

Dydaktyka matematyki (II etap edukacyjny)

II rok matematyki

Semestr letni 2018/2019

Ćwiczenia nr 7

Zadanie domowe

Superzagadka

$$1 = 4 : 4 + 4 - 4$$

$$5 = (4 \cdot 4 + 4) : 4$$

Liczby 1 i 5 można zapisać za pomocą czterech czwórek. Zapisz za pomocą czwórek pozostałe liczby jednocyfrowe. Spróbuj to zrobić, używając za każdym razem 4 czwórek.

$$0 = 4 - 4 + 4 - 4, \quad 2 = 4 : 4 + 4 : 4, \quad 3 = 4 - (4 : 4)^4, \quad 4 = (4 - 4) : 4 + 4,$$
$$6 = 4 + (4 + 4) : 4, \quad 7 = 4 = 4 - 4 : 4, \quad 8 = 4 \cdot 4 - 4 - 4, \quad 9 = 4 + 4 + 4 : 4$$

Superzagadka

- Babciu, ile masz lat? — zapytała siedmioletnia Agnieszka.
- Gdy się urodziłaś, twoja mama miała 22 lata. A ja jestem teraz 2 razy starsza od twojej mamy.

Ile lat ma babcia Agnieszki?

Zapisz równanie do tego zadania.

Zadanie domowe

$$\begin{array}{r} 432 \\ + 265 \\ \hline 697 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 74^1 \\ + 43 \\ \hline 118 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 385^4 \\ + 667 \\ \hline 9116 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 254 \\ + 535 \\ \hline \end{array}$$

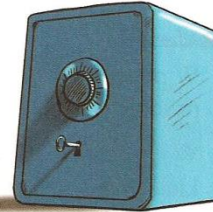
$$\begin{array}{r} 618 \\ + 782 \\ \hline \end{array}$$

Dodawanie pisemne (inne podejście)

DODAWANIE PISEMNE

0-P, 1-B, 2-R, 3-E, 4-W,
5-I, 6-A, 7-K, 8-O, 9-M

Dodaj 8879 do 3769, a następnie
każdą cyfrę otrzymanej sumy zastąp
odpowiadającą jej literą i odczytaj
zaszyfrowane słowo.



Zajrzyjmy do zeszytów naszych przyjaciół:

Pomyłka

$$\begin{array}{r} 3467 \\ + 251 \\ \hline 5977 \end{array}$$

Pytalskiego

$$\begin{array}{r} 3467 \\ + 251 \\ \hline 3718 \end{array}$$

Bystrego

$$\begin{array}{r} 3467 \\ + 251 \\ \hline 3718 \end{array}$$

Które obliczenia są poprawne?

Jak podpisywać składniki, aby uniknąć błędu?

Warto notować sobie tę liczbę, którą „przenosimy”. Na przykład

$$\begin{array}{r} \text{w dodawaniu} \\ 348 \\ + 595 \end{array}$$

zaczynamy od działania $8 + 5$. Otrzymujemy 13, czyli 3 jedności i 1 dziesiątkę. Następnie tę dziesiątkę dodamy, ale na razie zapiszemy ją nad liczbami, do których trzeba ją dodać:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 348 \\ + 595 \\ \hline 3 \end{array}$$

Podobnie postępujemy przy dodawaniu kolejnych cyfr:

$$\begin{array}{r} 11 \\ 348 \\ + 595 \\ \hline 943 \end{array}$$

Nietypowe algorytmy

- Pan Ekstrawagancki stosuje nietypowy sposób pisemnego odejmowania liczb; spójrz na dwa odejmowania wykonane jego sposobem.

$$\begin{array}{r} 1225 \\ - 876 \\ \hline 226 \\ + 123 \\ \hline 349 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2748 \\ - 876 \\ \hline 1749 \\ + 123 \\ \hline 1872 \end{array}$$

Na czym polega sposób pana Ekstrawaganckiego?
Oblicz jego sposobem $2167 - 978$.

- Mnożenie wedyjskie (ang. *vedic*).
Informacje na stronach:

https://pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka_wedyjska

<https://pl.wikipedia.org/wiki/Wedy>

Liczby naturalne

(Sztuka nauczania matematyki w szkole podstawowej i gimnazjum, D. Zaremba)

- Liczby naturalne głównie w aspekcie kardynalnym. Jakie jeszcze są inne aspekty?
- Kłopoty z liczbą zero.
- Interpretacje dodawania i odejmowania.
- Kolejność działań – bez recytowania regułek.
- Mnożenie – wielokrotne dodawanie.
- Prawa działań dla mnożenia.
- Wyprowadzenie (na przykładzie) prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania.
- Dwie interpretacje dzielenia: „jeżeli”, mieszczanie.
- Algorytm dzielenia pisemnego.
- Cechy podzielności.

Trochę teorii liczb

- wielokrotności
- dzielniki
- cechy podzielności
- liczby pierwsze, liczby złożone
- rozkład liczby na czynniki pierwsze
- NWD, NWW (nieobowiązkowe)

Podzielność

- przez 2, 5, 10, 100
- przez 4 (nieobowiązkowa)

Ćwiczenie 1

Uzasadnij podzielność przez:

- 4
- 9 (3)

na poziomie SP i ogólnie.

Liczby pierwsze i liczby złożone

- definicja
- zabawa – drzewko z liczbowymi jabłkami
- algorytmy:
 - sprawdzania, czy liczba jest pierwsza
 - rozkładu na czynniki pierwsze

Rozwiązanie

$$\begin{array}{c} 4 \\ + \\ 7 \\ = \\ 11 \end{array} \quad \begin{array}{c} 12 - 6 = 6 \end{array}$$

Ułamki zwykłe i ułamki dziesiętne w PPM

Uczeń:

- opisuje część danej całości za pomocą ułamka;
- przedstawia ułamek jako iloraz liczb naturalnych, a iloraz liczb naturalnych jako ułamek;
- skraca i rozszerza ułamki zwykłe;
- sprowadza ułamki zwykłe do wspólnego mianownika;
- przedstawia ułamki niewłaściwe w postaci liczby mieszanej i odwrotnie;
- zapisuje wyrażenia dwumianowane w postaci ułamka dziesiętnego i odwrotnie;
- zaznacza ułamki zwykłe i dziesiętne na osi liczbowej oraz odczytuje ułamki zwykłe i dziesiętne zaznaczone na osi liczbowej;
- zapisuje ułamek dziesiętny skończony w postaci ułamka zwykłego;
- zamienia ułamki zwykłe o mianownikach będących dzielnikami liczb 10, 100, 1000 itd. na ułamki dziesiętne skończone dowolną metodą (przez rozszerzanie ułamków zwykłych, dzielenie licznika przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora);
- zapisuje ułamki zwykłe o mianownikach innych niż wymienione w poprzednim punkcie w postaci rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego (z użyciem trzech kropek po ostatniej cyfrze), dzieląc licznik przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora;
- zaokrągla ułamki dziesiętne;
- porównuje ułamki (zwykłe i dziesiętne).

Przykładowe zadania z PPM

- Napisz jaką częścią największej liczby trzycyfrowej jest największa liczba dwucyfrowa? Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.
- Książka ma 246 stron. Ustal, jak równomiernie rozłożyć czytanie książki w ciągu tygodnia, by liczby stron przeczytanych w poszczególnych dniach były identyczne lub różniły się o 1.
- Sprowadź następujące ułamki do możliwie najmniejszego wspólnego mianownika: $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{17}{24}$, $\frac{11}{12}$.
- Licznik pewnego ułamka jest liczbą między 40 a 60, natomiast jego mianownik jest liczbą między 20 a 40. Podaj liczbę całkowitą równą temu ułamkowi lub dwie kolejne liczby całkowite, pomiędzy którymi znajduje się ten ułamek. Rozważ wszystkie przypadki.
- Ilu centymetrom odpowiada 2,6 m?
- Zamień na wyrażenia dwumianowane: 2,02 km, 17,54 m, 11527 m.
- Przyjmując odpowiednią jednostkę zaznacz na osi liczbowej liczby: 0,75, $\frac{2}{5}$, $\frac{12}{10}$, 3,2, $\frac{57}{10}$, $\frac{1}{4}$, 1 i $\frac{6}{8}$.
- Podaj rozwinięcia dziesiętne podanych ułamków: $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{21}$, $\frac{15}{16}$, $\frac{3}{250}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{2}{3}$.
- Zamień podane ułamki na ułamki dziesiętne. Podaj ich przybliżenia z dokładnością do części setnych: $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{11}{16}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{4}{35}$, $\frac{7}{9}$.
- Porównaj ułamki: $\frac{1}{3}$... 0,4, 1,81 ... $\frac{11}{6}$, 2,5 ... $2\frac{4}{7}$.

Ćwiczenie 2

- Przedstaw ułamki $1/9$, $2/9$, $5/9$, $7/99$, $23/99$ w postaci ułamka dziesiętnego.
- Co można zauważyć?
- Zapisz rozwinięcia dziesiętne ułamków $67/99$, $451/999$, $38/999$; sprawdź swoje przypuszczenia na kalkulatorze.

Ułamki zwykłe i ułamki dziesiętne – działania (PPM)

Uczeń powinien:

- dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić ułamki zwykłe o mianownikach jedno- lub dwucyfrowych, a także liczby mieszane;
- dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić ułamki dziesiętne w pamięci (w przykładach najprostszyc), pisemnie i za pomocą kalkulatora (w przykładach trudnych);
- wykonywać nieskomplikowane rachunki, w których występują jednocześnie ułamki zwykłe i dziesiętne;
- porównywać ułamki z wykorzystaniem ich różnicy;
- obliczać ułamek danej liczby naturalnej;
- obliczać kwadraty i sześciany ułamków zwykłych i dziesiętnych oraz liczb mieszanych;
- obliczać wartość prostych wyrażeń arytmetycznych, stosując reguły dotyczące kolejności wykonywania działań;
- wykonywać działania na ułamkach dziesiętnych, używając własnych, poprawnych strategii lub za pomocą kalkulatora;
- szacować wyniki działań.

Przykładowe zadania z PPM

Z.5.a) Oblicz: I. $\frac{3}{4} + 1,25 \cdot 3$, II. $\left(4,8 - 1\frac{3}{5}\right) + \frac{2}{3}$, III. $0,4 \cdot 0,3 + 4,5 : 15$,

IV. $2,75 + 1\frac{2}{3} \cdot 5\frac{2}{5}$, V. $\left(1\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{9}{16} - \frac{1}{16} \cdot 15$.

Z.5.b) Joasia kupiła 3 książki. Za jedną zapłaciła 8,40 zł, za drugą 3,7 zł. Trzecia książka kosztowała dwa razy tyle, co druga. Ile reszty otrzymała, jeśli zapłaciła banknotem 50 zł?

Z.5.c) Kilogram winogron kosztuje 12 zł. Ile trzeba zapłacić za 1,3 kg tych owoców?

Z.5.d) Kilogram buraków kosztuje 1,8 zł. Ile ważyły zakupione buraki, jeśli zapłacono za nie 54 grosze?

Z.5.e) Krzyś przeczytał 40 stron książki. Zostało mu jeszcze $\frac{3}{5}$ książki do przeczytania. Ile stron ma ta książka?

?

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} =$$

Ćwiczenie 3

Jak wprowadzić algorytm mnożenia ułamków zwykłych?

Co uczniowie poznają wcześniej?

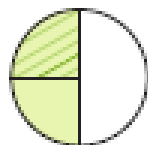
- Mnożą ułamki przez liczby naturalne.
- Obliczają ułamek danej liczby naturalnej.

Algorytm mnożenia ułamków zwykłych (podręcznik nr 1)

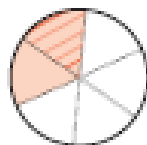


MNOŻENIE UŁAMKÓW

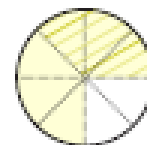
Na każdym z rysunków zamalowano część koła i zakreskowano połowę, czyli $\frac{1}{2}$ tej części.



$\frac{1}{2}$ liczby $\frac{1}{2}$ to $\frac{1}{4}$



$\frac{1}{2}$ liczby $\frac{1}{3}$ to $\frac{1}{6}$



$\frac{1}{2}$ liczby $\frac{3}{4}$ to $\frac{3}{8}$

Z poprzedniego rozdziału wiemy, że obliczając ułamek liczby naturalnej, mnożymy ułamek przez tę liczbę. Podobnie będziemy postępować, obliczając ułamek dowolnego ułamka — będziemy wykonywać mnożenie.

$\frac{1}{2}$ liczby $\frac{1}{2}$ to $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ liczby $\frac{1}{3}$ to $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}$ liczby $\frac{3}{4}$ to $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$

Wobec tego możemy zapisać równości:

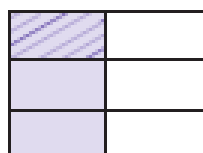
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

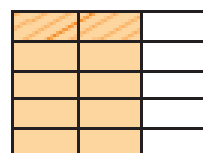
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

Algorytm mnożenia ułamków zwykłych (podręcznik nr 1)

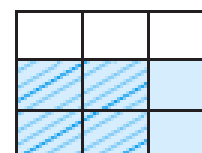
ĆWICZENIE A. Na każdym z rysunków zamalowano część prostokąta, a następnie zakreskowano pewien ułamek tej części. Jakimi ułamkami należy zastąpić znaki zapytania?



$\frac{1}{3}$ liczby $\frac{1}{2}$
to
 $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = ?$



$\frac{1}{5}$ liczby $\frac{2}{3}$
to
 $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = ?$



$\frac{2}{3}$ liczby $\frac{2}{3}$
to
 $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = ?$

Obliczając iloczyn dwóch ułamków, mnożymy licznik pierwszego ułamka przez licznik drugiego ułamka oraz mianownik pierwszego ułamka przez mianownik drugiego ułamka.

Gdy mnożymy liczby mieszane, zamieniamy te liczby na ułamki niewłaściwe.


PRZYKŁADY

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$$

$$\frac{4}{9} \cdot 1\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{27}$$

$$2\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{5} = \frac{8}{3} \cdot \frac{16}{5} = \frac{128}{15} = 8\frac{8}{15}$$

Algorytm mnożenia ułamków zwykłych (podręcznik nr 2)

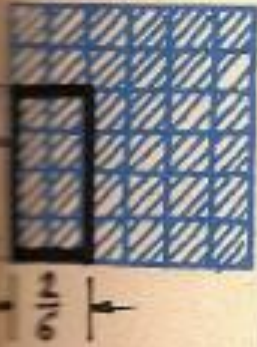


Mnożenie ułamka przez ułamek

Jaką część kwadratu zajmuje zakreskowany obszar?
To łatwo obliczyć — jeden bok kwadratu podzielono na 4 równe części, drugi na 3 równe części. Czyli cały kwadrat podzielono na $4 \cdot 3 = 12$ jednakowych prostokątów. Zatem zakreskowano $\frac{6}{12}$ całego kwadratu.

$$\frac{6}{12} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$ to jest $\frac{3}{4}$ liczby $\frac{2}{3}$.



Ten kwadrat podzielono na 36 takich samych kwadracików. Zakreskowano $2 \cdot 4 = 8$ kwadracików, czyli $\frac{8}{36}$ całego kwadratu.

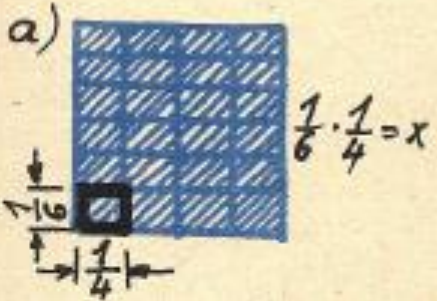
$$\frac{8}{36} = \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 6} = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6}$$

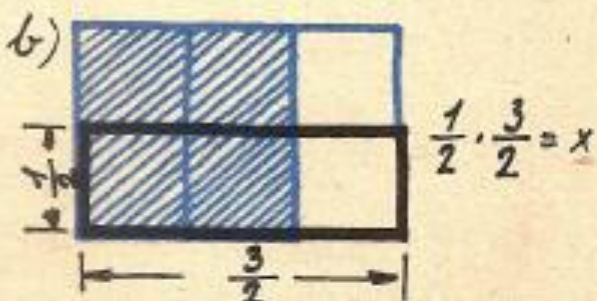
$\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6}$ to jest $\frac{4}{6}$ liczby $\frac{2}{6}$.

Algorytm mnożenia ułamków zwykłych (podręcznik nr 2)

$$\frac{6}{15} = \frac{6 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{3}$$
$$\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{3} \text{ to jest } \frac{6}{5} \text{ liczby } \frac{1}{3}$$

1. Przyjrzyj się rysunkom i powiedz, jaką liczbą jest x :

a)  $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = x$

b)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = x$

Literatura

[Z] D. Zaremba, *Sztuka nauczania matematyki w szkole podstawowej i gimnazjum*, GWO, 2004,

Zadanie domowe

- Przeczytaj rozdział „Ułamki”: D. Zaremba, *Sztuka nauczania matematyki w szkole podstawowej i gimnazjum*, GWO, 2004, str. 55-75.
- Przygotuj kartę pracy do metody odkrywania cechy podzielności przez 9 proponowanej w książce Zaremby (do oddania w formie pisemnej).
- Przygotuj krótką recenzję sposobu wprowadzenia algorytmu mnożenia ułamków zwykłych z podręcznika nr 2.
- Zapisz ułamek właściwy większy od $\frac{1}{3}$, używając wszystkich dziesięciu cyfr.
- Rozszyfruj poniższe dzielenie ułamków (znaki trójkąt, kwadrat i kółko zastępują trzy różne cyfry).

$$\frac{\triangle}{\square} : \frac{\triangle}{\circ} = \frac{1}{\triangle}$$