetonu o stałej dielektrycznej  $\epsilon_1 = 26,6$  do eteru etylowego o stałej dielektrycznej  $\epsilon_2 = 4,68$ , jeżeli strumień ten pada na powierzchnię graniczną pod kątem  $\alpha = 45^\circ$ .

4.45. Powierzchnia czoła strumienia natężenia pola elektrycznego padającego z ośrodka wypełnionego alkoholem etylowym o stałej dielektrycznej  $\epsilon_1 = 28,4$  do ośrodka zawierającego benzen o stałej dielektrycznej  $\epsilon_2 = 2,3$  wynosi  $S_1 = 0,02 \text{ m}^2$ , a kąt padania  $\alpha_1 = 30^\circ$ . Obliczyć powierzchnię czoła tego strumienia w benzenie.

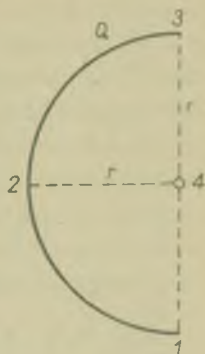
4.46. Strumień natężenia pola elektrycznego pada pod kątem  $\alpha_1 = 30^\circ$  z alkoholu etylowego o stałej dielektrycznej  $\epsilon_1 = 28,4$  do benzenu o stałej dielektrycznej  $\epsilon_2 = 2,3$ . Obliczyć kąt załamania tego strumienia spowodowany przez benzen.

4.47. Wykazać związek pomiędzy potencjałem elektrycznym a ładunkiem wytwarzającym ten potencjał.

4.48. Jednorodnie naładowany ładunkiem elektrycznym  $Q$  pręt w kształcie półkola (rys. 4.4) wytwarza w środku koła natężenie pola elektrycznego  $E$ . Znaleźć jego wartość i kierunek.

4.49. W odległości  $a = 10^{-1} \text{ m}$  od nieskończenie rozległej płyty metalicznej (praktycznie bardzo dużej w porównaniu z  $a$  znajduje się ładunek  $Q = 2 \cdot 10^6 \text{ A}\cdot\text{s}$ . Znaleźć wartość potencjału w dowolnym punkcie przestrzeni pochodzącego od tego ładunku.

4.50. W odległości  $a = 10^{-1} \text{ m}$  od nieskończenie rozległej płaszczyzny



Rys. 4.4



metalicznej znajduje się ładunek elektryczny  $Q = 2 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{s}$ . Znaleźć wartość oraz kierunek natężenia pola elektrycznego wchodzącego w punkcie  $P$  do tej płaszczyzny.

4.51. Obliczyć gęstość powierzchniową ładunku indukcyjnego na nieokończenie wielkiej powierzchni metalicznej, jeżeli nad nią w odległości  $a$  umieścimy ładunek elektryczny  $Q$ .

4.52. Obliczyć potencjał panujący zewnątrz kuli w odległości  $R = 1 \text{ m}$ , jeżeli promień tej kuli  $r = 0,1 \text{ m}$ , a jednorodna gęstość objętościowa ładunków elektrycznych w tej kuli wynosi  $\rho = 0,2 \text{ A} \cdot \text{s}/\text{m}^3$ .

4.53. Obliczyć potencjał panujący wewnątrz kuli w odległości  $R = 0,05 \text{ m}$ , jeżeli promień kuli  $r = 0,1 \text{ m}$ , a jej jednorodna gęstość ładunków elektrycznych  $\rho = 0,2 \text{ A} \cdot \text{s}/\text{m}^3$ .

4.54. Wyprowadzić wzór na pojemność kuli o promieniu  $r$ .

4.55. Ziemia o promieniu  $r = 6370 \text{ km}$  oraz otaczająca ją w odległości  $d = 80 \text{ km}$  warstwa Heaviside'a (jonosfera) to olbrzymie okładki kondensatora. Stwierdzono, że pomiędzy tymi okładkami istnieje pole elektryczne o średnim natężeniu  $E = 120 \text{ V}/\text{m}$ . Obliczyć na tej podstawie średni ładunek elektryczny kuli ziemskiej oraz jej średnią gęstość powierzchniową.

4.56. W polu elektrostatycznym o natężeniu  $E = 10^6 \text{ V}/\text{m}$  przeniesiono ładunek  $Q = 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{s}$ . Obliczyć odległość, na jaką przeniesiono ten ładunek, jeżeli wykonano pracę jednego dżula.

4.57. Przy przesuwaniu ładunku  $Q = \frac{110}{9 \cdot 10^9} \text{ A} \cdot \text{s}$  wykonano pracę jednego dżula. Jaka była różnica potencjałów pomiędzy początkowym a końcowym punktem drogi?

4.58. Obliczyć pojemność kuli ziemskiej. Jej promień wynosi  $r = 6370 \text{ km}$ . Jaki ładunek należałoby doprowadzić do kondensatora o takiej pojemności, aby potencjał jego wzrósł o jeden wolt?

4.59. Na kulę metaliczną o promieniu  $R = 0,45 \text{ m}$  wprowadzono ładunek  $Q = 5 \cdot 10^{-6} \text{ A} \cdot \text{s}$ . Obliczyć jej potencjał, gęstość powierzchniową ładunku, natężenie pola elektrycznego przy powierzchni kuli oraz w odległości  $r = 5 \text{ m}$  od kuli. Podać wartość potencjału elektrycznego w odległości  $r = 5 \text{ m}$  od środka kuli.

4.60. Obliczyć siłę przyciągania się dwu płyt kondensatora płaskiego o powierzchniach  $A = 0,2 \text{ m}^2$  oraz o ładunkach elektrycznych  $Q_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{s}$ ,  $Q_2 = -2 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{s}$ .

4.61. Kulę metalową o promieniu  $r = 0,45 \text{ m}$  oraz ładunku elektrycz-

nym  $Q = 5 \cdot 10^{-6} \text{ A} \cdot \text{s}$  wprowadzono do alkoholu etylowego o stałej dielektrycznej  $\epsilon = 28,4$ . Obliczyć jej potencjał oraz natężenie pola elektrycznego panujące w tym ośrodku w odległości  $R = 5 \text{ m}$  od środka kuli.

4.62. Udowodnić, że pole na zewnątrz kondensatora (prócz linii brzegowych) jest zawsze równe zeru.

4.63. Siła przyciągania się dwu płytek kondensatora płaskiego (jedna ruchoma — absolutny elektrometr Kelvina) wynosi  $F = 2 \cdot 10^2 \text{ N}$ ; odległość płytek  $d = 0,02 \text{ m}$ , a powierzchnia  $0,2 \text{ m}^2$ . Znaleźć napięcie powierzchniowe panujące pomiędzy tymi płytkami, jeżeli są one zanurzone w benzenie o stałej dielektrycznej  $\epsilon = 2,3$ .

4.64. Kulka ciekłego azotu o promieniu  $r = 0,001 \text{ m}$  została tak naładowana, że uzyskała napięcie w stosunku do otoczenia  $U = 300 \text{ V}$ . Napięcie powierzchniowe ciekłego azotu  $T = 10^{-3} \text{ N/m}$ . Obliczyć ładunek kulki, natężenie pola elektrycznego przy powierzchni kulki oraz zmianę ciśnienia molekularnego wywieranego na powierzchnię kulki.

4.65. Obliczyć dodatkowe ciśnienie  $p_e$  powstałe na powierzchni kulki o promieniu  $r = 0,001 \text{ m}$  wskutek naładowania jej do potencjału  $U = 500 \text{ V}$ .

4.66. Obliczyć potencjał kondensatora cylindrycznego o promieniach  $r_1 = 1 \text{ m}$  oraz  $r_2 = 1,2 \text{ m}$ , panujący w odległości  $r = 1,1 \text{ m}$  od jego osi, jeżeli potencjał wewnętrznej okładki tego kondensatora  $V_1 = 500 \text{ V}$ , druga zaś okładka jest uziemiona.

4.67. Obliczyć pojemność kondensatora cylindrycznego o długości  $l = 2 \text{ m}$  oraz o promieniach  $r_1 = 1 \text{ m}$  i  $r_2 = 1,2 \text{ m}$ .

4.68. Obliczyć natężenie pola elektrycznego panujące w odległości  $r = 1,1 \text{ m}$  między okładkami kondensatora cylindrycznego o promieniach  $r_1 = 1 \text{ m}$  oraz  $r_2 = 1,2 \text{ m}$ , jeżeli różnica potencjałów między tymi okładkami wynosi  $V_1 - V_2 = 500 \text{ V}$ .

4.69. Wyprowadzić i objaśnić wzór na pojemność baterii kondensatorów połączonych: a) szeregowo, b) równolegle.

4.70. Mamy trzy kondensatory o pojemności  $C_1 = 50 \text{ pF}$ ,  $C_2 = 100 \text{ pF}$ ,  $C_3 = 200 \text{ pF}$ . Podać wartości wszystkich możliwych pojemności, które możemy uzyskać z tych trzech kondensatorów.

4.71. Mamy pięć kondensatorów  $C_1 = 50 \text{ pF}$ ,  $C_2 = C_3 = 100 \text{ pF}$ ,  $C_4 = C_5 = 200 \text{ pF}$ . Kondensatory  $C_1$  i  $C_2$  oraz  $C_3$  i  $C_4$  połączono szeregowo. Otrzymane w ten sposób dwa układy kondensatorów oraz kondensator  $C_5$  połączono ze sobą równolegle. Obliczyć pojemność elektryczną całkowitego układu.

4.72. Metalowa kula o promieniu  $r_1 = 0,03 \text{ m}$  ma po naładowaniu

potencjał  $U_1 = 8000$  V. Druga metalowa kula o promieniu  $r_2 = 0,12$  m po jej naładowaniu ma potencjał  $U_2 = 1000$  V. Kule te łączymy ze sobą cienkim drucikiem. Następuje krótkotrwały prąd podczas spinania tych kul. Obliczyć: a) ładunki elektryczne poszczególnych kul, b) ładunek przepływający przez druciki podczas łączenia tych kul oraz c) ich wspólny końcowy potencjał. Pojemność drucika można w obliczeniach zaniedbać.

4.73. Jaką pojemność powinien mieć kondensator, który po przyłączeniu go do sieci o napięciu  $U = 110$  V uzyskuje na swych okładkach ładunek elektryczny  $Q = 10^{-6}$  A·s?

4.74. Należy sporządzić kondensator o pojemności  $C = 2$   $\mu$ F. Mamy do rozporządzenia papier parafinowy o grubości  $d = 2 \cdot 10^{-4}$  m oraz cynfolię. Jaka jest ogólna powierzchnia cynfolii potrzebna do wykonania tego kondensatora? Stała dielektryczna papieru parafinowego wynosi  $\epsilon = 1,8$ .

4.75. Mamy zbudować kondensator o pojemności  $C = 5$   $\mu$ F. Możemy użyć do tego celu cynfolii o powierzchni  $S = 5$  m<sup>2</sup> oraz różne gatunki papieru parafinowanego (różnej grubości). Jakiej grubości papier parafinowy należy umieścić między okładkami kondensatora, jeżeli stała dielektryczna papieru parafinowego wynosi  $\epsilon = 1,8$ ?

4.76. Dwa jednakowe początkowo nie naładowane kondensatory powietrzne połączono szeregowo z baterią o napięciu  $U = 100$  V. O ile ulegnie zmianie potencjał drutu łączącego te kondensatory, jeżeli jeden z nich napełnimy oliwą o stałej dielektrycznej  $\epsilon = 3,1$ ?

4.77. Płaski kondensator powietrzny o łącznej powierzchni płyt  $S = 0,6$  m<sup>2</sup> połączony jest z baterią o napięciu  $U = 600$  V. Płyty kondensatora znajdują się w odległości  $d = 2 \cdot 10^{-3}$  m. Jaki ładunek dopłynie przez przewodnik do kondensatora, jeżeli napełnimy go oliwą o stałej dielektrycznej  $\epsilon = 3,1$ ?

4.78. Obliczyć napięcie  $U$  oraz natężenie pola elektrycznego  $E$  panujące w cieczy, która znajduje się we wnętrzu szklanego kondensatora płaskiego. Zewnętrzne okładki szklane obłożono metalowymi płytkami, do których podłączono napięcie  $U = 2000$  V. Grubość szklanych okładek  $d_1 = 5 \cdot 10^{-4}$  m, grubość warstwy cieczy  $d_2 = 8 \cdot 10^{-3}$  m, opór właściwy szkła  $\rho_1 = 5 \cdot 10^{11}$   $\Omega \cdot$  m, a opór właściwy cieczy  $\rho_2 = 10^8$   $\Omega \cdot$  m.

4.79. Dwa kondensatory o pojemnościach  $C_1 = 0,5$   $\mu$ F oraz  $C_2 = 0,2$   $\mu$ F są połączone szeregowo. Napięcie końcówek tego układu kondensatorów wynosi  $U = 220$  V. Jaki ładunek ma każdy z tych kondensatorów oraz jakie napięcie panuje na końcówkach każdego z nich?

**4.80.** Powietrzny regulowany kondensator płaski, tzw. trimer, ma dwie płytki, każda o powierzchni  $S = 10^{-3} \text{ m}^2$ . W jakich granicach należy regulować odległość tych płytek, aby pojemność trimera zmieniała się w granicach od  $C_1 = 5 \text{ pF}$  do  $C_2 = 10 \text{ pF}$ ?

**4.81.** Powietrzny płaski kondensator (trimer) może zmieniać swoją pojemność od  $C_1 = 20 \text{ pF}$  do  $C_2 = 200 \text{ pF}$ . Taki kondensator naładowany został pod napięciem  $U = 220 \text{ V}$  przy swej maksymalnej pojemności, następnie źródło napięcia zostało od niego odłączone. Obliczyć energię tego kondensatora przy jego minimalnej oraz maksymalnej pojemności.

**4.82.** Płaski kondensator składa się z dwu równoległych płyt, każda o powierzchni  $S = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ , izolowanych od siebie i znajdujących się w odległości  $d = 5 \text{ mm}$ . Pomiedzy płytami panuje różnica potencjałów  $U = 300 \text{ V}$ . Obliczyć:

- natężenie pola elektrycznego pomiędzy płytami,
- energię elektryczną w jednostce objętości tego kondensatora,
- siłę działającą na kropelkę oliwy, mającą ładunek  $Q = 32 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$ , wpuszczoną między okładki tego kondensatora.

**4.83.** Napelniony olejem kondensator o pojemności  $C = 500 \text{ pF}$  naładowany został pod napięciem  $U = 1000 \text{ V}$ . Stała dielektryczna oleju  $\epsilon = 4,8$ . Kondensator ten był nieszczelny i po pewnym czasie olej z niego wyciekł. a) Obliczyć energię elektryczną nagromadzoną w tym kondensatorze. b) Obliczyć zmianę napięcia między okładkami kondensatora wskutek wypłynięcia oleju. Wytrzymałość tego kondensatora na przebicie wynosi  $U = 6000 \text{ V}$ . c) Czy ten kondensator zostanie przeбитy?

**4.84.** Kondensator o pojemności  $C = 16 \mu\text{F}$  został naładowany pod napięciem  $U = 220 \text{ V}$ . Obliczyć: a) jego energię oraz b) ładunek, który znajduje się na jego okładkach po naładowaniu.

**4.85.** Jaką należy wykonać pracę, aby kulę o promieniu  $R_1 = 0,1 \text{ m}$  naładować do napięcia  $U = 30000 \text{ V}$ ?

**4.86.** Jaką należy wykonać pracę, aby naładować kulę o promieniu  $R = 0,01 \text{ m}$  ładunkiem  $Q = 10^{-6}$  kulombów. Obliczyć potencjał na powierzchni tej kuli po jej naładowaniu oraz natężenie pola elektrycznego panującego tuż przy jej powierzchni.

**4.87.** Pomiedzy dwiema okładkami płaskiego kondensatora znajdują się dwie płyty: szklana o grubości  $d_1 = 10^{-3} \text{ m}$  oraz marmurowa o grubości  $d_2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ . Do okładek kondensatora przyłączona jest bateria o napięciu  $U = 1000 \text{ V}$ . Przewodnictwo właściwe szkła  $\gamma_1 = 10^{-10} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ , przewodnictwo właściwe marmuru  $\gamma_2 = 10^{-8} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ .



Obliczyć różnicę potencjałów oraz natężenie pola elektrycznego panujące na jednej oraz na drugiej płytce.

**4.88.** Ładunek  $Q$  jest równomiernie rozłożony na powierzchni kuli o promieniu  $R = 0,01$  m; kula ta znajduje się w pustej przestrzeni. Obliczyć stosunek energii pola elektrycznego wytworzonego przez ładunek kuli zawartej w koncentrycznej kuli o promieniu  $r = 1$  m do całej wytworzonej energii.

**4.89.** Mamy pole elektryczne w próżni o  $E_0 = 20$  V/m. Wprowadzamy w to pole eter etylowy o objętości  $V = 10^{-6}$  m<sup>3</sup> oraz o stałej dielektrycznej  $\epsilon = 4,68$ . Obliczyć zmianę energii elektrycznej tego pola.

**4.90.** Każda z rurek naczynia połączonego o powierzchni  $S = 0,05$  m<sup>2</sup> wypełniona jest alkoholem metylowym o stałej dielektrycznej  $\epsilon = 35,0$  i masie właściwej  $\rho = 810$  kg/m<sup>3</sup>. Prostopadle do jednego z ramion przepuszczono strumień pola elektrycznego o natężeniu  $E = 2 \cdot 10^5$  V/m. Obliczyć wzniesienie się powierzchni swobodnej alkoholu w tym ramieniu.

**4.91.** Obliczyć natężenie pola elektrycznego potrzebne do wzniesienia gliceryny o masie właściwej  $\rho = 1200$  kg/m<sup>3</sup> o  $h = 0,002$  m, jeżeli jedno z ramion naczynia połączonego, w którym znajduje się gliceryna umieścimy w tym polu. Stała dielektryczna gliceryny  $\epsilon = 56,2$ .

**4.92.** Kondensator o pojemności  $C = 1$   $\mu$ F został naładowany pod napięciem  $U = 1000$  V. Okładki tego kondensatora spięto oporem  $R = 1$  M $\Omega$ . Po jakim czasie napięcie na okładkach tego kondensatora spadnie do napięcia  $U_1 = 1$  V?

**4.93.** Kondensator o pojemności  $C = 5$   $\mu$ F naładowano pod napięciem  $U_0 = 220$  V. Następnie rozładowano go za pomocą przewodnika o oporze  $R = 50$   $\Omega$ . Jaki prąd popłynie przez ten opór w pierwszej chwili jego włączenia? Po jakim czasie natężenie prądu spadnie do 0,001 swej początkowej wartości?

#### **4.4. PRAWO OHMA DLA OBWODU ZAMKNIĘTEGO ORAZ DLA CZĘŚCI OBWODU, PRAWA KIRCHHOFFA, ŁĄCZENIE OPORÓW I OGNIW**

Definicje oporu elektrycznego, gęstości prądu elektrycznego, prawo Ohma dla obwodu zamkniętego oraz dla części obwodu, definicję oporu elektrycznego, ich jednostki oraz związki między jednostkami podane zostały w rozdziale 1.

Również z definicjami, jednostkami oraz ich związkami dla oporu właściwego i przewodności elektrycznej można zapoznać się w rozdziale 1.

**Opór elektryczny przewodnika zależy:**

a) od warunków geometrycznych

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (4.28)$$

b) od temperatury

$$R_T = R_0(1 + \alpha \Delta T), \quad (4.29)$$

gdzie  $\Delta T = T - T_0$ , opór  $R_T$  oznacza opór w temperaturze  $T$ ,  $R_0$  — opór w temperaturze  $T_0$ ,  $\alpha \left( \frac{1}{K} \right)$  — temperaturowy współczynnik oporu elektrycznego.

**Prawo Ohma.** Uwzględniając zależność oporu elektrycznego od warunków geometrycznych przewodnika, definicje przewodności elektrycznej oraz gęstości prądu można je napisać w postaci

$$J = \sigma E, \quad (4.30)$$

gdzie  $J$  oznacza gęstość płynącego w przewodniku prądu elektrycznego,  $\sigma$  — przewodność elektryczną tego przewodnika,  $E$  — natężenie pola elektrycznego panującego we wnętrzu danego przewodnika.

**Łączenie oporów.** Jeżeli  $n$  oporów  $R_i$  połączymy szeregowo, to opór zastępczy takiego układu możemy obliczyć z wzoru

$$R_z = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (4.31)$$

Jeżeli opory te połączymy równolegle, to opór zastępczy takiego układu możemy obliczyć z wzoru

$$\frac{1}{R_z} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (4.32)$$

**Łączenie ogniw.** Jeżeli połączymy szeregowo  $n$  ogniw, każde o sile elektromotorycznej  $E$  woltów oraz oporze wewnętrznym  $R$  omów, oporem zewnętrznym  $r$  omów, to natężenie płynącego w takim obwodzie prądu w amperach wyraża się wzorem

$$I = \frac{\text{całkowita siła elektromotoryczna obwodu}}{\text{całkowity opór obwodu}} = \frac{nE}{r + nR}. \quad (4.33)$$



Jeżeli połączymy równolegle  $n$  ogniw, każde o sile elektromotorycznej  $E$  woltów oraz oporze wewnętrznym  $R$  omów, to natężenie płynącego w takim obwodzie prądu w amperach wyraża się wzorem

$$I = \frac{nE}{nr + R} \quad (4.34)$$

**Prawa Kirchhoffa.** Zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa zastosowanym do tzw. węzła sieci suma wszystkich natężeń prądów wchodzących oraz wychodzących z węzła wynosi

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (4.35)$$

Uwaga. Przyjmujemy umownie, że:

- a) natężenia prądów wchodzących do węzła uważamy za dodatnie,
- b) natężenia prądów wychodzących z węzła uważamy za ujemne.

**Drugie prawo Kirchhoffa** odnosi się do tzw. oczka sieci i mówi, że suma wszystkich sił elektromotorycznych  $E_k$ , działających w tym oczku, równa się sumie spadków napięć na oporach  $r_s$  oczka, przez które płyną prądy  $I_s$ ,

$$\sum_{k=1}^n E_k = \sum_{s=1}^m I_s r_s. \quad (4.36)$$

Uwaga. Przyjmujemy umownie, że:

- a) prądy płynące zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara oraz siły elektromotoryczne ogniw działające w oczku zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara uważamy za dodatnie,
- b) prądy płynące przeciwnie oraz siły elektromotoryczne działające przeciwnie uważamy za ujemne.

## Zadania

— 4.94. Obliczyć opór właściwy rtęci, jeżeli w temperaturze  $T_0$  słupek rtęci o długości  $l = 1,063$  m oraz przekroju  $S = 10^{-4}$  m<sup>2</sup> ma opór  $R = 1$  Ω.

— 4.95. Opór żelaznego przewodnika o długości  $l = 1$  m oraz powierzchni przekroju  $S = 10^{-4}$  m<sup>2</sup> wynosi  $R = 0,098$  Ω. Obliczyć opór właściwy tego żelaza.

— 4.96. Jaką średnicę powinien mieć przewodnik miedziany o długości  $l_1 = 20$  m, aby miał taki sam opór jak przewodnik miedziany o długości  $l_2 = 30$  m oraz o średnicy  $d_2 = 5 \cdot 10^{-4}$  m?

– 4.97. Obliczyć opór drutu platynowego o długości  $l_1 = 0,05$  m oraz o średnicy  $d_1 = 10^{-5}$  m, jeżeli wiemy, że opór drutu platynowego o długości  $l_2 = 1$  m oraz o średnicy  $d_2 = 10^{-3}$  m wynosi  $R_2 = 0,2 \Omega$ .

– 4.98. Mamy dwa przewodniki tej samej długości oraz z takiego samego materiału o przekrojach  $S_1 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$  oraz  $S_2 = 6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ ; opór pierwszego przewodnika  $R_1 = 2,5 \Omega$ . Ile wynosi opór drugiego przewodnika?

– 4.99. Mamy trzy opory:  $r_1 = 5 \Omega$ ,  $r_2 = 10 \Omega$  i  $r_3 = 15 \Omega$ . Jakie możemy z nich otrzymać opory, stosując różne kombinacje połączeń?

– 4.100. Do oporu  $R_1 = 15 \Omega$  dołączyć taki opór, aby zastępczy opór powstałego układu wynosił  $R = 13 \Omega$ . Ile wynosi dołączony opór?

4.101. Znaleźć takie dwa opory  $x$  i  $y$ , aby połączone szeregowo dawały wypadkowy opór  $R$ , połączone zaś równolegle dawały opór wypadkowy  $r$ . Podać warunek rozwiązalności zadania.

4.102. Jakich dwóch oporów należy użyć, aby w połączeniu szeregowym dawały opór  $R = 120 \Omega$ , w połączeniu zaś równoległym opór  $r = 30 \Omega$ ?

4.103. Opór właściwy stopu złożonego z 90 % platyny oraz 10 % rodu wynosi  $\rho_1 = 0,2 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ . Opór właściwy platyny jest  $\rho_2 = 0,11 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ . Ile wynosi opór termoelementu złożonego z drutu platynowego oraz z drutu z wyżej wymienionego stopu, jeżeli każdy z drutów ma  $l = 0,25$  m długości oraz  $d = 10^{-4}$  m średnicy?

4.104. Jak zmieni się opór przewodnika o jednakowym na całej długości przekroju, jeżeli przelamiemy go na dwie części oraz części te połączymy ze sobą równolegle?

– 4.105. Dwa opory  $R_1 = 4 \Omega$  oraz  $R_2 = 8 \Omega$  połączono równolegle oraz doprowadzono do punktu rozgałęzienia tych oporów prąd o natężeniu  $I = 15$  mA. Jakie prądy popłyną w rozgałęzieniach?

4.106. Jak wielkie jest natężenie prądu błyskawicy, jeżeli podczas jej trwania zostaje przeniesiony do ziemi ładunek  $Q = 40 \text{ A} \cdot \text{s}$  w czasie  $t = 0,001$  s?

– 4.107. Prąd o natężeniu  $I = 0,5$  A rozgałęzia się na trzy oporniki  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 6 \Omega$  oraz  $R_3 = 8 \Omega$ . Obliczyć natężenia prądów płynących w poszczególnych opornikach.

4.108. Obliczyć opór przewodnika utworzonego przez krawędzie sześcianu, z których każdy ma opór równy  $r$ . Prąd jest doprowadzony i odprowadzony z przeciwległych naroży.

4.109. O ile procent zwiększa się natężenie prądu w przewodniku o średnim współczynniku temperaturowym oporu  $\alpha = 0,0038 \text{ K}^{-1}$ ,

jeżeli temperatura przewodnika spada od  $T_1 = 303,16 \text{ K}$  do  $T_2 = 248,16 \text{ K}$ , napięcie natomiast na końcach tego przewodnika pozostaje niezmienione?

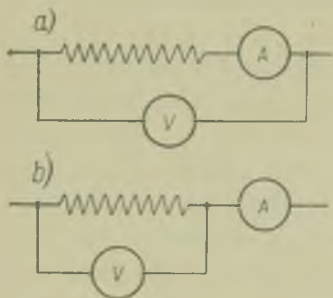
**4.110.** Zależność oporu właściwego przewodnika od temperatury można wyrazić w przybliżeniu za pomocą wzoru

$$\rho_{T_2} = \rho_{T_1} [1 + \alpha \Delta T],$$

gdzie  $\rho_{T_1}$  i  $\rho_{T_2}$  oznaczają opory przewodnika w temperaturach  $T_2$  i  $T_1$ , a  $\alpha$  jest temperaturowym współczynnikiem oporu. W przypadku przewodników miedzianych przyjmuje się w technice  $\alpha = 0,0039 \text{ K}^{-1}$ . Obliczyć opór przewodnika miedzianego w temperaturze  $T_2 = 333,16 \text{ K}$ , jeżeli opór jego w temperaturze  $T_1 = 293,16 \text{ K}$  wynosi  $R_1 = 28 \Omega$ .

**4.111.** Znaleźć współczynnik załamania kierunku prądu na granicy żelaza i bizmutu, których przewodnictwa właściwe wynoszą:  $\sigma_{\text{Fe}} = 10^7 \frac{1}{\text{cm} \cdot \text{m}}$  oraz  $\sigma_{\text{Bi}} = 8,4 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{cm} \cdot \text{m}}$ , a prąd z żelaza wpływa pod kątem  $\alpha = 30^\circ$  do granicy obu przewodników.

**4.112.** Z tego samego gniazdka czerpiemy prąd elektryczny do trzech równolegle załączonych żarówek. Podczas normalnego świecenia, tj. w temperaturze  $T = 2300 \text{ K}$ , moc każdej żarówki wynosi  $P = 100 \text{ W}$ . Przyjmując, że przez czas  $\tau = 0,01 \text{ s}$  temperatura włókien żarówek jest temperaturą pokojową  $T = 233,16 \text{ K}$ , obliczyć energię prądu w watosekundach pobieraną z sieci miejskiej o napięciu  $U = 220 \text{ V}$  w początkowej fazie załączenia (w czasie  $\tau$ ). Zaniedbać opór przewodów elektrycznych.



Rys. 4.5

**4.113.** Pomiaru nieznanego oporu  $x$  można dokonać przy użyciu amperomierza oraz woltomierza w dwojaki sposób. Przez

opór przepuszcza się prąd oraz mierzy się napięcie i natężenie płynącego prądu w układzie *a* lub w układzie *b* (rys. 4.5). Opór woltomierza  $R_w$ , oraz opór amperomierza  $R_a$ . Obliczyć wartość błęd popełnionego, jeżeli weźmiemy

za opór  $x$  stosunek  $\frac{U}{I}$ , tzn. stosunek napięcia odczytanego na woltomierzu

do natężenia prądu elektrycznego odczytanego na amperomierzu. Kiedy należy mierzyć opór  $x$  według układu *a*, a kiedy według *b* (rys. 4.5).

**4.114.** Wyprowadzić wzór na natężenie płynącego przez opór zewnętrzny  $R_z$  prądu, jeżeli opór ten spina baterię  $n$  ogniw, każde o sile elektromotorycznej  $E$  i oporze wewnętrznym  $R$  w następujących przypadkach:

a) gdy ogniwa są połączone szeregowo,

b) gdy ogniwa są połączone równolegle.

**4.115.** Ile (co najmniej) ogniw, każde o sile elektromotorycznej  $E$  i oporze wewnętrznym  $R$ , należy połączyć szeregowo, aby w przewodniku o oporze  $R_z$ , który spina tę baterię ogniw, można było otrzymać prąd o natężeniu  $I$ . Jakie natężenie prądu można w tych warunkach otrzymać?

**4.116.** Kiedy należy łączyć  $n$  ogniw, każde o sile elektromotorycznej  $E$  oraz oporze wewnętrznym  $R$ , szeregowo, a kiedy równolegle, jeżeli bateria ogniw spięta zewnętrznym oporem  $R_z$  ma dawać największe natężenie prądu?

**4.117.** Mamy  $n = 24$  ogniwa Leclanchégo, każde o sile elektromotorycznej  $E = 1,48$  V i oporze wewnętrznym  $R = 1$   $\Omega$ . Jakie połączenie tych ogniw jest najbardziej odpowiednie, ażeby po spięciu uzyskanej w ten sposób baterii oporem zewnętrznym  $R_z = 1,5$   $\Omega$  popłynął przez ten opór możliwie największy prąd? Ile wynosi wtedy opór wewnętrzny baterii?

**4.118.** Do dodatniego bieguna akumulatora o sile elektromotorycznej  $E_1 = 2,0$  V dołączono opór  $R_1 = 2,2$   $\Omega$ ; tak samo do dodatniego bieguna ogniwa o sile elektromotorycznej  $E_2 = 1,5$  V dołączono opór  $R_2 = 3,5$   $\Omega$ . Ujemne bieguny akumulatora i ogniwa oraz luźne końce dołączonych do ogniwa i akumulatora oporów połączono razem. Końce tych połączeń spięto oporem  $R = 2$   $\Omega$ . Obliczyć natężenia prądów płynących przez każdy z oporów oraz podać kierunki przepływu tych prądów.

— **4.119.** Jak wielki jest opór wewnętrzny suchego ogniwa o sile elektromotorycznej  $E = 1,49$  V, dającego prąd o natężeniu  $I = 0,38$  A przy napięciu na zaciskach  $U = 1,43$  V?

— **4.120.** Jaką siłę elektromotoryczną ma bateria o wewnętrznym oporze  $R = 20$   $\Omega$ , jeżeli daje prąd o natężeniu  $I = 20$  mA przy napięciu na zaciskach  $U = 6$  V?

**4.121.** Jakie natężenie prądu płynie przez akumulator ołowiowy o sile elektromotorycznej  $E = 2,0$  V oraz oporze wewnętrznym  $R_w = 0,02$   $\Omega$ , jeżeli spadek napięcia na oporze spinającym zaciski akumulatora wynosi  $U = 1,98$  V? Obliczyć wielkość oporu spinającego.

**4.122.** Mamy do rozporządzenia cztery ogniwa, każde o sile elektromotorycznej  $E = 2,0$  V i oporze wewnętrznym  $R_w = 0,02$   $\Omega$ . Jaki prąd



popłynię przez opór  $R_z = 4 \Omega$ , jeżeli zepniemy nim: a) jedno ogniwo, b) dwa ogniwa połączone szeregowo, c) dwa ogniwa połączone równolegle, d) dwa ogniwa połączone równolegle oraz połączone z nimi szeregowo dwa ogniwa połączone ze sobą równolegle, e) cztery ogniwa połączone szeregowo, f) cztery ogniwa połączone równolegle.

**4.123.** Siła elektromotoryczna ogniwa mierzona metodą kompensacyjną wynosi  $E = 1,542 \text{ V}$ . Jaki wynik otrzymamy, jeżeli pomiaru jej dokonamy woltmierzem o oporze wewnętrznym  $R_w = 1000 \Omega$  (opor wewnętrznym ogniwa wynosi  $R = 1,2 \Omega$ )?

**4.124.** Przez akumulator ołowiowy nie powinien przepływać prąd większy niż  $I = 1 \text{ A}$ . Siła elektromotoryczna akumulatora wynosi  $E = 2 \text{ V}$  oraz opór wewnętrzny  $R = 0,02 \Omega$ . Jaki może być najmniejszy opór, którym można by jeszcze spiąć ten akumulator, aby spełnione zostały powyższe warunki?

**4.125.** Ile (co najmniej) ogniw o siłach elektromotorycznych  $E = 1,5 \text{ V}$  i oporach wewnętrznych  $R = 0,02 \Omega$  powinniśmy połączyć szeregowo, aby z baterii otrzymanej w ten sposób oraz spiętej oporem  $R_z = 2 \Omega$  otrzymać na końcach tego oporu podczas przepływu prądu napięcie  $U = 5 \text{ V}$  lub nieco większe?

**4.126.** Za pomocą woltmierzka o wysokim oporze znaleziono w sposób następujący przybliżoną wartość oporu wewnętrznego ogniwa: zmierzono napięcie na biegunach ogniwa i otrzymano wartość  $U_1 = 2,04 \text{ V}$ ; następnie spięto bieguny tego ogniwa oporem  $R_z = 6 \Omega$  oraz zmierzono na zaciskach ogniwa napięcie  $U_2 = 2 \text{ V}$ . Obliczyć z tych danych opór wewnętrzny ogniwa.

**4.127.** Cztery przewodniki o tej samej długości oraz z tego samego materiału o średnicach  $d_1 = 10^{-3} \text{ m}$ ,  $d_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $d_3 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  oraz  $d_4 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  połączono szeregowo. Do końców tak powstałego oporu załączono napięcie  $U = 100 \text{ V}$ . Obliczyć spadki napięć na każdym z tych przewodników.

**4.128.** Druty z miedzi oraz z żelaza o jednakowej grubości i długości połączono szeregowo ze słupkiem rtęci tej samej grubości oraz długości. Do końca tak powstałego oporu przyłożono napięcie  $U = 8 \text{ V}$ . Obliczyć spadki napięć na każdym z poszczególnych oporów. Opory właściwe wynoszą  $\rho_{\text{Cu}} = 0,017 \Omega \cdot \text{m}$ ,  $\rho_{\text{Fe}} = 0,1 \Omega \cdot \text{m}$ ,  $\rho_{\text{Hg}} = 0,958 \Omega \cdot \text{m}$ .

**4.129.** Od źródła o zmiennym napięciu  $U = 220 \text{ V}$  wyprowadzono dwa przewody miedziane, każdy o długości  $l_1 = 100 \text{ m}$ . Końce tych przewodów spięto oporem  $x$ , na którym pobierany jest prąd o natężeniu

$I_1 = 2,5$  A. Przewody poprowadzono jeszcze dalej na odległość  $l_2 = 25$  m. Końce ich znowu spięto oporem  $y$ , na którym pobierany jest prąd o natężeniu  $I_2 = 1,5$  A. Średnica przewodów wynosi  $d = 3 \cdot 10^{-3}$  m, opór przewodu o długości  $l = 10^{-2}$  m i przekroju  $S = 10^{-4}$  m<sup>2</sup> wynosi  $r_1 = 1,7$  Ω/m. Obliczyć opory  $x$  oraz  $y$ , a także napięcia panujące na tych oporach.

**4.130.** Jaką siłę elektromotoryczną powinna mieć prądnica o oporze wewnętrznym  $R_1 = 0,10$  Ω przeznaczona do ładowania  $n = 20$  akumulatorów ołowiowych, każdy o oporze wewnętrznym  $R_2 = 0,02$  Ω? Podczas ładowania siła elektromotoryczna każdego z akumulatorów wynosi  $E_2 = 2,2$  V. Chcemy ładować tę baterię akumulatorów prądem o natężeniu  $I = 6$  A. Opór przewodników doprowadzających prąd  $R_2 = 0,02$  Ω.

**4.131.** Do zacisków silnika elektrycznego dołączamy napięcie  $U = 220$  V. W silniku tym (wzbudzenie szeregowe) zwoje wirnika elektromagnesu połączone są szeregowo, całkowity ich wspólny opór wynosi  $R = 2$  Ω. Wskutek obrotu wirnika w polu magnetycznym indukuje się przeciwsila elektromotoryczna. Obliczyć jej wielkość, jeżeli natężenie prądu pobieranego przez silnik wynosi  $I = 7,5$  A. Ile wynosiłoby natężenie prądu płynącego przez zwoje wirnika w chwili włączania prądu (tzn. wtedy, gdy nie działa jeszcze przeciwsila elektromotoryczna), gdybyśmy od razu włączyli całe napięcie?

**4.132.** W celu zabezpieczenia zwojów silnika przed stopieniem jego przewodów w chwili włączania prądu początkowo włączany jest prąd nie wprost na zaciski silnika, lecz przez dodatkowy opór, tzw. rozrusznik. Obliczyć wartość tego dodatkowego oporu, jeżeli nie chcemy, aby przez zwoje wirnika w momencie włączania prądu płynął prąd silniejszy od  $I = 10$  A; przez zwoje wirnika o oporze  $r = 5$  Ω płynie prąd o natężeniu  $I_1 = 5$  A pod napięciem  $U = 220$  V podczas jego normalnej pracy.

**4.133.** Jaki opór należałoby dołączyć do amperomierza o zakresie skali do  $s = 1,5$  A, aby można było używać go do pomiarów natężenia prądu płynącego pod napięciem  $E = 8,56$  V przez opór  $R_2 = 1,6$  Ω? Jak dołączyć żądany opór do amperomierza? Jakie będzie całkowite natężenie prądu wykazywane przez amperomierz po włączeniu go do obwodu?

**4.134.** Przez współczynnik rozszerzenia skali amperomierza będziemy rozumieli liczbę  $s$ , przez którą należy pomnożyć odczytaną na skali amperomierza liczbę, aby otrzymać całkowite natężenie mierzonego prądu, tzn. płynącego przez amperomierz oraz przez jego bocznik. Podać tę liczbę  $s$ , jeżeli opór amperomierza wynosi  $r$ , a jego bocznik ma opór  $r_1$ .



4.135. a) Jaki opór musielibyśmy załączyć do galwanometru o oporze wewnętrznym  $R_1 = 100 \Omega$ , aby można go było używać jako woltomierza, w którym jedna podziałka odpowiadałaby jednemu woltowi? Jedna podziałka skali galwanometru przed włączeniem bocznika odpowiada na natężeniu prądu  $I_1 = 5 \cdot 10^{-6}$  A. Jak należy włączyć ten opór do galwanometru? Jaki będzie równoważny opór tego układu? b) Jakiej wielkości opór i jak należy włączyć do tego galwanometru, aby można go było używać jako miliamperomierza, którego jednej podziałce odpowiadać będzie prąd  $I = 1$  mA?

4.136. Jakiego oporu  $R$  oraz w jaki sposób należy użyć, aby amperomierz o oporze wewnętrznym  $R_1 = 0,5 \Omega$  przystosować do pomiarów natężeń prądów  $s_1 = 2$ ,  $s_2 = 3$ ,  $s_3 = 5$ ,  $s_4 = 10$ ,  $s_5 = n$  razy większych od natężeń, jakie może wskazywać dany amperomierz?

4.137. Czy można amperomierz o oporze wewnętrznym  $R_1 = 0,2 \Omega$ , którego największe wychylenie na skali odpowiada prądowi  $I = 1,5$  A, dołączyć wprost do biegunów ogniwa o sile elektromotorycznej  $E = 1,8$  V oraz o oporze wewnętrznym  $R_2 = 0,6 \Omega$ ? Jaki płynąłby wtedy prąd przez amperomierz?

4.138. Przez współczynnik rozszerzenia skali woltomierza będziemy rozumieli liczbę  $s$ , przez którą należy pomnożyć odczytaną na skali woltomierza liczbę, aby otrzymać całkowite mierzone napięcie, tzn. napięcie na układzie oporów składającym się z szeregowego połączenia oporu woltomierza  $R_1$  oraz dodatkowego oporu  $R_2$ . Obliczyć wartość  $s$ .

4.139. Jaki opór należy połączyć szeregowo z woltomierzem o oporze  $R_1 = 1000 \Omega$ , aby przystosować go do pomiarów napięć  $s_1 = 2$ ,  $s_2 = 3$ ,  $s_3 = 5$ ,  $s_4 = 10$ ,  $s_5 = n$  razy większych od napięć, jakie może wskazywać dany woltomierz?

4.140. Woltomierz o oporze  $R_w = 1000 \Omega$  jest dostosowany do pomiarów napięć do 3 V. Jakie opory należy do niego dołączyć dodatkowo, aby otrzymać skalę przystosowaną do pomiarów napięć  $U_1 = 15$  V,  $U_2 = 30$  V,  $U_3 = 75$  V,  $U_4 = 150$  V,  $U_5 = 300$  V?

#### 4.5. PRACA I MOC PRĄDU ELEKTRYCZNEGO

Pracę prądu elektrycznego wyrażamy w ergach (układ ES CGS, EM CGS) lub dżulach (układ SI). Obliczamy ją przy pomocy wzorów

$$W = UIt = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t, \quad (4.37)$$

gdzie  $U$  oznacza napięcie na końcach danego przewodnika, w którym płynie prąd elektryczny o natężeniu  $I$  w czasie  $t$ , a opór danego przewodnika wynosi  $R$ ,  $W$  — ilość pracy powstałej z energii elektrycznej w tym przewodniku.

**Moc prądu elektrycznego** (w układzie SI, wyrażoną w watach, w układzie ES CGS lub EM CGS — w ergach/s) można obliczyć z wzoru

$$P = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}. \quad (4.38)$$

Uwaga. Warto tu zapamiętać, że  $\text{wat} = \text{wolt} \cdot \text{amper} = \text{amper}^2 \cdot \text{om} = \frac{\text{wolt}^2}{\text{om}}$ ,  $\text{dżul} = \text{wolt} \cdot \text{amper} \cdot \text{sekunda}$ .

## Zadania

— 4.141. Obliczyć natężenie prądu oraz opór żarzącego się włókna żarówki 100-watowej, która została załączona do sieci elektrycznej o napięciu  $U = 220 \text{ V}$ .

4.142. W celu przybliżonej oceny temperatury włókna żarówki wolframowej podczas jej świecenia zmierzono jej opór „na zimno”, tzn. za pomocą bardzo słabego natężenia prądu elektrycznego. Znalaziono, że wartość jej oporu w temperaturze  $T = 293,16 \text{ K}$  wynosi  $R = 55 \Omega$ . Przyjmując, że opór drucika żarówki rośnie wprost proporcjonalnie do bezwzględnej temperatury drucika, ocenić w przybliżeniu temperaturę drucika żarówki 100-watowej załączonej do sieci elektrycznej o napięciu  $U = 220 \text{ V}$ , tzn. podczas jej normalnego świecenia.

4.143. Żarówka z drutu wolframowego zużywająca podczas normalnego jej świecenia  $P = 50 \text{ W}$  mocy pod napięciem  $U = 220 \text{ V}$  ma temperaturę  $T_2 = 2473,16 \text{ K}$ . Zakładając, że opór żarówki zmienia się wprost proporcjonalnie do bezwzględnej temperatury włókna żarówki, obliczyć natężenie prądu w chwili jego włączania oraz podczas normalnej pracy żarówki. Ile watów pobierałaby ta żarówka pod tym samym napięciem, lecz w temperaturze  $T_1 = 293,16 \text{ K}$ ?

4.144. Żarówkę włączono w obwód odpowiednio przystosowanego mostka Wheatstone'a w celu zmierzenia jej oporu elektrycznego. Uzyskano zrównoważenie mostka dla danych:  $R = 4,3 \Omega$ ,  $a = b$ , temperatura po-

miaru  $T_0$ . Po przepuszczeniu prądu przez żarówkę osiągnięto równowagę przy niezmiennym  $R$  dla położenia równowagi mostka określonego przez dane  $a_1 = 2b$ . Współczynnik temperaturowy włókna żarówki wynosi  $0,0038 \text{ K}^{-1}$ . Obliczyć temperaturę włókna żarówki podczas jej normalnego świecenia.

4.145. Bateria o sile elektromotorycznej  $E = 24,6 \text{ V}$  i oporze wewnętrznym  $R = 0,24 \Omega$  spięta oporem  $x$  daje prąd elektryczny o natężeniu  $I = 0,25 \text{ A}$ . Obliczyć: a) opór spinający baterię, b) napięcie panujące na biegunach baterii podczas jej pracy, c) moc użyteczną baterii, d) całkowitą moc baterii, e) wyrazić w procentach stosunek mocy użytecznej baterii do jej mocy całkowitej.

4.146. Wyrzić w koniach mechanicznych (KM) moc potrzebną do wytworzenia prądu  $I = 10 \text{ A}$  w przewodniku o oporze  $R = 6 \Omega$ .

4.147. Ile wynosi natężenie prądu elektrycznego w przewodniku o oporze  $R = 8 \Omega$ , jeżeli moc wydzielona przez ten przewodnik wynosi  $P = 11040 \text{ W}$ ?

4.148. Silnik elektryczny włączony do sieci o napięciu  $U = 220 \text{ V}$  pracuje z mocą  $P = 1840 \text{ W}$ , pobierając prąd o natężeniu  $I = 10 \text{ A}$ . Jaki procent energii elektrycznej dostarczonej przez sieć wykorzystuje silnik?

4.149. Z jaką mocą pracuje grzejnik elektryczny, jeżeli doprowadza litr wody o temperaturze  $T_1 = 293,16 \text{ K}$  do temperatury  $T_2 = 373,16 \text{ K}$  w czasie  $\tau = 10 \text{ min}$ ? Zakładamy, że połowa wydzielanego przez grzejnik ciepła powoduje ogrzanie wody.

4.150. Dynamo o napięciu  $U = 110 \text{ V}$  panującym na jego zaciskach dostarcza prądu elektrycznego o natężeniu  $I = 15 \text{ A}$ . Z jaką mocą pracuje to dynamo? Wyrzić ją w kW oraz w KM.

4.151. Kuchenka elektryczna ze spiralką o mocy  $P = 1,5 \text{ W}$  pracuje pod napięciem  $U_1 = 220 \text{ V}$ . W jaki sposób zmienić spiralkę, aby kuchenka miała nadal tę samą moc, lecz napięcie  $U_2 = 110 \text{ V}$ ?

4.152. Dwie żarówki, każda pobierająca moc  $P = 50 \text{ W}$  pod napięciem  $U_1 = 220 \text{ V}$ , połączono w szereg i włączono do sieci o napięciu  $U = 220 \text{ V}$ . Jaką moc pobierają z sieci obie żarówki? Z jaką mocą świeci każda z tych żarówek (zakładamy, że w tych warunkach opór żarówek nie ulegnie zmianie)?

4.153. Z danych katalogowych amperomierza odczytujemy, że przy natężeniu prądu  $I = 5 \text{ A}$  pobiera on moc  $P = 1,5 \text{ W}$ . Obliczyć opór oraz moc pobieraną przez amperomierz podczas przepływu przez niego prądu o natężeniu  $I_1 = 2,5 \text{ A}$ .

4.154. Obliczyć, ile kcal ciepła wydzieliła w czasie jednej sekundy żarówka o mocy  $P = 100 \text{ W}$ , jeżeli tylko 75% energii elektrycznej zostanie zamienione na ciepło?

4.155. Na końcach przewodnika z manganinu o oporze  $R = 500 \Omega$  panuje napięcie  $U = 220 \text{ V}$ . Obliczyć ciepło wydzielone na tym oporze przez płynący w opisanych wyżej warunkach prąd elektryczny w czasie  $\tau = 10 \text{ min}$ .

4.156. Spadek napięcia na przewodach doprowadzających prąd elektryczny do miejsca odbioru wynosi  $p\%$  napięcia źródła prądu. Ile procent wynosi strata mocy na przewodach doprowadzających tę moc?

4.157. Obliczyć wydajność obwodu elektrycznego o oporze wewnętrznym  $R_0 = 2 \cdot 10^{-2} \Omega$ , jeżeli opór zewnętrzny tego obwodu wynosi  $R = 10 \Omega$ .

4.158. Obliczyć gęstość mocy cieplnej wydzielonej w przewodniku platynowym o przewodnictwie  $\sigma = 10^7 \frac{1}{\text{om} \cdot \text{m}}$  pod wpływem pola elektrycznego  $E = 2 \cdot 10^2 \text{ V/m}$  panującego we wnętrzu tego przewodnika.

4.159. Opór  $R_1$  włączony do sieci elektrycznej o niezmiennym napięciu  $U$  pobiera moc  $P$ . Jaki należałoby włączyć dodatkowy opór  $R$  szeregowo do poprzedniego oporu, aby przy tym samym napięciu sieci moc pobierana w tym układzie przez opór  $R_1$  była  $n$  razy mniejsza od poprzednio pobieranej mocy?

4.160. Zaprojektować taką opornicę, którą należałoby włączyć do instalacji oświetleniowej o mocy  $P = 1000 \text{ W}$  pod napięciem  $U = 220 \text{ V}$  w sali wykładowej, aby przy stopniowym włączaniu poszczególnych sekcji oporów moc pobierana przez instalację wynosiła  $P_1 = 1000 \text{ W}$ ,  $P_2 = 800 \text{ W}$ ,  $P_3 = 600 \text{ W}$ ,  $P_4 = 400 \text{ W}$  oraz  $P_5 = 200 \text{ W}$ .

4.161. Jaki opór należałoby włączyć szeregowo do żarówki o mocy  $P = 500 \text{ W}$ , aby świeciła z natężeniem światła równym połowie poprzedniego natężenia? Zakładamy, że natężenie światła jest wprost proporcjonalne do pobieranej mocy. Napięcie sieci wynosi  $U = 220 \text{ V}$ .

4.162. Mamy trzy opory  $R_1 = R_2 = 500 \Omega$  oraz  $R_3 = 250 \Omega$ . Najwyższe dopuszczalne obciążenie każdego z tych oporów nie powinno przekraczać  $P = 20 \text{ W}$ . Czy można dołączyć do sieci o napięciu  $U = 220 \text{ V}$  zespół tych oporów połączonych: a) szeregowo, b) równolegle?

4.163. Dynamo pracuje z mocą  $P = 3 \text{ kW}$ . Wydajność jego wynosi  $\eta = 75\%$ . Obliczyć moc pobieraną przez to dynamo.

4.164. Do stałego oporu  $R$  włączono w szereg zmienny opór  $r$ . Taki układ oporów połączono ze źródłem stałego napięcia  $U$  w ten sposób,



że luźny koniec oporu  $R$  połączono na stałe z jednym biegunem źródła napięcia, a drugi biegun napięcia przesuowano wzdłuż oporu  $r$ . Jaki należy dobrać opór  $r$ , aby ilość ciepła wydzielana na nim była najmniejsza?

**4.165.** Wykazać, że moc w obwodzie zewnętrznym ogniwa o sile elektromotorycznej  $E$  osiąga maksimum dla wartości oporu zewnętrznego równego oporowi wewnętrznemu ogniwa.

**4.166.** Źródło prądu o mocy  $P = 100$  kW ma przesyłać energię elektryczną na odległość  $l = 100$  km. Obliczyć najmniejszą średnicę miedzianego drutu doprowadzającego tę energię, jeżeli straty energii elektrycznej na przewodach nie powinny przekraczać 5% mocy źródła prądu. Obliczenia przeprowadzić dla  $U_1 = 220$  V,  $U_2 = 2200$  V i  $U_3 = 22000$  V. Wykazać gospodarcze znaczenie przekazywania mocy pod wysokim napięciem. Opór właściwy miedzi  $\rho = 0,017 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ .

**4.167.** O ile stopni ogrzeje się przewodnik miedziany o przekroju  $S = 1$  mm<sup>2</sup> oraz długości  $l = 1$  m, jeżeli przepływa przez niego prąd elektryczny o natężeniu  $I = 10$  A w czasie  $\tau = 1$  min? Tylko  $p = 40\%$  wydzielonego ciepła powoduje ogrzanie drutu. Opór właściwy miedzi  $\rho = 0,017 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ , ciepło właściwe miedzi  $c = 385$  J/kg·K, masa właściwa miedzi  $\rho' = 8930$  kg/m<sup>3</sup>.

**4.168.** Ilorotnie możemy zwiększyć opór elektryczny przewodów doprowadzających moc elektryczną na daną odległość, jeżeli napięcie źródła prądu zwiększymy  $n$ -krotnie? W jednym i drugim przypadku dostarczona jest ta sama moc, a straty podczas przewodzenia prądu wynoszą ten sam ułamek mocy.

**4.169.** Prądnica o sile elektromotorycznej  $E = 220$  V oraz oporze wewnętrznym  $R = 0,2 \Omega$  doprowadza prąd elektryczny dwoma przewodami, każdy o oporze  $R_1 = 0,1 \Omega$  do silnika elektrycznego o oporze wewnętrznym  $R_2 = 2 \Omega$ . Od zacisków silnika biegą dalej dwa przewody, każdy o oporze  $R_3 = 0,05 \Omega$  do pieca elektrycznego o oporze  $R_4 = 4 \Omega$  włączonego równolegle do obwodu z silnikiem. Na zaciskach silnika powstaje przeciwsila elektromotoryczna  $E_1 = 180$  V. Obliczyć: a) natężenie prądu płynącego przez prądnicę, b) natężenie prądu płynącego przez silnik oraz przez piec, c) napięcie na zaciskach prądnicy, silnika oraz pieca, d) całkowitą moc wytwarzaną przez prądnicę, e) moc pobieraną przez silnik oraz przez piec, f) jaki procent mocy prądnicy jest wykorzystany przez silnik oraz przez piec?

**4.170.** Z jaką mocą pracuje grzejnik elektryczny w aparacie destylacyjnym, jeżeli aparat ten dostarcza  $V = 50$  cm<sup>3</sup> wody destylowanej w cza-



się  $\tau = 1 \text{ min}$ ? Ciepło stracone wynosi  $p = 20\%$  ciepła dostarczonego. Napięcie elektryczne źródła prądu wynosi  $U = 220 \text{ V}$ . Ile wynosi natężenie prądu oraz opór grzejnika? Woda dostarczona do destylacji ma temperaturę  $T = 293,16 \text{ K}$ . Ciepło parowania  $r = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ .

#### 4.6. ELEKTROLIZA

**Prawo Faradaya.** Jeżeli przez elektrolit przepływnie ładunek  $Q$ , to masę  $m$  jonu o ciężarze atomowym  $A$  i wartościowości  $w$  wydzieloną na jednej z elektrod można obliczyć z wzoru

$$m = \frac{A}{w} \frac{Q}{F} \quad (4.39)$$

lub wprowadzając natężenie prądu elektrycznego płynącego przez elektrolit  $Q = It$

$$m = \frac{A}{wF} It = kIt, \quad (4.40)$$

gdzie  $F$  oznacza tzw. stałą Faradaya, która wynosi

$$F = 96\,522 \text{ A} \cdot \text{s/mol},$$

gdzie  $k$  oznacza tzw. elektrochemiczny równoważnik danego materiału.

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$k = \frac{m}{It}$	$k = \frac{m}{It}$	$k = \frac{m}{It}$
<b>Jednostki</b>		
$[k] = \frac{g}{g^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{s}} = g^{1/2} \cdot \text{cm}^{-3/2} \cdot \text{s}^2$	$[k] = \frac{g}{g^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{s}} = g^{1/2} \cdot \text{cm}^{-1/2}$	$[k] = \frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}}$

Ich związki

$$\text{jednostka EM} = \frac{1}{c} \text{ jednostek ES},$$

$$\text{jednostka SI} = \frac{10^3}{c} \text{ jednostek ES} = \frac{10^4}{c} \text{ jednostek ES}.$$

Przewodnictwo właściwe elektrolitu dane jest wzorem

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = en\alpha(u_a + u_k), \quad (4.41)$$

gdzie  $e$  oznacza ładunek jonu,  $n$  — stężenie anionów względnie kationów ciała rozpuszczonego (ilość jonów przypadającą na jednostkę objętości),  $\alpha$  — stopień dysocjacji,  $u_a$  oraz  $u_k$  są to tzw. ruchliwości kationów oraz anionów. Jednostki  $\sigma$  podano we wstępie.

**Ruchliwość jonów.** Związek pomiędzy ruchliwością jonu  $u$ , jego prędkością  $v$  oraz natężeniem pola elektrycznego, w którym dany jon się porusza, wyrażamy wzorem

$$v = uE. \quad (4.42)$$

**Stopień dysocjacji  $\alpha$**  oznacza stosunek ilości cząsteczek rozłożonych na jony do ilości wszystkich cząsteczek znajdujących się w tej samej objętości, np. w  $1 \text{ m}^3$  (w układzie SI).

**Przewodnictwo równoważnikowe  $\Lambda$**  oznacza przewodnictwo jonów (anionów oraz kationów) wyrażone stosunkiem przewodnictwa właściwego danego elektrolitu do stężenia równoważnikowego wyrażonego w kilogramorównoważnikach na  $\text{m}^3$ . Można go wyrazić wzorem

$$\Lambda = \alpha\Lambda_\infty, \quad (4.43)$$

gdzie  $\Lambda_\infty$  oznacza przewodnictwo równoważnikowe roztworu nieskończenie rozcieńczonego

$$\Lambda_\infty = F(u^+ + u^-), \quad (4.44)$$

gdzie  $F$  oznacza stałą Faradaya, a  $u^+$  oraz  $u^-$  — ruchliwości kationów i anionów.

**Liczby Hittorfa** oznaczają udział kationów oraz anionów w przewodnictwie danego elektrolitu

$$n_a + n_k = 1 \quad (4.45)$$

oraz

$$\frac{n_a}{n_k} = \frac{v_a}{v_k}, \quad (4.46)$$

gdzie  $v_a$  oraz  $v_k$  oznaczają prędkości anionów i kationów.

## Zadania

- △ 4.171. Obliczyć, jaki ładunek odpowiada jednej amperogodzinie.
- △ 4.172. Jakie natężenie ma prąd elektryczny, który w czasie  $t = 3$  h wydziela  $m = 18 \cdot 10^{-3}$  kg miedzi? Elektrochemiczny równoważnik miedzi  $k = 0,3294 \cdot 10^{-6}$  kg/A·s.
- 4.173. Znając stałą Faradaya obliczyć elektrochemiczny równoważnik dla tlenu.
- 4.174. Obliczyć czas trwania niklowania ramy rowerowej o powierzchni  $S = 0,15$  m<sup>2</sup>, w celu pokrycia jej warstwą niklu o grubości  $l = 5 \cdot 10^{-5}$  m, jeżeli niklowanie odbywa się przy użyciu prądu  $I = 3$  A. Elektrochemiczny równoważnik niklu  $k = 0,30 \cdot 10^{-6}$  kg/A·s, masa właściwa niklu  $\rho = 8800$  kg/m<sup>3</sup>. Jakiej należałoby użyć baterii, aby przy jej pomocy można było przeprowadzić powyższe niklowanie?
- 4.175. Jak długo musi trwać elektroliza, aby płytę o powierzchni  $S = 5 \cdot 10^{-3}$  m<sup>2</sup> pokryć warstwą srebra o grubości  $d = 3 \cdot 10^{-3}$  m, jeżeli natężenie przepływającego prądu  $I = 0,5$  A, masa właściwa srebra  $\rho = 10\,500$  kg/m<sup>3</sup>, elektrochemiczny równoważnik srebra  $k = 1,118 \cdot 10^{-6}$  kg/A·s?
- 4.176. Ogniwo Daniella dostarcza w czasie  $t = 20$  min prądu o natężeniu  $I = 0,5$  A. Obliczyć stratę masy elektrody cynkowej oraz zysk masy elektrody miedziovej w tym czasie. Wartościowość cynku oraz miedzi jest  $w = 2$ , ciężar atomowy cynku  $A_1 = 65,38$ , miedzi  $A_2 = 63,54$ .
- 4.177. Jaka ilość wody ulegnie rozkładowi podczas przepuszczania prądu przez wodny roztwór kwasu siarkowego w czasie  $t = 20$  min, jeżeli natężenie płynącego prądu wynosi  $I = 0,4$  A? Elektrochemiczny równoważnik wodoru wynosi  $k_1 = 1,05 \cdot 10^{-8}$  kg/A·s, tlenu  $k_2 = 8,29 \cdot 10^{-8}$  kg/A·s.
- 4.178. Znając masę atomu wodoru  $m = 1,674 \cdot 10^{-27}$  kg oraz elektrochemiczny równoważnik wodoru  $k = 1,05 \cdot 10^{-8}$  kg/A·s, obliczyć wartość ładunku elementarnego niesionego przez jon wodoru.
- 4.179. Elektrochemiczny równoważnik srebra  $k = 1,118 \cdot 10^{-6}$  kg/A·s. Ile potrzeba amperogodzin na wydzielenie z wodnego roztworu AgNO<sub>3</sub> jednego kg srebra zakładając, że wydajność tego procesu wynosi  $p = 100\%$ ?
- 4.180. Prąd o natężeniu  $I = 1$  A w czasie  $t = 1$  min przepływa przez zakwaszoną wodę. Ile gramów wodoru otrzymamy podczas tej elektrolizy i jaką objętość zajmie powstała mieszanina piorunująca w warunkach normalnych? Ciężar cząsteczkowy wodoru  $A = 2,016$ , elektrochemiczny

równoważnik wodoru  $k_1 = 105 \cdot 10^{-10}$  kg/A·s, tlenu  $k_2 = 5801 \times 10^{-10}$  kg/A·s.

**4.181.** Jakie jest natężenie prądu elektrycznego, które w czasie  $t = 3$  min wydzieliła  $V = 1,8 \cdot 10^{-4}$  m<sup>3</sup> mieszaniny piorunującej w temperaturze  $T = 289,16$  K oraz pod ciśnieniem  $p = 0,96 \cdot 10^{-5}$  N/m<sup>2</sup>? Elektrochemiczny równoważnik dla mieszaniny piorunującej  $k = 0,1742 \cdot 10^{-6}$  m<sup>3</sup>/A·s.

**4.182.** Wyznaczyć średnicę kulki, której ładunek elektryczny jest taki sam jak jonu srebra, poruszającej się w temperaturze  $T = 288,16$  K w roztworze soli srebra od anody do katody z taką samą prędkością co jon srebra. Przyjąć, że siła działająca na kulkę stosuje się do prawa Stokesa  $F = 6\pi\eta r v$ . Lepkość wody w temperaturze  $T$  wynosi 0,011 kg/m·s, ruchliwość jonów  $u = 5,6 \cdot 10^{-8}$  m<sup>2</sup>/V·s oraz ładunek jonu  $Q = 1,60 \cdot 10^{-19}$  A·s.

**4.183.** Pod wpływem pola elektrycznego porusza się miedziana kulka o promieniu  $R = 10^{-3}$  oraz o ładunku  $Q = 3,2 \cdot 10^{-19}$  A·s w acetonie o lepkości  $\eta = 399 \cdot 10^{-6}$  kg/m·s<sup>2</sup>. Określić ruchliwość tego jonu.

**4.184.** Stopień dysocjacji wodnego roztworu zawierającego  $m = 6,4 \cdot 10^{-5}$  kg kwasu azotowego w  $10^{-6}$  m<sup>3</sup> roztworu wynosi  $\alpha = 0,824$ . Obliczyć elektryczne przewodnictwo właściwe tego roztworu w temperaturze  $T = 291,16$  K. Ruchliwość jonu wodoru  $u_H = 3,24 \cdot 10^{-3}$  m<sup>2</sup>/V·s, ruchliwość jonu NO<sub>3</sub> wynosi  $u_a = 0,64 \cdot 10^{-7}$  m<sup>2</sup>/V·s, ciężar cząsteczkowy kwasu azotowego  $A = 63,0161$ , wartość ładunku elementarnego  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  A·s, wartość liczby Avogadra  $N = 6,02 \cdot 10^{23}$  mol<sup>-1</sup>.

**4.185.** Wyznaczyć stopień dysocjacji wodnego roztworu KCl o koncentracji  $c = 100$  kg/m<sup>3</sup>. Oporność właściwa tego roztworu w temperaturze  $T = 191,16$  K wynosi  $\rho = 7,36 \cdot 10^{-2}$  Ω·m, ruchliwość jonu potasu  $u_k = 0,67 \cdot 10^{-7}$  m<sup>2</sup>/V·s, ruchliwość jonu chloru  $u_a = 0,68 \cdot 10^{-7}$  m<sup>2</sup>/V·s, ciężar cząsteczkowy chlorku potasu  $A = 75,553$ , liczba Avogadra  $N = 6,02 \cdot 10^{23}$  mol<sup>-1</sup>, wartość elementarnego ładunku elektrycznego  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  A·s.

**4.186.** Przewodność równoważnikowa dla wodnego roztworu KCl w temperaturze pokojowej wynosi  $\Lambda = 98,3 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup>/om·mol oraz  $\Lambda_\infty = 130,1 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup>/om·mol. Ruchliwość jonu K<sup>+</sup> w tej temperaturze wynosi  $u^+ = 669 \cdot 10^{-10}$  m<sup>2</sup>/V·s. Obliczyć ruchliwość jonu Cl w tej temperaturze oraz stopień dysocjacji tego roztworu.

**4.187.** Znając liczbę Hittorfa  $n_a = 0,526$  dla anionu NO<sub>3</sub> w temperaturze  $T$  dla stężenia azotanu srebra  $s = 10$  A/m<sup>3</sup> ( $A$  ciężar cząsteczkowy). Obliczyć: a) liczbę Hittorfa dla kationu  $n_k$ , b) ruchliwość obu jonów,

c) przewodność równoważnikową roztworu nieskończenie rozcieńczonego. Ruchliwość jonu srebra  $u_k = 6,31 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ .

**4.188.** Równoważnikowe przewodnictwo nieskończenie rozcieńczonego roztworu  $\text{AgNO}_3$  wynosi  $\Lambda_\infty = 115,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{om} \cdot \text{mol}$  oraz stała dysocjacji  $\alpha = 0,76$ . Obliczyć równoważnikowe przewodnictwo tego roztworu oraz jego przewodnictwo właściwe  $\sigma$ , jeżeli w roztworze znajduje się  $\eta = 10 \text{ mol/m}^3$  azotanu srebra.

**4.189.** Zależność siły elektromotorycznej ogniwa Westona od temperatury wyrażona jest w przybliżeniu wzorem  $E_T = E_{20} - 4,06 \cdot 10^{-5} (T - T_{20})$  gdzie  $E_{20} = 1,019 \text{ V}$  oraz  $T_{20} = 293,26 \text{ K}$ . Znaleźć zmianę energii wewnętrznej zachodzącą w tym ogniwie w temperaturze  $T_{20}$  po przejściu jednego mola substancji ze stanu metalicznego w stan jonów.

**4.190.** Dla ogniwa Daniella zmiana siły elektromotorycznej ogniwa jest niezależna od temperatury i wynosi  $E = 1,05 \text{ V}$  (elektroda cynkowa jest zanurzona w roztworze składającym się z jednej części  $\text{NaCl}$  na 4 części  $\text{H}_2\text{O}$ ). Znaleźć zmianę energii wewnętrznej ogniwa, gdy mol cynku przeniesiony zostanie w stan jonów.

**4.191.** Wyznaczyć w temperaturze pokojowej wartość oraz kierunek siły elektromotorycznej układu metal jednowartościowy ( $w = 1$ ) elektrolit, jeżeli stosunek prężności roztwórczej  $P$  jonów przechodzących z metalu do elektrolitu oraz ciśnienia osmotycznego  $p$  jonów w elektrolicie wynosi

$$\frac{P}{p} = 10^6.$$

**4.192.** Stała dysocjacji dla roztworu chlorku srebra o stężeniu  $s = 2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  wynosi  $\alpha = 0,96$ . Znaleźć stałą równowagi Guldberga-Waagego dla tego roztworu.

#### 4.7. POLE MAGNETYCZNE PRĄDU ORAZ SIŁA ELEKTROMAGNETYCZNA INDUKCJI

**Reguła Biota-Savarta** podaje sposób obliczania natężenia pola magnetycznego, panującego wokół przewodnika przewodzącego prąd elektryczny. Oznaczmy przez  $H$  natężenie pola magnetycznego (pochodzącego od udziału części przewodnika ograniczonego końcami  $A$  i  $B$ ), przez  $I$  — natężenie prądu płynącego w tym przewodniku, przez  $\alpha$  — kąt utworzony przez element tego przewodnika  $dl$  z odległością  $r$  tego elementu od punktu,



w którym wyznaczamy pole magnetyczne. Natężenie pola magnetycznego  $H$  w tym punkcie można wyrazić wzorem

$$H = k \int_A^B \frac{I \sin \alpha}{r^2} dl. \quad (4.47)$$

Układ CGS		Układ MKSA
ES	EM	
$k = 1$	$k = 1$	$k = \frac{1}{4\pi}$
$H = \int_A^B \frac{I \sin \alpha}{r^2} dl$	$H = \int_A^B \frac{I \sin \alpha}{r^2} dl$	$H = \frac{1}{4\pi} \int_A^B \frac{I \sin \alpha}{r^2} dl$
<b>Jednostki</b>		
$[H] = \frac{g^{1/2} \cdot cm^{3/2} \cdot s^{-2} \cdot cm^1}{cm^2} = g^{1/2} \cdot cm^{1/2} \cdot s^{-2}$	$[H] = \frac{g^{1/2} \cdot cm^{1/2} \cdot s^{-1} \cdot cm^1}{cm^2} = g^{1/2} \cdot cm^{-1/2} \cdot s^{-1} = Oe$	$[H] = \frac{A \cdot m}{m^2} = A \cdot m^{-1}$

Ich związki podano we wstępie.

**Siłę działającą na przewodnik w polu magnetycznym** obliczoną na podstawie reguły Biota-Savarta przy użyciu oznaczeń podanych wyżej można wyrazić wzorem

$$F = k \int_A^B H \sin \alpha dl, \quad (4.48)$$

gdzie  $\alpha$  oznacza kąt, który tworzy element  $dl$  prądu przewodnika z kierunkiem pola magnetycznego  $H$ , w którym znajduje się ten przewodnik.

Ich związki podane zostały w mechanice.

**Strumień wektora indukcji magnetycznej** obliczamy z wzoru

$$\Phi = BS. \quad (4.49)$$

**Siła elektromotoryczna.** Jeżeli w zamkniętym obwodzie w czasie  $\Delta t$  zaistnieje zmiana strumienia wektora indukcji magnetycznej  $\Delta \Phi$ , to w obwodzie tym powstanie siła elektromotoryczna, którą możemy wyrazić wzorem

$$E = - \frac{\Delta(BS)}{\Delta t} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}. \quad (4.50)$$

Układ CGS	ES	$k = \frac{1}{c^2} \frac{\text{s}^3}{\text{cm}^2}$ $F = \frac{1}{c^2} \int_A^B H \sin \alpha dl$ <p style="text-align: center;">Jednostki</p> $[F] = \frac{g^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot \text{s}^{-2} \cdot g^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{cm}^1}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-2}} =$ $= g^1 \cdot \text{cm}^1 \cdot \text{s}^{-2} = \text{dyna}$
	EM	$k = 1$ $F = \int_A^B H \sin \alpha dl$ <p style="text-align: center;">Jednostki</p> $F = g^{1/2} \cdot \text{cm}^{-1/2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot g^{1/2} \cdot \text{cm}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm} =$ $= g^1 \cdot \text{cm}^1 \cdot \text{s}^{-2} = \text{dyna}$
Układ MKSA		$k = \frac{4\pi}{10^7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$ $F = \frac{4\pi}{10^7} \int_A^B H \sin \alpha dl$ <p style="text-align: center;">Jednostki</p> $F = \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \frac{\text{A}}{\text{m}} \text{A} \cdot \text{m} = \text{N}$

**Siła elektromotoryczna indukcji własnej.** Gdy zmiana natężenia płynącego w obwodzie prądu elektrycznego  $\Delta I$  w czasie  $\Delta t$  powoduje powstanie siły elektromotorycznej w tym obwodzie  $E$ , to związek pomiędzy tymi wielkościami możemy wyrazić w postaci

$$E = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} = -L \frac{dI}{dt}, \quad (4.51)$$

gdzie  $L$  oznacza tzw. *samoindukcyjność obwodu*.

**Siła elektromotoryczna indukcji wzajemnej.** Gdy zmiana natężenia prądu w obwodzie pierwszym  $\Delta I_1$  w czasie  $\Delta t$  powoduje powstanie siły elektromotorycznej w obwodzie drugim  $E_2$ , to związek pomiędzy tymi

wielkościami możemy wyrazić w postaci wzoru

$$E_2 = -M_{12} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = -M_{12} \frac{dI_1}{dt}, \quad (4.52)$$

gdzie  $M_{12}$  oznacza tzw. *indukcyjność wzajemną obu obwodów*.

Jednostki zarówno  $L$ , jak i  $M_{12}$  są takie same; podano je we wstępie.

Zadania tego rozdziału będziemy rozwiązywali albo tylko w układzie SI, albo w układach SI oraz EM CGS, gdyż w praktyce tylko w tych układach spotyka się rozwiązywanie podobnych problemów.

## Zadania

**4.193.** Jakie jest natężenie prądu w przewodniku kołowym o promieniu  $r = 10^{-2}$  m, jeżeli biegun magnetyczny o  $m = 1$  j. EM CGS natężenia bieguna magnetycznego umieszczony w środku tego koła doznaje siły  $F = 10^{-5}$  N?

**4.194.** Obliczyć natężenie pola magnetycznego w środku cewki o promieniu  $r = 0,3$  m oraz o  $n = 750$  zwojach, w której płynie prąd o natężeniu  $I = 5$  A.

**4.195.** W celu wyznaczenia składowej poziomej natężenia pola magnetycznego ziemskiego włączono busolę stycznych w obwód prądu stałego. Busola ta ma promień  $r = 0,15$  m, kąt wychylenia igielki z położenia równowagi po włączeniu prądu  $\alpha = 22^\circ 45'$ . Natężenie przepływającego przez busolę prądu elektrycznego zmierzono za pomocą woltametry srebrowego; katoda wykazała podczas pomiaru trwającego  $t = 1,5$  min przyrost masy  $m = 0,202 \cdot 10^{-3}$  kg srebra. Obliczyć całkowite natężenie pola magnetycznego ziemskiego w tym miejscu, jeżeli kąt inklinacji  $I = 64^\circ$ . Elektrochemiczny równoważnik srebra  $k = 1,118 \cdot 10^{-6}$  kg/A·s.

**4.196.** Obliczyć czynnik redukcyjny busoli stycznych o  $n = 2$  zwojach, promieniu  $r = 0,28$  m dla miejsca, w którym składowa pozioma natężenia pola magnetycznego ziemskiego  $H = 0,19$  Oe ( $I = C \operatorname{tg} \alpha$ ,  $C$  — czynnik redukcyjny busoli).

**4.197.** Obliczyć natężenie pola magnetycznego  $H$  w punkcie odległym o  $r$  metrów od prostego drutu nieskończenie cienkiego i długiego, w którym płynie prąd elektryczny o natężeniu  $I = 0,5$  j. EM CGS natężenia prądu. W naszym przypadku  $r = 0,2$  m.

**4.198.** Obliczyć natężenie pola magnetycznego w odległości  $r = 0,1$  m od drutu, przez który płynie prąd  $I = 4$  A, zakładając, że drut jest nieskończenie długi.

**4.199.** Obliczyć natężenie pola magnetycznego w odległości  $r = 0,05$  m od drutu o długości  $l = 0,5$  m na linii symetralnej drutu, jeżeli płynie przez niego prąd elektryczny o natężeniu  $I = 5$  A.

**4.200.** Obliczyć natężenie pola magnetycznego na osi przechodzącej przez środek koła i prostopadłej do powierzchni tego koła o promieniu  $R = 10^{-2}$  m w odległości  $x = 0,5$  m od koła, jeżeli przez obwód koła płynie prąd elektryczny o natężeniu  $I = 2$  A.

**4.201.** Obliczyć wartość natężenia pola magnetycznego w środkowym punkcie wewnętrznym solenoidu o długości  $l = 0,5$  m, średnicy  $d = 2 \cdot 10^{-2}$  m, jeżeli nawinięto nań  $N = 2000$  zwojów, przez które płynie prąd elektryczny o natężeniu  $I = 2$  A.

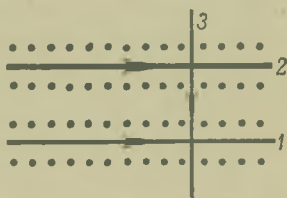
**4.202.** Obliczyć wartość natężenia pola magnetycznego w środku pół solenoidu o długości  $l = 0,5$  m, średnicy  $d = 2 \cdot 10^{-2}$  m, jeżeli nawinięto nań  $N = 2000$  zwojów, przez które płynie prąd elektryczny o natężeniu  $I = 2$  A. Pola te są polami kół zamykającymi solenoid.

**4.203.** Prąd elektryczny o natężeniu  $I = 5$  A przepływa przez trzy boki kwadratu. Długość jego boku  $a = 0,1$  m. Obliczyć natężenie pola magnetycznego w punkcie znajdującym się w środku czwartego boku tego kwadratu.

**4.204.** Obliczyć natężenie pola magnetycznego w środku kwadratu o boku  $a = 0,1$  m, jeżeli przez jego boki przepływa prąd o natężeniu  $I = 2$  A, zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Podać kierunek pola magnetycznego.

**4.205.** Na dwóch równoległych drutach **1** i **2**, znajdujących się w odległości  $l = 0,05$  m, umieszczono swobodnie trzeci drut prostopadle do poprzednich. Przez te druty przepuszczono stały prąd elektryczny w sposób pokazany na rys. 4.6. Druty te znajdują się w polu magnetycznym o natężeniu  $H = 5 \cdot 10^3$  Oe, skierowanym prostopadle do płaszczyzny wyznaczonej przez te druty. Drut **3** pod wpływem pola  $H$  porusza się i doznaje podczas ruchu stałej siły tarcia  $F = 0,05$  N. Obliczyć natężenie płynącego prądu  $I$ , które jest potrzebne do przesunięcia drutu **3** po drutach **1** i **2**.

**4.206.** W czasie  $t = 1$  s drucik o długości  $l = 0,05$  m przesunął się



Rys. 4.6

w prostopadłym do niego polu magnetycznym o natężeniu  $H = 500$  Oe na odległość  $s = 0,5$  m. Jak wielka wykonana została praca, jeżeli przez drucik płynie prąd elektryczny o natężeniu  $I = 2$  A?

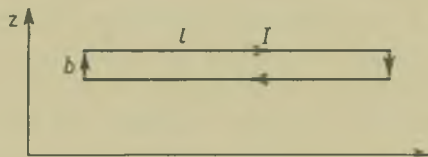
4.207. Ruch drucika w zadaniu 4.206 trwał  $t = 5 \cdot 10^{-3}$  s. Prąd elektryczny, płynący przez niego, pobierany był z baterii o sile elektromotorycznej  $E = 2$  V. Porównać pracę wykonaną przez baterię z pracą wykonaną przez pole oraz obliczyć wydajność urządzenia.

4.208. Ramka płaska o polu  $S = 1$  m<sup>2</sup>, w której płynie prąd elektryczny o natężeniu  $I = 20$  A, umieszczona jest w jednorodnym strumieniu wektora indukcji magnetycznej  $\mathbf{B} = 5$  Wb/m<sup>2</sup> skierowanym pod kątem  $\alpha_1 = 45^\circ$  do ramki. Ramkę tę obracamy tak, że kąt skierowania wektora indukcji magnetycznej do ramki zmalał do  $\alpha_2 = 10^\circ$ . Jaka praca została wykonana podczas tego obrotu?

4.209. Obliczyć siły działające na prostokątną ramkę, której boki wynoszą  $a = 0,05$  m,  $b = 0,1$  m, umieszczoną prostopadle do pola magnetycznego o natężeniu  $H = 500$  Oe, jeżeli płynie przez nią prąd elektryczny o natężeniu  $I = 2$  A. Obliczyć strumień magnetyczny przepływający przez ramkę.

4.210. Obliczyć siłę działającą na centymetr (długości) kolistego obwodu prądu o promieniu  $r = 0,05$  m, umieszczonego prostopadle do pola magnetycznego o natężeniu  $H = 500$  Oe, jeżeli płynie przez niego prąd elektryczny o natężeniu  $I = 5$  A. Jaki strumień magnetyczny przepływa przez ten obwód?

4.211. Weźmy pod wagę niejednorodne pole magnetyczne, którego grad  $\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{z}} = 2$  Wb/m<sup>3</sup> oraz umieścimy równoległe do gradientu prostokątną ramkę o bokach  $l = 1$  m,  $b = 2 \cdot 10^{-2}$  m, gdzie  $b$  jest równoległe do  $z$



Rys. 4.7

opływającą przez prąd elektryczny o natężeniu  $I = 2$  A. Wyznaczyć kierunek oraz wielkość siły wywieranej na tę ramkę. Linie pola wektora indukcji magnetycznej są prostopadłe do powierzchni ramki (rys. 4.7).



4.212. Obliczyć opór magnetyczny układu dwu obwodów magnetycznych o oporach magnetycznych  $R_{1m} = 5 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$  oraz  $R_{2m} = 8 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$  połączonych ze sobą równolegle.

4.213. Obliczyć całkowity strumień wektora magnetycznego  $\mathbf{B}$  płynący przez toroid o długości  $l = 1 \text{ m}$  oraz o polu przekroju  $S = 10^{-2} \text{ m}^2$ , jeżeli nawinięto nań  $n = 2000$  zwojów, przez które płynie prąd elektryczny o natężeniu  $I = 2 \text{ A}$ . Obliczyć również opór magnetyczny tego toroidu. Toroid jest wypełniony jednolicie żelazem o przenikalności magnetycznej  $\mu = 10^4$ .

4.214. Obliczyć stosunek ilości zwojów dwu obwodów magnetycznych, przez które płynie taki sam strumień wektora indukcji magnetycznej oraz taki sam prąd elektryczny, jeżeli stosunek ich oporów magnetycznych wynosi  $R_{1m}/R_{2m} = 1/10$ .

4.215. Porównać opór rdzenia magnetycznego o długości  $l_1 = 1 \text{ m}$ , zwiniętego w formie pierścienia z oporem magnetycznym jego szczeliny o grubości  $l_2 = 10^{-2} \text{ m}$ , jeżeli przenikalność magnetyczna rdzenia magnetycznego wynosi  $\mu = 2000$ .

4.216. Obliczyć zużycie energii magnetycznej podczas jednego okresu namagnesowania stopu ferromagnetycznego, jeżeli krzywa histerezy ma kształt prostokąta o danych: wartość koercji  $H_k = \frac{1}{4\pi} 10^3 \text{ A/m}$  oraz wartość indukcji magnetycznej nasycenia  $B_n = 2,4 \text{ Wb/m}^2$ .

4.217. Obliczyć natężenie pola magnetycznego panującego w szczelinie o poprzecznym przekroju żelaznego toroidu o promieniu  $R = 0,5 \text{ m}$ , średnicy  $d = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ , wypełnionego żelazem o przenikalności magnetycznej  $\mu = 10^3$ , jeżeli na tym toroidzie nawiniętych jest  $n = 2000$  zwojów, a przez każdy z nich płynie prąd elektryczny o natężeniu  $I = 2 \text{ A}$ . Szerokość szczeliny  $a = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .

4.218. Przez elektromagnes przepływa prąd elektryczny o natężeniu  $I = 10 \text{ A}$  wytwarzając we wnętrzu pole  $\mathbf{B} = 500 \text{ Wb/m}^2$ . Ile nawinięto zwojów na tym elektromagnesie na długości  $1 \text{ m}$ , jeżeli przenikalność magnetyczna tego rdzenia wynosi  $\mu = 10^3$ ?

4.219. Obliczyć wartość wektora indukcji magnetycznej przenikającego przez metalowy krążek o promieniu  $R = 1 \text{ m}$ , jeżeli przez kontakty ślizgowe płynie w nim prąd elektryczny od osi obrotu do obwodu o natężeniu  $I = 2 \text{ A}$ , a podczas całkowitego obrotu wykonana została praca  $W = 50 \text{ J}$ .

4.220. Zamknięty obwód o powierzchni  $S = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  obraca się ruchem jednostajnym o częstotliwości obrotów  $n = 14 \text{ Hz}$  w polu magnetycz-

nym o natężeniu  $H = 200$  Oe. Obliczyć maksymalną siłę elektromotoryczną wzbudzoną w tym obwodzie.

4.221. Cewka o promieniu  $r = 0,08$  m ma  $n = 500$  zwojów. Wartość natężenia pola magnetycznego w cewce wzrosła od  $H_1 = 0$  do  $H_2 = 12000$  Oe w czasie  $t = 0,2$  s. Obliczyć powstałą w tej cewce siłę elektromotoryczną.

4.222. W dławiku o samoindukcji  $L = 10$  H płynie prąd o natężeniu  $I = 5 \cdot 10^{-3}$  A. Prąd ten został wyłączony. Wyłączenie trwało  $t = 0,01$  s. Obliczyć siłę elektromotoryczną powstałą w dławiku podczas tego wyłączenia.

4.223. W cewce o samoindukcji  $L = 0,2$  H natężenie prądu elektrycznego w czasie  $t = 10^{-2}$  s spada równomiernie od  $I_1 = 0,72$  A do  $I_2 = 0,17$  A. Jaka siła elektromotoryczna indukcji powstała w niej podczas wyłączania prądu?

4.224. Jak wielkie powstaje indukowane napięcie elektryczne w sztabce żelaznej o długości  $l = 2$  m, jeżeli poruszamy ją z prędkością  $v = 0,9$  m/s w płaszczyźnie prostopadłej do pola magnetycznego ziemskiego? Kąt inklinacji  $I = 65^\circ$ , składowa pozioma natężenia pola magnetycznego ziemskiego  $H_p = 0,2$  Oe.

4.225. Obliczyć współczynnik samoindukcyjności solenoidu o długości  $l = 1$  m, polu przekroju  $S = 0,1$  m<sup>2</sup>, wypełnionego żelazem o przenikalności magnetycznej  $\mu = 10^4$ . Ilość zwojów solenoidu  $n = 2000$ .

4.226. Obliczyć współczynnik indukcyjności wzajemnej  $M_{12}$  induktora, jeżeli powierzchnia poprzeczna rdzenia tego induktora wynosi  $S = 10^{-2}$  m<sup>2</sup>, jego długość  $l = 0,25$  m, przenikalność magnetyczna rdzenia  $\mu = 10^3$ , liczba zwojów w uzwojeniu pierwotnym  $N_1 = 100$ , a na cewce wtórnej  $N_2 = 10^4$ .

4.227. Obliczyć stosunek indukcyjności dwu cewek, przez które płyną prądy o tych samych częstotliwościach, jeżeli: a) cewka ma dwa razy mniej zwojów od pierwszej, ale średnicę dwa razy większą od pierwszej, b) druga cewka ma długość dwukrotnie większą od pierwszej oraz dwukrotnie większą ilość zwojów od pierwszej.

4.228. Drut o długości  $l_1 = 6$  m nawinięto na szpułę o długości  $l_2 = 0,08$  m. Jak wielką samoindukcyjność ma ta cewka?

4.229. Jak wielka jest samoindukcja solenoidu o długości  $l_1 = 0,18$  m, o promieniu  $r = 0,06$  m składającego się z  $n = 100$  zwojów? Jak wielka jest siła elektromotoryczna wzbudzona w tym solenoidzie, jeżeli w czasie

$t = 10^{-3}$  s natężenie prądu elektrycznego spadło w nim od wartości  $I = 5$  A do  $I_1 = 0$ ?

4.230. Obliczyć wartość strumienia energii fali elektromagnetycznej o natężeniu pola elektrycznego  $E = 10^3$  V/m oraz o natężeniu pola magnetycznego  $H = 20$  A/m.

#### 4.8. DRGANIA I FALE ELEKTROMAGNETYCZNE. PRĄDY ZMIENNE

Okres drgań obwodu drgającego. Oznaczając przez  $T$  czas drgania obwodu o samoindukcyjności  $L$  oraz pojemności  $C$  można wyrazić wzorem

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$T = 2\pi \sqrt{LC}$	$T = 2\pi \sqrt{LC}$	$T = 2\pi \sqrt{LC} \quad (4.53)$
Jednostki		
$[T] = (\text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{cm}^1)^{1/2} = \text{s}$	$[T] = \left( \text{cm} \cdot \frac{\text{s}^2}{\text{cm}} \right)^{1/2} = \text{s}$	$[T] = \left( \frac{\text{kg}^1 \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{A}^2} \times \frac{\text{A} \cdot \text{s}^2}{\text{kg}^1 \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}} \right)^{1/2} = \text{s}$

**Opór pojemnościowy obwodu.** Jeżeli przez kondensator o pojemności  $C$  płynie prąd zmienny o częstotliwości  $f$ , to kondensator ten przedstawia dla tego obwodu opór pojemnościowy  $R_c$ , który można wyrazić wzorem

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$R_c = \frac{1}{2\pi f C}$	$R_c = \frac{1}{2\pi f C}$	$R_c = \frac{1}{2\pi f C} \quad (4.54)$

Ich związki podano we wstępie.

**Opór indukcyjny obwodu.** Jeżeli przez cewkę o indukcyjności  $L$  płynie prąd zmienny o częstotliwości  $f$ , to cewka ta dla tego prądu przedstawia opór indukcyjny  $R_L$ , który można wyrazić wzorem

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$R_L = \omega L = 2\pi fL$	$R_L = \omega L = 2\pi fL$	$R_L = \omega L = 2\pi fL \quad (4.55)$
<b>Jednostki</b>		
$[R_L] = s^{-1} \cdot cm^{-1} \cdot s^2 =$ $= cm^{-1} \cdot s^1$	$[R_L] = s^{-1} \cdot cm^1 = cm^1 \cdot s^{-1}$	$[R_L] =$ $= s^{-1} \cdot kg^1 \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-2} =$ $= kg^1 \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-2} = \text{om}$

**Zawada obwodu.** Jeżeli w obwodzie znajduje się połączona szeregowo pojemność elektrostatyczna  $C$ , samoindukcyjność  $L$  oraz opór omowy  $R$ , to układ taki dla płynącego w nim zmiennego prądu elektrycznego o częstotliwości  $f = \omega/2\pi$  przedstawia opór  $Z$ , który nazywamy *zawadą* układu i możemy go wyrazić wzorem

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$	$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$	$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ $(4.56)$

**Prawo Ohma dla prądów zmiennych.** Jeżeli przez obwód, którego zawada wynosi  $Z$ , przepływa pod chwilowym napięciem  $U$  prąd zmienny o chwilowym natężeniu  $I$ , to prawo Ohma dla tego przypadku można wyrazić wzorem

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$U = IZ$	$U = IZ$	$U = IZ \quad (4.57)$

**Moc skuteczna prądu.** Jeżeli w obwodzie płynie prąd zmienny  $I$  o napięciu zmiennym  $U$ , a kąt  $\varphi$  oznacza kąt przesunięcia fazy natężenia prądu względem fazy napięcia, to moc skuteczną prądu możemy w tym przypadku wyrazić wzorem

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$P_s = U_s I_s \cos \varphi$	$P_s = U_s I_s \cos \varphi$	$P_s = U_s I_s \cos \varphi$ (4.58)

gdzie  $s$  oznacza, iż chodzi tu o wielkości skuteczne;  $\cos \varphi$  nazywa się współczynnikiem mocy.

**Tangens kąta przesunięcia.** Jeżeli faza napięcia wyprzedza fazę natężenia prądu, to tangens kąta przesunięcia można obliczyć przy pomocy wzoru

Układ CGS		Układ SI
ES	EM	
$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ (4.59)

gdzie  $\omega = 2\pi f$  oznacza częstotliwość kołową płynącego w obwodzie prądu zmiennego,  $L$  — indukcyjność obwodu,  $C$  — pojemność elektrostatyczną obwodu,  $R$  — opór omowy obwodu.

## Zadania

**4.231.** Jak wielka samoindukcja znajduje się w obwodzie drgającym wysyłającym fale elektromagnetyczne o długości  $\lambda = 1300$  m? Pojemność znajdująca się w obwodzie wynosi  $C = 10^5$  pF.

**4.232.** Obwód drgający składa się z pojemności  $C = 500$  cm oraz samoindukcji  $L = 80000$  cm. Jaki jest okres, częstotliwość i częstotliwość



kątowa drgania oraz długość fali elektromagnetycznej wypromieniowanej przez ten obwód?

4.233. Jaka jest częstotliwość drgań fali elektromagnetycznej o długości  $\lambda = 300$  m?

4.234. Jaką częstotliwość kątową ma używany w technice prąd zmienny o częstotliwości  $f = 50$  Hz?

4.235. Do okładek butelki lejdejskiej przyłożone zostało napięcie prądu zmiennego o częstotliwości  $f = 100$  Hz oraz o wartości skutecznej  $U_s = 10000$  V. Jak wielki opór stawia ta butelka przepływającemu przez nią prądowi? Jakie płynie skuteczne natężenie prądu zmiennego w doprowadzeniach do butelki? Pojemność butelki  $C = 2000$  cm, opór drutów doprowadzających prąd do butelki zaniedbujemy.

4.236. Między jakimi wartościami waha się napięcie prądu zmiennego, jeżeli jego napięcie skuteczne wynosi  $U_s = 220$  V?

4.237. Napięcie skuteczne prądu zmiennego w przewodniku wynosi  $U_s = 220$  V, częstotliwość prądu  $f = 50$  Hz, natężenie skuteczne  $I_s = 2$  A oraz moc skuteczna  $P_s = 330$  W. Jak wielki jest kąt przesunięcia fazy pomiędzy natężeniem prądu a napięciem? Napisać równanie dla chwilowej wartości natężenia prądu oraz dla chwilowej wartości napięcia.

4.238. W obwód prądu zmiennego o częstotliwości  $f = 50$  Hz włączona jest cewka, woltomierz, amperomierz oraz watomierz. Wykazują one  $U_s = 120$  V,  $I_s = 10$  A,  $P_s = 900$  W. Obliczyć różnicę fazy prądu oraz napięcia, samoindukcję obwodu oraz jego opór omowy.

4.239. Obwód elektryczny, w którym płynie prąd zmienny o napięciu skutecznym  $U_s = 220$  V oraz o natężeniu skutecznym  $I_s = 2,5$  A ma moc  $P = 400$  W. Jak wielkie jest przesunięcie fazowe  $\varphi$  tego obwodu oraz jakie są wartości szczytowe dla napięcia elektrycznego oraz natężenie prądu elektrycznego w tym obwodzie?

4.240. Ile wynosi częstotliwość  $f$  oraz długość fali elektromagnetycznej  $\lambda$  wypromieniowywanej przez obwód zbudowany z  $n = 11$  blaszek staniolowych, każda o powierzchni  $S = 10^{-4}$  m<sup>2</sup>, naklejonych na płytki szklane o grubości  $d = 2 \cdot 10^{-4}$  m oraz z drutu o długości  $l = 10$  m, nawiniętego na szpulę o długości  $l_1 = 0,1$  m. Stała dielektryczna szkła  $\epsilon = 6$ .

4.241. Jeżeli do cewki o samoindukcji  $L = 0,6$  H włączono stałe napięcie  $U = 24$  V, to popłynął przez nią prąd o natężeniu  $I = 0,35$  A. Jaki popłynie przez nią prąd, jeżeli włączymy tę cewkę do źródła prądu zmiennego o napięciu  $U_1 = 125$  V i częstotliwości  $f = 50$  Hz?



Rys. 4.8.1.



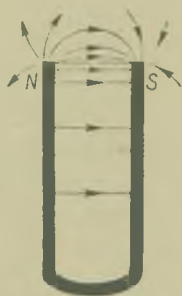
Rys. 4.8.2.



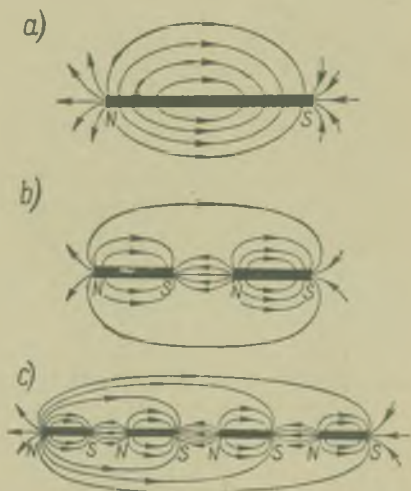
Rys. 4.8.3.



Rys. 4.8.4.



Rys. 4.8.5.



Rys. 4.8.6.

4.242. W obwód prądu zmiennego o częstotliwości  $f = 50$  Hz oraz o napięciu skutecznym  $U_s = 120$  V włączony jest opór omowy  $R = 150 \Omega$  oraz opór pojemnościowy kondensatora o pojemności  $C = 5 \mu\text{F}$  (szeregowo z omowym). Obliczyć natężenie płynącego w tym obwodzie prądu elektrycznego, przesunięcie fazowe prądu oraz moc skuteczną tego układu. Narysować diagram wektorowy dla tego układu.

4.243. W obwód prądu zmiennego o częstotliwości  $f = 50$  Hz oraz napięciu skutecznym  $U_s = 120$  V włączony jest opór omowy  $R = 150 \Omega$  oraz równoległe do niego opór pojemnościowy kondensatora o pojemności  $C = 5 \mu\text{F}$ . Obliczyć natężenie płynącego w tym obwodzie prądu elektrycznego, przesunięcie fazowe prądu oraz moc skuteczną.

4.244. W obwodzie elektrycznym znajduje się kondensator o pojemności  $C = 5 \cdot 10^{-6}$  F, przez który płynie prąd zmienny  $I = 5 \cdot 10^{-3} \cos 2t$  [A]. Podać okres tego prądu, napięcie elektryczne panujące na okładkach kondensatora oraz moc wydzieloną w kondensatorze w czasie jednego okresu.

4.245. W obwodzie elektrycznym znajduje się cewka o indukcyjności  $L = 2 \cdot 10^{-2}$  H, przez którą płynie prąd elektryczny zmienny o natężeniu  $I = 5 \cdot 10^{-3} \cos 2t$  [A]. Podać napięcie elektryczne panujące na końcach tej cewki oraz moc wydzieloną w tej cewce podczas jednego okresu.

## 4.9. ROZWIĄZANIA ZADAŃ

4.1. Poszczególne rysunki są rozwiązaniem kolejnych pytań postawionych w zadaniu. (Rys. [4.8.1—4.8.6]).

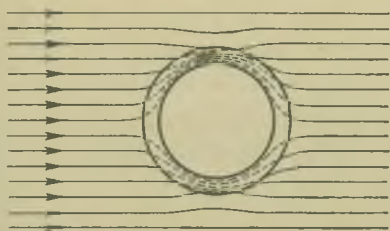
4.2. a) Pierścień żelazny w jednorodnym polu magnetycznym. Linie sił pola magnetycznego skupione są wokół pierścienia. Przez pole wewnątrz pierścienia (masa pierścienia) przechodzą linie bardzo skupione (rys. 4.9.1).

b) Pierścień z materiału paramagnetycznego czy diamagnetycznego prawie nie zmienia biegu linii pola magnetycznego, jak to widać na rys. 4.9.2. Linie sił przechodzą przez pierścień tak, jak gdyby go nie było.

W przypadku a) pole obejmowane przez pierścień jest wolne od linii sił pola magnetycznego, w przypadku b) zaś przez to pole przechodzą linie sił pola magnetycznego.

4.3. Przy jednym ustawieniu obu sztabek kąt między sztabkami a południkiem magnetycznym ziemskim wynosi  $\alpha = 45^\circ$ . Siły bowiem działające na poszczególne bieguny sztabek są równe, sztabki ustawiają się więc w sposób symetryczny (rys. 4.10.1).

W drugim przypadku ustawienia sztabek, przyjmą one nieco inne położenie względem południka magnetycznego. Jedna ze sztabek będzie położona wzdłuż południka, a druga — prostopadle do niego (rys. 4.10.2).



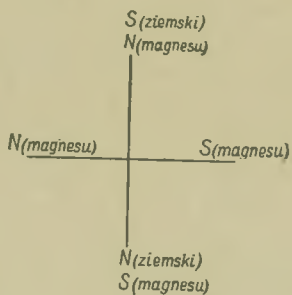
Rys. 4.9.1.



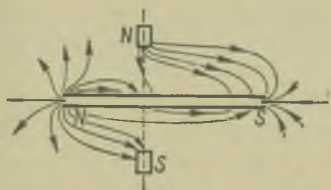
Rys. 4.9.2.



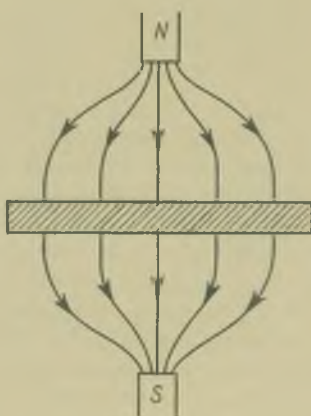
Rys. 4.10.1.



Rys. 4.10.2.



Rys. 4.11.1.



Rys. 4.11.2.

4.4. Na półkuli północnej z powodu inklinacji magnetycznej biegun północny igły magnetycznej ciąży nieco ku ziemi. W celu wyeliminowania tej dodatkowej siły należy podeprzeć igielkę magnetyczną bliżej bieguna północnego. Na półkuli południowej zaś przeciwnie.

4.5. Bieguny  $N$  i  $S$  (rys. 4.11.1) przed osiągnięciem punktu Curie podczas ogrzewania: zachowują one swe właściwości magnetyczne. Bieguny  $N$  i  $S$  (rys. 4.11.2) po ogrzaniu powyżej punktu Curie: straciły swe właściwości magnetyczne.

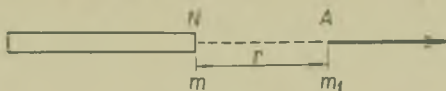
4.6. Na podstawie prawa Coulomba otrzymujemy:

W układzie SI

$$r = \sqrt{\frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m_1 m_2}{F}} = \sqrt{\frac{1}{16\pi^2 10^{-7}} \frac{10 \frac{4\pi}{10^8} 20 \frac{4\pi}{10^8}}{2 \cdot 10^{-5}}} \text{ m} = 0,1 \text{ m};$$

W układzie EM CGS

$$r = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{F}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 10}{2}} \text{ cm} = 10 \text{ cm}.$$



Rys. 4.12

4.7. Zaniedbując działanie bieguna południowego magnesu (rys. 4.12) otrzymujemy następującą wartość natężenia pola magnetycznego  $H$ :

W układzie SI

$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m}{r^2} = \frac{1}{16\pi^2 10^{-7}} \frac{36 \frac{4\pi}{10^8}}{9 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{\pi} 10^3 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

W układzie EM CGS

$$H = \frac{\frac{mm_1}{r^2}}{m_1} = \frac{m}{r^2} = \frac{36}{9} \text{ Oe} = 4 \text{ Oe}.$$

Kierunek linii natężenia pola magnetycznego wskazany jest na rys. 4.12.

4.8. a) Na pole w punktach  $P$  oraz  $Q$  (rys. 4.13.1) składa się działanie biegunów magnesu  $N$  oraz  $S$ . Kierunek pola w tych punktach pokazuje rysunek. Wartości zaś pól w tych punktach wynoszą

W układzie SI

$$H_P = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left[ \frac{m_1}{r_1^2} + \frac{m_2}{(r_1+l)^2} \right] = \frac{1}{16\pi^2 \cdot 10^{-7}} \left[ \frac{4\pi}{10^8} \left( \frac{10}{4 \cdot 10^{-2}} + \frac{10}{9 \cdot 10^{-2}} \right) \right] \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{10^8}{4\pi} \frac{5}{36} \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{500}{452,16} \frac{\text{A}}{\text{m}} = 1,10 \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

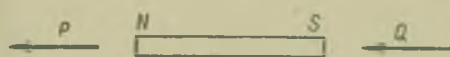
$$H_Q = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left[ \frac{m_1}{(r_1+l)^2} + \frac{m_2}{r_1^2} \right] = -1,10 \frac{\text{A}}{\text{m}},$$



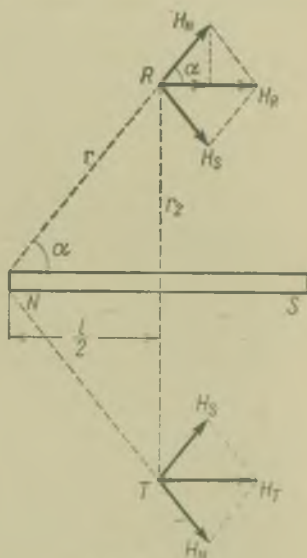
W układzie EM CGS

$$H_P = H_N + H_S = \frac{m_1}{r_1^2} + \frac{m_2}{(r_1 + l)^2} = \left( \frac{10}{400} - \frac{10}{900} \right) \text{Oe} = \frac{1}{72} \text{Oe} = 0,0138 \text{Oe},$$

$$H_Q = H_N + H_S = \frac{m_1}{(r_1 + l)^2} + \frac{m_2}{r_1^2} = \left( \frac{10}{900} - \frac{10}{400} \right) \text{Oe} = -\frac{1}{72} \text{Oe} = -0,0138 \text{Oe};$$



Rys. 4.13.1.



Rys. 4.13.2.

b) Przy drugim położeniu punktów  $R$  oraz  $T$  na symetrycznej sztabki, natężenie pól w tych punktach  $H_R = H_T$  co do wartości oraz co do kierunku. Kierunek  $H_R$  oraz  $H_T$ , jak i sposób uzyskania tych wektorów pokazujemy na rys. 4.13.2. W celu obliczenia wartości  $H_R$  i  $H_T$  obliczamy wartość  $H_N$  i  $H_S$ , tzn. składowe pochodzące od biegunów  $S$  i  $N$  magnesu dla punktów  $R$  i  $T$ . Z rysunku 4.13.2 widać, że

$$r = \sqrt{r_2^2 + \frac{l^2}{4}} = 20,6 \text{ cm} = 0,206 \text{ m}.$$

Odpowiednie wartości pola znajdujemy dla różnych układów jednostek następująco:  
W układzie SI

$$\begin{aligned} |H_N| = |H_S| &= \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m}{r^2} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{4m}{l^2 + 4r_2^2} = \\ &= \frac{1}{16\pi^2 \cdot 10^{-7}} \frac{4 \cdot \frac{4\pi}{10^8} 10}{10^{-2}(1+16)} \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{100}{17\pi} \frac{\text{A}}{\text{m}} = 1,873 \frac{\text{A}}{\text{m}}, \\ |H_R| = |H_T| &= H_N \frac{l}{r} = 0,909 \frac{\text{A}}{\text{m}}. \end{aligned}$$

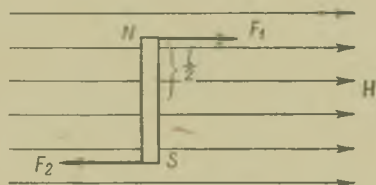
W układzie EM CGS

$$|H_N| = |H_S| = \frac{m}{r^2} = \frac{10}{20,6} \text{ Oe} = 0,023 \text{ Oe},$$

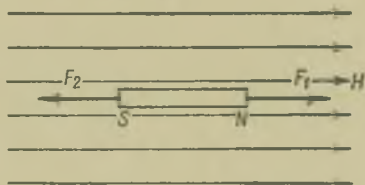
$$|H_R| = |H_T| = 2H_N \cos \alpha = 2H_N \frac{l}{2r} = H_N \frac{l}{r} = 0,023 \frac{10}{20,6} \text{ Oe} = 0,011 \text{ Oe}.$$

4.9. a) Na podstawie zadania położenie sztabki w obu przypadkach można przedstawić rysunkowo (rys. 4.14.1 i 2). Siły wywierane przez pole magnetyczne na bieguny magnesu  $N$  oraz  $S$  tworzą parę sił, ponieważ

$$|F_1| = |F_2| = |F| \quad \text{oraz} \quad l_1 = l_2 = l.$$



Rys. 4.14.1.



Rys. 4.14.2.

Zatem momenty sił działających na magnes mają wartości

$$|M_1| = |M_2| = |M| = |F| \cdot l.$$

Obliczenie sił momentów w różnych układach:

W układzie SI

$$|F| = m|H| = \frac{4\pi 500}{10^6} 79,6 \cdot 200 \text{ N} = 4\pi \cdot 79,6 \cdot 10^{-3} \text{ N} = 999,8 \cdot 10^{-3} \text{ N} = 1 \text{ N},$$

$$|M| = |F|l = 1 \cdot 0,12 \text{ J} = 0,12 \text{ J};$$

W układzie EM CGS

$$|F| = m|H| = 500 \cdot 100 \text{ dyn} = 10^5 \text{ dyn},$$

$$|M| = |F|l = 10^5 \cdot 12 \text{ ergów} = 1,2 \cdot 10^4 \text{ ergów}.$$

b) Oznaczmy przez  $F_p$  siłę prostopadłą do sztabki magnesu oraz działającą na biegun  $N$  magnesu. Siła ta wykonuje pracę, przesuwając biegun  $N$  o kąt  $\alpha = 90^\circ$ . Podobnie taką samą pracę wykonuje siła  $F_s$  działająca na biegun  $S$  magnesu (rys. 4.14.3). Całkowita praca wykonana przez siły pola składa się więc z sumy obu prac. A więc

$$\begin{aligned} W &= 2 \int_0^{\pi/2} F_p ds = 2 \int_0^{\pi/2} F_1 \cos \varphi \frac{1}{2} l d\varphi = 2 \frac{1}{2} F_1 l \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \\ &= M \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = M \left[ \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right] = M. \end{aligned}$$

Praca  $W$  w różnych układach wynosi:

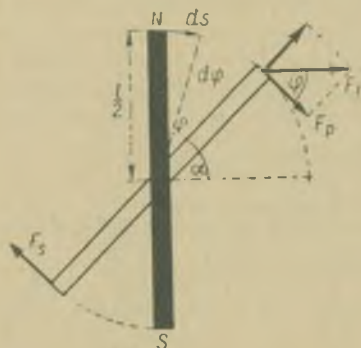
w układzie SI

$$W = 0,12 \text{ dżuli ;}$$

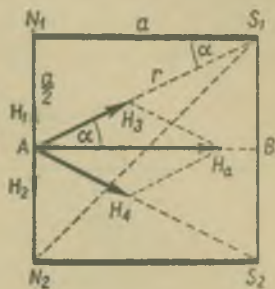
w układzie EM CGS

$$W = 1,2 \cdot 10^6 \text{ ergów .}$$

4.10. a) Umieszczamy magnesy w bokach kwadratu, tak jak na rys. 4.15.1. Oznaczmy środki pozostałych boków przez  $A$  i  $B$ . Natężenia pól magnetycznych w tych punktach



Rys. 4.14.3.



Rys. 4.15.1.

będą zgodne co do wartości oraz co do kierunku (wykonać rysunek składowych natężenia w punkcie  $B$ ). Na wypadkowe natężenie w punkcie  $A$  (oznaczone przez  $H_0$ ) składają się natężenia  $H_1$  pochodzące od bieguna  $N_1$ , natężenie  $H_2$  pochodzące od bieguna  $N_2$ , natężenie  $H_3$  pochodzące od bieguna  $S_1$  oraz natężenie  $H_4$  pochodzące od bieguna  $S_2$ . Kierunki natężeń zaznaczono na rysunku. Działanie natężeń  $H_1$  oraz  $H_3$  wzajemnie się znoszą, gdyż  $H_1 = H_3$  oraz skierowane są przeciwnie. Ponadto natężenie  $H_2 = H_4$ . Celem naszym będzie wyszukanie wielkości natężenia wypadkowego  $H$  oraz jego kierunku działania.

Z rysunku 4.15.1 widać, że

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2},$$

a więc  $\alpha = 26^\circ 34'$ , zatem  $2\alpha = 53^\circ 08'$ .

Wektor wypadkowego natężenia pola magnetycznego w punkcie  $A$  wynosi

$$H_0 = H = \sqrt{H_2^2 + H_4^2 + 2H_2 H_4 \cos 2\alpha} = H_2 \sqrt{2(1 + \cos 2\alpha)}.$$

Wartość natężenia pola w różnych układach wynosi zatem:

w układzie SI

$$H_1 = H_2 = \frac{4\pi}{4\pi\mu_0 a^3} = \frac{1}{16\pi^2 \cdot 10^{-7}} \frac{4 \cdot 10^{-8}}{10^{-2}} \frac{\text{A}}{\text{m}} = 31,8 \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

$$H_3 = H_4 = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{4m}{5a^2} = \frac{1}{16\pi^2 \cdot 10^{-7}} \frac{4 \cdot 10^8 \cdot 10}{5 \cdot 10^{-3}} \frac{\text{A}}{\text{m}} = 6,3 \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

$$H = 6,3 \cdot 1,8 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 11,3 \frac{\text{A}}{\text{m}};$$

w układzie EM CGS

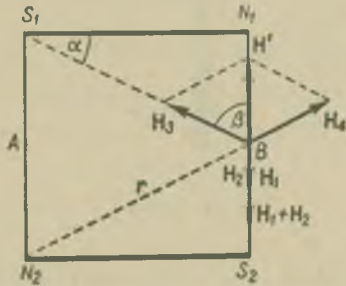
$$H_1 = H_2 = \frac{m}{a^2} = \frac{4m}{a^2} = \frac{4 \cdot 10}{10^3} \text{Oe} = 0,4 \text{Oe},$$

$$H_3 = H_4 = \frac{m}{r^2} = \frac{m}{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{4m}{5a^2} = \frac{4 \cdot 10}{5 \cdot 10^3} \text{Oe} = 0,08 \text{Oe},$$

$$H = 0,08 \cdot 3,1998 \text{Oe} = 0,143 \text{Oe}.$$



Rys. 4.15.2.



Rys. 4.15.3.

b) W celu obliczenia natężenia pola magnetycznego w środku tego kwadratu, oznaczmy również natężenie częściowe, podobnie jak na rys. 4.15.1, przez  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  oraz  $H_4$ . Natężenie wypadkowe  $H_0$  jest skierowane, tak jak to wskazuje rys. 4.15.2 i wynosi

$$H_0 = H_1 + H_2 + H_3 + H_4,$$

lecz

$$H_1 = H_3 \quad \text{oraz} \quad H_2 = H_4,$$

zatem

$$H_0 = \sqrt{(H_1 + H_3)^2 + (H_2 + H_4)^2} = \sqrt{4H_1^2 + 4H_2^2} = H_1 2\sqrt{2},$$

ponieważ co do wartości  $H_1 = H_2$ .

Wartości natężenia pola w różnych układach jednostek:

w układzie SI

$$H_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{2m}{a^2} = \frac{1}{16\pi^2 \cdot 10^{-7}} \frac{2 \cdot 10^8 \cdot 10}{10^{-2}} \frac{\text{A}}{\text{m}} = 15,9 \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

$$H_0 = 2H_1 \sqrt{2} = 2 \cdot 15,9 \sqrt{2} \frac{\text{A}}{\text{m}} = 44,5 \frac{\text{A}}{\text{m}};$$

w układzie EM CGS

$$H_1 = \frac{m}{r^2} = \frac{2m}{a^2} = \frac{2 \cdot 10}{10^2} \text{ Oe} = 0,2 \text{ Oe},$$

$$H_0 = 2H_1\sqrt{2} = 0,4 \cdot \sqrt{2} \text{ Oe} = 2,92 \text{ Oe}.$$

c) W drugim przypadku umieszczamy magnesy na bokach kwadratu (rys. 4.15.3). Natężenie pola magnetycznego w punktach  $A$  i  $B$  obliczamy tak samo jak w przypadku a) (wykonać rysunek natężeń częściowych oraz natężenia wypadkowego dla punktu  $A$ ). Wprowadźmy oznaczenia:  $H_1$  — natężenie pola magnetycznego pochodzące od bieguna magnetycznego  $N_1$ ,  $H_2$  — od bieguna  $S_2$ ,  $H_3$  — od bieguna  $S_1$ ,  $H_4$  — od bieguna  $N_2$ . W tym przypadku wartości natężeń wynoszą

$$H_1 = H_2 = \frac{4m}{a^2} \quad \text{oraz} \quad H_3 = H_4 = \frac{m}{r^2} = \frac{4m}{5a^2},$$

wartość zaś natężenia wypadkowego od natężeń  $H_3$  i  $H_4$  wynosi

$$H' = \sqrt{H_3^2 + H_4^2 + 2H_3H_4\cos 2\beta} = H_3\sqrt{2(1 + \cos 2\beta)},$$

gdzie  $\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 26^\circ 34' = 63^\circ 26'$  (obliczenie kąta  $\alpha$  wykonano w przypadku a). Zatem

$$H' = H_3\sqrt{2(1 + \cos 126^\circ 52')} = H_3\sqrt{2(1 - \sin 36^\circ 52')} = H_3\sqrt{0,8} = 0,283H_3,$$

a więc natężenie pola magnetycznego w punkcie  $B$  ma wartość

$$H_B = 2H_1 - H',$$

ponieważ wektory  $H_1$  i  $H'$  są równoległe, lecz o zwrotach przeciwnych. Ostatecznie zatem  $H_B$  jest skierowane od bieguna  $N_1$  do  $S_2$  i wynosi

$$H_B = 2H_1 - 0,283H_3.$$

Wartości natężeń w różnych układach jednostek wynoszą:

w układzie SI

$$H_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{4m}{a^2} = \frac{4m}{16\pi^2 \cdot 10^{-7}} \frac{4 \cdot 10^{-8}}{10^{-2}} = 31,8 \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

$$H_3 = 6,3 \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (\text{obliczenie — patrz przypadek 1}),$$

$$H' = 0,283H_3 = 1,78 \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

$$H_B = (2 \cdot 31,8 - 1,78) \frac{\text{A}}{\text{m}} = 61,82 \frac{\text{A}}{\text{m}};$$

w układzie EM CGS

$$H_1 = \frac{4m}{a^2} = \frac{4 \cdot 10}{10^2} \text{ Oe} = 0,4 \text{ Oe}, \quad H_3 = \frac{4m}{5a^2} = \frac{4 \cdot 10}{5 \cdot 10^2} \text{ Oe} = 0,08 \text{ Oe},$$

$$H' = 0,283H_3 = 0,023 \text{ Oe}, \quad H_B = (2 \cdot 0,4 - 0,023) \text{ Oe} = 0,777 \text{ Oe}.$$



W punkcie  $A$  (rys. 4.15.4) obliczenia dają taki sam wynik, tylko wektor  $H_A$  jest skierowany przeciwnie niż wektor  $H_B$ , a więc od bieguna  $N_2$  do bieguna  $S_1$ . Obliczeń szczegółowych w tym przypadku nie przeprowadzamy. W punkcie środkowym kwadratu, jak to widać z rys. 4.15.4, wszystkie cztery poszczególne natężenia pól magnetycznych są sobie równe, a więc działania ich parami znoszą się. Ostatecznie natężenie pola w tym punkcie wynosi

$$H_0 = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 = 0.$$

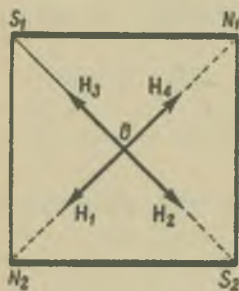
Natężenia pola od poszczególnych biegunów w tym punkcie wynoszą

$$H_1 = H_2 = H_3 = H_4 = \frac{2m}{a^2},$$

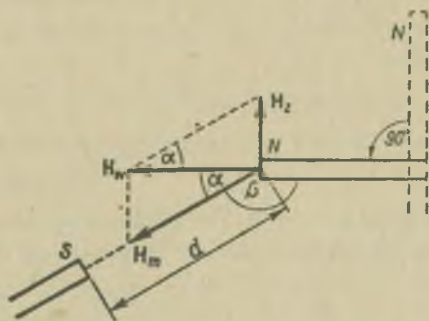
a więc na podstawie obliczeń przeprowadzonych w punkcie 1 otrzymujemy:

$$\text{w układzie SI } H_1 = 15,9 \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

$$\text{w układzie EM CGS } H_1 = 0,2 \text{ Oe}.$$



Rys. 4.15.4.



Rys. 4.16

4.11. Na podstawie rys. 4.16 widać, że natężenie pola ziemskiego  $H_z$  oraz natężenie bieguna magnetycznego  $H_m$  dają wypadkowe natężenie  $H_w$ , wzdłuż którego igiełka została odchylona, a więc  $H_w$  i  $H_z$  są do siebie prostopadłe. Zatem

$$H_z = H_m \sin(180 - \beta);$$

wartości natężenia pola magnetycznego:

w układzie SI

$$H_z = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m}{d^2} = \frac{1}{16\pi^2 \cdot 10^{-7}} \frac{10^9 \cdot 100}{10^{-2}} \frac{\text{A}}{\text{m}} = 79,58 \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

w układzie EM CGS

$$H_z = \frac{m}{d^2} \sin 14^\circ = \frac{100}{10^2} 0,24 \text{ Oe} = 0,24 \text{ Oe}.$$

4.12. Pomiędzy wektorami indukcji magnetycznej  $B$  oraz natężenia pola magnetycznego  $H$  istnieje związek, na podstawie którego dla każdej wartości natężenia pola magnetycznego oraz wektora indukcji magnetycznej obliczymy przenikalność magnetyczną blachy.

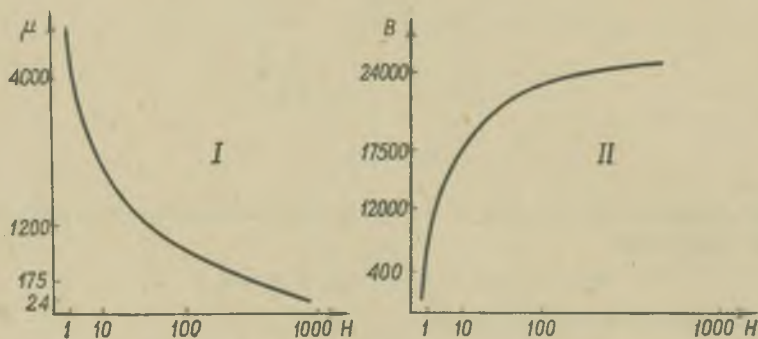
a) W układzie EM CGS związek ten przybiera postać

$$B = \mu H,$$

zatem

$$\mu_1 = \frac{B_1}{H_1} = \frac{4000 \text{ Gs}}{1 \text{ Oe}} = 4000, \quad \mu_2 = \frac{12000 \text{ Gs}}{10 \text{ Oe}} = 1200,$$

$$\mu_3 = \frac{17500 \text{ Gs}}{100 \text{ Oe}} = 175, \quad \mu_4 = \frac{24000 \text{ Gs}}{100 \text{ Oe}} = 240.$$



Rys. 4.17

Przebieg zmienności  $\mu$  i  $B$  w zależności od  $H$  podają nam krzywe  $I$  i  $II$  na rys. 4.17. Krzywe te sporządzono dla wartości w układzie EM CGS.

W układzie SI związek między  $B$  i  $H$  piszemy w postaci

$$B = \mu' H, \quad \text{gdzie} \quad \mu' = \mu \mu_0.$$

W układzie tym przenikalność magnetyczna blachy wynosi

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H},$$

a więc

$$\mu_1 = \frac{10^{-4} \cdot 4000 \text{ tesli}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,79,6 \frac{\text{A}}{\text{m}}} = \frac{10^3}{999,8} \frac{4000}{1} = 4000,$$

czyli ten sam (tak jak być powinno) wynik co w układzie EM CGS. Wszystkie dane pozostałe odnoszące się do  $\mu$ , a więc również charakter krzywej w układzie SI jest taki sam, jak w układzie EM CGS.

4.13. Na podstawie danych zadania sporządzamy rysunek 4.18, z którego wynika, że

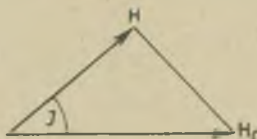
$$H_c = \frac{H}{\cos I'}, \quad \text{zatem}$$

w układzie SI

$$H_c = \frac{79,6 \cdot 0,196 \text{ A}}{\cos 65^\circ 08' \text{ m}} = 31,4 \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

w układzie EM CGS

$$H_c = \frac{0,196}{\cos 65^\circ 08'} \text{ Oe} = 0,394 \text{ Oe}.$$



Rys. 4.18

4.14. Ponieważ pola  $H$  i  $H_1$  są do siebie równoległe, zatem całkowite natężenie pola wypadkowego wynosi

$$H_c = H_1 + H, \quad \text{stad} \quad H = H_c - H_1.$$

Okres wahań przedstawiamy wzorem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MH_c}}, \quad \text{skąd} \quad H_c = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{I}{M}.$$

Wartość  $H_c$  i  $H$  w różnych układach jednostek otrzymujemy:

w układzie SI

$$H_c = \frac{4 \cdot 3,14^2}{0,67^2} \frac{10^{-7} \cdot 50}{\frac{4\pi}{10^9} 10^{-2} \cdot 2000} \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{10^9}{4\pi} 2,181 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 2,181 \cdot 79,6 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 173,6 \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

$$H = (173,6 - 159,2) \frac{\text{A}}{\text{m}} = 14,4 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

w układzie EM CGS

$$H_c = \frac{4 \cdot 3,14^2}{0,67^2} \frac{50}{2000} \text{ Oe} = 2,181 \text{ Oe},$$

$$H = (2,181 - 2) \text{ Oe} = 0,181 \text{ Oe}.$$

4.15. Na okres wahań otrzymujemy wzór

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MH}},$$

skąd natężenie pola magnetycznego

$$H = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{I}{ml}$$

A więc:

w układzie SI

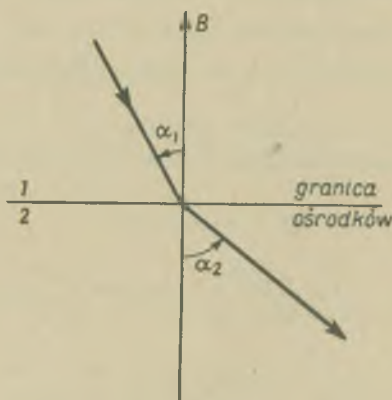
$$H = \frac{4 \cdot 3,14^2}{2,3^2} \frac{10^{-7} \cdot 50}{4\pi \cdot 10^{-10} \cdot 2000} \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{10^3}{4\pi} 0,186 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 14,8 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

w układzie EM CGS

$$H = \frac{4 \cdot 3,14^2}{2,3^2} \frac{50}{200 \cdot 10} \text{Oe} = 0,186 \text{Oe}.$$

4.16. Na stosunek okresów drgań otrzymujemy wzór

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{I}{MH_1}}}{2\pi \sqrt{\frac{I}{MH_2}}} = \sqrt{\frac{H_2}{H_1}}, \quad \text{skąd} \quad H_2 = H_1 \frac{T_1^2}{T_2^2}.$$



Rys. 4.19

Wartość  $H_2$  wynosi:

w układzie SI

$$H_2 = 79,6 \cdot 0,18568 \frac{1,5^2}{1,45^2} \frac{\text{A}}{\text{m}} = 15,83 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

w układzie EM CGS

$$H_2 = 0,18568 \frac{1,5^2}{1,45^2} \text{Oe} = 0,1989 \text{Oe}.$$

4.17. Z warunków ciągłości składowej normalnej wektora indukcji magnetycznej przy przechodzeniu przez powierzchnię graniczną dwu ośrodków otrzymujemy

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad \text{czyli} \quad \mu_1 \mu_0 H_{1n} = \mu_2 \mu_0 H_{2n},$$

a z warunku ciągłości składowych stycznych natężenia pola magnetycznego przy przechodzeniu przez granicę dwu ośrodków otrzymujemy

$$H_{1s} = H_{2s}.$$

Z rys. 4.19 wynika, że  $n = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$ , ale  $\text{tg} \alpha_1 = \frac{H_{1s}}{H_{1n}}$  oraz  $\text{tg} \alpha_2 = \frac{H_{2s}}{H_{2n}}$ , skąd

$$\frac{\text{tg} \alpha_1}{\text{tg} \alpha_2} = \frac{H_{2n}}{H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \text{skąd} \quad \text{tg} \alpha_2 = \text{tg} \alpha_1 \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

A więc

$$n = \frac{\text{tg} \alpha_1}{\text{tg} \alpha_2} \sqrt{\frac{1 + \text{tg}^2 \alpha_2}{1 + \text{tg}^2 \alpha_1}} = \frac{1}{\mu_2} \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 \text{tg}^2 \alpha_1}{1 + \text{tg}^2 \alpha_1}} = 0,54.$$

4.18. Gęstość energii magnetycznej wyraża się wzorem

$$q_m = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu \mu_0} = \frac{1}{2} \mu \mu_0 H^2.$$

Na granicy dwu ośrodków magnetycznych ta różnica będzie wynosiła

$$\Delta q_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 (\mu_1 - \mu_2) = \frac{1}{2} H^2 \mu_0 (\kappa_1 - \kappa_2).$$

Na granicy takich dwu ośrodków występuje ciśnienie zwane ciśnieniem Maxwella i wynosi

$$p = \Delta q_m = \frac{1}{2} H^2 \mu_0 (\kappa_1 - \kappa_2).$$

Ciśnienie to zostało w naszym przypadku zrównoważone przez ciśnienie słupa alkoholu o wysokości  $h$ , a więc

$$\rho g h = \frac{1}{2} H^2 \mu_0 (\kappa_1 - \kappa_2),$$

skąd

$$H^2 = \frac{2 \rho g h}{\mu_0 (\kappa_1 - \kappa_2)} = 29,4 \cdot 10^{12} \frac{\text{A}^2}{\text{m}^2},$$

a więc

$$H = 5,2 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

4.19.  $h = \frac{H^2 \mu_0 (\kappa_2 - \kappa_1)}{2 \rho g}$  (opuszczając  $\kappa_1$  oraz zaokrąglając wartość  $g$  do  $10 \text{ m/s}^2$ ),

otrzymujemy  $h = 0,224 \text{ m}$ .

4.20. W celu przeprowadzenia tego dowodu wystarczy dowieść, że po dowolnej drodze obiegu (rys. 4.20) zachodzi związek

$$\oint E_s ds = 0.$$

W tym celu ładunek elektryczny  $Q$  przemieszczamy wzdłuż elementu tego obwodu  $ds$ . Praca wykonana na to przemieszczenie wynosi

$$dW = F ds = EQ \cos \alpha ds = E_s Q ds,$$



gdzie  $E_s$  oznacza rzut wektora natężenia pola elektrycznego na ten element. Otrzymujemy więc

$$\int_A^B E_s Q ds = \text{pracy wykonanej na przemieszczenie ładunku } Q \text{ z punktu } A \text{ do punktu}$$

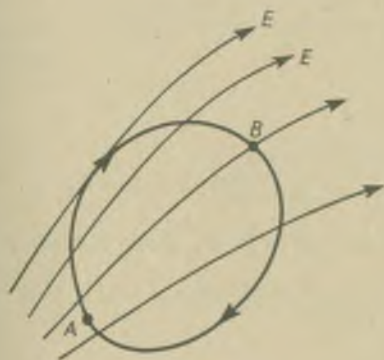
$B = z$  definicji napięcia elektrycznego  $Q(V_A - V_B)$ .

Podobnie

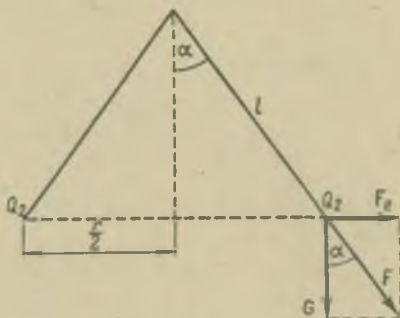
$$\int_B^A E_s Q ds = Q(V_B - V_A).$$

A więc

$$\int_A^A E_s Q ds = 0 \text{ (po dowolnej krzywej zamkniętej).}$$



Rys. 4.20



Rys. 4.21

4.21. Warunkiem rozwiązania zadania jest to, aby siła wypadkowa dwóch sił: siły ciężkości  $G$  i siły pochodzenia elektrycznego  $F_e$  działała wzdłuż nitki, na której kuleczka została zawieszona (rys. 4.21). Oznaczając przez  $\alpha$  kąt wychylenia tej nitki z położenia jej równowagi (położenia pionowego), otrzymujemy na wyżej sformułowany warunek wzór

$$F_e = G \tan \alpha.$$

Przeprowadzimy teraz rozwiązanie w odpowiednich układach:  
w układzie SI

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad \text{oraz} \quad G = mg.$$

Zatem

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = mg \frac{r/2}{\sqrt{l^2 - (r/2)^2}},$$

gdzie  $Q_1 = Q_2$ . Otrzymujemy stąd

$$Q = r \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 emgr}{\sqrt{4l^2 - r^2}}}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}, \quad \epsilon = 1, \quad m = 1 \cdot 10^{-5} \text{ kg},$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2, \quad l = 0,2 \text{ m}, \quad r = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Podstawiając te dane do powyższego wzoru otrzymujemy na  $Q$  wartość w A·s, czyli w kulombach

$$Q = 4 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{4\pi \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} 1 \cdot 10^{-5} \cdot 9,81 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{4(0,2)^2 - (4 \cdot 10^{-2})^2}}} \text{ A} \cdot \text{s} = 3,31 \cdot 10^{-9} \text{ A} \cdot \text{s};$$

w układzie ES CGS

$$F_c = \frac{Q^2}{\epsilon r^2}, \quad \text{a więc} \quad Q = r \sqrt{\frac{\epsilon mgr}{\sqrt{4l^2 - r^2}}}$$

gdzie  $\epsilon = 1$ ,  $m = 1,10^{-2} \text{ g}$ ,  $r = 4 \text{ cm}$ ,  $g = 981 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $l = 20 \text{ cm}$ . Zatem wartość  $Q$  wynosi

$$Q = 1,32 \text{ g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-1} = 1,32 \text{ j. ES CGS}.$$

4.22. Na siłę przyciągania otrzymujemy wartość:  
w układzie SI

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2} \left( \frac{4,80 \cdot 10^{-10} \text{ A} \cdot \text{s}}{\frac{3 \cdot 10^9}{10^{-10} \text{ m}}} \right)^2 = 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ N};$$

w układzie ES CGS

$$F = \frac{Q^2}{r^2} = \left( \frac{4,80 \cdot 10^{-10}}{10^{-8}} \right)^2 \text{ dyn} = 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ dyn}.$$

Obliczamy najpierw ładunek, jaki ma gramocząsteczka jonów

$$\begin{aligned} Q &= Ne = 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ j. ES CGS} = 28,9 \cdot 10^{13} \text{ j. ES CGS} = \\ &= 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ j. SI} = 9,6 \cdot 10^4 \text{ A} \cdot \text{s}. \end{aligned}$$

Odległość tych ładunków wynosi

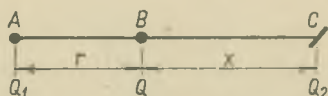
$$r^2 = 4,06 \cdot 10^{13} \text{ m}^2 = 4,06 \cdot 10^{17} \text{ cm}^2.$$

Na siłę przyciągania tych ładunków otrzymujemy więc wartość:  
w układzie SI

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{(9,6 \cdot 10^4)^2}{4,06 \cdot 10^{13}} \text{ N} = 2,04 \cdot 10^6 \text{ N};$$

w układzie ES CGS

$$F = \frac{Q^2}{r^2} = \frac{(28,9 \cdot 10^{12})^2}{4,06 \cdot 10^{17}} \text{ dyn} = 2,04 \cdot 10^{11} \text{ dyn}.$$



Rys. 4.22

4.23. Oznaczając przez  $C$  punkt, w którym znajduje się pałeczka (rys. 4.22) oraz przez  $x$  odległość  $BC$ , otrzymujemy na podstawie prawa Coulomba warunek równowagi:

w układzie SI

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q}{x^2};$$

w układzie ES CGS

$$\frac{Q_1 Q}{r^2} = \frac{Q_2 Q}{x^2}.$$

Jak widzimy, w każdym układzie otrzymujemy wartość na  $x$

$$x = r \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}},$$

stosunek  $Q_2/Q_1$  w każdym układzie jest bezwymiarowy i wynosi 4, a więc na  $x$  otrzymujemy ostatecznie

$$x = 2r,$$

zatem

w układzie SI

$$x = 2 \cdot 0,06 \text{ m} = 0,12 \text{ m}$$

w układzie ES CGS

$$x = 2 \cdot 6 \text{ cm} = 12 \text{ cm}.$$

4.24. Na podstawie prawa Coulomba otrzymujemy siłę wzajemnego przyciągania tych ładunków:

w układzie SI

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2},$$

gdzie  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$ ,  $\epsilon = 1$  (w powietrzu),  $\epsilon = 1,8$  (w oleju parafinowym),

$Q_1 = \frac{50}{3 \cdot 10^9} \text{A} \cdot \text{s}$ ,  $Q_2 = -\frac{100}{3 \cdot 10^9} \text{A} \cdot \text{s}$ ,  $r = 8 \cdot 10^{-2} \text{m}$ , a więc siła przyciągania w powietrzu po podstawieniu tych danych wynosi

$$F_e = 78,1 \cdot 10^{-5} \text{N},$$

w oleju parafinowym zaś

$$F_e = 43,4 \cdot 10^{-5} \text{N};$$

w układzie ES CGS

$$F_e = \frac{1}{\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2},$$

gdzie  $\epsilon = 1$  (w powietrzu),  $Q_1 = 50 \text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\epsilon = 1,8$  (w oleju parafinowym),  $Q_2 = -100 \text{g}^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $r = 8 \text{cm}$ , a więc siła przyciągania tych ładunków wynosi

$$\text{w powietrzu} \quad F_e = 78,1 \text{ dyn},$$

$$\text{w oleju} \quad F_e = 43,4 \text{ dyn}.$$

#### 4.25. Rozważmy dwa przypadki:

a) Oba ładunki  $Q_1$  oraz  $Q_2$  są dodatnie.



Rys. 4.23.1

1. Jeżeli ładunek próbny umieścimy na linii łączącej ładunki  $Q_1$  oraz  $Q_2$  między tymi ładunkami (rys. 4.23.1a), to na warunek równowagi na podstawie prawa Coulomba otrzymujemy w każdym układzie (patrz rozwiązanie zadania 4.23)

$$\frac{Q_1 Q}{x^2} = \frac{Q_2 Q}{y^2}, \quad \text{gdzie} \quad x + y = r.$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy równanie ze względu na  $x$

$$x^2(Q_2 - Q_1) + 2xrQ_1 - r^2Q_1 = 0,$$

skąd

$$x = \frac{-rQ_1 \pm r \sqrt{Q_1 Q_2}}{Q_2 - Q_1} = r \frac{-Q_1 \pm \sqrt{Q_1 Q_2}}{Q_2 - Q_1}.$$

Rozwiązanie ujemne należy odrzucić, ponieważ w wyniku otrzymujemy liczbę większą od  $r$ . Współczynnik stojący w rozwiązaniu przy  $r$  jest liczbą niemianowaną i jego wartość nie zależy od układu jednostek, a więc w każdym układzie wartość jego wynosi 1,807 (ten wynik należy odrzucić) oraz 0,693.

W każdym układzie  $x = 0,693r$ , a więc otrzymujemy:  
w układzie SI

$$x = 0,693 \cdot 0,06 \text{ m} = 0,042 \text{ m}, \quad y = 0,018 \text{ m};$$

w układzie ES CGS

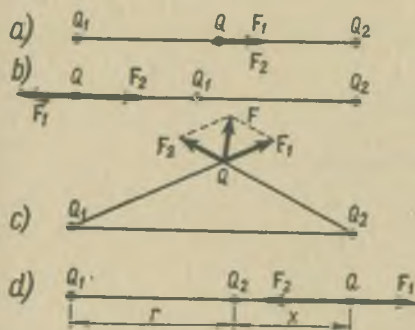
$$x = 0,693 \cdot 6 \text{ cm} = 4,16 \text{ cm}, \quad y = 1,84 \text{ cm}.$$

2. Jeżeli ładunek  $Q$  znajduje się na zewnątrz po stronie ładunku  $Q_2$  lub  $Q_1$ , to nigdy nie zostanie spełniony warunek równowagi, gdyż w obu przypadkach ładunek ten będzie odpychany siłami, których kierunek został podany na rysunkach 4.23.1 b i c.

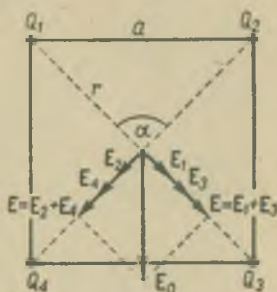
3. Również ładunek ten nie znajdzie się nigdy w równowadze, jeżeli umieścimy go gdziekolwiek w punkcie nie leżącym na linii łączącej ładunki  $Q_1$  i  $Q_2$ . Kierunek działania sił na ten ładunek w jednym z przypadków pokazany jest na rys. 4.23.1 d.

b) Ładunek  $Q_2$  jest ładunkiem ujemnym

1. Ładunek próbny  $Q$  nie może znajdować się między ładunkami, gdyż nie byłby spełniony warunek równowagi (rys. 4.23.2a).



Rys. 4.23.2



Rys. 4.24

2. Ładunek próbny  $Q$  nie może się znajdować na linii łączącej oba ładunki po stronie ładunku  $Q_1$ , gdyż siła pochodząca od  $Q_1$  przeważałaby zawsze siłę pochodzącą od  $Q_2$  (rys. 4.23.2b).

3. Nie może znajdować się w jakimkolwiek punkcie znajdującym się poza linią łączącą ładunki  $Q_1$  i  $Q_2$ , gdyż nie może nastąpić warunek równowagi. Kierunek działania sił w jednym z przypadków podaje rysunek (4.23.2c).

4. Równowaga może nastąpić tylko wtedy, gdy ładunek próbny  $Q$  będzie się znajdował po stronie zewnętrznej ładunku  $Q_2$  na linii łączącej ładunki  $Q_1$  i  $Q_2$ . Oznaczając



przez  $x$  odległość ładunku  $Q$  od ładunku  $Q_1$  (rys. 4.23.2d) w każdym układzie otrzymujemy na warunek równowagi równanie

$$\frac{Q_1 Q}{x^2} = \frac{Q_1 Q}{(x+r)^2},$$

a więc

$$x^2(Q_1 - Q_2) - 2rQ_2x - Q_2r^2 = 0,$$

skąd

$$x = r \frac{Q_2 \pm \sqrt{Q_1 Q_2}}{Q_1 - Q_2} = 0,205r.$$

Jest to słuszne w każdym układzie, gdyż współczynnik stojący przy  $r$  jest bezwymiarowy i nie zależy od układu jednostek; drugi wyraz jako ujemny należy odrzucić. Ostatecznie otrzymujemy wynik rozwiązania:

w układzie SI

$$x = 0,205 \cdot 0,06 \text{ m} = 0,0123 \text{ m};$$

w układzie ES CGS

$$x = 0,205 \cdot 6 \text{ cm} = 1,23 \text{ cm}.$$

4.26. Natężenie pola elektrycznego  $E_0$  panujące w środku kwadratu pochodzi od czterech składowych natężeń wywołanych przez poszczególne ładunki. Oznaczając je, tak jak na rysunku 4.24, otrzymujemy

$$E_1 = E_2 \quad \text{oraz} \quad E_3 = E_4,$$

zatem

$$E_1 + E_3 = E_2 + E_4 = E,$$

a więc

$$E_0 = \sqrt{E^2 + E^2 + 2E^2 \cos 90^\circ} = E\sqrt{2}.$$

A zatem mamy:

w układzie SI

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q_1}{a^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2} \frac{2 \cdot \frac{10}{3 \cdot 10^9} \text{A} \cdot \text{s}}{0,01 \text{ m}^2} = 6000 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{s}},$$

$$E_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q_3}{a^2} = 60000 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{s}}, \quad E = E_1 + E_3 = 66000 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{s}},$$

$$E_0 = 92400 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{s}}.$$

W układzie ES CGS

$$E_1 = \frac{Q_1}{r^2} = \frac{2Q_1}{a^2} = \frac{2 \cdot 10}{100} \text{ j. ES CGS} = 0,2 \text{ j. ES CGS natężenia pola elektrycznego},$$

$$E_3 = 2 \text{ j. ES CGS natężenia pola elektrycznego},$$

$E = E_1 + E_3 = 2,2 \text{ j. ES CGS}$  natężenia pola elektrycznego,

$E_0 = 3,08 \text{ j. ES CGS}$  natężenia pola elektrycznego.

4.27. Natężenie pól elektrycznych pochodzące od ładunków  $Q_1$ ,  $Q_2$  i  $Q_3$  (rys. 4.25) są sobie równe co do wartości bezwzględnej

$$E_1 = E_2 = E_3.$$

Suma wektorowa natężeń  $E_1$  oraz  $E_2$  jest skierowana zgodnie z natężeniem  $E_3$  i wynosi

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos 120^\circ} = \sqrt{E_1^2 + E_1^2 - 2E_1^2\sin 30^\circ} = \sqrt{2E_1^2 - E_1^2} = E_1.$$

Wypadkowe natężenie wszystkich trzech natężeń cząstkowych jest równe co do wartości i co do kierunku

$$E_0 = 2E_3.$$

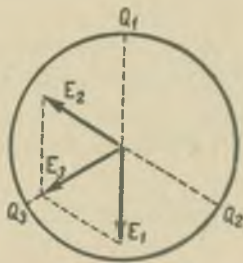
Wartości  $E_0$  w różnych układach jednostek:

w układzie SI

$$E_0 = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2} \frac{10}{25 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} \text{A} \cdot \text{s} = 2,4 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{s}};$$

w układzie ES CGS

$$E_0 = 2 \frac{Q}{r^2} = 2 \frac{10}{25} g^{1/2} \cdot \text{cm}^{3/2} \cdot \text{s}^{-1} = 0,8 \text{ j. ES CGS}$$
 natężenia pola elektrycznego.



Rys. 4.25

4.28. Ponieważ liczba określająca ilość linii  $n = 500$  dotyczy danych w układzie ES CGS, zatem z tego samego ładunku, którego wartość określono w układzie SI wychodzi  $n$  linii pola elektrycznego ( $n = 1500$ ). Na szukaną wartość ładunku elektrycznego otrzymujemy więc:

w układzie SI

$$Q = 3n\epsilon_0 = 3 \cdot 500 \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{A} \cdot \text{s} = \frac{500}{4\pi} \frac{1}{3 \cdot 10^9} \text{A} \cdot \text{s} = \frac{29,8}{3 \cdot 10^9} \text{A} \cdot \text{s} = 13,3 \cdot 10^{-9} \text{A} \cdot \text{s};$$

w układzie ES CGS

$$Q = \frac{n}{4\pi} = \frac{500}{4\pi} \text{j. ES CGS} = 39,8 \text{ j. ES CGS}$$
 ładunku.

4.29. Natężenie pola elektrycznego znajdującego się w odległości  $x$  od punktowego ładunku elektrycznego wynosi

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2},$$

wektor indukcji elektrycznej ma w tej odległości wartość

$$D = \epsilon_0 E = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{x^2}.$$

W punkcie 1. Wektory  $D$  pochodzące od ładunków  $Q_1$  oraz  $Q_2$  są równe i skierowane od  $Q_1$  do  $Q_2$ , a ich wartość wynosi

$$D_{11} = D_{12} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q_1}{\left(\frac{x_{12}}{2}\right)^2} = 3,2 \cdot 10^8 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Wektor  $D$  w tym punkcie pochodzący od ładunku  $Q_3$  jest prostopadły do  $x_{12}$  (na zewnątrz trójkąta), a jego wartość wynosi

$$D_{13} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q_3}{x_1^2} = 1,8 \cdot 10^8 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Wektor wypadkowy

$$D_1 = \sqrt{(2D_{11})^2 + D_{13}^2} = 1,8 \cdot 10^8 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$$

i jest skierowany do boku  $x_{12}$  pod kątem

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{D_{13}}{2D_{11}} = 0,2812, \quad \text{skąd} \quad \alpha_1 = 15^\circ 42'.$$

W punkcie 2. Wektor pochodzący od ładunku  $Q_3$  skierowany jest wzdłuż linii  $x_{23}$  podobnie do wektora pochodzącego od ładunku  $Q_2$ , a ich suma wynosi

$$D_{23} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q_2 + Q_3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 14 \cdot 10^8 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Wektor  $D$ , pochodzący od ładunku  $Q_1$ , ma w tym punkcie wartość

$$D_{21} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q_1}{x_3^2} = 1,2 \cdot 10^8 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$$

i jest skierowany pod kątem  $\alpha'_2 = 67^\circ 30'$  w stosunku do wektora  $D_{23}$ . Wektor wypadkowy

$$D_2 = \sqrt{D_{23}^2 + D_{21}^2 + 2D_{23}D_{21}\cos\alpha'_2} = 14,5 \cdot 10^8 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Z twierdzenia sinusów (rys. 4.2) widzimy, że kąt  $\alpha_2$ , pod którym skierowany jest wektor  $D_2$  w stosunku do boków  $x_{32}$  spełnia warunek

$$\sin \alpha_2 = \frac{D_{31}}{D_2} \sin 112^\circ 30' = 0,0773, \quad \text{skąd} \quad \alpha_2 = 4^\circ 26'.$$

W punkcie 3. Wektor  $D_{33}$  skierowany jest wzdłuż linii  $x_{31}$ , wektor  $D_{31}$  ma zwrot przeciwny. Wypadkowy wektor tych dwu wektorów wynosi więc

$$D_{33} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q_3 - Q_1}{(\frac{1}{2})^2} = 9,6 \cdot 10^8 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$$

i jest skierowany od  $Q_3$  do  $Q_1$ .

Wektor  $D_{32}$ , pochodzący od ładunku  $Q_2$ , co do wartości równy jest wektorowi  $D_{21}$ , a więc

$$D_{32} = 1,2 \cdot 10^8 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$$

i skierowany jest pod kątem  $\alpha'_3 = 112^\circ 30'$  w stosunku do wektora  $D_{33}$  (do wnętrza trójkąta). Wypadkowy wektor wynosi więc

$$D_2 = \sqrt{D_{33}^2 + D_{32}^2 + 2D_{33}D_{32}\cos\alpha'_3} = 9,2 \cdot 10^8 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Z twierdzenia sinusów (rys. 4.2) widzimy, że kąt  $\alpha_3$ , pod którym skierowany jest wektor  $D_2$  w stosunku do wektora  $D_{33}$  spełnia warunek

$$\sin \alpha_3 = \frac{D_{32}}{D_2} \sin 67^\circ 30' = 0,1205, \quad \text{skąd} \quad \alpha_3 = 6^\circ 55'.$$

**4.30.** Wektor indukcji elektrycznej (rys. 4.3) w punkcie 1 pochodzi od ładunków elektrycznych  $Q_2$  oraz  $Q_3$ . Wartości ich wynoszą

$$D_{12} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q_2}{2a^2} = 0,8 \cdot 10^9 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2},$$

$$D_{13} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q_3}{a^2} = 3,9 \cdot 10^9 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Ich wektor wypadkowy

$$D_1 = \sqrt{D_{12}^2 + D_{13}^2 + 2D_{12}D_{13}\cos\alpha_1}, \quad \text{gdzie} \quad \alpha_1 = 135^\circ,$$

$$D_1 = 3,4 \cdot 10^9 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Kąt  $\alpha$ , pod którym ten wektor skierowany jest względem osi 31 można obliczyć na podstawie twierdzenia sinusów

$$\sin \alpha = \frac{D_{12}}{D_1} \sin 45^\circ = 0,1664, \quad \text{skąd} \quad \alpha = 9^\circ 35'.$$

Wektor indukcji elektrycznej w punkcie 2 pochodzi od ładunków  $Q_1$  oraz  $Q_3$  i ze względu na symetrię

$$D_{21} = D_{12} = 0,8 \cdot 10^9 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2},$$

$$D_{23} = D_{13} = 3,9 \cdot 10^9 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2},$$

$$D_2 = 4,5 \cdot 10^9 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Kąt, pod którym ten wektor skierowany jest względem osi 32 obliczamy na podstawie twierdzenia sinusów

$$\sin \alpha = \frac{D_{21}}{D_2} \sin 45^\circ = 0,1256, \quad \text{skąd} \quad \alpha = 7^\circ 13'.$$

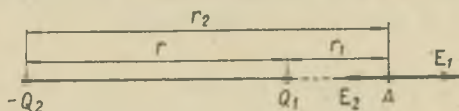
Wektor indukcji elektrycznej w punkcie 3 pochodzi od ładunków  $Q_1$  oraz  $Q_2$  i wektory te są co do wartości równe

$$D_{31} = D_{32} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q_1}{a^2} = 1,6 \cdot 10^9 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Wektor wypadkowy

$$D_3 = D_{31} \sqrt{2} = 2,2 \cdot 10^9 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$$

skierowany jest względem osi 32 pod kątem  $\alpha = 45^\circ$ .



Rys. 4.26.1

4.31. a) Natężenie pola elektrycznego w punkcie  $A$  (rys. 4.26.1) jest równe sumie natężeń pól przechodzących od ładunków  $Q_1$  oraz  $Q_2$  i jego wartość w poszczególnych układach wynosi:

w układzie SI

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_1^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{(r_1+r_2)^2} = 9 \cdot 10^9 \left( \frac{10}{3 \cdot 10^9} - \frac{10}{3 \cdot 10^9} \right) \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{s}} = 3 \cdot 10^4 \cdot 0,009 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{s}} = 270 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{s}};$$

w układzie ES CGS

$$E_A = \frac{Q_1}{r_1^2} - \frac{Q_2}{(r_1+r_2)^2} = \left( \frac{10}{400} - \frac{10}{625} \right) \text{ j. ES CGS} = 0,009 \text{ j. ES CGS natężenia pola elektrycznego.}$$

Zwrot natężenia pola elektrycznego w punkcie  $A$  taki, jak na rysunku.

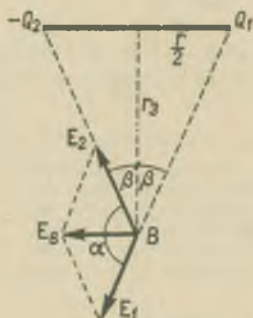


b) Natężenie pola elektrycznego w punkcie  $B$  (rys. 4.26.2) złożone jest z dwóch natężeń  $E_1$  oraz  $E_2$  równych co do bezwzględnych wartości, a o kierunkach takich jak na rysunku. Zatem  $E_B$  leży na linii równoległej do linii dipola o zwrocie od ładunku dodatniego do ujemnego i wartości

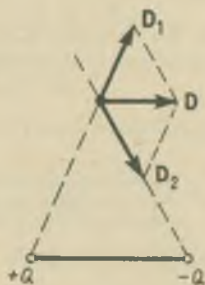
$$E_B = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1^2 \cos \alpha} = E_1 \sqrt{2(1 + \cos \alpha)},$$

ponieważ

$$|E_1| = |E_2|, \quad \text{bo} \quad |Q_1| = |Q_2|.$$



Rys. 4.26.2



Rys. 4.27

Z rysunku widać, że

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{1}{2}r}{r_3} = 0,25,$$

skąd  $\beta = 14^\circ 2'$ ; a więc  $\alpha = 180^\circ - 2\beta = 151^\circ 56'$ ,  
zatem

$$E_B = E_1 \sqrt{2(1 - \sin 61^\circ 56')} = E_1 \sqrt{0,2352} = 0,484 E_1.$$

Otrzymujemy zatem:

w układzie SI

$$E_B = 0,484 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q_1}{r^2 + 4r_3^2} = 1380 \frac{\text{N}}{\text{A}\cdot\text{s}};$$

w układzie ES CGS

$$E_B = 0,484 \frac{4Q_1}{r^2 + 4r_3^2} = 0,484 \cdot 0,094 \text{ j. ES CGS} = 0,046 \text{ j. ES CGS}.$$

4.32. Wektory indukcji elektrycznej (rys. 4.27) pochodzące od obu ładunków mają taką samą wartość. Ich wektor wypadkowy skierowany jest równoległe do  $d$

$$D_1 = D_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2 + \frac{d^2}{4}} = 0,318 \cdot 10^6 \frac{\text{A}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}.$$

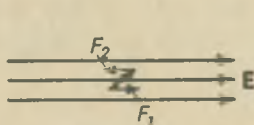
Wektor wypadkowy ma wartość

$$D = 2D_1 \cos \alpha = 2D_1 \frac{d}{\sqrt{4r^2 + d^2}} \cong 2D_1 \frac{d}{2r} = 0,318 \cdot 10^6 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}.$$

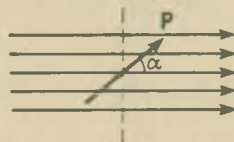
4.33. Wektory indukcji elektrycznej pochodzące od obu ładunków są równe co do wartości i wnoszą

$$D_1 = D_2 = \frac{Q}{5\pi d^2} = 0,127 \cdot 10^{12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}.$$

4.34. Na dipol (rys. 4.28) wywierane są dwie siły  $F_1$  oraz  $F_2$ , które na skutek małych rozmiarów dipola i małej niejednorodności pola elektrycznego w obszarze dipola można



Rys .4.28



Rys. 4.29

uważać za równoległe. Całkowita więc siła  $F = F_1 + F_2 = Q(E_1 + E_2)$ . Przechodząc do równania skalarnego otrzymujemy  $F = Q(E_1 - E_2)$ . Ale

$$E_1 - E_2 = \frac{\partial E}{\partial x} dx = \frac{\partial E}{\partial x} l \cos \alpha,$$

zatem

$$F = Q \frac{\partial E}{\partial x} l \cos \alpha = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha.$$

Zatem

$$F = 5 \text{ N}.$$

4.35. Siły wywierane na ładunki dipola (rys. 4.29) tworzą parę sił o momencie

$$M = QEd = QE l \sin \alpha = pE \sin \alpha.$$

W przypadku  $\alpha = 0$  moment sił  $M = 0$ . W przypadku  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $M = pE$  (maksimum).

W tym ostatnim przypadku uważamy energię dipola elektrycznego za równą zeru. Jeżeli odchylimy więc dipol do położenia określonego przez kąt  $\alpha$ , to musimy wykonać pracę przeciwko siłom pola elektrycznego, równą

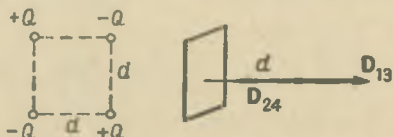
$$W = \int_{\pi/2}^{\alpha} M da = pE \int_{\pi/2}^{\alpha} \sin \alpha da = -pE \cos \alpha = -5 \text{ J}.$$

4.36. Mamy  $\text{grad}E_1 = kx_1$  oraz  $\text{grad}E_2 = kx_2$ . Pracę obliczamy z wzoru

$$W = \int_{x_1}^{x_2} p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha dx = pk \cos \alpha \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{pk \cos \alpha}{2} (x_2^2 - x_1^2) = \\ = \frac{p \cos \alpha}{2} (\text{grad}E_2 + \text{grad}E_1) \cdot (x_2 - x_1) = 0,55 \text{ J}.$$



Rys. 4.30



Rys. 4.31

4.37. Na podstawie rys. 4.30 widzimy, że wektor wypadkowy pochodzący od dalszego dipola  $D_{1d}$  ma wartość

$$D_{1d} = 2D_1 \cos \alpha = 2 \frac{4Q}{4\pi 15d^2} \frac{1}{\sqrt{15}} = 2,2 \cdot 10^{10} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}.$$

Podobnie, wektor wypadkowy pochodzący od dipola bliższego ma wartość

$$D_{2d} = 2 \frac{4Q}{4\pi 5d^2} \frac{1}{\sqrt{5}} = 11,2 \cdot 10^{10} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}.$$

Oba wektory są równoległe do  $d$ , ale o zwrotach przeciwnych. Wypadkowa ich wartość przedstawia szukany wektor dla kwadrupola i wynosi

$$D = D_{2d} - D_{1d} = 9 \cdot 10^{10} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}.$$

4.38. Na podstawie rysunku 4.31 wektory indukcji elektrycznej pochodzące od poszczególnych ładunków elektrycznych będą co do wartości równe sobie

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4.$$

Wektor wypadkowy wektorów  $D_1$  oraz  $D_3$ ,  $D_{13} = D_1 + D_3$ , pochodzący od ładunków dodatnich będzie leżał na osi centrum (punkt  $P$ ) i będzie skierowany od płaszczyzny kwadrupola. Wektor wypadkowy pochodzący od ładunków ujemnych  $D_{24} = D_2 + D_4$  będzie leżał na tejże samej osi, ale będzie skierowany do płaszczyzny kwadrupola. Oba te wektory wypadkowe są sobie równe, zatem wektor wypadkowy w dowolnym punkcie  $P$  będzie równy

$$D_P = 0.$$

4.39. Wartość wektora indukcji elektrycznej w punkcie  $P$  pochodząca od ładunków 2 i 4 (rys. 4.32) będzie wynosiła

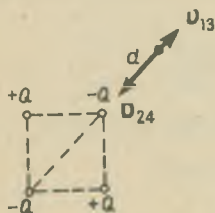
$$D_{24} = 2 \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{\frac{d^2}{4} + \left[ d + \frac{\sqrt{2}d}{2} \right]^2} \frac{d + \frac{\sqrt{2}d}{2}}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + \left( d + \frac{\sqrt{2}d}{2} \right)^2}} = 9,5 \cdot 10^{10} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

i jest skierowany do środka kwadrupola.

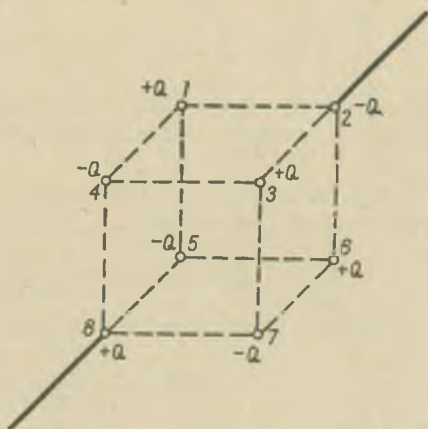
Wartość indukcji elektrycznej w punkcie  $P$  pochodząca od ładunków 1 i 3 będzie wynosiła

$$D_{13} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{d^2} + \frac{1}{(d + \sqrt{2}d)^2} \right] = 2,7 \cdot 10^{10} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

i jest równoległy do  $D_{24}$ , ale o przeciwnym zwrocie.



Rys. 4.32



Rys. 4.33

Całkowity wektor wypadkowy będzie miał ten sam kierunek, wartość

$$D = 6,8 \cdot 10^{10} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2},$$

a zwrot — ku środkowi kwadrupola.

4.40. Na podstawie (rys. 4.33) oraz zadania 4.36 wektor wypadkowy indukcji elektrycznej pochodzący od kwadrupola 1375 równa się zero. Wektor indukcji elektrycznej, pochodzący od ładunków  $Q_1$  oraz  $Q_8$  leży w tej przekątnej, skierowany do ładunku  $Q_8$  i wynosi

$$D_{18} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{4d^2 + 2\sqrt{3}d^2} - \frac{1}{d^2} \right] = -\frac{Q}{4\pi d^2 [4 + 2\sqrt{3}]} = 1,38 \cdot 10^{10} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}.$$

Wektor indukcji elektrycznej pochodzący od dipola 46 jest skierowany prostopadle do kierunku wektora  $D_{18}$  i wynosi

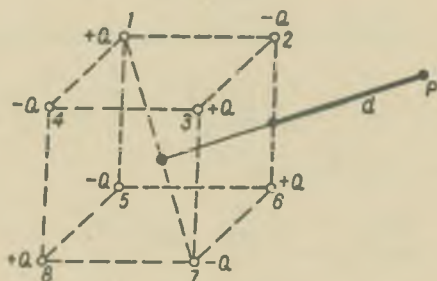
$$D_{46} = 2 \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{\frac{3}{2}d^2 + \left[ d + \frac{\sqrt{3}d}{2} \right]^2} \frac{\frac{\sqrt{3}d}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}d^2 + \left[ d + \frac{\sqrt{3}d}{2} \right]^2}} = 2,48 \cdot 10^{10} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}.$$

Wektor wypadkowy obu tych wektorów leży w płaszczyźnie P426, wynosi

$$D_p = \sqrt{D_{26}^2 + D_{48}^2} = 2,83 \cdot 10^{10} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

i jest skierowany w stosunku do linii P2 pod kątem

$$\text{tg} \alpha = \frac{D_{26}}{D_{28}} = 1,8000, \quad \text{skąd} \quad \alpha = 61^\circ.$$



Rys. 4.34

4.41. Z rysunku widać (rys. 4.34), że wartość wypadkowego wektora indukcji elektrycznej

$$D_{26} = 0,113 \cdot 10^{12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

jest skierowany równoległe do osi 26 (ku górze). Wektor wypadkowy indukcji elektrycznej pochodzący od dipola 48 wynosi

$$D_{48} = 2 \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{\frac{d^2}{4} + [d+d\sqrt{2}]^2} \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + (d+d\sqrt{2})^2}} = 0,011 \cdot 10^{12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}.$$

Jest on tak samo równoległy do krawędzi 26 oraz tak samo skierowany. Wektor wypadkowy wynosi więc

$$D'_p = D_{26} + D_{48} = 1,24 \cdot 10^{11} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}.$$

Wektor wypadkowy

$$D_{1375} = 2D_{15} = 2 \cdot 2 \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{\frac{3d^2}{4} + (d+d\sqrt{2})^2} \frac{\frac{d}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{3d^2}{4} + (d+d\sqrt{2})^2}} = 29,4 \cdot 10^{12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$



i jest skierowany przeciwnie do  $D_P'$ , zatem wektor wypadkowy

$$D_P = D_{1375} - D_P' = 295,76 \cdot 10^{11} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

i jest skierowany tak jak wektor  $D_{1375}$ .

4.42. Na podstawie zadania 4.36, oznaczwszy poszczególne kwadrupole przez I oraz II wiemy, że wypadkowe wektory  $D_I$  oraz  $D_{II}$  są równe zero. Wypadkowy wektor oktopola w każdym punkcie na tej osi będzie więc dla dowolnego oktopola zawsze

$$D_{\text{okt}} = 0.$$

4.43. Ze związku natężenia pola elektrycznego z gęstością powierzchniową przewodnika otrzymujemy

$$\sigma = \varepsilon_0 E = 2 \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = 1,76 \cdot 10^{-11} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}.$$

4.44. Na podstawie teorii wiemy, że

$$\frac{\text{tg} \alpha_1}{\text{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad \text{a więc} \quad \text{tg} \alpha_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \text{tg} \alpha_1.$$

Ponadto

$$\sin \alpha_1 = \frac{\text{tg} \alpha_1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{\varepsilon_2 \text{tg} \alpha_1}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \text{tg}^2 \alpha_1}} = \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}.$$

Szukany współczynnik załamania tego strumienia wynosi

$$n = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}{\varepsilon_2 \sqrt{2}} = 4,3.$$

4.45. Oznaczmy przez  $A$  rzut obu pól na płaszczyznę graniczną tych ośrodków to otrzymamy

$$A_1 = A \cos \alpha_1 \quad \text{oraz} \quad A_2 = A \cos \alpha_2 = A_1 \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}.$$

Ale

$$\text{tg} \alpha_2 = \text{tg} \alpha_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad \text{skąd} \quad \cos \alpha_2 = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \text{tg}^2 \alpha_1}},$$

zatem

$$A_2 = A_1 \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \varepsilon_2^2 \sin^2 \alpha_1}} = 0,071 \text{ m}^2.$$

4.46. Na podstawie teorii wiemy, że

$$\frac{\text{tg} \alpha_1}{\text{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad \text{zatem} \quad \text{tg} \alpha_2 = \text{tg} \alpha_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

skąd

$$\alpha_3 = 3^\circ 20'.$$

4.47. Gęstość ładunku elektrycznego w każdym punkcie pola elektrycznego  $P$  oznaczamy jako

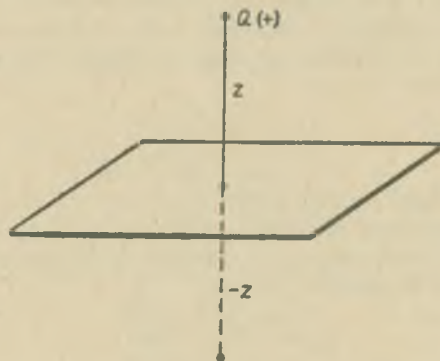
$$\rho_P = \lim \frac{\Delta Q}{\Delta V},$$

gdzie  $\Delta Q$  oznacza ładunek elektryczny znajdujący się w objętości kuli  $\Delta V$  otaczającej punkt  $P$ . Ale  $\Delta Q = \sigma \Delta S = \epsilon_0 E \Delta S$ , gdzie  $\Delta S$  oznacza powierzchnię powyższej kuli. Zatem u nas

$$\rho_P = \lim \frac{\epsilon_0 E}{\Delta r} = \epsilon_0 \lim \frac{E}{\Delta r} = \epsilon_0 \operatorname{div} E.$$

Ponieważ jednak  $E = -\frac{dV}{dx} = -\operatorname{grad} V$ , zatem

$$\rho_P = -\epsilon_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} V = -\epsilon_0 \nabla^2 V.$$



Rys. 4.35

4.48. W środku koła natężenie pola elektrycznego pochodzące od ładunku elektrycznego znajdującego się na jednostkowej długości łuku pręta  $\sigma$  będzie zawsze co do wartości takie samo, a obliczymy go z wzoru

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{r^2}.$$

Kierunek pola wypadkowego będzie wzdłuż linii 24.

Znajdźmy najpierw wypadkową ćwiartki koła w kierunku osi 24. Będzie ona wynosić

$$E_{21} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q/2}{r^2} \cos\alpha d\alpha = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

Podobnie  $E_{32} = E_{21}$ . Wypadkowe pole ma więc wartość

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

4.49. Na podstawie rysunku 4.35 widzimy, że płaszczyzna płyty  $xy$  dzieli całą przestrzeń na trzy części; punkty, dla których  $z > 0$ ,  $z = 0$  oraz  $z < 0$ .

Dla  $z > 0$ . Na podstawie twierdzenia Gaussa ( $\text{grad } V = -E$ ) wiemy, że dla dowolnej powierzchni obejmującej punkt, w którym znajduje się ładunek elektryczny  $Q$ , a powierzchnia ta leży w tej części przestrzeni mamy

$$\oint \text{grad } V dS = -\frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Jeżeli powierzchnia  $S$  nie będzie obejmowała tego punktu z ładunkiem elektrycznym, to całka ta będzie równała się zeru.

Dla każdego punktu przestrzeni  $z < 0$ , ponieważ nie ma tu żadnego ładunku elektrycznego, każda całka typu  $\oint \text{grad } V dS = 0$ , zatem  $V = 0$  w całej części tej przestrzeni.

Dla płaszczyzny  $xy$ , a więc dla  $z = 0$ , potencjał też musi znikać, gdy płaszczyzna ta nie ma ładunku elektrycznego. Jeżeli przyjmiemy pod płaszczyzną na osi prostopadłej do płaszczyzny i przechodzącej przez punkt z ładunkiem  $Q$ , taki sam ładunek, ale  $-Q$  w tej samej odległości od płaszczyzny w dół, to oznaczwszy odległości od ładunku  $Q$  przez  $r_1$ , a od ładunku  $-Q$  przez  $r_2$ , otrzymamy że potencjał pochodzący od tych dwu ładunków

$$U = Q \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

dla tej płaszczyzny równa się zeru, gdyż  $r_1 = r_2$ .

Wracając do pierwszego przypadku, możemy posłużyć się również tym wzorem na potencjał i otrzymamy, zatrzymując powyższe oznaczenia na wartość potencjału w dowolnym punkcie przestrzeni  $z > 0$

$$U_p = \frac{2 \cdot 10^6}{\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] \frac{V}{m}.$$

4.50. Na podstawie zadania 4.49 oraz rys. 4.36 naszą płaszczyznę oznaczamy jako płaszczyznę  $xy$ . Natężenie pola elektrycznego w punkcie  $P$  będzie pochodziło od ładunku  $Q$  oraz ładunku  $-Q$  i będzie miało kierunek prostopadły do płaszczyzny w tym punkcie.

Jego wartość, oznaczwszy przez  $r$  odległość tego punktu od ładunków  $Q$ , będzie wynosiła

$$E_0 = \frac{2Q}{\epsilon_0 r^2} \sin \alpha = \frac{2Q}{\epsilon_0 r^3} a = 16\pi \cdot 10^{14} \frac{V}{m}.$$

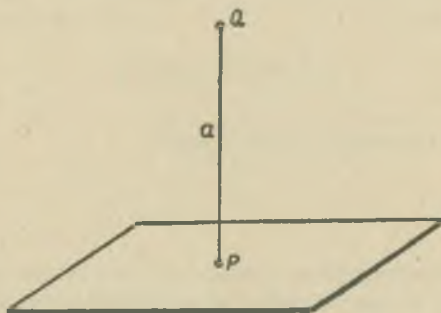
4.51. Wiemy, że  $\sigma = \epsilon_0 E$ . W zadaniu 4.46 obliczyliśmy wartość oraz kierunek  $E$ . Dla okolicy dowolnego punktu  $P$ , umieszczonego na płaszczyźnie metalicznej, otrzymujemy więc na gęstość powierzchniową ładunku elektrycznego wartość

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{2Qa}{\epsilon_0 r^3} = -\frac{2Qa}{r^3}.$$

4.52. Na zewnątrz kuli gęstość ładunków elektrycznych  $\rho = 0$ , zatem  $\Delta V = 0$ . Wyrażając ten laplasjan we współrzędnych kulistych otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0.$$

Ale potencjał musi mieć symetrię kulistą, zatem



Rys. 4.36

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0.$$

Równanie to upraszcza się więc do równania

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest  $V = \frac{A}{r} + B$ .

Dla  $r = \infty$   $V = Q$ , zatem z tego wynika, że  $B = 0$ , wynik nasz upraszcza się więc do wzoru

$$V = \frac{A}{r}.$$

W układzie SI stała ta wynosi

$$A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0},$$

gdzie  $Q$  jest ładunkiem tej kuli, a więc  $Q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ . Zatem  $A = \frac{r^3 \rho}{3\epsilon_0}$ . Otrzymujemy więc szukany wynik

$$V = \frac{r^3 \rho}{3\epsilon_0 R} = 7,5 \cdot 10^6 \text{ V}.$$

4.53. Na podstawie zadania 4.52 otrzymujemy

$$V_R = \frac{qr^3}{3\epsilon_0 R}$$

Ponieważ punkt, w którym szukamy potencjału, leży wewnątrz kuli, można uważać, że potencjał w tym punkcie jest wytworzony tylko przez częściowy ładunek kuli, a mianowicie przez ładunek znajdujący się w części kuli o promieniu  $r = R$ . W naszym przypadku otrzymujemy więc

$$V_R = \frac{qR^2}{3\epsilon_0} = 3,8 \cdot 10^8 \text{ V}.$$

4.54. Pojemność kuli należy obliczyć z wzoru

$$C = \frac{Q}{U},$$

gdzie  $U$  jest napięciem panującym na powierzchni kuli o promieniu  $r$  po wprowadzeniu na tę kulę ładunku  $Q$  z nieskończoności. Napięcie na powierzchni kuli uzyskane pod wpływem tego ładunku obliczamy dla każdego układu jednostek:

w układzie SI

$$U = \int_{\infty}^r \frac{-Fdr}{Q'} = - \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{r^2} dr = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r};$$

w układzie ES CGS

$$U = - \int_{\infty}^r \frac{QQ'}{r^2} dr = \frac{Q}{r}.$$

A więc pojemność kuli obliczona na podstawie powyższego wzoru oraz napięcia obliczonego powyżej wynosi:

w układzie SI  $C = 4\pi\epsilon_0 r$ ;

w układzie ES CGS  $C = r$ .

4.55. Obliczamy gęstość ładunku elektrycznego na powierzchni ziemi w różnych układach jednostek:

w układzie SI

$$\sigma = \epsilon_0 E = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} 1,2 \cdot 10^2 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{s}} = 0,106 \cdot 10^{-8} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2};$$

W układzie ES CGS

$$\sigma = \frac{E}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} 3,33 \cdot 10^{-3} \cdot 1,2 \text{ j. ES CGS} = 0,32 \cdot 10^{-3} \text{ j. ES CGS}.$$



Całkowity zatem ładunek znajdujący się na powierzchni ziemi wynosi:  
w układzie SI

$$Q = 4\pi r^2 \sigma = 5,14 \cdot 10^9 \cdot 0,106 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{s} = 5,45 \text{ A} \cdot \text{s} ;$$

w układzie ES CGS

$$Q = 4\pi r^2 \sigma = 5,14 \cdot 10^{13} \cdot 0,32 \cdot 10^{-8} \text{ j. ES CGS} = 1,64 \cdot 10^{10} \text{ j. ES CGS} \text{ ładunku .}$$

4.56. Na pracę otrzymujemy wzór

$$W = UQ = ExQ ,$$

zatem

$$x = \frac{W}{EQ} ,$$

a więc

w układzie SI

$$x = \frac{1}{10^6 \cdot 10^{-2}} \text{ m} = 10^{-4} \text{ m} ,$$

w układzie ES CGS

$$x = \frac{10^7}{\frac{10^4}{300} \cdot 3 \cdot 10^7} \text{ cm} = 10^{-3} \text{ cm} .$$

4.57. Wartość napięcia obliczamy z wzoru

$$U = \frac{W}{Q} ,$$

a więc otrzymujemy

w układzie SI

$$U = \frac{10^{-7}}{\frac{100}{3 \cdot 10^9}} \text{ V} = 2,73 \text{ V} ;$$

w układzie ES CGS

$$U = \frac{1}{110} \text{ j. ES CGS} = 9,1 \cdot 10^{-3} \text{ j. ES CGS} \text{ napięcia .}$$

4.58. Na podstawie rozwiązania zadania 4.54 pojemność naszej kuli wynosi:

w układzie SI

$$C = 4\pi\epsilon_0 r = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} = 0,7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}{\text{dżul}} = 0,7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V}} = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ F} ;$$

w układzie ES CGS

$$C = r = 6,37 \cdot 10^8 \text{ cm}.$$

Ładunek zaś, który należałoby doprowadzić do kuli ziemskiej w celu podniesienia jej potencjału o 1 wolt, wynosiłby:

w układzie SI

$$\Delta Q = C \Delta V = 0,7 \cdot 10^{-8} \cdot 1 \text{ A} \cdot \text{s} = 0,7 \cdot 10^{-8} \text{ A} \cdot \text{s};$$

w układzie ES CGS

$$\Delta Q = C \Delta V = 6,37 \cdot 10^8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-9} \text{ j. ES CGS} \text{ ładunku} = 2,12 \cdot 10^6 \text{ j. ES CGS} \text{ ładunku}.$$

4.59. a) Pojemność elektrostatyczna kuli wynosi

$$C = 4\pi\epsilon_0 R = 5 \cdot 10^{-11} \text{ F},$$

zatem potencjał kuli

$$V = \frac{Q}{C} = 10^5 \text{ V}.$$

b) Gęstość powierzchniowa ładunku elektrycznego tej kuli wynosi

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = 1,96 \cdot 10^{-4} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}.$$

c) Natężenie pola elektrycznego przy powierzchni kuli wynosi

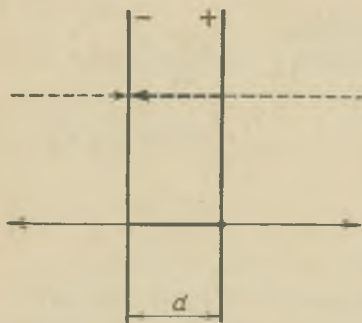
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 2,25 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

d) Natężenie pola elektrycznego w odległości  $r = 5 \text{ m}$  od środka kuli wynosi

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = 1,8 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

e) Potencjał elektryczny w tej odległości wynosi

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = 9 \cdot 10^3 \text{ V}.$$



Rys. 4.37

4.60. Natężenie pola elektrycznego pomiędzy okładkami kondensatora (rys. 4.37) równa się sumie pól  $E_1 + E_2$ , gdzie pole  $E_1$  pochodzi od ładunku  $Q_1$ , a pole  $E_2$  — od ładunku  $Q_2$ . Pola te są sobie równe i we wnętrzu kondensatora są zgodnie skierowane. Ponieważ całe pole wynosi  $V/d$ , zatem pole  $E_1 = V/2d$ , gdzie  $V$  oznacza napięcie elektryczne między okładkami kondensatora, a  $d$  — odległość płytek tego kondensatora.

Zatem siła wywierana przez pole pochodzące od ładunku  $Q_1$  na płytę zawierającą ładunek  $Q_2$

$$F_2 = \frac{V}{2d} Q_2, \text{ ale pojemność kondensatora } C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

oraz napięcie pomiędzy okładkami kondensatora

$$V = \frac{Q_1}{C} = \frac{Q_1 d}{\epsilon_0 S},$$

zatem

$$F_1 = \frac{Q_1 Q_2}{2\epsilon_0 S} = -0,36\pi \text{ N}.$$

Analogicznie, siła wywierana na drugą okładkę  $F_2 = -F_1$ . Okładki te wzajemnie się przyciągają.

4.61. Pojemność elektrostatyczna kuli wynosi

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R = 1,42 \cdot 10^{-9} \text{ F}.$$

Zatem potencjał tej kuli

$$V = \frac{Q}{C} = 3,5 \cdot 10^3 \text{ V}.$$

Natężenie pola elektrycznego w tej odległości wynosi

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2} = 63,3 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

4.62. Na podstawie kondensatora płaskiego (rys. 4.37) widzimy, że z płyty o ładunku  $+Q$  wychodzą linie pola elektrycznego o natężeniu  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  zarówno w jedną, jak i w drugą stronę (linie ciągłe). Do płyty o ładunku  $-Q$  linie pola elektrycznego wchodzą z obu stron, ich natężenie wynosi również  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  (linie przerywane). Widzimy więc, że na zewnątrz okładek linie te wzajemnie się znoszą, dając w wyniku natężenia w każdym punkcie  $E = 0$ .

4.63. Na podstawie zasady zachowania energii możemy przyjąć, że praca potrzebna do rozdzielania tych płytek obarczonych równymi ładunkami elektrycznymi o przeciwnych znakach, została zużyta na wytworzenie energii pola elektrycznego znajdującego się pomiędzy tymi płytkami. Zatem

$$Fd = \frac{1}{2} DESd, \quad \text{gdzie} \quad D = \epsilon\epsilon_0 E.$$

Zatem

$$F = \frac{1}{2} \epsilon\epsilon_0 E^2 S, \quad \text{ale} \quad E = \frac{U}{d},$$

zatem

$$F = \frac{1}{2} \epsilon\epsilon_0 \frac{U^2}{d^2} S,$$

skąd

$$U = d \sqrt{\frac{2F}{\epsilon\epsilon_0 S}} = 2 \cdot 10^3 \text{ V}.$$

4.64. Ładunek kulki wynosi

$$Q = CV = 4\pi\epsilon_0 rV = 3,3 \cdot 10^{-11} \text{ A} \cdot \text{s}.$$

Natężenie pola elektrycznego tuż przy powierzchni kulki

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{V}{r} = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Z zadania 4.60 wynika, że siła wywierana na naładowaną powierzchnię wynosi

$$F = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 S, \quad \text{u nas można przyjąć} \quad \epsilon = 1,$$

zatem ciśnienie wynikające z naładowania kulki wynosi

$$p = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{V^2}{r^2}.$$

Ciśnienie to, natury elektrycznej, zmniejsza ciśnienie molekularne kulki

$$p_m = \frac{2T}{r},$$

a więc w naszym wypadku szukana zmiana będzie wynosiła,

$$\Delta p = \frac{2T}{r} - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{V^2}{r^2} = 2 \text{ N/m}^2 - 0,4 \text{ N/m}^2 = 1,6 \text{ N/m}^2.$$

4.65. Na podstawie zadania 4.60

$$p_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{U^2}{r^2} = 1,11 \text{ N/m}^2.$$

4.66. Dla pola elektrostatycznego panującego we wnętrzu kondensatora równanie potencjału wyrazimy wzorem

$$\epsilon_0 \nabla^2 V = -\rho.$$

Ponieważ we wnętrzu nie istnieją ładunki elektryczne, zatem  $\rho = 0$  i otrzymujemy  $\nabla^2 V = \text{div} \cdot \text{grad} V = 0$ . Wyrażając to we współrzędnych cylindrycznych otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Ze względu na symetrię potencjału względem osi można przyjąć, że

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

A więc nasze równanie przyjmie postać

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = 0,$$

którego rozwiązaniem będzie

$$V = A \ln r + B,$$

a więc

$$V_1 = A \ln r_1 + B, \quad V_2 = A \ln r_2 + B,$$

zatem

$$V_1 - V_2 = V_1 = A \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

Szukany zaś potencjał

$$V_x = A \ln \frac{r}{r_2} = V_1 \frac{\ln \frac{r}{r_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}},$$

czyli

$$V_x = 500 \cdot 0,477 = 238,5 \text{ V}.$$

4.67. Pojemność kondensatora cylindrycznego wynosi, tak jak każdego innego kondensatora

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}, \quad \text{gdzie} \quad Q = 2\pi r_1 l \sigma$$

oraz

$$V_1 - V_2 = E_1 r_1 \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{oraz} \quad E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Podstawiając te dane do powyższego wzoru otrzymamy

$$C = \frac{2\pi l \epsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 0,61 \cdot 10^{-9} \text{ F}.$$

4.68. Na podstawie zadania 4.66 wiemy, że

$$V_x = (V_1 - V_2) \frac{\ln r - \ln r_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}},$$

zatem

$$E = -\frac{dV}{dr} = (V_1 - V_2) \frac{1}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} = 2500 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

4.69. a) Przy szeregowym łączeniu kondensatorów napięcie  $U$  podzielone zostało na  $n$  części składowych:  $U_1, U_2, \dots, U_n$ . Poszczególne napięcia panują na okładkach odpowiednich kondensatorów. Znajdujący się na każdym z nich ładunek wynosi w każdym przypadku  $Q$ . Ładunek uzyskany przez rozbrojenie takiej baterii kondensatorów jest taki sam, jaki uzyskaliśmy z rozbrojenia jednego kondensatora. Układ tych kon-



densatorów może więc służyć jako dzielnik napięcia (rys. 4.38.1). Otrzymujemy więc, że całkowite napięcie baterii (napięcie na końcowych okładkach) wynosi

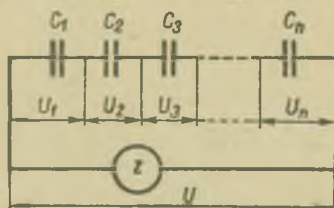
$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

oraz ładunki na okładkach są sobie równe

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n;$$

pojemność każdego z tych kondensatorów wynosi

$$C_1 = \frac{Q_1}{U_1}, \quad C_2 = \frac{Q_2}{U_2}, \quad C_3 = \frac{Q_3}{U_3}, \dots, \quad C_n = \frac{Q_n}{U_n}.$$



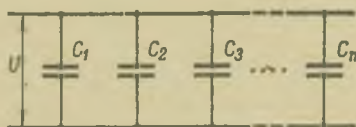
Rys. 4.38.1

Poszczególne wartości napięcia uzyskujemy z powyższego wzoru, podstawiamy do, ogólnego wzoru na  $U$  i otrzymujemy

$$U = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} + \dots + \frac{Q_n}{C_n},$$

Oznaczając ładunek przez  $Q$ , wprowadzamy pojęcie kondensatora zastępczego, to jest takiego kondensatora, który wstawiony do źródła napięcia zamiast powyższej baterii miałby na okładkach to samo napięcie co bateria oraz ten sam ładunek na okładce co kondensatory. Jego pojemność wynosiłaby więc  $C = \frac{Q}{U}$ . Podstawiając  $U = \frac{Q}{C}$  do powyższego wzoru i upraszczając obie strony przez  $Q$  otrzymujemy, że pojemność zastępcza takiego układu wynosi

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}.$$



Rys. 4.38.2

Łączenia tego używamy wtedy, gdy do jednego kondensatora nie można przyłożyć tak dużego napięcia, jakiego potrzebujemy.

b) Całkowity ładunek  $Q$  rozłożony został przy takim połączeniu baterii kondensatorów (rys. 4.38.2) na poszczególne kondensatory, tak że

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n.$$

W kondensatorze zastępczym powinno być takie samo napięcie  $U$ , jak na każdym kondensatorze tej baterii. A więc powinno być

$$U = U_1 = U_2 = U_3 = \dots = U_n.$$

Ponieważ w naszym przypadku zachodzi

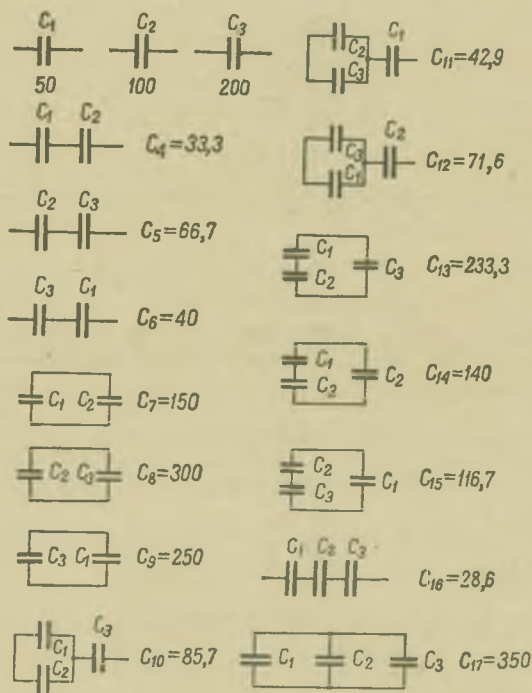
$$Q = CU \quad \text{oraz} \quad Q_i = C_i U,$$

zatem

$$CU = C_1 U + C_2 U + C_3 U + \dots + C_n U,$$

czyli ostatecznie

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n.$$



Rys. 4.39

4.70. W rozwiązaniu podane są schematy układów (rys. 4.39) oraz przy schematach wartości pojemności kondensatorów zastępczych, obliczone na podstawie wzorów uzyskanych w zadaniach poprzednich. Zadania tego nie rozwiązaliśmy w trzech używanych przez nas układach jednostek; wyniki podaliśmy w pF. Uzyskaliśmy więc 17 różnych pojemności.

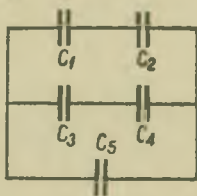
4.71. Pojemność w zadaniu 4.71 będziemy również liczyli tylko w pF. Pojemność zastępcza (rys. 4.40) układu kondensatorów  $C_1$  oraz  $C_2$  wynosi

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{3}{100} \frac{1}{\text{pF}},$$

zatem  $C' = 33,3$  pF.

Pojemność zastępcza układu kondensatorów  $C_3$  oraz  $C_4$  wynosi

$$\frac{1}{C''} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} = \frac{3}{200} \frac{1}{\text{pF}},$$



Rys. 4.40

zatem  $C'' = 66,7$  pF.

Całkowita pojemność zastępcza wynosi więc

$$C = C_5 + C' + C'' = 300 \text{ pF}.$$

4.72. Obliczamy ładunki kul przed ich połączeniem na podstawie wzoru  $Q = CU$ .

A więc:

w układzie SI

$$Q_1 = C_1 U_1 = 4\pi\epsilon_0 r_1 U_1 = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^3 \text{ A} \cdot \text{s} = 2,67 \cdot 10^{-9} \text{ A} \cdot \text{s}.$$

$$Q_2 = C_2 U_2 = 4\pi\epsilon_0 r_2 U_2 = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot 12 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^3 \text{ A} \cdot \text{s} = 1,33 \cdot 10^{-9} \text{ A} \cdot \text{s};$$

w układzie ES CGS

$$Q_1 = C_1 U_1 = r_1 U_1 = 3 \frac{1}{300} 8000 \text{ j. ES CGS} \text{ ładunku} = 80 \text{ j. ES CGS} \text{ ładunku},$$

$$Q_2 = C_2 U_2 = r_2 U_2 = 12 \frac{1}{300} 1000 \text{ j. ES CGS} \text{ ładunku} = 40 \text{ j. ES CGS} \text{ ładunku};$$

Po połączeniu obu kul drucikiem pojemność całego układu wynosi  $C = C_1 + C_2$  (wyjaśnić rysunkiem, dlaczego jest to łączenie równoległe); zatem:

w układzie SI

$$C = 4\pi\epsilon_0 (r_1 + r_2) = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \left( \frac{3}{100} + \frac{12}{100} \right) \text{ F} = 1,67 \cdot 10^{-11} \text{ F};$$

w układzie ES CGS

$$C = r_1 + r_2 = 15 \text{ cm};$$

potencjał całego układu po połączeniu obu kul wyniesie więc

$$U = \frac{Q}{C};$$

w układzie SI

$$U = \frac{Q_1 + Q_2}{C} = \frac{4 \cdot 10^{-8}}{1,67 \cdot 10^{-11}} \text{ V} = 2,4 \cdot 10^3 \text{ V};$$

w układzie ES CGS

$$U = \frac{Q_1 + Q_2}{C} = \frac{120}{15} \text{ j. ES CGS} = 8 \text{ j. ES CGS napięcia.}$$

Ładunek na pierwszej kuli po wyrównaniu się potencjałów wynosi więc  $Q' = C_1 U$ :

w układzie SI

$$Q'_1 = 4\pi\epsilon_0 r_1 U = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot \frac{3}{100} \cdot 2,4 \cdot 10^3 \text{ A} \cdot \text{s} = 0,8 \cdot 10^{-8} \text{ A} \cdot \text{s};$$

w układzie ES CGS

$$Q'_1 = r_1 U = 3 \cdot 8 \text{ j. ES CGS ładunku} = 24 \text{ j. ES CGS ładunku.}$$

Tak więc ładunek, który przepłynął przez drucik, jest równy ładunkowi, który odpłynął z kuli pierwszej, a więc

$$\Delta Q = Q_1 - Q'_1,$$

zatem wyniesie on:

w układzie SI

$$Q = (2,67 - 0,8) \cdot 10^{-8} \text{ A} \cdot \text{s} = 1,87 \cdot 10^{-8} \text{ A} \cdot \text{s};$$

w układzie ES CGS

$$Q = (80 - 24) \text{ j. ES CGS} = 56 \text{ j. ES CGS ładunku.}$$

**4.73.** Szukaną pojemność kondensatora obliczymy z wzoru

$$C = \frac{Q}{U};$$

w układzie SI

$$C = \frac{10^{-6} \text{ A} \cdot \text{s}}{110 \text{ V}} = 9,1 \cdot 10^{-6} \text{ F};$$

w układzie ES CGS

$$C = \frac{3 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} \text{ j. ES CGS ładunku}}{110 \cdot \frac{1}{300} \text{ j. ES CGS napięcia}} = 8,2 \cdot 10^8 \text{ cm.}$$

**4.74.** W rachubę wchodzi kondensator płaski, którego pojemność wynosi

$$C = \frac{\epsilon Q}{U} = \frac{\epsilon \sigma S}{Ed};$$

w układzie SI

$$C = \varepsilon \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{S}{d};$$

w układzie ES CGS

$$C = \varepsilon \frac{\sigma S}{4\pi \sigma d} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{S}{d}.$$

Zatem potrzebna powierzchnia cynfolii wynosi

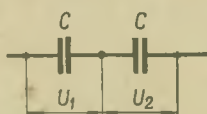
$$S = \frac{Cd}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-5}}{1,8 \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}} \text{ m}^2 = 2,51 \text{ m}^2,$$

$$S = \frac{4\pi d C}{\varepsilon} = \frac{12,57 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 9 \cdot 10^5}{1,8} \text{ cm}^2 = 2,51 \cdot 10^4 \text{ cm}^2.$$

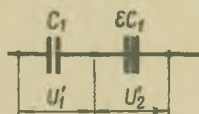
4.75. Na podstawie poprzedniego zadania otrzymujemy następującą wartość grubości papieru parafinowanego:

$$d = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{C} = \frac{1,8 \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \cdot 5}{5 \cdot 10^{-4}} \text{ m} = 0,16 \cdot 10^{-3} \text{ m},$$

$$d = \frac{\varepsilon S}{4\pi C} = \frac{1,8 \cdot 5 \cdot 10^4}{12,57 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 10^5} \text{ cm} = 0,16 \cdot 10^{-3} \text{ cm}.$$



Rys. 4.41.1



Rys. 4.41.2

4.76. Pojemności obu kondensatorów przed napełnieniem oliwą były sobie równe. Całkowite napięcie przyłożone z zewnątrz wynosiło (rys. 4.41.1)

$$U = U_1 + U_2, \quad \text{lecz} \quad U_1 = U_2 = \frac{Q}{C_1} = \frac{Q}{C_2},$$

skąd

$$U = 2U_1 = 2U_2.$$

W układzie SI

$$\frac{U}{2} = 50 \text{ V};$$

w układzie ES CGS

$$\frac{U}{2} = \frac{50}{300} \text{ j. ES CGS} = 0,167 \text{ j. ES CGS napięcia.}$$

Po napełnieniu oliwą np. drugiego kondensatora (rys. 4.41.2) rozkład napięć na okładkach kondensatorów ulegnie zmianie i napięcie ogólne wyniesie

$$U = U'_1 + U'_2.$$

Oznaczając przez  $Q'$  ładunek na kondensatorze pierwszym otrzymujemy

$$U'_1 = \frac{Q'}{C_1} \quad \text{oraz} \quad U'_2 = \frac{Q'}{\epsilon C_1} = \frac{U'_1}{\epsilon},$$

zatem

$$U = U'_1 \left( 1 + \frac{1}{\epsilon} \right), \quad \text{skąd} \quad U'_1 = U \frac{\epsilon}{1 + \epsilon}.$$

Zmiana potencjału drucika łączącego oba kondensatory wynosi więc

$$\Delta U = U'_1 - U_1 = U \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} - \frac{U}{2} = U \frac{\epsilon - 1}{2(\epsilon + 1)} = 0,143 U.$$

A więc wartość  $\Delta U$  wynosi:

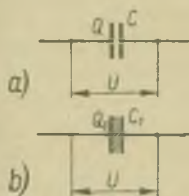
w układzie SI

$$\Delta U = 0,143 \cdot 50 \text{ V} = 7,15 \text{ V};$$

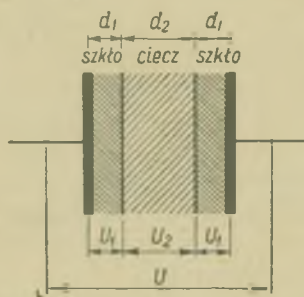
w układzie ES CGS

$$\Delta U = 0,143 \cdot 0,167 \text{ j. ES CGS} = 0,024 \text{ j. ES CGS}.$$

4.77. Pojemność kondensatora przed napełnieniem (rys. 4.42a) wynosi  $C$ , a ładunek znajdujący się na jego okładce  $Q = CU$ . Po napełnieniu zaś (rys. 4.42b) pojemność



Rys. 4.42



Rys. 4.43

jego wynosi  $C_1$ , a ładunek znajdujący się na jego okładce  $Q_1 = C_1 U = \epsilon C U$ . Ładunek więc, który dopłynął do każdej okładki kondensatora, wynosi

$$\Delta Q = Q_1 - Q = U(C_1 - C) = UC(\epsilon - 1).$$

Zatem:

w układzie SI

$$\Delta Q = U \epsilon_0 \frac{S}{d} (\epsilon - 1) = 600 \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{6 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3}} 2,1 \text{ A} \cdot \text{s} = 0,33 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot \text{s};$$



w układzie ES CGS

$$\Delta Q = U \frac{1}{4\pi} \frac{S}{d} (\varepsilon - 1) = \frac{600}{300} \frac{1}{4\pi} \frac{600}{2 \cdot 10^{-1}} 2,1 \text{ j. ES CGS} = 1 \cdot 10^6 \text{ j. ES CGS ładunku.}$$

4.78. Przyłożone do kondensatora napięcie  $U$  dzieli się na trzy części: napięcie w cieczy  $U_2$  oraz napięcie na obu okładkach szklanych  $U_1$  (rys. 4.43). Zatem

$$U = 2U_1 + U_2. \quad (4.78.1)$$

Wskutek znikomego przewodzenia szkła i cieczy przez szkło oraz przez ciecz płynie taki sam bardzo mały prąd elektryczny  $I$ , którego wartość obliczymy z wzoru

$$I = \frac{U_1}{r_1} = \frac{U_2}{r_2}, \quad (4.78.2)$$

gdzie

$$r_1 = \varrho_1 \frac{d_1}{S} \quad \text{oraz} \quad r_2 = \varrho_2 \frac{d_2}{S};$$

$S$  oznacza powierzchnię płyt, a  $\varrho_1$  oraz  $\varrho_2$  — wartości oporu właściwego odpowiednio szkła i cieczy. Z wzoru (4.78.2) otrzymujemy

$$U_1 = U_2 \frac{r_1}{r_2} = U_2 \frac{\varrho_1 d_1}{\varrho_2 d_2}.$$

Z wzoru (4.78.1) i (4.78.2) otrzymujemy

$$U = 2U_2 \frac{\varrho_1 d_1}{\varrho_2 d_2} + U_2.$$

stąd

$$U_2 = U_2 \frac{\varrho_2 d_2}{\varrho_1 d_1 + \varrho_2 d_2} = 1,6 \cdot 10^{-3} U.$$

A więc napięcie  $U_2$  wynosi:

w układzie SI

$$U_2 = 1,6 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ V} = 3,2 \text{ V};$$

w układzie ES CGS

$$U_2 = 1,6 \cdot 10^{-3} \frac{2 \cdot 10^3}{300} \text{ j. ES CGS} = 1,07 \cdot 10^{-2} \text{ j. ES CGS.}$$

Natężenie pola elektrycznego  $E_2$  wynosi:

w układzie SI

$$E_2 = \frac{U_2}{d_2} = \frac{3,2}{8 \cdot 10^{-3}} \frac{\text{V}}{\text{m}} = 0,4 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}};$$

w układzie ES CGS

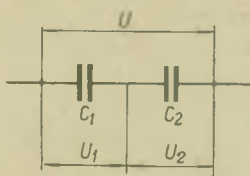
$$E_2 = \frac{U_2}{d_2} = \frac{1,07 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10^{-1}} \text{ j. ES CGS} = 0,013 \text{ j. ES CGS.}$$

4.79. Pojemność całego układu (rys. 4.44) wynosi

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad \text{skąd} \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Ładunek na okładkach każdego z kondensatorów jest taki sam, jak na okładkach kondensatora zastępczego, a więc

$$Q_1 = Q_2 = Q = CU = U \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$



Rys. 4.44

Napięcia na okładkach poszczególnych kondensatorów wynoszą

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = U \frac{C_2}{C_1 + C_2} = 0,3U,$$

$$U_2 = U - U_1.$$

A więc ładunek  $Q_1$  oraz napięcia  $U_1$  i  $U_2$  wynoszą:  
w układzie SI

$$Q_1 = Q_2 = Q = UC_1 \frac{C_2}{C_1 + C_2} = 0,3UC_1 = 0,3 \cdot 120 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ A} \cdot \text{s} = 33 \cdot 10^{-6} \text{ A} \cdot \text{s},$$

$$U_1 = 0,3U = 0,3 \cdot 220 \text{ V} = 66 \text{ V},$$

$$U_2 = (220 - 66) \text{ V} = 154 \text{ V};$$

w układzie ES CGS

$$Q_1 = Q_2 = Q = 0,3UC_1 = 0,3 \cdot \frac{220}{300} \cdot 0,5 \cdot 9 \cdot 10^9 \text{ j. ES CGS} = 99 \cdot 10^9 \text{ j. ES CGS},$$

$$U_1 = 0,3U = 0,3 \cdot \frac{220}{300} \text{ j. ES CGS} = 0,22 \text{ j. ES CGS} \text{ napięcia},$$

$$U_2 = (\frac{220}{300} - \frac{66}{300}) \text{ j. ES CGS} = 0,513 \text{ j. ES CGS} \text{ napięcia}.$$

4.80. Oznaczmy minimum pojemności trimera przez  $C_1$  oraz przez  $C_2$  — pojemność maksymalną. Odstępły płytek zmieniają się w granicach od  $d_1$  do  $d_2$ . Odległość  $d_1$  obliczamy następująco:

w układzie SI

$$d_1 = \epsilon_0 \frac{S}{C_1} = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{10^{-3}}{5 \cdot 10^{-12}} \text{ m} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ m};$$

w układzie ES CGS

$$d_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{S}{C_1} = \frac{10}{4 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 0,9} \text{ cm} = 0,18 \text{ cm}.$$

Analogicznie obliczamy  $d_2$ :

w układzie SI

$$d_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{C_1} = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{10^{-3}}{40 \cdot 10^{-12}} \text{ m} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ m};$$

w układzie ES CGS

$$d_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{S}{C_2} = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ cm};$$

4.81. Energia minimalna trimera wynosi

$$E_1 = \frac{1}{2} C_1 U^2,$$

maksymalna zaś

$$E_2 = \frac{1}{2} C_2 U^2.$$

Rozwiązanie w poszczególnych układach:

w układzie SI

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-12} (220)^2 \text{ dżuli} = 48,4 \cdot 10^{-8} \text{ J},$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 10^{-12} (220)^2 \text{ dżuli} = 48,4 \cdot 10^{-7} \text{ J};$$

w układzie ES CGS

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 0,9 \left(\frac{2}{3} \frac{0}{0}\right)^2 \text{ ergów} = 4,84 \text{ ergów},$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 0,9 \left(\frac{2}{3} \frac{0}{0}\right)^2 \text{ ergów} = 48,4 \text{ ergów}.$$

4.82. a) Natężenie pola pomiędzy okładkami kondensatora wynosi:

w układzie SI

$$E = \frac{U}{d} = \frac{300}{5 \cdot 10^{-3}} \frac{\text{V}}{\text{m}} = 6 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}};$$

w układzie ES CGS

$$E = \frac{U}{d} = \frac{300}{300 \cdot 0,5} \text{ j. ES CGS} = 2 \text{ j. ES CGS natężenia pola}.$$

b) Energia przypadająca na jednostkę objętości kondensatora wynosi:

w układzie SI

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} 36 \cdot 10^9 \frac{\text{J}}{\text{m}^3} = 1,6 \cdot 10^{-2} \frac{\text{J}}{\text{m}^3};$$

w układzie ES CGS

$$U = \frac{1}{8\pi} \cdot 4 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} = 0,16 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}.$$

c) Siła działająca na kropelkę oliwy, na której znajduje się ładunek  $Q$ , między okładkami kondensatora wynosi

$$F = EQ.$$

W układzie SI

$$F = 6 \cdot 10^4 \cdot 32 \cdot 10^{-19} \text{ N} = 1,92 \cdot 10^{-13} \text{ N};$$

w układzie ES CGS

$$F = 2 \cdot 32 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^9 \text{ dyn} = 1,92 \cdot 10^{-8} \text{ dyn}.$$

4.83. a) Energia zgromadzona w napełnionym olejem kondensatorze wynosi

$$U = \frac{1}{2} CU^2,$$

a więc:

w układzie SI

$$U = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 10^{-12} \cdot 10^6 \text{ dżuli} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ J};$$

w układzie ES CGS

$$U = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 0,9 \frac{10^9}{3 \cdot 10^9} \text{ ergów} = 2500 \text{ ergów}.$$

Napięcie między okładkami kondensatora przed wypłynięciem oliwy wynosiło  $U$ , po wypłynięciu zaś wynosiło  $U_1 = \varepsilon U$ , czyli:

w układzie SI

$$U_1 = 4,8 \cdot 1000 \text{ V} = 4800 \text{ V};$$

w układzie ES CGS

$$U_1 = 4,8 \cdot \frac{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{3 \cdot 0 \cdot 0} \text{ j. ES CGS} = 16 \text{ j. ES CGS napięcia};$$

b) Zatem zmiana napięcia wskutek wypłynięcia oliwy wyniosła

$$U = U_1 - U = U(\varepsilon - 1) = 3,8U.$$

W układzie SI

$$U = 3800 \text{ V};$$

w układzie ES CGS

$$U = \frac{3 \cdot 8 \cdot 0 \cdot 0}{3 \cdot 0 \cdot 0} \text{ j. ES CGS} = 12,67 \text{ j. ES CGS napięcia}.$$

c) Ponieważ napięcie przebicia wynosi 6000 V, napięcie zaś po wypłynięciu oliwy wzrosło w kondensatorze tylko do 4800 V, kondensator ten nie zostanie uszkodzony przez przebicie.

4.84. a) Energia kondensatora nagromadzona w nim po naładowaniu wynosi

$$U_p = \frac{1}{2} CU^2,$$

w układzie SI

$$U_p = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 10^{-6} (220)^2 \text{ dżuli} = 0,3872 \text{ J};$$

w układzie ES CGS

$$U_p = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 9 \cdot 10^5 \left(\frac{2 \cdot 2 \cdot 0}{3 \cdot 0 \cdot 0}\right)^2 \text{ ergów} = 3,872 \cdot 10^6 \text{ ergów}.$$

b) Ładunek kondensatora po naładowaniu wynosi

$$Q = CU,$$

w układzie SI

$$Q = 16 \cdot 10^{-6} \cdot 220 \text{ A} \cdot \text{s} = 3,52 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot \text{s};$$

w układzie ES CGS

$$Q = 16 \cdot 9 \cdot 10^5 \frac{2}{3} \frac{2}{0} \frac{0}{0} \text{ j. ES CGS} = 1,056 \cdot 10^9 \text{ j. ES CGS}.$$

4.85. Do naładowania kondensatora w postaci kuli należy zużyć tyle pracy, ile ten kondensator zgromadził energii po całkowitym jego naładowaniu (wynika to z zasady zachowania energii).

Pojemność kondensatora kulistego możemy obliczyć na podstawie wzoru: w układzie SI

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1};$$

w układzie ES CGS

$$C = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1},$$

gdzie  $R_1$  i  $R_2$  oznaczają promienie okładek kulistych kondensatora ( $R_1 < R_2$ ). U nas  $R_2 = \infty$ , a więc na pojemność kuli otrzymujemy wzory:

w układzie SI  $C = 4\pi\epsilon_0 R_1;$

w układzie ES CGS  $C = R_1.$

A więc szukana wartość pracy  $W = U_p = \frac{1}{2} CU^2$  wynosi:

w układzie SI

$$W = \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 R_1 U^2 = \frac{1}{2} 4\pi \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} 0,1 (3 \cdot 10^4)^2 \text{ dżuli} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ J};$$

w układzie ES CGS

$$W = \frac{1}{2} R_1 U^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \left( \frac{30000}{300} \right)^2 \text{ ergów} = 0,5 \cdot 10^6 \text{ ergów}.$$

4.86. Aby naładować kulę, należy wykonać tyle pracy, ile wynosi energia elektryczna kuli po jej naładowaniu, więc

$$W = U_p = \frac{1}{2} CU^2,$$

lecz

$$U = \frac{Q}{C},$$

zatem podstawiając tę wartość do wzoru otrzymujemy

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C},$$

gdzie  $C$  oznacza pojemność kondensatora kulistego; wzory na obliczenie tej pojemności w różnych układach podaliśmy w zadaniu 4.85; otrzymujemy więc:

w układzie SI

$$W = \frac{1}{2} \frac{(10^{-6})^2}{4\pi \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} 10^{-3}} \text{ dżuli} = 0,45 \text{ J};$$

w układzie ES CGS

$$W = \frac{1}{2} \frac{(10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^9)^2}{1} \text{ ergów} = 4,5 \cdot 10^8 \text{ ergów}.$$

Potencjał panujący na powierzchni tej kuli po jej naładowaniu wynosi

$$U = \frac{Q}{C}.$$

W układzie SI

$$U = \frac{10^{-6}}{4\pi \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} 10^{-3}} \text{ V} = 9 \cdot 10^5 \text{ V};$$

w układzie ES CGS

$$U = \frac{10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^9}{1} \text{ j. ES CGS} = 3000 \text{ j. ES CGS napięcia}.$$

Natężenie pola elektrostatycznego panujące tuż przy powierzchni obliczamy znając gęstość powierzchniową ładunków elektrycznych znajdujących się na jej powierzchni, a więc:

w układzie SI

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\frac{Q}{4\pi R^2}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = 9 \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{s}};$$

w układzie ES CGS

$$E = 4\pi\sigma = 4\pi \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{Q}{R^2} = \frac{10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^9}{1} \text{ j. ES CGS} = 3 \cdot 10^9 \text{ j. ES CGS natężenia pola}.$$

4.87. Napięcie na obu okładkach kondensatora (rys. 4.45) rozdzieliło się na napięcie  $U_1$  oraz  $U_2$ , tak że,

$$U = U_1 + U_2.$$

Przez cały układ dzięki przewodności płynie minimalny prąd, którego natężenie możemy obliczyć z prawa Ohma

$$I = \frac{U_1}{r_1} = \frac{U_2}{r_2},$$

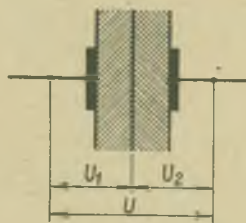


gdzie  $r_1$  oraz  $r_2$  oznaczają opory płytek. Zatem

$$U_2 = U_1 \frac{r_2}{r_1} = U_1 \frac{\frac{1}{\gamma_2} \frac{d_2}{S}}{\frac{1}{\gamma_1} \frac{d_1}{S}} = U_1 \frac{\gamma_1 d_2}{\gamma_2 d_1},$$

a więc

$$U = U_1 \frac{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1}{\gamma_2 d_1}$$



Rys. 4.45

oraz

$$U_1 = U \frac{\gamma_2 d_1}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1}$$

W układzie SI

$$U_1 = 1000 \frac{10^{-3} \cdot 10^{-10} (10^{-2})^{-1}}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-12} (10^{-2})^{-1} + 1 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-10} (10^{-2})^{-1}} \text{ V} = 1000 \frac{100}{104} \text{ V} = 961,5 \text{ V},$$

$$U_2 = U - U_1 = 38,5 \text{ V};$$

w układzie ES CGS

$$U_1 = \frac{1000}{300} \frac{0,1 \frac{10^{-10}}{1,11 \cdot 10^{-12}}}{0,4 \frac{10^{-12}}{1,11 \cdot 10^{-12}} + 0,1 \frac{10^{-12}}{1,11 \cdot 10^{-12}}} \text{ j. ES CGS} = 3,2 \text{ j. ES CGS napięcia},$$

$$U_2 = \left( \frac{1,0}{3,0} - 3,2 \right) \text{ j. ES CGS} = 0,1 \text{ j. ES CGS napięcia}.$$

Natężenia pól elektrycznych na obu płytkach wynoszą:

w układzie SI

$$E_1 = \frac{961}{10^{-3}} \frac{\text{m}}{\text{V}} = 9,62 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}};$$

$$E_2 = 0,94 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}};$$

w układzie ES CGS

$$E_1 = \frac{3,2}{0,1} \text{ j. ES CGS} = 32 \text{ j. ES CGS natężenia pola ,}$$

$$E_2 = \frac{0,1}{0,4} \text{ j. ES CGS} = 0,25 \text{ j. ES CGS natężenia pola .}$$

4.88. Natężenie pola elektrycznego w odległości  $x$  od środka kuli wynosi

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2}.$$

Objętość w tej odległości warstwy kuli o grubości  $dx$  wynosi

$$dV = 4\pi x^2 dx.$$

Energia elektryczna zawarta w kuli o promieniu  $r$  wynosi więc

$$E_r = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^r E^2 dV = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \int \frac{dx}{x^2}.$$

Podobnie energia całkowita wynosi

$$E_c = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \int \frac{dx}{x^2}.$$

Stosunek ich wynosi więc

$$\frac{E_k}{E_c} = \frac{\int_R^r \frac{dx}{x^2}}{\int_R^\infty \frac{dx}{x^2}} = 1 - \frac{R}{r} = 0,99.$$

4.89. Gęstość energii pola elektrycznego w próżni oraz dielektryka można wyrazić wzorami

$$U_{e0} = \frac{1}{2} D_0 E_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2, \quad U_e = \frac{DE}{2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2}.$$

Zmiana energii elektrycznej będzie więc wynosiła

$$\Delta U_e = \frac{1}{2} \int (ED - E_0 D_0) dV,$$

ale

$$ED - E_0 D_0 = E(D - D_0) + (E - E_0) D_0.$$

Ponadto, pole  $D$  jest bezwirowe oraz pola  $E$  i  $D$  znikają proporcjonalnie do  $1/r^2$ , podczas gdy potencjał zanika proporcjonalnie do  $1/r$ .

Na podstawie twierdzenia Gaussa otrzymujemy więc

$$\oint_V (D - D_0) dS = - \int_V E(D - D_0) d\tau + \int_V \text{div}(D - D_0) d\tau,$$

gdzie objętość kuli  $\tau$  jest bardzo duża. Na podstawie powyższych uwag, całka po lewej stronie równa się zeru oraz  $\text{div}(D - D_0) = 0$ , otrzymujemy więc

$$\int_{\tau} E(D - D_0) d\tau = 0.$$

Analogicznie otrzymujemy

$$\int_{\tau} E_0(D - D_0) d\tau = 0.$$

W naszym przypadku otrzymujemy więc

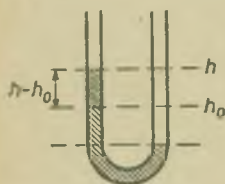
$$\begin{aligned} \Delta U_e &= \frac{1}{2} \int_{\tau} D_0(E - E_0) d\tau = \frac{1}{2} \left[ \int_{\tau} D_0(E - E_0) d\tau + \int_{\tau} E_0(D - D_0) d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\tau} (ED_0 - E_0 D) d\tau = -\frac{1}{2} \epsilon_0(\epsilon - 1) \int_{\tau} EE_0 d. \end{aligned}$$

W naszych warunkach można przyjąć, że  $E = E_0$ , a więc stałe, otrzymujemy więc w przybliżeniu

$$\Delta U_e = -\frac{1}{2} \epsilon_0(\epsilon - 1) E_0^2 V = -6,1 \cdot 10^{-18} \text{ J}.$$

4.90. Jeżeli ciecz wzniosła się na wysokość  $h - h_0$  (rys. 4.46), to uzyskała wskutek wykonanej pracy dodatkową energię potencjalną

$$mg(h - h_0) = \rho Vg(h - h_0) = \rho Sg(h - h_0)^2.$$



Rys. 4.46

Całkowita zmiana energii składa się ze zmiany energii pola elektrycznego i zmiany energii mechanicznej. Na podstawie zadania 4.89 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Delta U &= -\frac{1}{2} \epsilon_0(\epsilon - 1) \int E_0^2 d\tau + \rho g S(h - h_0)^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon_0(\epsilon - 1) E_0^2 S \int_0^{h-h_0} dh + \rho g S(h - h_0)^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon_0(\epsilon - 1) E_0^2 S(h - h_0) + \rho g S(h - h_0)^2. \end{aligned}$$

Warunkiem ustania wznoszenia się cieczy, a więc warunkiem równowagi jest, by zmiana energii  $\Delta U$  osiągnęła minimum, a więc aby

$$\frac{d(\Delta U)}{dh} = 0 = -\frac{1}{2} \epsilon_0(\epsilon - 1) E_0^2 S + \rho g S 2(h - h_0),$$

skąd

$$2(h - h_0) = H = \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1) E_0^2}{2\rho g} = 0,075 \text{ m}.$$

4.91. Na podstawie zadania 4.90 otrzymujemy, że

$$E_0 = \sqrt{\frac{2h\rho g}{\epsilon_0(\epsilon - 1)}} = 3,2 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

4.92. Zmiana napięcia na okładkach kondensatora w zależności od ładunku, który odplynął, wynosi

$$dU = -\frac{1}{C} dQ = -\frac{U}{RC} dt,$$

ponieważ

$$Q = It = \frac{U}{R} t.$$

Zatem

$$\frac{dU}{U} = -\frac{1}{RC} dt.$$

Po scałkowaniu otrzymujemy

$$\ln U = -\frac{1}{RC} t + \text{const}, \quad \text{stad} \quad U = \text{const} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Przyjmując, że w chwili  $t = 0$  napięcie na okładkach kondensatora wynosi  $U_0$ , otrzymujemy

$$U = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Obliczenia w różnych układach dają następujące wyniki:

w układzie SI

$$I = 1000 e^{-\frac{t}{10^{+6} \cdot 10^{-6}}} = 1000 e^{-t}, \quad e^t = 1000,$$

skąd

$$t = \frac{3}{\log e} \text{ s} = 1,3 \text{ s};$$

w układzie ES CGS

$$\frac{1}{300} = \frac{1000}{300} e^{\frac{t}{1 \cdot 9 \cdot 10^5 \cdot 1,11 \cdot 10^{-12} \cdot 10^6}},$$

$$I = 1000 e^{-t}, \quad \text{skąd} \quad t = \frac{3}{\log e} = 1,3 \text{ s}.$$

4.93. Natężenie płynącego prądu w chwili  $t = 0$  wynosi

$$I_0 = \frac{U_0}{R}.$$

w układzie SI

$$I_0 = \frac{220}{50} \text{ A} = 4,4 \text{ A};$$

w układzie ES CGS

$$I_0 = \frac{\frac{220}{300}}{50 \cdot 1,11 \cdot 10^{-12}} \text{ j. ES CGS} = 13,2 \cdot 10^9 \text{ j. ES CGS}.$$

a) Jeżeli kondensator o pojemności  $C$  oraz początkowym napięciu na jego okładkach  $U_0$  rozładujemy w ciągu czasu  $t$  poprzez opór  $R$ , to napięcie na jego okładkach po tym czasie wyniesie (por. zad. 4.92)

$$U = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Zatem z tego wzoru można obliczyć szukany czas

$$\frac{U}{U_0} = e^{-\frac{t}{RC}}, \quad \text{zatem} \quad \frac{t}{RC} \log e = \log \frac{U_0}{U},$$

skąd

$$t = \frac{RC \log \frac{U_0}{U}}{\log e} = \frac{RC \log \frac{U_0}{10^{-3}U_0}}{\log e} = \frac{3RC}{\log e} = 6,91RC.$$

W układzie SI

$$t = 6,91 \cdot 50 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ s};$$

w układzie ES CGS

$$t = 6,91 \cdot 50 \cdot 1,11 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 9 \cdot 10^9 \text{ s} = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

$$4.94. \quad \rho = R \frac{S}{l} = 1 \frac{10^{-6}}{1,063} \Omega \cdot \text{m} = 0,94 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}.$$

$$4.95. \quad \rho = R \frac{S}{l} = 0,098 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}.$$

4.96. Ponieważ opory mają być jednakowe

$$R_1 = R_2, \quad \text{zatem} \quad \rho \frac{l_1}{S_1} = \rho \frac{l_2}{S_2},$$

skąd

$$S_1 = S_2 \frac{l_1}{l_2}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\pi}{4} d_1^2 = \frac{\pi}{4} d_2^2 \frac{l_1}{l_2},$$

a więc

$$d_1 = d_2 \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = 5 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{20}{30}} \text{ m} = 4,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}.$$

4.97. Bierzemy za punkt wyjścia następujące wzory:

$$R_1 = \frac{l_1}{\frac{\pi}{4} d_1^2} \quad \text{oraz} \quad R_2 = \frac{l_2}{\frac{\pi}{4} d_2^2},$$

zatem

$$R_1 = R_2 \frac{l_1}{l_2} \frac{d_2^2}{d_1^2} = 100 \Omega.$$

$$4.98. \quad R_2 = R_1 \frac{S_1}{S_2} = 6,25 \Omega.$$

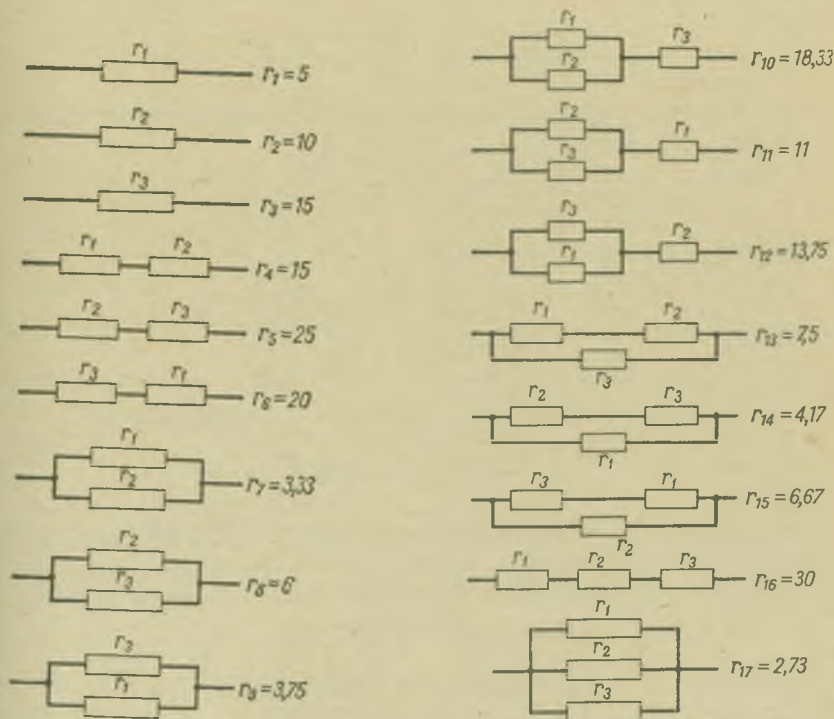
4.99. Obok schematów układów oporów (rys. 4.47) podajemy wartość oporu tego układu w  $\Omega$  (omach) obliczoną z wzorów odnoszących się do danego schematu połączeń.

4.100. Jedynym możliwym połączeniem jest tylko połączenie równoległe, bo  $R < R_1$ ,  
 a więc

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{x},$$

skąd

$$x = \frac{RR_1}{R_1 - R} = 97,5 \Omega.$$



Rys. 4.47

4.101. Z warunków zadania otrzymujemy

$$x + y = R, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{r}, \quad \text{zatem} \quad x = \frac{ry}{y-r}.$$

Z układu dwu równań z dwiema niewiadomymi otrzymujemy równanie ze względu na  $y$

$$y^2 - Ry + Rr = 0.$$



Pierwiastki układu równań wynoszą

$$y = \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4rR}, \quad x = \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4rR}.$$

Warunkiem rozwiązalności jest warunek, aby  $R > 4r$ .

4.102. Na podstawie zadania 4.101 otrzymujemy

$$R = 4r, \quad \text{a więc} \quad R_1 = R_2 = \frac{R}{2} = 60 \Omega.$$

4.103. Opór termoelementu jest sumą oporów drutu platynowego oraz drutu ze stopu. Zatem

$$R = \rho_1 \frac{l}{S} + \rho_2 \frac{l}{S} = (\rho_1 + \rho_2) \frac{l}{S} = 0,31 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \frac{0,25 \text{ m}}{0,785 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 9,9 \Omega.$$

4.104. Opór zastępczy układu złożonego z dwóch równolegle połączonych, jednakowych części przewodnika

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R/2} + \frac{1}{R/2} = \frac{4}{R}, \quad \text{a więc} \quad R_1 = \frac{R}{4}.$$

4.105. Na podstawie reguł Kirchhoffa mamy

$$I = I_1 + I_2 \quad \text{oraz} \quad I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0.$$

Otrzymujemy zatem po obliczeniu

$$I_1 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ A} \quad \text{oraz} \quad I_2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ A}.$$

4.106. Natężenie prądu elektrycznego uzyskanego podczas wyładowania

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{40 \text{ A} \cdot \text{s}}{1000 \text{ s}} = 40000 \text{ A}.$$

Podczas wyładowania w błyskawicy przenoszone są niezbyt wielkie ładunki elektryczne w bardzo krótkim czasie.

4.107. Na podstawie reguł Kirchhoffa otrzymujemy

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

oraz

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0, \quad I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0.$$

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy w wyniku

$$I_1 = 0,316 \text{ A}, \quad I_2 = 0,105 \text{ A}, \quad I_3 = 0,079 \text{ A}.$$

4.108. Prąd elektryczny doprowadzamy do naroża  $A$  oraz odprowadzamy z naroża  $B$  (rys. 4.48a). Rozkład prądu wchodzącego do naroża  $A$  podczas przepływu jego przez ten układ (opór zastępczy) podany jest na rysunku 4.48b. Na dwóch innych rysunkach pokazany jest rozkład prądów podczas przepływu z punktu  $A$  do  $B$  (rys. 4.48c) oraz schemat oporów (rys. 4.48d).

Prąd w punkcie  $A$  rozdzielił się na trzy równe części, gdyż opory odprowadzające z punktu  $A$  są sobie równe. Dalszy przebieg prądu w każdej gałęzi jest identyczny. Otrzymujemy więc

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad \text{oraz} \quad I_1 = I_2 = I_3 = \frac{1}{3}I.$$

Podobnie dzieje się również przy wypływie z punktu  $B$ . Prądy w poszczególnych gałęziach doprowadzających do punktu  $B$  spełniają warunek

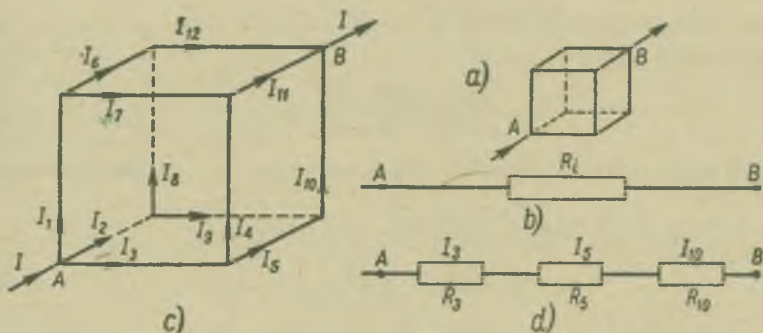
$$I = I_{10} + I_{11} + I_{12} \quad \text{oraz} \quad I_{10} = I_{11} = I_{12} = \frac{1}{3} I.$$

Każdy z powyższych prądów cząstkowych dzieli się znowu na narożu na dwie równe części. Otrzymujemy więc

$$I_4 = I_5 = I_6 = I_7 = I_8 = I_9 = \frac{1}{6} I.$$

Wszystkie opory są sobie równe

$$R_1 = R_2 = \dots = R_{12} = r.$$



Rys. 4.48

Od naroża  $A$  do naroża  $B$  prąd elektryczny przepływa np. przez opory  $R_3$ ,  $R_5$  i  $R_{10}$ . Jest to tylko jedna z możliwych dróg. Wybieramy ją, aby przeprowadzić rozwiązanie. Spadek napięcia wzdłuż tej drogi (oraz wzdłuż każdej innej) wynosi

$$U_{AB} = I_3 R_3 + I_5 R_5 + I_{10} R_{10} = \frac{1}{3} Ir + \frac{1}{6} Ir + \frac{1}{3} Ir = \frac{5}{6} Ir.$$

Jeżeli punkty  $A$  i  $B$  połączymyśmy oporem zastępczym, przez który płynąłby taki sam prąd  $I$  (rys. 4.48 b), to spadek napięcia wynosiłby

$$U_{AB} = IR_i.$$

Otrzymujemy więc w wyniku

$$IR_i = \frac{5}{6} Ir,$$

a więc szukany opór zastępczy, tj. opór przewodnika utworzonego przez krawędzie sześciangu, wynosi

$$R_i = \frac{5}{6} r.$$

4.109. Natężenia prądu w odpowiednich temperaturach wynoszą

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{U}{R_0(1+a\Delta T_1)}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{U}{R_0(1+a\Delta T_2)}.$$

Procentowy wzrost natężenia prądu wynosi więc

$$p = \frac{I_2 - I_1}{I_1} 100 = \frac{T_1 - T_2}{1 + \alpha \Delta T_2} 100 = 23\%.$$

4.110. Jeżeli obie strony wzoru podanego w treści zadania pomnożymy przez  $l$  (długość przewodnika) oraz podzielimy przez  $S$  (powierzchnia przekroju przewodnika), to otrzymamy wtedy

$$R_2 = R_1[1 + \alpha \Delta T],$$

a więc

$$R_2 = 28 [1 + 0,0039 \cdot 40] \Omega = 32,4 \Omega.$$

4.111. Oznaczmy natężenie płynącego prądu elektrycznego przez  $I$ ; jest to prąd bezwirowy, a więc spełniający warunek

$$\operatorname{div} I = n(I_2 - I_1) = n(\sigma_2 E_2 - \sigma_1 E_1) = 0.$$

Składowe normalne są sobie równe, zatem

$$\sigma_2 E_{2n} = \sigma_1 E_{1n},$$

skąd

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2}, \quad \text{skąd} \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \operatorname{tg} \alpha_1.$$

A więc w naszym przypadku

$$n = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1}}{\sigma_1 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}} = 0,0029.$$

4.112. Opór rośnie proporcjonalnie do temperatury bezwzględnej, otrzymujemy więc

$$\frac{R_t}{R_T} = \frac{273 + t}{T}, \quad \text{skąd} \quad R_t = R_T \frac{293}{2300},$$

lecz

$$R_T = \frac{U^2}{P},$$

zatem

$$R_t = \frac{U^2}{P} \frac{293}{2300} = \frac{220^2 \cdot 293}{100 \cdot 2300} \Omega = 61,7 \Omega,$$

a więc

$$I_1 = \frac{U}{R_t} = 3,56 \text{ A}.$$

Całkowity prąd w chwili włączania wynosi więc

$$I = 3I_1 = 10,68 \text{ A}.$$

Całkowita moc pobierania bezpośrednio po włączeniu

$$P = UI = 2349,6 \text{ watów}.$$

Energia pobierana przez czas

$$E = Pt = 23,495 \text{ watosekund (J)}.$$

4.113. a) Woltomierz wykazuje napięcie

$$U = I_a(x + R_a).$$

Zatem opór mierzony wynosi w tym przypadku

$$R_A = x + R_a = \frac{U}{I_a}.$$

Błąd procentowy pomiaru wynosi więc

$$\frac{R_A - x}{x} 100 = \frac{R_a}{x} 100.$$

Błąd ten zależy od stosunku oporu amperomierza do oporu mierzonego. Sposób tego łączenia daje dobre wyniki tylko wtedy, gdy opór amperomierza jest mały w stosunku do oporu mierzonego ( $R_a \ll x$ ).

b) Prąd płynący przez amperomierz składa się z prądu płynącego przez opór  $x$  oraz przez woltomierz

$$I_a = \frac{U}{R_w} + \frac{U}{x}.$$

Po podzieleniu obu stron równania przez  $U$  i po uwzględnieniu, że

$$\frac{I_a}{U} = \frac{1}{R_a},$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{R_a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{R_w}, \quad \text{skąd} \quad R_a = \frac{xR_w}{x + R_w}.$$

Błąd procentowy pomiaru w tym przypadku wynosi więc

$$\frac{|R_a - x|}{x} 100 = \frac{x}{x + R_w} 100.$$

Jeżeli opór woltomierza  $R_w$  jest duży w porównaniu z mierzonym oporem ( $R_w \gg x$ ), to ten sposób łączenia w celu dokonania pomiaru jest korzystny.

4.114. a) Jeżeli ogniwa są połączone szeregowo, to ich siły elektromotoryczne oraz ich opory wewnętrzne sumują się. Natężenie prądu elektrycznego z takiej baterii wynosi

$$I_z = \frac{nE}{R_z + nR_w};$$

b) Jeżeli ogniwa są połączone równolegle, to ich siła elektromotoryczna jest taka sama jak pojedynczego ogniwa, lecz opór wewnętrzny jest  $n$  razy mniejszy

$$I_t = \frac{E}{R_z + \frac{R_w}{n}} = \frac{nE}{nR_z + R_w}.$$

4.115. Na podstawie warunków zadania, posługując się odpowiednim wzorem z rozwiązania zadania 4.114, otrzymujemy

$$I = \frac{nE}{R_z + nR}, \quad \text{zatem} \quad n = \frac{IR_z}{E - IR}$$

ponieważ  $n > 0$ , zatem  $E > IR$ , czyli

$$I < \frac{E}{R},$$

a więc natężenie prądu będzie mniejsze od natężenia prądu otrzymanego z jednego ogniwa „spiętego na krótko“. Ponadto musi być  $n \geq 1$ , a więc również musi zachodzić związek  $IR_z \geq E - IR$ , zatem

$$I \geq \frac{E}{R_z + R}$$

natężenie prądu będzie nie mniejsze od natężenia płynącego przez taki sam opór zewnętrzny, lecz tylko z jednego ogniwa.

4.116. Posługujemy się wzorami z rozwiązania zadania 4.114. Zależnie od stosunku oporów  $R_z/R$  należy używać albo jednego, albo drugiego połączenia. W przypadku  $R_z \geq R$  należy ogniwa łączyć szeregowo, w przypadku  $R_z \leq R$  ogniwa łączymy równolegle.

4.117. Rozwiązanie podajemy tylko dla szeregów symetrycznych, tzn. gdy  $y$  szeregów ogniw, po  $x$  ogniw w każdym, połączonych jest równolegle

$$xy = n.$$

Natężenie prądu z tej baterii wynosi

$$I = \frac{xE}{R_z + \frac{xR}{y}} = \frac{nxE}{nR_z + x^2R}.$$

Mamy dla podanych w zadaniu warunków obliczyć wartość maksymalną natężenia prądu elektrycznego. Powinny więc być spełnione następujące warunki

$$\text{a) } \frac{dI}{dx} = 0 \quad \text{oraz} \quad \text{b) } \frac{d^2I}{dx^2} < 0.$$

Różniczkując względem  $x$  obliczymy warunek pierwszy

$$\frac{dI}{dx} = \frac{nE(nR_z + x^2R) - 2xR \cdot nxE}{(nR_z + x^2R)^2} = 0,$$

czyli

$$n^2ER_z + nx^3ER - 2nx^2RE = 0,$$

zatem

$$nR_z = x^2R.$$

Ostatecznie mamy więc

$$x = \sqrt{n \frac{R_z}{R}} = \sqrt{24 \frac{1,5}{1}} = 6, \quad y = 4,$$

dla podanych powyżej wartości na  $x$  oraz  $y$  zachodzi również warunek

$$\frac{d^2 I}{dx^2} < 0,$$

czyli przy takim połączeniu uzyskujemy prąd maksymalny.

**4.118.** Na podstawie reguł Kirchhoffa mamy (jak wynika na podstawie rysunku 4.49)

$$E_1 = I_1 R_1 + IR, \quad E_2 = -I_2 R_2 + IR, \quad I_1 = I + I_2,$$

zatem

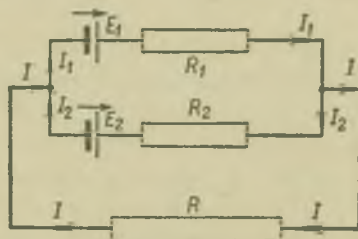
$$E_1 R_2 + E_2 R_1 = I [R_2(R_1 + R) + RR_1],$$

skąd

$$I = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{RR_1 + R_2(R_1 + R)} = 0,539 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{IR - E_2}{R_2} = -0,12 \text{ A}, \quad I_1 = I + I_2 = 0,419 \text{ A}.$$

Znaki umieszczone przy wartościach natężeń podają kierunki przepływu prądów zgodnie z umową przyjętą przy omawianiu reguł Kirchhoffa.



Rys. 4.49

**4.119.** Z warunków zadania otrzymujemy

$$E = I(R_z + R_w) = IR_z + IR_w,$$

lecz  $IR_z$  oznacza spadek napięcia na oporze zewnętrznym dołączonym do ogniwa, a więc jest to napięcie panujące na zaciskach oporu podczas przepływu prądu. Otrzymujemy

$$E = U + IR_w,$$

skąd

$$R_w = \frac{E - U}{I} = 0,158 \Omega.$$

**4.120.** Z warunków zadania otrzymujemy

$$E = U + IR = (8 + 0,02 \cdot 20) \text{ V} = 8,4 \text{ V}.$$

**4.121.** Z warunków zadania otrzymujemy

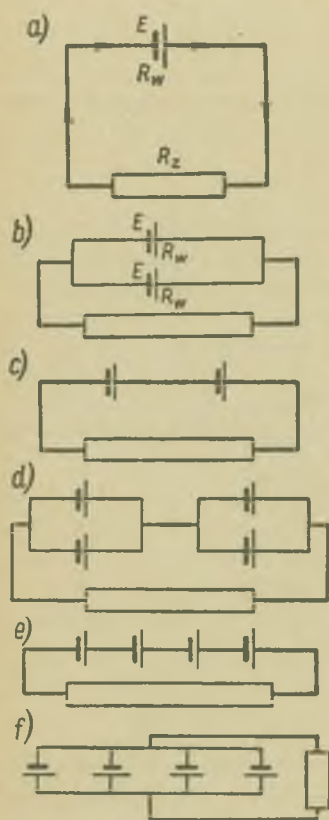
$$I = \frac{E - U}{R_w} = \frac{0,02}{0,02} \text{ A} = 1 \text{ A}.$$



Opór spinający wynosi więc

$$R_z = IU = 1,98 \Omega.$$

4.122. Z zadania wynika, że dla danego układu połączeń (rys. 4.50) prąd szukany jest następujący



Rys. 4.50

$$a) I = \frac{E}{R_z + R_w} = 0,497 \text{ A},$$

$$b) I = \frac{E}{R_z + \frac{R_w}{2}} = 0,498 \text{ A},$$

$$c) I = \frac{2E}{R_z + 2R_w} = 0,991 \text{ A},$$

$$d) I = \frac{2E}{R_z + R_w} = 0,994 \text{ A},$$

$$e) I = \frac{4E}{R_z + 4R_w} = 1,961 \text{ A},$$

$$f) I = \frac{E}{R_z + \frac{R_w}{4}} = 0,499 \text{ A}.$$

4.123. Dokonując pomiaru napięcia tego ogniwa woltomierzem, którego opór wewnętrzny wynosi  $R_w$ , powodujemy, że przez obwód woltomierz-ogniwo płynie prąd  $I_1$ , którego wartość na podstawie definicji siły elektromotorycznej ogniwa wynosi

$$I_1 = \frac{E}{R + R_w}.$$

Woltomierz wykazuje napięcia równe spadkowi napięcia wskutek płynącego prądu  $I_1$  przez jego opór wewnętrzny  $R_w$

$$U = I_1 R_w.$$

Otrzymujemy zatem

$$\frac{U}{R_w} = \frac{E}{R_w + R},$$

a więc

$$U = E \frac{R_w}{R_w + R} = 1,539 \text{ V}.$$

4.124. Jeżeli przez opór  $R_z$  spinający zaciski akumulatora płynie prąd  $I$ , to wartość oporu spinającego, przez który płynie prąd  $1 \text{ A}$ , wynosi

$$R_z = \frac{E - IR}{I} = 1,98 \Omega.$$

Jeżeli chcemy, aby płynął prąd  $I_1$  mniejszy lub co najwyżej równy prądowi  $I$ , to należy jego zaciski spiąć oporem  $x \geq R_z$ .

4.125. Z warunków zadania otrzymujemy

$$nE = U + InR,$$

lecz natężenie prądu można obliczyć ze spadku napięcia na oporze zewnętrznym, zatem

$$U = IR_z, \quad \text{skąd} \quad I = \frac{U}{R_z},$$

zatem

$$nE = U + nU \frac{R}{R_z},$$

zatem

$$n = \frac{UR_z}{ER_z - UR} = \frac{10}{3 - 0,1} = 3,4,$$

ponieważ jednak  $n$  musi być całkowite, zatem należy użyć  $n = 4$  ogniw.

4.126. Oznaczmy rzeczywistą siłę elektromotoryczną ogniwa przez  $E$ . Otrzymujemy wówczas z obu pomiarów

$$E = U_1 + I_1 R, \quad E = U_2 + I_2 R,$$

gdzie  $R$  oznacza opór wewnętrzny ogniwa,  $I_1$  i  $I_2$  — prądy płynące przez ogniwo odpowiednio za pierwszym oraz za drugim razem.

Możemy przyjąć, że opór woltomierza  $R_w$  jest bardzo duży, zatem prąd  $I_1 = 0$ ; na tej podstawie otrzymujemy  $E = U_1$ . Napięcie na oporze  $R_2$ , przez który płynie prąd  $I_2$ , wynosi  $U_2 = I_2 R_2$ . Otrzymujemy więc ostatecznie

$$U_1 = U_2 + \frac{U_2}{R_2} R, \quad \text{a więc} \quad R = \frac{(U_1 - U_2) R_2}{U_2} = 0,12 \Omega.$$

4.127. Jeśli oznaczymy opory tych przewodników przez  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  oraz  $R_4$ , to odpowiednie wartości będą równe

$$R_1 = \rho \frac{4l}{\pi d_1^2}, \quad R_2 = \rho \frac{4l}{\pi d_2^2}, \quad R_3 = \rho \frac{4l}{\pi d_3^2}, \quad R_4 = \rho \frac{4l}{\pi d_4^2}.$$

Całkowity opór tego przewodnika wyniesie

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \frac{4l\rho}{\pi} \left( \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} + \frac{1}{d_4^2} \right).$$

Prąd płynący przez ten układ oporów wyniesie

$$I = \frac{U}{R}.$$

Spadek napięcia na pierwszym oporze równa się

$$U_1 = IR_1 = U \frac{R_1}{R} = U \frac{\rho \frac{4l}{\pi d_1^2}}{\frac{4l\rho}{\pi} \left( \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} + \frac{1}{d_4^2} \right)} = \frac{U}{d_1^2 \left( \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} + \frac{1}{d_4^2} \right)} =$$

$$= \frac{d_2^2 d_3^2 d_4^2}{d_1^2 d_2^2 d_3^2 + d_1^2 d_3^2 d_4^2 + d_2^2 d_4^2 d_1^2 + d_4^2 d_1^2 d_3^2} U = 70,2 \text{ V}.$$

Ponieważ

$$U_2 = IR_2, \quad \text{zatem} \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Otrzymujemy więc wartości

$$U_2 = U_1 \frac{d_1^2}{d_2^2} = 17,6 \text{ V}, \quad U_3 = U_1 \frac{d_1^2}{d_3^2} = 7,8 \text{ V}, \quad U_4 = U_1 \frac{d_1^2}{d_4^2} = 4,4 \text{ V}.$$

Całkowity zatem spadek napięcia wynosi

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 100 \text{ V}.$$

**4.128.** Oznaczając spadki napięć na poszczególnych oporach

$$U_{\text{Cu}} = U_1, \quad U_{\text{Fe}} = U_2, \quad U_{\text{Hg}} = U_3$$

otrzymujemy

$$U_1 : U_2 : U_3 = I \rho_{\text{Cu}} \frac{l}{S} : I \rho_{\text{Fe}} \frac{l}{S} : I \rho_{\text{Hg}} \frac{l}{S} = \rho_{\text{Cu}} : \rho_{\text{Fe}} : \rho_{\text{Hg}}$$

oraz

$$U_1 + U_2 + U_3 = U.$$

Po rozwiązaniu otrzymujemy w wyniku wartości

$$U_1 = 0,127 \text{ V}, \quad U_2 = 0,729 \text{ V}, \quad U_3 = 7,144 \text{ V}.$$

U sumie całkowity spadek napięcia wynosi

$$U_1 + U_2 + U_3 = 8 \text{ V}.$$

**4.129.** Opór  $r_1$  można przedstawić w postaci

$$r_1 = \rho \frac{l}{S}, \quad (4.129.1)$$

opór zaś drutu o długości 1 cm użytego na przewody o średnicy  $d = 0,3 \text{ cm}$  można również przedstawić w postaci

$$r_2 = \rho \frac{l}{S_2}, \quad (4.129.2)$$

zatem z wzorów (4.129.1) oraz (4.129.2) otrzymujemy

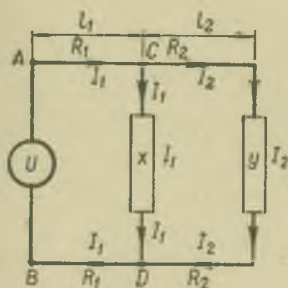
$$r_2 = r_1 \frac{S}{S_2},$$

gdzie  $r_1 = 1,7 \frac{\Omega}{\text{m}}$ ,  $S = 10^{-6} \text{ m}^2$ ,  $S_2 = 7,07 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ .

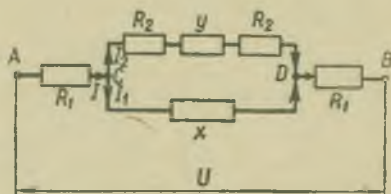
Wprowadzając oznaczenia takie jak na rys. 4.51.1 otrzymujemy na opory  $R_1$  oraz  $R_2$  wartości

$$R_1 = r_2 l_1 = l_1 r_1 \frac{S_1}{S_2} = 100 \cdot 1,7 \frac{10^{-9}}{7,07 \cdot 10^{-6}} \Omega = 24,06 \Omega, \quad (4.129.3)$$

$$R_2 = r_2 l_2 = l_2 r_1 \frac{S_1}{S_2} = 25 \cdot 1,7 \frac{10^{-9}}{7,07 \cdot 10^{-6}} \Omega = 6,02 \Omega. \quad (4.129.4)$$



Rys. 4.51.1



Rys. 4.51.2

W punkcie C prąd całkowity  $I$  dzieli się na dwie części:  $I_1$  oraz  $I_2$ , zatem

$$I = I_1 + I_2 = 4 \text{ A}. \quad (4.129.5)$$

Oznaczmy równoważny opór układu pomiędzy punktami  $A$  i  $B$  przez  $R$ . Otrzymujemy na podstawie prawa Ohma

$$U = IR,$$

zatem

$$R = \frac{220}{4} \Omega = 55 \Omega. \quad (4.129.6)$$

Narysujemy teraz całkowity schemat połączeń pomiędzy punktami  $A$  oraz  $B$  (rys. 4.51.2). Otrzymujemy całkowity opór układu

$$R = 2R_1 + r', \quad (4.129.7)$$

gdzie  $r'$  jest oporem układu pomiędzy punktami  $C$  oraz  $D$ . Otrzymujemy więc

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2R_2 + y}, \quad (4.129.8)$$

lecz również

$$r' = R - 2R_1 = (55 - 48,12) \Omega = 6,88 \Omega. \quad (4.129.9)$$

Przez opór  $x$  płynie prąd  $I_1$ , a przez opór do niego równoległy  $2R_2 + y$  prąd  $I_2$ , zatem spadki napięć na tych oporach muszą być takie same, tzn.

$$I_1 x = I_2 (2R_2 + y),$$

skąd

$$2R_2 + y = x \frac{I_1}{I_2}. \quad (4.129.10)$$

Z wzoru (4.129.8) otrzymujemy również

$$2R_2 + y = \frac{xr'}{x - r'}. \quad (4.129.11)$$

Z wzorów (4.129.10) oraz (4.129.11) otrzymujemy

$$x \frac{I_1}{I_2} = x \frac{r'}{x - r'}, \quad \text{skąd} \quad x = r' \frac{I_1 + I_2}{I_1} = 11,01 \Omega.$$

Otrzymujemy dalej

$$I_2 (2R_2 + y) = I_1 x = r' \frac{I_1 + I_2}{I_1} I_1 = r' I_1,$$

zatem

$$y = r' \frac{I_1}{I_2} - 2R_2 = 6,32 \Omega.$$

Spadek napięcia na oporze  $R_1$  wynosi

$$U_1 = IR_1 = 96,24 \text{ V},$$

a na oporze  $r$

$$U' = Ir' = 27,52 \text{ V}.$$

Całkowity spadek napięcia wynosi więc

$$U = 2U_1 + U' = 220 \text{ V}.$$

Spadek napięcia na oporze równoważnym  $r'$  jest spadkiem napięcia na oporze  $x$ , a zatem

$$U_x = I_1 x = 27,52 \text{ V} = U'.$$

Spadek napięcia na oporze  $R_2$  wynosi

$$U_2 = I_2 R_2 = 9,02 \text{ V},$$

a na oporze  $y$

$$U_y = I_2 y = 9,48 \text{ V}.$$

Spadek napięcia na oporze  $2R_2 + y$  wynosi więc

$$2U_2 + U_y = 27,52 \text{ V} = U' = U_x.$$

4.130. Siła elektromotoryczna prądnicy powinna być taka, ażeby podczas ładowania akumulatorów po przewyciężeniu sumy ich sił polaryzacyjnych mógł jeszcze przez ten zespół przepłynąć prąd 6 A, a więc

$$E_p - nE_a = I(nR_2 + R_z + R_1),$$

zatem

$$E_p = nE_a + I(nR_2 + R_z + R_1) = 47,12 \text{ V}.$$

4.131. Całkowite napięcie  $U$  doprowadzone do silnika jest rozłożone na dwie części: na spadek napięcia  $IR$  wskutek przepływu prądu przez zwoje wirnika oraz na część  $U_x$  skompensowaną przez wzbudzoną siłę przeciwmotoryczną, zatem

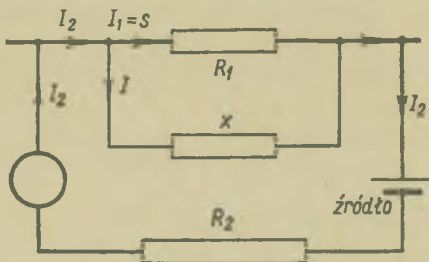
$$U = U_x + IR, \quad \text{skąd} \quad U_x = U - IR = 205 \text{ V}.$$

W pierwszej chwili, gdy nie działa siła przeciwmotoryczna, prąd płynący przez uzwojenie wirnika pod wpływem napięcia  $U$  wynosi

$$I = \frac{U}{R} = 110 \text{ A}.$$

4.132. Jeżeli opór rozrusznika oznaczymy przez  $R$ , to w chwili włączenia pod wpływem napięcia  $U$  popłynie prąd  $I$ , spełniający związek

$$U = I(R+r), \quad \text{zatem} \quad R = \frac{U}{I} - r = 17 \Omega.$$



Rys. 4.52

Z jednej strony opór włączony powinien być większy od  $17 \Omega$ , z drugiej zaś strony opór włączony powinien być taki, aby od chwili włączenia zezwalał na przepływ prądu o natężeniu  $I_1$ , a więc powinien by spełniać warunek

$$R = \frac{U}{I_1} - r = 39 \Omega,$$

więc szukany opór powinien zawierać się w granicach

$$17 \Omega < R_x < 39 \Omega.$$

4.133. Przez opornik  $R_2$  podłączony do napięcia  $U$  płynie prąd (rys. 4.52)

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = 5,35 \text{ A}.$$



Do amperomierza należy dołączyć równolegle opór  $x$  taki, aby przez niego popłynął nadmiar prądu, czyli prąd  $I$  spełniający związek

$$I \leq I_2 - s = 3,85 \text{ A}.$$

A więc opór ten powinien spełniać związek

$$x \leq R_1 \frac{s}{I} = 0,195 \Omega.$$

Po włączeniu tego bocznika o oporze  $0,195 \Omega$  do amperomierza popłynie przez ten amperomierz prąd o natężeniu  $1,5 \text{ A}$ , a przez bocznik — prąd o natężeniu  $3,85 \text{ A}$ .

4.134. Całkowity prąd płynący przez amperomierz oraz bocznik wynosi

$$I = I_a + I_b = I_a + I_a \frac{r}{r_1} = I_a \frac{r_1 + r}{r_1} = I_a s,$$

a więc

$$s = \frac{r_1 + r}{r_1}.$$

4.135. a) Napięcie odpowiadające jednej kresce galwanometru  $U_1$  wynosi

$$U_1 = I_1 R_1 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ V}.$$

Aby galwanometr służył jako woltomierz wskazujący na jednej kresce napięcie  $U_2 = 1 \text{ V}$ , należy do galwanometru dołączyć szeregowo opór  $x$ , który spełni następujące równanie:

$$U_2 = I_1(x + R_1),$$

zatem

$$x = \frac{U_2}{I_1} - R_1 = 199900 \Omega.$$

Opór całego układu będzie więc równy

$$x + R_1 = 200000 \Omega.$$

b) W celu dostosowania danego galwanometru do pomiarów prądu o natężeniu  $I = 10^{-3} \text{ A}$ , należy do niego dołączyć równolegle taki opór  $y$ , aby mógł płynąć nadmiar prądu o natężeniu  $I_2$ , gdzie

$$I_2 = I - I_1.$$

Spadki napięć na dołączonym oporze galwanometru muszą być sobie równe, a więc zachodzi związek

$$I_1 R_1 = I_2 y,$$

ponieważ

$$I_2 = (10^{-3} - 5 \cdot 10^{-6}) \text{ A} = 0,995 \cdot 10^{-3} \text{ A},$$

zatem

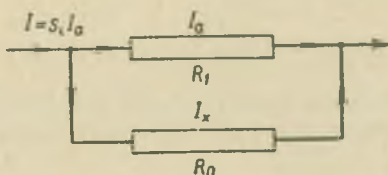
$$y = R_1 \frac{I_1}{I_2} = 100 \frac{5 \cdot 10^{-6}}{0,995 \cdot 10^{-3}} \Omega = 0,502 \Omega.$$

4.136. Chcąc używać amperomierza do pomiarów natężeń prądów  $s_i$  razy większych od natężeń prądów, do których jest dostosowany, należy dołączyć do niego równolegle taki opór  $R_0$ , który przepuszczałby nadmiar prądu (rys. 4.53). Zatem na podstawie reguły Kirchhoffa powinien zachodzić związek

$$s_i I_a = I_a + I_x, \quad \text{skąd} \quad I_x = I_a(s_i - 1),$$

zatem

$$R_0 = R_1 \frac{I_a}{I_x} = R_1 \frac{I}{I_a(s_i - 1)} = \frac{R_1}{s_i - 1},$$



Rys. 4.53

a więc chcąc w żądany sposób rozszerzyć skalę amperomierza, należy równolegle do niego dołączyć następujące opory

$$R_1 = 0,5 \Omega, \quad R_2 = 0,25 \Omega, \quad R_3 = 0,125 \Omega, \quad R_4 = 0,0556 \Omega, \quad R_5 = \frac{R_1}{n-1} \Omega.$$

4.137. Gdybyśmy dołączyli ten amperomierz bezpośrednio do biegunów, to płynąłby przez niego prąd

$$I_1 = \frac{E}{r_1 + r_2} = 2,25 \text{ A}.$$

Ponieważ  $I_1 > I$  to gdy prąd  $I_1$  przekracza zakres tolerancji natężenia prądu dla tego amperomierza, spowoduje jego zniszczenie.

4.138. Napięcie mierzone przez woltomierz  $U_2$  składa się ze spadku napięcia  $U$  na oporze woltomierza oraz spadku napięcia  $U_1$  na oporze dołączonym szeregowo do woltomierza

$$U_2 = U + U_1 = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2).$$

Napięcie to jest  $s$  razy większe od napięcia  $U$ , tj. od spadku napięcia na oporze woltomierza, czyli

$$U_2 = sU = sIR_1,$$

otrzymujemy więc

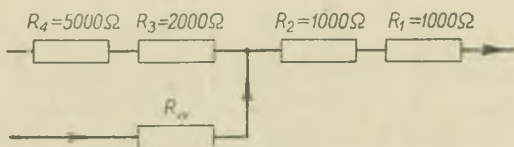
$$sIR_1 = I(R_1 + R_2), \quad \text{skąd} \quad s = \frac{R_1 + R_2}{R_1}.$$

4.139. Opór dołączony do woltomierza możemy obliczyć, jeśli uwzględnimy wynik zadania 4.138

$$R_i = R_1(s_i - 1),$$

a więc

$$R_1 = 1000 \Omega, \quad R_2 = 2000 \Omega, \quad R_3 = 4000 \Omega, \quad R_5 = 1000(n-1) \Omega.$$



Rys. 4.54

W celu spełnienia tych warunków wystarczy włączyć takie opory jak na rys. 4.54.

4.140. Z warunków zadania, powołując się na wyniki zadania 4.139, otrzymujemy

Współczynnik rozszerzenia skali		Opór w $\Omega$	
$s_1$	5	$R_1$	4000
$s_2$	10	$R_2$	9000
$s_3$	25	$R_3$	24000
$s_4$	50	$R_4$	49000
$s_5$	100	$R_5$	99000

W celu uzyskania tych wartości wystarczy połączyć szeregowo następujące opory:

$$r_1 = 4000 \Omega, \quad r_2 = 5000 \Omega, \quad r_3 = 15000 \Omega,$$

$$r_4 = 25000 \Omega, \quad r_5 = 50000 \Omega,$$

gdyż

$$R_1 = r_1, \quad R_2 = r_1 + r_2, \quad R_3 = r_1 + r_2 + r_3, \quad R_4 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$$

oraz

$$R_5 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5.$$

4.141. Z warunków zadania otrzymujemy

$$I = \frac{P}{U} = \frac{100}{220} \text{ A} = 0,454 \text{ A}, \quad R = \frac{U^2}{P} = \frac{48400}{100} \Omega = 484 \Omega.$$

4.142. Oznaczając temperaturę szukaną przez  $T_1$  otrzymujemy

$$\frac{T_1}{T} = \frac{R_1}{R}, \quad \text{czyli} \quad T_1 = T \frac{R_1}{R},$$

gdzie

$$T = 293 \text{ K}, \quad R = 55 \Omega, \quad R_1 = \frac{U^2}{P} = 484 \Omega$$

a więc  $T_1 = 2578,4 \text{ K}$  (oczywiście temperatura ta jest o wiele za duża, gdyż większa część ciepła zostaje zamieniona na energię). Przy rozwiązaniu natomiast założyliśmy, że całe ciepło zamienione jest tylko na ogrzanie drucika).

4.143. Oznaczmy natężenie prądu podczas świecenia przez  $I_2$  oraz w temperaturze  $T_1$  przez  $I_1$ . Otrzymamy więc

$$I_2 = \frac{U}{R_2} \quad \text{oraz} \quad I_1 = \frac{U}{R_1},$$

lecz

$$R_2 = \frac{U^2}{P} = \frac{48400}{50} \Omega = 968 \Omega,$$

zatem

$$R_1 = R_2 \frac{T_1}{T_2} = 968 \frac{293}{2473} \Omega = 114,7 \Omega,$$

a więc

$$I_2 = \frac{220}{968} \text{ A} = 0,227 \text{ A}, \quad I_1 = \frac{220}{114,7} \text{ A} = 1,92 \text{ A}.$$

Moc żarówki pobierana w temperaturze  $T_1$  pod tym samym napięciem wynosi

$$P_1 = I_1 U = 422,4 \text{ W}.$$

4.144. Oznaczmy opór żarówki w poszukiwanej temperaturze  $T$  przez  $R_T$ . Otrzymamy

$$R_T = R_0(1 + \beta \Delta T),$$

a więc szukana temperatura wynosi

$$\Delta T = \frac{R_T - R_0}{R_0 \beta},$$

lecz opór w temperaturze  $0^\circ \text{C}$  wynosi

$$R_0 = R \frac{a}{b} = R \quad \text{oraz} \quad R_T = R \frac{a_1}{b} = 2R,$$

a więc

$$\Delta T = \frac{1}{\beta} = 273 \text{ K}.$$

4.145. Z warunków zadania otrzymujemy

a)  $x = \frac{E - IR}{I} = 98,16 \Omega,$     b)  $U_b = Ix = 24,54 \text{ V},$

c)  $P_u = IU_b = 6,135 \text{ W},$     d)  $P_c = IE = 6,15 \text{ W},$

e)  $\frac{P_u}{P_c} 100 = 99,7\%.$

4.146. Z warunków zadania otrzymujemy

$$P = I^2 R W = \frac{I^2 R}{736} \text{ KM} = 0,815 \text{ KM}.$$

4.147. Z warunków zadania otrzymujemy

$$I = \sqrt{\frac{PW}{R}} = \sqrt{\frac{736 P (\text{KM})}{R}} = 37,1 \text{ A}.$$

4.148. Moc pobierana przez silnik

$$P = UI = 2200 \text{ W}.$$

Moc silnika, z którą on pracuje, wynosi

$$P_u = 2,5 \text{ KM} = 2,5 \cdot 736 \text{ W} = 1840 \text{ W}.$$

Procent wykorzystanej mocy

$$\frac{P_u}{P} 100 = 80\%.$$

4.149. Ilość ciepła potrzebna do ogrzania wody wynosi

$$Q = mc\Delta T = 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{K}} 82 \text{ K} = 82 \text{ kcal}.$$

Ilość ciepła pochodząca z energii elektrycznej i potrzebna do ogrzania wody powinna wynosić

$$Q_1 = 2Q = 164 \text{ kcal}.$$

Moc pracującego grzejnika wynosi więc w tym przypadku

$$P = \frac{1000 Q_1}{0,24 \tau} = 1140 \text{ W} = 1,14 \text{ kW}.$$

4.150. Z warunków zadania otrzymujemy

$$P = UI = 1650 \text{ W} = 1,65 \text{ kW} = \frac{1650}{736} \text{ KM} = 2,24 \text{ KM}.$$

4.151. Moc  $P$  kuchenki pracującej w normalnym stanie, tzn. przed zmianą jej spirali o oporze  $R_1$ , wynosi

$$P = \frac{U_1^2}{R_1},$$

zatem, oznaczając przez  $R_2$  opór kuchenki po jej przeróbce otrzymujemy

$$\frac{U_1^2}{R_1} = \frac{U_2^2}{R_2}, \quad \text{skąd} \quad R_2 = R_1 \frac{U_2^2}{U_1^2} = \frac{R_1}{4}.$$

W celu otrzymania spiralki o oporze  $R_2$  należy spiralkę pierwotną o oporze  $R_1$  przeciąć na pół i obie połówki połączyć ze sobą równolegle. Tak sporządzona nowa spiralka będzie miała szukany opór  $R_2$ .

4.152. Obie żarówki mają równe opory

$$R_1 = R_2 = R.$$

Po włączeniu w szereg napięcie  $U$  podzielone zostało na dwie równe części  $U_1$ . Każda żarówka świeci pod napięciem  $U_1 = \frac{1}{2}U$ . Gdybyśmy włączyli do sieci tylko jedną żarówkę, jej moc wynosiłaby

$$P = \frac{U^2}{R}.$$

Gdy do sieci włączyliśmy połączone szeregowo obie żarówki, ich wspólna moc wynosi

$$P_c = \frac{U^2}{2R} = \frac{1}{2}P = 25 \text{ W}.$$

Moc zaś, którą pobiera podczas takiego świecenia każda z tych żarówek, wynosi

$$P_1 = P_2 = \frac{U_1^2}{R} = \frac{U^2}{4R} = 12,5 \text{ W}.$$

4.153. Opór amperomierza

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{1,5}{25} \Omega = 0,06 \Omega.$$



Rys. 4.55

Moc amperomierza podczas przepływu przez niego prądu  $I_1$  wynosi

$$P_1 = I_1^2 R = 6,25 \cdot 0,06 \text{ W} = 0,375 \text{ W}.$$

4.154. Ciepło wydzielone podczas całkowitej zamiany pracy na ciepło wynosi

$$Q = 0,24Pt.$$

Ciepło rzeczywiście wydzielone, gdy tylko  $p = 75\%$  energii elektrycznej zamienione zostało na ciepło, wynosi

$$Q' = pQ = \frac{3}{4} \cdot 0,24 \cdot 100 \cdot 1 \text{ cal} = 18 \text{ cal} = 0,018 \text{ kcal} = 75,0 \text{ J}.$$



4.155. Ilość wydzielonego na tym drucie ciepła wynosi

$$Q = 0,24 \frac{U^2}{R} t = 0,24 \frac{220^2}{500} 600 \text{ cal} = 13,9 \text{ kcal} = 5,82 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

4.156. Napięcie przy końcu doprowadzenia (rys. 4.55) wynosi

$$U' = pU.$$

Moc pobierana przez przewody ze źródła prądu wynosi

$$P = UI.$$

Moc zaś, którą mogą z tych przewodów czerpać odbiorcy, wynosi

$$P' = U'I = pUI = pP.$$

Jeżeli  $p\%$  wynosi strata napięcia na przewodach, to również  $p\%$  wynosi strata mocy na przewodach.

4.157. Przez wydajność obwodu elektrycznego rozumiemy stosunek mocy wydzielonej na oporze  $R$  do całkowitej mocy obwodu. Oznaczając siłę elektromotoryczną obwodu przez  $E$ , otrzymujemy

$$\eta = \frac{P_z}{P_{\text{całk}}} = \frac{\frac{E^2}{(R+R_0)^2} R}{\frac{E^2}{R+R_0}} = \frac{R}{R+R_0} = 0,998.$$

4.158. Oznaczmy przez  $Q$  ilość energii cieplnej wydzielanej w tym przewodniku w czasie  $\Delta t$  oraz objętość tego przewodnika przez  $V$ , to otrzymamy

$$q = \frac{Q}{V\Delta t} = \frac{I^2 R \Delta t}{V\Delta t} = \frac{I^2 \sigma^{-1} l S^{-1}}{Sl} = j^2 \frac{1}{\sigma} = \sigma^2 E^2 \frac{1}{\sigma} = \sigma E^2 = 4 \cdot 10^{11} \frac{\text{W}}{\text{m}^3}.$$

4.159. Moc pobierana przez opór przed włączeniem dodatkowego oporu

$$P = \frac{U^2}{R_1}.$$

Po włączeniu oporu  $R$  na oporze  $R_1$  panuje napięcie  $U_1$ , zatem moc pobierana przez opór  $R_1$  wynosi

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1}.$$

Oznaczając przez  $I$  płynący przez opory  $R$  i  $R_1$  prąd elektryczny otrzymujemy

$$U = I(R_1 + R) \quad \text{oraz} \quad U_1 = IR_1,$$

zatem

$$U_1 = U \frac{R_1}{R + R_1}.$$

a więc

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1} \frac{R_1^2}{(R+R_1)^2} = P \frac{R_1^2}{(R+R_1)^2}$$

Założyliśmy w zadaniu, że

$$P_1 = \frac{P}{n},$$

a więc otrzymujemy

$$\frac{P}{n} = P \frac{R_1^2}{(R+R_1)^2},$$

zatem

$$\frac{R_1}{R+R_1} = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \text{skąd} \quad R = R_1(\sqrt{n}-1).$$

#### 4.160. Opór instalacji oświetleniowej

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{48400}{1000} \Omega = 48,4 \Omega.$$

W poprzednim zadaniu otrzymaliśmy, że do oporu  $R$  należy włączyć szeregowo opór

$$R = R_1(\sqrt{n}-1),$$

aby moc  $P$  wydzielana na oporze  $R_1$  spadła do  $n$ -tej swej wartości. W naszych warunkach mamy

$$n_1 = 1, \quad n_2 = \frac{1000}{800} = \frac{10}{8}, \quad n_3 = \frac{10}{6}, \quad n_4 = \frac{10}{4}, \quad n_5 = \frac{10}{2} = 5.$$

Całkowite opory szukane, które należy włączyć, aby uzyskać podane w zadaniu warunki, będą miały wartości

$$r_1 = 0, \quad r_2 = R \left( \sqrt{\frac{10}{8}} - 1 \right) = 5,421 \Omega, \quad r_3 = R \left( \sqrt{\frac{10}{6}} - 1 \right) = 14,04 \Omega,$$

$$r_4 = R \left( \sqrt{\frac{10}{4}} - 1 \right) = 28,12 \Omega, \quad r_5 = R \left( \sqrt{\frac{10}{2}} - 1 \right) = 59,82 \Omega.$$

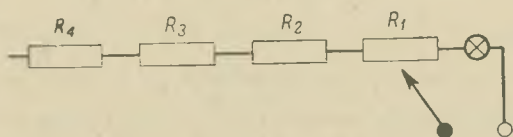
Aby spełnić te warunki, można włączyć tylko opory  $R_1 = r_2 = 5,421 \Omega$ ,  $R_2 = r_3 - r_2 = 8,619 \Omega$ ,  $R_3 = r_4 - r_3 = 14,98 \Omega$  oraz  $R_4 = r_5 - r_4 = 31,70 \Omega$  i połączyć je tak, jak to podano na rysunku 4.56. Przekroje tych drutów dobieramy tak, aby płynące przez nie prądy nie spowodowały ich uszkodzenia. Najwyższe dopuszczalne natężenia prądów płynących przez te opory wynoszą:

$$I_1 = \frac{P}{U} = 4,5 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{U}{R_1+R} = \frac{U}{R+r_3} = 4,087 \text{ A},$$

$$I_3 = \frac{U}{R_1+R_2+R} = \frac{U}{R+r_4} = 3,523 \text{ A},$$

$$I_4 = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3 + R} = \frac{U}{R + r_4} = 2,876 \text{ A},$$

$$I_5 = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R} = \frac{U}{R + r_5} = 2,032 \text{ A}.$$



Rys. 4.56

4.161. Opór żarówki wynosi

$$r = \frac{U^2}{P}.$$

Moc żarówki po włączeniu oporu (rys. 4.57) ma wynosić

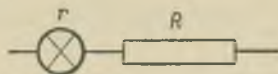
$$P' = \frac{1}{2}P.$$

Z zadania 4.160 mamy

$$R = r(\sqrt{n} - 1),$$

gdzie

$$n = \frac{P}{P'} = 2, \quad \text{więc} \quad R = \frac{U^2}{P}(\sqrt{n} - 1) = 39,69 \Omega.$$



Rys. 4.57

4.162. a) W przypadku połączenia szeregowego tych oporów mamy

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 = 1250 \Omega.$$

Napięcie zostało podzielone tak, że

$$U = 2U_1 + U_2,$$

gdzie  $U_1$  oznacza spadek napięcia na oporze  $R_1$  lub  $R_2$ , a  $U_2$  jest spadkiem napięcia na oporze  $R_3$ . Zatem

$$U_1 : U_2 = R_1 : R_2, \quad \text{czyli} \quad U_1 = U_2 \frac{R_1}{R_2}.$$

Otrzymujemy więc

$$U_1 = U \frac{R_1}{2R_1 + R_3}, \quad U_2 = U \frac{R_2}{2R_1 + R_3}.$$

Pobierana moc na oporze  $R_1$  albo  $R_3$  wynosi

$$P_1 = P_2 = \frac{U_1^2}{R_1} = \frac{U^2 R_1}{(2R_1 + R_3)^2} = 15,33 \text{ W}.$$

Natomiast moc pobierana na oporze  $R_3$  równa się

$$P_3 = \frac{U_3^2}{R_3} = \frac{U^2 R_3}{(2R_1 + R_3)^2} = 7,6 \text{ W}.$$

Łączenie szeregowe tych oporów jest dopuszczalne, gdyż został spełniony warunek, że  $P_1, P_2$  i  $P_3 \leq P$ .

b) Przyłączeniu równoległym całkowity opór wynosi

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3},$$

a więc  $R = 125 \Omega$ .

Każdy opór znajduje się pod napięciem  $U$ . Moc wydzielona na tych oporach wynosi więc w tych warunkach

$$P_1 = P_2 = \frac{U^2}{R_1} = 96,8 \text{ W}, \quad P_3 = \frac{U^2}{R_3} = 183,6 \text{ W}.$$

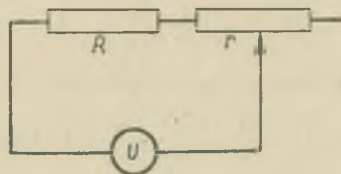
Moc te są wyższe od dopuszczalnych. Łączenie równoległe tych oporów jest więc niedopuszczalne.

4.163. Z warunków zadania otrzymujemy

$$P = \eta P',$$

gdzie  $P'$  oznacza moc pobieraną przez dynamo. A więc stąd

$$P' = \frac{P}{\eta} = 5,44 \text{ KM} = 4004 \text{ W}.$$



Rys. 4.58

4.164. Ilość wydzielonego ciepła na oporze  $r$  (rys. 4.58) w czasie jednej sekundy wynosi

$$Q = I^2 r \text{ dżuli},$$

lecz

$$I = \frac{U}{r + R},$$

zatem

$$Q = \frac{U^2}{(r+R)^2}.$$

Z warunków zadania musi być

$$\frac{dQ}{dr} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{d^2Q}{dr^2} < 0.$$

Pierwsza pochodna wynosi

$$\frac{dQ}{dr} = \frac{U^2(r+R)^2 - 2r(R+r)U^2}{(r+R)^4} = 0,$$

skąd

$$r^2 + R^2 - 2r^2 = 0, \quad \text{czyli} \quad r = R.$$

Druga pochodna wynosi

$$\frac{d^2Q}{dr^2} = \frac{2U^2(r-2R)}{(R+r)^4};$$

dla  $r = R$  druga pochodna jest ujemna. Z tego widać, że  $r = R$  jest szukanym rozwiązaniem.

4.165. Moc w obwodzie zewnętrznym ogniwa wynosi

$$P = I^2 R_z = \frac{E^2}{(R_z + R_w)^2} R_z,$$

gdzie  $R_z$  oznacza opór zewnętrzny,  $R_w$  — opór wewnętrzny ogniwa. Podobnie do poprzedniego zadania, w celu znalezienia rozwiązania piszemy dwa warunki, które muszą być spełnione

$$\frac{dQ}{dR_z} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{d^2Q}{dR_z^2} < 0.$$

Są one spełnione w przypadku  $R_z = R_w$ .

4.166. Natężenie prądu dostarczonego przez źródło wynosi

$$I = \frac{P}{U}.$$

Moc zaś stracona podczas przepływu prądu powinna być

$$P_1 < pP,$$

gdzie  $p = 5\% = 5/100$ .

Z drugiej strony,

$$P_1 = I^2 r = \frac{P^2}{U^2} \frac{2l}{S},$$

gdzie  $I$  oznacza natężenie przepływającego przez druty w obydwie strony prądu pod napięciem  $U$ . Zatem

$$S = \frac{2ql}{U^2} \frac{P^2}{P_1^2} > \frac{2ql}{U^2} \frac{P}{p}, \quad \text{lecz} \quad S = \frac{\pi d^2}{4},$$

zatem

$$d \geq \sqrt{\frac{8\rho l}{\pi p U^2}}$$

Stąd średnica  $d_1$  pierwotnego drutu wynosi

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{8 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8} \cdot 100000 \cdot 100000}{3,14 \cdot 0,05 \cdot 48400}} \text{ m} = 0,423 \text{ m},$$

podobnie otrzymujemy w przypadku innych drutów

$$d_2 \geq 0,0423 \text{ m}, \quad d_3 \geq 0,00423 \text{ m}.$$

Najmniej materiału trzeba zużyć w trzecim przypadku. Przesyłanie prądu staje się opłacalne tylko pod wysokim napięciem.

4.167. Ilość ciepła wydzielaną przez płynący w tym przewodniku prąd elektryczny, a powodującą ogrzanie drutu, obliczamy z wzoru

$$Q = 0,24 p I^2 r \tau = 0,24 p I^2 \rho \frac{l}{S} \tau.$$

Ilość ciepła potrzebna do ogrzania tego przewodnika o  $\Delta T$  K wynosi

$$Q = mc\Delta T = S l \delta c \Delta T,$$

zatem

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{0,24 p I^2 \rho \frac{l}{S} \tau}{S l \delta c} = \frac{0,24 p I^2 \rho \tau}{S^2 \delta c} = \\ &= \frac{0,24 \frac{\text{cal}}{\text{J}} \cdot \frac{40}{100} 100 \text{ A}^2 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \cdot 60 \text{ s}}{10^{-12} \text{ m}^4 \cdot 8,93 \cdot 10^2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,092 \cdot 10^3 \frac{\text{cal}}{\text{kg} \cdot \text{K}}} = 11,9 \text{ K}. \end{aligned}$$

4.168. Oznaczmy przez  $k$  współczynnik straty, to znaczy

$$\text{moc stracona} = \frac{1}{k} \text{ moc użytkowa},$$

czyli

$$P = \frac{1}{k} P_u.$$

Przez  $R$  oznaczmy opór przewodów w przypadku pierwszym, przez  $R'$  zaś — w przypadku drugim. Opór  $R$  jest znany, więc otrzymujemy w pierwszym przypadku

$$P'_u = k \frac{U^2}{R},$$



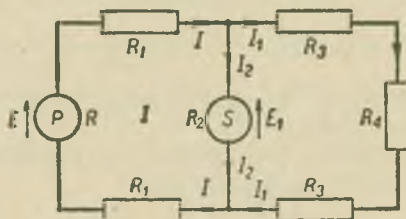
w drugim przypadku

$$P''_u = k \frac{U^2}{R'} = k \frac{n^2 U^2}{R'}$$

Ponieważ z warunków zadania wynika, że ma być  $P''_u = P'_u$ , więc otrzymujemy

$$k \frac{n^2 U^2}{R'} = k \frac{U^2}{R}, \quad \text{a zatem} \quad R' = n^2 R,$$

czyli pierwotny opór należy zwiększyć  $n^2$ -krotnie.



Rys. 4.59

4.169. Ponieważ  $E > E_1$ , prądy popłyną w obwodzie, tak jak to podano na rysunku 4.59 (przy obranym uprzednio kierunku  $E$ ). Stosując regułę Kirchhoffa dla oczka I otrzymujemy

$$E - E_1 = I(2R_1 + R) + I_2 R_2.$$

Stosując tę samą regułę do oczka obejmującego cały obwód otrzymujemy

$$E = I(2R_1 + R) + I_1(2R_3 + R_4)$$

oraz

$$I = I_1 + I_2.$$

Z tych trzech równań można obliczyć  $I_1$ ,  $I_2$  oraz  $I$ . Otrzymujemy końcowe wartości.

a)  $I_1 = 14,07$  A, b)  $I_2 = 8,65$  A,  $I = 22,71$  A. Oznaczając przez  $U_1$  napięcie na zaciskach prądnicy, przez  $U_2$  — napięcie na zaciskach silnika oraz przez  $U_3$  — napięcie na zaciskach pieca, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{c) } U_1 &= E - IR = 215,458 \text{ V,} \\ U_2 &= U_1 - 2IR_1 = 210,916 \text{ V,} \\ U_3 &= U_2 - 2I_1 R_3 = 209,509 \text{ V.} \end{aligned}$$

Całkowita moc prądnicy

$$\text{d) } P = EI = 4996,2 \text{ W.}$$

Moc pobierana przez silnik

$$\text{e) } P_1 = U_2 I_2 = 1824,4 \text{ W.}$$

Moc pobierana przez piec

$$P_2 = U_3 I_1 = 2947,8 \text{ W,} \quad \text{a więc} \quad \text{f) } \frac{P_1 + P_2}{P} 100 = 95,5\%.$$

tj. procent mocy prądnicy wykorzystywanej przez silnik oraz przez piec.

4.170. Ilość ciepła potrzebna do destylacji objętości  $V$  litrów wody wynosi

$$Q = mc\Delta T + m\lambda = 50 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \left[ 1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 80 \text{ K} + 539,6 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}} \right] = 30,98 \text{ kcal} = \\ = 1,30 \cdot 10^5 \text{ J} .$$

Jeżeli chcemy, by aparat destylacyjny otrzymywał tę ilość ciepła, grzejnik elektryczny powinien dostarczać ciepło w ilości

$$Q = \frac{Q'}{p} = 1,62 \cdot 10^5 \text{ J} .$$

Jeżeli oznaczymy przez  $P$  moc grzejnika, to otrzymamy

$$1000Q = 0,24Pt ,$$

zatem

$$P = \frac{Q \cdot 1000}{0,24t} = \frac{38\,725 \text{ cal}}{0,24 \frac{\text{cal}}{\text{J}} 60 \text{ s}} = 2689 \text{ W} .$$

Natężenie prądu płynącego przez grzejnik wynosi więc

$$I = \frac{P}{U} = \frac{2689}{220} \text{ A} = 12,2 \text{ A} .$$

Opór grzejnika wynosi

$$r = \frac{U}{I} = \frac{220}{12,2} \Omega = 18 \Omega .$$

4.171. Jedna amperogodzina = 1 amper · 1 godzina = 1 A · 3600 s = 3600 A · s = 3600 C.

4.172. Natężenie prądu na podstawie pierwszego prawa Faradaya wynosi

$$R = \frac{m}{kt} = 5,058 \text{ A} .$$

4.173. Z warunków zadania otrzymujemy

$$k = \frac{A_0}{w_0 F} = 8,29 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}} .$$

4.174. Czas niklowania obliczamy na podstawie pierwszego prawa Faradaya z wzoru

$$t = \frac{m}{kI} = \frac{Al_0}{kI} = 73333 \text{ s} = 20 \text{ h } 22 \text{ min } 15 \text{ s} .$$

Pojemność baterii dostarczającej prąd do niklowania powinna być większa aniżeli

$$tI = 63 \text{ amperogodzin} .$$

4.175. Z warunków zadania otrzymujemy

$$t = \frac{Ad_0}{kI} = 281 \cdot 753 \text{ s} = 78 \text{ h } 15 \text{ min } 53 \text{ s} .$$

4.176. Elektroda cynkowa traci masę

$$m_1 = \frac{A_1 It}{F} = 203 \cdot 10^{-6} \text{ kg.}$$

Podobnie elektroda miedziana uzyska masę

$$m_2 = \frac{A_2 It}{F} = 197 \cdot 10^{-6} \text{ kg.}$$

4.177. Z warunków zadania masa wydzielonego wodoru wynosi

$$m_H = k_1 It = 504 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$$

oraz masa wydzielonego tlenu

$$m_O = k_2 It = 44,832 \cdot 10^{-6} \text{ kg.}$$

Tlen oraz wodór powstały z rozkładu cząsteczek wody; zatem masa wody rozłożonej wynosi

$$m_{H_2O} = m_H + m_O = 49,872 \cdot 10^{-6} \text{ kg.}$$

4.178. Z warunków zadania otrzymujemy

$$e = \frac{m}{k} = 1,6 \cdot 10^{-10} \text{ A} \cdot \text{s.}$$

4.179. Z warunków zadania otrzymujemy

$$I_t = \frac{m}{k} = 0,9 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{s} = 248 \text{ amperogodzin.}$$

4.180. Masa wydzielonego wodoru wynosi

$$m_H = kIt = 63 \cdot 10^{-8} \text{ kg.}$$

Z równania charakterystycznego gazów doskonałych obliczymy objętość zajmowaną przez ten wodór w temperaturze  $T_0$  oraz pod ciśnieniem jednej atmosfery, zatem

$$V_H = \frac{mRT}{p} = 6,996 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Objętość wydzielonego tlenu w warunkach normalnych wynosi

$$V_O = k_2 It = 3,4806 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Zatem objętość mieszaniny piorunującej w warunkach normalnych wynosi

$$V = V_H + V_O = 10,48 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

4.181. Obliczamy objętość, którą zajmuje mieszanina piorunująca w warunkach normalnych

$$V_0 = V \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} = 161 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Natężenie prądu wydzielającego tę objętość w danych warunkach wynosi więc

$$I = \frac{V_0}{kt} = 5,13 \text{ A}.$$

4.182. Siła wynikająca z prawa Stokesa oraz działająca na jon siła pochodzenia elektrycznego równoważą się wzajemnie, a więc

$$6\pi\eta r v = qE,$$

lecz średnica jonu  $d = 2r$ , prędkość jonu  $v = uE$ , gdzie  $u$  oznacza ruchliwość jonu, zatem

$$3\pi\eta d u E = qE,$$

skąd

$$d = \frac{q}{3\pi\eta u} = 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ m},$$

ponieważ

$$\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{V} \cdot \text{s} = \text{A} \cdot \text{s} \frac{\text{J}}{\text{A} \cdot \text{s}} \text{s} = \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

$$\text{puaz} \cdot \text{cm}^2 = \frac{\text{dyna} \cdot \text{s}}{\text{cm}^2} \text{cm}^2 = 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s}.$$

4.183. Nie uwzględniając żadnych innych ubocznych wpływów, po pewnym czasie siła oporu określona prawem Stokesa spowoduje, że jon ten będzie się poruszał ze stałą prędkością  $v$  taką, że

$$6\pi\eta R v = Q E,$$

a więc ruchliwość jonu

$$u = \frac{v}{E} = \frac{Q}{6\pi\eta R} = 43 \cdot 10^{-18} \frac{\text{m}^2}{\text{V} \cdot \text{s}}.$$

4.184. Z warunków zadania wynika, że

$$\sigma = en\alpha(u_H + u_a),$$

gdzie  $n$  oznacza ilość cząsteczek w gramocząsteczce, ilość gramocząsteczek =  $N \frac{m}{A}$ ,  
zatem

$$\sigma = eN \frac{m}{A} \alpha(u_H + u_a) = 31,3 \text{ om}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}.$$

4.185. Z warunków zadania otrzymujemy

$$\sigma = en\alpha(u_a + u_k);$$

Objętość wydzielonego tlenu w warunkach normalnych wynosi

$$V_O = k_2 I t = 0,05801 \text{ cm}^3 \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 1 \text{ A} \cdot 60 \text{ s} = 3,4806 \text{ cm}^3.$$

Zatem objętość mieszaniny piorunującej w warunkach normalnych wynosi

$$V = V_H + V_O = 10,48 \text{ cm}^3.$$

4.186. Stała dysocjacji dla tego roztworu wynosi

$$\alpha = \frac{\Lambda}{\Lambda_{\infty}} = 0,756.$$

Na przewodnictwo molowe roztworu nieskończenie rozcieńczonego składa się przepływ ładunku równego stałej Faradaya (ujemnego i dodatniego)

$$\Lambda_{\infty} = F(u^{+} + u^{-}),$$

skąd otrzymujemy

$$u^{-} = \frac{\Lambda_{\infty}}{F} - u^{+} = 681 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{V} \cdot \text{s}}.$$

4.187. Liczby Hittorfa wyrażają udział kationów oraz anionów w przenoszeniu całkowitej ilości ładunków elektrycznych, zatem

$$n_k = 1 - n_a = 0,474.$$

Ale wiemy, że

$$n_a = \frac{u_k}{u_a + u_k}, \quad \text{skąd} \quad u_a = \frac{n_k}{n_a} u_k = 5,69 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{V} \cdot \text{s}}.$$

Ostatnia wartość szukana wyrażona jest wzorem

$$\Lambda_{\infty} = F(u_k + u_a) = 115,8 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\Omega \cdot \text{mol}}.$$

$$4.188. \Lambda = \alpha \Lambda_{\infty} = 88 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\Omega \cdot \text{mol}}, \quad \text{ale} \quad \Lambda = \frac{\sigma}{\eta}, \quad \text{skąd} \quad \sigma = \Lambda \eta = 8,8 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\Omega \cdot \text{m}}.$$

4.189. Na podstawie termodynamiki wiemy, że zmiana energii swobodnej wyrażona jest wzorem

$$\Delta F = \Delta U + T \frac{d(\Delta F)}{dT}.$$

U nas zmiana energii swobodnej  $\Delta F$  równa się pracy, potrzebnej do przeniesienia ładunków elektrycznych rozpuszczonego metalu przez warstwę graniczną, a więc  $\Delta F = wFE$ , a ponieważ  $w = 2$ , więc

$$\frac{d(\Delta F)}{dT} = wF \frac{dE}{dT},$$

gdzie po prawej stronie wzoru  $F$  oznacza stałą Faradaya. Otrzymujemy więc, że  $wFE = \Delta U + TwF \frac{dE}{dT}$ , skąd

$$\Delta U = wF \left[ E - T \frac{dE}{dT} \right],$$

gdzie

$$\frac{dE}{dT} = -4,06 \cdot 10^{-5} \frac{\text{V}}{\text{K}}, \quad \Delta U = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{mol}}.$$

4.190. Na podstawie zadania 4.189

$$\Delta U = wFE = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{mol}}.$$

4.191. Rozprężając mol gazu od objętości  $V_1$  do objętości  $V_2$  w stałej temperaturze uzyskujemy pracę

$$W = RT \ln \frac{V_1}{V_2} = RT \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Ciśnienie osmotyczne jonów podlega prawom gazów, można więc również i do naszego przypadku zastosować ten wzór. Otrzymamy zatem

$$W = RT \ln \frac{P}{p};$$

oznaczając przez  $E$  siłę elektromotoryczną warstwy granicznej metal-elektrolit, możemy pracę przeniesienia ładunku związanego z molem metalu przechodzącego do elektrolitu wyrazić wzorem

$$W = wFE,$$

skąd otrzymujemy

$$E = \frac{RT}{wF} \ln \frac{P}{p} = 0,399 \text{ V}.$$

4.192. Oznaczając przez  $s_1$  stężenie molowe jonów srebra, a przez  $s_2$  — jonów chloru oraz przez  $s_c$  — stężenie cząsteczek niezdysonowanych w roztworze, otrzymamy na wartość stałej Guldberga-Waagego wartość

$$K = \frac{s_1 s_2}{s_c} = \frac{s_1^2}{s - s_1},$$

skąd  $s_1^2 + Ks_1 - Ks = 0$ , zatem

$$s_1 = \frac{-K + \sqrt{K^2 + 4Ks}}{2},$$

gdyż rozwiązanie ze znakiem minus odpada, ponieważ  $s_1 > 0$ . Stałą dysocjacji  $\alpha$  wyrażamy wzorem

$$\alpha = \frac{s_1}{s} = \frac{K}{2s} \left[ \sqrt{1 + \frac{4s}{K}} - 1 \right],$$

ponieważ u nas  $s$  jest małe w porównaniu z  $K$ , możemy pierwiastek rozwinąć na szereg. Biorąc trzy pierwsze człony szeregu otrzymujemy

$$\alpha = \frac{K}{2s} \left[ 1 + \frac{2s}{K} - \frac{1}{8} \left( \frac{4s}{K} \right)^2 - 1 \right] = 1 - \frac{s}{K},$$

skąd

$$K = \frac{s}{1 - \alpha} = 5 \cdot 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$



4.193. Wartość natężenia pola magnetycznego obliczamy z wzoru Biota-Savarta w granicach całkowania od 0 do  $2\pi$  ( $r = \text{const}$ ;  $\sin\alpha = \sin 90^\circ = 1$ ). Otrzymujemy więc:

w układzie SI

$$H = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I \sin\alpha}{r^2} dl = \frac{I}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} dl = \frac{I}{4\pi r} 2\pi r = \frac{I}{2r},$$

ponieważ

$$H = \frac{F}{m}, \quad \text{zatem} \quad I = 2r \frac{F}{m},$$

gdzie  $r = 0,01$  m,  $F = 10^{-5}$  N,  $m = \frac{4\pi}{10^8}$  V·s. A więc

$$I = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-5} \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-8}} \text{ A} = \frac{10}{2\pi} \text{ A} = 1,6 \text{ A};$$

w układzie EM CGS

$$H = \int_0^{2\pi} \frac{I \sin\alpha}{r^2} dl = \frac{2\pi I}{r} = \frac{F}{m}, \quad \text{skąd} \quad I = \frac{Fr}{2\pi m},$$

gdzie  $F = 1$  dyna,  $r = 1$  cm,  $m = 1$  j. EM CGS. A więc

$$I = \frac{1}{2\pi} = 0,16 \text{ j. EM CGS}.$$

4.194. Z warunków zadania otrzymujemy:

w układzie SI

$$H = \frac{1}{4\pi} n \int_0^{2\pi} \frac{I \sin\alpha}{r^2} dl = \frac{nI}{2r},$$

gdzie  $I = 5$  A,  $n = 750$ ,  $r = 0,3$  m, a więc

$$H = \frac{750 \cdot 5}{2 \cdot 0,3} \frac{\text{A}}{\text{m}} = 6250 \frac{\text{A}}{\text{m}};$$

w układzie EM CGS

$$H = n \int_0^{2\pi} \frac{I \sin\alpha}{r^2} dl = \frac{2\pi n I}{r},$$

gdzie  $I = 0,5$  j. EM CGS,  $r = 30$  cm,  $n = 750$ . A więc

$$H = \frac{2\pi \cdot 0,5 \cdot 750}{30} \text{ Oe} = 25\pi \text{ Oe} = 78,5 \text{ Oe}.$$

4.195. Oznaczmy przez  $H_z$  (rys. 4.60) składową poziomą natężenia pola ziemskiego oraz przez  $H_p$  natężenie pola magnetycznego busoli stycznych po włączeniu do niej prądu elektrycznego. Z warunku równowagi otrzymujemy

$$\frac{H_p}{H_z} = \text{tga}, \quad \text{a więc} \quad H_z = H_p \text{ctga}.$$

Całkowite zaś natężenie pola ziemskiego

$$H = \frac{H_z}{\cos I} = H_p \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\cos I} = H_p \frac{2,384}{0,4384} = 5,44 H_p .$$

Natężenie prądu elektrycznego przepływającego przez busołą obliczymy w każdym układzie z wzoru

$$I = \frac{m}{kt} .$$

Otrzymujemy:  
w układzie SI

$$H_p = \frac{I}{2r} = \frac{m}{2ktr} , \quad \text{a więc} \quad H = 5,44 \frac{m}{2ktr} ,$$



Rys. 4.60

gdzie  $m = 202 \cdot 10^{-6}$  kg,  $k = 1,118 \cdot 10^{-6}$  kg/A·s,  $t = 90$  s,  $r = 0,15$  m; zatem

$$H = 5,44 \frac{202 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1,118 \cdot 10^{-6} \cdot 90 \cdot 0,15} \frac{\text{A}}{\text{m}} = 36,4 \frac{\text{A}}{\text{m}} ;$$

w układzie EM CGS

$$H_p = \frac{2\pi I}{r} = \frac{2\pi m}{ktr} , \quad \text{a więc} \quad H = 5,44 \frac{2\pi m}{ktr} ,$$

gdzie  $m = 202 \cdot 10^{-3}$  g,  $k = 1,118 \cdot 10^{-2}$  g j. EM CGS ładunku  $t = 90$  s,  $r = 15$  cm; zatem

$$H = 5,44 \frac{2 \cdot 202 \cdot 10^{-3}}{15 \cdot 1,118 \cdot 10^{-2} \cdot 90} \text{Oe} = 0,459 \text{Oe} ,$$

4.196. Z prawa Biota-Savarta otrzymujemy:  
w układzie SI

$$H_b = \frac{nI}{2r} ,$$

gdzie  $H_b$  oznacza pole magnetyczne busoli oraz

$$H_z = H_b \operatorname{ctg} \alpha = \frac{nI}{2r} \operatorname{ctg} \alpha,$$

a więc

$$I = \frac{2rH_z}{n} \operatorname{tg} \alpha = C \operatorname{tg} \alpha,$$

gdzie  $r = 0,28$  m,  $n = 2$ ,  $H = 0,19 \cdot 79,6 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 15,124 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ , zatem

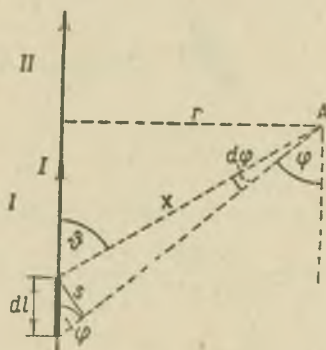
$$C = \frac{2 \cdot 0,28 \cdot 15,124}{2} \text{ A} = 4,23 \text{ A}.$$

w układzie EM CGS

$$H_b = \frac{2\pi nI}{r}, \quad \text{zatem} \quad I = \frac{rH_z}{2\pi n} \operatorname{tg} \alpha = C \operatorname{tg} \alpha,$$

gdzie  $r = 28$  cm,  $n = 2$ ,  $H_z = 0,19$  Oe. A więc

$$C = \frac{28 \cdot 0,19}{2 \cdot 3,14 \cdot 2} \text{ cm} \cdot \text{Oe} = 0,42 \text{ cm} \cdot \text{Oe}.$$



Rys. 4.61

4.197. W układzie EM CGS część pola pochodząca od elementu  $dl$  wynosi (rys. 4.61)

$$dH = \frac{dlI \sin \vartheta}{x^2} = \frac{dlI \sin \varphi}{x^2}, \quad \text{gdyż} \quad \vartheta \cong \varphi,$$

gdzie

$$s = x d\varphi, \quad r = x \sin \vartheta = x \sin \varphi$$

oraz

$$s = dl \sin \varphi,$$

a więc

$$x = \frac{r}{\sin\varphi}, \quad x^2 = \frac{r^2}{\sin^2\varphi},$$

zatem

$$dl = \frac{s}{\sin\varphi} = \frac{x d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{r d\varphi}{\sin^2\varphi},$$

więc

$$dH = \frac{I \frac{r d\varphi}{\sin^2\varphi} \sin\varphi}{\frac{r^2}{\sin^2\varphi}} = \frac{I \sin\varphi d\varphi}{r}.$$

Wartość całkowita natężenia pola magnetycznego w punkcie  $A$  pochodzi od obu połówek drutu I i II; wynosi więc

$$H = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{I}{r} \sin\varphi d\varphi = \frac{2I}{r} \left( -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0^\circ \right) = \frac{2I}{r}.$$

W układzie EM CGS

$$H = \frac{2 \cdot 0,5}{20} \text{ Oe} = 0,05 \text{ Oe},$$

W układzie SI część pola pochodząca od elementu  $dl$  przedstawić możemy wzorem

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{I dl \sin\varphi}{x^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{I \sin\varphi d\varphi}{r},$$

a więc po scałkowaniu

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{r} = \frac{1}{4\pi} \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 10}{0,2} \frac{\text{A}}{\text{m}} = 3,98 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

**4.198.** Korzystamy ze wzoru w rozwiązaniu zadania 4.197 i otrzymujemy: w układzie SI

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{r} = \frac{1}{4\pi} \frac{2 \cdot 4}{0,1} \frac{\text{A}}{\text{m}} = 6,37 \frac{\text{A}}{\text{m}};$$

w układzie EM CGS

$$H = \frac{2I}{r} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-1}}{10} \text{ Oe} = 0,08 \text{ Oe}.$$

**4.199.** Na podstawie wyników zadania 4.197 otrzymujemy w układzie EM CGS (rys. 4.62)

$$H_A = \frac{I}{r} (\cos\alpha - \cos\beta) = \frac{I}{r} 2\cos\alpha,$$

ponieważ  $\cos\beta = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ , lecz

$$\cos\alpha = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{4}l^2}} = \frac{l}{\sqrt{4r^2 + l^2}}.$$

Zatem

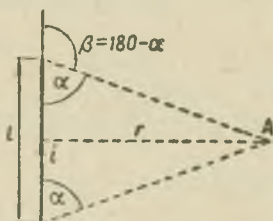
$$H_A = \frac{2I}{r} \frac{l}{\sqrt{4r^2 + l^2}} = \frac{2I}{r} \frac{50}{\sqrt{2500 + 100}} \approx \frac{2I}{r}.$$

W układzie SI

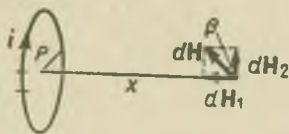
$$H_A = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{r} \frac{l}{\sqrt{4r^2 + l^2}} = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{r} 1 = \frac{1}{4\pi} \frac{2 \cdot 5 \text{ A}}{0,05 \text{ m}} = 0,16 \cdot 10^{-2} \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

w układzie EM CGS

$$H_A = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-1}}{5} \text{ Oe} = 0,2 \text{ Oe}.$$



Rys. 4.62



Rys. 4.63

4.200. Na podstawie reguły Biota–Savarta natężenie pola magnetycznego w punkcie  $P$  odległym o  $x$  od powierzchni koła (rys. 4.63), pochodzące od elementu  $dl$  obwodu koła będzie wynosiło

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}, \quad \text{ale u nas} \quad \alpha = \frac{\pi}{2},$$

zatem

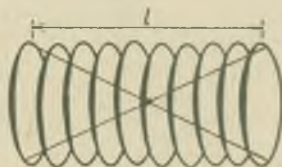
$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{Idl}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

Wektor ten możemy rozłożyć na dwie składowe:  $dH_1$  równoległą do osi  $x$  oraz  $dH_2$  prostopadłą do niej. Składowe prostopadłe pochodzące od całego obwodu dadzą w sumie wypadkową równą zero. Składowe równoległe do osi  $x$  dadzą pole wypadkowe skierowane do powierzchni koła lub od powierzchni koła, w zależności od kierunku przepływu prądu w obwodzie koła, a wartość tej wypadkowej otrzymamy przez całkowanie

$$\begin{aligned} H &= \int_0^{2\pi R} \frac{1}{4\pi} \frac{I}{\sqrt{R^2 + x^2}} \sin \beta dl = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi R} \frac{1}{R^2 + x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} dl = \\ &= \frac{I}{4\pi} \frac{R}{(\sqrt{R^2 + x^2})^3} 2\pi R = \frac{IR^2}{2(\sqrt{R^2 + x^2})^3} = 8 \cdot 10^{-4} \frac{\text{A}}{\text{m}}. \end{aligned}$$

4.201. Na podstawie zadania 4.200 składowa natężenia pola magnetycznego leżąca wzdłuż osi solenoidu w punkcie środkowym  $P$  (rys. 4.64), pochodząca od elementów prądu leżących na długości  $dx$  będzie wynosiła

$$dH = \frac{IR^2}{2(\sqrt{R^2+x^2})^3} \frac{N}{l} dx.$$



Rys. 4.64

Całkowita wartość wypadkowa będzie wynosiła

$$H = \frac{IN}{2lR} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{dx}{\left(\sqrt{1+\left(\frac{x}{R}\right)^2}\right)^3},$$

a podstawiając  $x = Rt$ , czyli  $dx = Rdt$  otrzymujemy

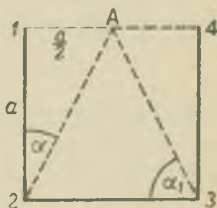
$$\frac{IN}{2l} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{dt}{(\sqrt{1+t^2})^3} = \frac{IN}{\sqrt{l^2+4R^2}}.$$

W naszym przypadku, podobnie jak w większości solenoidów można przyjąć, że  $l \gg R$ , zatem nasz wzór można jeszcze uprościć

$$H = \frac{IN}{l} = 8 \cdot 10^3 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

4.202. Przeprowadzając obliczenia podobnie jak w zadaniu 4.201 otrzymujemy, że wartości te są sobie równe i wynoszą połowę wartości wektora  $H$ , leżącego we wnętrzu solenoidu w punkcie centralnym

$$H_1 = H_2 = \frac{1}{2} H_0 = 4 \cdot 10^3 \text{ A/m}.$$



Rys. 4.65

4.203. Natężenie pola magnetycznego w punkcie  $A$  pochodzi od prądów płynących w przewodach 1-2, 2-3 oraz 3-4 (rys. 4.65). Pole wypadkowe w tym punkcie można obliczyć jako

$$H_A = H_{12} + H_{23} + H_{34}.$$



Ponieważ kierunki pól składowych są takie same, można sumowanie geometryczne zastąpić sumowaniem algebraicznym,

$$H_A = H_{12} + H_{23} + H_{34}.$$

Z zadania 4.199 otrzymujemy, że w układzie EM CGS

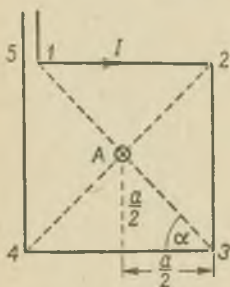
$$H_{12} = H_{34} = \frac{1}{2} \frac{2I}{a/2} \cos \alpha = \frac{2I}{a} \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}a^2}} = \frac{2I}{a} \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894 \frac{2I}{a},$$

w układzie SI

$$H_{12} = H_{34} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2} \frac{2I}{a/2} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi} 0,894 \frac{2I}{a} = \frac{1}{4\pi} 0,894 \frac{2 \cdot 5 \text{ A}}{0,1 \text{ m}} = 7,116 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

w układzie EM CGS

$$H_{12} = H_{34} = 0,894 \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-1}}{10} \text{ Oe} = 0,0894 \text{ Oe}.$$



Pozostała składowa w układzie EM CGS

$$H_{23} = \frac{2I}{a} \cos \alpha_1 = \frac{2I}{a} \frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}a^2}} = 0,447 \frac{2I}{a} = 0,0447 \text{ Oe}.$$

W układzie SI

$$H_{23} = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{a} \cos \alpha_1 = \frac{0,447}{4\pi} \frac{2I}{a} = \frac{0,447}{4\pi} \frac{2 \cdot 5 \text{ A}}{0,1 \text{ m}} = 3,558 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

Rys. 4.66

Całkowite natężenie w punkcie  $A$  wynosi:

w układzie SI  $H_A = H_{12} + H_{23} + H_{34} = 17,790 \text{ A/m},$

w układzie EM CGS  $H_A = 0,2235 \text{ Oe}.$

4.204. Natężenie pola magnetycznego w punkcie  $A$  składa się z natężeń pól, wywołanych przez prądy płynące w przewodnikach 1-2, 2-3, 3-4 i 4-5, a więc

$$H_A = H_{12} + H_{23} + H_{34} + H_{45}.$$

Składowe natężenia są sobie równe co do wartości, a ponadto leżą w jednej linii i są zgodnie skierowane ( $H_A$  jest prostopadłe do płaszczyzny rysunku 4.66 oraz skierowane w dół). Stąd widać, że

$$H_{12} = H_{23} = H_{34} = H_{45},$$

zatem

$$H_A = 4H_{12}.$$

W układzie SI

$$H_{12} = \frac{0,70}{4\pi} \frac{4I}{a} = \frac{0,70}{4\pi} \frac{4 \cdot 2 \text{ A}}{0,1 \text{ m}} = 4,46 \frac{\text{A}}{\text{m}}; \quad H_A = 17,84 \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

W układzie EM CGS

$$H_{12} = \frac{2I}{\frac{1}{2}a} \cos \alpha = \frac{4I}{a} \frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2}} = \frac{4I}{a} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,70 \frac{4I}{a} = 0,70 \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-1}}{10} \text{ Oe} =$$
$$= 5,6 \cdot 10^{-2} \text{ Oe},$$

$$H_A = 22,4 \cdot 10^{-2} \text{ Oe}.$$

4.205. Jeżeli przez drut przepływa prąd o natężeniu  $I$ , drut ten znajduje się w polu magnetycznym o natężeniu  $H$ , kierunek zaś elementu drutu  $dl$  tworzy z kierunkiem pola  $H$  kąt  $\alpha$ , to natężenie płynącego przez drut prądu można obliczyć z wzoru:

w układzie SI

$$I = \frac{10^7}{4\pi} \frac{dF}{H dl \sin \alpha},$$

gdzie  $dF = 0,05 \text{ N}$ ,  $\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1$ ,  $dl = 0,05 \text{ m}$ ,  $H = 5000 \cdot 79,6 \text{ A/m} = 398000 \text{ A/m}$ ; a więc

$$I = \frac{10^7}{4\pi} \frac{0,05}{3,98 \cdot 10^5 \cdot 0,05 \cdot 1} \text{ A} = \frac{100}{50} \text{ A} = 2 \text{ A};$$

w układzie EM CGS

$$I = \frac{dF}{H dl \sin \alpha},$$

gdzie  $dF = 0,05 \cdot 10^5 \text{ dyn}$ ,  $dl = 5 \text{ cm}$ ,  $H = 5000 \text{ Oe}$ ,  $\sin \alpha = 1$ , a więc

$$I = \frac{0,05 \cdot 10^5}{5 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 1} \text{ j. EM CGS} = 0,2 \text{ j. EM CGS}.$$

4.206. Praca prądu elektrycznego w warunkach zadania wynosi:

w układzie SI

$$dW = \frac{4\pi}{10^7} H I \sin \alpha \cdot s dl = \frac{4\pi}{10^7} \cdot 500 \frac{10^3}{4} \cdot 2 \cdot 0,05 \cdot 0,5 \text{ J} = 0,025 \text{ J};$$

w układzie EM CGS

$$dW = H I dl \sin \alpha \cdot s = 500 \cdot 0,2 \cdot 5 \cdot 50 \text{ ergów} = 25000 \text{ ergów}.$$

4.207. Praca prądu elektrycznego obliczona w zadaniu 4.206 wynosiła

$$W = 25000 \text{ ergów} = 25 \cdot 10^{-4} \text{ J}.$$

Praca wykonana przez baterię wynosi

$$W_1 = E I t.$$

W układzie SI

$$W_1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \frac{1}{100} \text{ dżuli} = 0,02 \text{ dżuli};$$

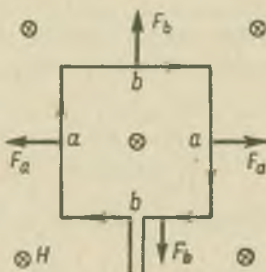
w układzie EM CGS

$$W_1 = 2 \cdot 10^8 \cdot 0,2 \cdot 2 \frac{1}{100} \text{ ergów} = 2 \cdot 10^5 \text{ ergów}.$$

Wydajność więc tego procesu wynosi

$$\eta = \frac{W}{W_1} 100\% = \frac{25000}{2 \cdot 10^6} 100 = \frac{25 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-2}} 100\% = 12,5\%.$$

4.208.  $W = I\Delta\Phi = I[BS\cos\alpha_2 - BS\cos\alpha_1] = 27,77 \text{ J}.$



Rys. 4.67

4.209. Siły działające na boki tego prostokąta (rys. 4.67) są siłami rozciągającymi boki tej ramki i wynoszą:

w układzie SI

$$F_a = \frac{4\pi}{10^7} \int_1^2 H I \sin\alpha dl = \frac{4\pi}{10^7} H I \int_1^2 dl = \frac{4\pi}{10^7} H I a = \frac{4\pi}{10^7} 500 \cdot \frac{10^8}{4\pi} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ N} =$$

$$= \frac{5}{10^3} \text{ N} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ N},$$

$$F_b = \frac{4\pi}{10^7} H I b = \frac{4\pi}{10^7} 500 \frac{10^8}{4\pi} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-2} \text{ N} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ N};$$

W układzie EM CGS

$$F_a = \int_1^2 H I \sin\alpha dl = H I a = 500 \cdot 0,2 \cdot 5 \text{ dyn} = 500 \text{ dyn},$$

$$F_b = H I b = 500 \cdot 0,2 \cdot 10 \text{ dyn} = 1000 \text{ dyn}.$$

Strumień wektora indukcji magnetycznej przepływający przez tę ramkę wynosi:

w układzie SI

$$\Phi = \frac{4\pi}{10^7} H S = \frac{4\pi}{10^7} \frac{10^8}{4\pi} 500 \cdot 50 \cdot 10^{-4} \text{ Wb} = 25 \cdot 10^{-5} \text{ Wb (weberów)};$$

w układzie EM CGS

$$\Phi = H S = 500 \cdot 50 \text{ (Oe} \cdot \text{cm}^2) = 25000 \text{ Mx (maksweli)}.$$

4.210. Siła działająca na centymetr długości obwodu wynosi:

w układzie SI

$$dF = \frac{4\pi}{10^7} H I d l \sin \alpha = \frac{4\pi}{10^7} 500 \frac{10^3}{4\pi} 5 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \text{ N} = 25 \cdot 10^{-4} \text{ N};$$

w układzie EM CGS

$$dF = H I d l \sin \alpha = 500 \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 1 \text{ dyn} = 250 \text{ dyn}.$$

Strumień wektora indukcji magnetycznej przepływający przez ten obwód wynosi:

w układzie SI

$$\Phi = \frac{4\pi}{10^7} H S = \frac{4\pi}{10^7} 500 \frac{10^3}{4\pi} (5 \cdot 10^{-2})^2 \text{ Wb} = 39250 \cdot 10^{-8} \text{ Wb};$$

w układzie EM CGS

$$\Phi = H S = 500\pi \cdot 25 \text{ Mx} = 39250 \text{ Mx}.$$

4.211. Siła wywierana na górny bok działa ku górze i wynosi

$$F_1 = I l \left[ B + \frac{\partial B}{\partial z} \right] b,$$

a siła wywierana na dolny bok działa w dół i wynosi

$$F_2 = I l B.$$

Zatem wypadkowa siła na te dwa boki działa ku górze i wynosi

$$F = F_1 - F_2 = I A \frac{\partial B}{\partial z} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ N}.$$

Siły wywierane na boki  $b$  wzajemnie się znoszą. Widzimy więc, że siła ta wciąga ramkę do miejsc o silniejszym polu magnetycznym, a wypycha z miejsc o słabszym polu magnetycznym.

$$4.212. \Phi = \oint_{\hat{S}} B dS = B S = \mu \mu_0 H S = \mu \mu_0 \frac{I N}{l} S = \frac{I N}{l} = \frac{I N}{R_m},$$

gdzie  $R_m$  oznacza opór magnetyczny tego toroidu.

$$\Phi = 4\pi \cdot 10^{-2} \text{ V} \cdot \text{s} = 4\pi \cdot 10^{-2} \text{ Wb},$$

$$R_m = 7,95 \cdot 10^3 \frac{\text{A}^2}{\text{I}} = 7,95 \cdot 10^3 \frac{\text{A}}{\text{V} \cdot \text{s}} = 7,95 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{H}}.$$

4.213. Strumień wektora indukcji magnetycznej  $\Phi$  rozgałęzia się (rys. 4.68) na dwa strumienie  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ . Na podstawie zadania 4.212.

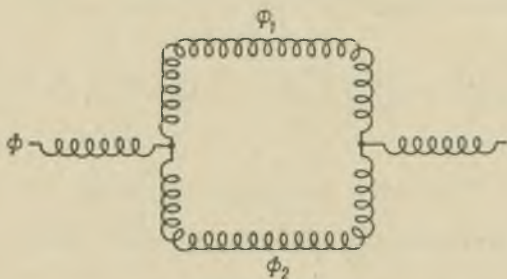
$$\Phi_1 = \frac{I N}{R_{1m}} \quad \text{oraz} \quad \Phi_2 = \frac{I N}{R_{2m}}.$$

Zatem

$$\frac{\Phi}{IN} = \frac{1}{R_{1m}} + \frac{1}{R_{2m}} = \frac{1}{R_m},$$

gdzie  $R_m$  jest całkowitym oporem magnetycznym układu

$$m = \frac{R_{1m}R_{2m}}{R_{1m} + R_{2m}} = 3,0 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{H}}.$$



Rys. 4.68

4.214. Ponieważ  $\Phi_1 = \Phi_2$ , zatem  $\frac{IN_1}{R_{1m}} = \frac{IN_2}{R_{2m}}$ ,

a więc

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{R_{1m}}{R_{2m}} = \frac{1}{10}.$$

4.215.  $R_{rdz} = \frac{l_1}{\mu\mu_0 S}$  oraz  $R_{szczeliny} = \frac{l_2}{\mu_0 S}$ .

Zatem

$$R_{szczeliny} = R_{rdzenia} \cdot \frac{\mu l_2}{l_1} = 20 R_{rdzenia}.$$

4.216. Gęstość energii pola magnetycznego (rys. 4.69) wyrażamy wzorem

$$\varrho_m = \frac{1}{2} HB,$$

zatem

$$d\varrho_m = \frac{1}{2} dHB + \frac{1}{2} HdB,$$

ale  $dB = \mu\mu_0 dH$ , skąd  $HdB = BdH$ , więc  $d\varrho_m = HdB$ . Całkowita strata energii magnetycznej podczas jednego cyklu magnesowania wynosi więc

$$W = \oint HdB = 4H_k B_n = 7,6 \cdot 10^2 \text{ J/m}^3.$$

4.217. Sumując styczną wektora  $H$  po całym obwodzie toroidu (rys. 4.70) otrzymamy

$$\oint H_s ds = H_w(2\pi R - a) + H_s a,$$

gdzie  $H_w$  oznacza pole wewnątrz rdzenia, a  $H_s$  — pole wewnątrz szczeliny. Całkowite pole wynosi  $IN$ , zatem

$$IN = H_w(2\pi R - a) + H_s a.$$

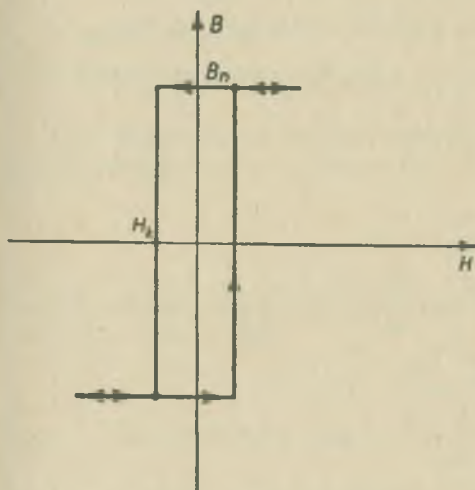
Strumień wektora indukcji magnetycznej (składowa normalna) jest stały przy przejściu granicznym, a więc u nas

$$\mu\mu_0 H_w = \mu_0 H_s.$$

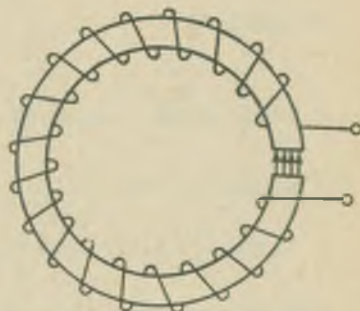
Zatem

$$H_s = NI \frac{\mu}{2\pi R - a + \mu a} = 1,73 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

4.218.  $B = \mu\mu_0 \frac{N}{l}$ , skąd  $\frac{N}{l} = \frac{B}{\mu\mu_0 l} = 3,98 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$ .



Rys. 4.69



Rys. 4.70

4.219. Podczas małego obrotu o kąt  $\Delta\varphi$  promień, wzdłuż którego płynie prąd elektryczny, zakreślił powierzchnię  $\Delta S = \frac{1}{2} R \cdot R \Delta\varphi = \frac{1}{2} R^2 \Delta\varphi$ , a więc przez tę powierzchnię przejdzie strumień wektora indukcji magnetycznej

$$\Delta\Phi = B\Delta S = \frac{1}{2} R^2 B \Delta\varphi.$$

Praca wykonana podczas jednego całkowitego obrotu

$$W = \frac{1}{2} I B R^2 (2\pi - 0),$$

zatem

$$B = \frac{W}{\pi R^2 I} = 7,9 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}.$$



4.220. Wartość wzbudzonej siły elektromotorycznej wynosi

$$E = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Ponieważ

$$\Phi = \Phi_0 \sin \omega t, \quad \text{więc} \quad E = -\omega \Phi_0 \cos \omega t,$$

skąd

$$E_{\max} = \omega \Phi_0.$$

W układzie SI

$$E_{\max} = \omega \frac{4\pi}{10^7} HS = 2\pi \cdot 14 \cdot \frac{4\pi}{10^7} 200 \frac{10^9}{4\pi} 50 \cdot 10^{-4} \text{ V} = 87,92 \cdot 10^{-4} \text{ V},$$

w układzie EM CGS

$$E_{\max} = \omega HS = 2\pi \cdot 14 \cdot 200 \cdot 50 \text{ j. EM CGS} = 87,92 \cdot 10^4 \text{ j. EM CGS}.$$

4.221. Pomijając kierunek powstałej siły elektromotorycznej otrzymujemy na jej wartość

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

W układzie SI

$$E = \frac{n \frac{4\pi}{10^7} HS}{\Delta t} = 500 \cdot \frac{4\pi}{10^7} \cdot 12000 \cdot \frac{10^9}{4\pi} \pi (8 \cdot 10^{-2})^2 \frac{1}{0,2} \text{ V} = 60 \text{ V};$$

w układzie EM CGS

$$E = \frac{nHS}{\Delta t} = 500 \cdot 12000 \pi \cdot 64 \frac{1}{0,2} \text{ j. EM CGS} = 6 \cdot 10^9 \text{ j. EM CGS}.$$

4.222. Podczas wyłączania powstała siła elektromotoryczna, której wartość obliczymy z wzoru:

w układzie SI

$$E = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} = -10 \frac{0 - 5 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}} \text{ V} = 5 \text{ V};$$

w układzie EM CGS

$$E = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} = -10 \cdot 10^9 \frac{0 - 5 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}} \text{ j. EM CGS} = 5 \cdot 10^8 \text{ j. EM CGS}.$$

4.223. Siła elektromotoryczna wynosi:

w układzie SI

$$F = -L \frac{I_2 - I_1}{t} = -0,2 \frac{(170 - 720) \cdot 10^{-8}}{1 \cdot 10^{-2}} \text{ V} = 11 \text{ V};$$

w układzie EM CGS

$$E = -L \frac{I_2 - I_1}{t} = -0,2 \cdot 10^9 \frac{(170 - 720) \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 10^{-2}} \text{ j. EM CGS} = 11 \cdot 10^8 \text{ j. EM CGS.}$$

4.224. Natężenie pola magnetycznego ziemskiego w tym miejscu wynosi

$$H = \frac{H_p}{\cos I} = \frac{H_p^1}{0,4226} = 2,36 H_p.$$

Indukowana siła elektromotoryczna, pomijając jej kierunek, wynosi więc:  
w układzie SI

$$E = \frac{4\pi}{10^9} Hlv = \frac{4\pi}{10^9} \cdot 2,36 \cdot 0,2 \frac{10^9}{4\pi} \cdot 2 \cdot 0,9 \text{ V} = 8,496 \cdot 10^{-8} \text{ V};$$

w układzie EM CGS

$$E = Hlv = 2,36 \cdot 0,2 \cdot 200 \cdot 90 \text{ j. EM CGS} = 8496 \text{ j. EM CGS.}$$

4.225. Wiemy, że siła elektromotoryczna wzbudzona przez zmianę strumienia wektora indukcji magnetycznej wyraża się wzorem

$$E = - \frac{d\Phi}{dt},$$

strumień wektora indukcji magnetycznej przechodzi przez  $n$  zwojów, każdy o powierzchni  $S$ , a więc wynosi

$$\Phi = nSB = nS\mu\mu_0 H = \mu\mu_0 nS \frac{nI}{l},$$

zatem

$$E = -\mu\mu_0 S \frac{n^2}{l} \frac{dI}{dt}.$$

A więc

$$L = \mu\mu_0 S \frac{n^2}{l} = 16\pi \cdot 10^3 \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}} = 16\pi \cdot 10^3 \text{ H.}$$

4.226. Strumień wektora indukcji magnetycznej panujący wewnątrz drugiej cewki

$$\Phi_2 = n_2 SB = n_2 S \mu\mu_0 H,$$

gdzie  $H$  jest natężeniem pola magnetycznego wytworzonego w drugiej cewce przez prąd  $I_1$  płynący w cewce pierwszej i wynosi

$$H = \frac{n_1 I_1}{l}.$$

a więc

$$\Phi_2 = \mu_0 \mu n_1 n_2 \frac{S}{l} I_1.$$

Siła elektromotoryczna wytworzona w drugiej cewce wynosi więc

$$E_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\mu_0 \mu n_1 n_2 \frac{S}{l} \frac{dI_1}{dt} = -M_{12} \frac{dI_1}{dt}.$$

Zatem

$$M_{12} = \mu_0 \mu n_1 n_2 \frac{S}{l} = 5,0 \text{ H}.$$

$$4.227. \text{ a) } s_1 = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\text{const } n_1^2 \frac{r_1^2}{l_1}}{\text{const } n_2^2 \frac{r_2^2}{l_2}} = \frac{n_1^2 r_1^2}{\left(\frac{n_1}{2}\right)^2 (2r_1)^2} = 1,$$

b) analogicznie,  $s_2 = \frac{1}{2}$ .

4.228. Ilość zwojów nawiniętego na ten solenoid drutu obliczymy, dzieląc długość drutu przez obwód cewki solenoidu, a więc

$$n = \frac{l_1}{2\pi r}, \quad \text{skąd} \quad n^2 = \frac{l_1^2}{4\pi^2 r^2}.$$

W układzie SI

$$L = 10^{-7} \frac{l_1^2}{l_2} = 10^{-7} \frac{6^2}{8 \cdot 10^{-2}} \text{ H} = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ H};$$

w układzie EM CGS

$$E = \frac{l_1^2}{l_2} = \frac{36 \cdot 10^4}{8} \text{ cm} = 4,5 \cdot 10^4 \text{ cm}.$$

4.229. Samoindukcja tego obwodu wynosi:

w układzie SI

$$\begin{aligned} L &= 10^{-7} \cdot 4\pi^2 n^2 \frac{r^2}{l} = 10^{-7} \frac{4 \cdot 3,14^2 (10^3)^2 \cdot (6 \cdot 10^{-2})^2}{18 (10^{-2})^2} \text{ H} = \\ &= 10^{-9} \cdot 78,88 \cdot 10^6 \text{ H} = 78,88 \cdot 10^{-3} \text{ H}; \end{aligned}$$

w układzie EM CGS

$$L = 4\pi^2 n^2 \frac{r^2}{l} = \frac{4 \cdot 3,14^2 (10^5)^2 \cdot 6^2}{18} \text{ cm} = 78,88 \cdot 10^6 \text{ cm}.$$

Siła elektromotoryczna wzbudzona w tym solenoidzie wynosi więc:

w układzie SI

$$E = -L \frac{dI}{dt} = -78,88 \cdot 10^{-3} \frac{0-5}{10^{-3}} \text{ V} = 394,4 \text{ V};$$

w układzie EM CGS

$$E = -L \frac{dI}{dt} = -78,88 \cdot 10^6 \frac{0-0,5}{10^{-3}} \text{ j. EM CGS} = 394,4 \cdot 10^8 \text{ j. EM CGS}.$$

4.230. Na podstawie teorii wartość oraz kierunek rozchodzenia się energii fali elektromagnetycznej określa wektor Poyntinga

$$P = E \times H, \quad \text{ale} \quad E \perp H,$$

zatem

$$P = E \cdot H = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{wat}}{\text{m}^2}.$$

4.231. Okres drgań tego układu wynosi

$$T = 2\pi \sqrt{LC}, \quad \text{skąd} \quad L = \frac{T^2}{4\pi^2 C},$$

lecz

$$T = \frac{\lambda}{c}, \quad \text{a więc} \quad L = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 C}.$$

W układzie SI

$$L = \frac{(13 \cdot 10^3)^2}{4 \cdot 3,14^2 \cdot 3^2 \cdot (10^9)^2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-12}} \text{ H} = 0,476 \cdot 10^{-5} \text{ H};$$

w układzie EM CGS

$$L = \frac{(13 \cdot 10^4)^2}{4 \cdot 3,14^2 \cdot 3^2 \cdot (10^{10})^2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-21}} \text{ cm} = 0,476 \cdot 10^4 \text{ cm}.$$

4.232. Okres drgań równa się

$$T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

W układzie SI

$$T = 2 \cdot 3,14 \sqrt{8 \cdot 10^4 \cdot 10^{-9} \frac{500}{9 \cdot 10^{11}}} \text{ s} = 1,32 \cdot 10^{-4} \text{ s};$$

w układzie EM CGS

$$T = 2 \cdot 3,14 \sqrt{8 \cdot 10^4 \frac{500}{9 \cdot 10^{20}}} \text{ s} = 1,32 \cdot 10^{-4} \text{ s}.$$

W każdym z układów częstość drgań wynosi

$$f = \frac{1}{T} = 755 \cdot 10^3 \text{ Hz},$$

stąd prędkość kątowna

$$\omega = 2\pi f = 4741 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

oraz długość fali w poszczególnych układach wynosi

$$\lambda = cT = 396,9 \text{ m}.$$

4.233. Ponieważ istnieje związek między długością fali a jej okresem w postaci

$$\lambda = cT = \frac{c}{f},$$

zatem w każdym układzie jednostek

$$f = \frac{c}{\lambda}.$$

W układzie SI

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^4} \text{ Hz} = 10^4 \text{ Hz};$$

w układzie EM CGS oraz ES CGS

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^4} \text{ Hz} = 10^6 \text{ Hz}.$$

4.234. W każdym układzie częstotliwość tę obliczamy na podstawie wzoru

$$\omega = 2\pi f = 314 \text{ Hz}.$$

4.235. Opór, który stawia butelka lejdejska przepływającemu przez nią prądowi, wynosi w każdym z układów

$$Z = \frac{1}{2\pi f C}.$$

W układzie SI

$$Z = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{100} \frac{1}{\frac{2 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^{11}}} \Omega = 716 \cdot 10^3 \Omega;$$

w układzie EM CGS

$$Z = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{100} \frac{1}{\frac{2 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^{30}}} \text{ j. EM CGS} = 716 \cdot 10^{23} \text{ j. EM CGS}.$$

Zatem natężenie skuteczne prądu oraz maksymalne natężenie prądu elektrycznego wyniesie

w układzie SI

$$I_s = \frac{U_s}{Z} = \frac{1000}{716 \cdot 10^8} \text{ A} = 0,014 \text{ A} ,$$

$$I_{\max} = \sqrt{2} I_s = 0,019 \text{ A} ;$$

w układzie EM CGS

$$I_s = \frac{U_s}{Z} = \frac{10000 \cdot 10^8}{716 \cdot 10^{12}} \text{ j. EM CGS} = 0,0014 \text{ j. EM CGS} ,$$

$$I_{\max} = \sqrt{2} I_s = 0,0019 \text{ j. EM CGS} .$$

**4.236.** Pomiedzy napięciem chwilowym  $U$  a napięciem maksymalnym (minimalnym)  $U_0$  zachodzi związek

$$U = U_0 \sin \omega t , \quad \text{gdzie} \quad U_0 = \sqrt{2} U_s ,$$

czyli

$$U = \sqrt{2} U_s \sin \omega t ,$$

dla  $\sin \omega t = 1$  napięcie maksymalne wynosi

$$U_{\max} = \sqrt{2} U_s = 1,41 U_s ,$$

dla  $\sin \omega t = -1$  napięcie minimalne wynosi  $U_{\min} = -\sqrt{2} U_s = -1,41 U_s$  .

Zadanie to rozwiążemy tylko w układzie SI, a więc napięcie chwilowe  $U$  będzie zawsze w granicach

$$-311 \text{ V} < U < 311 \text{ V} .$$

**4.237.** Na  $\cos \varphi$  otrzymujemy wartość taką samą w każdym układzie:

w układzie SI

$$\cos \varphi = \frac{P_s}{U_s I_s} = \frac{330}{2 \cdot 220} = 0,75 ;$$

w układzie ES CGS

$$\cos \varphi = \frac{330 \cdot 10^7}{\frac{c}{2} \frac{220}{10 \cdot 300}} = 0,75 ,$$

a więc kąt  $\varphi$  wynosi  $\varphi = 41^\circ 24' = 0,723 \text{ rad}$ .

Chwilową wartość natężenia prądu elektrycznego w każdym układzie przedstawic można wzorem

$$I = 1,41 I_s \sin 2\pi f t = 1,41 I_s \sin 314 t ,$$

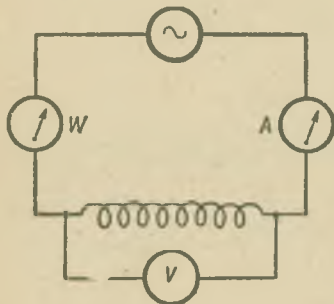
gdzie wartość kąta podana została w radianach.



Napięcie elektryczne wyprzedza w fazie natężenie prądu o kąt  $\varphi$ , zatem napięcie chwilowe w każdym układzie można przedstawić wzorem

$$U = \sqrt{2} U_s \sin(2\pi ft + \varphi) = 1,41 U_s \sin(314t + 0,723).$$

Uwaga. W celu obliczenia wartości sinusów należy posługiwać się tablicami sinusów, których kąty podano w radianach lub radiany zamienić na stopnie i posługiwać się wtedy normalnymi tablicami sinusów.



Rys. 4.71

4.238. Na podstawie danych zadania 4.238 amperomierz włączony do obwodu (rys. 4.71) wskazuje natężenie skuteczne prądu elektrycznego płynącego w tym obwodzie, woltmierz — napięcie skuteczne panujące na cewce (przyjmujemy, że pozostała część obwodu daje tak znikomy spadek napięcia, iż można go zaniedbać, a więc napięcie na cewce przyjąć można w przybliżeniu równe napięciu źródła), watomierz daje moc skuteczną wyzwalaną przez to źródło napięcia na cewce. Otrzymujemy więc w każdym układzie na wartość  $\cos\varphi$

$$\cos\varphi = \frac{P_s}{U_s I_s} = \frac{900}{120 \cdot 10} = \frac{900 \cdot 10^7}{120 \cdot 10^8 \cdot 10 \cdot 10^{-1}} = \frac{900 \cdot 10^7}{300} = 0,75,$$

a więc kąt  $\varphi = 41^\circ 24' = 0,723$  rad.

Zawada naszego układu wynosi

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{\sqrt{2} U_s}{\sqrt{2} I_s} = \frac{U_s}{I_s}.$$

W układzie SI

$$Z = \frac{U_s}{I_s} = \frac{120}{10} \Omega = 12 \Omega;$$

w układzie EM CGS

$$Z = \frac{U_s}{I_s} = \frac{120 \cdot 10^8}{10 \cdot 10^{-1}} \text{ j. EM CGS} = 12 \cdot 10^8 \text{ j. EM CGS}.$$

Zawadę naszego obwodu możemy przedstawić wzorem

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2},$$

zatem

$$Z^2 = R^2 \left( 1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2} \right),$$

zaś

$$\frac{\omega L}{R} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Wobec tego zawada równa się

$$Z^2 = R^2(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = \frac{R^2}{\cos^2 \varphi}.$$

Opór omowy naszego obwodu wynosi więc

$$R = Z \cos \varphi = 0,75Z.$$

Obliczając go w poszczególnych układach otrzymujemy

$$R = 9 \Omega = 9 \cdot 10^9 \text{ j. EM CGS}.$$

Znając opór omowy układu oraz jego zawadę można obliczyć samoindukcję układu, gdyż

$$L = \frac{R}{\omega} \operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{2\pi f} \operatorname{tg} \varphi = \frac{0,8817}{6,28} \frac{R}{f} = 0,1404 \frac{R}{f}.$$

W układzie SI

$$L = 0,1404 \frac{9}{50} \text{ H} = 0,0253 \text{ H (henrów)};$$

w układzie EM CGS

$$L = 0,1404 \frac{9 \cdot 10^9}{50} \text{ j. EM CGS} = 2,53 \cdot 10^7 \text{ j. EM CGS}.$$

4.239.  $\cos \varphi = 0,7272$ , skąd  $\varphi = 43^\circ 19' = 0,7560 \text{ rad}$ ,  $U_{\max} = 308 \text{ V}$ ,  $I_{\max} = 3,5 \text{ A}$ .

4.240. Na podstawie zadania 4.228 samoindukcja obwodu wynosi:

w układzie SI

$$L = 10^{-7} \frac{l^2}{l_1} = 10^{-7} \frac{10^2}{10 \cdot 10^{-2}} \text{ H} = 10^{-4} \text{ H};$$

w układzie EM CGS

$$L = \frac{l^2}{l_1} = \frac{10^6}{10} \text{ cm} = 10^5 \text{ cm}.$$

Pojemność kondensatora zbudowanego z elementów podanych w zadaniu 4.240 wynosi:

w układzie SI

$$C = n \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S}{d} = 11 \frac{6}{36\pi \cdot 10^9} \frac{15 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-4}} \text{ F} = 4,38 \cdot 10^{-9} \text{ F};$$

w układzie EM CGS

$$C = n \frac{\varepsilon}{4\pi c^2} \frac{S}{d} = 11 \frac{6}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{20}} \frac{15}{2 \cdot 10^{-2}} \text{ j. EM CGS} = 4,38 \cdot 10^{-18} \text{ j. EM CGS}.$$

Zatem okres drgań fali elektromagnetycznej wynosi w każdym układzie:  
w układzie SI

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 6,28\sqrt{10^{-4} \cdot 4,38 \cdot 10^{-9}} \text{ s} = 4,15 \cdot 10^{-6} \text{ s};$$

w układzie EM CGS

$$T = 6,28\sqrt{10^9 \cdot 4,38 \cdot 10^{-18}} \text{ s} = 4,15 \cdot 10^{-6} \text{ s}.$$

Częstotliwość tej fali w każdym układzie wynosi

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4,15 \cdot 10^{-6} \text{ s}} = 241 \cdot 10^3 \text{ Hz}.$$

Długość tej fali wynosi:

w układzie SI

$$\lambda = cT = 3 \cdot 10^8 \cdot 4,15 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1245 \text{ m};$$

w układzie EM CGS

$$\lambda = 3 \cdot 10^{10} \cdot 4,15 \cdot 10^{-6} \text{ cm} = 12,45 \cdot 10^4 \text{ cm}.$$



Rys. 4.72

4.241. Znajomość natężenia prądu elektrycznego, gdy włączono cewkę do źródła o stałym napięciu (rys. 4.72a), pozwala na obliczenie oporu omowego cewki. Na podstawie prawa Ohma otrzymujemy wartość tego oporu:

w układzie SI

$$R = \frac{U}{I} = \frac{24}{0,35} \Omega = 68,57 \Omega;$$

w układzie EM CGS

$$R = \frac{U}{I} = \frac{24 \cdot 10^9}{0,35 \cdot 10^{-1}} \text{ j. EM CGS} = 68,57 \cdot 10^9 \text{ j. EM CGS}.$$

Natężenie prądu płynącego przez tę cewkę po włączeniu jej do źródła prądu zmiennego (rys. 4.72b) wynosi w każdym układzie

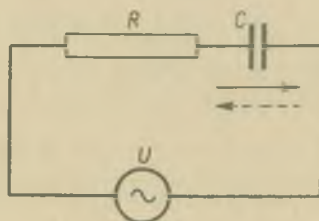
$$I_1 = \frac{U_1}{Z} = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2}}.$$

w układzie SI

$$I_1 = \frac{125}{\sqrt{68,57^2 + 4 \cdot 3,14^2 \cdot 50^2 \cdot 0,6^2}} \text{ A} = 0,625 \text{ A} ;$$

w układzie EM CGS

$$I_1 = \frac{125 \cdot 10^9}{\sqrt{(68,57 \cdot 10^9)^2 + 4 \cdot 3,14^2 \cdot 50^2 \cdot (0,6 \cdot 10^9)^2}} \text{ j. EM CGS} = 0,0625 \text{ j. EM CGS} .$$



Rys. 4.73.1

4.242. Opór pojemnościowy tego obwodu (rys. 4.73.1) wynosi w każdym układzie

$$R_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} .$$

W układzie SI

$$R_c = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \Omega = 636,9 \Omega .$$

w układzie EM CGS

$$R_c = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-9}} \text{ j. EM CGS} = 636,9 \cdot 10^9 \text{ j. EM CGS} .$$

Zawada tego obwodu wynosi w każdym układzie

$$Z = \sqrt{R^2 + R_c^2} ;$$

w układzie SI

$$Z = \sqrt{150^2 + 636,9^2} \Omega = 654 \Omega .$$

w układzie EM CGS

$$Z = \sqrt{(150 \cdot 10^9)^2 + (636,9 \cdot 10^9)^2} \text{ j. EM CGS} = 654 \cdot 10^9 \text{ j. EM CGS} .$$

Natężenie skuteczne prądu elektrycznego w każdym układzie wynosi

$$I_s = \frac{U_s}{Z} ;$$

w układzie SI

$$I_s = \frac{U_s}{Z} = \frac{120}{654} \text{ A} = 0,183 \text{ A},$$

w układzie EM CGS

$$I_s = \frac{120 \cdot 10^9}{654 \cdot 10^9} \text{ j. EM CGS} = 0,0183 \text{ j. EM CGS}.$$

Natężenie maksymalne płynącego prądu wynosi więc

$$I = \sqrt{2} I_s = 1,41 I_s = 0,258 \text{ A} = 0,0258 \text{ j. EM CGS}.$$

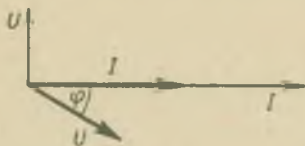
Napięcie spóźnia się w fazie względem natężenia prądu o kąt  $\varphi$ , którego tangens wynosi:

w układzie SI

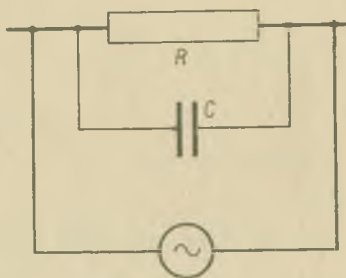
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\omega CR} = \frac{1}{2\pi f CR} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 150} = 4,246,$$

w układzie EM CGS

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-9} \cdot 150 \cdot 10^9} = 4,246,$$



Rys. 4.73.2



Rys. 4.74

zatem kąt  $\varphi$  wynosi  $\varphi = 76^\circ 49' = 1,3408 \text{ rad}$ .

Napięcie chwilowe  $U$  możemy wyrazić wzorem

$$U = 1,41 U_s \sin(2\pi ft - \varphi) = 1,41 U_s \sin(314t - 1,3408),$$

natężenie chwilowe prądu zaś — wzorem

$$I = 1,41 I_s \sin 2\pi ft = 1,41 I_s \sin 314t.$$

Wykres wektorowy napięcia oraz natężenia prądu w układzie współrzędnych  $(U, I)$  podano na rysunku 4.73.2.

Moc skuteczna tego układu wynosi więc:  
w układzie SI

$$P_s = U_s I_s \cos \varphi = 120 \cdot 0,183 \cdot 0,2281 \text{ W} = 5,11 \text{ W} ;$$

w układzie EM CGS

$$\begin{aligned} P_s &= U_s I_s \cos \varphi = 120 \cdot 10^9 \cdot 0,0183 \cdot 0,2281 \text{ ergów/s} = \\ &= \frac{120}{300} 0,183 \cdot 3 \cdot 10^9 \cdot 0,2281 \text{ ergów/s} = 5,11 \cdot 10^7 \text{ ergów/s} . \end{aligned}$$

4.243. Z zadania 4.242 opór pojemnościowy układu podanego na rysunku 4.74 wynosi

$$R_C = 636,9 \Omega = 636,9 \cdot 10^9 \text{ j. EM CGS} .$$

Zawada tego układu wynosi

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_C^2}} ,$$

a więc

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{R_C}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 + (R\omega C)^2}} .$$

W układzie SI

$$Z = \frac{150}{\sqrt{1 + 636,9^2 \cdot 4 \cdot 3,14^2 \cdot 50^2 \cdot 5^6 \cdot 10^{-12}}} \Omega = 150 \Omega ;$$

w układzie EM CGS

$$Z = \frac{150 \cdot 10^9}{\sqrt{1 + 636,9^2 \cdot 10^{18} \cdot 4 \cdot 3,14^2 \cdot 50^2 \cdot 5^2 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-18}}} \text{ j. EM CGS} = 150 \cdot 10^9 \text{ j. EM CGS} .$$

Tangens kąta przesunięcia fazowego napięcia względem natężenia wynosi w naszym przypadku

$$\operatorname{tg} \varphi = \omega RC = 2\pi f RC .$$

w układzie SI

$$\operatorname{tg} \varphi = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 150 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 0,2335 ;$$

w układzie EM CGS

$$\operatorname{tg} \varphi = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 150 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-9} = 0,2335$$

zatem kąt  $\varphi = 13^\circ 15' = 0,2313 \text{ rad}$ .



Natężenie skuteczne prądu wynosi:  
w układzie SI

$$I_s = \frac{U_s}{Z} = \frac{120}{150} \text{ A} = 0,8 \text{ A} ;$$

w układzie EM CGS

$$I_s = \frac{120 \cdot 10^9}{150 \cdot 10^9} \text{ j. EM CGS} = 0,08 \text{ j. EM CGS} .$$

Natężenie maksymalne tego prądu wynosi

$$I = \sqrt{2} I_s = 1,41 I_s = 1,13 \text{ A} = 0,113 \text{ j. EM CGS} .$$

Moc skuteczna tego układu wynosi:  
w układzie SI

$$P_s = U_s I_s \cos \varphi = 120 \cdot 0,8 \cdot 0,9734 \text{ W} = 93,5 \text{ W} ;$$

w układzie zaś EM CGS

$$P_s = U_s I_s \cos \varphi = 120 \cdot 10^9 \cdot 0,8 \cdot 10^{-1} \cdot 0,9734 \text{ ergów/s} = 93,5 \cdot 10^7 \text{ ergów/s} .$$

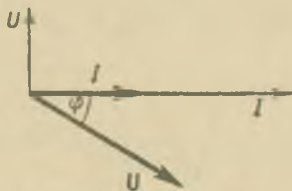
Napięcie chwilowe możemy napisać w postaci

$$U = \sqrt{2} U_s \sin(2\pi f t - \varphi) = 1,41 U_s \sin(314 t - 0,2313) .$$

Natężenie chwilowe zaś — w postaci

$$I = 1,41 I_s \sin 314 t .$$

Opóźnienie napięcia względem natężenia podano w postaci wykresu wektorowego na rysunku 4.75.



Rys. 4.75

4.244. Natężenie maksymalne tego prądu  $I_m = 5 \cdot 10^{-3} \text{ A}$ . Okres drgań prądu  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \text{ s}$ . Z wzoru na pojemność kondensatora otrzymujemy, że napięcie panujące na okładkach kondensatora będzie wynosiło

$$U = \frac{1}{C} Q = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2C} \sin 2t + B = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2C} \cos \left( 2t - \frac{\pi}{2} \right) + B .$$

W chwili początkowej na kondensatorze panuje napięcie równe zero, zatem stała całkowa  $B = 0$

$$U = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2C} \cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Otrzymujemy więc, że napięcie na okładkach kondensatora spóźnia się w fazie w porównaniu z prądem o kąt  $\pi/2$ . Maksymalne napięcie na okładkach kondensatora

$$U = \frac{I_m}{\omega C} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \text{ V} = 500 \text{ V}.$$

Moc elektryczna wydzielona w czasie jednego okresu w kondensatorze wynosi

$$P_c = \int_0^T UI dt = \frac{25 \cdot 10^{-6}}{4C} \int_0^T \sin 4t dt = 0.$$

W kondensatorze nie ma straty mocy.

4.245. Siła elektromotoryczna  $E = -L \frac{dI}{dt}$ , zatem napięcie na końcach cewki będzie równe

$$U = -E = L \frac{dI}{dt} = -10^{-2} L \sin 2t = 10^{-2} L \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Napięcie elektryczne wyprzedza więc w fazie prąd elektryczny o kąt  $\pi/2$ . Jego maksymalna wartość

$$U_m = I_m \omega L = 2 \cdot 10^{-4} \text{ V}.$$

Moc wydzielona w czasie jednego okresu  $P_1 = \int_0^T UI dt = 0$ , zatem w cewce nie ma strat energetycznych.