REGUŁA DE L'HOSPITALA, WZÓR TAYLORA

Zaczniemy od jeszcze jednej wersji twierdzenia o wartości średniej, która będzie przydatna w dowodach głównych twierdzeń tego rozdziału.

Twierdzenie 24.1 (Cauchy'ego o wartości średniej)
Jeśli funkcje f i g są ciągłe w każdym punkcie przedziału domkniętego $[a,b]$ i mają pochodne we wszystkich punktach przedziału otwartego (a,b) przy czym $g'(x) \neq 0$, to istnieje co najmniej jeden taki punkt $c \in [a,b]$, że $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Dowód. Ponieważ $g'(x) \neq 0$ dla każdego x, więc na mocy twierdzenia Rolle'a funkcja g jest różnowartościowa na przedziale $[a,b]$, w szczególności $g(b) \neq g(a)$. Rozpatrujemy pomocniczą funkcję h:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x) - g(a)\big) .$$

Mamy $h(a) = 0 = h(b)$. Funkcja h jest ciągła jako różnica funkcji ciągłych; w punktach wewnętrznych przedziału (a,b) jest różniczkowalna, jako różnica funkcji różniczkowalnych. Możemy zastosować do niej twierdzenie Rolle'a. Istnieje więc taka liczba $c \in (a,b)$, że $0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)$, zatem

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} . \blacksquare$$

Często trzeba obliczać granicę ilorazu dwu funkcji dążących do 0 lub ∞. Zdarza się, że trzeba obliczyć granicę iloczynu dwu funkcji, z których jedna ma granicę 0, a druga — ∞. Ten drugi przypadek można sprowadzić do pierwszego: $fg = \frac{f}{1/g} = \frac{g}{1/f}$. Bywa, że interesuje nas granica wyrażenia f^g przy czym granicą f jest 1, a granicą g jest ∞. Wzór $f^g = e^{g\cdot\ln f}$ pozwala problem zredukować do obliczania granicy iloczynu, więc w dalszym ciągu do obliczania granicy ilorazu. Zdarzają się też inne sytuacje, w których nie są spełnione założenia dotychczas sformułowanych twierdzeń o granicach. Podobnie jak w przypadku ciągów istnieje twierdzenie, które w wielu sytuacjach ułatwia znalezienie granicy. Jest to tzw. reguła de l'Hospitala, francuskiego markiza, który po wysłuchaniu wykładów Jana Bernoulliego wydał drukiem notatki z nich pod tytułem *Analyse des infiniment petites* [24.1], co spowodowało protesty rzeczywistego autora tekstu, ale wtedy nie istniało jeszcze pojęcie praw autorskich. Twierdzenie, które znajduje się niżej, pochodzi z tej właśnie książki i — według historyków matematyki — powinno mieć inną nazwę.

Twierdzenie 24.2 (reguła de l'Hospitala)
Załóżmy, że funkcje $f, g\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne w każdym punkcie przedziału (a,b) oraz że $g(x) \neq 0 \neq g'(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$. Jeśli istnieje granica $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = G \in [-\infty, +\infty]$ i spełniony jest jeden z dwóch warunków:

$$1^\circ \ \lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)\,, \qquad 2^\circ \ \lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty\,,$$

to iloraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ ma granicę przy $x \to a$ oraz $G = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Dowód. Udowodnimy najpierw twierdzenie przy bardzo mocnych założeniach. Chodzi nam o to, by wyjaśnić jego sens. Dowód w przypadku ogólnym podamy potem. Założymy mianowicie, że $a > -\infty$, że zachodzi warunek 1° oraz że istnieją **skończone** granice $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ i $\lim\limits_{x\to a} g'(x)$, przy czym ta druga jest różna od 0. W tej sytuacji można dookreślić funkcje f, g w punkcie a przyjmując $f(a) = 0 = g(a)$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji f rozpatrywanej na przedziale $[a,x]$ wynika, że $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$ dla pewnego $c_x \in (a,x)$. Stąd wynika natychmiast, że $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$. Wykazaliśmy więc, że w tym przypadku funkcję f można potraktować jako określoną w punkcie a i wtedy $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$. To samo dotyczy oczywiście funkcji g. Oczywiście w obu przypadkach mamy na myśli różniczkowalność prawostronną. Niech $r(h) = \frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h}$ dla $h \neq 0$ oraz $r(0) = 0$. Oczywiście $\lim\limits_{h\to 0} r(h) = 0$. Analogicznie niech $\rho(h) = \frac{g(a+h)-g(a)-g'(a)h}{h}$.

[24.1] **Analiza nieskończenie małych**. Trzeba jednak powiedzieć, że tylko nieliczni potrafią zanotować zrozumiale wykład.

Wtedy $\lim\limits_{h\to 0}\rho(h)=0$. Stąd możemy wywnioskować, że

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-0}{g(x)-0}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(a)(x-a)+(x-a)r(x-a)}{g'(a)(x-a)+(x-a)\rho(x-a)}=$$
$$=\frac{f'(a)+r(x-a)}{g'(a)+\rho(x-a)}\xrightarrow[x\to a]{}\frac{f'(a)}{g'(a)}\,.$$

Ostatnie przejście graniczne jest wykonalne, bo założyliśmy **na razie**, że $g'(a)\neq 0$.

W dowodzie tym wykorzystaliśmy w istotny sposób założenia $f(a)=g(a)=0$. Oczywiście bez tych założeń teza może być w konkretnej sytuacji prawdziwa jedynie przypadkiem — pochodne decydują o wielkości funkcji w otoczeniu punktu, w którym wartością funkcji jest 0, jeśli $f(a)\neq 0$, to „w pierwszym przybliżeniu" $f(x)\approx f(a)$!

A teraz dowód właściwego twierdzenia. Niech m,M będą dwiema liczbami rzeczywistymi, takimi że $m<G<M$. Jeśli $G=-\infty$, to oczywiście nie rozpatrujemy m, jeśli $G=+\infty$, to nie rozpatrujemy M. Niech $\widetilde{m},\widetilde{M}$ będą takimi liczbami, dla których $m<\widetilde{m}<G<\widetilde{M}<M$. Ponieważ $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=G$, więc istnieje liczba $c\in(a,b)$, taka że $\widetilde{m}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<\widetilde{M}$ dla $x\in(a,c)$. Z twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej wynika, że jeżeli $a<x<y<c$, to

$$\widetilde{m}<\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}<\widetilde{M}\,. \tag{H}$$

Załóżmy najpierw, że $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0=\lim\limits_{x\to a}g(x)$. Z tych dwu równości i z twierdzenia o granicy ilorazu funkcji wynika, że

$$m<\widetilde{m}\leqslant\lim_{x\to a}\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}=\frac{f(y)}{g(y)}\leqslant\widetilde{M}<M\,.$$

Stąd i z definicji granicy od razu wynika, że $\lim\limits_{y\to a}\frac{f(y)}{g(y)}=G$.

Teraz zakładamy, że $\lim\limits_{x\to a}|g(x)|=+\infty$. Ustalmy $y\in(a,c)$. Istnieje taka liczba $c_1\in(a,y)\subset(a,c)$, że jeśli $a<x<c_1$, to $\frac{g(y)}{g(x)}<1$, zatem $1-\frac{g(y)}{g(x)}>0$. Mamy $\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}=\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(y)}{g(x)}}{1-\frac{g(y)}{g(x)}}$. Nierówności można mnożyć przez liczby dodatnie, więc nierówność (H) jest równoważna następującej

$$\widetilde{m}\Big(1 - \tfrac{g(y)}{g(x)}\Big) + \tfrac{f(y)}{g(x)} < \tfrac{f(x)}{g(x)} < \widetilde{M}\Big(1 - \tfrac{g(y)}{g(x)}\Big) + \tfrac{f(y)}{g(x)}\,.$$

Mamy $\lim\limits_{x\to a} \widetilde{m}\Big(1-\tfrac{g(y)}{g(x)}\Big)+\tfrac{f(y)}{g(x)} = \widetilde{m}$, bo $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ i y jest ustalone. Wynika stąd, że istnieje taka liczba $c_2 \in (a, c_1)$, że jeśli $x \in (a, c_2)$, to $m < \widetilde{m}\Big(1 - \tfrac{g(y)}{g(x)}\Big) + \tfrac{f(y)}{g(x)} < \tfrac{f(x)}{g(x)}$. Po ewentualnym zmniejszeniu c_2 otrzymujemy nierówność podwójną:

$$m < \widetilde{m}\Big(1 - \tfrac{g(y)}{g(x)}\Big) + \tfrac{f(y)}{g(x)} < \tfrac{f(x)}{g(x)} < \widetilde{M}\Big(1 - \tfrac{g(y)}{g(x)}\Big) + \tfrac{f(y)}{g(x)} < M\,,$$

a z niej wynika, że $m < \frac{f(x)}{g(x)} < M$, więc $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = G$. Dowód został zakończony. ■

Uwaga 24.3

Twierdzenie pozostaje prawdziwe dla granicy $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}$ po kosmetycznych zmianach w założeniach i tezie. Stąd wynika, że można je też stosować w przypadku granic dwustronnych. ■

Uwaga 24.4

Istnieje ścisła analogia między regułą de l'Hospitala i twierdzeniem Stolza. Te rozważania nie będą ścisłe, bo mówić tu będziemy raczej o intuicjach. Ciąg można traktować jako funkcję określoną na zbiorze wszystkich liczb naturalnych. Wtedy $b = +\infty$. Niestety dziedzina nie jest w tym przypadku przedziałem, więc nie można mówić o pochodnej. Można jednak spojrzeć na zagadnienie nieco inaczej. Pochodna była nam potrzebna do oszacowania różnicy $f(x) - f(a)$, przy czym interesowała nas minimalna możliwa zmiana argumentu. Pisaliśmy przy odpowiednich założeniach, że $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \approx \frac{f'(a)}{g'(a)}$. W przypadku ciągu minimalna możliwa zmiana argumentu to 1. Wobec tego zamiast ilorazu pochodnych $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, który przybliża interesujący nas iloraz różnicowy $\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}} = \frac{f(x+h)-f(x)}{g(x+h)-g(x)}$ rozpatrujemy iloraz $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$. W twierdzeniu Stolza zakładaliśmy, że ciąg (b_n) jest ściśle monotoniczny. W regule de l'Hospitala też występuje to założenie, zakładamy mianowicie, że pochodna funkcji g nie przyjmuje wartości 0 [24.2], z czego wynika, że jest ona albo dodatnia, albo ujemna, a to pociąga za sobą ścisłą monotoniczność funkcji g. ■

Przykład 24.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^x}=0$. Możemy próbować zastosować regułę de l'Hospitala, bo mianownik ma granicę nieskończoną i jego pochodna, e^x, jest różna od 0 wszędzie. Nie jest ważne jaka jest granica licznika, a nawet czy licznik ma granicę. Iloraz pochodnych to $\frac{ax^{a-1}}{e^x}$, więc jest to wyrażenie tego samego typu co wyjściowe. Istotne jest pojawienie się w wykładniku $a-1$ w miejscu a. Jeśli $a\leqslant 1$, to licznik jest ograniczony z góry na półprostej $[1,+\infty)$, a mianownik dąży do $+\infty$, więc iloraz dąży do 0.

Niech k oznacza dowolną liczbę naturalną. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich wykładników $a\leqslant k$. Niech $\alpha\leqslant k+1$. Wykażemy, że $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0$. Zastosujemy regułę de l'Hospitala. Ponieważ $\big(x^\alpha\big)'=\alpha x^{\alpha-1}$ i $\alpha-1\leqslant k+1-1=k$, więc — na mocy założenia indukcyjnego — $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{e^x}=0$.

Stąd i z twierdzenia de l'Hospitala wynika, że $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0$, co kończy dowód. ■

Uwaga 24.5
Oczywiście wynik z ostatniego przykładu można otrzymać stosując jedynie elementarne metody: wykładnik a można zastąpić liczbą naturalną m większą od a, potem skorzystać z nierówności $e^x>\big(1+\frac{x}{n}\big)^n$ prawdziwej dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby $x>0$, następnie skorzystać z tego, że granicą ilorazu wielomianu stopnia m przez wielomian stopnia $n>m$ przy $x\to\infty$ jest liczba 0. Pokazaliśmy tu po prostu jak można wykorzystać twierdzenie de l'Hospitala, ta metoda pozwala na obliczanie granic w wielu sytuacjach, w których metody elementarne bywają trudne w użyciu, bo wymagają dobrego pomysłu! ■

Przykład 24.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}=0$ dla każdego $a>0$ — tę

[24.2] bo ma własność Darboux (przyjmowania wartości pośrednich), niezależnie od tego, czy jest ciągła.

równość już poznaliśmy, ale pokażemy jak można ją uzyskać za pomocą reguły de l'Hospitala. Ponieważ mianownik jest funkcją ściśle rosnącą o granicy $+\infty$, więc obliczymy granicę ilorazu pochodnych: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1/x}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{ax^a}=0$. Wobec tego istnieje też granica ilorazu funkcji i również jest równa 0. ■

Jest jasne, że funkcję x^a można w ostatnim przykładzie zastąpić dowolnym wielomianem dodatniego stopnia.

Przykład 24.3 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$. Mamy bowiem: $x^x=e^{x\ln x}$. Funkcja wykładnicza jest ciągła, więc wystarczy udowodnić, że $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$. Mamy

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{1}{y}\ln\tfrac{1}{y}=-\lim_{y\to+\infty}\tfrac{\ln y}{y}=0$$

— ostatnia równość wynika z wyniku uzyskanego w poprzednim przykładzie dla $a=1$, przedostatnia — z tego, że $\ln\frac{1}{y}=-\ln y$. ■

Przykład 24.4 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x^3}$. Mamy $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{tg}x-x=0=\lim\limits_{x\to0}x^3$, więc można zastosować regułę de l'Hospitala. Zachodzi równość $(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2x}=1+\operatorname{tg}^2x$. Mamy

$$\lim_{x\to0}\tfrac{(\operatorname{tg}x-x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to0}\tfrac{1+\operatorname{tg}^2x-1}{3x^2}=\tfrac{1}{3}\lim_{x\to0}\left(\tfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^2=\tfrac{1}{3}.$$

Stąd i z twierdzenia de l'Hospitala wynika, że $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x^3}=\frac{1}{3}$. ■

Przykład 24.5 Znaleźć taki wielomian $w\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, jeśli istnieje, że $\lim\limits_{x\to0}x^{-4}\big(\sin x-w(x)\big)=0$. Jest rzeczą oczywistą, że jeśli taki wielomian istnieje, to istnieje również wielomian stopnia nie większego niż 4 spełniający ten warunek (bo $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^k}{x^4}=0$ dla $k>4$). Załóżmy, że $w(x)=w_0+w_1x+w_2x^2+w_3x^3+w_4x^4$. Mamy $-w_0=\lim\limits_{x\to0}\big(\sin x-w(x)\big)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-w(x)}{x^4}\cdot x^4=0$. Jeśli w istnieje, to $w_0=0$. Wobec tego

$0=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-w(x)}{x^4}\cdot x^3=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-(w_1x+w_2x^2+w_3x^3+w_4x^4)}{x}=1-w_1$,

więc $w_1=1$. Kontynuując otrzymujemy (teraz stosujemy regułę de l'Hospitala dwa razy)

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - (x + w_2 x^2 + w_3 x^3 + w_4 x^4)}{x^4} \cdot x^2 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} - w_2 =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} - w_2 = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2} - w_2 = w_2\,.$$

Powtarzamy to rozumowanie stosując regułę de l'Hospitala dwa razy i otrzymujemy

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - (x + w_3 x^3 + w_4 x^4)}{x^4} \cdot x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} - w_3 =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} - w_3 = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} - w_3 = -\tfrac{1}{6} - w_3\,.$$

Stąd mamy $w_3 = -\frac{1}{6}$. Powtórzymy rozumowanie jeszcze raz.

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - (x - \frac{1}{6}x^3 + w_4 x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3} - w_4 =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{3x^2} - w_4 = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + x}{6x} - w_4 =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{6} - w_4 = -w_4\,.$$

Udowodniliśmy, że wielomian $x - \frac{1}{6}x^3$ spełnia żądany warunek. Oczywiście spełnia go też wielomian $x - \frac{1}{6}x^3 + 1410x^{1683}$ i wiele innych. Wśród nich jedynym wielomianem, którego stopień jest mniejszy (ostro) niż 5 jest wielomian $x - \frac{1}{6}x^3$. ■

W ostatnich przykładach stosowaliśmy regułę de l'Hospitala nie sprawdzając zawczasu tego, czy iloraz pochodnych ma granicę. Okazywało się w końcu, że ma i dopiero wtedy cała procedura była uzasadniona, wcześniej nie były sprawdzone założenia twierdzenia, więc z formalnego punktu nie wolno było go jeszcze stosować. Mogłoby okazać się, że granica nie istnieje i wtedy nie bylibyśmy w stanie nic wywnioskować, o czym świadczy poniższy przykład.

Przykład 24.6 Znajdziemy granicę $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$. Stosujemy regułę de l'Hospitala, bo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$. Mamy więc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$, a ta granica nie istnieje, wystarczy przyjąć $x_n = \frac{1}{n\pi}$, by się o tym przekonać. Wobec tego reguła de l'Hospitala nie pomogła nam w rozwiązaniu tego problemu.

Oczywiście $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x|$, zatem $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$. ■

Przykład 24.7 Obliczymy granicę $\lim\limits_{x\to0}\frac{x(\ln(\cos x+x^4\cdot\sqrt{1+x^2}\,))}{\operatorname{tg}x-\sin x}$. Jasne jest, że zarówno licznik jak i mianownik mają granicę 0. Jednak pochodne wypisanych funkcji nie wyglądają zbyt przyjaźnie. Postaramy się uprościć problem zastępując niektóre funkcje wielomianami. Zaczniemy od mianownika. Znajdziemy taką liczbę naturalną k, że granica $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^k}$ będzie skończona i różna od 0. Stosujemy regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{1+\operatorname{tg}^2x-\cos x}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to0}\frac{2\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}^2x)+\sin x}{k(k-1)x^{k-2}}\,.$$

Jeśli $k\leqslant2$, to ta granica jest równa 0, jeśli $k\geqslant4$, to granica **prawostronna** jest równa ∞. Wobec tego $k=3$ i wtedy

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}^2x)+\sin x}{3(3-1)x^{3-2}}=\frac{2\cdot1}{3\cdot2}+\frac{1}{3\cdot2}=\frac12\,.$$

Skorzystaliśmy „po drodze" z równości $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1=\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$. Możemy więc obliczać granicę korzystając z równości

$$\lim_{x\to0}\frac{x(\ln(\cos x+x^4\cdot\sqrt{1+x^2}\,))}{\operatorname{tg}x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x(\ln(\cos x+x^4\cdot\sqrt{1+x^2}\,))}{x^3}\cdot\frac{x^3}{\operatorname{tg}x-\sin x}=$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{x(\ln(\cos x+x^4\cdot\sqrt{1+x^2}\,))}{x^3}=2\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x+x^4\cdot\sqrt{1+x^2}\,)}{x^2}\,.$$

Mamy $\lim\limits_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$, więc obliczymy granicę

$$\lim_{x\to0}\frac{-1+\cos x+x^4\cdot\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-1+\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2x}=-\frac12\,.$$

Wynika stąd, że $\lim\limits_{x\to0}\frac{x(\ln(\cos x+x^4\cdot\sqrt{1+x^2}\,))}{\operatorname{tg}x-\sin x}=2\cdot(-\frac12)=-1$. ■

W kilku przypadkach obliczaliśmy pochodną pochodnej. To oczywiście zdarza się często, gdy trzeba ustalić jakie własności ma funkcja. Przyjmuje się następujące określenie.

Definicja 24.6 (pochodnej wyższego rzędu)
Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze zawierającym przedział otwarty I zawierający punkt p. Niech $f^{(0)}(x)=f(x)$ dla każdego x z dziedziny funkcji f. Załóżmy, że funkcja f ma pochodną $(n-1)$–ego rzędu $f^{(n-1)}$ w każdym punkcie przedziału I. Jeśli funkcja $f^{(n-1)}$ ma w punkcie p pochodną $\big(f^{(n-1)}\big)'(p)$, to tę pochodną nazywamy *pochodną n–tego rzędu funkcji f w punkcie*

p i oznaczamy przez $f^{(n)}(p)$. Jeśli pochodna n–tego rzędu jest *skończona*, to mówimy, że funkcja f jest n*–krotnie różniczkowalna* w tym punkcie. ■

Jest jasne, że $f' = f^{(1)}$. Zamiast pisać $f^{(2)}$ piszemy na ogół f''. Niektórzy matematycy zamiast $f^{(3)}$ piszą f'''.

Przykład 24.8 Niech $f(x) = ax + b$. Wtedy dla każdego x mamy $f'(x) = a$, więc $f''(x) = 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wobec tego również $f^{(3)}(x) = 0$, a stąd wynika, że również $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ i każdej liczby rzeczywistej x. ■

Przykład 24.9 Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wtedy $f'(x) = =2ax + b$, więc $f''(x) = 2a$, zatem dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ i każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f^{(n)}(x) = 0$. ■

Przykład 24.10 Niech f będzie wielomianem stopnia m, tzn. istnieją takie liczby rzeczywiste a_0, a_1, $\ldots, a_m$, przy czym $a_m \neq 0$, że dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(x) = =a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$. Wtedy $f^{(m)}(x) = m!a_m$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdej liczby naturalnej $n > m$ i każdej liczby rzeczywistej x.
Twierdzenie to wykazaliśmy już w przypadku $m = 1, 2$. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich wielomianów stopnia *mniejszego* niż m. Wynika stąd, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x zachodzi równość $f'(x) = a_1 + 2a_2 + \cdots + ma_mx^{m-1}x$. Ponieważ f' jest wielomianem stopnia $m-1$, więc $(f')^{(m-1)}(x) = =(m-1)! \cdot ma_m = m!a_m$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Ponieważ $(f')^{(m-1)} = f^{(m)}$, więc dla każdej liczby rzeczywistej x mamy $f^{(m)}(x) = m!a_m$. Stąd oczywiście wynika, że jeśli $n > m$ jest liczbą naturalną, to $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. ■

Przykład 24.11 Niech $f(x) = e^x$. Zachodzi wtedy równość $f^{(1)}(x) = f'(x) = e^x$. Wobec tego dla każdej liczby naturalnej n i każdej rzeczywistej x zachodzi równość $f^{(n)}(x) = e^x$.

Przykład 24.12 Niech $f(x) = \sin x$. Zachodzi wtedy równość

$f^{(1)}(x) = f'(x) = \cos x$. Zatem $f^{(2)}(x) = f''(x) = -\sin x = -f(x)$. Stąd wynika, że $f^{(3)}(x) = -f'(x) = -\cos x$ oraz $f^{(4)}(x) = -f''(x) = \sin x$. Jasne jest, że od tego momentu będą się kolejno pojawiać, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$ i znów $\sin x$ itd. Można więc napisać $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$ oraz $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$ dla dowolnego $n \in \{0,1,2,\ldots\}$ i $x \in \mathbb{R}$. ■

Przykład 24.12 Tak jak w poprzednim przykładzie wykazujemy, że $(\cos x)^{(2n)} = (-1)^n \cos x$ i $(\cos x)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin x$. ■

Przykład 24.13 Niech $f(x) = \ln x$. Mamy więc następującą równość $f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Wobec tego $f^{(2)}(x) = f''(x) = \left(x^{-1}\right)' = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2}$. Następnie $f^{(3)}(x) = \left(-x^{-2}\right)' = 2x^{-3}$. Stąd $f^{(4)}(x) = 2(-3)x^{-4} = -3!x^{-4}$. Analogicznie $f^{(5)}(x) = 4!x^{-5}$ itd. Ogólnie możemy napisać

$$f^{(n)}(x) = (\ln(x))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$$

dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ i każdej liczby $x \in \mathbb{R}$. ■.

Przykład 24.14 Obliczymy kilka pochodnych funkcji tangens. Mamy $(\operatorname{tg} x)' = 1+\operatorname{tg}^2 x$. Wobec tego zachodzi równość $(\operatorname{tg} x)'' = \left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)' = 2\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x) = 2(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x)$ — skorzystaliśmy z wzoru na pochodną funkcji złożonej. Stąd

$$(\operatorname{tg} x)^{(3)} = 2(1+3\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg}^2 x) = 2(1+4\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg}^4 x),$$

a stąd otrzymujemy równość

$$(\operatorname{tg} x)^{(4)} = 2(8\operatorname{tg} x + 12\operatorname{tg}^3 x)(1+\operatorname{tg}^2 x) = \\ = 8(2\operatorname{tg} x + 5\operatorname{tg}^3 x + 3\operatorname{tg}^5 x).$$

Te obliczenia można kontynuować, jednak w tym przypadku nie da się napisać równie prosto jak w poprzednich przypadkach ogólnego wzoru na n–tą pochodna funkcji. Można jednak zauważyć, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje taki wielomian w_n zmiennej t stopnia $n+1$, o nieujemnych współczynnikach, podzielny przez wielomian $1+t^2$, że $(\operatorname{tg} x)^{(n)} = w_n(\operatorname{tg} x)$. Wielomian w_n jest funkcją parzystą, gdy n jest liczbą nieparzystą, a funkcją nieparzystą, gdy n jest liczbą parzystą. ■

Przykład 24.15 Znajdziemy teraz wzór na n–tą pochodną funkcji $\frac{x}{x^2+5x+6} = \frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2}$. Wystarczy znaleźć n–tą pochodną funkcji postaci $\frac{1}{x+c}$. Mamy $\left(\frac{1}{x+c}\right)' = -(x+c)^{-2}$. Wobec tego $\left(\frac{1}{x+c}\right)'' = -(-2)(x+c)^{-2-1} = 2(x+c)^{-3}$. Następnie otrzymujemy $\left(\frac{1}{x+c}\right)^{(3)} = -6(x+c)^{-4} = -6!(x+c)^{-4}$. Bez żadnych trudności piszemy wzór ogólny na n–tą pochodną tej funkcji: $\left(\frac{1}{x+c}\right)^{(n)} = (-1)^n n!(x+c)^{-n-1}$. Stąd wynika już od razu, że $\left(\frac{x}{x^2+5x+6}\right)^{(n)} = (-1)^n n!\left(3(x+3)^{-n-1} - 2(x+2)^{-n-1}\right)$. Wypada jednak zaznaczyć, że bez rozłożenia na czynniki mianownika nasze szanse na sukces byłyby mniejsze. ■

Przykład 24.16 Wykazaliśmy poprzednio, że jeśli funkcja jest różniczkowalna na pewnym *przedziale* i jej pochodna jest na tym przedziale równa 0, to funkcja ta jest stała. Załóżmy teraz, że $f''(x) = 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$ dla pewnych $a,b \in \mathbb{R}$. Wtedy na mocy poprzednio wykazanego stwierdzenia funkcja f' jest stała na przedziale (a,b). Niech $f'(x) = A$ dla wszystkich $x \in (a,b)$. Niech $g(x) = f(x) - Ax$. Zachodzi oczywista równość $g'(x) = 0$ dla każdej liczby $x \in (a,b)$. Wobec tego g jest funkcją stałą. Oznaczając jej jedyną wartość przez B otrzymujemy równość $B = g(x) = f(x) - Ax$. Stąd od razu wynika, że $f(x) = Ax + B$ dla każdej liczby $x \in (a,b)$. Wykazaliśmy więc, że jeśli druga pochodna jest tożsamościowo równa 0, to funkcja jest wielomianem stopnia nie większego niż 1. Podobnie można wykazać, że jeśli trzecia pochodna jest tożsamościowo równa 0 na pewnym przedziale, to funkcja jest na tym przedziale wielomianem stopnia nie większego niż 2. Jeśli bowiem $f^{(3)}(x) = 0$ dla każdego $x \in (a,b)$, to na mocy poprzedniego stwierdzenia funkcja f' jest wielomianem postaci $Ax + B$. Zgadujemy, że $\left(\frac{1}{2}Ax^2 + Bx\right)' = Ax + B$. Stąd wynika, że $\left(f(x) - \frac{1}{2}Ax^2 - Bx\right)' = 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$. Wobec tego funkcja $f(x) - \frac{1}{2}Ax^2 - Bx$ jest stała, co kończy dowód tego, że f jest wielomianem, którego stopień jest mniejszy niż 3. Jest całkowicie jasne, że kontynuując to rozumowanie wykażemy, że jeśli n–ta pochodna pewnej funkcji jest równa 0 w każdym punkcie pewnego przedziału, to funkcja ta na tym przedziale jest wielomianem, którego stopień jest mniejszy niż n. ■

Przykład 24.17 Załóżmy, że f jest funkcją różniczkowalną na pewnym przedziale oraz że dla pewnej liczby rzeczywistej k równość $f'(x) = kf(x)$ zachodzi dla wszystkich x. Wykażemy, że w tej sytuacji istnieje stała $C \in \mathbb{R}$, taka że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(x) = Ce^{kx}$. W celu uzyskania tej równości starczy wykazać, że iloraz $\frac{f(x)}{e^{kx}}$ jest funkcja stałą, czyli że pochodna tego ilorazu jest wszędzie równa 0. Mamy

$$\left(\frac{f(x)}{e^{kx}}\right)' = \frac{f'(x)e^{kx} - ke^{kx}f(x)}{e^{2kx}} = \frac{f'(x) - kf(x)}{e^{kx}} = 0$$

— ostatnia równość wynika z założenia o funkcji f. Wykazaliśmy więc, że iloraz jest funkcją stałą. Tę stałą oznaczamy przez C. Jasne jest, że $f(x) = Ce^{kx}$. ■

Przykład 24.18 Rozważymy nieco bardziej skomplikowaną zależność niż w poprzednim przykładzie. Mianowicie założymy, że f jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną w każdym punkcie prostej [24.3] oraz że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f''(x) = f(x)$. Bez trudu stwierdzamy, że funkcje $g_1(x) = e^x$ oraz $g_2(x) = e^{-x}$ spełniają to równanie. Mając dwie, można ich znaleźć nieskończenie wiele. Jeśli c_1 i c_2 są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to funkcja $c_1g_1(x) + c_2g_2(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$ też spełnia to równanie. Funkcja $u(x) = f(x) - c_1g_1(x) - c_2g_2(x)$ również spełnia to równanie. Liczby c_1 i c_2 można dobrać w taki sposób, że $u(0) = 0 = u'(0)$ — wystarczy rozwiązać układ równań: $f(0) = c_1 + c_2$, $f'(0) = c_1 - c_2$ traktując c_1 i c_2 jako niewiadome, a $f(0)$ i $f'(0)$ jako dane liczby. Otrzymujemy $c_1 = =\frac{1}{2}\left(f(0) + f'(0)\right)$ oraz $c_2 = \frac{1}{2}\left(f(0) - f'(0)\right)$. Szukamy więc takiej dwukrotnie różniczkowalnej funkcji u, że dla każdego x za-

[24.3] Nie jest istotne, że dziedziną jest prosta, może być dowolny przedział.

chodzą wzory $u''(x)=u(x)$ i $u'(0)=0=u(0)$. Wykażemy, że u to funkcja zerowa. Niech $v(x)=u'(x)-u(x)$. Funkcja v jest różniczkowalna, $v'(x)+v(x)=u''(x)-u'(x)+u'(x)-u(x)=0$ dla każdej liczby x i $v(0)=0$. Istnieje więc takie C, że $v(x)=Ce^{-x}$ dla każdego x – twierdzenie z poprzedniego przykładu dla $k=-1$. W tej sytuacji $0=v(0)=Ce^{-0}=C$, zatem $v(x)=0$ dla każdej liczby x. Wynika stąd, że $u'(x)=u(x)$ dla każdej liczby x, więc istnieje taka liczba $\tilde{C}$, że $u(x)=\tilde{C}e^{x}$ dla każdego x — znów stosujemy rezultat z poprzedniego przykładu, tym razem dla $k=1$. Ponieważ $0=u(0)=\tilde{C}e^{0}=\tilde{C}$, więc $u(x)=0$ dla każdego x, zatem $f(x)=c_1g_1(x)+c_2g_2(x)$. ■

Przykład 24.19 Wykazaliśmy w poprzednich przykładach, że jeśli któraś z równości $f^{(n)}(x)=0$, $f'(x)=kf(x)$, $f''(x)= =f(x)$ jest spełniona w każdym punkcie pewnego przedziału, to funkcję f można opisać prostym wzorem. Omówimy jeszcze jeden przykład tego typu. Założymy, że dla wszystkich punktów pewnego przedziału I spełniony jest wzór $f''(x)=-f(x)$. [24.4]

Wykażemy, że w tej sytuacji istnieją liczby $a,b\in\mathbb{R}$, takie że dla każdej liczby $x\in I$ zachodzi równość $f(x)=a\cos x+b\sin x$. Niech p oznacza dowolny punkt przedziału I. Jasne jest, że w każdym punkcie $x\in I$ zachodzi równość

$$(a\cos x+b\sin x)''=-(a\cos x+b\sin x),$$

tzn. funkcja postaci $a\cos x+b\sin x$ spełnia rozpatrywane równanie. Wybierzemy liczby a i b tak, by miały miejsce równości $f(p)=a\cos p+b\sin p$ oraz $f'(p)=-a\sin p+b\cos p$, czyli $a=f(p)\cos p-f'(p)\sin p$ oraz $b=f(p)\sin p+f'(p)\cos p$.

Niech $u(x)=f(x)-a\cos x-b\sin x$. Mamy $u''(x)=-u(x)$ dla każdej liczby $x\in I$ oraz że $u(p)=0=u'(p)$. Stąd wynika, że $\big((u'(x))^2+(u(x))^2\big)'=2\,(u''(x)u'(x)+u'(x)u(x))=0$. Wobec tego funkcja $(u'(x))^2+(u(x))^2$ jest stała na przedziale I, zatem $(u'(x))^2+(u(x))^2=(u'(p))^2+(u(p))^2=0$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

[24.4] Taka zależność, a dokładniej $f''=-\frac{g}{l}f$ pojawia się przy analizowaniu ruchu wahadła matematycznego o długości l przy założeniu, że amplituda jest tak mała, że przybliżenie $f\approx\sin f$ jest dostatecznie dokładne, g to przyspieszenie ziemskie.

Suma *kwadratów* liczb rzeczywistych jest równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy obie te liczby są zerami. Wobec tego dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $u(x) = 0$, a zatem $f(x) = a\cos x + b\sin x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Okazało się, że również w tym przypadku można łatwo opisać wszystkie funkcje spełniające równanie $f'' = -f$.

Tego typu równania nazywane są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Istnieje obszerna teoria równań różniczkowych zwyczajnych. Nie mamy tu możliwości omawiania jej. Jest ona stosowana również w wielu dziedzinach poza matematyką, przede wszystkim w fizyce, w chemii, w technice, również w ekonomii. ■

Znajdowanie pochodnych wyższego rzędu polega na obliczaniu pochodnych rzędu pierwszego, więc właściwie już się z tym zapoznaliśmy. Jeśli chodzi o wzory ogólne, to oczywistym — w zasadzie niewartym wspomnienia — jest wzór na n–tą pochodną sumy dwu funkcji różniczkowalnych n–krotnie:

$$(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x).$$

Leibniz zauważył, że jeśli funkcje f i g są n–krotnie różniczkowalne, to zachodzi równość przypominająca wzór dwumianowy Newtona:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(n-j)}(x) g^{(j)}(x) \tag{Lz}$$

Prosty dowód tego wzoru wykorzystujący wzór na pochodną iloczynu dwu funkcji i znaną równość $\binom{n}{j} + \binom{n}{j+1} = \binom{n+1}{j+1}$, dzięki której współczynniki dwumianowe można obliczać za pomocą trójkąta Pascala, pozostawiamy Czytelnikom w charakterze ćwiczenia. Wzory na n–tą pochodną złożenia i funkcji odwrotnej są na tyle skomplikowane, że właściwie w ogóle nieprzydatne, zresztą trudno je znaleźć w literaturze.

Przejdziemy teraz do sformułowania jednego z najważniejszych wzorów analizy matematycznej, tzw. wzoru Taylora. Pierwszą pochodną funkcji wprowadziliśmy po to, by móc przybliżyć funkcję w pobliżu interesującego nas punktu wielomianem stopnia pierwszego. Drugie pochodne i pochodne wyższych rzędów pojawiły się w kilku miejscach w związku z bardziej szczegółowym badaniem funkcji . Okazuje się, że definicję pochodnej, związaną z przybliżaniem funkcji wielomianem stopnia pierwszego lub zerowego, można uogólnić. Tym zajmiemy się teraz. Efektem będzie zapowiadany wzór Taylora.

Poprzednio błąd przybliżenia miał być mały w porównaniu z pierwszą potęgą zmiany argumentu. Teraz zażądamy, by był mały w porównaniu z wyższymi potęgami h. Zmusi nas do użycia wielomianów stopnia wyższego niż 1.

Jeśli $0 < |h| < 1$, to $|h| > h^2 > |h|^3 > h^4 > \ldots$. Jasne jest też, że jeśli h jest bardzo blisko 0, to h^2 jest znacznie bliżej zera niż h, h^3 znacznie bliżej niż h^2 itd. Jest tak, bo $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^2}{h} = 0$ i ogólnie, jeśli $m > n$, to $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^m}{h^n} = 0$. Można myśleć o tym tak: jeżeli h jest bardzo małe i $m > n$, to liczba $h^m = h^{m-n}\cdot h^n$ stanowi znikomą część liczby h^n, oczywiście obie są wtedy bardzo małe, ale jedna jest istotnie mniejsza niż druga.

Wobec tego, z naszego punktu widzenia, różnica między dwiema funkcjami f i g będzie mała, jeśli będzie dążyć do 0 *po podzieleniu przez* h^n, gdzie oznacza liczbę naturalną. Następujący lemat podaje warunek konieczny i dostateczny na to, by jedna funkcja była bliska drugiej w tym sensie.

Lemat 24.7 (o funkcjach ściśle przylegających)
Jeśli funkcje f i g są n–krotnie różniczkowalne w punkcie 0, to $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^n} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy pochodne funkcji f i g w punkcie 0 są równe do n–tego rzędu włącznie: $f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0)$ dla $j\in\{0,1,\ldots,n\}$.

Dowód. Załóżmy, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^n} = 0$. Oznaczamy $r(x) = f(x)-g(x)$. Udowodnimy, że $r(0) = r'(0) = \ldots = r^{(n)}(0) = 0$. Jeśli że $0\leqslant j\leqslant n$, to $\lim\limits_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^j} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x^{n-j} = 0$, bo pierwsza granica jest równa 0, a druga 0 lub 1 w zależności od tego, czy $j < n$ czy też $j = n$. Mamy $\lim\limits_{x\to 0}r(x) = 0$. Stąd i z tego, że funkcja r jest ciągła w punkcie 0, jako różniczkowalna, wynika, że $r(0)=0$. Mamy $0=\lim\limits_{x\to 0}\frac{r(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{r(x)-r(0)}{x}=r'(0)$. Wobec tego $r'(0)=0$.

Teraz wykażemy, że $r''(0)=0$ (zakładając, że $n\geqslant 2$). Stosujemy teraz regułę de l'Hospitala:

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{r'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{r'(x)-r'(0)}{x}=\frac{1}{2}r''(0).$$

Trzecia pochodna też równa jest 0:

$$0=\lim_{x\to 0}\tfrac{r(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\tfrac{r'(x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\tfrac{r''(x)}{6x}=\lim_{x\to 0}\tfrac{r''(x)-r''(0)}{6x}=\tfrac{r^{(3)}(0)}{6}.$$

Powtarzamy procedurę aż do uzyskania równości $\frac{1}{n!}r^{(n)}(0)=0$.

Wykażemy teraz, że jeśli $r(0)=r'(0)=\ldots=r^{(n)}(0)=0$, to $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{r(x)}{x^n}=0$. Stosujemy regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{r'(x)}{nx^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to 0}\frac{r^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\ldots 2x}.$$

Mamy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{r^{(n-1)}(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{r^{(n-1)}(x)-r^{(n-1)}(0)}{x}=r^{(n)}(0)=0$, co kończy dowód lematu. ■

Wniosek 24.8 (z dowodu)
Jeśli funkcja r jest n–krotnie różniczkowalna w punkcie 0 oraz $r(0)=r'(0)=r''(0)=r^{(n-1)}(0)=0$, to $\lim\limits_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^n}=\frac{r^{(n)}(0)}{n!}$. ■

Z lematu o funkcjach ściśle przylegających wynika, że jeśli chcemy przybliżyć funkcję w otoczeniu punktu p wielomianem w tak, by błąd przybliżenia był mały w porównaniu z h^n, to pochodne tego wielomianu w punkcie 0, do n–tego rzędu włącznie, muszą być równe odpowiednim pochodnym funkcji f w punkcie p: $f^{(j)}(p)=w^{(j)}(0)$. Jeżeli $w(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$, to $w^{(j)}(0)=j!\,a_j$ dla $j=0,1,2,\ldots,n$. Wynika stąd, że powinno być $a_j=\frac{f^{(j)}(p)}{j!}$. To motywuje wprowadzenie następującego określenia.

Definicja 24.9 (wielomianu Taylora i reszty)
Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie p pochodną n–tego rzędu. n–tym wielomianem Taylora funkcji f w punkcie p nazywamy

wielomian

$$T_{p,n,f}(h) = f(p)+f'(p)h+\frac{f''(p)}{2!}h^2+\frac{f^{(3)}(p)}{3!}h^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n$$

zmiennej h. n–tą resztą nazywamy różnicę

$r_n(h) = f(p+h) - T_{p,n,f}(h) =$

$$= f(p+h) - \left(f(p) + f'(p)h + \tfrac{f''(p)}{2!}h^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n\right). \blacksquare$$

Oczywiście wielomian Taylora określony jest dla wszystkich liczb h, natomiast reszta tylko dla takich h, dla których punkt $p+h$ znajduje się w dziedzinie funkcji f. Jasne jest też, że po to, by móc mówić o pochodnej $f^{(n)}(p)$ trzeba założyć istnienie pochodnej $f^{(n-1)}$ oraz wszystkich pochodnych niższego rzędu w pewnym otoczeniu punktu p. Zachodzi następujące

Twierdzenie 24.10 (G.Peano)
Jeśli f jest funkcją n–krotnie różniczkowalną w punkcie p, to zachodzi równość $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r_n(h)}{h^n} = 0$.

Równość $f(p+h) = f(p)+f'(p)h+\frac{f''(p)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n+r_n(h)$ nazywana bywa wzorem Taylora z resztą Peano, jeśli dodamy informację zawartą w twierdzeniu Peano.
Twierdzenie Peano wynika natychmiast z lematu o funkcjach ściśle przylegających. $\blacksquare$

Również z tego lematu wynika, że innego wyboru nie ma, jeśli chcemy mieć tak dokładne przybliżenie i nie chcemy zwiększać stopnia wielomianu ponad niezbędne minimum.

Twierdzenie 24.11 (o jednoznaczności wielomianu Taylora)
Jeśli funkcja f jest n razy różniczkowalna w punkcie p, w jest wielomianem stopnia nie większego niż n, tzn. istnieją takie liczby a_0, $a_1, \ldots, a_n$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą wzory $w(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ i $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+h)-w(p)}{h^n} = 0$, to dla każdego $j \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ zachodzi wzór $f^{(j)}(p) = j!a_j$, więc w jest wielomianem Taylora funkcji f w punkcie p. $\blacksquare$

Nadmienić wypada, że Taylor był współczesny Newtonowi, wzór Taylora znaleziony został od razu. Idea przybliżania dokładniejszego niż liniowe była obecna w omawianej teorii od samego początku! Również współczesny Newtonowi był Szkot o nazwisku Maclaurin, którego nazwiskiem opatrywany jest wzór Taylora dla $p = 0$. Zaznaczmy jeszcze, że z wzorem Taylora związane jest szereg Taylora funkcji: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(p)}{n!} h^n$. Szereg ten może mieć dodatni promień zbieżności lub zerowy. Chcąc o nim mówić trzeba założyć, że funkcja ma w punkcie p pochodne wszystkich rzędów. Nawet wtedy może mieć on zerowy promień zbieżności lub mieć sumę różną od $f(p+h)$. Gdy $p = 0$ mówimy o szeregu Maclaurina.

Czytelnik poznał już rozwinięcia w szereg Maclaurina

funkcji wykładniczej o podstawie e: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

funkcji sinus: $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

funkcji kosinus: $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

funkcji arkus tangens: $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$,

oraz rozwinięcie w szereg Taylora:

funkcji ln wokół punktu $p = 1$: $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$,

funkcji potęgowej o wykładniku $a \in \mathbb{R}$ wokół punktu $p = 1$: $(1+x)^a = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$.

Przykład 24.20 Rozwiniemy wokół punktu $x = 2$ funkcję $\frac{x}{x^2+5x+6}$. Mamy $\frac{x}{x^2+5x+6} = \frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2} = \frac{3}{(x-2)+5} - \frac{2}{(x-2)+4} =$

$$= \frac{3}{5[(x-2)/5+1]} - \frac{2}{2[(x-2)/4+1]} = \frac{3}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-2}{5}\right)^n -$$

$$- \frac{2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{5^{n+1}} - \frac{2}{4^{n+1}}\right)(x-2)^n .$$

Wobec tego n–ty wielomian Taylora w punkcie 2 rozwijanej funkcji jest równy $\frac{1}{10}-\left(\frac{3}{25}-\frac{1}{8}\right)(x-2)+\dots+(-1)^n\left(\frac{3}{5^{n+1}}-\frac{2}{4^{n+1}}\right)(x-2)^n$.

Bez sztuczek algebraicznych, od których zaczęliśmy rozwijanie tej funkcji w szereg, otrzymanie krótkich wzorów na współczynniki wielomianu Taylora byłoby trudniejsze. ■

Uwaga 24.12

Jeśli $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ dla $x\in(-r,r)$, $r>0$, to n-tym wielomianem Taylora funkcji f w punkcie 0 jest $a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$. Dla dowodu wystarczy przekonać się, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\left(a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}+\cdots\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}a_jx^j=0$.

Wynika to jednak łatwo z równości: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}a_jx^j=$

$$\lim_{x\to 0}\sum_{j=n+1}^{\infty}a_jx^{j-n}=\lim_{x\to 0}\sum_{j=1}^{\infty}a_{j+n}x^j=\sum_{j=1}^{\infty}a_{j+n}0^j=0.$$

Przedostatnia równość wynika np. z jednostajnej zbieżności szeregu na jakimkolwiek przedziale postaci $[-c,c]$ dla $c\in(0,r)$. ■

Przykład 24.21 Przedstawimy funkcję $\arcsin x$ w postaci sumy szeregu Maclaurina. Jeśli $|x|<1$, to

$$\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x^2)^n=1+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\tfrac{1}{2})(-\tfrac{3}{2})\cdot\ldots\cdot(-\tfrac{2n-1}{2})(-x^2)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!\cdot 2^n}x^{2n}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}x^{2n}=\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+1)}x^{2n+1}\right)',$$ zatem funkcja $\arcsin x-\left(x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+1)}x^{2n+1}\right)$ jest stała na przedziale $(-1,1)$, na którym szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x^2)^n$ jest zbieżny. Wartość tej funkcji w punkcie 0 jest równa 0. Stąd

wniosek: $\arcsin x = x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+1)}x^{2n+1}$ dla $x\in(-1,1)$.

Wyjaśnimy jeszcze kwestię $x=\pm1$. Zauważmy, że $\left(1-\frac12\right)^2<$ $<\left(1-\frac12\right)\left(1-\frac13\right)$, $\left(1-\frac14\right)^2<\left(1-\frac14\right)\left(1-\frac15\right)$, ... , $\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2<$ $<\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$. Wobec tego

$\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}\sqrt{\left(1-\frac12\right)^2\left(1-\frac14\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2}<$
$<\frac{1}{2n+1}\sqrt{\left(1-\frac12\right)\left(1-\frac13\right)\left(1-\frac14\right)\left(1-\frac15\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)}=$
$=\frac{1}{2n+1}\sqrt{\frac{1}{2n+1}}=\frac{1}{(2n+1)^{3/2}}$. Wynika stąd, że dla $x=1$ szereg $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+1)}x^{2n+1}$ jest zbieżny [24.5], co więcej z kryterium Weierstrassa wynika, że szereg ten jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[-1,1]$, zatem jego suma jest funkcją ciągłą na tym przedziale. Ponieważ ta suma i funkcja $\arcsin x$ są równe w przedziale $(-1,1)$ i ciągłe w punkcie $x=-1$ i w punkcie $x=1$, więc są też równe w punktach ±1. Dodajmy jeszcze, że jeśli $|x|>1$, to szereg $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+1)}x^{2n+1}$ jest rozbieżny, o czym Czytelnik może przekonać się np. stosując kryterium ilorazowe d'Alemberta. Stąd wynika, że $(2n+1)$–szy wielomian Taylora funkcji $\arcsin x$ jest równy

$$x+\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+1)}x^{2n+1}.\ \blacksquare$$

Przykład 24.22 Niech $f(0)=0$ i $f(x)=e^{-1/x^2}$ dla $x\neq0$. Jeśli $x\neq0$, to $f'(x)=2x^{-3}e^{-1/x^2}$, $f''(x)=\left(-x^{-4}+4x^{-6}\right)e^{-1/x^2}$ i ogólnie dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant1$ istnieje taki wielomian w_n stopnia $3n$, że $f^{(n)}(x)=w_n\left(\frac1x\right)e^{-1/x^2}$ dla każdego $x\neq0$. Dowodzimy tego przez indukcję względem n. Dla $n=1$ tezę już sprawdziliśmy. Jeśli $f^{(n)}(x)=w_n\left(\frac1x\right)e^{-1/x^2}$, to

$$f^{(n+1)}(x)=\left(-x^{-2}w_n'\left(\tfrac1x\right)+2x^{-3}w_n\left(\tfrac1x\right)\right)e^{-1/x^2},$$

[24.5] Można też posłużyć się kryterium Raabe'go, jeśli ktoś je pamięta.

więc $w_{n+1}(y) = 2y^3 w_n(y) - y^2 w_n'(y)$. Mamy teraz $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = {}$ $= \lim\limits_{x\to 0} w_n\big(\frac{1}{x}\big)e^{-1/x^2} = \lim\limits_{y\to\infty} w_n(y)e^{-y^2} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{w_n(y)}{e^{y^2}} = 0$. Ta ostatnia równość wynika z tego, że dla każdej liczby rzeczywistej a zachodzi równość $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{y^a}{e^y} = 0$, więc tym bardziej $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{y^a}{e^{y^2}} = 0$. Ponieważ f jest funkcją ciągłą w punkcie 0 i $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$, więc $f'(0) = 0$ — wynika to wprost z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej, można też zastosować regułę de l'Hospitala. Stąd, w taki sam sposób, wnioskujemy, że $f''(0) = 0$ itd. (indukcja). Wobec tego dla każdego n mamy $f^{(n)}(0) = 0$. Z tych rozważań wynika, że funkcja f ma pochodne dowolnego rzędu oraz, że $T_{0,n,f}(h) = 0$ dla każdego h. Stąd wynika, że w tym przypadku dzięki badaniu wielomianu Taylora nic o funkcji dowiedzieć się nie można! Tym razem cała informacja jest ukryta w reszcie.

Oczywiście $0 = f(0)$ jest najmniejszą wartością funkcji f, ale to wynika wprost z definicji tej funkcji. ■

Przykład 24.23 Niech $g(x) = xf(x)$, gdzie f oznacza funkcję zdefiniowaną w poprzednim przykładzie. Z wzoru na pochodną iloczynu dwu funkcji i tego, że $f^{(n)}(0) = 0$ dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 0$ wynika, że $g^{(n)}(0) = 0$ dla każdego całkowitego $n \geqslant 0$. Funkcja g przyjmuje wartości dodatnie dla $x > 0$, a dla $x < 0$ — ujemne. Wobec tego w punkcie 0 nie ma lokalnego ekstremum. ■

Przykład 24.24 Niech $\varphi(x) = \sin\frac{1}{x} \cdot e^{-1/x^2}$ dla $x \neq 0$ oraz $\varphi(0) = 0$. Rozumując tak, jak w przykładzie 24.22 dowodzimy, że funkcja φ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna oraz że $\varphi^{(n)}(0) = 0$ dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 0$. Bez trudu można stwierdzić, że nie istnieje taka liczba $\delta > 0$, że na przedziale $(0,\delta)$ funkcja φ jest wypukła lub wklęsła. Wobec tego 0 nie jest punktem przegięcia funkcji φ. W punkcie 0 funkcja φ nie ma też lokalnego ekstremum.

Podobnie jak w dwóch poprzednich przykładach przyjrzenie się wielomianowi Taylora w punkcie 0 nic nie daje, cała informacja o funkcji φ jest ukryta w reszcie, która jest równa funkcji. ■

Twierdzenie 24.13 (o lokalnych ekstremach)
Załóżmy, że funkcja f jest n–krotnie różniczkowalna w punkcie p oraz że zachodzą równości $0 = f'(p) = f''(p) = \ldots = f^{(n-1)}(p)$ i nierówność $f^{(n)}(p) \neq 0$. Wtedy

1. jeśli n jest liczbą nieparzystą, to funkcja f nie ma w punkcie p lokalnego ekstremum — w dowolnie małym otoczeniu punktu p przyjmuje zarówno wartości większe niż w punkcie p jak i wartości większe niż w punkcie p,

2. jeśli n jest liczbą parzystą, funkcja to f ma w punkcie p lokalne ekstremum właściwe: minimum, gdy $f^{(n)}(p) > 0$; maksimum, gdy $f^{(n)}(p) < 0$.

Dowód. Skorzystamy z wzoru Taylora: $f(p+h) = f(p) + + \frac{f'(p)}{1!}h + \frac{f''(p)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n + r_n(h)$. Wobec założeń o pochodnych funkcji f w punkcie p możemy napisać

$$f(p+h) - f(p) = \frac{f^{(n)}(p)}{n!}h^n + r_n(h) = h^n\left(\frac{f^{(n)}(p)}{n!} + \frac{r_n(h)}{h^n}\right)$$

Ponieważ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r_n(h)}{h^n} = 0$, więc taka liczba istnieje $\delta > 0$, że jeśli $0 < |h| < \delta$, to $\left|\frac{r_n(h)}{h^n}\right| < \left|\frac{f^{(n)}(p)}{n!}\right|$. Znak sumy dwu liczb jest taki sam jak znak tej z nich, której wartość bezwzględna jest większa. W przypadku sumy $\frac{f^{(n)}(p)}{n!} + \frac{r_n(h)}{h^n}$ jest on więc, przy założeniu, że $0 < |h| < \delta$, taki jak znak liczby $f^{(n)}(p)$ ($n!$ nie ma wpływu znak). Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to znak iloczynu $h^n\left(\frac{f^{(n)}(p)}{n!} + \frac{r_n(h)}{h^n}\right)$ zmienia się wraz ze zmianą znaku h. Jeśli n jest liczbą parzystą, to znak ten jest niezależny od znaku h: w przypadku $f^{(n)}(p) < 0$ liczba $h^n\left(\frac{f^{(n)}(p)}{n!} + \frac{r_n(h)}{h^n}\right)$ jest ujemna, zaś w przypadku $f^{(n)}(p) > 0$ – dodatnia. Stąd wynika teza. ■

Twierdzenie 24.14 (o punktach przegięcia)

1. Jeśli p jest punktem przegięcia funkcji f, która jest dwukrotnie różniczkowalna w tym punkcie, to $f''(p) = 0$.

2. Jeżeli $n > 2$ i funkcja f jest n–krotnie różniczkowalna w punkcie p oraz $0 = f''(p) = f^{(3)}(p) = \ldots = f^{(n-1)}(p)$ i $f^{(n)}(p) \neq 0$, to jeśli n jest liczbą nieparzystą, to p jest punktem przegięcia funkcji f, jeśli natomiast liczba n jest parzysta, to p nie jest punktem przegięcia funkcji f.

Dowód. 1. Z definicji punktu przegięcia wynika, że istnieje taka liczba $\delta > 0$, że na jednym z przedziałów $(p-\delta, p]$, $[p, p+\delta)$ funkcja f jest wypukła, a na drugim — wklęsła. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że na przedziale $(p-\delta, p]$ funkcja f jest wypukła, a na przedziale $[p, p+\delta)$ — wklęsła. Ponieważ f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie p, więc jest różniczkowalna w punktach pewnego przedziału o środku w punkcie p. Bez straty ogólności można przyjąć, że tym przedziałem jest $(p-\delta, p+\delta)$. Wobec tego na przedziale $(p-\delta, p]$ pochodna f' funkcji f jest niemalejąca i wobec tego jej pochodna, czyli f'', jest nieujemna w każdym punkcie, w którym jest określona, więc w szczególności $f''(p) \geqslant 0$. Na przedziale $[p, p+\delta)$ funkcja f jest wklęsła i wobec tego $f''(p) \leqslant 0$. Ponieważ $f''(p) \leqslant 0 \leqslant f''(p)$, więc $f''(p) = 0$.

2. Zastosujemy wzór Taylora do funkcji f'' w punkcie p biorąc pod uwagę zerowanie się kolejnych pochodnych. Mamy

$$f''(p+h) - f''(p) = h^{n-2}\left(\tfrac{f^{(n)}(p)}{(n-2)!} + \tfrac{r_{n-2}(h)}{h^{n-2}}\right).$$

Niech $\delta > 0$ będzie taką liczbą dodatnią, że jeśli $0 < |h| < \delta$, to $\left|\frac{r_{n-2}(h)}{h^{n-2}}\right| < \frac{|f^{(n)}(p)|}{(n-2)!}$. Liczby $\frac{f^{(n)}(p)}{(n-2)!} + \frac{r_{n-2}(h)}{h^{n-2}}$ i $\frac{f^{(n)}(p)}{(n-2)!}$ mają więc taki sam znak. Jeśli liczba n jest nieparzysta, to liczba h^{n-2} jest dodatnia dla dodatnich h i ujemna dla h ujemnych. Wobec tego liczba $f''(p+h) = h^{n-2}\left(\frac{f^{(n)}(p)}{(n-2)!} + \frac{r_{n-2}(h)}{h^{n-2}}\right)$ jest na jednym z przedziałów $(-\delta, 0)$, $(0, \delta)$ dodatnia, a na drugim — ujemna. Wobec tego na jednym z przedziałów $(p-\delta, p]$, $[p, p+\delta)$ funkcja f jest ściśle wklęsła, a na drugim — ściśle wypukła. Wynika stąd, że p jest punktem przegięcia funkcji f. Jeżeli natomiast liczba n jest parzysta, to wtedy funkcja f'' ma w punkcie p lokalne ekstremum właściwe, więc albo na całym przedziale $(p-\delta, p+\delta)$ z wyjątkiem punktu p funkcja f'' jest dodatnia, albo na całym przedziale $p-\delta, p+\delta$ funkcja f'' jest ujemna. W pierwszym przypadku funkcja f jest ściśle wypukła na calutkim przedziale $(p-\delta, p+\delta)$, a w drugim — ściśle wklęsła. W żadnym z tych przypadków p nie jest punktem przegięcia funkcji f. Dowód został zakończony. ■

Dowody dwóch ostatnich twierdzeń ilustrują, jak stosowany jest wzór Taylora: pewna własność przysługuje wielomianowi Taylora, reszta nie jest w stanie jej zmienić, bo jest za mała. Oczywiście istotnym założeniem jest $f^{(n)}(p)\neq 0$ — bez niego nie mamy podstaw do twierdzenia, że reszta jest mała w porównaniu z wielomianem Taylora funkcji $f(x)-f(p)$, przeciwnie w takim przypadku wszystkie informacje o zachowaniu się funkcji w pobliżu punktu p zawarte są w reszcie, o której niewiele wiemy! Wypada podkreślić, że mówimy tu jedynie o zachowaniu się funkcji w pobliżu punktu p, na nic więcej nie możemy liczyć, bo założenia, które uczyniliśmy dotyczą jedynie pochodnych w tym jednym punkcie! O wielkości liczby δ również nic nie możemy powiedzieć. Jeżeli w konkretnej sytuacji musimy czegoś konkretnego o niej dowiedzieć się, to wymaga to dalszego badania konkretnej funkcji.

Kończąc przytoczymy twierdzenie pozwalające napisać resztę r_n w konkretnej postaci przy dodatkowym założeniu, że istnieje następna pochodna funkcji w pewnym otoczeniu interesującego nas punktu. Z trzech często przytaczanych wzorów podamy tylko jeden, bo ich stosowalność jest dosyć ograniczona z wyjątkiem jednego, w którym występuje całka, więc na razie niedostępnego.

Twierdzenie 24.15 (Lagrange'a o postaci reszty)
Jeśli funkcja $f\colon (a,b)\longrightarrow \mathbb{R}$ jest $(n+1)$–krotnie różniczkowalna w przedziale (a,b), to między dowolnymi liczbami $x,y\in(a,b)$ można znaleźć taką liczbę c, że $r_{x,n,f}(y-x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(y-x)^{n+1}$.

Dowód. Niech $g(x)=r_{x,n,f}(y-x)=f(y)-\Big(\sum\limits_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}(y-x)^j\Big)$.

Wtedy $g'(x)=-\sum\limits_{j=0}^{n}\frac{f^{(j+1)}(x)}{j!}(y-x)^j+\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{f^{(j)}(x)}{(j-1)!}(y-x)^{j-1}=$

$= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(y-x)^n$. Niech $w(x) = (y-x)^{n+1}$, więc $w'(x) = = -(n+1)(y-x)^n$. Z twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej wynika, że między liczbami x i y można znaleźć taka liczbę c, że $\frac{g(x)-g(y)}{w(x)-w(y)} = \frac{g'(c)}{w'(c)} = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(y-c)^n/\big(-(n+1)(y-c)^n\big) = =\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$, więc $g(x) = g(x) - g(y) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\big(w(x)-w(y)\big) = =\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(y-x)^{n+1}$, a właśnie ten wzór chcieliśmy udowodnić. ∎

Uwaga 24.16
Można uzyskać inne postaci reszty zastępując w dowodzie twierdzenia Lagrange'a wielomian $(y-x)^{n+1}$ innym wielomianem zerującym się w punkcie y, np. $y-x$. Ogólny wzór wygląda wtedy tak: $r_{x,n,f}(y-x) = -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)\frac{w(x)}{w'(c)}$. Dodajmy jeszcze, że dowód twierdzenia jest bardzo krótki, ale jednak jest oparty na pomyśle: traktujemy resztę $r_{x,n,f}(y-x)$ jako funkcję zmiennej x przy ustalonym y, choć w pierwszej chwili mamy ochotę zmieniać y przy ustalonym x. ∎

Zadania

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, jeśli $f(x) =$

1. $\frac{\sin x - x}{x^3}$;
2. x^x;
3. $\frac{\big(1-(\cos x)^{\sin x}\big)^2}{(\operatorname{tg} x)^6}$;
4. $\frac{\sin(1683x)}{\sin(x\sqrt{2})}$;
5. $\frac{x-\sin x}{\operatorname{tg} x - x}$;
6. $\frac{\sin(\operatorname{tg} x - \sin x)}{(-\ln(\cos x))^a}$, $a\in\mathbb{R}$;
7. $\frac{x\operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$;
8. $\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$;
9. $\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$;
10. $\frac{\arcsin(2x) - 2\arcsin x}{x^3}$;
11. x^{x^x-1};
12. $\frac{2^x - 2^{\sin x}}{x^3}$;
13. $x^{2/(1+\ln x)}$;
14. $\frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$;
15. $x^{-3}\big(1-(\cos x)^{\sin x}\big)$;
16. $(\ln\frac{1}{x})^x$;
17. $\big((\ln x)\cdot\ln(1-x)\big)$;
18. $x^\varepsilon \ln x$, gdzie $\varepsilon > 0$;
19. $\big(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\big)$;
20. $\big(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\big)$;
21. $\frac{1}{x}\cdot\big((1+x)^{1/x} - e\big)$;
22. $\big(\frac{\arcsin x}{x}\big)^{-1/x^2}$;

23. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$; 24. $\frac{x\ln(\cos x)}{\sin x - \operatorname{tg} x}$;

25. $\frac{\ln(1+\operatorname{tg} x)-\sin x}{\sin^3 x}$; 26. $\frac{\ln(\cos x+\arcsin x)}{e^x \operatorname{tg} x}$;

27. $\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x))+\arcsin x}{x}$; 28. $\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$;

29. $\frac{\sin(\sin x)+e^{1-\cos x}\operatorname{tg} x+\sqrt[3]{1-x}-\sqrt{\cos x}}{\sqrt[3]{x-\sin x}+\sqrt[5]{x-\operatorname{tg} x+(x^3/3)}}$;

30. $\frac{1}{x(\ln(\cos x))^4}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}-\sin x\right)$;

31. $\frac{(\sin(\operatorname{tg} x))^{5/3}\cdot\sqrt[3]{x^x-1}}{(\ln x)^{1/3}\cdot(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}$;

32. $\frac{1}{\ln(\cos x)}\cdot\left(\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{\sin x\cdot\operatorname{tg} x}-\frac{1}{e}\right)$;

33. $\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{3}}\right)$.

2. Obliczyć granicę

a. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$; b. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}$

c. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg} x-1}{2\sin^2 x-1}$; d. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1000}(1.001)^{-x}$;

e. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{-1/x}$; f. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot e^{-x/1000}$;

g. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}$; h. $\lim\limits_{x\to 1}x^{1/(1-x)}$;

i. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$; j. $\ln(x+e^x)\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right)$.

3. Obliczyć, jeśli istnieje, granicę $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$. Czy można użyć regułę de l'Hospitala (bez dodatkowych przekształceń)?

4. Obliczyć, jeśli istnieje, granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$. Czy można użyć regułę de l'Hospitala (bez dodatkowych przekształceń)?

5. Obliczyć, jeśli istnieje, granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}$. Czy można użyć regułę de l'Hospitala (bez dodatkowych przekształceń)?

6. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$ lub wykazać, że ta granica nie istnieje. Czy można zastosować regułę de l'Hospitala (bez dodatkowych przekształceń)?

7. Niech $P(x)$ oznacza pole odcinka koła o promieniu 1 odciętego cięciwą $c(x)$, na której oparty jest kąt x. Znaleźć trzeci wielomian Taylora w punkcie 0 funkcji P. Wykazać, że $P(x) \approx \frac{2}{3}c(x)h(x)$, gdzie $h(x)$ jest równe różnicy promienia okręgu i wysokości trójkąta równoramiennego T_2, którego podstawą jest cięciwa c a wierzchołkiem leżącym naprzeciw niej — środek okręgu.

8. Oszacować błąd $r(x)$ popełniany przy stosowaniu następującego przybliżenia: długość łuku $A(x)$, na którym oparty jest kąt o wielkości x, jest równa sumie sumie ramion trójkąta równoramiennego T_1, którego podstawą jest cięciwa $c(x)$, na której oparty jest łuk $A(x)$ a wysokością jest odcinek o długości $\sqrt{\frac{4}{3}}$ odległości środków $A(x)$ i $c(x)$.

9. Dowieść, że $(\operatorname{tg} x)^{(n)}(0) > 0$ dla dowolnego nieparzystego n.

10! Dowieść, że wielomian w jest podzielny przez $(x-c)^k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 = w(0) = w'(0) = \ldots = w^{(k-1)}(0)$.

11. Niech f oznacza funkcję trzykrotnie różniczkowalną i niech $S_f(x) = \frac{f^{(3)}(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$ dla każdej liczby x, dla której $f'(x) \neq 0$. Dowieść, że jeśli $S_f < 0$ i $S_g < 0$ i złożenie $f \circ g$ jest zdefiniowane, to $S_{f\circ g} < 0$.

12. Dowieść, że jeśli $S_f < 0$ dla pewnej funkcji f, to funkcja f' nie ma minimów lokalnych (S_f z poprzedniego zadania).

13. Dowieść, że jeśli $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją $(p+q)$–krotnie różniczkowalną w punktach przedziału $[a,b]$ i ma pochodną rzędu $p+q+1$ w punktach przedziału (a,b) i $f(a) = f'(a) = {=}f''(a) = \ldots = f^{(p)}(a) = 0 = f^{(q)}(b) = \ldots = f'(b) = f(b)$, to istnieje taka liczba $c \in (a,b)$, że $f^{p+q+1}(c) = 0$.

14! Dowieść, że jeśli wielomian $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ ma n pierwiastków rzeczywistych liczonych z krotnościami, to k–ta pochodna tego wielomianu ma $n-k$ pierwiastków rzeczywistych liczonych z krotnościami.

15. Dowieść, że funkcja $e^x\left(x^ne^{-x}\right)^{(n)}$ jest wielomianem, który ma n różnych pierwiastków dodatnich.

16. Udowodnić, że jeśli $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to funkcja f jest wielomianem stopnia mniejszego niż n.

17. Dowieść, że jeśli $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną i dla każdego $x\in\mathbb{R}$ istnieje taka liczba naturalna $n_x \leqslant 100$, że $f^{(n_x)}(x) = 0$, to funkcja f jest wielomianem stopnia mniejszego niż 100.

18*. Dowieść, że jeśli $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną i dla każdego $x\in\mathbb{R}$ istnieje taka liczba naturalna n_x, że $f^{(n_x)}(x) = 0$, to f jest wielomianem.

19*. Dowieść, że jeśli $f\colon[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ jest taką funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną, że $0 = f(0) = f'(0) = = f''(0) = \ldots$ i $f^{(n)}(x)\geqslant 0$ dla każdej liczby $x\geqslant 0$ i każdej liczby całkowitej $n\geqslant 0$, to $f(x) = 0$ dla każdego $x\geqslant 0$.

20. Dowieść, że jeśli $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ jest taką funkcją dwukrotnie różniczkowalną, że $f''(x) = -\omega^2 f(x)$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$, to $f(x) = f(0)\cos(\omega x) + f'(0)\sin(\omega x)$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

21. Dowieść, że jeśli $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ jest taką funkcją dwukrotnie różniczkowalną, że $f''(x) = \omega^2 f(x)$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$, to $f(\frac{x}{\omega}) = \frac{1}{2}\big[f(0)\big(e^x+e^{-x}\big)+f'(0)\big(e^x-e^{-x}\big)\big]$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

22. Dowieść, że jeśli $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ jest taką funkcją dwukrotnie różniczkowalną na przedziale $[a,b]$, że $f'(a) = 0 = f'(b)$, to istnieje takie $c\in(a,b)$, że $|f''(x)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}\big|f(b)-f(a)\big|$.

23. Dowieść, że jeśli $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną w punkcie x, to $f''(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$.

24. Dowieść, że jeśli $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ jest taką funkcją n–krotnie różniczkowalną, że $f(x_j) = 0$ dla pewnych $x_0, x_1,\ldots,x_n$ z przedziału $[a,b]$, $j = 0,1,\ldots,n$ i $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, to istnieje taka liczba $c\in(a,b)$, że $f^{(n)}(c) = 0$.

25. Dowieść, że jeśli $T_m(x) = 2^{1-m}\cos(\arccos x)$, gdy $|x|<1$, to $(1-x^2)T''_m(x) - xT'_m(x) + m^2T_m(x) = 0$.

26. Dowieść, że jeśli $P_m(x) = \frac{1}{2^m m!}\big((x^2-1)^m\big)^{(m)}$, to

$$(1-x^2)P''_m(x) - xP'_m(x) + m(m+1)P_m(x) = 0.$$

27. Czy szereg $\sum\frac{x^n}{n!}$ jest jednostajnie zbieżny na całej prostej?

28. Wyjaśnić, czy szereg $\sum(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ jest jednostajnie zbieżny na całej prostej.

29. Niech $f(0) = 0$ i $f(x) = e^{-1/x^2} \sin\frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$. Wykazać, że funkcja f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna.

30. Podać przykład takiej nieskończenie wiele razy różniczkowalnej funkcji f, że $xf(x) > 0$ dla $x \neq 0$ i że na żadnym przedziale postaci $[0, \delta]$, $\delta > 0$, funkcja ta nie jest wypukła ani wklęsła.

31. Dowieść, że jeśli $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną i $M_j = \sup\{|f^{(j)}(x)|:\quad x > 0\}$ dla $j = 0, 1, 2$, to $M_1 \leqslant 2M_0M_2$ oraz że w tej nierówności współczynnika 2 nie można zmniejszyć.

32. Dowieść, że jeśli $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ i funkcja f'' jest ograniczona, to $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

33. Załóżmy, że funkcja f jest k–krotnie różniczkowalna w punkcie p, a funkcja g jest k–krotnie różniczkowalna w punkcie $f(p)$, to zachodzi równość

$$(g \circ f)^{(k)}(p) =$$

$$= \sum \frac{k!}{n_1!n_2!\cdot\ldots\cdot n_j!} g^{(j)}(f(p)) \left(\frac{f'(p)}{1!}\right)^{n_1} \left(\frac{f''(p)}{2!}\right)^{n_2} \ldots \left(\frac{f^{(j)}(p)}{1!}\right)^{n_j},$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie takie układy liczb naturalnych $(n_1, n_2, \ldots, n_j)$, że $n_1 + 2n_2 + \cdots + jn_j = k$.

34. Dowieść, że jeśli dwukrotnie różniczkowalna na $\mathbb{R}$ funkcja f spełnia warunki $\big(f(x)\big)^2 \leqslant a$ i $\big(f'(x)\big)^2 + \big(f''(x)\big)^2 \leqslant b$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to $\forall_{x\in\mathbb{R}} \big(f(x)\big)^2 + \big(f'(x)\big)^2 \leqslant \max(a, b)$.

35. Dowieść, że istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $f(x) = 0$, gdy $x \leqslant 0$ oraz $f(x) > 0$, gdy $x > 0$.

36. Dowieść, że istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $f(x) = 0$, gdy $x \leqslant 0$, $0 < f(x) < 1$, gdy $0 < x < 1$ oraz $f(x) = 1$, gdy $x \geqslant 1$.

37. Dowieść, że istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $f(x) = 0$, gdy $|x| \geqslant 2$, $0 < f(x) < 1$, gdy $1 < |x| < 2$ oraz $f(x) = 1$, gdy $|x| \leqslant 1$.

38. Wykazać, że dla każdego wielomianu w i każdych $h,p \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $w(p+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} w^{(n)}(p)$.

39. Udowodnić, że jeśli $f(x) = \ln x$ i $p > |h| > 0$, to zachodzi równość $f(p+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(p)$.

40. Udowodnić, że jeśli $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$, $p \in \mathbb{R}$, to istnieje taka liczba $r > 0$, że jeśli $|h| < r$, to $f(p+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(p)$.

41. Dowieść, że jeśli $f(x) = \frac{x+2}{1+3x+3x^2+x^3}$, $p \neq -1$, to istnieje taka liczba $r > 0$, że jeśli $|h| < r$, to $f(p+h) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(p)$.

42. Dowieść, że jeśli $f(x) = \sqrt{x+2}$, $p > -2$, to istnieje taka liczba $r > 0$, że jeśli $|h| < r$, to $f(p+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(p)$.

43. Dowieść, że jeśli $f(x) = \sin(1+x^2)$, $p \in \mathbb{R}$, to istnieje taka liczba $r > 0$, że jeśli $|h| < r$, to $f(p+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(p)$.

44. Dowieść, że jeśli $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $p \neq -1$, to istnieje taka liczba $r > 0$, że jeśli $|h| < r$, to $f(p+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(p)$.

45. Dla jakich $a,b \in \mathbb{R}$ zachodzi wzór $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^5} = 0$?

46. Dla jakich $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ funkcja $x^{-5}\left(e^{-x} - \frac{1+ax+bx^2}{1+cx+dx^2}\right)$ jest ograniczona w pewnym otoczeniu liczby 0?