

# Węzły i sploty w wymiarze 3 i 4

Michał Jabłonowski  
michal.jablonowski@gmail.com

© marzec 2023

# Spis treści

<b>Wprowadzenie</b>	<b>5</b>
<b>I Węzły i sploty klasyczne</b>	<b>7</b>
<b>1 Wstęp</b>	<b>8</b>
1.1 Rys historyczny . . . . .	8
1.2 Zastosowania w naukach poza-matematycznych . . . . .	11
1.2.1 W biologii i chemii . . . . .	11
1.2.2 W fizyce . . . . .	11
1.2.3 W innych dziedzinach . . . . .	12
1.3 Tablicowanie . . . . .	12
<b>2 Węzły wielokątne</b>	<b>16</b>
<b>3 Węzły i sploty w różnych wymiarach</b>	<b>19</b>
3.1 Rozmaitości w kategorii TOP, PL oraz DIFF . . . . .	20
<b>4 Diagramy, cienie i ruchy</b>	<b>22</b>
4.0.1 Trudne sploty trywialne . . . . .	26
4.1 Metody kodowania . . . . .	28
<b>5 Typy symetrii</b>	<b>31</b>
<b>6 Popularne rodziny i sposoby przedstawienia węzłów i splotów</b>	<b>34</b>

	2
6.1 Węzły skrócone . . . . .	34
6.2 Sploty torusowe . . . . .	34
6.3 Węzły i sploty preclowe . . . . .	35
6.4 Węzły i supły wymierne . . . . .	36
6.5 Sploty alternujące . . . . .	36
6.5.1 Hipotezy Taita . . . . .	37
6.6 Sploty dodatnie . . . . .	38
6.7 Sploty okresowe/periodyczne . . . . .	38
6.8 Postać warkoczowa . . . . .	39
6.8.1 Twierdzenie Alexandera . . . . .	39
6.8.2 Twierdzenie Markowa . . . . .	40
6.9 Węzły satelitarne . . . . .	40
6.10 Węzły hiperboliczne . . . . .	40
6.11 Pary mutantów . . . . .	41
6.12 Sploty Brunna . . . . .	42
<b>7 Niezmienniki</b>	<b>44</b>
7.1 Dopełnienie splotu . . . . .	44
7.2 Liczba zaczepienia . . . . .	44
7.3 Liczba skrzyżowaniowa . . . . .	45
7.4 Liczba kolorująca . . . . .	45
7.5 Indeks warkoczowy . . . . .	46
7.6 Liczba rozwiązująca/gordyjska . . . . .	46
7.7 Liczba mostowa . . . . .	47
7.8 Objętość hiperboliczna . . . . .	47
7.9 Wielomian Alexandera . . . . .	48
7.10 Wielomian Jonesa . . . . .	50
7.10.1 Wielomian Jonesa z nawiasu Kauffmana . . . . .	52

	3
7.11 Wielomian HOMFLYPT . . . . .	53
7.12 Wielomian Kauffmana dwóch zmiennych . . . . .	54
7.13 Głębokość drzewa motkowego . . . . .	55
7.14 Wybrane inne zależności pomiędzy powyższymi niezmiennikami	55
7.15 Grupa węzła lub splotu . . . . .	59
<b>8 Homologie Khovanova</b>	<b>60</b>
<b>9 Powierzchnie</b>	<b>67</b>
9.1 Wprowadzenie . . . . .	67
9.2 Powierzchnie orientowalne . . . . .	67
9.3 Powierzchnie nieorientowalne . . . . .	68
9.4 Klasyfikacja 2-rozmaitości . . . . .	70
9.5 Powierzchnie i macierz Seiferta dla splotu . . . . .	70
9.6 Genus węzła . . . . .	71
9.7 Wielomian Alexandra z powierzchni Seiferta . . . . .	73
9.8 Sygnatura . . . . .	73
<b>10 Węzły i sploty na diagramach z punktami potrójnymi</b>	<b>74</b>
<b>11 Nierówności pomiędzy niezmiennikami całkowitoliczbowymi</b>	<b>79</b>
<b>II Węzły i sploty powierzchniowe</b>	<b>82</b>
<b>12 Zawężłone powierzchnie w czteroprzestrzeni</b>	<b>83</b>
12.1 Filmy . . . . .	88
12.2 Ruchy Rosemana . . . . .	91
12.3 Grupa węzła oraz splotu powierzchniowego . . . . .	93
12.4 Główne klasy obiektów . . . . .	93
<b>13 Minimalna liczba punktów potrójnych</b>	<b>97</b>

	4
<b>14 Struktury dystrybutywne związane z węzłami</b>	<b>105</b>
<b>15 Niezmienniki wybranych ruchów Rosemana</b>	<b>111</b>
15.1 Hiperboliczne rozszczepienie i diagramy markowane . . . . .	115
15.2 Ruchy Yoshikawy . . . . .	116
<b>16 Monoid zawężonych powierzchni, związany z ruchami Yoshikawy</b>	<b>120</b>
16.1 Prezentacja . . . . .	120
16.2 Reprezentacja . . . . .	125
<b>17 Powierzchnie jako klasyczne sploty z zaczepionymi wstęgami</b>	<b>128</b>
17.1 Sploty z wiązaniami . . . . .	131
<b>18 Immersje powierzchni w czteroprzestrzeń</b>	<b>137</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>141</b>
<b>Skorowidz</b>	<b>153</b>

# Wprowadzenie

Węzły w codziennym życiu, poza osobami zajmującymi się naukami ścisłymi, dostrzegane są u: żeglarzy, alpinistów, rybaków, chirurgów, magików, dekoratorów czy wreszcie przy powszechnych czynnościach jak zabezpieczanie pakunków, zawiązywanie krawata lub sznurówek czy rozsuptywanie lampek choinkowych lub kabli słuchawek. W dziedzinach ścisłych węzły są ważnym elementem w naukach, takich jak chemia, biologia czy fizyka, gdzie modele węzłów są używane do opisu skomplikowanych struktur molekularnych i chemicznych.

Węzły są również ważnym elementem sztuki w Azji Wschodniej, zwłaszcza w Chinach i Japonii. W Japonii węzły są używane w dekoracji, sztuce walki i ceremonii herbacianej. Jednym z najbardziej znanych węzłów japońskich jest węzeł Mizuhiki, który jest stosowany jako dekoracja w różnych ceremoniach, takich jak wesela, urodziny i święta.

Matematyczna teoria węzłów to gałąź topologii, która powstała z inspiracji powyższymi węzłami. Topologia zaś, mówiąc bardzo skrótowo, bada własności geometrycznych obiektów, które zachowane są przy jego nieznacznym przekształcaniu jak gdyby były wykonane z elastycznego materiału (czyli przy tzw. ciągłych deformacjach i ciągłych deformacjach odwrotnych). Węzły są jednym z nielicznych działów topologii, w której sformułowania problemów dają się wytłumaczyć osobom spoza matematyki. Rozwiązania ich, z drugiej strony, często korzystają z zaawansowanej wiedzy na styku różnych dziedzin matematyki.

Według znanego matematyka E.C. Zeemana, podstawowe trzy problemy w topologii są następujące: kiedy dane dwie przestrzenie są homeomorficzne? (czyli tzw. problem klasyfikacji topologicznej) kiedy dana przestrzeń zanurza się w inną przestrzeń? (czyli tzw. problem zanurzenia lub osadzenia jednej przestrzeni w innej) kiedy dane dwa zanurzenia są w niej izotopijne? (czyli tzw. problem klasyfikacji węzłów i splotów) Na temat ostatniego z tych pytań wiadomo, że dowolne dwie sfery gładko zanurzone w przestrzeń euklidesową wymiaru co najmniej o trzy większego lub o jeden większego, są w niej (topologicznie) izotopijne. W przypadku gdy różnica wymiarów jest równa dwa, kompletna klasyfikacja nie jest ani znana ani oczekiwana.

Węzłem (matematycznie już ujmując) nazywamy kowymiaru dwa zanurzenie zamkniętej rozmaitości, zwykle rozumie się przez to zanurzenie sfery w sferę (lub równoważnie, w przestrzeń Euklidesową tego samego wymiaru). Tematyka tego opracowania to teoria klasycznych węzłów (czyli zanurzeń  $S^1$  w  $\mathbb{R}^3$ ) oraz zawężonych powierzchni (tj. rozmaitości dwuwymiarowych) położonych w  $\mathbb{R}^4$ . Ta ostatnia jest co najmniej tak samo bogata jak teoria klasyczna, biorąc choćby pod uwagę fakt, iż geometryczny ślad okręcenia supła ma grupę podstawową dopełnienia izomorficzną z grupą podstawową dopełnienia węzła z którego powstał. Ta konstrukcja dokonana została w artykule E. Artina z 1925 roku, uważanym za najwcześniejszą publikację na temat zawężonych powierzchni.

Badanie wyżej wymiarowych węzłów jest niezwykle trudne i wymaga nie tylko wyobraźni, ale także wyrafinowanych metod algebraicznych. Ludzie normalnie postrzegają fizyczną rzeczywistość jako 4-wymiarową, czyli 3-wymiarową przestrzeń: góra-dół, tył-przód i z boku na bok plus jedno-wymiarowy czas: przeszłość-przyszłość. Podstawowymi dwiema metodami na pokonanie trudności jest: wykonanie rzutowania prostopadłego z 4-wymiarowej przestrzeni do 3-wymiarowej przestrzeni i badanie zbioru uzyskanych w tym procesie samoprzecięć, jak również badanie położenia niżej-wymiarowych poprzecznych, równoległych cięć badanej powierzchni. Niezmiennikiem będzie coś, co zachowane będzie przy rzutowaniach lub cięciach wszelkich równoważnych węzłów lub splotów powierzchniowych. Jednak sam zbiór punktów osobliwych, przy rzutowaniu w położeniu ogólnym lub na poprzecznych cięciach, może wyglądać różnie z matematycznego punktu widzenia, przy dokonywaniu ciągłych przekształceń powierzchni przed dokonaniem rzutowania czy cięcia.

Warto przypomnieć legendę Platona o jaskini w której więźniowie widzą jedynie cienie na ścianie naprzeciw. Dla nich wszystko co realne to te dwuwymiarowe cienie obiektów, posługując się dalej analogią wnioskujemy, że nasza postrzegana trójwymiarowa rzeczywistość może być jedynie projekcją bardziej złożonej czterowymiarowej rzeczywistości. Uświadomienie sobie, że grawitacja jest związana z krzywizną przestrzeni sugeruje, że być może inne siły natury mogą być związane z krzywizną w innych, nieobserwowalnych wymiarach. Idea dodatkowych wymiarów przestrzennych wywodzi się z teorii pięcio-wymiarowych wektorów Nordstöma z 1914 r., a następnie z teorii Kaluzy-Kleina w 1921 r., w celu ujednoczenia ogólnej teorii względności i elektromagnetyzmu w pięcio-wymiarowej czasoprzestrzeni (4 wymiary na przestrzeń i 1 na czas).

Niniejsza książka podzielona jest na dwie (zbliżone objętościowo) części: Węzły i sploty w wymiarze 3 czyli przypadek nazywany klasycznym; Węzły i sploty w wymiarze 4 czyli inaczej zwane powierzchniowymi. Wiele z tematów oczywiście nie zostało tu omówionych, natomiast zaprezentowana tematyka przesunięta jest naturalnie w stronę bardziej odpowiadającej zainteresowaniom autora.

# **Część I**

## **Węzły i sploty klasyczne**



# Rozdział 1

## Wstęp

### 1.1 Rys historyczny

Ludzkość rysowała diagramy węzłów od tysięcy lat. Różne przykłady sztuki węzłowej można znaleźć we wszystkich starożytnych cywilizacjach. Jednym z najstarszych przykładów węzłów w sztuce i religii jest odbicie cylindrycznej pieczęci (ok. 2600–2500 p.n.e.) z Ur w Mezopotamii, gdzie przedstawiony jest wijący się wąż połykający swój ogon. Ekspedycja archeologiczna w Lernie w Grecji (pod przewodnictwem J.L. Caskeya) odkryła pieczęć zawierającą węzły i sploty z ok. 2200 p.n.e. Podobnie, pieczęć z Anatolii (ok. 1700 p.n.e.) zawiera splot. Węzły były również przedstawiane na rzymskich mozaikach.

Istniał również używany przez Inków *kipu*, czyli sposób zapisu z wykorzystaniem sznurka, na którym różnym rodzajom węzłów oraz ich kombinacjom przypisuje się odrębne znaczenia. Niektóre z najwcześniejszych dowodów zawężania w Chinach są zachowane na naczyniach z brązu z Okresu Walczących Królestw (481–221 p.n.e.). W Chinach, węzły były również często używane jako symbole szczęścia i długowieczności, a także jako dekoracje na ubraniach i biżuterii. Celtowie szeroko wykorzystywali obrazki z węzłów tworzone do celów dekoracyjnych i religijnych.

W swoim eseju na temat węzłów ortopedycznych grecki lekarz Heraklas (I w.n.e.) opisał i wyjaśnił, podając instrukcje krok po kroku, osiemnaście sposobów wiązania zawiesi ortopedycznych. Oprócz Heraklasy, który opisał wiele węzłów ortopedycznych, inny słynny lekarz z czasów starożytnych, Galen, również pisał na temat węzłów medycznych. Węzły ortopedyczne były używane do utrzymywania złamanych kości w miejscu lub do stabilizacji innych urazów.

Kombinatoryka, teoria grafów i teoria węzłów mają swe wspólne korzenie w ideach formułowanych przez G.W. Leibniza (1646–1716) jako *ars combinatoria* i

*geometria situs* (czyli geometrii położenia, w której nie bierze się pod uwagę wielkości). Pierwszy przekonywający przykład *geometrii situs* został zaproponowany przez H. Kühna (1690–1769), gdańskiego matematyka urodzonego w Królewcu, w liście z 1735 roku do L. Eulera (1707–1783). Euler rozwiązał i uogólnił problem mostów królewieckich a jego praca (opublikowana w 1736 r.) uważana jest za narodziny teorii grafów i topologii.

Pierwszą pracą wspominającą węzły w matematycznym kontekście, jest praca A.T. Vandermonde'a (1735–1796) z 1771 roku, który konkretnie umiejscawia warkocze i węzły jako przedmiot geometrii położenia. C.F. Gauss (1777–1855) interesował się węzłami co najmniej od 1794 r. W notatkach Gaussa napotykaemy wiele rysunków węzłów z kodem Gaussa (jak to teraz nazywamy), ponadto mamy zdefiniowany przez niego indeks zaczepienia z 1833 roku, zdefiniowany przy pomocy pewnej całki podwójnej i użyty przy badaniach nad elektrodynamiką. Gauss niczego jednak o węzłach nie opublikował; pozostawił to swojemu studentowi J.B. Listingowi (1808–1882), który w 1847 roku opublikował monografię w dużej mierze poświęconą węzłom, grafom i kombinatoryce.

W latach 1860. panowało przekonanie, że substancja nazywana eterem (będąca medium dla elektryczności i magnetyzmu) przenika całą przestrzeń. W celu wyjaśnienia różnych form materii Szkot William Thomson (1824–1907), później znany jako Lord Kelvin, wysnuł przypuszczenie, że atomy są węzłami (liniami wirowymi) w eterze. Na przykład węzeł trywialny, trójlistnik i węzeł ósemkowy mogły reprezentować wodór, węgiel i tlen (odpowiednio). Tak więc w drugiej połowie XIX wieku teoria węzłów rozwijana była głównie przez fizyków, takich jak: Thomson, J.C. Maxwell (1831–1879), P.G. Tait (1831–1901). Eksperyment Michelsona-Morleya z 1887 roku ostatecznie rozbił wirową teorię atomu, zaprzeczając istnieniu eteru, ale nie miało to znaczenia dla teorii węzłów jako działu matematyki, również badania węzłów i topologii, które wywodziły się z tych badań, przyczyniły się do rozwoju matematyki i fizyki w XX wieku. Maxwell ponadto, podał przykład dwóch krzywych zamkniętych, których nie da się oddzielić, ale których indeks zaczepienia jest równy zero.

W 1907 roku, w słynnej encyklopedii matematycznej, M. Dehn (1878–1952) i P. Heegaard (1871–1948) zarysowali systematyczne podejście do topologii. W szczególności, ściśle określili zakres teorii węzłów. Aby ominąć nieformalny opis deformacji krzywej w przestrzeni, wprowadzili węzły kratowe i ścisłą definicję (kratowej) równoważności, którą nazwali izotopią. Heegaard znany jest również z tego, że znalazł błąd (dotyczący dualności liczb Bettiego) w pracy Poincarégo. W. Wirtinger (1865–1945), na swoim wykładzie wygłoszonym na zjeździe Niemieckiego Towarzystwa Matematycznego w 1905 roku, zarysował metodę znajdowania grupy podstawowej dopełnienia węzła (przedstawienie grupy zwane teraz prezentacją Wirtingera grupy węzła). Dehn ogłosił w 1907 roku jeden z

ważniejszych wyników swojej pracy z 1910 roku (konstrukcja sfery Poincarégo z użyciem węzłów). Pierwszy dowód istnienia nietrywialnych węzłów podaje H. Tietze (1880–1964) w 1908 r., używając wspomnianej grupy węzła.

Tait był pierwszą osobą, która zauważyła związek pomiędzy węzłami a płaskimi grafami. Kolorował on w szachownicę regiony w dopełnieniu diagramu na płaszczyźnie. Następnie konstruował graf przez wybranie jednego wierzchołka w każdym białym regionie i łączył wierzchołki krawędziami idącymi przez skrzyżowania węzła. Maxwell był pierwszą osobą, która rozważała pytanie dotyczące różnych diagramów węzłów reprezentujących równoważne węzły. Rozważał on pewne elementarne ruchy, ale nie opublikował swoich badań. Równoważność węzłów w języku ruchów na diagramach została formalnie zapisana i dowiedziona w 1927 roku przez K.W.F. Reidemeistera (1893–1971), J.W. Alexandera (1888–1971) i jego studenta G.B. Briggsa. W latach 1930. po odkryciu pierwszego niezmiennika wielomianowego przez Alexandera w 1928 r., teoria węzłów stała się gałęzią topologii.

W 1961 roku W. Haken znalazł algorytm na wykrycie diagramu węzła trywialnego, częściowo rozwiązując jeden z ważniejszych problemów teorii węzłów. Przez wiele lat nikt nie podjął się z sukcesem implementacji tego algorytmu, udało się to B.A. Burtonowi, R. Budneyowi oraz W. Petterssonowi w 1999 r. w komputerowym programie Regina. W 1969 r. J. Conway opublikował nową, szybką metodę wyznaczania wielomianu Alexandera. W 1971 r. R. Riley jako pierwszy rozróżnił dwa węzły: węzeł Conwaya i węzeł Kinoshita-Terasaka, są to węzły o 11 skrzyżowaniach które są swoimi wzajemnymi tzw. „mutantami” co powoduje trudność w ich rozróżnieniu.

Pod koniec lat 1970. W. Thurston wprowadził, jako znaczący element, teorię hiperbolicznych 3-rozmaitości do teorii węzłów. Za swoje prace na temat geometrii hiperbolicznych Thurston otrzymał w 1982 medal Fieldsa. Wiosną 1984 r. V. Jones znalazł odpowiedniość pomiędzy warkoczami a studiowanymi przez niego skończone wymiarowymi algebrami von Neumanna. Odkrył on pierwszy wielomian od czasu odkrycia wielomianu Alexandera. W maju tegoż roku Jones (i niezależnie W.R. Lickorish z K. Millettem w lipcu 1984 r.) pokazali, że wielomian Jonesa może być zdefiniowany rekurencyjnie formułą podobną do liniowej formuły spełnianej przez wielomian Alexandera. Jones otrzymał w 1990 medal Fieldsa. Wielomian Jonesa okazał się pomocny do rozstrzygnięcia hipotez Taita, na temat diagramów węzłów alternujących, jedną z nich pokazali niezależnie: L. Kauffman, K. Murasugi oraz M.B. Thistlethwaite w 1987 r. Drugą z nich zaś rozstrzygnęli Thistlethwaite oraz W. Menasco w 1991 r.

Niezmiennik zorientowanych splotów, będący wielomianem Laurenta dwóch zmiennych, został odkryty parę miesięcy po wielomianie Jonesa, w lecie 1984 r. przez cztery grupy matematyków w składzie: R. Lickorish i K. Millet, J. Hosta,

A. Ocneanu oraz P. Freyd i Y. Yetter, niezależnie znaleźli go także jesienią 1984 J.H Przytycki i P. Traczyk. Uzyskany wielomian jest czasem nazywany HOM-FLYPT od pierwszych liter nazwiska jego odkrywców.

Na początku lat 1990. V.A. Vassiliev i M.N. Goussarov odkryli niezmienniki węzłów tzw. skończonego typu, które zawierają w sobie między innymi wielomian Jonesa. W 1993 r. M. Kontsevich skonstruował pewną całkę, otrzymując uogólnione niezmienniki Vassilieva z pewną algebraiczną strukturą. Kontsevich w ramach swoich badań opracował m.in. metody kategoryfikacji algebry, które znajdują zastosowanie w różnych dziedzinach matematyki i fizyki teoretycznej, otrzymał on w 1998 medal Fieldsa.

W 2000 r. ukazała się praca M. Khovanova w której zdefiniował on swoje homologie Khovanova. Charakterystyka Eulera tych homologii odtwarza wielomian Jonesa. W 2003 roku P. Ozsváth, Z. Szabó i niezależnie J. Rassmusen zdefiniowali węzłowe homologie Floera. Charakterystyka Eulera tych homologii odtwarza wielomian Alexandera a ponadto wykrywa genus węzła. (Po więcej o historii węzłów i ilustracje odsyłamy czytelnika do [66, 124, 125].)

## 1.2 Zastosowania w naukach poza-matematycznych

### 1.2.1 W biologii i chemii

Biochemicy odkryli zawężanie w cząsteczce DNA (F.H.C Crick, J.D. Watson) i w białkach. Odcinek DNA jest skomplikowanym węzłem molekularnym, nowe niezmienniki wielomianowe węzłów pozwoliły na nową metodę rozróżniania tych splecionych struktur, które mogą być wykrywane przy użyciu elektroforezy żelowej albo mikroskopu elektronowego. W białkach natomiast, główne łańcuchy białkowe tworzą węzły. Odkrycie białek posiadających taki węzeł budzi pytania o zwijanie takich białek i funkcję węzła. Zrozumienie roli węzłów w procesach prowadzonych przez białka może mieć szczególne znaczenie przy zwalczaniu chorób, w których kluczową rolę odgrywają agregaty białkowe. (Po więcej zastosowań teorii węzłów w tej dziedzinie odsyłamy czytelnika do [37, 39, 41, 42, 43, 116, 156].)

### 1.2.2 W fizyce

Węzły, supły i warkocze które rozważają matematycy w zasadzie można traktować tak, jakby były wykonane w sposób fizyczny (z elastycznego materiału). Nie różnią się w tym aspekcie od tych, które spotykamy w życiu codziennym (na

zwykłym sznurku). Użycie ich w fizyce sięga ponadto głębiej. W 1987 r. L. Kaufman znalazł interpretację statystyczno-mechaniczną dla wielomianu V. Jonesa. Powiązanie pomiędzy węzłami a mechaniką kwantową obejmuje tak zwane pola cechowania. Ponadto teoria węzłów jest działem, który okazuje się być blisko związany z kwantową teorią pola, czyli teorią fizyczną, której zasadniczym celem jest opis fundamentalnych składników naszego Wszechświata. Powiązania węzłów z fizyką kwantową dokonał E. Witten, jeden z najwybitniejszych współczesnych fizyków teoretyków, który otrzymał medal Fieldsa w 1990 r. (Po więcej zastosowań w tej dziedzinie odsyłamy czytelnika do [13, 96, 122].)

### 1.2.3 W innych dziedzinach

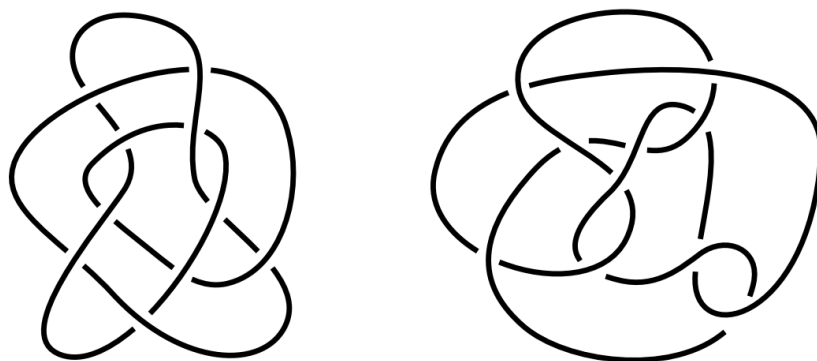
Teoria warkoczy znajduje zastosowanie między innymi w kryptografii [47] oraz do konstrukcji algorytmów kryptograficznych odpornych na ataki.

## 1.3 Tablicowanie

W przypadku klasycznym, tabulacja węzłów i splotów prowadzona jest pod względem niezmiennika, jakim jest liczba skrzyżowaniowa, czyli minimalna liczba przecięć w diagramie. W tym rozdziale mamy zawsze na myśli niezorientowane diagramy minimalne węzłów i splotów pierwszych (tzn. nierozkładalnych względem sumy spójnej) z dokładnością do odbicia lustrzanego.

P.G. Tait zaczął tablicowanie węzłów w 1867 roku w celu ich klasyfikacji, do roku 1877 stablicował wszystkie węzły do liczby skrzyżowaniowej równej 7 bez używania niezmienników a w roku 1885 opublikował tablicę węzłów z diagramami do liczby skrzyżowaniowej równej 10. Niezależnie od niego a później łącznie z nim miała miejsce współpraca pomiędzy wielbnym T.P. Kirkmanem (1806–1895) i C.N. Little (1858–1923), efektem której była lista wszystkich pierwszych i alternujących (naprzemiennych) węzłów do wartości 11 liczby skrzyżowaniowej (zajęło im to okres około 25 lat).

Profesor Little wyprodukował w 1899 roku katalog składający się z 43 niealternujących węzłów z wartością 10 liczby skrzyżowaniowej. Dopiero od 1974 r. dzięki obserwacji nowojorskiego prawnika K. Perko wiemy, że lista ta zawiera jeden duplikat (widoczny na Rysunku 1.1 zob. [65]). Wszystkie węzły do wartości 11 liczby skrzyżowaniowej zostały wyznaczone przez J.H. Conwaya przed 1969 r., wcześniej częściowe wyniki otrzymała w pracy doktorskiej M.G. Haseman z roku 1917. Węzły do liczby skrzyżowaniowej równej 13 zostały wyznaczone przez C.H. Dowkera i M.B. Thistlethwaite'a w 1983 r.



Rysunek 1.1: Para diagramów Perko. [65]

Conway znalazł jeden duplikat oraz 11 pominięć w tablicach Little'a, ale sam popełnił cztery pominięcia. Przeoczył między innymi słynny duplikat w nie-alternującej tablicy Little'a, parę Perko. Pominięcia w tablicy Conwaya znalazł Caudron w 1978 r. publikując pierwszą poprawną listę węzłów pierwszych do liczby skrzyżowaniowej równej 11.

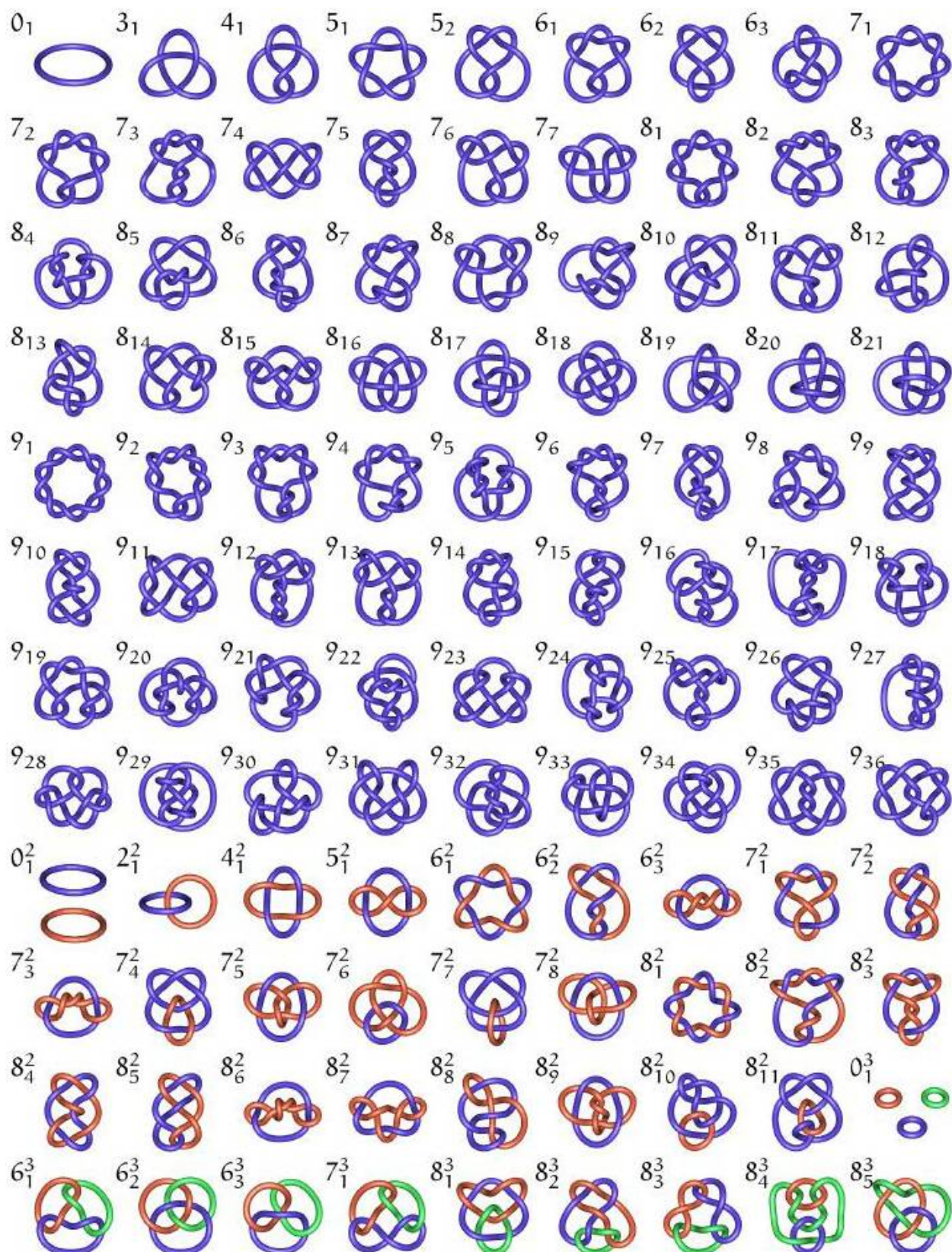
J. Hoste razem z grupą studentów (przy użyciu superkomputera Cray) znaleźli alternujące węzły do wartości 14 liczby skrzyżowaniowej, jednocześnie sprawdzając poprawność istniejących tabel Thistlethwaite'a. Hoste i H. Doll stabilizowali zorientowane sploty do liczby skrzyżowaniowej równej 10, natomiast C. Cerf w 1998 r. zidentyfikował wszystkie zorientowane alternujące sploty do wartości 10 liczby skrzyżowaniowej. Około roku 1998 Hoste z J. Weekssem (oraz niezależnie Thistlethwaite) znaleźli węzły pierwsze do wartości 16 liczby skrzyżowaniowej.

W roku 2003 S. Rankin, O. Flint oraz J. Schermann stabilizowali wszystkie węzły alternujące do wartości 23 liczby skrzyżowaniowej. B.A. Burton stabilizował wszystkie węzły do liczby skrzyżowaniowej 19 w roku 2020. (Po więcej o historii tablicowania węzłów odsyłamy czytelnika do [60, 61, 62].)

n	węzły alternujące	węzły niealternujące	sploty alternujące	sploty niealternujące
2	0	0	1	0
3	1	0	0	0
4	1	0	1	0
5	2	0	1	0
6	3	0	5	1
7	7	0	7	2
8	18	3	21	8
9	41	8	55	28
10	123	42	174	113
11	367	185	548	459
12	1.288	888	2.020	2.256
13	4.878	5.110	7.539	11.344
14	19.536	27.436	31.811	64.180
15	85.263	168.030	137.332	
16	379.799	1.008.906	637.176	
17	1.769.979	6.283.414	3.029.541	
18	8.400.285	39.866.181	14.901.494	
19	40.619.385	253.511.073	74.786.430	
20	199.631.939		381.439.722	
21	990.623.857		1.973.169.539	
22	4.976.016.485		10.307.310.665	
23	25.182.878.921		54.361.609.151	

Tabela 1.1: Liczebność węzłów i splotów (z co najmniej dwoma ogniwami) pierwszych, z podziałem na alternujące i niealternujące.





Rysunek 1.2: Tablica węzłów i splotów pierwszych z niską liczbą skrzyżowaniową (ze strony Knotplot R. Schareina).

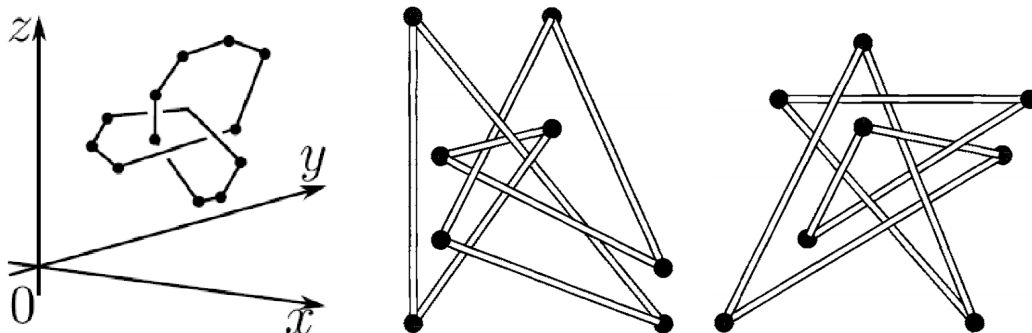


# Rozdział 2

## Węzły wielokątne

Węzłem wielokątnym nazywamy sumę skończonej liczby prostych odcinków w  $\mathbb{R}^3$  (lub  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$ ), takiej że nie ma brzegu oraz każdy punkt brzegowy odcinka łączy dokładnie jeden inny punkt brzegowy. Splotem wielokątnym zaś nazywamy skończoną rozłączną sumę węzłów wielokątnych. Splot wielokątny może mieć jedną składową.

Przykłady węzłów wielokątnych pokazane są na Rysunku 2.1.

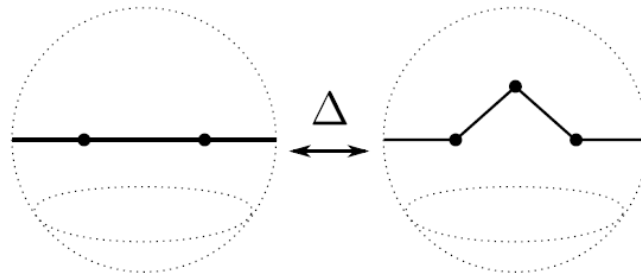


Rysunek 2.1: Węzły wielokątne. [35, 65]

Dwa sploty wielokątne są *delta równoważne* jeśli istnieje skończony ciąg deformacji typu  $\Delta$  pomiędzy tymi splotami wielokątnymi, gdzie  $\Delta$  oznacza zamianę jednej krawędzi (odcinka) na dwie połączone krawędzie w  $\mathbb{R}^3$  jak pokazano na Rysunku 2.2 lub ruchu odwrotnego takiego, że nie ma żadnego wierzchołka lub krawędzi w trójkącie odpowiadającym  $\Delta$ . Ruch delta na splotcie wielokątnym  $K$  może być również zapisany bardziej ściśle jako zastąpienie  $K$  przez

$$\overline{(K \setminus (K \cap \Delta)) \cup (\partial \Delta \setminus (K \cap \Delta))}.$$

Rzutowanie  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  wielokątnego splotu jest *rzutowaniem regularnym* jeśli każdy punkt z  $\pi(L)$  pochodzi z co najwyżej dwóch punktów z  $L$ , jest jedynie



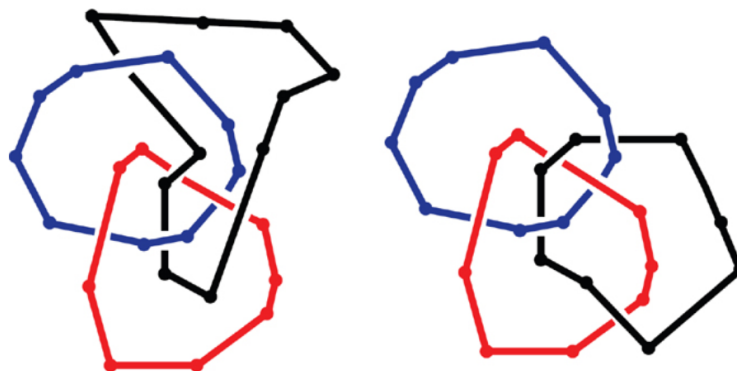
Rysunek 2.2: Lokalna deformacja w przestrzeni trójwymiarowej nazywana  $\Delta$ -ruchem. [65]

skończenie wiele punktów podwójnych, oraz żaden punkt podwójny nie jest obrazem wierzchołka z  $L$ .

**Twierdzenie 2.1** ([36]). *Każdy wielokątny splot jest delta równoważny, poprzez niewielki obrót w  $\mathbb{R}^3$  do splotu wielokątnego z rzutowaniem regularnym.*

**Konwencja 2.2** (cyt. [67]). *Prostokątny układ Kartezjański  $OXYZ$  jest tak dobrany, że wszystkie sploty leżą po tej samej (dodatniej) stronie płaszczyzny rzutowania, którą jest  $z = 0$ .*

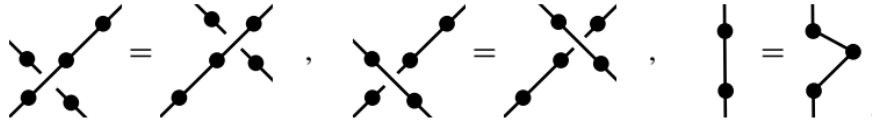
*Diagramem splotu nazywamy obraz rzutowania regularnego tego splotu z zaznaczeniem informacji w otoczeniu każdego punktu podwójnego, który odcinek leżał wyżej (tzn. miał większą współrzędną  $z$ ). Informację tę zwykle oznacza się poprzez usunięcie niewielkiego fragmentu z dolnego odcinka. Punkt podwójny (wraz z jego niewielkim planarnym otoczeniem) z taką informacją nazywamy skrzyżowaniem.*



Rysunek 2.3: Diagramy równoważnych splotów wielokątnych. [80]

Informacja na skrzyżowaniach pozwala nam z dowolnego diagramu odtworzyć jak leżał splot w przestrzeni przed dokonaniem rzutowania. Przykład dwóch diagramów równoważnych splotów wielokątnych pokazane są na Rysunku 2.3.

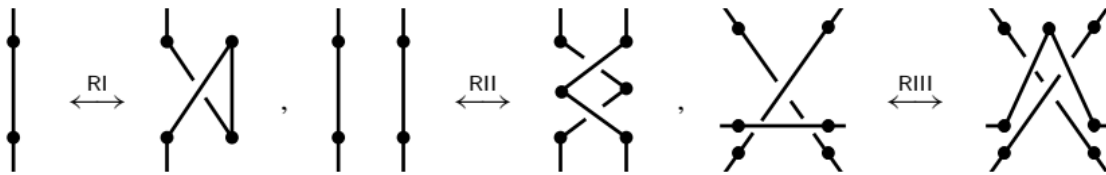
**Konwencja 2.3** (cyt. [67]). Jeśli fragment diagramu jest pokazany na płaskim rysunku, domyślnie pozostała część diagramu jest zakładana i nie podlega ona zmianie jeśli wykonujemy zmiany na tym pokazanym fragmencie diagramu.



Rysunek 2.4: Relacje planarnej izotopii. [67]

Dwa wielokątne sploty są powiązane *planarną izotopią* jeśli są powiązane skończoną liczbą ruchów na Rysunku 2.4, gdzie kąty pomiędzy odcinkami i długości odcinków mogą się zmieniać.

**Twierdzenie 2.4** ([9, 129]). Dwa diagramy reprezentują ten sam wielokątny splot (z dokładnością do delta równoważności) wtedy i tylko wtedy, gdy można z jednego do drugiego przejść ciągiem wielokątnych ruchów Reidemeistera typu RI, RII oraz RIII (pokazanych na Rysunku 2.5) oraz planarną izotopią.



Rysunek 2.5: Wielokątne ruchy Reidemeistera. [67]

Dowód tego twierdzenia można znaleźć również w podręcznikach, jak na przykład [67, 80, 116].

Splotowi możemy nadać *orientację* poprzez wybór kierunku poruszania się, gdy wędrujemy dookoła każdego jego ogniwa. Dany splot o  $c$  ogniwach może być zatem zorientowany na  $2^c$  sposobów. Zakładamy ponadto, że diagram danego splotu jest zorientowany zgodnie z jego orientacją.

Prowadząc podobne rozumowanie co w dowodzie Twierdzenia 2.4 lecz ze zorientowanymi wielokątnymi ruchami Reidemeistera, tzn. ruchami ze wszystkimi możliwymi kombinacjami orientacji łuków użytych w ruchach RI, RII oraz RIII, możemy wyprowadzić co następuje.

**Wniosek 2.5.** Dwa zorientowane diagramy reprezentują delta równoważne wielokątne zorientowane sploty, wtedy i tylko wtedy, gdy można z jednego diagramu do drugiego przejść ciągiem zorientowanych wielokątnych ruchów Reidemeistera.

# Rozdział 3

## Węzły i sploty w różnych wymiarach

Rozmaitości to geometryczne obiekty które w małym otoczeniu każdego swojego punktu wyglądają jak przestrzeń Euklidesowa ustalonego wymiaru. Rozmaitość spójną wymiaru 1 nazywamy krzywą, każda zwarta krzywa, tzn. okrąg  $S^1$ , zanurza się jednoznacznie w  $\mathbb{R}^2$  oraz w  $\mathbb{R}^4$ . Z drugiej zaś strony zanurzeń w torus  $T^2 = S^1 \times S^1$  jest nieskończenie wiele nierównoważnych.

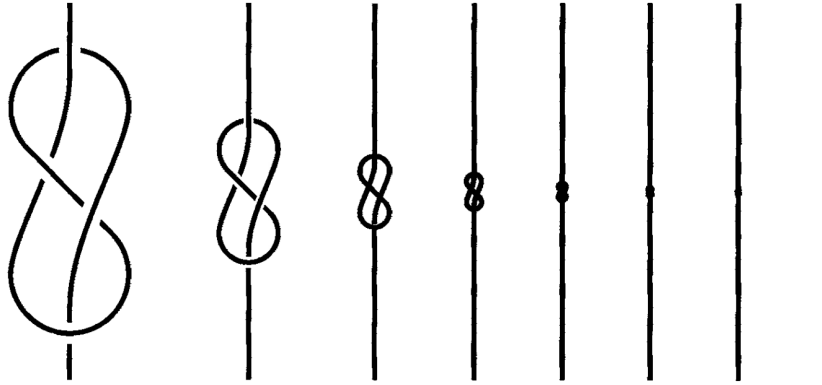
Rozmaitość wymiaru 2 nazywamy powierzchnią, każda powierzchnia zanurza się w  $\mathbb{R}^4$ , jeśli jest spójna to zanurza się jednoznacznie w  $\mathbb{R}^5$ . Homeomorfizm dwóch rozmaitości to przekształcenie, które przekształca jedną z nich w drugą, nic przy tym nie sklejjając i nie rozrywając.

Myśląc o jak najlepszym matematycznym opisie zjawiska, polegającego na fizycznym ruchu zanurzonych elastycznych obiektów w zadanej przestrzeni, rozważmy następujące pojęcie.

Niech  $X_0$  oraz  $X_1$  będą podprzestrzeniami przestrzeni topologicznej  $Y$ . Mówimy, że  $X_0$  jest *izotopijna* z  $X_1$  jeśli istnieje zbiór  $X$  oraz ciągła funkcja  $F : X \times I \rightarrow Y$  nazywana *izotopią* taka, że dla każdego  $t \in I$  funkcja  $F_t(x) := F(x, t)$  jest zanurzeniem  $X$  w  $Y$  oraz  $F_0(X) = X_0$  i  $F_1(X) = X_1$ .

Definicja ta okazuje się jednak dla nas tu zbyt ogólna, powodując np. możliwość deformacji części zawężenia z pętelką do punktu, co da nam sprzeczną z intuicją, możliwość rozplątania dowolnego węzła  $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  (zobacz Rysunek 3.1). Zawężmy zatem powyższe pojęcie, uwzględniając również właściwą transformację otoczenia poruszanego obiektu.

Niech  $X_0$  oraz  $X_1$  będą podprzestrzeniami przestrzeni topologicznej  $Y$ . Mówimy, że  $X_0$  jest *ambientalnie izotopijna* z  $X_1$  jeśli istnieje ciągła funkcja  $H : Y \times I \rightarrow Y$  nazywana *ambientalną izotopią* taka, że dla każdego  $t \in I$  funkcja  $H_t(y) := H(y, t)$  jest homeomorfizmem  $Y$  na  $Y$  oraz  $H_0 = id_Y$  i  $H_1(X_0) = X_1$ .



Rysunek 3.1: Izotopia rozwiązująca supełek. [35]

**Twierdzenie 3.1** (Brown, Zeeman 1960). *W przypadkach  $n - m = 1$  oraz  $n - m \geq 3$  zanurzenia sfery  $S^m$  w sferę  $S^n$  są jednoznaczne z topologicznego punktu widzenia.*

Węzłem nazywamy kowymiaru dwa zanurzenie zamkniętej rozmaitości, zwykle rozumie się przez to zanurzenie sfery w sferę (lub równoważnie, w przestrzeń Euklidesową tego samego wymiaru). Przez równoważność dwóch węzłów (lub) splotów będziemy rozumieć istnienie pomiędzy nimi wspomnianej ambientalnej izotopii (zakładając, że są podprzestrzeniami tej samej ambientalnej przestrzeni), która to jest relacją równoważności, oznaczaną czasami symbolem  $\cong$ .

**Twierdzenie 3.2** (cyt. [36]). *Każdy autohomeomorfizm  $\mathbb{R}^n$  rozszerza się jednoznacznie do autohomeomorfizmu  $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ . Każda izotopia przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  rozszerza się jednoznacznie do izotopii przestrzeni  $S^n$ .*

Jeśli przestrzeń ambientalna to  $\mathbb{R}^3$ , wtedy mówimy o *przestrzennej izotopii*. Jeśli przestrzeń ambientalna to  $\mathbb{R}^2$ , wtedy mówimy o *planarnej izotopii* lub o ruchu  $\Omega_0$ . Jeśli przestrzeń ambientalna to  $S^2$ , wtedy mówimy o *sferycznej izotopii* lub również o ruchu  $\Omega_0$  (lub o ruchu  $\Omega_\infty$  gdy przechodzimy przez punkt  $\infty$  nie zawartym w planarnym przedstawieniu).

### 3.1 Rozmaitości w kategorii TOP, PL oraz DIFF

Mamy trzy rodzaje rozmaitości (i przekształceń pomiędzy nimi): topologiczne (ozn. TOP, najogólniejsze), kawałkami liniowe (ozn. PL, inaczej: swojskie, wielościenne lub kombinatoryczne) oraz gładkie (ozn. DIFF, inaczej: nieskończenie różniczkowalne). W wymiarach 0, 1, 2, 3 różnica nie jest zbyt istotna. Więcej o

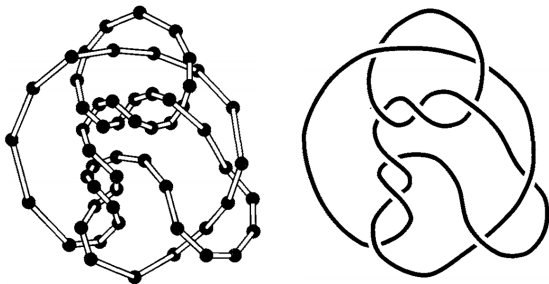
kategorii PL czytelnik znajdzie w książce [132], o kategorii DIFF w książce [56], natomiast o kategorii TOP więcej można przeczytać w książce [38].

**Uwaga 1.** W dalszych częściach tego opracowania, będziemy używać terminu *klasyczny*, myśląc o wspomnianej w tym podrozdziale teorii zanurzeń okręgów  $S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  z dokładnością do ambientalnej izotopii w  $\mathbb{R}^3$ .

**Twierdzenie 3.3** ([21]). Niech  $L$  oraz  $L'$  będą klasycznymi wielokątnymi splotami. Wówczas następujące zdania są równoważne:

- (i)  $L$  oraz  $L'$  są delta równoważne,
- (ii)  $L$  oraz  $L'$  są ambientalnie izotopijne,
- (iii) istnieje zachowujący orientację PL homeomorfizm  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  taki, że  $h(L) = L'$ .

**Twierdzenie 3.4** ([36]). Klasyczne sploty wielokątne są ambientalnie izotopijne gładkim splotom. Dwa sploty wielokątne w  $\mathbb{R}^3$  są równoważne, wtedy i tylko wtedy, gdy są równoważne w  $S^3$ .



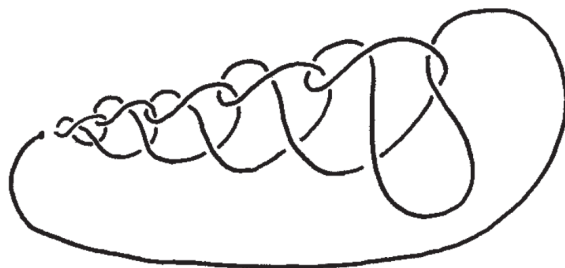
Rysunek 3.2: Wielokątny i gładki węzeł. [35]

Odtąd domyślnie będziemy się poruszać w kategorii gładkiej, tzn. wszystkie rozmaitości i przekształcenia będą gładkie (tzn. klasy  $C^\infty$ ). Przykład węzła gładkiego jest pokazany na Rysunku 3.2.

Ponadto dla  $\mathbb{R}^4$  (4-wymiarowej przestrzeni Euklidesowej) oraz  $S^4$  (4-wymiarowej sfery jednostkowej) wybieramy standardową (nieegzotyczną) strukturę gładką.

Będziemy zakładać gładkość zanurzeń głównie w celu pominięcia tzw. dzikich przypadków (które nie odpowiadają intuicji fizycznych węzłów). Przykład węzła dzikiego (wprowadzonego przez R.H. Foxa) jest pokazany na Rysunku 3.3, gdzie mamy nieskończenie wiele malejących fragmentów diagramu zbiegających do punktu na po lewej stronie. Więcej o dzikich węzłach znajdzie czytelnik w [134].

Twierdzenie o gładkim rozszerzeniu izotopii daje nam równoważność, pomiędzy gładką izotopią a izotopią ambientalną (cyt. [131]). Stąd możemy używać gładkiej izotopii w przekształceniach zanurzeń, pamiętając że kryje się za tym jednocześnie odpowiednia izotopia ambientalna.



Rysunek 3.3: Przykład dziko położonego węzła. [21]

# Rozdział 4

## Diagramy, cienie i ruchy

W tej części książki zajmujemy się węzłami i splotami klasycznymi, w celu zwięzłości zapisu będziemy o nich mówić po prostu węzły i sploty. Przypomnijmy zatem, że *węzłem* nazywamy obraz zanurzenia homeomorficznego okręgu  $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ . *Splotem* o  $n$  składowych (zwanym niekiedy jego *ogniwami*) nazywamy zaś obraz zanurzenia sumy rozłącznej  $n$  okręgów  $\underbrace{S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_n \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ . Splot o jednym ogniwie jest wówczas również węzłem.

Czasami, dla wygody, lepiej jest użyć innej trójwymiarowej przestrzeni, tzw. 3-sfery:  $S^3 = \{x = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_4^2 = 1\}$ , 3-sferę można uzyskać jako jednopunktowe uzwarcenie przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . Można to zobaczyć na przykładzie rzutu stereograficznego projekcji w analogicznym przypadku  $S^2$ : Poprzez tę mapę, usuwając jeden punkt  $\{\infty\}$  ze sfery, możemy uzyskać homeomorfizm od  $S^3 \setminus \{\infty\}$  do  $\mathbb{R}^3$ , odwzorowując. Oznacza, że praktycznie większość dyskusji, które możemy prowadzić na temat węzłów w  $S^3$ , można przeprowadzić w  $\mathbb{R}^3$ , ponieważ możemy po prostu przesunąć każdy węzeł lub splot, aby uniknąć punktu  $\infty$ , jeśli to konieczne. Ogólne właściwości topologiczne krzywych będą takie same, ponieważ uzwarcenie implikuje, w szczególności, że zarówno  $S^3$ , jak i  $\mathbb{R}^3$  mają trywialną grupę podstawową, ponieważ każda pętla w  $S^3$  jest homotopijna do tej, która nie zawiera jednego punktu w  $S^3$ . Przykładem kiedy użycie  $S^3$  jest wygodniejsze, jest sytuacja definiowania takiego niezmiennika, którego obliczenie wymaga aby przestrzeń będąca dopełnieniem węzła była zwarta.

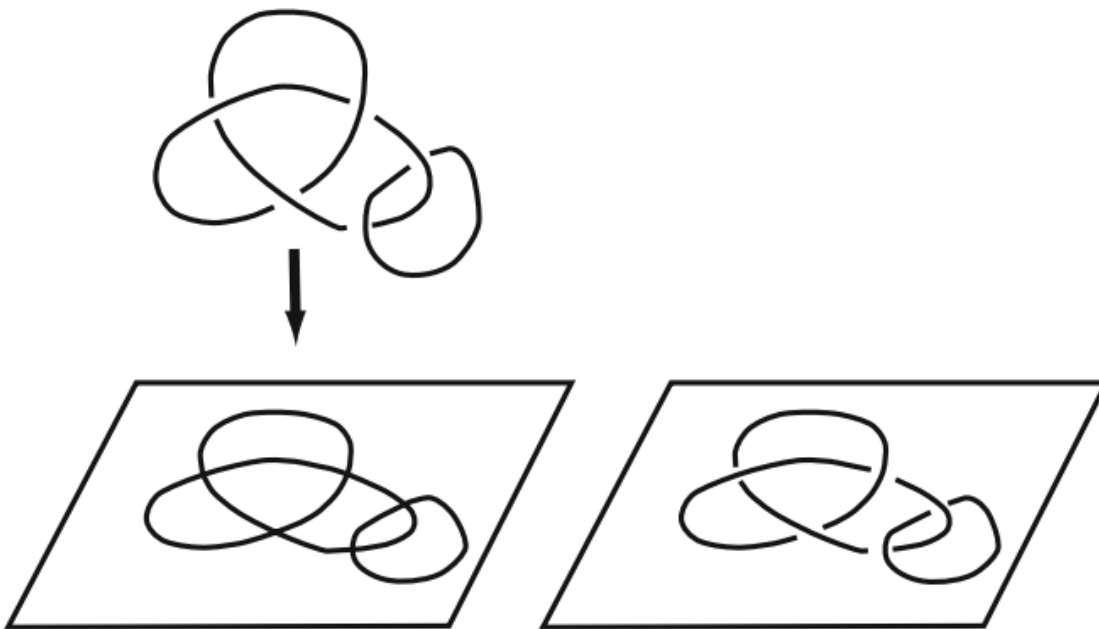
Mówimy, że rzutowanie prostopadłe  $\pi : \mathbb{R}^3 \supset L \rightarrow \mathbb{R}^2$  węzła lub splotu  $L$  jest *regularne*, jeśli spełnione są warunki:

- (1) jest tylko skończona liczba *punktów wielokrotnych*, tzn.  $|\{p \in \pi(L) : |\pi^{-1}(p) \cap L| > 1\}| < +\infty$  oraz punkty te są jedynie podwójne tzn. dla każdego  $p \in \pi(L)$  mamy  $|\pi^{-1}(p) \cap L| \leq 2$ ,

- (2) obraz splotu w otoczeniu punktu wielokrotnego przecina się w nim poprzecznie (tzn. transwersalnie).

Zbiór rzutów regularnych danego splotu jest otwarty i gęsty w zbiorze wszystkich rzutów. Dla danego splotu istnieje równoważny splot dowolnie blisko dla którego rzutowanie jest regularne. Odtąd domyślnie zakładamy regularność tego typu rzutowania.

*Diagramem* węzła lub splotu  $L$  nazywamy jego obraz przy rzutowaniu, czyli  $\pi(L)$  z dodatkową informacją o samoprzecięciu, oznaczaną za pomocą usunięcia niewielkiego otoczenia skrzyżowania, z dolnego (względem kierunku rzutowania) łuku (przykład dwóch diagramów tego samego węzła podany jest na Rysunku 1.1, przykład rzutowania regularnego i utworzonego z niego diagramu podany jest na Rysunku 4.1).



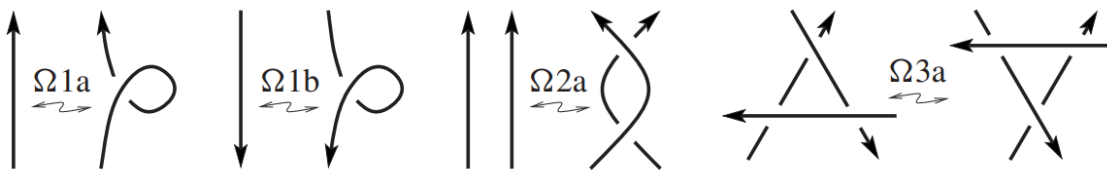
Rysunek 4.1: Rzutowanie regularne oraz diagram. [88]

Nieformalnie. Dwa sploty są równoważne jeśli mają tę samą liczbę ogniw oraz mogą zostać fizycznie przekształcone jeden w drugi w przestrzeni (poprzez obrót, zginięcie, skręcanie, rozciąganie, itp.), bez rozcinania ani sklejanego oddzielonych fragmentów. Możemy sobie wyobrazić, że te sploty są wykonane z wysoce elastycznych strun których rozmiary możemy skalować do woli.

Formalnie. Przypomnijmy, że pracujemy domyślnie w kategorii gładkiej, zatem (formułując definicję w tej kategorii) dwa sploty  $L_1$  oraz  $L_2$  są *równoważne* jeśli spełniają jedną z poniższych trzech równoważnych definicji:



- (1) są ambientalnie izotopijne, czyli istnieje homotopia  $F_t : S^3 \rightarrow S^3$  taka, że każdy  $F_t$  jest dyfeomorfizmem ( $t \in [0, 1]$ ),  $F_0$  jest przekształceniem tożsamościowym oraz  $F_1$  przekształca  $L_1$  na  $L_2$ ,
- (2) istnieje zachowujący orientację dyfeomorfizm  $F : S^3 \rightarrow S^3$  przekształcający  $L_1$  na  $L_2$ ,
- (3) ich diagramy są powiązane skończoną sekwencją ruchów Reidemeistera, pokazanych na Rysunku 4.2 oraz planarną izotopią diagramu.



Rysunek 4.2: Zorientowane gładkie ruchy Reidemeistera. [121]

W przypadku gdy zajmujemy się nieorientowanymi splotami, powyższy wspomniany zestaw ruchów (lecz bez strzałek na rysunku) jest również wystarczający. Nie jest znany algorytm podający kolejność i miejsce wykonywania ruchów Reidemeistera, tak aby przejść z danego diagramu węzła do innego danego diagramu tego węzła.

B. Trace [152] zauważył, że dwa diagramy jednego węzła są związane tylko II i III ruchem (ale nie I) wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam spin oraz indeks punktu względem krzywej. Z prac O. Oestlunda [120] oraz T. Hagge'go [51] wynika, że dla każdego węzła istnieje para diagramów, takich, że aby przejść pomiędzy nimi trzeba wykorzystać wszystkie trzy typy ruchów. A. Coward [33] udowodnił, że nawet jeśli wszystkie trzy ruchy są potrzebne, można je wykonywać w specjalnej kolejności: najpierw tylko I ruchy zwiększające liczbę skrzyżowań, potem tylko II ruchy zwiększające liczbę skrzyżowań, następnie tylko III ruchy i na końcu ponownie II ruchy ale te zmniejszające liczbę skrzyżowań. M. Lackenby w [105] dowodzi, że każdy diagram węzła trywialnego z  $c$  skrzyżowaniami może być rozplątany do trywialnego diagramu z użyciem co najwyżej  $(236c)^{11}$  ruchów Reidemeistera.

**Konwencja 4.1.** Czasami, w różnych opracowaniach i kontekstach, pod pojęciem węzła (lub splotu)  $L$  rozumie się całą klasę  $[L]$  węzłów (lub splotów) równoważnych z  $L$  a nie konkretną jego geometryczną realizację. Przeważnie ta konwencja nie prowadzi do nieporozumień.

Węzeł (odp. splot) nazywamy *węzłem trywialnym* (odp. *splotem trywialnym*) jeśli posiada diagram bez skrzyżowań. O węźle trywialnym mówi się czasem *niewęzeł*.

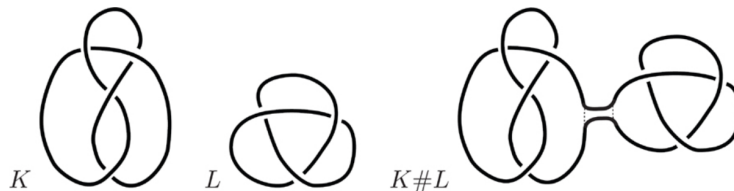
**Twierdzenie 4.2** (cyt. [88]). *Dla dowolnego splotu  $L$  następujące zdania są równoważne:*

- (i)  $L$  jest trywialnym splotem,
- (ii)  $L$  jest brzegiem pewnych parami rozłącznych dysków zanurzonych w  $\mathbb{R}^3$ ,
- (iii) istnieje ambientalna izotopia w  $\mathbb{R}^3$  przeprowadzająca  $L$  w splot leżący w płaszczyźnie w  $\mathbb{R}^3$ .

**Stwierdzenie 4.3** (cyt. [67]). *W każdym diagramie splotu da się zamienić informację o skrzyżowaniach (na przeciwną) tak, aby był to diagram splotu trywialnego.*

Podstawową operacją łączenia dwóch węzłów jest *suma (spójna)*, którą oznaczamy jako  $K_1 \# K_2$  i definiujemy następująco. Wybierz lokalnie płaskie przedziały na obu węzłach. Wytnijmy te przedziały. Połączmy końce (w przypadku kategorii gładkiej, spłaszczając je w razie potrzeby) z brzegiem prostokątnej taśmy. Taśma musi przecinać separującą sferę  $S^2$  w pojedynczym przedziale (wymaganie to ma zapobiec splątaniu lub zaplątaniu samej taśmy), jak na Rysunku 4.3. Gdy węzły są zorientowane to wymagamy dodatkowo aby łączenie przedziałów odbywało się z sposób zgodny z orientacją.

Podobnie możemy, w sposób naturalny, zdefiniować *sumę spójną diagramów*.



Rysunek 4.3: Suma spójna dwóch węzłów. [80]

Suma spójna zorientowanych węzłów jest dobrze określonym działaniem, natomiast suma spójna nie jest dobrze określona dla niezorientowanych węzłów (połączenie na dwa różne sposoby może powodować nierównoważne węzły) oraz splotów z co najmniej dwoma ogniwami, gdyż nie istnieje kanoniczny wybór, które ogniwa wybrać do sumowania. Suma spójna jest działaniem łącznym oraz przemienne. Węzeł trywialny stanowi jej element neutralny.

**Twierdzenie 4.4** (B. Mazur). *Jeśli  $K_1$  jest nietrywialnym węzłem to również nietrywialnym węzłem jest  $K_1 \# K_2$  dla każdego węzła  $K_2$ .*

Węzeł  $K$  nazywamy *pierwszym* jeśli jest nietrywialny oraz jeśli każde przedstawienie  $K = K_1 \# K_2$  implikuje, że  $K_1$  lub  $K_2$  jest węzłem trywialnym. Węzeł nietrywialny który nie jest pierwszy nazywamy *złożonym*.

**Twierdzenie 4.5** (Schubert). *Każdy węzeł ma jednoznaczny (z dokładnością do porządku składników) rozkład na czynniki pierwsze.*

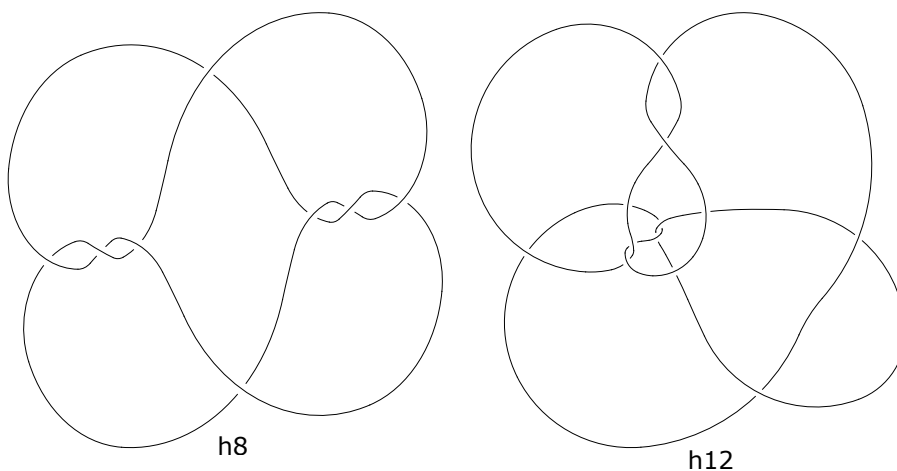
Podobnie możemy, w sposób naturalny, zdefiniować *diagram/cień pierwszy* oraz *diagram/cień złożony*.

Jeżeli splot  $L$  można zanurzyć w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  tak, że niektóre jego ogniwa będą leżeć po jednej stronie pewnej rozłącznej ze splotem płaszczyzny, zaś pozostałe po drugiej stronie, to powiemy, że splot  $L$  jest *rozszczepialny*. Gdy splot nie jest rozszczepialny to mówimy, że jest *nierozszczepialny*.

Podobnie możemy, w sposób naturalny, zdefiniować *diagram rozszczepialny* oraz *diagram nierozszczepialny*.

### 4.0.1 Trudne sploty trywialne

*Trudne węzły i sploty trywialne* to diagramy trywialnych węzłów i splotów, które trzeba bardziej skomplikować, zanim będzie można je uprościć do diagramu bez skrzyżowań, tzn. trzeba użyć ruchu Reidemeistera I lub II zwiększającego liczbę skrzyżowań, lub ruchu III. W klasycznej teorii węzłów mają one dość długą historię, sięgającą przykładu Goeritza (z 11 skrzyżowaniami). Ostatnie badania trudnych węzłów są związane z badaniem rekombinacji DNA (patrz np. [94], [95]), są też przedmiotem testowania ostrości nowych górnych granic liczby ruchów Reidemeistera potrzebne do rozwiązania węzła (patrz np. [97]).

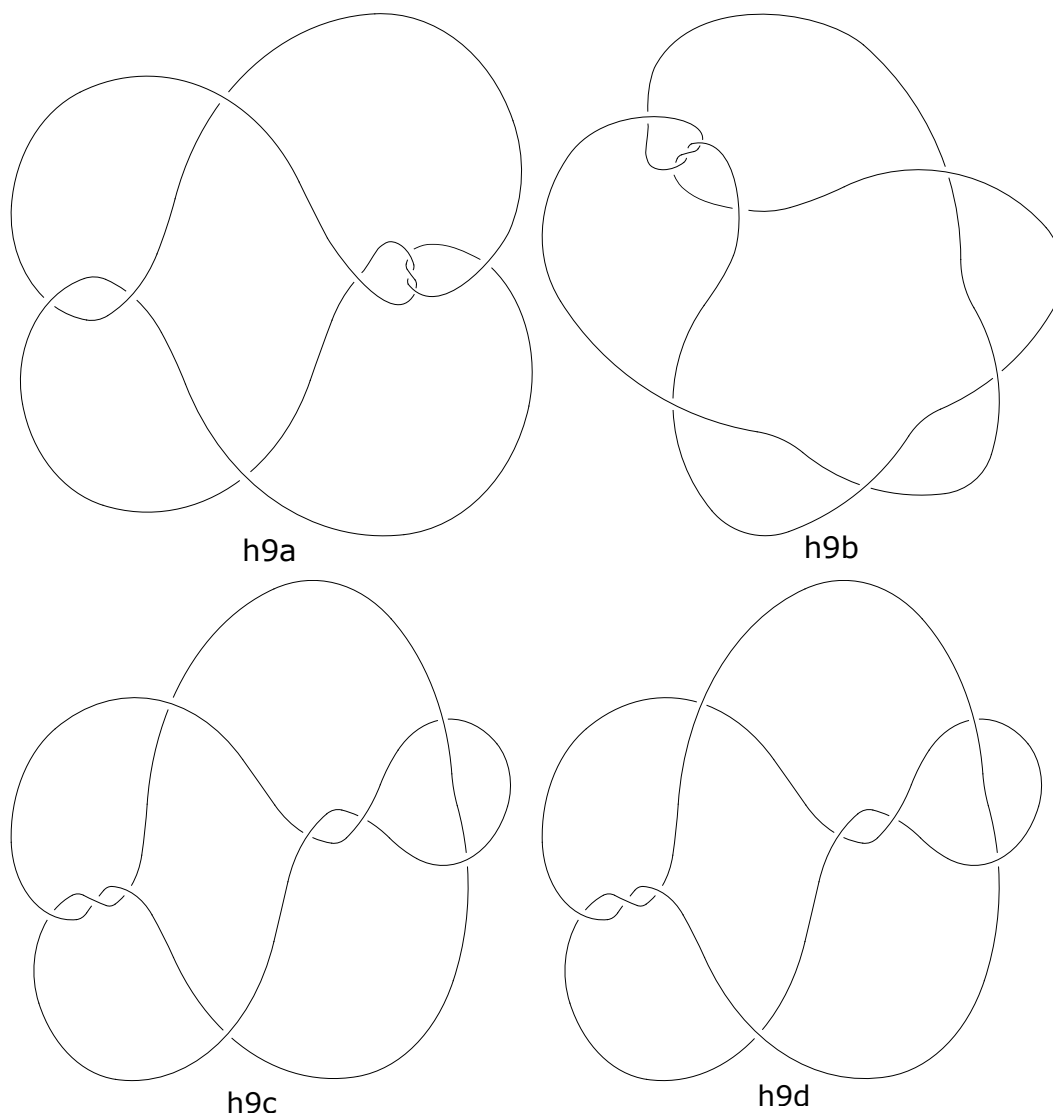


Rysunek 4.4: Minimalny trudny diagram pierwszy splotu trywialnego o dwóch i o trzech składowych.

Autor rozszerza tabele minimalnych trudnych pierwszych klasycznych węzłów i splotów wspomnianych powyżej i generuje wszystkie trudne pierwsze

klasyczne węzły i sploty do 12 skrzyżowań.

**Twierdzenie 4.6** (J. [71]). *Z dokładnością do odbicia lustrzanego, jedyny minimalny trudny diagram pierwszy splotu trywialnego o dwóch składowych jest to  $h_8$ , oraz jedyny minimalny trudny diagram pierwszy splotu trywialnego o trzech składowych jest to  $h_{12}$  pokazane są one na Rysunku 4.4. Jedyne minimalne trudne diagramy pierwsze węzła trywialnego są to  $h_{9a}, \dots, h_{9d}$  pokazane na Rysunku 4.5.*



Rysunek 4.5: Minimalne trudne diagramy pierwsze węzła trywialnego.

## 4.1 Metody kodowania

### Notacja Alexandra-Briggsa

Najbardziej tradycyjny, wprowadzony w 1927 roku sposób opisu węzłów do 9 skrzyżowań. Węzły kodowane są przez indeks skrzyżowaniowy z dolnym indeksem informującym o miejscu w tablicy węzłów. Porządek jest umowny i nie ma żadnego głębszego znaczenia, jego wybór należy do osoby, która jako pierwsza znajdzie wszystkie węzły o danej liczbie skrzyżowań. Jediną regularnością jest to, że węzeł skręcony występuje zawsze po węźle torusowym.

Rolfsen w 1976 stworzył z kilkoma błędami tablicę diagramów pierwszych węzłów do 10 skrzyżowań. Para Perko  $10_{161}, 10_{162}$  przedstawia ten sam węzeł, zaś górne skrzyżowanie w  $10_{144}$  powinno być zmienione. Ostatnie cztery węzły dostały nowe numery, by uniknąć duplikatu. Kolejną usterką tablicy jest to, że notacja Conwaya oraz wielomian Alexandra dla węzłów  $10_{83}$  oraz  $10_{86}$  są zamienione miejscami. Stojmenow, nowe wydanie książki Rolfsena, atlas węzłów Bar-Natana oraz tablica niezmienników węzłowych Livingstona naprawiają to przez wymianę podpisów. Podręcznik Kawauchiego wymienia diagramy.

Dla splotów jest podobnie, mają jedynie w tej notacji dodatkowy górny indeks, który wskazuje na to z ilu składowych (ogniw) powstał splot.

Dla węzłów i splotów które nie mają diagramów o mniej niż 11 skrzyżowaniach stosuje się nieco inny zapis informując jednocześnie czy jest to węzeł (lub splot) alternujący czy niealternujący. W pakietach i bazach komputerowych stosuje się zapis splotu jako np.  $L14n63195$ , orz gdy mamy na myśli konkretne orientacje jego ogniw dodaje się na końcu zapisu kodując je jako 0 lub 1 każdą.

### Nazwy zwyczajowe

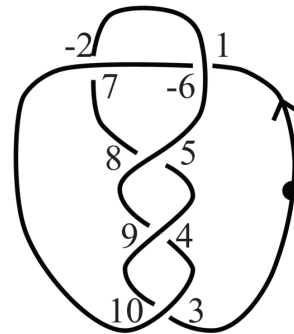
Niektóre węzły czy sploty mają swoją ogólnie znaną nazwę zwyczajową są to między innymi: węzeł trywialny  $0_1$ , splot trywialny o  $n$ -ogniwach  $T_n$ , trójlistnik  $3_1$ , ósemka/węzeł Listinga  $4_1$ , pięciolistnik  $5_1$ , węzeł dokerski  $6_1$ , węzeł Conwaya  $11n34$ , węzeł Kinoshita-Terasaki  $11n42$ , suma spójna takich samych trójlistników to inaczej węzeł babski, suma spójna lustrzanych trójlistników to węzeł płaski lub węzeł kwadratowy, splot Hopfa  $2_1^2$ , pieczęć Solomona  $4_1^2$ , splot Whiteheada  $5_1^2$ , gwiazda Dawida  $6_1^2$ , pierścienie Boromeuszy  $6_2^3$ .

## Notacja Dowkera-Thistlethwaite'a

W 1983 roku, Dowker i Thistlethwaite zmodyfikowali notację Taita w celu używania kodów węzłów przy pomocy komputera. Tak otrzymane DT kody były później rozszerzone na sploty przez Dolla i Hostego.

Konstrukcja DT kodu jest następująca, najpierw należy ustalić diagram węzła, dowolny punkt początkowy oraz kierunek i zacząć przemierzać węzeł od punktu początkowego. Za każdym razem, kiedy mijamy skrzyżowanie, przypisujemy mu kolejną liczbę naturalną, zaczynając od 1. Jeżeli znajdujemy się nad skrzyżowaniem, parzyste etykiety zapisujemy z przeciwnym znakiem. Po zakończeniu podróży każde skrzyżowanie będzie miało dwie etykiety: jedną parzystą i drugą nieparzystą. Ciąg parzystych liczb występujących na diagramie kolejno przy 1, 3, ... nazywamy kodem Dowkera-Thistlethwaite'a (inaczej: *DT kodem*). Przykład pokazany jest na Rysunku 4.6.

Opisany powyżej kod nie jest idealny, ponieważ odtworzony z niego węzeł może być lustrzanym odbiciem wyjściowego. Ogólniej, odbicie dowolnego składnika sumy spójnej nie zmienia kodu całego węzła. Zauważmy ponadto, że kod z samymi dodatnimi lub samymi ujemnymi etykietami oznacza diagram alternujący.



Rysunek 4.6: Diagram z DT kodem:  $(-6, 10, 8, -2, 4)$ . [80]

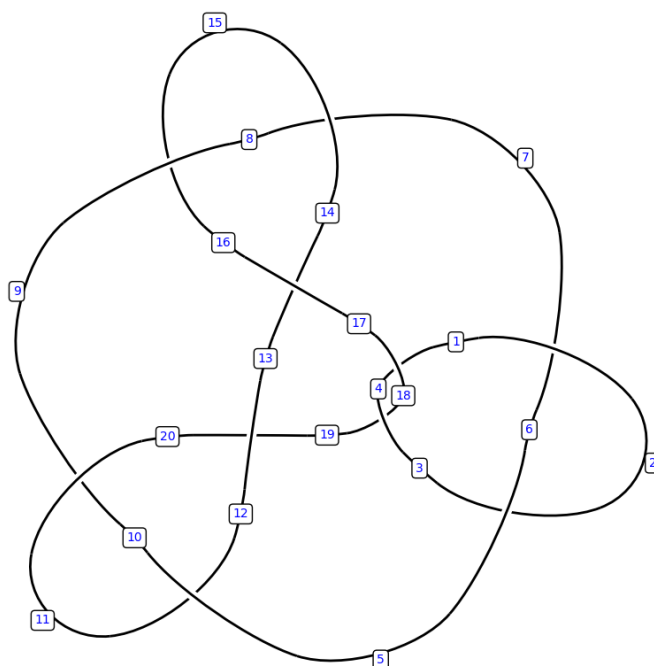
**Uwaga 2.** Zaczynając od zredukowanego diagramu o  $n$  skrzyżowaniach nie można doprowadzić do sytuacji, gdzie do pewnego skrzyżowania przypisane są dwie kolejne liczby całkowite. Dzięki temu problem można przetłumaczyć na język teorii grafów. Rozpatrzmy graf  $G$ , którego wierzchołkami są liczby  $1, 2, \dots, 2n$ . Połączmy niesąsiadujące modulo  $2n$  wierzchołki o różnej parzystości krawędziami. Graf ten powstaje przez usunięcie cyklu Hamiltona (łączącego kolejne liczby) z pełnego grafu dwudzielnego. Zbiór par etykiet przy skrzyżowaniach węzła to skojarzenie doskonałe w grafie  $G$ .

Dla splotów wybieramy dla każdej składowej punkty początkowe, oraz przemierzamy je w kolejności od najmniejszej liczby składowych. Dalej postępujemy z każdą składową jak przy węźle. Dodatkowo w wynikowym DT kodzie oddzielamy kreską pionową do oddzielenia etykiet dla których nieparzyste etykiety odpowiadają tej samej składowej.

## Notacja Gaussa

Gauss wprowadził następującą notację dla węzłów. Wybierzmy punkt na diagramie, który nie jest skrzyżowaniem i przemierzajmy go zgodnie z orientacją. Gdy mijamy nowe skrzyżowania, przypisujemy im kolejne liczby  $1, 2, \dots$ , zaś dla starych skrzyżowań przepisujemy numer. Jeżeli mijamy skrzyżowanie dołem, kodujemy je liczbą z minusem. W ogólnym przypadku nie można odtworzyć węzła z jego kodu, ale można delikatnie zmienić notację, by było to możliwe. Kiedy mijamy skrzyżowanie drugi raz, stawiamy minus przed liczbą, jeżeli skrzyżowanie jest lewoskrętne i plus w przeciwnym wypadku. Nazywa się to rozszerzonym *kodem Gaussa*.

## Notacja PD



Rysunek 4.7: Przykład diagramu splotu z etykietami ramion.

Użyta przez Bar-Natana w pakiecie komputerowym, *notację PD* dla zorientowanego diagramu polega na sporządzeniu czteroelementowych list odpowiadających każdemu ze skrzyżowań na danych diagramie. Wszystkie ramiona węzła (lub splotu), czyli części znajdujące się pomiędzy skrzyżowaniami, będą numerowane względem kierunku węzła (lub ogniów składowych splotu). Najpierw czytamy numer ramienia, które przechodzi pod skrzyżowaniem, następnie zapisujemy numery ramion względem ruchu wskazówek zegara (czasami w różnych pakietach komputerowych ta konwencja jest na odwrót). Przykład na Rysunku 4.7 dotyczy splotu  $L10n72\{0;1\}$  o PD kodzie:  $[[6, 1, 7, 2], [18, 3, 19, 4], [7, 14, 8, 15], [9, 20, 10, 11], [19, 12, 20, 13], [15, 8, 16, 9], [11, 10, 12, 5], [13, 16, 14, 17], [2, 5, 3, 6], [4, 17, 1, 18]]$ .

# Rozdział 5

## Typy symetrii

Niech  $K$  będzie zorientowanym węzłem, oznaczmy przez  $rK$  ten sam obraz zanurzonego okręgu co  $K$  lecz z przeciwną orientacją. Węzeł  $rK$  to węzeł *odwrotny* do  $K$ , oznaczany również jako  $-K$ .

Niech  $K$  będzie węzłem, oznaczmy przez  $mK$  obraz  $K$  poprzez odwracającą orientację dyfeomorfizm  $S^3$ . Węzeł  $mK$  to węzeł *lustrzany* względem  $K$ , oznaczany również jako  $\bar{K}$  lub  $K^*$ .

Wyróżniamy pięć typów symetrii węzłów:

- całkowicie chiralny albo skrętny (węzły  $K$ ,  $rK$ ,  $mK$  są parami nierównoważne),
- odwracalny ( $K \cong rK$ ),
- zwierciadlany ujemnie ( $K \cong mrK$ ),
- zwierciadlany dodatnio ( $K \cong mK$ ) oraz
- całkowicie zwierciadlany ( $rK \cong K \cong mK$ ).

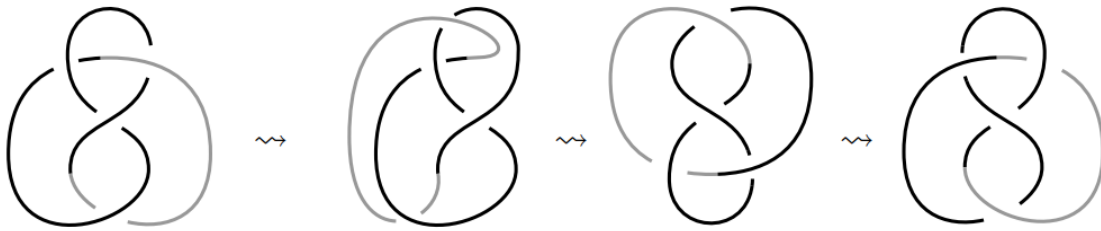
Mamy również przemienność operacji brania odwrotności i brania lustrzanego odbicia (Rysunek 5.4). Węzeł  $9_{32}$  jest całkowicie skrętny, tzn. wszystkie  $K$ ,  $rK$ ,  $mK$ ,  $mrK$  są parami różne.

Ósemka (węzeł  $4_1$ ) jest zwierciadlana (Rysunek 5.1), trójlistnik (węzeł  $3_1$ ) jest odwracalny (Rysunek 5.2), zaś  $8_{17}$  to najprostszy przykład węzła nieodwracalnego (jest to natomiast nieoczywiste). Węzeł  $8_{17}$  jest zwierciadlany ujemnie, ale nie odwracalny (Rysunek 5.3). Węzeł  $12a_{427}$  jest zwierciadlany dodatnio, ale nieodwracalny.

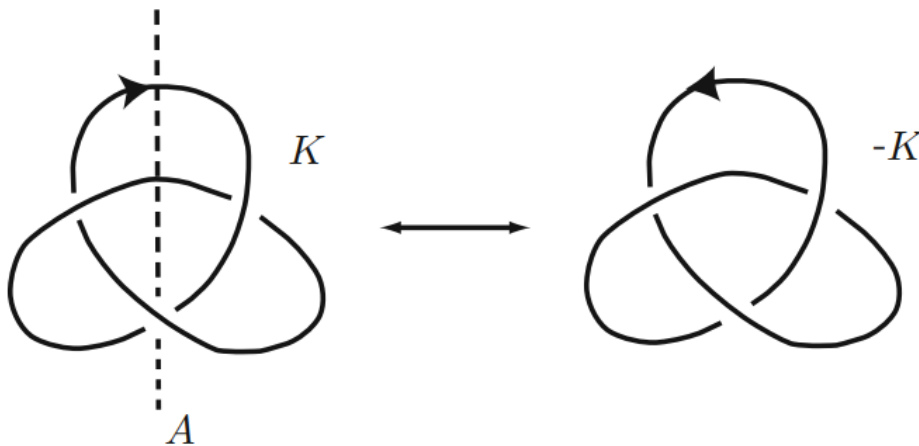


H. Trotter odkrył rok nieskończoną rodzinę nieodwracalnych precli. Obecnie wiadomo, że prawie wszystkie węzły są nieodwracalne. Wszystkie węzły torusowe są skrętne.

Tait odnosił wrażenie, że zwierciadlane węzły mają parzystą liczbę skrzyżowań, ale J. Hoste, M. Thistlethwaite oraz J. Weeks znaleźli w 1998 r. kontrprzykład o piętnastu skrzyżowaniach, węzeł  $15_n139717$ . Jest on jedynym znanym nam dzisiaj. Hipoteza Taita jest prawdziwa dla węzłów pierwszych, alternujących.



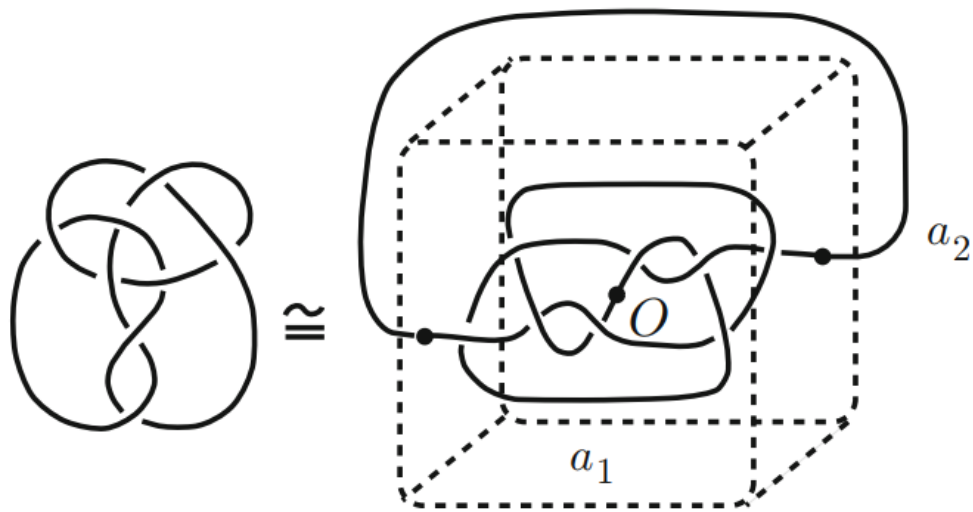
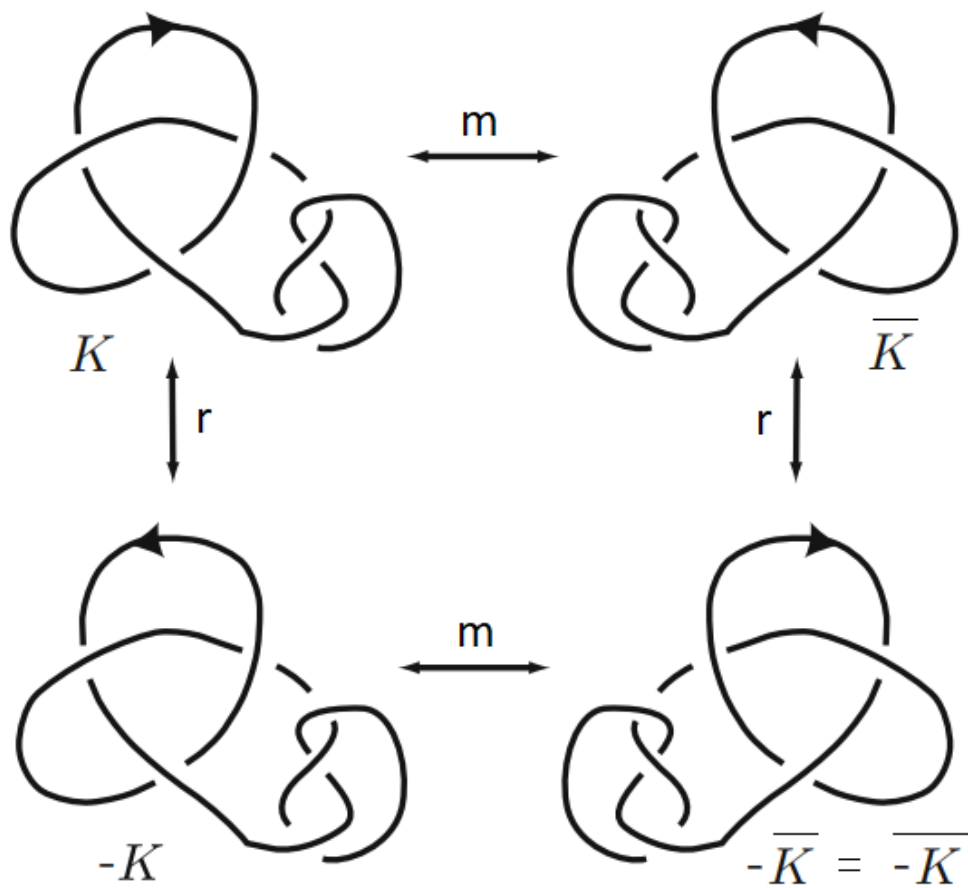
Rysunek 5.1: Węzeł  $4_1$ . [67]



Rysunek 5.2: Węzeł  $3_1$ . [88]

Spośród wszystkich 2977 typów węzłów pierwszych do 12 skrzyżowań jest: 1580 odwracalnych, 47 zwierciadlanych ujemnie, 1 zwierciadlany dodatnio, 1319 całkowicie chiralnych oraz 30 całkowicie zwierciadlanych.

**Uwaga 3.** Definicje odwracalności i lustrzanego odbicie naturalnie rozszerzają się na wszystkie sploty, w przypadku odwracalności zamieniamy orientację na każdym ogniwie danego splotu.

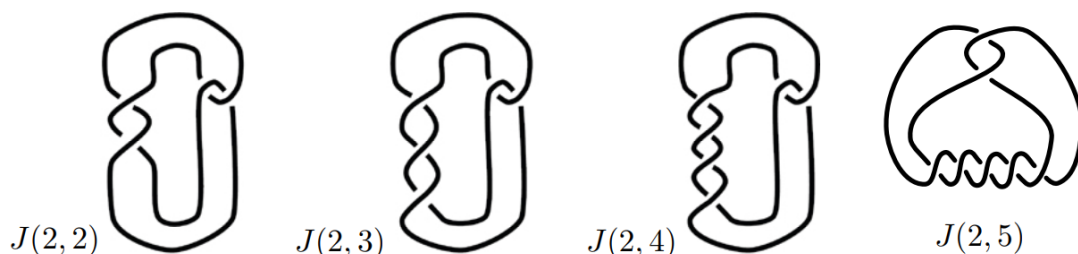
Rysunek 5.3: Węzeł  $8_{17}$ . [88]Rysunek 5.4: Relacja  $rm = mr$ . [88]

## Rozdział 6

# Popularne rodziny i sposoby przedstawienia węzłów i splotów

### 6.1 Węzły skręcone

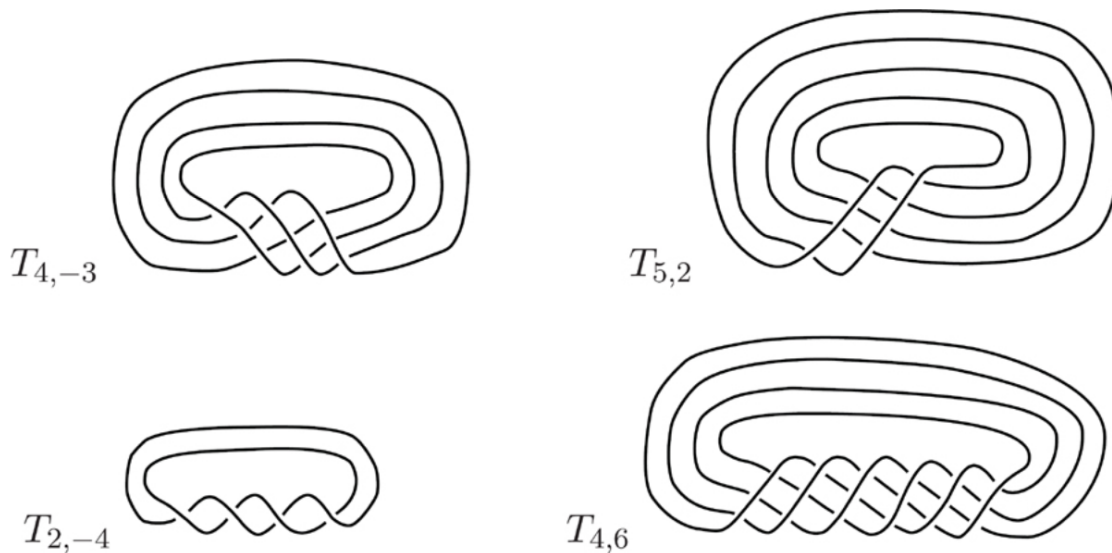
Węzeł skręcony złożony z  $n$  pół-skrętów, oznaczany  $J(2, n)$ , uzyskuje się przez skręcenie dwóch równoległych pasm  $n$  liczbę razy a następnie zahacza się końce razem tak, że otrzymany węzeł jest alternujący, jak pokazano na Rysunku 6.1 (zob. [80]).



Rysunek 6.1: Przykłady węzłów skręconych. [80, 127]

### 6.2 Sploty torusowe

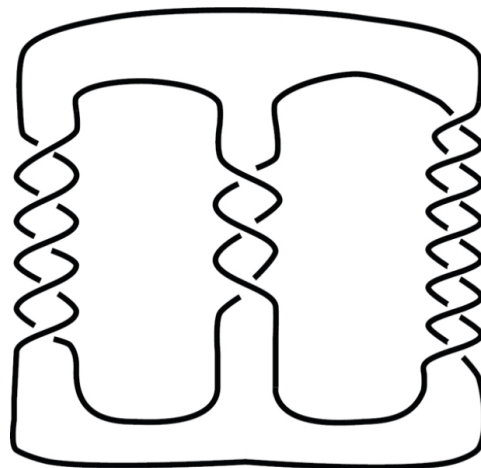
Rozpatrzmy zanurzenia  $S^1 \hookrightarrow T^2$  w standardowy torus z dokładnością do ambientalnej izotopii w  $\mathbb{R}^3 \supset T^2$ . Dla względnie pierwszych liczb  $r, s \geq 2$ , węzłem torusowym nazywamy  $T(r, s) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x|^2 + |y|^2 = \varepsilon, x^r = y^s\}$  dla dostatecznie małego  $\varepsilon > 0$ . Przykłady węzłów i splotów torusowych są na Rysunku 6.2.



Rysunek 6.2: Przykłady splotów torusowych. [80]

### 6.3 Węzły i sploty preclowe

Splot preclowy  $P_{a_1, \dots, a_n}$  jest zdefiniowany poprzez połączenie  $n$  zbiorów skrzyżowań  $a_i$  w spirale. Gdy znak  $a_i$  jest dodatni, przecięcia odbywają się „przeciwnie do ruchu wskazówek zegara”, a gdy  $a_i$  jest ujemne, informacje o przecięciach są odwrócone. Na Rysunku 6.3 pokazany jest splot preclowy  $P_{5,-3,7}$ . Wybierając różne wartości dla  $a_i$ , powstaje z tego nieskończona liczba splotów.



Rysunek 6.3: Splot preclowy  $P_{5,-3,7}$ . [80]

## 6.4 Węzły i sploty wymierne

Inna ważna rodzina splotów i węzłów to tzw. *sploty (i węzły) wymierne*, inaczej  $(p/q)$ -wymierne. Ogniwo składa się z  $C(a_1; \dots; a_n)$ , gdzie  $p/q$  ma rozwinięcie w postaci ułamka łańcuchowego:

$$p/q = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

Na Rysunku 6.4 pokazany jest przykład węzła wymiernego.



Rysunek 6.4: Węzeł wymierny  $C(3;4;-2;3;3)$ . [88]

**Twierdzenie 6.1** (Conway [32]). *Dwa węzły lub sploty wymierne są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ułamki łańcuchowe są równe.*

## 6.5 Sploty alternujące

Diagram splotu  $D$  jest *alternujący* lub *naprzemienny*, jeśli podczas podróży wzdłuż każdego jego ogniwa przechodzi się przez skrzyżowania naprzemiennie „nad” i „pod” (tzn. raz mostem a raz tunelem). *Alternujący* lub *naprzemienny* splot to taki, który posiada alternujący diagram.

**Twierdzenie 6.2.** *Niech  $L$  będzie splotem z alternującym diagramem  $D$ , wówczas splot  $L$  jest rozszczepialny wtedy i tylko wtedy, gdy diagram  $D$  jest rozszczepialny.*

**Twierdzenie 6.3.** *Niech  $L$  będzie splotem z alternującym diagramem  $D$ , wówczas splot  $L$  jest splotem pierwszym wtedy i tylko wtedy, gdy diagram  $D$  jest diagramem pierwszym.*

**Twierdzenie 6.4** (Tait). *Regularny cień dowolnego węzła można zamienić na diagram alternujący przypisując każdemu skrzyżowaniu jeden z typów.*

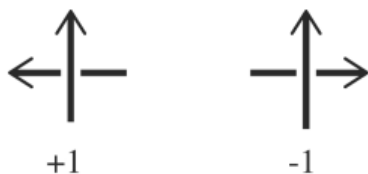
### 6.5.1 Hipotezy Taita

Hipotezy które teraz umówimy zostały sformułowane pod koniec XIX wieku przez P. G. Taita, kiedy tworzył tabele węzłów. Udowodnienie ich zajęło około 100 lat.

**Hipoteza 6.5** (I hipoteza Taita). *Zredukowany alternujący diagram splotu ma minimalny indeks skrzyżowaniowy.*

Najpierw znaleziono dowód korzystający z wielomianu Jonesa (Kauffman [91], Murasugi [114], Thistlethwaite [151], wszystkie prace z 1987 roku).

*Znakiem skrzyżowania* zorientowanego diagramu  $D$  nazywamy liczbę 1 lub  $-1$  w zależności od przypadku pokazanego na Rysunku 6.5.



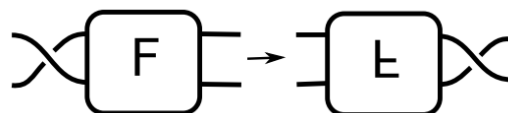
Rysunek 6.5: Znak skrzyżowania.

*Spinem* (zwanym też *skręceniem*) zorientowanego diagramu  $D$  nazywamy sumę znaków wszystkich jego skrzyżowań.

**Hipoteza 6.6** (II hipoteza Taita). *Alternujący diagram splotu achiralnego ma zerowy spin.*

Hipoteza ta wynika łącznie z hipotez pierwszej i trzeciej.

Niech  $\gamma$  będzie zamkniętą krzywą przecinającą diagram splotu poprzecznie dokładnie cztery razy w odlegle od skrzyżowań, z dwoma przecięciami w sąsiedztwie skrzyżowania na zewnątrz  $\gamma$ . *Flype* to ruch na diagramie który obraca obszar wewnątrz  $\gamma$  o kąt  $180^\circ$ , przesuwając skrzyżowanie przylegające do  $\gamma$  tak aby stało się skrzyżowaniem przylegającym do  $\gamma$ , ale między dwoma przeciwnymi pasmami (Zobacz Rysunek 6.6).



Rysunek 6.6: Flype. [127]

**Hipoteza 6.7** (III hipoteza Taita). Niech  $D_1, D_2$  będą zredukowanymi alternującymi diagramami zorientowanego pierwszego splotu. Wtedy diagram  $D_2$  można otrzymać z  $D_1$  korzystając jedynie z ruchu flype.

Tę hipotezę udowodnił Menasco z Thistlethwaitem w 1991 roku [108]. Wynika z niej, że dwa zredukowane diagramy alternujące tego samego węzła mają ten sam spin: ruch flype nie zmienia spinu (dla niektórych to jest II hipoteza). Używając wielomian Jonesa, udało się pokazać że wszystkie trzy hipotezy są prawdziwe.

C. Sundberg i Thistlethwaite pokazali w 1998 roku [149], że liczba splotów alternujących rośnie co najmniej wykładniczo, wraz ze wzrostem liczby skrzyżowań.

Okolo 1961 roku Fox zapytał „Co to jest węzeł alternujący?”. Szukano takiej definicji węzła alternującego, która nie odnosi się bezpośrednio do diagramów, aż w 2015 roku niezależnie J. E. Greene [50] oraz J. Howie [63] podali geometryczną charakteryzację.

## 6.6 Sploty dodatnie

Zorientowany diagram nazywamy *diagramem dodatnim* gdy wszystkie jego skrzyżowania są dodatniego znaku. Splot nazywamy *splotem dodatnim* jeśli posiada on dodatni diagram.

Węzeł  $11n183$  jest dodatnim węzłem chociaż żaden jego minimalny diagram nie jest dodatni.

## 6.7 Sploty okresowe/periodyczne

W matematyce interesujące jest znalezienie symetrii w zadanej przestrzeni.

Węzeł  $K$  nazywamy  *$n$ -okresowym* (lub, że ma okres  $n$ ), jeśli istnieje obrót w  $\mathbb{R}^3$  o kąt  $2\pi/n$  wokół pewnej prostej  $l$ , rozłącznej z węzłem, taki że  $f(K) = K$ .

Trójlistnik jest 3-okresowy, węzeł  $5_1$  jest 5-okresowy oraz 2-okresowy. Jasne jest, że jeśli węzeł ma okres  $q$ , to każdy dzielnik  $q$  też jest okresem tego węzła.

Zbiór wszystkich okresów jest niezmiennikiem węzłów. Z konstrukcji węzłów torusowych wynika, że jedyne okresy węzła  $T(r, s)$  to są dzielniki liczb  $r$  oraz  $s$ .

Istnieją warunki jakie węzeł  $K$  musi spełniać aby być  $n$ -okresowym, wyrażo-

ne poprzez warunki na niezmienniki węzła  $K$  takie jak: wielomian Alexandra, wielomian Jonesa i ich uogólnienia; homologie Khovanova i Floera.

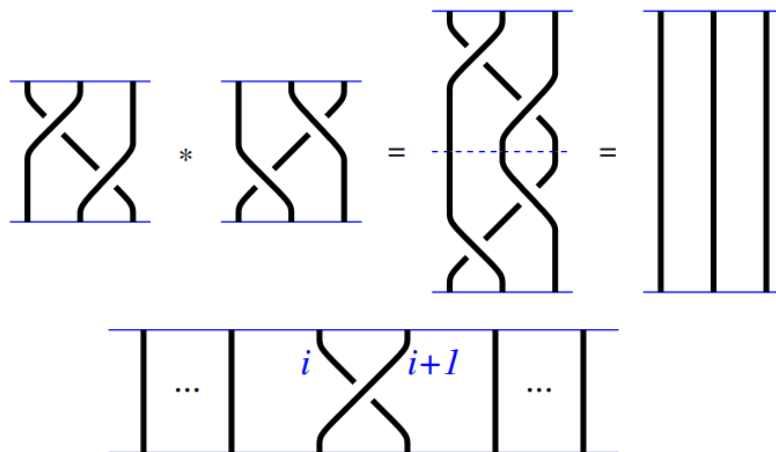
## 6.8 Postać warkoczowa

Diagramy splotów można również rozpatrywać w postaci tzw. *warkoczy* na  $n$  *pasmach*, czyli zanurzonych  $n$  odcinków w  $\mathbb{R}^3$  o początkach na wspólnej prostej i końcach na wspólnej prostej (leżących na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny, gdzie leżą początki), tak że przeplatają się one w sposób monotoniczny (tzn. wektor styczny do nich nie jest nigdzie w pozycji wertykalnej). Łącząc później ich początki z odpowiednimi końcami, otrzymujemy *domknięty warkocz*.

### 6.8.1 Twierdzenie Alexandra

**Twierdzenie 6.8** ([7]). *Każdy splot może być przedstawiony jako domknięcie pewnego warkocza.*

Istnieje również *algorytm Vogela* opracowany przez P. Vogela w 1990 r. [155] który przeprowadzany na diagramie dowolnego węzła (lub splotu) doprowadzi do otrzymania zagnieżdżonych okręgów Seiferta jednakowo zorientowanych, co ma potwierdzać, iż dany węzeł (lub splot) można przedstawić w postaci warkoczowej. Prowadzić może on jednak do zwiększenia początkowej liczby skrzyżowań diagramu.



Rysunek 6.7: Działanie na warkoczach oraz generator  $\sigma_i$ .



## 6.8.2 Twierdzenie Markowa

Dany warkocz na  $n$  pasmach możemy kodować jako słowo składające się z symboli  $\sigma_i, \sigma_i^{-1}$  dla  $1 \leq i \leq n-1$ . Każde z tych symboli  $\sigma_i$  oznacza jedno skrzyżowanie pomiędzy pasmami  $i$  a  $i+1$  w warkoczu a wykładnik mówi o znaku skrzyżowania. Działanie na warkoczach i generator  $\sigma_i$  są pokazane na Rysunku 6.7.

**Twierdzenie 6.9** (Markow 1936). *Domknięcia dwóch warkoczy dają równoważne sploty wtedy i tylko wtedy gdy z jednego do drugiego da się przejść sekwencją poniższych operacji.*

1.  $\sigma_j \sigma_j^{-1} = 1$  dla  $1 \leq j \leq n-1$
2.  $\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}$  dla  $1 \leq j \leq n-2$
3.  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  dla  $|i-j| > 1$
4.  $\sigma_j w \sigma_j^{-1} = w$  dla  $1 \leq j \leq n-1$  (koniugacja)
5.  $w \sigma_n = w \sigma_n^{-1} = w$  (stabilizacja)

Reprezentacją warkoczową splotu torusowego  $T(r, s)$  jest słowo  $(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{s-1})^r$  (zob. [115]).

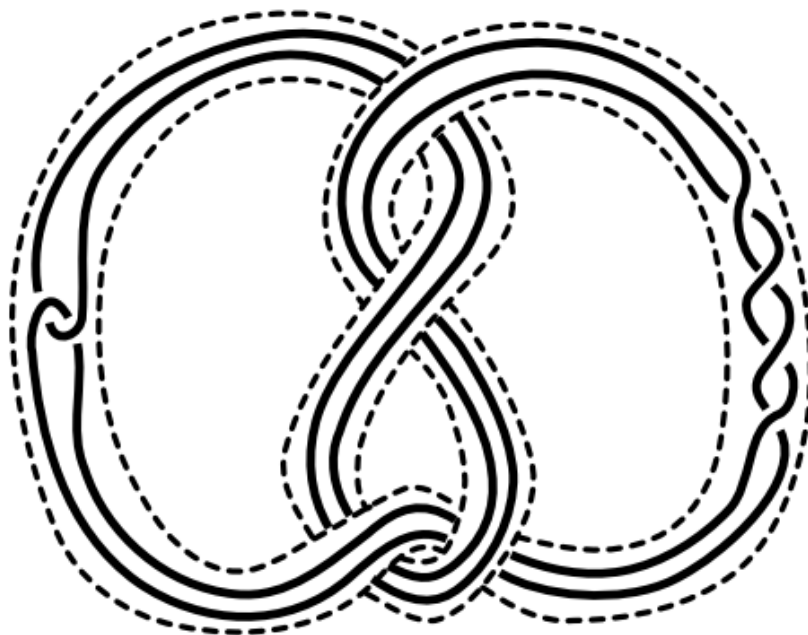
## 6.9 Węzły satelitarne

Niech  $K, C$  oznaczają węzły. Załóżmy, że węzeł  $K$  jest zanurzony w torusie pełnym  $T$ , natomiast niech  $e : T \rightarrow \mathbb{S}^3$  oznacza zanurzenie takie, że  $e(T)$  jest regularnym otoczeniem węzła  $C$ . Wtedy  $e(K)$  nazywany jest *węzłem satelitarnym z wzorcem  $K$  i towarzyszem  $C$* .

Można pokazać, że suma spójna  $K = K_1 \# K_2$  powstaje jako węzeł satelitarny z wzorcem  $K_1$  i towarzyszem  $K_2$ .

## 6.10 Węzły hiperboliczne

Węzeł  $K$  nazywamy *hiperbolicznym* jeśli jego dopełnienie w  $\mathbb{S}^3$  posiada metrykę o stałej krzywiznie równej  $-1$ .



Rysunek 6.8: Przykład węzła satelitarnego. [127]

**Twierdzenie 6.10** (W. Thurston, lata 1970). *Każdy węzeł należy do jednej z trzech rozłącznych rodzin węzłów: torusowych, alternujących, hiperbolicznych*

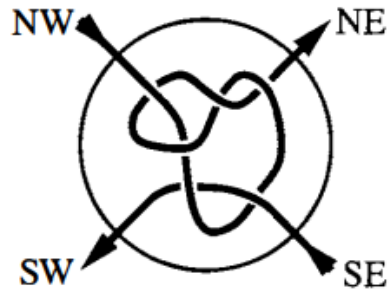
Spośród wszystkich węzłów pierwszych w tablicach do 16 skrzyżowań, jest: 13 torusowych, 20 satelitarnych, pozostałych 1.701.903 jest hiperbolicznych.

Spośród wszystkich węzłów pierwszych w tablicach do 19 skrzyżowań, jest: 14 torusowych, 380 satelitarnych, pozostałych 352.151.858 jest hiperbolicznych.

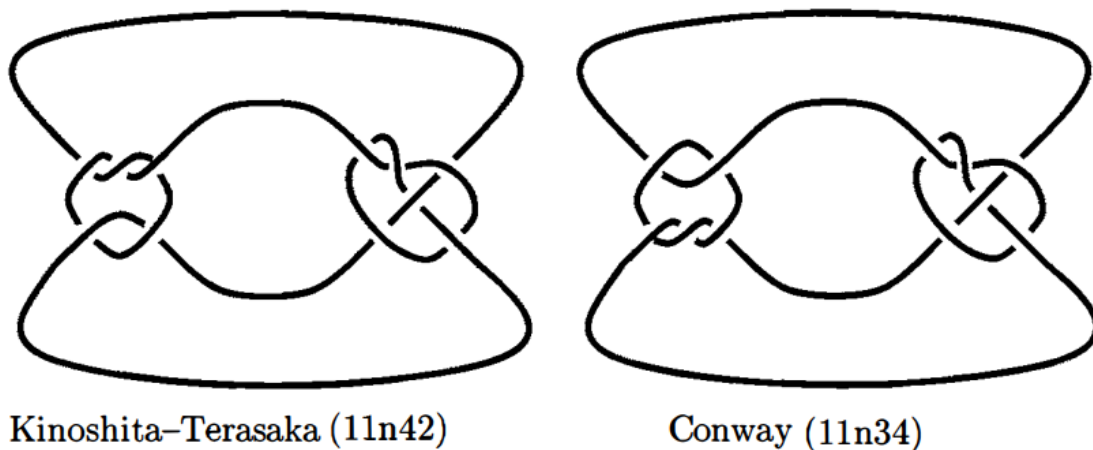
## 6.11 Pary mutantów

*Znakowany supet* (lub *2-supet*)  $t$  to okrągła kula  $B$ , która zawiera dwa rozłączne prawidłowo zanurzone łuki i (być może pusty) zestaw rozłącznych zanurzonych pętli o następującej własności. Cztery końce łuków przecinają się ze sferą ograniczającą  $B$  w punktach, które są równomiernie rozmieszczone wokół wielkiego koła (zwanego równikiem); oznaczamy je w kolejności wokół okręgu za pomocą NW, NE, SE i SW oraz ustalmy widok tak jak na Rysunku 6.9. Łuki i pętle są zorientowane: każdy łuk jest kierowany od wejścia do wyjścia, a my wybieramy NW i SE jako wejściami, a NE i SW jako wyjścia. Znakowany supet bez etykiet to po prostu *supet*.

Niech  $L_1$  będzie zorientowanym splotem, który zawiera znakowany supet  $t$ . Usuńmy  $t$ , obróć go o kąt  $180^\circ$  wokół jednego z jego trzech głównych osi, w razie



Rysunek 6.9: (Znakowany) superł. [35]



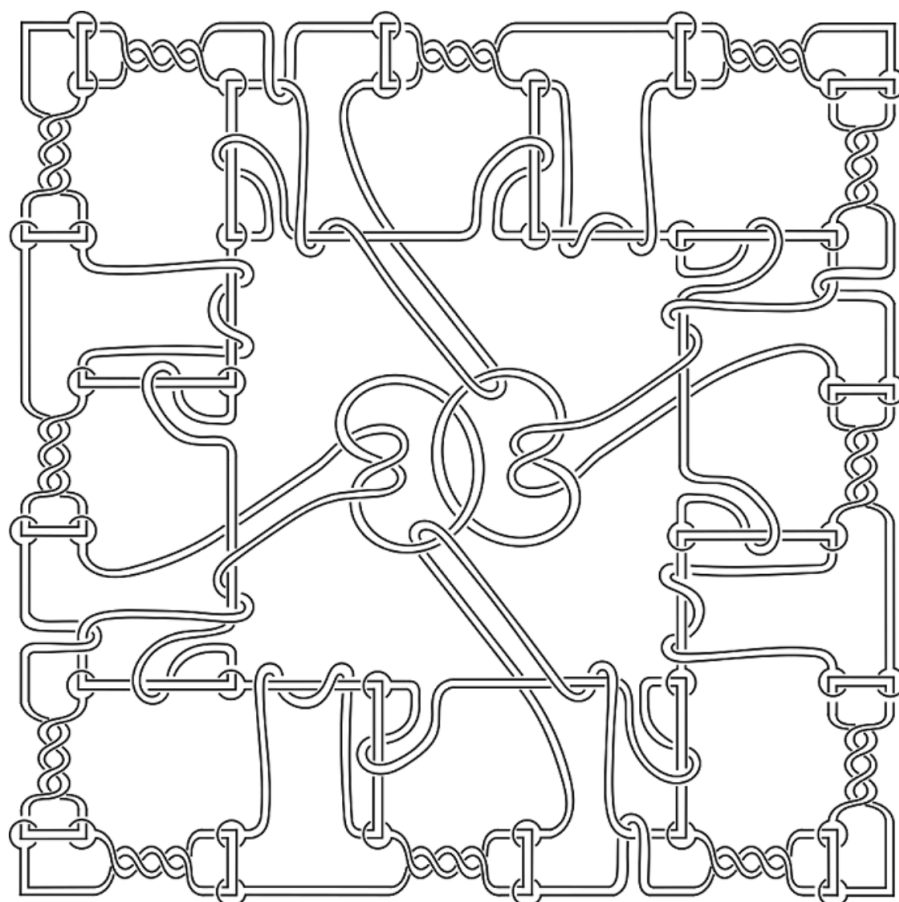
Rysunek 6.10: Para mutantów. [35]

potrzeby odwracając wszystkie orientacje, i przyklejmy z powrotem do pozycji tak, aby utworzyć nowy splot  $L_2$ . Jeśli  $t$  ma pewien typ symetrii, to  $L_1$  i  $L_2$  mogą być takie same. Jeśli  $L_1$  i  $L_2$  są różne, nazywa się je wzajemnymi *mutantami*. Przykład węzłów mutantów znajdziemy na Rysunku 6.10

## 6.12 Sploty Brunna

Splot nazywamy *splotem Brunna* jeśli jest to nietrywialny splot oraz po usunięciu z niego dowolnego ogniwa, pozostałe ogniwa tworzą splot trywialny. Splot Hopfa oraz pierścienie Boromeuszy są przykładami splotów Brunna, inny przykład można zobaczyć na Rysunku 6.11

Przykładem splotu Brunna o 4 ogniwach jest splot  $L_{14n63195}$ , można pokazać komputerowo, że to najprostszy (w sensie liczby skrzyżowań) taki splot.



Rysunek 6.11: Przykład splotu Brunna. [14]

# Rozdział 7

## Niezmienniki

Niezmiennikiem nazywamy dowolną funkcję  $K \mapsto f(K)$  która przyporządkowuje każdemu węzłowi (lub odpowiednio splotowi)  $K$  obiekt  $f(K)$  w ten sposób, że równoważne węzły (lub sploty) otrzymują równoważne obiekty. Pożądane wówczas jest aby obiekty  $f(K_1)$  oraz  $f(K_2)$  były relatywnie łatwiejsze do rozróżnienia niż  $K_1$  oraz  $K_2$ . Czasami zdarza się tak, że łatwiej jest dany niezmiennik wyznaczyć jednak niewiele możemy dzięki niemu splotów odróżnić, w porównaniu do innego niezmiennika trudniejszego do wyliczenia.

### 7.1 Dopełnienie splotu

Jeśli dwa węzły lub sploty są równoważne to ich dopełnienia (do ambientalnej przestrzeni trójwymiarowej  $S^3$  lub  $\mathbb{R}^3$ ) są homeomorficzne.

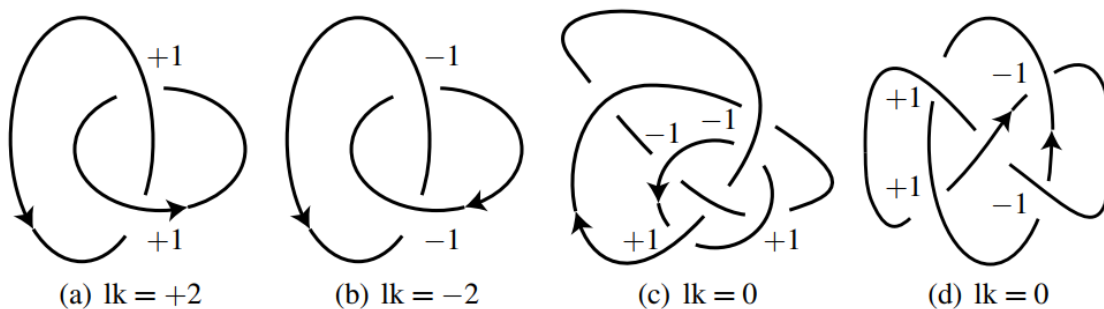
**Twierdzenie 7.1** (Gordon, Luecke 1989 [49]). *Węzły o homeomorficznych (z zachowaniem orientacji) dopełnieniach są równoważne.*

Istnieją dwa nierównoważne sploty z homeomorficznymi dopełnieniami. Bliższe pojęciu dopełnienia jest pojęcie *zewnątrza splotu* w którym oprócz samego splotu wyrzucamy z  $S^3$  również otwarte otoczenie tubularne tego splotu, tak aby powstała 3-rozmaitość była zwarta.

### 7.2 Liczba zaczepienia

Niech  $L$  będzie zorientowanym splotem ze składowymi  $L_1, \dots, L_n$  i  $D$  będzie zorientowanym diagramem dla  $L$  ze składowymi  $D_1, \dots, D_n$ . *Liczba zaczepienia*

lub indeksem zaczepienia  $lk(i, j)$  splotu  $L$ , gdzie  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  oraz  $i \neq j$ , jest sumą znaków wszystkich skrzyżowań pomiędzy ogniwami  $D_i$  i  $D_j$  diagramu  $D$ .



Rysunek 7.1: Przykłady splotów i ich liczby zaczepienia. [67]

### 7.3 Liczba skrzyżowaniowa

Liczba skrzyżowaniowa lub indeks skrzyżowaniowy węzła  $K$ , oznaczona jako  $c(K)$ , jest minimalna liczba skrzyżowań wymaganych na każdym diagramie węzła  $K$ .

**Twierdzenie 7.2** (Lickorish). *Jeśli węzły  $K_1$  oraz  $K_2$  są alternujące, wówczas*

$$c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2).$$

W przypadku ogólnym węzłów niealternujących jest to otwarty problem.

**Twierdzenie 7.3** (Murasugi 1991). *Dla splotów torusowych  $T(r, s)$ , mamy*

$$c(T(r, s)) = \min\{|s|(|r| - 1), |r|(|s| - 1)\}.$$

### 7.4 Liczba kolorująca

Zacznijmy najpierw od szczególnego przypadku jakim jest od trójkolorowalności węzłów i splotów. Diagram węzłów nazywamy trójkolorowalnym, jeśli każdy łuk w diagramie można pokolorować za pomocą jednego z trzech kolorów, np. czerwonego, żółtego, i niebieskiego, w taki sposób, że spełnione są następujące dwa warunki. 1) Na całym diagramie zastosowano co najmniej dwa różne kolory. 2) Na każdym skrzyżowaniu albo wszystkie łuki mają ten sam kolor, albo wszystkie łuki są różnego koloru.

Węzeł lub splot nazywamy trójkolorowalnym gdy posiada diagram trójkolorowalny.

**Twierdzenie 7.4.** *Jeśli splot jest trójkolorowalny, to każdy jego diagram jest trójkolorowalny.*

Liczbę trójkolorującą, oznaczana jako  $tri(L)$ , jest to liczba wszystkich możliwości trójkolorowania diagramu  $D$  dla splotu  $L$  i nie zależy ona od wyboru diagramu (zachowuje się przy ruchach Reidemeistera). Mamy oczywiście dla splotów trywialnych  $tri(T_n) = 3^n$ . Trójlistnik ma nietrywialne trójkolorowania, dokładniej  $tri(3_1) = 9$ , zatem trójlistnik jest nietrywialnym węzłem.

Trójkolorowalność uogólnia się do dowolnej liczby kolorów  $n$ , mówi się wtedy o  $n$ -kolorowalności Foxa. Nadajemy wtedy łukom liczbę ze zbioru  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  natomiast diagram ma spełniać następujące warunki. 1) Co najmniej dwie etykiety łuków są różne. 2) Na każdym skrzyżowaniu zachodzi relacja  $2x \equiv y + z \pmod{n}$ , gdzie  $x$  jest etykietą „mostu”, a  $y$  oraz  $z$  to pozostałe dwie etykiety łuków skrzyżowania.

## 7.5 Indeks warkoczowy

Indeks warkoczowy lub inaczej liczba warkoczowa splotu  $L$ , oznaczana  $b(L)$ , jest to minimalna liczba pasm, takich, że ich domknięcie daje splot równoważny  $L$ .

**Twierdzenie 7.5** (Yamada 1987). *Jeśli  $s_{\min}(L)$  to minimalna liczba okręgów Seiferta, spośród wszystkich możliwych diagramów splotu  $L$ , to  $b(L) = s_{\min}(L)$ .*

**Twierdzenie 7.6** (Murasugi 1996). *Dla węzłów torusowych  $T(r, s)$ , gdzie  $r \neq 0 \neq s$  mamy*

$$b(T(r, s)) = \min\{|r|, |s|\}.$$

## 7.6 Liczba rozwiązująca/gordyjska

Niech  $L$  będzie splotem. Minimalną liczbę skrzyżowań, które trzeba zamienić na przeciwne (czyli podmiany „doliny” z „mostem”, czyli inaczej przechodzeniu węzła przez siebie) na pewnym jego diagramie, by dostać splot trywialny, nazywamy liczbą rozwiązującą lub liczbą gordyjską splotu  $L$  i oznaczamy  $u(L)$ . Liczba  $u(L)$  wynosi zawsze mniej niż połowa liczby skrzyżowaniowej  $c(L)$ .

Zgodnie z „klasyczną” definicją, między odwracaniem kolejnych skrzyżowań mamy prawo wykonać izotopie otaczające; natomiast zgodnie ze „standardową” definicją, takie izotopie są zabronione. Obie definicje są równoważne [2].

**Twierdzenie 7.7** (Bleier 1984). *Liczba rozwiązująca niekoniecznie jest realizowana na diagramie minimalnym dla węzła.*

**Twierdzenie 7.8** (Scharlemann 1985 [143]). *Niech  $K$  będzie węzłem. Jeżeli  $u(K) = 1$ , to  $K$  jest węzłem pierwszym.*

**Twierdzenie 7.9** (Kronheimer, Mrowka 1993). *Dla węzłów torusowych  $T(r, s)$ , gdzie  $r, s > 0$  mamy*

$$u(T(r, s)) = \frac{1}{2}(r-1)(s-1).$$

## 7.7 Liczba mostowa

Niech  $D$  będzie diagramem węzła. Liczbę mostów, czyli długich łuków, które biegną tylko przez nadskrzyżowania, nazywamy *liczbą mostową* diagramu  $D$ . Minimalną liczbę mostową wśród wszystkich diagramów  $D$  dla węzła  $K$ , oznaczaną przez  $br(K)$ , nazywamy *liczbą mostową* węzła  $K$ .

Tylko jeden węzeł jest jednomostowy, to niewęzeł. Kolejne w hierarchii skomplikowania, czyli dwumostowe, to domknięcia wymiernych supłów (czyli węzły wymierne).

**Twierdzenie 7.10** (Shubert [145]).

- Niech  $K_1, K_2$  będą węzłami, wtedy  $br(K_1) + br(K_2) = br(K_1 \# K_2) + 1$ .
- Dla węzłów torusowych  $T(r, s)$ , mamy  $br(T(r, s)) = \min\{|r|, |s|\}$ .

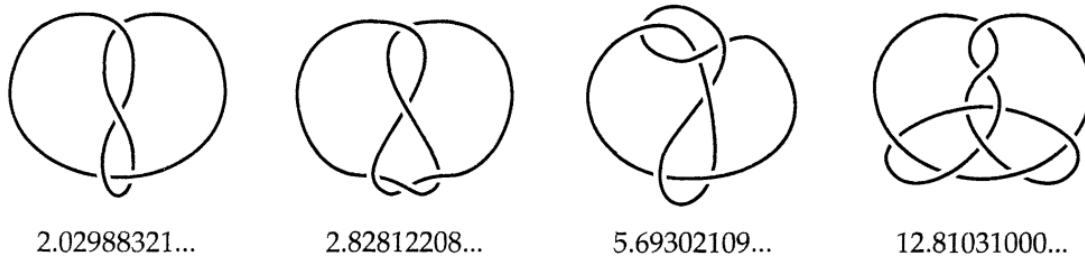
## 7.8 Objętość hiperboliczna

*Objętością* (hiperboliczną) węzła hiperbolicznego nazywamy sumę objętości pojedynczych hiperbolicznych czworościanów tworzących dopełnienie danego węzła. Jest to dodatnia liczba, którą można obliczyć z dowolną dokładnością w rozwinięciu dziesiętnym. Objętość jest niezmiennikiem, często w tablicach dla węzłów niehiperbolicznych przyjmuje się jego wartość jako zero, przykłady węzłów i ich objętości są na Rysunku 7.2. Obecnie łatwo jest wyznaczyć objętość zadanego diagramem węzła przy pomocy pakietów komputerowych.

**Twierdzenie 7.11** (Ruberman [133]). *Pary mutantów mają tę samą objętość.*

**Twierdzenie 7.12** (Cao, Meyerhoff [22]). *Najmniejsza możliwa objętość węzła hiperbolicznego jest równa objętości węzła  $4_1$ , czyli  $2,02988321 \dots$*





Rysunek 7.2: Objętość wybranych węzłów. [2]

## 7.9 Wielomian Alexandra

Wielomian Alexandra był pierwszym niezmiennikiem wielomianowym wynalezionym w 1928 r. [8], był on wówczas zdefiniowany przy użyciu bardziej skomplikowanych koncepcji niż równoważny z nim wielomian Conwaya (zdefiniowany w 1969 r.) który teraz zaprezentujemy.

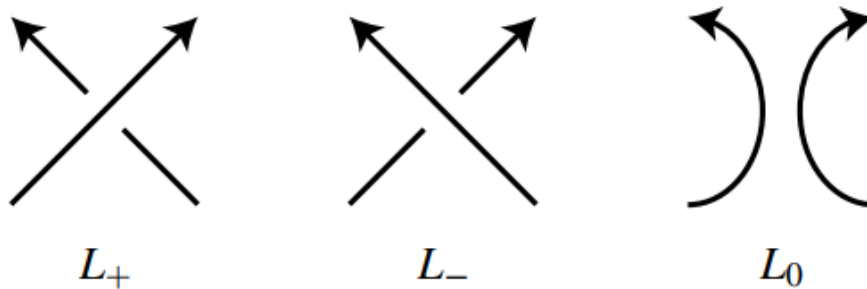
Każdy węzeł i splot ma jednoznacznie wyrażony *wielomian Conwaya*.

$$L \longrightarrow C_L(z) \in \mathbb{Z}[z]$$

Wyraża się go jednoznacznie przez poniższe dwa warunki.

$$C_{L_+}(z) - C_{L_-}(z) = zC_{L_0}(z)$$

$C_{\mathcal{O}}(z) = 1$ , gdzie  $\mathcal{O}$  jest węzłem trywialnym, oraz sploty  $L_+, L_-, L_0$  różnią się w okolicach jednego skrzyżowania jak na Rysunku 7.3.

Rysunek 7.3:  $L_+, L_-, L_0$ .

**Stwierdzenie 7.13.** Jeśli  $L$  to splot trywialny z  $k > 1$  składowymi, to  $C_L(z) = 0$ .

Wielomian (znormalizowany) Alexandra (zwany też *wielomianem Alexandra-Conwaya*):  $\Delta_L(t) = C_L(t^{1/2} - t^{-1/2}) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$

$$\Delta_{L_+}(t) - \Delta_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta_{L_0}(t)$$

$\Delta_{\mathcal{O}}(t) = 1$ , gdzie  $\mathcal{O}$  jest węzłem trywialnym.

Znane są przykłady węzłów nietrywialnych z wielomianem Alexandra równym 1.

Własności:

1.  $\Delta_L(t) = \Delta_L(t^{-1})$ .
2. Dla dowolnego węzła  $K$ ,  $\Delta_K(1) = \pm 1$ . Dla dowolnego splotu  $L$  o więcej niż jednej składowej,  $\Delta_L(1) = 0$ .
3.  $\Delta_{-L}(t) = \Delta_L(t)$ ,  $C_{-L}(z) = C_L(z)$ .
4.  $\Delta_{\bar{L}}(t) = \Delta_L(t)$ ,  $C_{\bar{L}}(z) = C_L(z)$ .
5.  $\Delta_{L_1 \# L_2}(t) = \Delta_{L_1}(t) \Delta_{L_2}(t)$ .
6.  $\Delta_{L_1 \sqcup L_2}(t) = 0$ , dla splotu rozłącznego  $L_1 \sqcup L_2$ .
7. Jeśli  $S$  jest węzłem satelitarnym ze wzorcem  $P$  i towarzyszem  $C$  i spinem  $n$  wówczas  $\Delta_S(t) = \Delta_P(t) \Delta_C(t^n)$ .

Wielomian Alexandra węzła torusowego jest następujący:

$$\Delta_{T(p,q)}(t) = \frac{(t^{pq} - 1)(t - 1)}{(t^p - 1)(t^q - 1)}.$$

**Twierdzenie 7.14** (Murasugi 1958). Jeśli  $a_i$  to kolejne współczynniki wielomianu Alexandra węzła  $K$  oraz  $a_m, a_{-m}$  to skrajne (niezerowe) współczynniki, to

1. żadne z  $a_i$  nie jest równe zero, dla  $-m \leq i \leq m$ ,
2.  $a_i a_{i+1} < 0$  nie jest równe zero, dla  $-m \leq i \leq m - 1$ .

**Twierdzenie 7.15** (Hosokawa [58]). Dla dowolnego wielomianu  $p(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  takiego, że  $p(1/t) = p(t)$  oraz  $p(1) = \pm 1$  istnieje taki węzeł  $K$ , że  $p(t)$  jest wielomianem Alexandra dla  $K$ .

## 7.10 Wielomian Jonesa

Każdy węzeł i splot ma jednoznacznie wyrażony wielomian Jonesa [81].

$$K \longrightarrow V_K(t) \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$$

Wyraża się go jednoznacznie przez poniższe dwa warunki, z których pierwszy tradycyjnie nazywany jest *relacją motkową*.

$$t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}(t)$$

$V_{\mathcal{O}}(t) = 1$ , gdzie  $\mathcal{O}$  jest węzłem trywialnym.

Relację motkową należy rozumieć w ten sposób, że wybieramy w naszym węźle  $K$  jedno skrzyżowanie  $L$ . Następnie obserwujemy jak się ma nasz (jeszcze nam nieznan) wielomian do wielomianów węzłów (lub splotów) otrzymanych przez podstawienie do relacji w odpowiednie miejsca skrzyżowań pozostałych rodzajów. W ten sposób będziemy nieustannie „schodzić” aż do otrzymania odpowiedniej liczby okręgów, a więc węzłów których wielomian jest znany. Zdefiniujmy dokładniej.

Niech  $D$  będzie zorientowanym diagramem o  $n$  składowych oraz niech  $b = (b_1, \dots, b_n)$  oznacza punkty bazowe na  $D$ , po jednym punkcie na każdej składowej  $D$  (wybieramy punkty różne od skrzyżowań). Mówimy, że  $D$  jest *diagramem opadającym* względem  $b$ , jeśli zachodzi co następuje: gdy poruszamy się wzdłuż orientacji  $D$  zaczynając od punktu  $b_1$ , potem, gdy już wrócimy do  $b_1$ , zaczynamy dalej od  $b_2$ , ..., w końcu od  $b_n$ , wtedy każde skrzyżowanie, które napotykamy po raz pierwszy, pokonujemy mostem. (Jeśli rysujemy na tablicy diagram „bez wycierania”, zawsze otrzymamy diagram opadający)

**Twierdzenie 7.16.** *Diagram opadający reprezentuje zawsze trywialny splot.*

Dla diagramu z punktami bazowymi, złożoność diagramu to (uporządkowana leksykograficznie) para  $(c, d)$ , gdzie  $c$  jest liczbą skrzyżowań diagramu  $D$ , a  $d$  liczbą skrzyżowań nie należących do części która jest już opadająca (od początku);  $d$  mierzy jak daleko jesteśmy od diagramu opadającego.

W algorytmie użytym do obliczenia wielomianu Jonesa dla  $D$ , używamy motkowej relacji do pierwszego „złego” skrzyżowania. Po czym zamieniamy skrzyżowanie  $v$  na przeciwne i na wygładzenie. Konstrukcja ta pozwala na indukcję po złożoności diagramu, redukującą diagram do diagramów opadających.

**Stwierdzenie 7.17.** *Jeśli  $L$  to splot trywialny z  $k$  składowymi, to*

$$V_L(t) = \left(-t^{1/2} - t^{-1/2}\right)^{k-1}.$$

**Twierdzenie 7.18** (Eliahou, Kauffman, Thistlethwaite 2003). *Istnieje nieskończenie wiele nietrywialnych splotów (o co najmniej dwóch składowych) mających wielomian Jonesa taki sam jak dla splotów trywialnych.*

**Twierdzenie 7.19** (Przytycki [123]). *Dla dowolnego zorientowanego diagramu  $\vec{D}$  zachodzi:*

$$\text{tri}(D) = 3 \left| V_{\vec{D}} \left( e^{\frac{\pi i}{3}} \right) \right|^2.$$

Własności:

1.  $V_{\bar{L}}(t) = V_L(t^{-1})$ .
2.  $V_{K^*}(t) = V_K(t)$ , dla węzła  $K$ .
3.  $V_{L^*}(t) = t^{-3lk(K,L-K)} V_L(t)$ ,  
gdzie  $L^*$  powstało z  $L$  poprzez zamianę orientacji jej składowej  $K$ .
4.  $V_{L_1 \# L_2}(t) = V_{L_1}(t) V_{L_2}(t)$ .
5.  $V_{L_1 \sqcup L_2}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2}) V_{L_1}(t) V_{L_2}(t)$ , dla splotu rozłącznego  $L_1 \sqcup L_2$ .
6.  $V_L(1) = (-2)^{\text{comp}(L)-1}$ .
7.  $\frac{\partial V_K(t)}{\partial t} \Big|_{t=1} = 0$ , dla każdego węzła  $K$ .
8. ([153]) Jeśli dla węzła nietrywialnego  $K$  zachodzi  $c(K) \leq 24$ , to  $V_K(t) \neq 1$ .

Wielomian Jonesa węzła torusowego jest następujący:

$$V_{T(p,q)}(t) = \frac{t^{(p-1)(q-1)/2}}{1-t^2} (1 - t^{p+1} - t^{q+1} + t^{p+q}).$$

**Twierdzenie 7.20** (Thistlethwaite 1987). *Jeżeli splot  $L$  posiada spójny, nieredukowalny i alternujący diagram z  $n$  skrzyżowaniami, wtedy:*

1. Współczynniki przy maksymalnym i minimalnym stopniu  $t$  w wielomianie  $V_L(t)$  wynoszą  $+1$  lub  $-1$ .
2.  $V_L(t)$  jest alternującym wielomianem (znaki przy współczynnikach są naprzemienne).
3.  $\text{Span}(V_L(t))$  wynosi dokładnie  $n$ .

4. Jeśli  $L$  jest pierwszy i nie jest splotem torusowym  $(2, k)$ , wtedy  $V_L(t)$  ma postać:

$$t^r \sum_{i=0}^m a_i t^i, \text{ gdzie każdy } a_i \neq 0.$$

**Twierdzenie 7.21** (Kauffman, Murasugi, Thistlethwaite 1986).

1. Jeżeli splot  $L$  posiada spójny diagram z  $n$  skrzyżowaniami, wtedy

$$\text{span}(V_L(t)) \leq n.$$

2. Jeśli splot  $L$  z  $n$  skrzyżowaniami jest pierwszy i niealternujący to

$$\text{span}(V_L(t)) < n.$$

Wielomian Jonesa odróżnia od siebie dowolne dwa węzły pierwsze o co najwyżej 9 skrzyżowaniach.

### 7.10.1 Wielomian Jonesa z nawiasu Kauffmana

Inna definicja wielomianu Jonesa bazuje na następujących dwóch półniezmiennikach odczytanych z diagramu  $D$  splotu  $L$ : skręceniu  $\omega(D)$  (zwanego też spinem) oraz Nawiasie Kauffana dla niezorientowanego diagramu  $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ , zdefiniowanym rekurencyjnie [91] jak na Rysunku 7.4.

$$\begin{aligned} \langle \text{skrzyżowanie} \rangle &= A \langle \text{półskrzyżowanie} \rangle + A^{-1} \langle \text{półskrzyżowanie} \rangle, \\ \langle D \sqcup \bigcirc \rangle &= (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle, \\ \langle \bigcirc \rangle &= 1, \end{aligned}$$

Rysunek 7.4: Relacje Nawiasu Kauffmana.

Wówczas wielomian Jonesa

$$J(L) = (-A)^{-3\omega(D)} \langle D \rangle \Big|_{A \rightarrow t^{-1/4}}.$$

## 7.11 Wielomian HOMFLYPT

Każdy węzeł i splot ma jednoznacznie wyrażony wielomian HOMFLYPT.

Nazwa pochodzi od inicjałów osób, które ją odkryły. Pierwszych sześć liter oznacza J. Hoste, A. Ocneanu, K. Millett, P.J. Freyd, W.R. Lickorish i D.N. Yetter, którzy odkryli wielomian w maju 1984 r. [45], natomiast dwa ostatnie litery od J. Przytyckiego i P. Traczyka z Polski, którzy kilka miesięcy później opublikowali swój artykuł [126].

$$K \longrightarrow P_K(a, z) \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$$

Wyraża się go jednoznacznie przez poniższe dwa warunki.

$$aP_{L_+}(a, z) - a^{-1}P_{L_-}(a, z) = zP_{L_O}(a, z)$$

$P_O(a, z) = 1$ , gdzie  $O$  jest węzłem trywialnym.

Inne używane (równoważne) definicje/normalizacje tego wielomianu, to:

$$lP_{L_+}(l, m) + l^{-1}P_{L_-}(l, m) + mP_{L_O}(l, m) = 0,$$

$$\alpha^{-1}P_{L_+}(\alpha, z) - \alpha P_{L_-}(\alpha, z) = zP_{L_O}(\alpha, z).$$

Z tego otrzymujemy zależności:  $a = -il, l = ia, z = im, m = -iz$ .

**Stwierdzenie 7.22.** *Jeśli  $L$  to splot trywialny z  $k$  składowymi, to*

$$P_L(a, z) = \left( \frac{a - a^{-1}}{z} \right)^{k-1}.$$

Własności:

1.  $P_{\bar{L}}(a, z) = P_L(a^{-1}, z)$ .
2.  $P_{L^*}(a, z) = P_L(a, z)$ ,  
gdzie  $L^*$  powstało z  $L$  poprzez zamianę orientacji jej każdej składowej.
3.  $P_{L_1 \# L_2}(a, z) = P_{L_1}(a, z)P_{L_2}(a, z)$ , bez względu na jednoznaczność sumy spójnej splotów.
4.  $P_{L_1 \sqcup L_2}(a, z) = \left( \frac{a+a^{-1}}{z} \right) P_{L_1}(a, z)P_{L_2}(a, z)$ , dla splotu rozłącznego  $L_1 \sqcup L_2$ .
5.  $P_L(a, z) = P_{mut(L)}(a, z)$ , gdzie  $mut(L)$  jest mutantem splotu  $L$ .

$$6. P_{8_8} = P_{\overline{10_{129}}}.$$

**Twierdzenie 7.23** (Franks, Williams, Morton 1985-1987). *Jeśli  $E$  jest największym wykładnikiem przy zmiennej  $l$  we wielomianie  $P_L(l, m)$ ,  $a$  e najmniejszym takim wykładnikiem, oraz  $b(L)$  to indeks warkoczowy splotu  $L$ , wówczas:*

$$b(L) \geq \frac{1}{2}(E - e) + 1.$$

Powyższa nierówność nie jest równością tylko dla 5 węzłów (dla węzłów do 10 skrzyżowań).

## 7.12 Wielomian Kauffmana dwóch zmiennych

W sierpniu 1985 roku L.H. Kauffman odkrył wielomian dwóch zmiennych  $F_L(a, x)$  [93] uogólniając wielomian jednej zmiennej dla nieorientowanych splotów zdefiniowany wcześniej (wiosną, w tym samym roku) przez zespół w składzie R. Brandt, W.B.R. Lickorish, K.C. Millet oraz niezależnie C.F. Ho.

Własności:

1.  $F_{\overline{L}}(a, x) = F_L(a^{-1}, x)$ .
2.  $F_{K^*}(a, x) = F_K(a, x)$ , dla węzła  $K$ .
3.  $F_{L^s}(a, x) = a^{Alk(K, L-K)} F_L(a, x)$ ,  
gdzie  $L^s$  powstało z  $L$  poprzez zamianę orientacji jej składowej  $K$ .
4.  $F_{L_1 \# L_2}(a, x) = F_{L_1}(a, x) F_{L_2}(a, x)$ .
5.  $F_{L_1 \sqcup L_2}(a, x) = \left( \frac{a+a^{-1}}{x} - 1 \right) F_{L_1}(a, x) F_{L_2}(a, x)$ , dla splotu rozłącznego  $L_1 \sqcup L_2$ .
6.  $F_L(a, x) = F_{mut(L)}(a, x)$ , gdzie  $mut(L)$  jest mutantem splotu  $L$ .
7.  $F_{K11a30} = F_{K11a189}$ .
8.  $F_{9_{42}} = F_{\overline{9_{42}}}$ , ale  $9_{42} \neq \overline{9_{42}}$ .

## 7.13 Głębokość drzewa motkowego

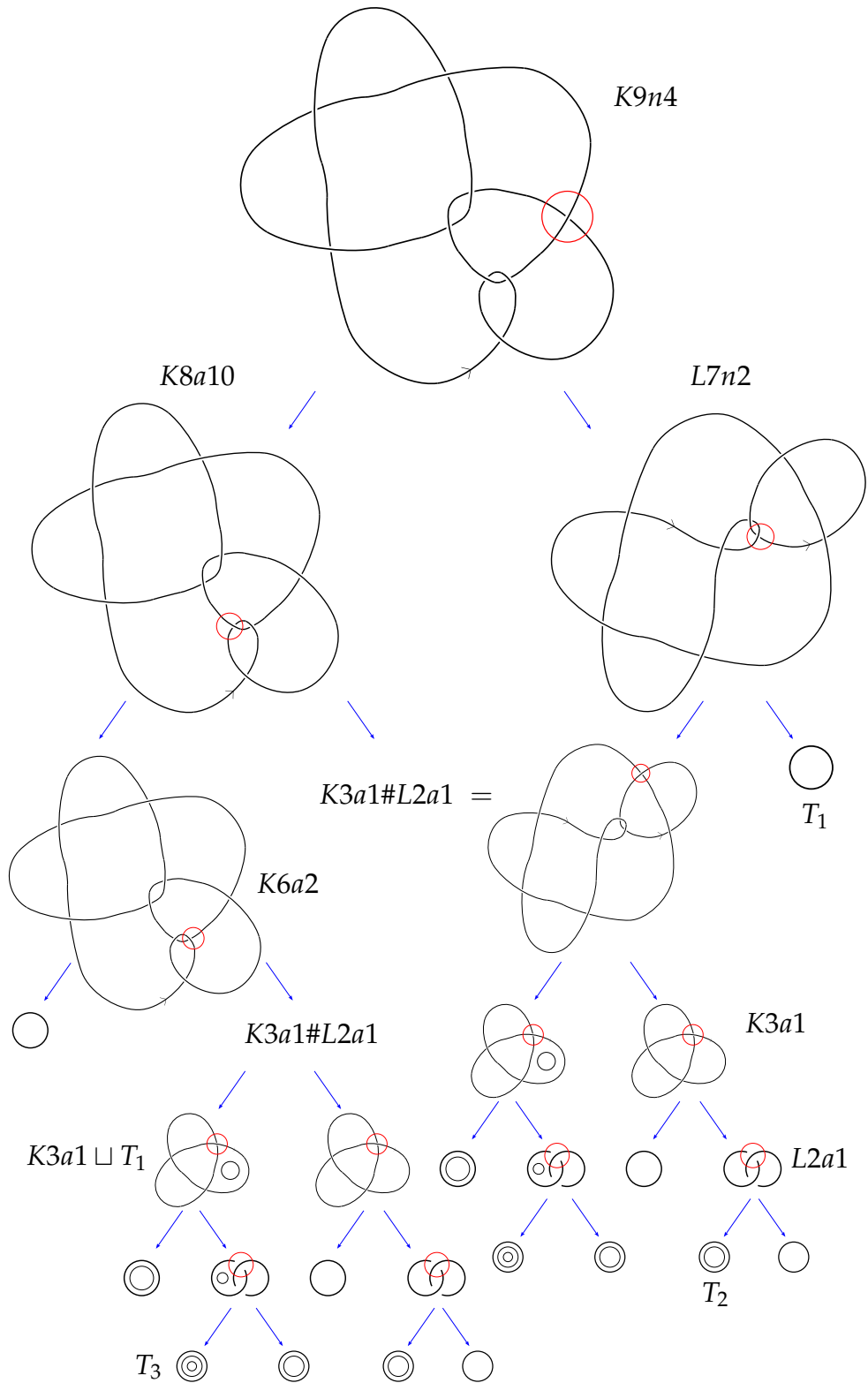
Relacje motkowe można wykorzystać do obliczenia wielomianów Jonesa, Alexandra-Conwaya i bardziej ogólnego wielomianu HOMFLYPT. Iteracja tej relacji motkowej w celu obliczenia wielomianu dla splotu zorientowanego prowadzi do skonstruowania rozwiązującego drzewa zwanego *drzewem motkowym*, tj. drzewa binarnego z danym węzłem lub splotem jako korzeniem, którego wszystkie liście są splotami trywialnymi. *Głębokość drzewa motkowego* jest maksymalną długością najkrótszej ścieżki od liścia do korzenia drzewa, spośród wszystkich liści. *Głębokością drzewa motkowego* zorientowanego węzła lub splotu  $L$ , oznaczana jako  $td(L)$ , jest minimalną głębokością spośród wszystkich jego drzew motkowych. Daje ona miarę złożoności obliczeniowej wielomianów dla splotów, liczonych reakcją motkową.

Na Rysunku 7.5 przedstawiamy drzewo motkowe dla węzła  $9n4$ , ma on głębokość 6, drzewo motkowe na Rysunku 7.6 dla tego samego diagramu w korzeniu ma głębokość 5. Zauważmy zatem, że nawet jeśli korzenie dwóch drzew motkowych to ten sam minimalny diagram węzła, głębokość powstałych drzew mogą się różnić.

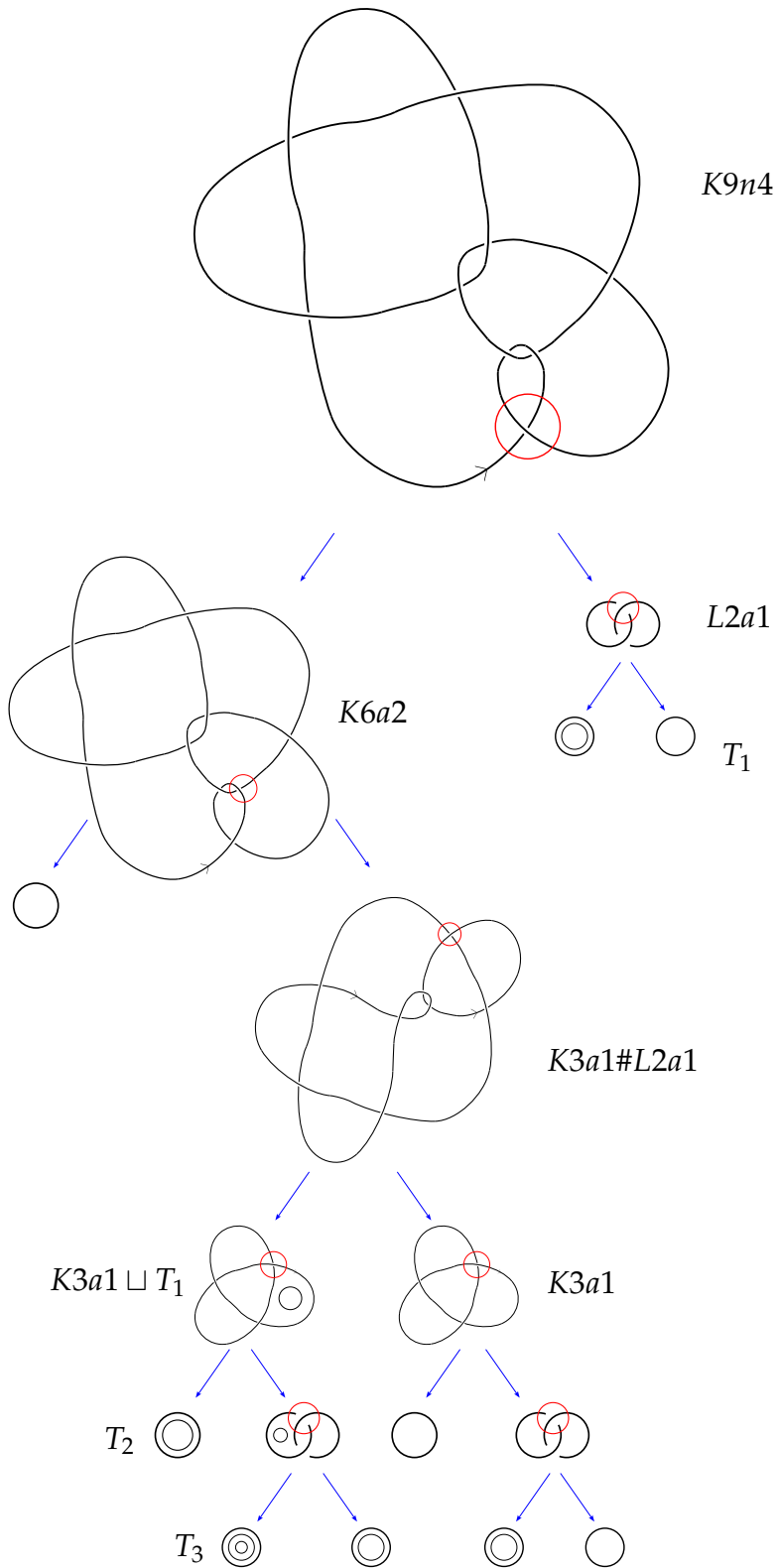
## 7.14 Wybrane inne zależności pomiędzy powyższymi niezmiennikami

1.  $V_L(t) = F_L(-t^{-3/4}, t^{1/4} + t^{-1/4})$ .
2. Wielomian  $P_L(a, z)$  uogólnia wielomiany  $V_L(t) = P_L(t, t^{1/2} - t^{-1/2})$ ,  $\Delta_L(t) = P_L(1, t^{1/2} - t^{-1/2})$  oraz  $C_L(z) = P_L(1, z)$ .
3. (Murasugi [116]):  $V_L(-1) = (-1)^{\text{comp}(L)-1} \Delta_L(-1)$ .
4. (cyt. [122]):  $u(K) \geq \log_p(\text{col}_p(K)) - 1$ , dla liczby pierwszej  $p$ .
5. (cyt. [122]):  $\text{tri}(L) = 3|V_L^2(e^{2\pi i/6})| = 3|F_L(1, -1)|$ .
6. (cyt. [30]):  $V_L(-1) = C_L(2i)$ .
7. (Lickorish 1987):  $(V_L(-q^{-2}))^2 = (-1)^{\text{comp}(L)-1} F_L(q^3, q + q^{-1})$ .
8.  $|\Delta_L(-1)| = \det(K)$  jest to tzw. *wyznacznik węzła*.
9. Jeśli  $L$  jest splotem alternującym to  $\det(L) \geq c(L)$ .
10. Węzeł  $K$  jest  $p$ -kolorowalny wtedy i tylko wtedy, gdy  $p$  dzieli  $\det(K)$ .



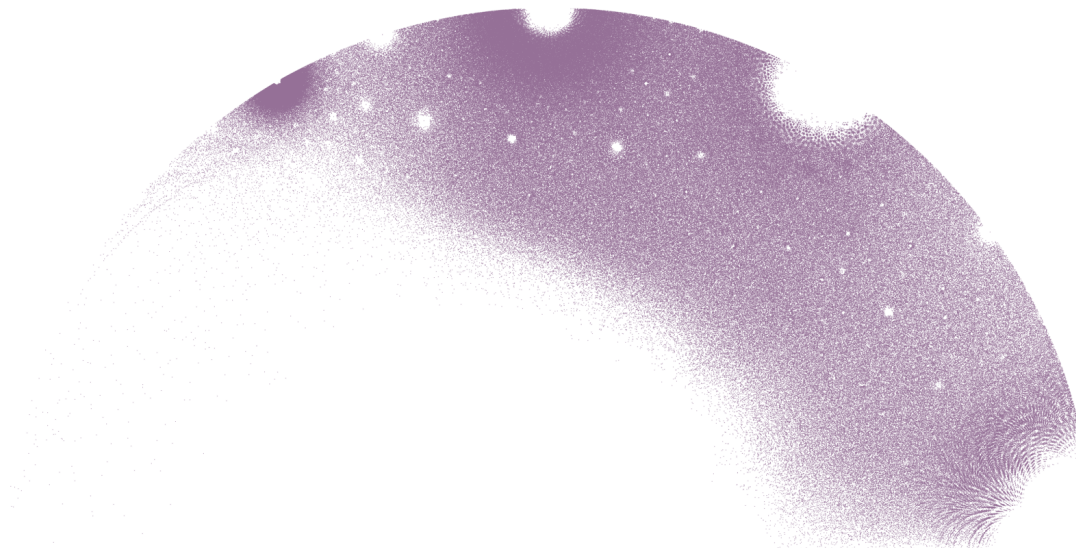


Rysunek 7.5: Drzewo motkowe dla węzła  $9n4$  o wysokości 6.



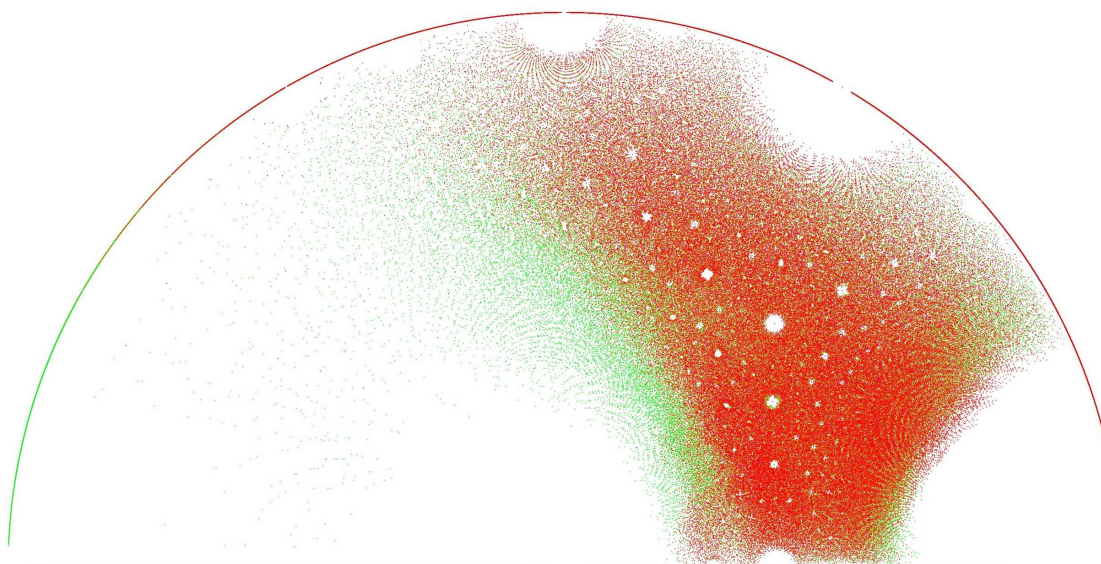
Rysunek 7.6: Drzewo motkowe dla węzła  $9n4$  o wysokości 5.

Na Rysunku 7.7 widzimy 1.215.034 punktów, we wnętrzu górnego jednostkowego koła w płaszczyźnie zespolonej, będących miejscami zerowymi wielomianu Jonesa dla wszystkich węzłów do 15 skrzyżowań. Wiadomo, że miejsca zerowe dla wszystkich węzłów są gęste w całej płaszczyźnie.



Rysunek 7.7: Miejsca zerowe wielomianu Jonesa.

Na Rysunku 7.8 widzimy miejsca zerowe wielomianu Alexandra, na górnym jednostkowym kole w płaszczyźnie zespolonej, dla wszystkich węzłów do 16 skrzyżowań. Punkty niebieskie dotyczą węzłów zwierciadlanych i są na punktach czerwonych dotyczących węzłów chiralnych alternujących i są na punktach zielonych dotyczących węzłów chiralnych niealternujących.



Rysunek 7.8: Miejsca zerowe wielomianu Alexandra.

## 7.15 Grupa węzła lub splotu

Użyjemy tutaj fundamentalnego narzędzia Topologii Algebraicznej jakim jest *grupa podstawowa* przestrzeni. Dla przypomnienia, bardzo ogólnikowo, elementami tej grupy są klasy homotopii wszystkich pętli zaczepionych w ustalonym punkcie, a działaniem w grupie jest konkatenacja dwóch pętli w jedną pętlę. Jeśli wybierzemy inny punkt bazowy w tej samej składowej, to wynikowe grupy podstawowe będą izomorficzne.

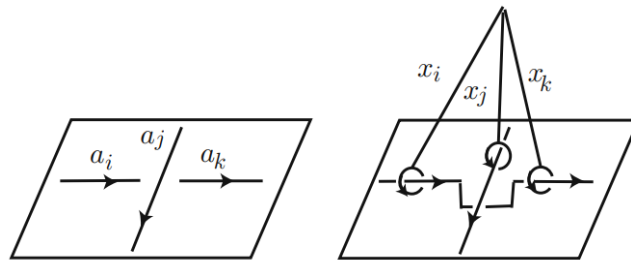
*Grupą węzła lub splotu*  $K$  nazywamy grupę podstawową dopełnienia (do przestrzeni ambientalnej) tego węzła lub splotu, oznaczamy ją przez  $G(K)$

Węzeł  $K$  jest nietrywialnym węzłem wtedy i tylko wtedy, gdy grupa  $G(K)$  jest nieskończenie cykliczna. Jeśli  $K_1$  i  $K_2$  są węzłami pierwszymi z izomorficznymi grupami, to ich dopełnienia węzłów są homeomorficzne. Jeśli  $K_1$  i  $K_2$  są niezorientowanymi węzłami w  $S^3$  i istnieje zachowujący orientację homeomorfizm między ich dopełnieniami, to  $K_1$  i  $K_2$  są równoważne jako niezorientowane węzły. Grupa węzła torusowego jest izomorficzna z grupą o prezentacji  $G(T(r,s)) = \langle x, y \mid x^r = y^s \rangle$ .

Z diagramu węzła i splotu możemy odczytać jego grupę w postaci tzw. *prezentacji Wirtingera* następująco. Niech  $K$  będzie zorientowanym węzłem (lub splotem). Rozważmy diagram  $D$  dla  $K$ , który jest połączeniem pewnych wzajemnie rozłącznych zorientowanych łuków. (Diagram  $D$  może zawierać pętle bez przecięć. Dla uproszczenia tak zwanymi tutaj także łukami.)

Niech  $Arc(D) = \{a_1, \dots, a_m\}$  będzie zbiorem zorientowanych łuków diagramu  $D$ . Przypisujemy literę  $x_i$  łukowi  $a_i$  (dla  $i = 1, \dots, m$ ) i rozważamy wolną grupę o prezentacji  $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$ . Niech  $v$  będzie wybranym skrzyżowaniem  $D$  i niech  $a_i, a_j, a_k$  będą pojawiającymi się łukami wokół  $v$ . Załóżmy, że  $a_j$  jest nadłukiem w  $v$ . Kiedy patrzymy na  $v$  w kierunku orientacji dla  $a_j$  założmy, że łuk po prawej stronie to  $a_i$ , a łuk po lewej stronie to  $a_k$ . Zobacz Rysunek 7.9. Wówczas definiujemy relację  $rel(v)$  przez  $x_j^{-1}x_i x_j = x_k$ . (Zauważmy, że w definicji  $rel(v)$ , nie używamy orientacji  $a_i$  ani  $a_k$ .) Rozważmy relacje  $rel(v_1), \dots, rel(v_n)$  dla wszystkich skrzyżowań  $v_1, \dots, v_n$  w  $D$ . Stąd mamy prezentację grupy:

$$G(K) = \langle x_1, \dots, x_m \mid rel(v_1), \dots, rel(v_n) \rangle.$$



Rysunek 7.9: Relacja przy skrzyżowaniu. [88]

# Rozdział 8

## Homologie Khovanova

Homologie Khovanova zdefiniowane w [102] jest teorią homologii z podwójną gradacją, która kategoryzuje wielomian Jonesa. Wiadomo, że homologie Khovanova są istotnie silniejszym niezmiennikiem niż wielomian Jonesa. Dla alternujących węzłów wielomian Jonesa i sygnatura określają wielomian Khovanova.

W tym rozdziale zdefiniujemy *homologie Khovanova* (czyt. Chowanowa), korzystając głównie z prac O. Viro [154] oraz [124]. Konstrukcja Viro bazuje na nawiasie Kauffmana. Homologie Khovanova kategoryfikują nawias Kauffmana co wyjaśnimy później. Symbol  $[D]$  oznacza renormalizację nawiasu Kauffmana według wzoru  $[D] = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle$ .

Możemy więc zrenormalizowany nawias Kauffmana zdefiniować następująco:

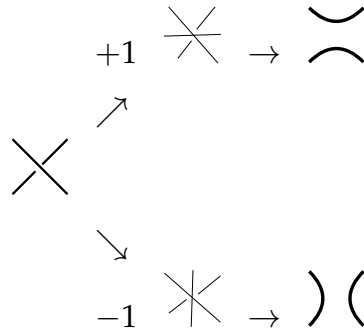
$$[\emptyset] = 1, \quad \left[ \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right] = A \left[ \begin{array}{c} \frown \\ \smile \end{array} \right] + A^{-1} \left[ \begin{array}{c} \left. \right] \left[ \begin{array}{c} \left. \right] \right].$$

Suma statystyczna przyjmuje postać:

$$[D] = \sum_{s \in \text{stany Kauffmana}} A^{\sigma(s)} (-A^2 - A^{-2})^{|D_s|}$$

gdzie  $\sigma(s) =$  liczba dodatnich wygładzeń minus liczba ujemnych wygładzeń, czyli  $\sigma(s) = |s^{-1}(1)| - |s^{-1}(-1)|$ .

Niech  $V$  oznacza zbiór skrzyżowań diagramu  $D$ . Wówczas *stan Kauffmana* można interpretować jako funkcję  $s : V \rightarrow \{+1, -1\}$



Na rysunku powyżej naniesione na skrzyżowanie kreski (pozioma i pionowa) to tak zwane markery wygładzenia. Symbolem  $D_s$  oznaczamy zbiór okręgów, otrzymanych z diagramu  $D$  przez zastosowanie markerów  $s$ .

$$\bigcirc -A^2 - A^{-2}, \quad \bigcirc^+_{A^2}, \quad \bigcirc^-_{A^{-2}}$$

Na rysunku powyżej ilustrujemy fakt, że w stanie Kauffmana okrąg odpowiada wielomianowi. We wzbożonych stanach dodatniemu okręgowi przypisujemy jednomian  $A^2$ , natomiast ujemnemu okręgowi jednomian  $A^{-2}$  (znaki w sumie poniżej grupujemy oddzielnie).

Wzbożonym stanem Kauffmana  $S$ , nazywamy stan Kauffmana  $s$  wraz z funkcją  $D_s \xrightarrow{b} \{+1, -1\}$ . Zauważmy, że z każdym stanem Kauffmana  $s$  związanych jest  $2^{|D_s|}$  wzbożonych stanów Kauffmana. W takiej notacji możemy naszą sumę statystyczną zapisać jako:

$$[D] = \sum_{s \in \text{wzbożone stany}} (-1)^{|D_s|} A^{\sigma(s) + 2\tau(s)}$$

gdzie  $\tau(s) = |b^{-1}(1)| - |b^{-1}(-1)|$ , (zachodzi  $(-1)^{|D_s|} = (-1)^{|\tau(s)|}$ ).

Homologie Khovanova określamy jako homologie kompleksu łańcuchowego z podwójną gradacją  $C_{ij}$  i różniczką stopnia  $(-2, 0)$ :  $\partial : C_{ij} \rightarrow C_{i-2, j}$ .

Definiujemy  $C_{ij} = \mathbb{Z}S_{ij}$ , gdzie  $S_{ij} = \{S \in \{\text{wzbożone stany}\} | \sigma(s) = i, \sigma(s) + 2\tau(S) = j\}$

Różniczkę  $\partial : C_{ij} \rightarrow C_{i-2, j}$  definiujemy następująco.

Niech dla  $S \in S_{ij}$ ,  $\partial(S) = \sum_{S' \in S_{i-2, j}} (-1)^{t(s, s')} [S, S'] S'$

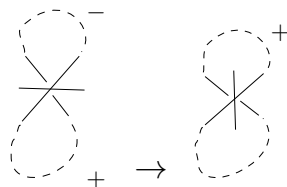
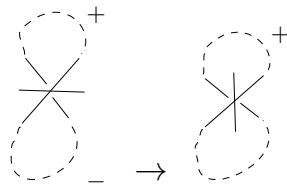
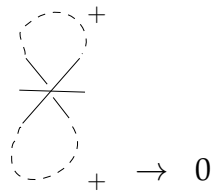
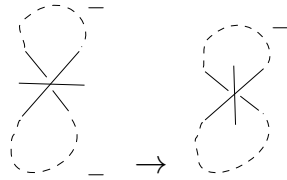
gdzie  $[S, S'] = 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy

(1)  $s$  i  $s'$  różnią się w dokładnie jednym skrzyżowaniu (np.  $v$ ) gdzie  $s(v) = 1$ ,  $s'(v) = -1$ ,

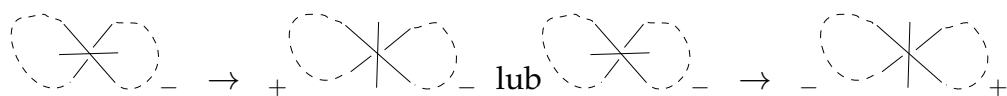
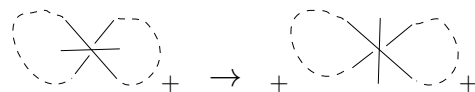
(2) mamy  $\tau(S') = \tau(S) + 1$ , ponadto zakładamy, że okręgi  $D_s$  które zachowują się przy przejściu z  $D_s$  do  $D_{s'}$  zachowują znak;  
w przeciwnym razie  $[S, S'] = 0$ .

Wybór znaków okręgów  $D_s$  i  $D_{s'}$  zilustrowany jest poniżej.

Przypadek:  $|D_{s'}| = |D_s| - 1$  (połączenie)



Przypadek:  $|D_{s'}| = |D_s| + 1$  (rozszczenie)



Znak  $(-1)^{t(s,s')}$  definiujemy dla stanów  $s, s'$  różniących się tylko w skrzyżowaniu  $v$  jak następuje.

Uporządkujmy skrzyżowania diagramu  $D$ . Liczba  $t(s, s')$  jest liczbą skrzyżowań dodatnich w  $s$  mniejszych od  $v$  w wybranym porządku.

Z powyższych definicji nietrudno jest sprawdzić, że  $\partial^2 = 0$ .

*Homologiami Khovanova* nazywamy homologie kompleksu  $(C_{ij}, \partial)$  czyli

$$H_{ij}(D) = \ker \partial / \text{im } \partial.$$

Khovanov wykazał, że  $H_{ij}(D)$  jest niezmiennikiem regularnej izotopii (zachowuje się przy ruchach Reidemeistera  $R_2$  i  $R_3$ ).

Podejście Viro jest elementarne, możemy jednak zinterpretować je w bardziej wyrafinowany następujący sposób.

Przypadek łączenia okręgów możemy zakodować następującą tabelką mnożenia:

·	-	+
-	-	+
+	+	0

Przypadek rozszczepienia możemy zakodować jako komnożenie i zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \Delta(-) &= - \otimes + + + \otimes - \\ \Delta(+) &= + \otimes + \end{aligned}$$

Bardziej algebraicznie musimy rozpatrywać pierścień  $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$ .

Jeśli  $-$  zastąpimy przez 1 a  $+$  zastąpimy przez  $x$ , to powyższa tabelka mnożenia da nam standardowe mnożenie oznaczone przez  $m$  w  $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$ .

Natomiast komnożenie przyjmie formę:

$$\Delta(1) = 1 \otimes x + x \otimes 1$$

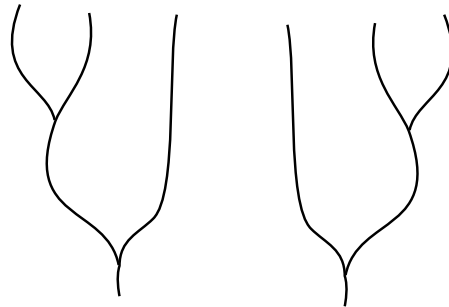
$$\Delta(x) = x \otimes x$$

Mnożenie  $m$  i komnożenie  $\Delta$  spełniają warunek  $\Delta m = (m \otimes Id)(Id \otimes \Delta)$  zwanym *warunkiem Frobeniusa*.

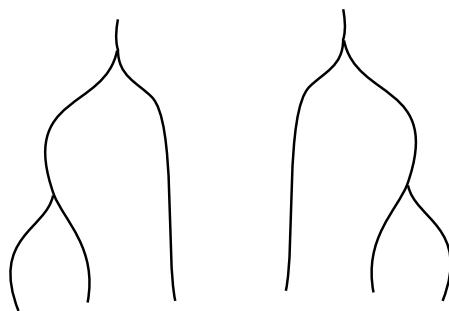
To ten warunek sprawił, że  $\partial^2 = 0$  w kompleksie łańcuchowym Khovanova.



Algebra  $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$  jest przykładem algebry Frobeniusa, która w szczególności spełnia aksjomat łączności i kołacznosci, przedstawiony na poniższych rysunkach.



aksjomat łączności



aksjomat kołacznosci

Algebra Frobeniusa jest ściśle związana z TQFT (topologiczna kwantowa teoria pola Wittena) w wymiarze  $1 + 1$ .

Przypomnijmy, że *homologie małej kategorii*  $\mathcal{C}$  ze współczynnikami w functorze  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow R - \text{Mod}$  zdefiniowane są następująco.

Zaczynamy od definicji kompleksu łańcuchowego  $C(\mathcal{C}^{sd}, \mathcal{F})$ :

$$C_n^{sd} = \bigoplus_{x_0 \xrightarrow{f_0} x_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} x_n} \mathcal{F}(x_0), \quad \partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i, \quad \lambda \in \mathcal{F}(x_0), \text{ gdzie}$$

$$d_0(\lambda; x_0 \xrightarrow{f_0} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n) = (\mathcal{F}(x_0 \xrightarrow{f_0} x_1)(\lambda); x_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} x_n), \text{ dla } i > 0:$$

$$d_i(\lambda; x_0 \xrightarrow{f_0} x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n) = (\lambda; x_0 \xrightarrow{f_0} \dots \xrightarrow{f_{n-2}} x_{n-1} \xrightarrow{f_i f_{i-1}} x_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow x_n).$$

W przypadku kiedy kategoria ma obiekty dobrze zdefiniowanego „rozmiaru”, możemy budować kompleks łańcuchowy w uproszczony sposób. Taka sytuacja zachodzi, gdy mam do czynienia z kategorią abstrakcyjnych kompleksów symplecjialnych.

Niech  $K = (V, P)$  będzie abstrakcyjnym kompleksem symplecjialnym z uporządkowanymi wierzchołkami  $V$  które porządkujemy oraz sympleksami  $P \subset 2^V$ .

Rozpatrujemy  $K$  jako małą kategorię z  $Ob(K) = P$  a morfizmy są inkluzjami. Niech  $K^{op}$  będzie kategorią przeciwną do kategorii  $K$ , tzn.  $Ob(K) = Ob(K^{op})$  oraz  $Mor_K(S_1, S_2) = Mor_{K^{op}}(S_2, S_1)$ . Niech  $\mathcal{F} : K^{op} \rightarrow \mathcal{R} - Mod$  będzie kowariantnym funktorem z kategorii  $K^{op}$  do kategorii modułów nad przemiennym pierścieniem  $R$ . Konstruujemy teraz kompleks łańcuchowy  $C_n(K^{op}, \mathcal{F})$  jak następuje.

$$C_n(K^{op}, \mathcal{F}) = \bigoplus_{\dim(s)=n} \mathcal{F}(s)$$

Różniczką  $\partial_n : C_n(K^{op}, \mathcal{F}) \rightarrow C_{n-1}(K^{op}, \mathcal{F})$  jest zdefiniowana przez  $\partial_n = \sum_{i=1}^n (-1)^i d_i$ , gdzie jeśli  $s = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  jest zorientowanym sympleksem wymiaru  $n$  to na module  $\mathcal{F}(s)$  mamy:  $d_i = \mathcal{F}(s \supset (s - v_i))$ .

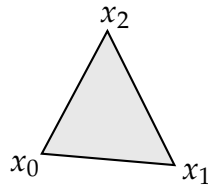
Mamy więc dwie definicje homologii dla abstrakcyjnego kompleksu łańcuchowego o współczynnikach w funktorze. Okazuje się, że obie definicje dają ten sam wynik.

### Twierdzenie 8.1.

Dla kompleksu symplecjialnego  $K$ :

$$H_n(C^{sd}(K)) = H_n(C(K))$$

Powyższe twierdzenie jest związane z podziałem barycentrycznym kompleksu symplecjialnego. W szczególności dla stałego funktora  $\mathcal{F}$  twierdzenie to mówi, że klasyczne homologie kompleksu symplecjialnego  $K$  są równe homologiom jego podziału barycentrycznego  $K^{sd}$ . Podział barycentryczny jest zilustrowany na poniższych rysunkach. Niech  $s$  będzie sympleksem,  $s = \{x_0, x_1, x_2\}$ :

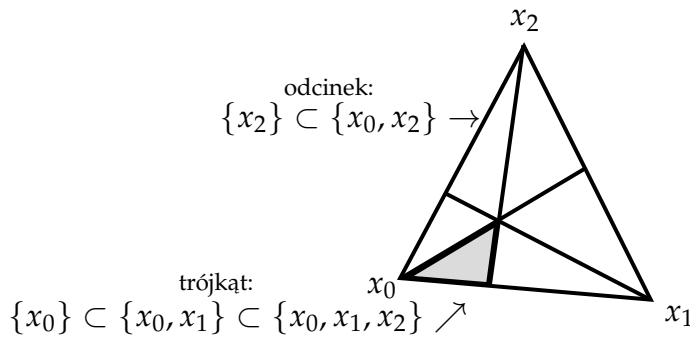


Rysunek 8.1: Sympleks.

Wiemy, że wierzchołki  $s^{sd}$  to  $\{x_0\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_0, x_1\}, \{x_0, x_2\}, \{x_1, x_2\}, \{x_0, x_1, x_2\}$

Ciekawego przykładu homologii małej kategorii ze współczynnikami stanowią Homologie Khovanova diagramu  $D$ .

Diagramowi przypisujemy  $K = \{V, 2^V\}$  którego wierzchołki to skrzyżowania diagramu  $D$ , a sympleksy odpowiadają stanom Kauffmana w ten sposób, że stanowi  $s$  przypisujemy  $s^{-1}(1)$ .



Rysunek 8.2: Podział barycentryczny sympleksu.

Funktor  $\mathcal{F} : K^{op} \rightarrow \mathcal{R} - Mod$  definiujemy następująco. Niech  $A = \mathbb{Z}[x]/(x^2)$  wtedy  $\mathcal{F}(s) = A^{\otimes |D_s|}$ , odpowiada to modułowi generowanemu przez wzbogacone stany Kauffmana.

Dla  $\lambda \in \mathcal{F}(s)$  definiujemy  $\mathcal{F}(s \supset s - v_i)$  używając mnożenia i komnożenia w algebrze  $A = \mathbb{Z}[x]/(x^2)$ .

Z homologii Khovanova możemy uzyskać wielomianowy niezmiennik (dwóch zmiennych) dla splotu  $L$ , nazywany *wielomianem Khovanova*, zdefiniowany następująco ([102]).

$$Kh_L(t, q) = \sum_{i,j} t^i q^j \text{rank}(\mathcal{H}^{i,j}(L)).$$

Z tego wielomianu możemy uzyskać wielomian Jonesa (w wersji z  $q$ ) poprzez

$$J_L(q) = Kh_L(-1, q).$$

Mamy  $J_{5_1}(q) = J_{10_{132}}(q)$  ale  $Kh_{5_1}(t, q) \neq Kh_{10_{132}}(t, q)$ .

Homologie Khovanova wykrywają węzły trywialne [104] i sploty trywialne [54]. Wykrywają również jednoznacznie (między innymi) węzeł trójlistny  $3_1$  [17], węzeł ósemkowy  $4_1$  [15], pięciolistnik  $T(2, 5)$  [16], splot Hopfa [18].

Z homologii Khovanova możemy uzyskać również liczbowy niezmiennik dla węzła  $K$ , nazywany *s-niezmiennikiem Rasmussena*, oznaczany jako  $s(K)$ .

Mamy również następującą własność, dla każdego węzła  $K$  zachodzi

$$s(K^*) = -s(K).$$

# Rozdział 9

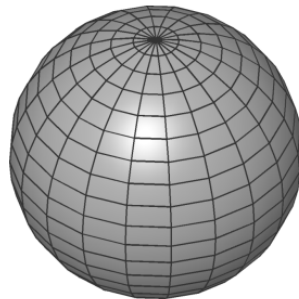
## Powierzchnie

### 9.1 Wprowadzenie

Przypomnijmy, że jedyną spójną rozmaitością 0-wymiarową jest punkt. Dowolna rozmaitość 0-wymiarowa jest homeomorficzna z przeliczalną przestrzenią dyskretną. Dowolna spójna rozmaitość 1-wymiarowa (bez brzegu) jest homeomorficzna z okręgiem lub z prostą rzeczywistą. Dowolna spójna rozmaitością 1-wymiarową z brzegiem jest homeomorficzna z półprostą rzeczywistą lub odcinkiem domkniętym. W tym rozdziale zajmiemy się rozmaitościami dwuwymiarowymi (2-rozmaitościami) inaczej zwanymi *powierzchniami* oraz ich klasyfikacją.

### 9.2 Powierzchnie orientowalne

*Sferą* nazywamy  $S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ . Zobacz Rysunek 9.1.



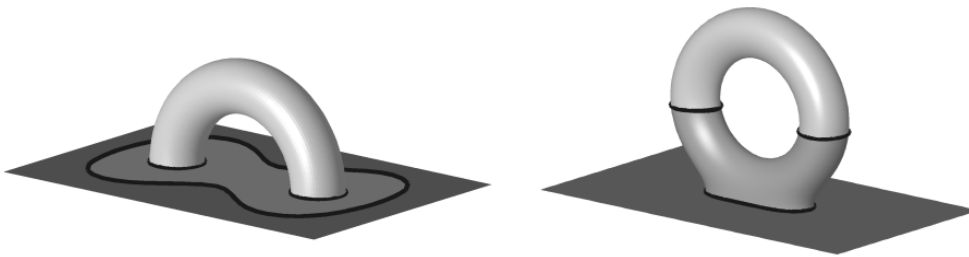
Rysunek 9.1: Sfera z nałożoną siatką. [90]

*Powierzchnia walca* jest to powierzchnia powstała przez obrót odcinka wokół osi równoległej do tego odcinka, jest ona homeomorficzna z przestrzenią  $[-1, 1] \times [-1, 1] / \{(-1, t) \sim (1, t)\}$ . Zobacz Rysunek 9.3.

*Torus*  $T^2$  jest to powierzchnia powstała przez obrót okręgu wokół osi leżącej w płaszczyźnie zawierającej ten okrąg, jest on homeomorficzny z przestrzenią  $[-1, 1] \times [-1, 1] / \{(-1, t) \sim (1, t) \text{ oraz } (t, -1) \sim (t, 1)\}$ . Zobacz Rysunek 9.4.

Sfera i torus nie są jedynymi zwartymi i spójnymi powierzchniami orientowanymi. Od XIX wieku matematycy znają pełny (nieskończony) katalog wszystkich takich powierzchni.

Liczbę trójwymiarowych dziur ("na wylot") nazywamy *rodzajem powierzchni* (lub z ang. *genusem*, aby odróżnić ją od zbyt niejednoznacznego słowa: rodzaj). *Kanonicznym dołączeniem rączki* do powierzchni nazywamy wycięcie z niej dwóch, bezpośrednio sąsiadujących ze sobą dysków i wklejeniem (bez zacinania ani przecinania z żadnym fragmentem powierzchni) powierzchni walca wzdłuż brzegów dysków. Zauważmy, że torus jest to sfera z dołączoną kanonicznie jedną rączką. Zobacz Rysunek 9.2.



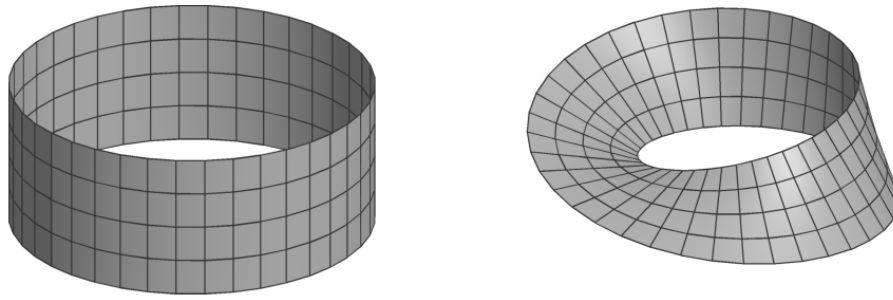
Rysunek 9.2: Kanoniczne dołączenie rączki oraz konstrukcja z nią równoważna. [90]

### 9.3 Powierzchnie nieorientowalne

*Wstęga Moebiusa* jest to powierzchnia powstała przez jednoczesny obrót odcinka wokół osi i wokół środka obracanego odcinka o kąt  $\pi$ , jest ona homeomorficzna z przestrzenią  $[-1, 1] \times [-1, 1] / \{(-1, t) \sim (1, -t)\}$ . Zobacz Rysunek 9.3.

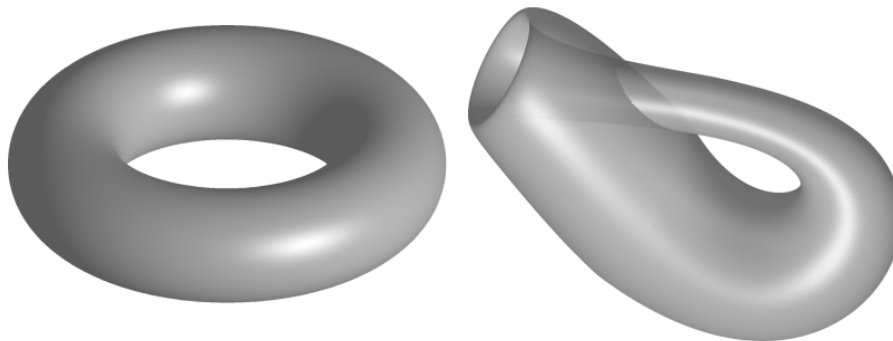
*Płaszczyzna rzutowa*  $P^2$  jest przestrzenią powstającą ze zwykłej płaszczyzny przez uzupełnienie jej kierunkami prostych równoległych, jest ona homeomorficzna z przestrzenią  $[-1, 1] \times [-1, 1] / \{(-1, -t) \sim (1, t) \text{ oraz } (-t, -1) \sim (t, 1)\}$ . Zobacz Rysunek 12.4(a).

Płaszczyzna rzutowa jest jednopunktowym uzwarceniem otwartej wstęgi Moebiusa,



Rysunek 9.3: Powierzchnia walca oraz wstęga Moebiusa. [90]

*Butelka Kleina* jest to powierzchnia homeomorficzna z przestrzenią  $[-1, 1] \times [-1, 1] / \{(-1, -t) \sim (1, t) \text{ oraz } (t, -1) \sim (t, 1)\}$ . Zobacz Rysunek 9.4.



Rysunek 9.4: Torus oraz immersja butelki Kleina w  $\mathbb{R}^3$ . [90]

Na każdą zwartą powierzchnię da się nanieść tzw. *siatkę* (T. Rado 1925) czyli powierzchnia jest homeomorficzna z powierzchnią utworzoną ze sklejenia ze sobą wielokątów całymi ich bokami, możemy zawsze dokonać takiego podziału, że wielokątami są same trójkąty mówimy wtedy, że powierzchnia jest *triangulowalna*.

Niech  $S$ ,  $K$ ,  $W$  będą kolejno liczbami ścian, krawędzi i wierzchołków siatki powierzchni  $F$ .

*Charakterystyka Eulera* powierzchni  $F$ , to  $\chi(F) = S - K + W$ . Jest to niezmiennik topologiczny niezależny od podziału danej powierzchni na wielokąty. Dla dowolnej zatem siatki sfery mamy  $S - K + W = 2$  jest to tzw. *wzór Eulera* znany od 1752 r.

Genus i charakterystyka Eulera są ze sobą związane, wzór dla powierzchni orientowalnych różni się od wzoru dla powierzchni nieorientowalnych.

Ani płaszczyzna rzutowa ani butelka Kleina nie mogą być umieszczone w trójwymiarowej przestrzeni tak, aby nie przecinała się sama ze sobą.

## 9.4 Klasyfikacja 2-rozmaitości

**Lemat 9.1.**

$$T^2 \# P^2 = P^2 \# P^2 \# P^2.$$

**Twierdzenie 9.2.** *Każda zamknięta powierzchnia jest homeomorficzna albo ze sferą albo ze sferą z dołączoną skończoną liczbą rączek albo ze se sferą ze skończoną liczbą dysków wyciętych i wklejonych w to miejsce wstęg Moebiusa. Żadne dwie z wymienionych powierzchni nie są homeomorficzne.*

1. Powierzchnie o  $\chi = 2$ : • 2-sfera.
2. Powierzchnie o  $\chi = 1$ : • 2-sfera z jedną dziurą czyli dysk, • 2-sfera z wklejoną jedną wstęgą Moebiusa czyli płaszczyzna rzutowa.
3. Powierzchnie o  $\chi = 0$ : • 2-sfera z dwoma dziurami czyli walec, • 2-sfera z jedną dziurą i jedną wklejoną wstęgą Moebiusa czyli płaszczyzna rzutowa z dziurą czyli wstęgą Moebiusa, • 2-sfera z dwoma wklejonymi wstęgami Moebiusa czyli dwie dziurawe płaszczyzny rzutowe skleione dziurami czyli dwie skleione wstęgi Moebiusa czyli butelka Kleina, • 2-sfera z doklejoną rączką czyli torus.
4. Powierzchnie o  $\chi = -1$ : • 2-sfera z jedną rączką i jedną dziurą czyli dziurawy torus, • 2-sfera z jedną rączką i jedną wstęgą Moebiusa, • 2-sfera z trzema wstęgami, • 2-sfera z dwoma wklejonymi wstęgami Moebiusa i jedną dziurą czyli dziurawa butelka Kleina, • 2-sfera z dwoma dziurami i jedną wstęgą Moebiusa, • 2-sfera z trzema dziurami.

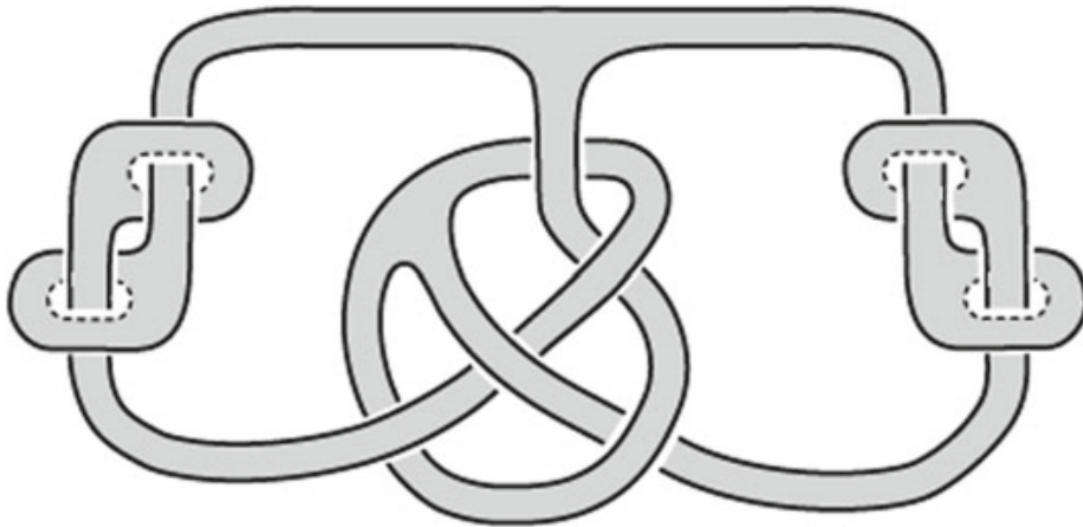
Sferę odróżnia, od innych tu powierzchni, jednośpójność.

## 9.5 Powierzchnie i macierz Seiferta dla splotu

Niech  $K$  będzie zorientowanym węzłem bądź splotem. *Powierzchnia Seiferta dla  $K$  jest to orientowalna, zwarta powierzchnia  $S_K$  z brzegiem który jest równy  $K$ , tzn.  $\partial S_K = K$ , oraz taka, że każda jej składowa spójności posiada niepusty brzeg. Przykład pokazany jest na Rysunku 9.5.*

**Twierdzenie 9.3** (Frankl, Pontrjagin, Seifert).

*Każdy splot posiada powierzchnię Seiferta*



Rysunek 9.5: Przykład powierzchni Seiferta dla węzła. [5]

## 9.6 Genus węzła

*Genusem węzła* (lub splotu)  $K$ , oznaczanym jako  $g(K)$  jest minimalny genus powierzchni Seiferta dla tego węzła (lub splotu).

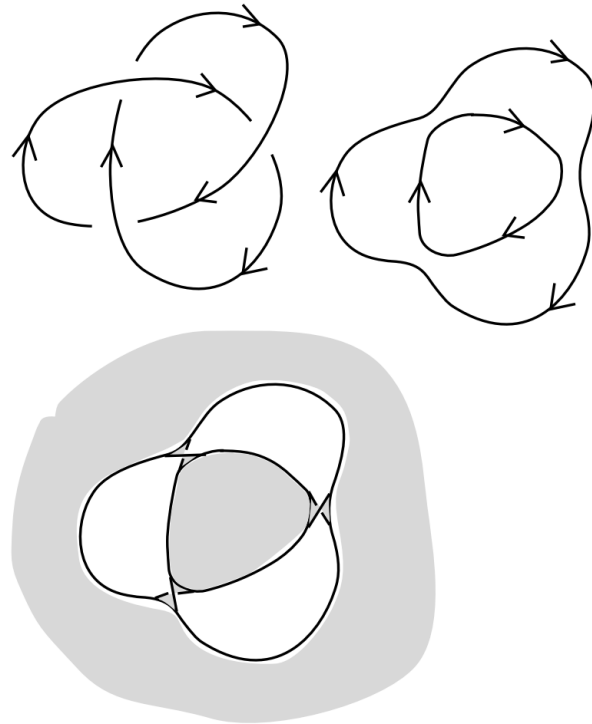
*Algorytm Seiferta:*

Niech  $K$  będzie zorientowanym węzłem lub splotem. Przesuwając  $K$  ambientalną izotopią, zakładamy, że  $K$  jest w ogólnym położeniu względem rzutu na płaszczyznę i rozważmy jego taki diagram  $D$ .

Przesuńmy więcej  $K$  o ambientalną izotopię tak, aby większość części  $K$  jest zawarta w płaszczyźnie  $xy$ , łuki górne  $K$  na skrzyżowaniach znajdowały się w górnej półprzestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , a łuki dolne były w dolnej podprzestrzeni. Przetnijmy każde skrzyżowanie, zastępując łuk górny i dolny łuku dwoma łukami w płaszczyźnie  $xy$ , jak przy wygładzeniu  $L_0$  w relacji motkowej wielomianów węzłowych.

Stosując wygładzanie na każdym skrzyżowaniu  $D$ , otrzymujemy zorientowany splot, powiedzmy  $L$ . Ten diagram dla  $L$  nie ma przecięć, a  $L$  zawiera się w płaszczyźnie  $xy$ . Zatem  $L$  jest trywialnym zorientowanym splotem. Każdy okrąg w  $L$  jest nazywany *okręgiem Seiferta*. Niech  $D$  będzie sumą wzajemnie rozłącznych zorientowanych dysków zanurzonych w dolnej półprzestrzeni tak, że  $\partial D = L$ . Dla każdego skrzyżowania  $D$ , przymocujmy pół-skreconą taśmę do  $D$ , w odpowiedni sposób skrecając aby odpowiadało dawnemu znakowi skrzyżowania przed wygładzeniem. Otrzymamy zwartą zorientowaną powierzchnię  $S$  z własnością  $\partial S = K$ .





Rysunek 9.6: Przykład zastosowania algorytmu Seiferta dla węzła  $3_1$ .  
[98]

Własności:

1.  $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2)$ .
2.  $K$  jest węzłem trywialnym wtedy i tylko wtedy gdy,  $g(K) = 0$ .
3. Niech  $K$  będzie węzłem. Jeżeli  $g(K) = 1$ , to  $K$  jest węzłem pierwszym.

Posługując się genusem węzła można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Suma dwóch nietrywialnych węzłów nie może dać węzła trywialnego.
2. Istnieje nieskończenie wiele różnych typów węzłów.
3. Każdy nietrywialny węzeł jest skończoną sumą węzłów pierwszych.

**Twierdzenie 9.4** (Gabai). *Stosując algorytm Seiferta dla diagramu alternującego pewnego splotu otrzymujemy powierzchnię Seiferta o minimalnym genusie dla tego splotu.*

**Twierdzenie 9.5** (cyt. [21]). *Genus węzła torusowego  $T(r, s)$  dla  $r, s > 0$  wynosi*

$$g(T(r, s)) = \frac{1}{2}(r-1)(s-1).$$

## 9.7 Wielomian Alexandra z powierzchni Seiferta

Z powierzchni Seiferta  $S$  dla  $K$  możemy skonstruować macierz Seiferta  $V$  dla  $K$  następująco. Wybierając pętle  $c_i$  na  $S$  reprezentuje bazę dla pierwszej homologii dla  $S$ , gdzie  $H_1(S) \cong \mathbb{Z}^{2g}$  i wypychając te pętle w kierunku normalnym poza  $S$  tworząc wówczas dodatkowe pętle  $c_i^+$  daje to nam macierz  $V$  rozmiaru  $2g \times 2g$  zawierającą elementy równe indeksowi zaczepienia  $lk(c_i; c_j^+)$ .

Podczas gdy macierz  $V$  zwana *macierzą Seiferta* sama w sobie nie jest niezmiennikiem węzła  $K$ , to  $V$  można użyć do skonstruowania wielomianu Alexandra następująco.

$$\Delta_K(t) = \det(V^T - tV).$$

Można otrzymać zatem też wyznacznik węzła  $\det(K) = |\det(V + V^T)|$ .

## 9.8 Sygnatura

Jeśli  $V$  jest macierzą Seiferta splotu  $L$ , to *sygnaturą* splotu  $L$ , oznaczaną  $\sigma(L)$  nazywamy algebraiczną sygnaturę macierzy  $V + V^T$ .

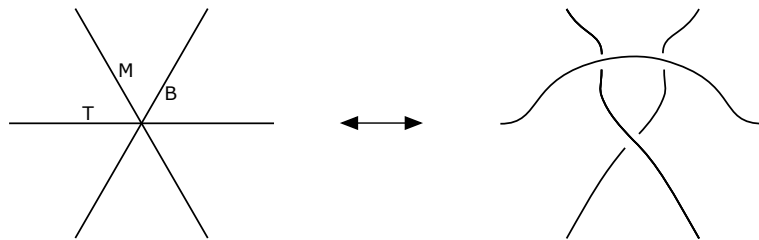
Własności:

1.  $\sigma(-L) = \sigma(L)$
2.  $\sigma(\bar{L}) = -\sigma(L)$
3.  $\sigma(L_1 \# L_2) = \sigma(L_1) + \sigma(L_2)$
4. Jeśli  $K$  jest węzłem, to  $\sigma(K)$  jest liczbą parzystą.
5. Jeśli  $L$  jest splotem zwierciadlanym, to  $\sigma(L) = 0$ .

# Rozdział 10

## Węzły i sploty na diagramach z punktami potrójnymi

Wiemy, co najmniej od obserwacji V.F.R. Jonesa z 1999 r. (*Planar Algebras I* [82]), że każdy węzeł i splot posiada diagram, na którym w każdym z jego wielokrotnych punktów na płaszczyźnie mogą się przecinać dokładnie trzy nici parami poprzecznie.



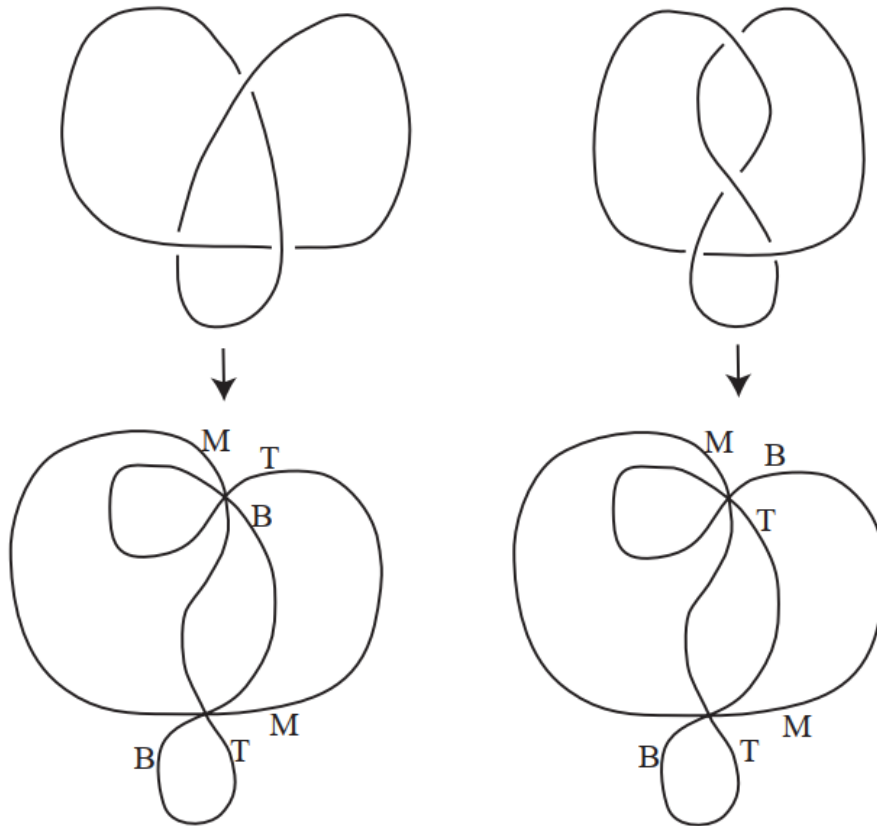
Rysunek 10.1: Utworzenie i dekompozycja potrójnego skrzyżowania.

Rzutowanie węzła lub splotu  $K \subset \mathbb{R}^3$  jest jego obrazem w standardowym rzutowaniu  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (lub w 2-sferę) tak, że ma tylko skończoną liczbę samoprzebieć, zwanych *punktami wielokrotnymi*, a w każdym punkcie wielokrotnym każda para jej *nici* (nić to fragment łuku, który biegnie przez skrzyżowanie) jest względem siebie poprzeczna.

Jeśli każdy wielokrotny punkt projekcji ma krotność trzy, to nazywamy to rzutowanie *rzutowaniem potrójnego przecięcia*. *Potrójne skrzyżowanie* to skrzyżowanie trzech nici każdą z jedną etykietą spośród  $T, M, B$  (od wyrazów: top, middle, bottom).

*Diagramem potrójnych skrzyżowań* jest rzutowaniem potrójnego przecięcia takim, że każdy z jego punktów potrójnych jest potrójnym skrzyżowaniem, oraz takim że  $\pi^{-1}$  nici oznaczonej  $T$  (w sąsiedztwie tego punktu potrójnego) znajduje

się na górze nici odpowiadającej nici oznaczonej  $M$ , a ta ostatnia nić znajduje się na górze nici odpowiadającej nici oznaczonej  $B$  (patrz Rysunek 10.1). Przykłady diagramów potrójnych skrzyżowań z diagramów (klasycznego) podwójnych skrzyżowań przedstawiono na Rysunku 10.2.

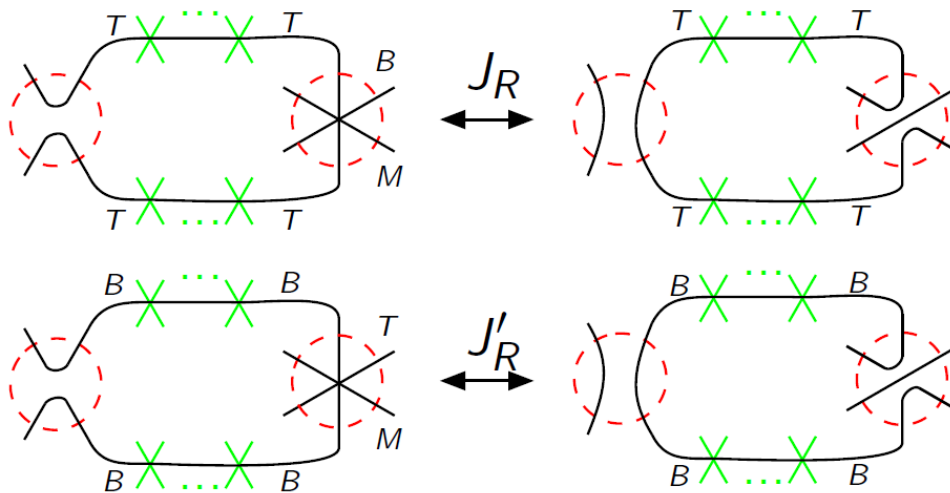


Rysunek 10.2: Najprostsze nietrywialne diagramy potrójnych skrzyżowań. [6]

*Indeks potrójnych skrzyżowań* węzła lub splotu  $K$ , oznaczona jako  $c_3(K)$ , jest najmniejszą liczbą potrójnych skrzyżowań dla dowolnego diagramu potrójnych skrzyżowań dla  $K$ . *Minimalny diagram potrójnych skrzyżowań* węzła lub splotu  $K$  jest diagramem potrójnych skrzyżowań dla  $K$ , który ma dokładnie  $c_3(K)$  potrójnych skrzyżowań.

*Naturalna orientacja* (patrz równoważna definicja w [4]) na diagramie potrójnych skrzyżowań to taka orientacja każdego ogniwa tego splotu, że w każdym skrzyżowaniu nici są zorientowane do wewnątrz-na zewnątrz-do wewnątrz-na zewnątrz-do wewnątrz-na zewnątrz, kiedy okrążamy skrzyżowanie. Mamy ciekawą obserwację. Każda orientacja diagramu potrójnych skrzyżowań otrzymanego z zorientowanego węzła jest orientacją naturalną (zob. [4]).

W [4] pokazano, że zestaw pięciu typów ruchów na diagramach potrójnych



Rysunek 10.3: Ruchy typu-J.

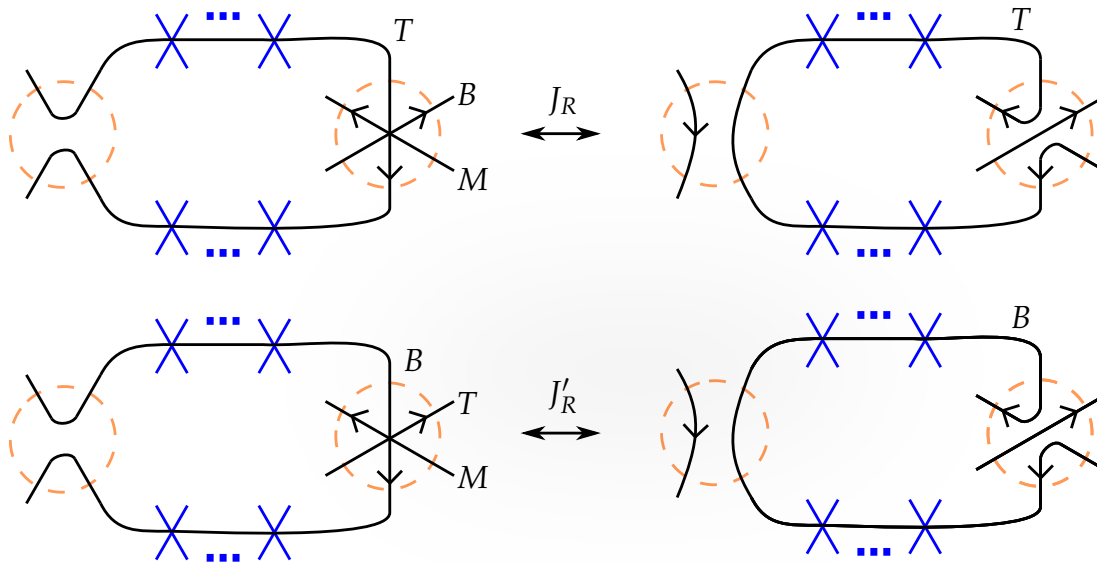
punktów (1-ruchy, 2-ruchy, ruchy punktu bazowego, ruchy pasma i ruchy trywialnego przetrzucenia) są wystarczające do przejścia między dowolnymi dwoma diagramami tego samego splotu (z dokładnością do pewnej równoważności).

W pracy napisanej przez autora ze swoim uczniem [73] zmniejszyliśmy liczbę ruchów (np. ruch punktu bazowego wynika z pozostałych ruchów). Wprowadzając ruchy typu-J udowadniamy, że zbiór wszystkich pięciu wspomnianych ruchów jest generowany przez dwa rodzaje ruchów (ruch typu-J i ruch trywialnego przetrzucenia). Tak więc dwa diagramy potrójnych skrzyżowań dla węzłów są powiązane sekwencją wyłącznie ruchów typu-J (patrz Rysunek 10.3), wtedy i tylko wtedy, gdy definiują ten sam typ węzła. Dalej w tej pracy systematycznie generujemy rzutowania węzłów i splotów pierwszych, a następnie klasyfikujemy wszystkie węzły i sploty pierwsze z indeksem potrójnych krzyżowań równym co najwyżej cztery.

Znamy też minimalny zbiór zorientowanych ruchów łączących diagramy potrójnych skrzyżowań tego samego zorientowanego węzła.

**Twierdzenie 10.1** (J. [77]). *Dwa zorientowane diagramy potrójnych skrzyżowań dla węzłów są powiązane sekwencją zorientowanych ruchów  $J_R$  i  $J'_R$  (zob. Rysunek 10.4) oraz sferyczną izotopią, wtedy i tylko wtedy, gdy definiują ten sam typ węzła.*

W ruchu  $J_R$  może być skończenie wiele potrójnych skrzyżowań (tutaj zaznaczonych na niebiesko), tak że dla każdego potrójnego skrzyżowania łuk najbliższy literze  $T$  zawsze leży na górze. W ruchu  $J'_R$ , który jest ruchem lustrzanym do  $J_R$ , może być skończenie wiele potrójnych skrzyżowań (tu pokolorowanych na niebiesko) takich, że dla każdego potrójnego skrzyżowania łuk, najbliższy literze  $B$ , leży zawsze na spodzie. Orientacje niebieskich łuków są określone przez



Rysunek 10.4: Minimalny zbiór ruchów na zorientowanych diagramach potrójnych skrzyżowań.

właściwość naturalnej orientacji.

Mamy następujące wartości indeksu potrójnych skrzyżowań dla nieskończonej rodziny węzłów i splotów (patrz [3]). Dla splotów torusowych  $L = T(2, 2n)$  mamy  $c_3(L) = n$ . Dla splotów torusowych  $L = T(3, 3n)$  mamy  $c_3(L) = 2n$ . Dla węzłów skręconych  $K = J(2, n)$  mamy  $c_3(K) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1$ .

Istnieją ograniczenia dolna na indeks potrójnych skrzyżowań: z użyciem (klasycznego) indeksu skrzyżowaniowego  $c_3(L) \geq \frac{1}{3}c(L)$ , oraz gdy  $L$  jest alternującym splotem wówczas  $c_3(L) \geq \frac{1}{2}c(L)$  (zobacz [3]); z użyciem indeksu warokozowego  $c_3(L) \geq b(L) - 1$  (gdzie  $L$  jest nierozszczepialnym splotem, zobacz [117]).

Znana jest nierówność między genusem  $g$  splotu  $L$ , a *genusem kanonicznym*  $g_c$  (tj. najmniejszemu genusowi orientowalnej powierzchni której brzegiem jest dany węzeł lub splot otrzymanej w wyniku algorytmu Seiferta) i jego liczbie skrzyżowaniowej, mianowicie  $c(L) \geq 2 \cdot g_c(L) \geq 2 \cdot g(L)$ . Łącząc powyższe nierówności widzimy, że  $c_3(L) \geq \frac{2}{3} \cdot g_c(L)$ . Autor poprawił tę dolną granicę w następujący sposób.

**Twierdzenie 10.2** (J. [75]). *Niech  $L$  będzie węzłem lub splotem, wówczas:*

$$c_3(L) \geq 2 \cdot g_c(L) + r(L) - 1.$$

Jako zastosowanie pokazano również, że to ograniczenie jest wystarczająco sil-

ne, aby uzyskać indeks potrójnych skrzyżowań dla wszystkich węzłów torusowych  $c_3(T(p, q)) = (p - 1)(q - 1)$  i wielu innych węzłów (w tym tzw. dodatnich warkoczy) i ich sum spójnych.

Przedstawiamy następującą tabelę znanych wartości indeksu potrójnych skrzyżowań dla węzłów pierwszych (do wartości 8 tego niezmiennika), która jest kombinacją wyników z prac [73, 75, 77, 78].

Tabela 10.1: Indeks potrójnych skrzyżowań węzłów pierwszych.

$c_3$	węzły
2	$3_1, 4_1$ .
3	$5_2, 6_1$ .
4	$5_1, 6_2, 6_3, 7_2, 7_4, 7_6, 7_7, 8_1, 8_3, 8_{12}, 8_{20}, 8_{21}, 9_{42}, 9_{44}, 9_{45}, 9_{46}, 9_{48}, 10_{132}, 10_{136}, 10_{137}, 10_{140}, 11n_{38}, 11n_{139}, 12n_{462}$ .
5	$7_3, 7_5, 8_4, 8_6, 8_8, 8_{11}, 8_{13}, 8_{14}, 8_{15}, 9_2, 9_5, 9_8, 9_{12}, 9_{14}, 9_{15}, 9_{19}, 9_{21}, 9_{25}, 9_{35}, 9_{37}, 9_{39}, 9_{41}, 9_{49}, 10_1, 10_3, 10_{13}, 10_{35}, 10_{58}, 10_{129}, 10_{130}, 10_{131}, 10_{133}, 10_{135}, 10_{144}, 10_{145}, 10_{146}, 10_{147}, 10_{162}, 10_{164}, 10_{165}, 11n_1, 11n_3, 11n_{12}, 11n_{17}, 11n_{18}, 11n_{20}, 11n_{28}, 11n_{29}, 11n_{49}, 11n_{62}, 11n_{63}, 11n_{68}, 11n_{79}, 11n_{83}, 11n_{91}, 11n_{100}, 11n_{101}, 11n_{102}, 11n_{113}, 11n_{114}, 11n_{116}, 11n_{117}, 11n_{123}, 11n_{132}, 11n_{140}, 11n_{141}, 11n_{142}, 11n_{162}, 11n_{170}, 12n_{11}, 12n_{13}, 12n_{25}, 12n_{46}, 12n_{48}, 12n_{49}, 12n_{65}, 12n_{121}, 12n_{145}, 12n_{200}, 12n_{274}, 12n_{282}, 12n_{310}, 12n_{311}, 12n_{323}, 12n_{358}, 12n_{359}, 12n_{414}, 12n_{442}, 12n_{443}, 12n_{452}, 12n_{478}, 12n_{523}, 12n_{582}, 12n_{608}, 12n_{838}, 13n_{469}, 13n_{1021}, 13n_{1475}, 13n_{1482}, 13n_{1513}, 13n_{1817}, 13n_{2067}, 13n_{2148}, 13n_{2328}, 13n_{2527}, 13n_{3158}, 13n_{3523}, 13n_{3594}, 13n_{3596}, 13n_{3600}, 13n_{3602}, 13n_{3617}, 14n_{10417}, 14n_{11995}, 14n_{12152}, 14n_{12440}, 14n_{15687}, 14n_{16441}$ .
6	$7_1, 8_2, 8_5, 8_7, 8_9, 8_{10}, 8_{16}, 8_{17}, 8_{18}, 8_{19}, 9_{23}, 9_{28}, 9_{31}, 11a_{13}, 11a_{59}, 11a_{61}, 11a_{65}, 11a_{98}, 11a_{103}, 11a_{145}, 11a_{166}, 11a_{195}, 11a_{201}, 11a_{209}, 11a_{210}, 11a_{211}, 11a_{214}, 11a_{218}, 11a_{219}, 11a_{226}, 11a_{228}, 11a_{229}, 11a_{230}, 11a_{247}, 11a_{343}, 12a_{197}, 12a_{482}, 12a_{690}, 12a_{691}, 12a_{803}, 12a_{1124}, 12a_{1166}, 12a_{1202}, 12a_{1287}, (\dots)$
7	$14a_{12741}, 14a_{16442}, 14a_{17385}, 14a_{17730}, 14a_{18053}, 14a_{19429}, (\dots)$
8	$9_1, 10_2, 10_5, 10_9, 10_{17}, 10_{46}, 10_{47}, 10_{48}, 10_{62}, 10_{64}, 10_{79}, 10_{82}, 10_{85}, 10_{91}, 10_{94}, 10_{99}, 10_{100}, 10_{104}, 10_{106}, 10_{109}, 10_{112}, 10_{116}, 10_{118}, 10_{123}, 10_{124}, 10_{139}, 10_{152}, (\dots)$

# Rozdział 11

## Nierówności pomiędzy niezmiennikami całkowitoliczbowymi

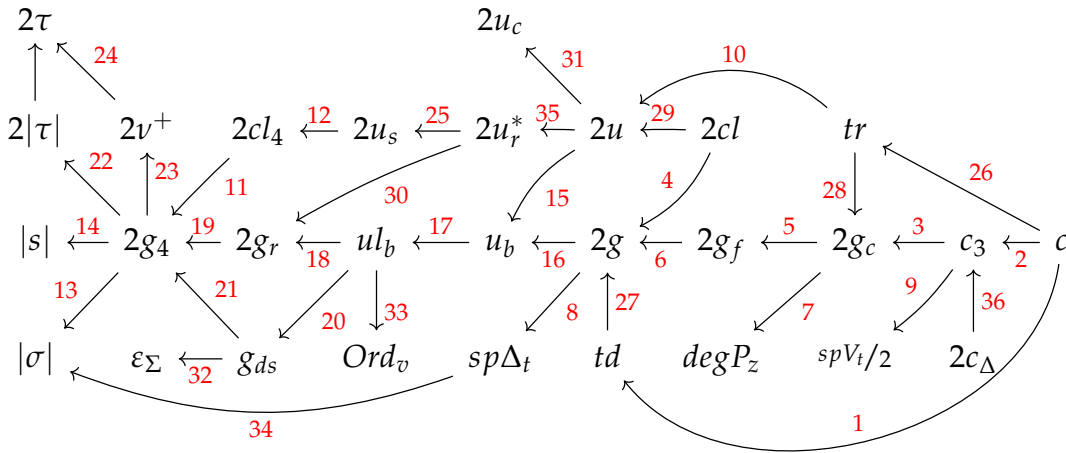
Podajemy tutaj przegląd informacji o znanych nierównościach między klasycznymi niezmiennikami węzłów o wartościach całkowitoliczbowych. Podajemy wizualny graf relacji, przykłady pokazujące, że niektóre niezmienniki są nieporównywalne w ogólności, oraz pokazujemy wybrane relacje, które nie są rozstrzygnięte z propozycją kierunku możliwej nierówności.

Przedstawiamy graf wybranych nierówności pomiędzy niezmiennikami dla dowolnego węzła  $K \leftrightarrow S^3$ . Na pierwszym diagramie, pokazanym na Rysunku 11.1, strzałka  $\rightarrow$  oznacza  $\geq$ . Na drugim diagramie, pokazanym na Rysunku 11.2, strzałka z podwójnymi grotami  $\leftrightarrow$  oznacza, że są przykłady węzłów, w których mamy relację  $>$  i przykłady węzłów, w których mamy  $<$  relacja. Strzałki  $\rightarrow$  z etykietą *conj.* to relacje, w których nie znamy przykładów, w których moglibyśmy mieć odwrotną relację  $<$  (więc przypuszczamy że te zaznaczone relacje zachodzą w pokazaną stronę).

Dokładne definicje tych niezmienników i pokazane nierówności można znaleźć w następujących pozycjach.

Relacja 1 w [34], 2, 9 w [3], 3 w [74], 5 w [103], 6 w [111], 7 w [112], 8 w [48], 4, 11, 19, 25, 29, 35, 30 w [146], 26 w [52], 13 w [113], 14 w [128], 17, 18, 33 w [85], 15, 16 w [59], 20, 21 w [89], 22 w [119], 23, 24 w [57], 12, 31 w [118], 27 w [144], 10, 28 w [55], 32 w [1], 34 w [40], 36 w [78].

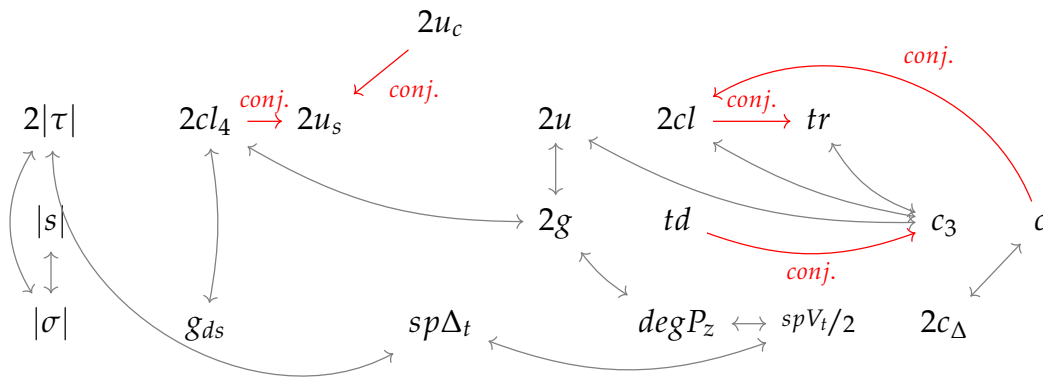




Rysunek 11.1: Relacje I

W grafach na Rysunkach 11.1–11.2, oznaczone niezmienniki to w rozwinięciu w j. angielskim (dla łatwiejszego odszukania w literaturze) znane są jako:

$c$  - the crossing number (liczba skrzyżowaniowa),  $c_3$  - triple crossing index (indeks potrójnych skrzyżowań),  $c_\Delta$  - the delta-crossing number,  $g$  - the (Seifert) three-genus (rodzaj/genus węzła),  $g_f$  - the free genus,  $g_c$  - the canonical genus,  $u$  - the unknotting number (liczba rozwiązująca),  $u_b$  - the band-unknotting number,  $u_l$  - the band-unlinking number,  $g_4$  - the slice genus,  $g_r$  - the ribbon slice genus,  $g_{ds}$  - the doubly slice genus,  $\sigma$  - the knot signature (sygnatura),  $\tau$  - the Ozsvath-Szabo's Tau-Invariant,  $s$  - the Rasmussen's s-invariant,  $sp\Delta_t$  - the span of the Alexander polynomial  $\Delta(t)$  (rozpiętość wielomianu Alexandera),  $spV_t$  - the span of the Jones polynomial  $V(t)$  (rozpiętość wielomianu Jonesa),  $degP_z$  - the z-degree of the HOMFLYPT polynomial  $P(v, z)$  (najstarsza potęga z wielomianie HOMFLYPT),  $cl_4$  - the 4D clasp number,  $cl$  - the clasp number,  $v^+$  - the Hom and Wu's invariant,  $u_s$  - the slicing number,  $td$  - the skein tree depth (głębokość drzewa motkowego),  $tr$  - the trivializing number,  $u_c$  - the concordance unknotting number,  $u_r^*$  - the weak ribbon unknotting number,  $\varepsilon_\Sigma$  - the "double-cover" epsilon invariant,  $Ord_v$  - the torsion order.



Rysunek 11.2: Relacje II

Następujące niezmienniki nie mogą być powiązane ze sobą nierównością dla dowolnego węzła w ogólności.

1.  $u$  i  $g$ , na przykład  $u(6a2) < g(6a2)$ ,  $u(7a6) > g(7a6)$ ;
2.  $c_3$  i  $2cl$ , na przykład  $c_3(9a40) < 2cl(9a40)$ ,  $c_3(5a1) > 2cl(5a1)$ ;
3.  $c_3$  i  $2u$ , na przykład  $c_3(9a40) < 2u(9a40)$ ,  $c_3(5a1) > 2u(5a1)$ ;
4.  $|\sigma|$  i  $|s|$ , na przykład  $|\sigma(10n13)| < |s(10n13)|$ ,  $|\sigma(9n4)| > |s(9n4)|$ ;
5.  $|\sigma|$  i  $2|\tau|$ , na przykład  $|\sigma(10n13)| < 2|\tau(10n13)|$ ,  $|\sigma(9n4)| > 2|\tau(9n4)|$ ;
6.  $g_{ds}$  i  $2cl_4$ , na przykład  $g_{ds}(7a6) < 2cl_4(7a6)$ ,  $g_{ds}(6a3) > 2cl_4(6a3)$ ;
7.  $cl_4$  i  $g$ , na przykład  $cl_4(6a2) < g(6a2)$ ,  $cl_4(9a36) > g(9a36)$ ;
8.  $spV_t/2$  i  $sp\Delta_t$ , na przykład  $spV_t(7a7)/2 < sp\Delta_t(7a7)$ ,  $spV_t(7a4)/2 > sp\Delta_t(7a4)$ ;
9.  $spV_t/2$  i  $degP_z$ , na przykład  $spV_t(6a1)/2 < degP_z(6a1)$ ,  $spV_t(6a3)/2 > degP_z(6a3)$ ;
10.  $tr$  i  $c_3$ , na przykład  $tr(9a36) < c_3(9a36)$ ,  $tr(9n8) > c_3(9n8)$ ;
11.  $sp\Delta_t$  i  $2|\tau|$ , na przykład  $sp\Delta_t(12n293) < 2|\tau(12n293)|$ ,  $sp\Delta_t(4a1) > 2|\tau(4a1)|$ ;
12.  $2c_\Delta$  i  $c$ , na przykład  $2c_\Delta(3a1) < c(3a1)$ ,  $2c_\Delta(9a31) > c(9a31)$ ;
13.  $2g$  i  $degP_z$ ,  $2g(K15n14891) > degP_z(K15n14891)$ , dla  $2g < degP_z$  zob. [112].

## **Część II**

# **Węzły i sploty powierzchniowe**

## Rozdział 12

# Zawężłone powierzchnie w czteroprzestrzeni

Niech  $F$  oznacza zamkniętą powierzchnię, tzn. zwartą dwuwymiarową rozmaitość bez brzegu. Jeśli inaczej nie zaznaczymy, dana powierzchnia może być nieorientowalna, posiadać niezerowy rodzaj (genus), nawet może być niespójna. Każda taka powierzchnia zanurza się w  $\mathbb{R}^4$ . Obraz zanurzenia homeomorficznego  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^4$  nazywamy *zawężłoną powierzchnią*, dodatkowo  $F$  nazwijmy *bazową powierzchnią* dla niej.

Z twierdzenia klasyfikującego powierzchnie wiemy, że bazowa powierzchnia to topologicznie element z rodziny składającej się z: sfery  $S^2$ , skończonej sumy spójnej torusów  $T^2$ , skończonej sumy spójnej rzeczywistych płaszczyzn rzutowych  $P^2$  oraz rozłącznej sumy ich wszelakich skończonych kombinacji.

Czasem dla podkreślenia, że bazowa powierzchnia może być niespójna będziemy zamiast terminu *zawężłona powierzchnia*, używać sformułowania *splot powierzchniowy*. Natomiast aby zaznaczyć, że bazowa powierzchnia jest spójna będziemy mówić *węzeł powierzchniowy*. Zawężłoną powierzchnię nazywamy *2-węzłem*, gdy jest to zawężłona sfera  $S^2$ .

Dwie zawężłone powierzchnie są *równoważne* (mają ten sam typ), gdy istnieje homeomorfizm zachowujący orientację  $\mathbb{R}^4$  na siebie, przeprowadzający jedną powierzchnię na drugą.

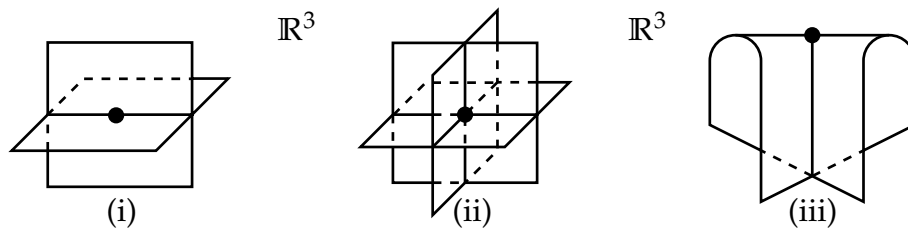
**Twierdzenie 12.1** (cyt. [147]). *Dwie zawężłone powierzchnie są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy są ambientalnie izotopijne.*

Założmy, że mamy powierzchnię  $F$  oraz przekształcenie  $g : F \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Zbiór *dwupoziomowy*  $\Gamma$  jest to topologiczne domknięcie w  $F$  zbioru  $\{p \in F : |g^{-1}(g(p))| > 1\}$ . Natomiast *zbiór punktów podwójnych* to  $g(\Gamma)$  oznaczany u nas

również jako  $\Gamma^*$ .

Mówimy, że  $g(F)$  jest w *położeniu ogólnym*, gdy zbiór punktów podwójnych składa się z punktów, których otoczenia (jak na Rysunku 12.1) są lokalnie homeomorficzne z:

- (i) dwoma poprzecznie przecinającymi się kawałkami płaszczyzny,
- (ii) trzema poprzecznie przecinającymi się kawałkami płaszczyzny,
- (iii) tzw. *parasolem Whitneya*.



Rysunek 12.1: Otoczenia punktów osobliwych w  $\mathbb{R}^3$ . [141]

Punkty odpowiadające przypadkom (i), (ii), (iii) nazywamy odpowiednio: *punkt podwójny*, *punkt potrójny* oraz *punkt rozgałęzienia*, przy przekształceniu  $g$ .

Określmy rzutowanie ortogonalne  $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  wzorem:

$$\pi(x_1, x_2, x_3, t) = (x_1, x_2, x_3).$$

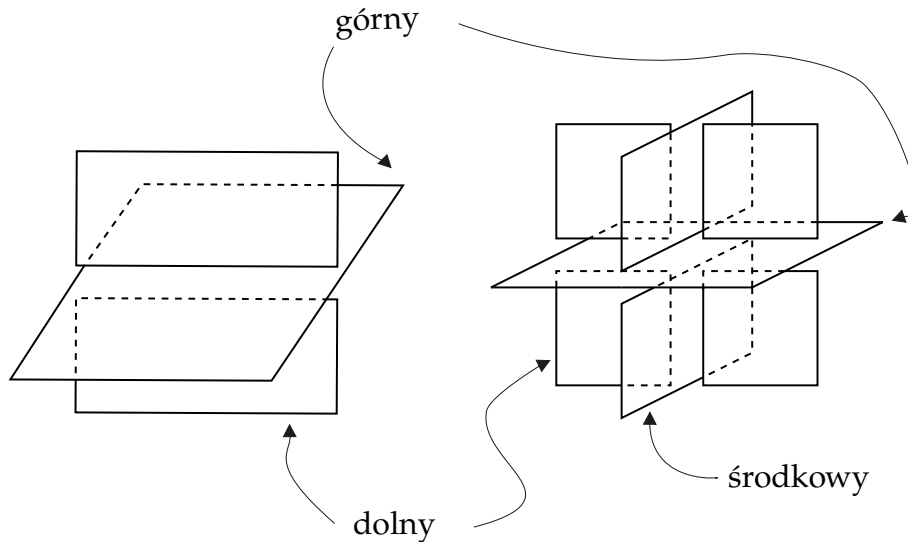
Przeciwbraz  $\pi^{-1}(\Gamma)$  zbioru punktów podwójnych nazywamy *zbiorem dwupoziomym*.

**Twierdzenie 12.2 ([131]).** *Dowolna zawężlona powierzchnia  $L_1$  jest równoważna (oraz leży dowolnie blisko) zawężlonej powierzchni  $L_2$  takiej, że  $\pi(L_2)$  jest w położeniu ogólnym.*

Nieformalnie oznacza to, że jeśli nie jest w położeniu ogólnym to możemy nią dowolnie mało „potrzęsnać” aby była, formalnie sprowadza się to do wybrania z przestrzeni wszystkich funkcji, takiej funkcji, która jest w położeniu ogólnym i aproksymuje wyjściową funkcję.

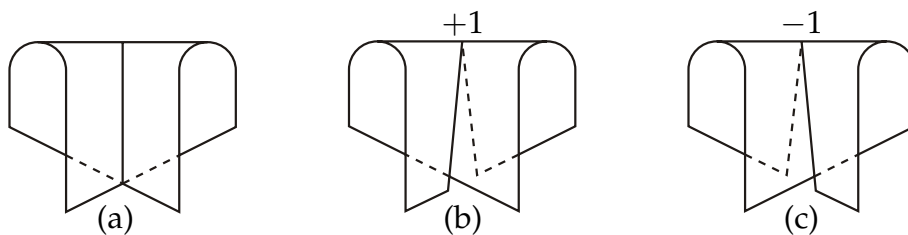
Będziemy zatem odtąd zakładać położenie ogólne obrazu rzutowania, ponieważ wtedy zbiór samoprzecięć jest tak prosty (w sensie wymiaru) jak to tylko możliwe.

Diagramem (przerywanym)  $D_K$  dla zawężonej powierzchni  $K$  nazywamy  $\pi(K)$  z dodatkową informacją o samoprzecięciu, oznaczaną za pomocą przerywania dolnego (względem zmiennej  $t$ ) kawałka powierzchni wzdłuż krzywej punktów podwójnych. Odpowiednie nazewnictwo dla otrzymanych kawałków płaszczyzny (górnny, środkowy bądź dolny) ilustruje Rysunek 12.2.



Rysunek 12.2: Poprzerywane fragmenty diagramu powierzchni. [136]

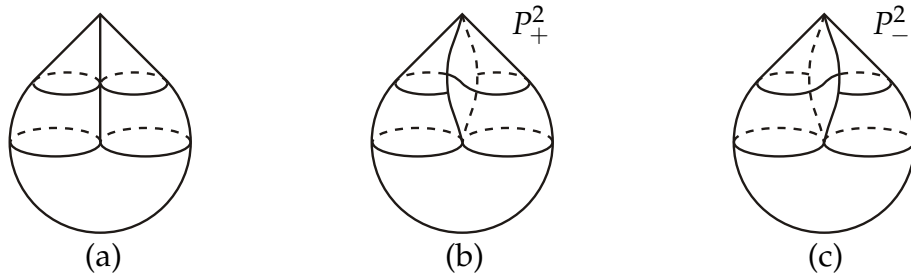
Punkt rozgałęzienia diagramu z otoczeniem jak przedstawiono na Rysunku 12.3(b) otrzymuje znak  $+1$ , natomiast punkt z Rysunku 12.3(c) otrzymuje znak  $-1$ . Suma znaków wzięta po wszystkich punktach rozgałęzienia diagramu, daje nam tak zwaną *normalną liczbę Eulera*  $e(K)$  zawężonej powierzchni  $K$ , która nie zależy od wyboru diagramu [25]. Zatem jest algebraicznym niezmiennikiem zawężonych powierzchni. To nie jest wprawdzie oryginalna definicja, lecz twierdzenie równoważne (Banchoff [19]), które pozwala nam zastąpić trudniejszą definicję.



Rysunek 12.3: Znak punktu rozgałęzienia. [135]

Zawężoną powierzchnię orientowalną nazywamy *trywialną*, gdy jest ona rów-

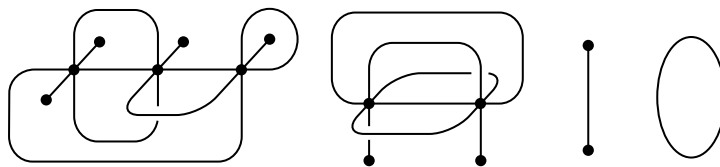
noważna zanurzonej powierzchni położonej w  $\mathbb{R}^3 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^4$ . Płaszczyznę rzutową  $P^2$  zawężoną w  $\mathbb{R}^4$  nazywamy trywialną, jeśli jest ona równoważna powierzchni, której rzutowanie do  $\mathbb{R}^3$  wygląda jak na Rysunku 12.4(a). Ponadto rozróżniamy ją na *dodatnią*, gdy jej diagram jest taki jak na Rysunku 12.4(b) i *ujemną* gdy jest to sytuacja z Rysunku 12.4(c). Zawężoną powierzchnię nieorientowalną nazywamy *trywialną*, gdy jest ona równoważna pewnej skończonej sumie spójnej trywialnych płaszczyzn rzutowych.



Rysunek 12.4: Różnie położone trywialne płaszczyzny rzutowe. [135]

Normalna liczba Eulera nieorientowalnego węzła powierzchniowego  $F$  może jedynie przyjmować wartości:  $2g, 2g - 4, \dots, 4 - 2g, -2g$ , gdzie  $g$  jest liczbą  $P^2$  składników spójnych  $F$ . Była to hipoteza Whitneya i udowodniona została przez Massey, później Kamada podał inny dowód tego twierdzenia w [86].

*DP graf* to rozłączna suma okręgów i grafów mających wierzchołki stopni jeden lub sześć. Wokół wierzchołka stopnia sześć możemy wyodrębnić trzy pary krawędzi tak, że każda dobrana para łączy się „na wprost” (tzn. otoczenie tego wierzchołka jest homeomorficzne z przecięciem się osi współrzędnych kartezjańskich w  $\mathbb{R}^3$  tak, że dobrane pary są współliniowe). Przykład DP grafu pokazany jest na Rysunku 12.5.



Rysunek 12.5: Przykład DP grafu. [141]

Widzimy, że każda powierzchnia w położeniu ogólnym w  $\mathbb{R}^3$  ma zbiór punktów podwójnych będący zanurzonym homeomorficznie (być może nawet nietrywialnie) DP grafem.

Na DP graf da się wprowadzić *BW orientację*, jeśli każda krawędź tego grafu jest zorientowana i w niewielkim otoczeniu każdego wierzchołka stopnia 6 spełnione są warunki:

1. dwie krawędzie w każdej z trzech dobranych par są obie zorientowane do tego wierzchołka lub obie od wierzchołka,
2. liczba krawędzi których orientacja wskazuje do wierzchołka jest równa dwa albo cztery.

Powierzchnia w położeniu ogólnym  $g : F \rightarrow \mathbb{R}^3$  podnosi się do zanurzonej powierzchni w  $\mathbb{R}^4$ , jeśli istnieje zanurzenie  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^4$  takie, że  $g = \pi \circ f$ . Takie zanurzenie nazywamy *podniesieniem*.

W przypadku klasycznym, każda pętla w położeniu ogólnym na płaszczyźnie ma podniesienie, co więcej ma podniesienie do trywialnego węzła w  $\mathbb{R}^3$ . W przypadku powierzchni już tak być nie musi, tzn. istnieją powierzchnie bez podniesienia, co będzie pokazane dalej.

**Lemat 12.3** ([136]). *Niech  $g : F \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie powierzchnią w położeniu ogólnym, wtedy  $g(F)$  dzieli  $\mathbb{R}^3$  na obszary które można pokolorować w szachownicę (tzn. dwukolorowo tak, że przyległe obszary mają inne kolory).*

*Dowód.* Ustalmy  $p_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus g(F)$ . Dla każdego obszaru  $D \subset \mathbb{R}^3 \setminus g(F)$  bierzemy punkt  $p \in D$  i krzywą regularną  $\gamma \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma_g$  (gdzie  $\Gamma_g$  to zbiór punktów podwójnych dla obrazu  $g$ ) łączącą  $p_0$  i  $p$  tak, że  $\gamma$  przecina  $g(F) \setminus \Gamma_g$  poprzecznie, skończoną liczbę razy. Niech  $\gamma'$  będzie inną krzywą jak wyżej. Skoro  $H_1(\mathbb{R}^3) = 0$ , to  $\mathbb{Z}_2$ -liczba przecięcia pętli  $\gamma \cup (-\gamma')$  i  $g(F)$  w  $\mathbb{R}^3$  wynosi zero. Zatem parzystość liczby  $\#(\gamma \cap g(F))$  nie zależy od wyboru krzywej  $\gamma$ . Teraz możemy pokolorować obszar  $D$  na czarno (biało), gdy  $\#(\gamma \cap g(F))$  jest liczbą parzystą (nieparzystą). W rezultacie otrzymujemy pokolorowany szachownicą zbiór  $\mathbb{R}^3 \setminus g(F)$ .  $\square$

Ustalmy zatem jedno, z dwóch możliwych, pokolorowań obszarów w  $\mathbb{R}^3$ .

Punkt rozgałęzienia nazywamy *czarny* ( $B$ ) (*biały* ( $W$ )), gdy otoczenie jego (jako parasola Whitneya) ma „wewnątrz parasola” kolor czarny (biały).

W otoczeniu punktu potrójnego wybieramy czarny obszar  $B$  (spośród czterech możliwych). Wybieramy wektory normalne  $v_1, v_2, v_3$  do odpowiednio: górnego, środkowego i dolnego kawałka płaszczyzny tak, że leżą w  $B$  i wskazują na  $B$ . Wtedy taki punkt potrójny nazywamy  *dodatni* ( $T_+$ ) jeśli orientacja trójki  $(v_1, v_2, v_3)$  zgadza się z orientacją  $\mathbb{R}^3$  (tzn. spełnia tzw. regułę prawej ręki). W przeciwnym przypadku jest to *ujemny* punkt potrójny ( $T_-$ ).

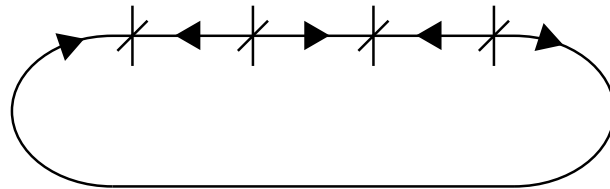


**Stwierdzenie 12.4** ([27, str. 9-11]). *Obraz odwzorowania w położeniu ogólnym powierzchni do  $\mathbb{R}^3$  podnosi się do zanurzenia w  $\mathbb{R}^4$ , wtedy i tylko wtedy, gdy da się go poprzerywać do diagramu przerywanego.*

Istnieje następujący warunek konieczny i dostateczny na istnienie podniesienia powierzchni, który korzysta wyłącznie ze zbioru punktów podwójnych, czyli DP grafu.

**Twierdzenie 12.5** ([136]). *Obraz odwzorowania w położeniu ogólnym powierzchni do  $\mathbb{R}^3$  podnosi się do zanurzenia w  $\mathbb{R}^4$ , wtedy i tylko wtedy, gdy na zbiór punktów podwójnych da się wprowadzić BW orientację.*

Ponieważ naprzeciwległe krawędzie w otoczeniu punktu potrójnego mają przeciwne orientacje względem BW-orientacji (Rysunek 12.6) mamy następujący wniosek.



Rysunek 12.6: Zmiana orientacji przy przejściu przez punkty potrójne.  
[141]

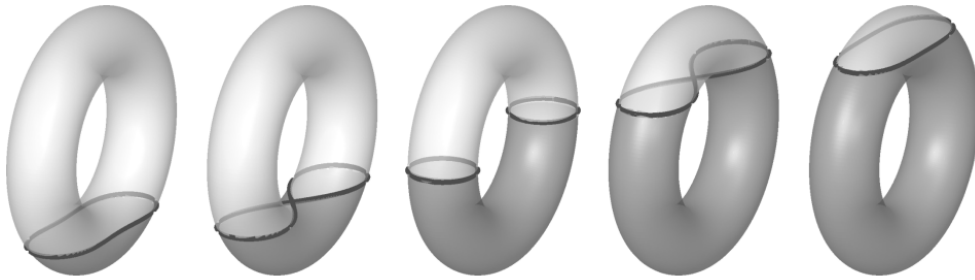
**Wniosek 12.6** ([136]). *Założmy, że DP graf  $\Gamma$  zawiera pętlę taką, że liczba elementów przeciwobrazu punktów potrójnych na niej jest nieparzysta. Wtedy każda powierzchnia w położeniu ogólnym w  $\mathbb{R}^3$  posiadająca taki zbiór punktów podwójnych  $\Gamma$  nie ma podniesienia.*

**Przykład 1.** Obraz płaszczyzny rzutowej  $P^2$  w położeniu ogólnym w  $\mathbb{R}^3$  mający zbiór punktów podwójnych będący bukietem trzech okręgów, realizowany jest przez tzw. powierzchnię Boya (Werner Boy był jedynym uczniem Hilberta zajmującym się geometrią).

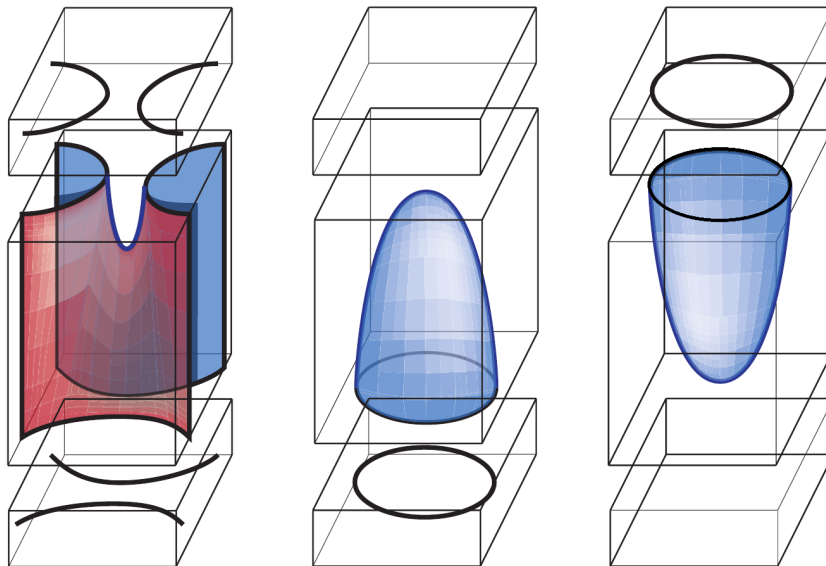
## 12.1 Filmy

Niech dana będzie zawężlona powierzchnia  $K$ , wybierzmy wektor  $v \in \mathbb{R}^4$ . Dla każdego  $t \in \mathbb{R}$  niech  $\mathbb{R}_t^3$  oznacza hiperpłaszczyznę prostopadłą do  $v$  i zawierającą punkt  $tv$ . Można w razie potrzeby zmienić nieznacznie  $v$ , tak aby dla

prawie każdego parametru  $t$  przekrój  $K_t = \mathbb{R}_t^3 \cap K$  był klasycznym splotem bądź pusty. Ponieważ powierzchnia bazowa dla  $K$  jest przestrzenią zwartą, to istnieje przedział  $[a, b]$  taki, że  $K \subset \bigcup_{t \in [a, b]} \mathbb{R}_t^3$ .



Rysunek 12.7: Cięcia torusa ustawionego wertykalnie. [90]

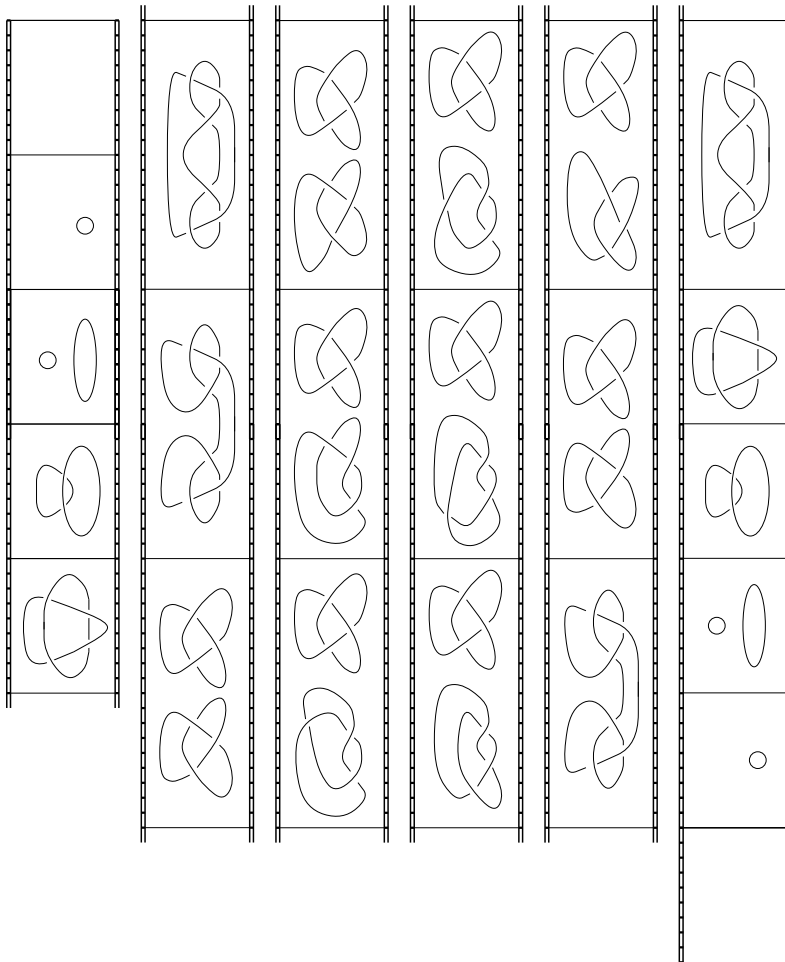


Rysunek 12.8: Punkty krytyczne. [11]

Niech  $p_v : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_v$  będzie rzutowaniem na prostą  $\mathbb{R}_v = \{tv \in \mathbb{R}^4 : t \in \mathbb{R}\}$ . Możemy założyć na podstawie teorii Morse'a, że krytyczne punkty  $p_v|_K : K \rightarrow \mathbb{R}_v$  są niezdegenerowane i przyjmują różne krytyczne wartości. W tym przypadku niech  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  będą krytycznymi wartościami w przedziale  $[a, b]$ . Niech  $a_i \in (t_{i-1}, t_i)$  oraz  $b_i \in (t_i, t_{i+1})$ , gdzie  $b_i < a_{i+1}$  dla  $i = 1, \dots, n$ . Umownie przyjmujemy  $t_0 = a, t_{n+1} = b$ . Wtedy  $\bigcup_{t \in [a_i, b_i]} K_t$  zawiera pojedynczy punkt krytyczny indeksu 0, 1 lub 2. Zobacz Rysunek 12.7.

Punkt krytyczny indeksu 0 to punkt *minimum*, odpowiadający pojawieniu się trywialnie zanurzonego okręgu; punkt krytyczny indeksu 1 to *punkt siodłowy*;

punkt krytyczny indeksu 2 to punkt *maksimum*, odpowiadający zniknięciu trywialnie zanurzonego okręgu (Rysunek 12.8). Rodzina  $\{K_t \subset \mathbb{R}_t^3\}_{t \in [a,b]}$  jest nazywana ruchomym obrazem lub krócej *filmem* dla  $K$ . Natomiast  $K_t$  to *klatka* tego filmu. Metoda ta została wprowadzona przez Foxa i J. Milnora i zaprezentowana w [44].



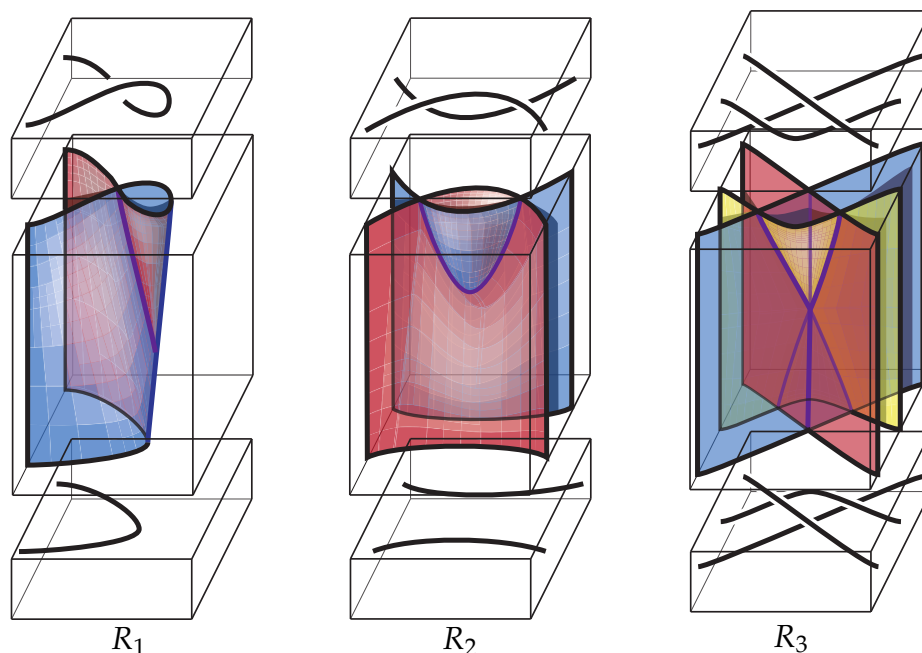
Rysunek 12.9: Klatki filmu dla zawężonego torusa. [27]

Każda zawężona powierzchnia daje nam film oraz z każdego filmu możemy zbudować odpowiadający mu splot powierzchniowy. Ponadto wiadomo, że wystarczy tylko skończona liczba klatek do opisu zawężonej powierzchni, zatem jedynie te się używa w praktyce i mówi o nich film (cyt. [24, str. 3]).

Przykład filmu dla powierzchni, przedstawiony jest na Rysunku 12.9. Należy zauważyć, że przejścia pomiędzy niektórymi klatkami są jedynie izotopią klasycznych splotów, są one jednak istotne i typ zawężenia powierzchni może

się zmienić uwzględniając jedynie te klatki pomiędzy którymi występuje punkt osobliwy.

**Stwierdzenie 12.7** ([27, str. 12]). *Przy rzutowaniu, I (odp. III) ruchowi Reidemeistera na klatkach filmu, odpowiada na diagramie punkt rozgałęzienia (odp. potrójny). Ukazuje to Rysunek 12.10.*



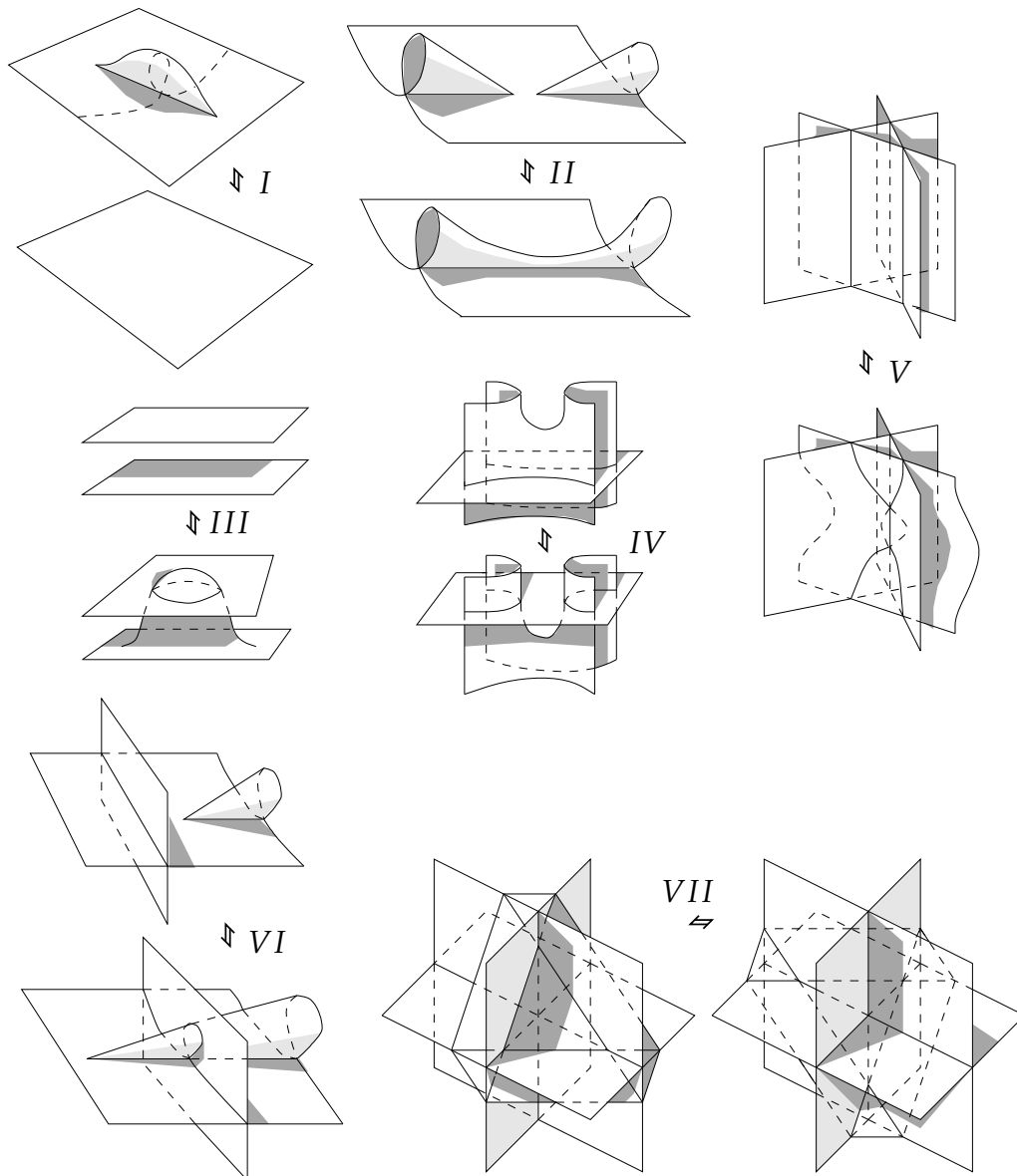
Rysunek 12.10: Odpowiedniość ruchów Reidemeistera z punktami osobliwymi przy rzutowaniu. [11]

## 12.2 Ruchy Rosemana

Zaprezentujemy teraz elementarne lokalne ruchy w  $\mathbb{R}^3$ , które charakteryzują równoważne sploty powierzchniowe.

**Twierdzenie 12.8** ([130]). *Dwa diagramy reprezentują równoważne sploty powierzchniowe wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich można otrzymać z drugiego za pomocą skończonej liczby ruchów wziętych z listy pokazanej na Rysunku 12.9 oraz izotopii diagramu w  $\mathbb{R}^3$ .*

Należy zauważyć, że pokazane wyżej tzw. *ruchy Rosemana* nie mają zaznaczonej informacji na samoprzecięciu, który kawałek powierzchni jest dolny a który



Rysunek 12.11: Ruchy Rosemana. [29]

górny. Dla prostoty jednak nie uwzględnia się podziału na różne możliwe przypadki.

Ponadto w powyższym twierdzeniu pokazano, że jest to wystarczający zestaw elementarnych ruchów, co nie oznacza że najprostszy, tzn. pewien z nich może dać się otrzymać z pozostałych (cyt. [130, str. 360]). Rzeczywiście według pracy [158] ruch II jest pewną kombinacją ruchów IV oraz I. Minimalny zestaw generujący ruchy został uzyskany w [99].

## 12.3 Grupa węzła oraz splotu powierzchniowego

Niech  $K$  będzie zawężoną powierzchnią w  $S^4$ . Niech  $N(K)$  oznacza otoczenie tubularne dla  $K$  (twierdzenia o otoczeniu tubularnym wiemy, że zawsze takie istnieje), czyli gładkie zanurzenie  $N : D^2 \times F$  takie, że dla każdego  $p \in F$  mamy  $N(0, p) = p$  i niech  $X = S^4 \setminus \text{int}(N(K))$ . Wówczas zbiór  $X$  nazywamy *zewnątrzem*  $K$ . Natomiast o grupie podstawowej  $\pi_1(X)$  skrótowo mówimy *grupa powierzchni*  $K$ .

Z klatek filmu dla zawężonej powierzchni  $K$  można wyczytać prezentację jej grupy. W każdej z klatek  $K \cap \mathbb{R}_t^3$  zadajemy orientację na każdy klasyczny splot. Wybieramy tak diagram dla  $K$  aby poszczególne dwie kolejne klatki filmu różniły się jedynie na niewielkim dysku, poprzez pojawienie się lub zniknięcie małego okręgu, bądź zmianie odpowiadającej punktowi siodłowemu.

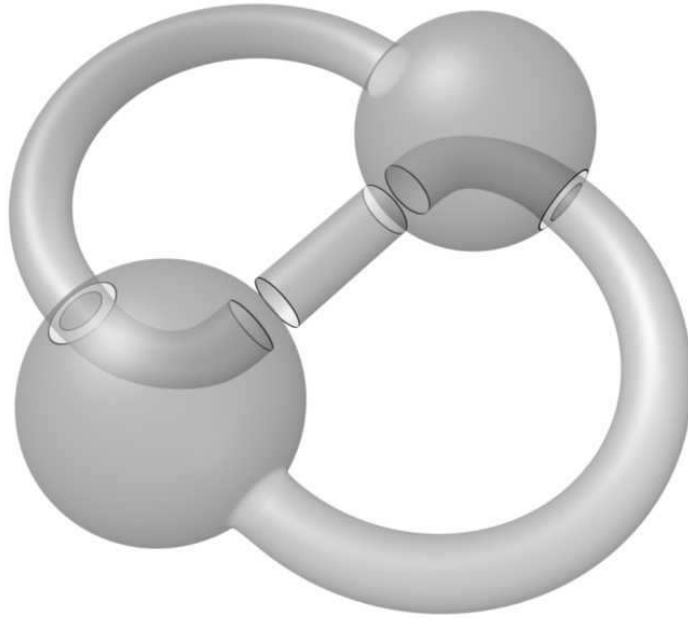
Grupa powierzchni  $K$  jest wówczas dana poprzez zastosowanie dobrze znanego twierdzenia van Kampena przy sklejanu ze sobą sąsiednich klatek  $K \cap \mathbb{R}_t^3$ . Dokładniej, jeśli punkt osobliwy  $(0, 0, 0, 0)$  leży w cięciu  $t = 0$ , to stosujemy dwukrotnie twierdzenie van Kampena do trzech zbiorów otwartych  $U \setminus K, W \setminus K$  oraz  $V \setminus K$ , gdzie  $U = \{(x, y, z, t) \mid t > \max(-\epsilon, -\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\}$ ,  $W = \{(x, y, z, t) \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 < \epsilon^2\}$ ,  $V = \{(x, y, z, t) \mid t < \min(\epsilon, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\}$ .

Konkretnie, jeśli  $\langle x_i \mid r_i \rangle, \langle y_i \mid s_i \rangle$  to prezentacje Wirtingera sąsiadujących klatek  $K \cap \mathbb{R}_a^3$  oraz  $K \cap \mathbb{R}_b^3$ , wtedy prezentacja dla grupy  $\pi_1 \left( (\cup_{t \in [a, b]} \mathbb{R}_t^3) \setminus \text{int}(N(K)) \right)$  dana jest poprzez  $\langle x_i, y_i \mid r_i, s_i, R_j \rangle$ , gdzie relacje  $R_j$  polegają na przyrównaniu generatorów odpowiadających im łuków diagramu. W przypadku siodła nowa relacja przyrównuje generatory biorące udział w tym przekształceniu, natomiast w przypadku pojawienia się okręgu nowy generator jest wprowadzany (cyt. [44, str. 133]).

## 12.4 Główne klasy obiektów

Jednym z dwóch głównych klas obiektów badań w teorii splotów dwuwymiarowych jest klasa powierzchni wstęgowych (przykład diagramu wstęgowego jest na Rysunku 12.12), zdefiniowana następująco.

Niech  $A = \Delta_1 \sqcup \dots \sqcup \Delta_k$  oraz  $B = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_l$  będą rozłącznymi sumami 3-dysków zanurzonych w  $\mathbb{R}^4$ . Każda składowa  $A$  jest nazywana bazą, a każda składowa  $B$  nazywana jest wstęgą. Sparametryzujmy każdą wstęgę  $B_i$  jako  $b_i : D^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^4$ . Załóżmy, że dla każdego  $i = 1, \dots, l$  spełniona jest równość  $\partial A \cap b_i(D^2 \times [0, 1]) = b_i(D^2 \times \partial[0, 1])$  oraz jeśli  $b_i(D^2 \times (0, 1))$  przecina pewną



Rysunek 12.12: Przykład diagramu powierzchni wstęgowej. [64]

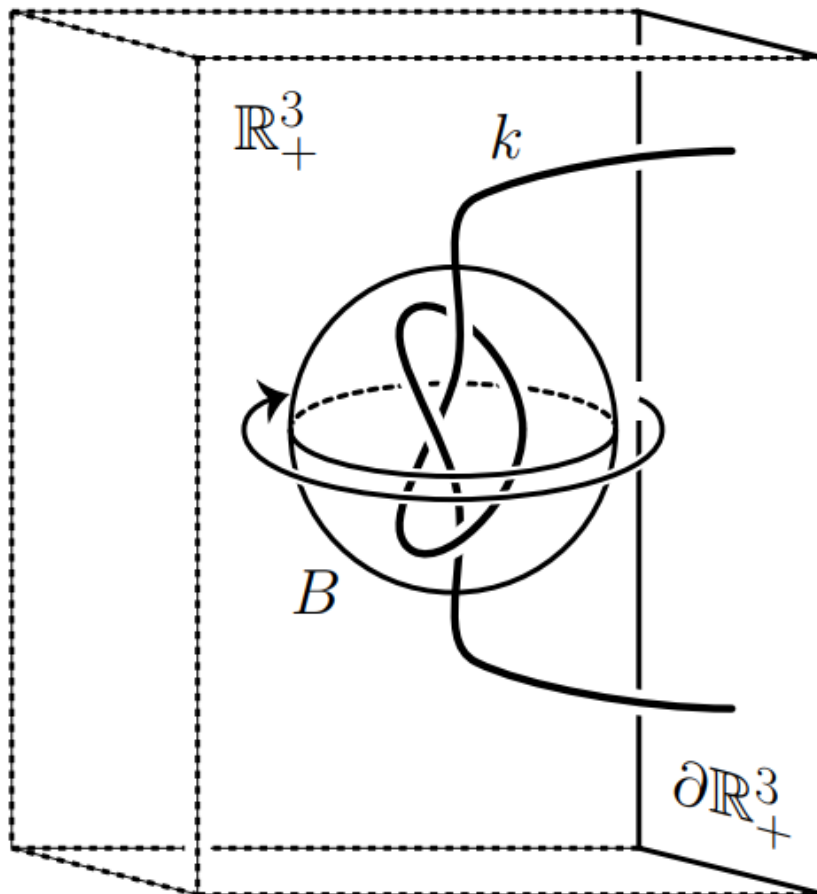
bazę  $\Delta_j$ , to ich przekrój jest równy  $b_i(D^2 \times \{t\})$  dla pewnego  $t \in (0, 1)$ . Wówczas zawężoną powierzchnię  $K$  nazywamy *wstęgową*, gdy jest ona postaci:

$$K = \left( \partial A \setminus \bigcup_{i=1}^l b_i(D^2 \times \partial[0, 1]) \right) \cup \bigcup_{i=1}^l b_i(\partial D^2 \times [0, 1]).$$

Drugą, nie mniej badaną klasą, jest rodzaj zawężonych powierzchni zwanych węzłami skrecono-okreconymi, zdefiniowanymi następująco.

Myślimy o  $\mathbb{R}^4$  jak o tzw. *dekompozycji otwartej książki*, czyli okręcenie (w ustalonym kierunku)  $\mathbb{R}_+^3$  wokół  $\mathbb{R}^2$ . Dla węzła klasycznego  $K$  bierzemy jego supł  $T$ , czyli zanurzony łuk w  $\mathbb{R}_+^3$ , o końcach będących różnymi punktami  $a, b \in \partial\mathbb{R}_+^3$  taki, że  $T \cup [a, b] \subset \mathbb{R}^3$  jest węzłem równoważnym z  $K$ . Wówczas ślad okręcenia  $T$  wokół  $\mathbb{R}^2$  z jednoczesnym skreconiem go (w ustalonym kierunku) podczas okręcania  $m$ -razy w kuli  $\mathbb{B}^3$ , nazywamy  *$m$ -skreconym-okreconym 2-węzłem* węzła  $K$  i oznaczamy przez  $\tau^m(K)$ .

Istotnie zawężona część supła  $T$  musi być jedynie we wspomnianej kuli  $B^3$ , natomiast ramiona supła znajdujące się poza kulą, nie zawężają się podczas dokonywania skręceń. Omawianą sytuację dla  $K = T(2, 3)$ , czyli tak zwanego trójlistnika, ilustruje Rysunek 12.13. Przykład filmu dla 2-skreconego-okreconego trójlistnika prezentuje Rysunek 12.14.



Rysunek 12.13: Intuicja pojęcia okręcenia ze skręceniami. [64]

**Twierdzenie 12.9** ([161]). *Mamy następujące własności:*

- (i)  $\tau^1(K)$  jest trywialnym 2-węzłem,
- (ii)  $\tau^{-m}(K) = \tau^m(K)$ ,

dla każdego węzła klasycznego  $K$  oraz  $m \in \mathbb{Z}$ .

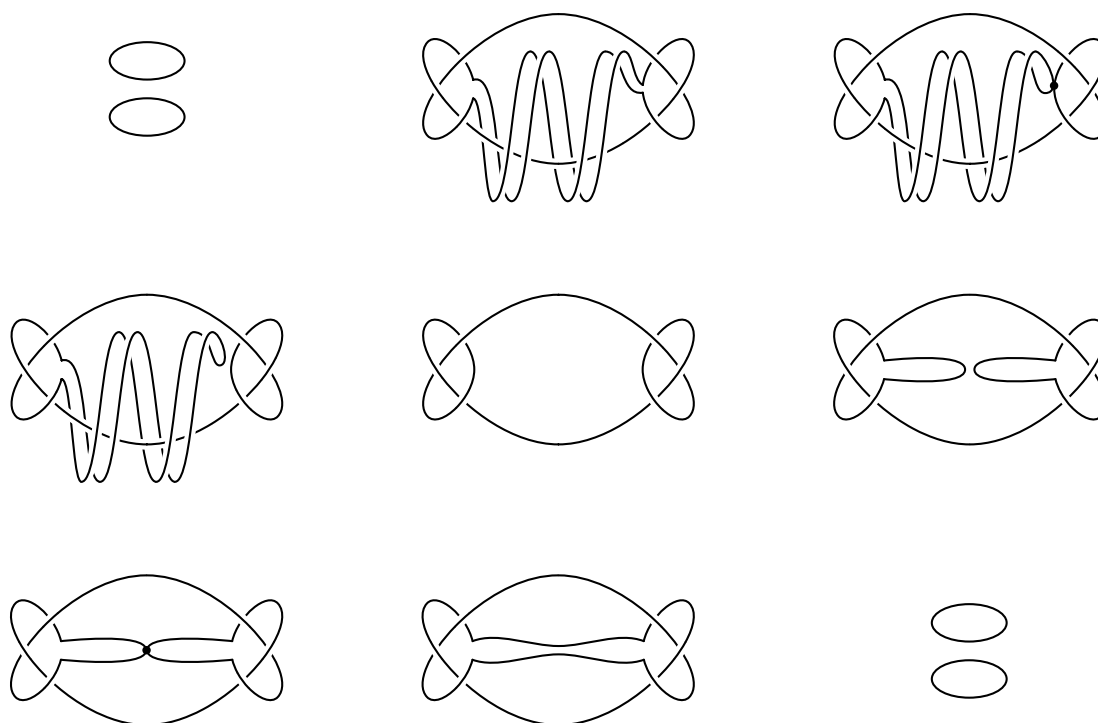
**Twierdzenie 12.10** ([106] w wersji dla powierzchni niezorientowanych). *Dla każdego węzła klasycznego  $K$  oraz  $m \in \mathbb{Z}$ , mamy następującą własność:*

- (i)  $(\tau^m(K))^* = \tau^m(K)$ ,

gdzie  $X^*$  oznacza wzięcie odbicia lustrzanego  $X$ .

Jeśli dwie zawężone powierzchnie są równoważne to ich zewnątrz są homeomorficzne.





Rysunek 12.14: Film dla 2-skręconego-okręconego trójlistnika. [64]

**Twierdzenie 12.11** (Gluck 1962). *Istnieją co najwyżej dwa nierównoważne 2-węzły z homeomorficznymi dopełnieniami. Okręcone 2-węzły (tzn. bez skręceń) oraz wstępowe 2-węzły są jednoznacznie wyznaczone przez swoje dopełnienia.*

**Twierdzenie 12.12** (Gordon 1976). *Istnieją dwa nierównoważne 2-węzły z homeomorficznymi dopełnieniami. Istnieje nieskończona rodzina skręconych-okręconych 2-węzłów które nie są jednoznacznie wyznaczone przez swoje dopełnienia.*

# Rozdział 13

## Minimalna liczba punktów potrójnych

*Minimalna liczba punktów potrójnych* splotu powierzchniowego  $F$ , oznaczona  $\mathcal{T}(F)$  jest to najmniejsza liczba punktów potrójnych przy rzutowaniach, spośród wszystkich splotów powierzchniowych równoważnych  $F$ .

Analogicznie definiujemy inny niezmiennik: *minimalną liczbę punktów rozgałęzienia*, oznaczaną jako  $\mathcal{B}(F)$ , która została zdeterminowana przez normalną liczbę Eulera, w następujący sposób.

**Twierdzenie 13.1** ([25]). *Dla węzła powierzchniowego  $F$ , zachodzi  $\mathcal{B}(F) = |e(F)|$ .*

Pomysł dowodu powyższego twierdzenia polegał na geometrycznym zbliżeniu, po czym usunięciu z obrazu par punktów rozgałęzienia mających przeciwne znaki (II ruch Rosemana). Zauważmy, że podczas takiej operacji punkt rozgałęzienia może przebić się przez kawałek powierzchni powodując pojawienie się punktu potrójnego (VI ruch Rosemana), stąd usunięcie punktów rozgałęzienia z diagramu może nie sprzyjać minimalizacji liczby punktów potrójnych.

**Wniosek 13.2** ([137]). *Dla splotu  $F = F_1 \sqcup F_2 \sqcup \dots \sqcup F_n$  zachodzi równość  $\mathcal{B}(F) = |e(F_1)| + \dots + |e(F_n)|$ , gdyż punkt rozgałęzienia przy rzutowaniu w położeniu ogólnym pochodzi z tej samej składowej.*

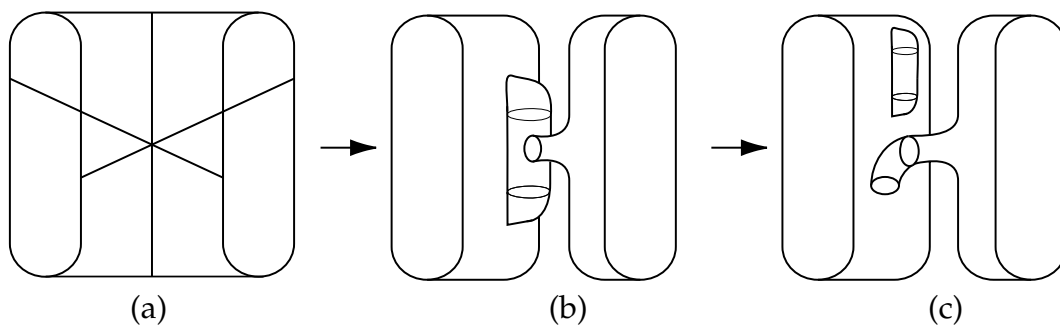
Mamy jednakże poniżej pewien wzór wiążący liczbę badanych punktów osobliwych. W praktyce nie daje on nam nic istotnego do wyznaczania minimalnej liczby punktów potrójnych (gdyż występują w nim różnice a nie sumy wybranych punktów potrójnych).

**Twierdzenie 13.3** ([26]). *W diagramie mamy zawsze równość  $2(T_+ - T_-) = (W_+ - W_-) - (B_+ - B_-)$ , gdzie  $W_+, W_-, B_+, B_-$  to liczba punktów rozgałęzienia*

odpowiednio: białych dodatnich, białych ujemnych, czarnych dodatnich, czarnych ujemnych;  $T_+, T_-$  to liczba punktów potrójnych odpowiednio: dodatnich i ujemnych.

*Dowód.* Uzasadnienie tego wzoru jest łatwe gdy posłużymy się BW orientacją zbioru punktów podwójnych następująco [136]: zliczając liczbę krawędzi właściwych (nie pętli) w DP grafie możemy to zrobić na dwa sposoby. Liczba krawędzi liczona jako punkty końcowe (względem orientacji) jest równa  $2T_+ + 4T_- + B_- + W_+$ , drugi sposób liczenia krawędzi (jako punkty początkowe) daje nam analogicznie liczbę  $4T_+ + 2T_- + B_+ + W_-$ . Przyrównując obie wartości otrzymujemy tezę.  $\square$

Niech dla splotu powierzchniowego  $F$  zbiór  $\Gamma_F$  oznacza zbiór punktów podwójnych diagramu  $D_F$ . Jest to suma zanurzonych pętli i zanurzonych łuków w  $\mathbb{R}^3$  tak, że końce tych łuków są punktami rozgałęzienia. Załóżmy, że  $\Gamma_F$  zawiera zwykły łuk (tzn. zanurzony homeomorficznie łuk bez punktów potrójnych wewnątrz). Taki zwykły łuk nazywamy  $a$ -łukiem (odp.  $m$ -łukiem) jeśli dwa punkty rozgałęzienia na jego krańcach mają przeciwne znaki (odp. te same znaki). Zauważmy, że otoczenie (podniesionego do  $\mathbb{R}^4$ )  $a$ -łuku (odp.  $m$ -łuku) jest homeomorficzne z pierścieniem (odp. wstęgą Moebiusa). Oznaczamy ponadto liczbę punktów potrójnych (odp. rozgałęzienia) przez  $t(D_F)$  (odp.  $b(D_F)$ ) dla diagramu  $D_F$ .



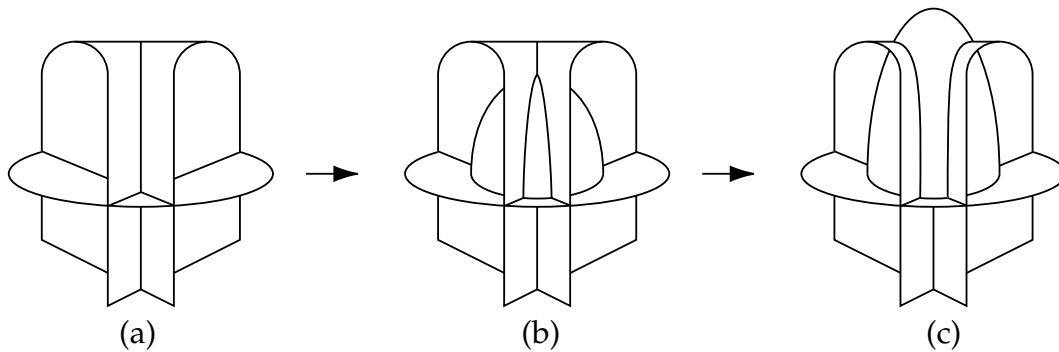
Rysunek 13.1: Usunięcie punktów rozgałęzienia z  $a$ -łuku. [137]

**Lemat 13.4** ([137]). *Jeśli  $\Gamma_F$  zawiera  $a$ -łuk, to  $F$  jest równoważny splotowi powierzchniowemu  $F'$  takiemu, że  $t(D_{F'}) = t(D_F)$  oraz  $b(D_{F'}) = b(D_F) - 2$ .*

*Dowód.* Otoczenie  $a$ -łuku wygląda jak na Rysunku 13.1(a), możemy je zdeformować do postaci połączonych „rurką” dwóch kawałków powierzchni, gdzie jedna strona łączenia odbywa się poprzez wystawiony z jednego kawałka powierzchni „bąbelek” jak na Rysunku 13.1(b). Dalej deformujemy rurkę (w  $\mathbb{R}^4$ ) tak aby to łączenie nie odbywało się na bąbelku tzn. zsuwamy je całkowicie tak, że znajduje się teraz w diagramie „wejście” do rurki z „zewnątrz” powierzchni, oraz

rurka nie przecina już powierzchni w części bąbelkowej (tylko obok), jak na Rysunku 13.1(c). Powoduje to pojawienie się okręgu punktów podwójnych, tak jak w przypadku III ruchu Rosemana. Następnie wykonujemy na części bąbelkowej I ruch Rosemana eliminując cały wyjściowy  $a$ -łuk, czyli pozbywamy się dwóch punktów rozgałęzienia.  $\square$

**Lemat 13.5** ([135]). *Załóżmy, że punkt rozgałęzienia  $b$  i punkt potrójny  $t$  diagramu  $D_F$  są końcami zanurzonego łuku punktów podwójnych tak, że łuk ten jest poprzeczny w stosunku do górnego kawałka płaszczyzny lub dolnego kawałka płaszczyzny w punkcie  $t$ . Wtedy  $F$  jest równoważny splotowi powierzchniowemu  $F'$  takiemu, że  $t(D_{F'}) = t(D_F) - 1$  oraz  $b(D_{F'}) = b(D_F)$ .*



Rysunek 13.2: Usunięcie punktu potrójnego w specyficznej sytuacji. [137]

*Dowód.* Ponieważ poprzeczny do łuku kawałek płaszczyzny nie jest kawałkiem środkowym (względem wysokości przy rzutowaniu) zatem możemy w  $\mathbb{R}^4$  przesunąć go nieznacznie z nad (lub z pod) otoczenia punktu który będzie rzutowany na punkt rozgałęzienia  $b$ . Na diagramie ruch ten odpowiada sytuacji na Rysunku 13.2, gdzie wykonujemy ruch ciągły niewielkiego otoczenia punktu  $t$  w poprzecznym do łuku kawałku płaszczyzny, wzdłuż łuku w stronę punktu rozgałęzienia i dalej przez niego (VI ruch Rosemana). Deformacja ta nie wprowadza nowego punktu potrójnego, a redukuje punkt potrójny  $t$ .  $\square$

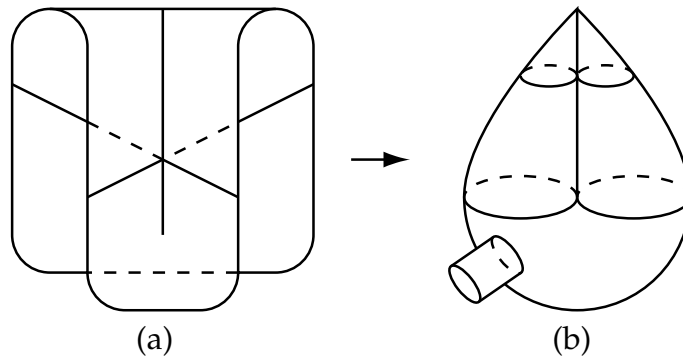
**Twierdzenie 13.6** ([135], [136]). *Dla każdego splotu powierzchniowego  $F$  dla którego  $\mathcal{T}(F) \neq 0$ , zachodzi  $\mathcal{T}(F) \geq 2$ .*

*Dowód.* Załóżmy nie wprost, że dla pewnej powierzchni  $F$  mamy  $\mathcal{T}(F) = 1$ , wtedy BW zorientowany DP graf zbioru punktów podwójnych rzutowania  $F$ , składa się z jednego wierzchołka  $t$  stopnia 6. Rozpatrujemy teraz wszystkie przypadki. Jeśli graf ten nie ma innych wierzchołków to mamy sprzeczność z warunkiem podniesienia (omawiany wcześniej bukiet trzech okręgów). Jeśli posiada

on wierzchołek inny niż  $t$  (nazwijmy go  $b$ ), to wówczas jeśli krawędź o końcach  $t, b$  jest prostopadła do górnego bądź dolnego kawałka płaszczyzny to można usunąć ten punkt potrójny na mocy Lematu 13.5.

Została nam zatem jedynie możliwość, że ta krawędź (o końcach w punktach  $t$  i  $b$ ) jest prostopadła do środkowego kawałka płaszczyzny, lecz wtedy wśród pozostałych pięciu krawędzi są cztery zorientowane tak samo. Nie każda z nich może więc tworzyć pętli (mamy jeden punkt potrójny), gdyż pętla wchodzi do wierzchołka  $t$  z przeciwną orientacją niż wychodzi. Stąd wśród tych czterech krawędzi musi istnieć jedna krawędź zakończona wierzchołkiem różnym od  $t$  i  $b$ , ale wtedy nie będzie ona poprzeczna do środkowego kawałka płaszczyzny. Stosując ponownie Lemat 13.5 otrzymujemy sprzeczność.  $\square$

Splot powierzchniowy  $F$  jest  $P^2$ -redukowalny jeśli  $F$  jest równoważny sumie spójnej niezawężonej płaszczyzny rzutowej i pewnego splotu powierzchniowego.  $F$  jest  $P^2$ -nieredukowalny jeśli nie jest  $P^2$ -redukowalny.



Rysunek 13.3:  $P^2$ -redukowalność. [137]

**Lemat 13.7** ([135]). *Jeśli  $\Gamma_F$  posiada  $m$ -łuk, to  $F$  jest  $P^2$ -redukowalny.*

*Dowód.*  $F$  jest  $P^2$ -redukowalny, gdyż domknięte otoczenie  $m$ -łuku jest izotopijne z trywialnie zanurzoną płaszczyzną rzutową z usuniętym niewielkim dyskiem otwartym, co ilustruje Rysunek 13.3.  $\square$

Otoczenie tubularne  $N(F)$  powierzchni  $F$  jest  $\mathbb{D}^2$ -wiązką nad  $F$ , a jego brzeg  $\partial N(F)$  jest  $S^1$ -wiązką nad  $F$ . Wtedy włókno  $S^1 \times \{*\}$  dla  $* \in F$  nazywamy *południkiem* dla  $F$ . Dla splotu powierzchniowego  $F = F_1 \sqcup F_2 \sqcup \dots \sqcup F_n$  niech  $m_k$  oznacza południk  $F_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Każdy  $m_k$  odpowiada wówczas elementowi grupy  $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$ .

**Stwierdzenie 13.8** ([137]). *Jeśli rząd każdego  $m_k$  jest różny od 2 w  $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$ , wtedy  $F$  jest  $P^2$ -nieredukowalny.*

**Twierdzenie 13.9** ([137]). *Dla  $P^2$ -nieredukowalnego splotu powierzchniowego  $F = F_1 \sqcup F_2 \sqcup \dots \sqcup F_n$ , mamy*

$$\mathcal{T}(F) \geq \frac{1}{2} (|e(F_1)| + \dots + |e(F_n)|).$$

*Dowód.* Wobec Wniosku 13.2 wystarczy pokazać, że  $\mathcal{T}(F) \geq \frac{1}{2}\mathcal{B}(F)$ . Niech  $M$  będzie zbiorem wszystkich diagramów splotów powierzchniowych  $F'$  równoważnych z  $F$  takich, że  $t(D_{F'}) = \mathcal{T}(F)$ . Weźmy taki diagram  $D$  ze zbioru  $M$ , że  $b(D)$  jest minimalny. Niech  $\Gamma$  będzie zbiorem punktów podwójnych diagramu  $D$ . Skoro  $F$  jest  $P^2$ -nieredukowalny, więc z Lematu 13.7,  $\Gamma$  nie zawiera  $m$ -łuku. Co więcej  $\Gamma$  nie zawiera  $a$ -łuku na mocy Lematu 13.4, gdyż inaczej istniałby diagram  $D'$  w  $M$  taki, że  $b(D) > b(D')$  co przeczy minimalności  $D$ . Mamy zatem, że każdy punkt rozgałęzienia w  $\Gamma$  jest połączony prostym łukiem w  $\Gamma$  z jakimś punktem potrójnym.

Gdyby liczba punktów rozgałęzienia połączonych z pewnym punktem potrójnym była równa co najmniej trzy, wtedy mielibyśmy parę: punkt rozgałęzienia oraz punkt potrójny spełniające założenia Lematu 13.5. Wówczas istniałby diagram  $D_{F''}$  splotu powierzchniowego  $F''$  równoważnego z  $F$  taki, że  $t(D_{F''}) < \mathcal{T}(F)$  co daje nam sprzeczność. Zatem liczba punktów rozgałęzienia jest nie większa niż podwojona liczba punktów potrójnych. Mamy zatem oszacowanie  $\mathcal{T}(F) = t(D) \geq \frac{1}{2}b(D) \geq \frac{1}{2}\mathcal{B}(F)$ .  $\square$

**Twierdzenie 13.10** ([137]). *Dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$ , istnieje splot powierzchniowy  $F$  taki, że  $\mathcal{T}(F) = 2n$ .*

*Dowód.* Niech zanurzona w  $[0, 1] \times \mathbb{R}^3$  powierzchnia  $A$  będzie dana przez klatki jak na Rysunku 13.4. Jest to powierzchnia o dwóch składowych z których każda jest homeomorficzna z płaszczyzną rzutową z usuniętymi dwoma wnętrzami standardowych dysków. Zbiór punktów podwójnych przy rzutowaniu  $[0, 1] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R}^2$  składa się z czterech punktów rozgałęzienia i dwóch punktów potrójnych (oraz z krzywych punktów podwójnych) na mocy Stwierdzenia 13.8. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  konstruujemy splot powierzchniowy następująco:

$$F(n) \cap (\{x\} \times \mathbb{R}^3) = \begin{cases} B \cup B' & \text{dla } x = 0 \\ A \cap (\{x\} \times \mathbb{R}^3) & \text{dla } 0 < x \leq 1 \\ A \cap (\{x-1\} \times \mathbb{R}^3) & \text{dla } 1 \leq x \leq 2 \\ \dots & \\ A \cap (\{x-(n-2)\} \times \mathbb{R}^3) & \text{dla } n-2 \leq x \leq n-1 \\ A \cap (\{x-(n-1)\} \times \mathbb{R}^3) & \text{dla } n-1 \leq x < n \\ B \cup B' & \text{dla } x = n \\ \emptyset & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie  $B \cup B'$  jest sumą dwóch standardowych 2-dysków ograniczonych trywialnym splotem  $A \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^3) = A \cap (\{1\} \times \mathbb{R}^3)$ .

Zauważmy, że zbiór punktów podwójnych diagramu  $D_{F(n)}$  składa się z  $n$  kopii zbioru jak na Rysunku 13.4 po prawej stronie. Każda z dwóch składowych to trywialny nieorientowalny węzeł powierzchniowy z charakterystyką Eulera równą  $2 - n$ . Jedna ze składowych ma normalną liczbę Eulera równą  $2n$ , a druga zaś  $-2n$ . Mamy również nierówność  $\mathcal{T}(F(n)) \leq 2n$ , gdyż nasze rzutowanie ma dokładnie  $n$  razy po 2 punkty potrójne w każdej kopii  $A$ .

Grupa podstawowa tego splotu jest izomorficzna z grupą o prezentacji:

$$\langle a, b \mid aba = b, bab = a \rangle$$

(bardziej szczegółowe wyznaczenie jest w [24, str. 87-88]). Jest to znana grupa tzw. kwaternionów, wobec tego każdy z tych generatorów ma rząd równy 4 ( $a, b$  odpowiadają południkom  $F(n)$ ). Ze Stwierdzenia 13.8 mamy zatem, że  $F(n)$  jest  $P^2$ -nieredukowalny, więc na mocy Twierdzenia 13.9 otrzymujemy  $\mathcal{T}(F(n)) \geq \frac{1}{2}(|2n| + |-2n|) = 2n$ . Co ostatecznie daje nam żadaną równość  $\mathcal{T}(F(n)) = 2n$ .  $\square$

Dla kompletności stanu aktualnej wiedzy podamy teraz skrótowo inne wyniki i oszacowania niezmiennika.

**Twierdzenie 13.11** ([157]). *2-węzeł  $F$  jest wstęgowy  $\iff \mathcal{T}(F) = 0$ .*

Przed pojawieniem się wyznaczenia konkretnych niezerowych wartości rozpatrywanego niezmiennika dla pewnych powierzchni, wiadomo było iż takie istnieją i przyjmować mogą nieograniczoną minimalną liczbę punktów potrójnych, w szczególności mamy następujący wynik.

**Twierdzenie 13.12** ([87]). *Dla każdej liczby naturalnej  $n$  istnieje 2-węzeł  $F$  taki, że  $\mathcal{T}(F) > n$ .*

Przypadek istnienia rzutowania bez punktów potrójnych w klasie powierzchni będących węzłami skrecono-okreconymi, rozstrzygnięty został następująco.

**Twierdzenie 13.13** ([31]).  $\mathcal{T}(\tau^m(K)) = 0 \iff m = 0, 1$  lub  $K$  jest trywialnym węzłem klasycznym.

**Stwierdzenie 13.14** ([139]). *Jeśli węzeł klasyczny  $K$  ma diagram z  $s$  skrzyżowaniami, to  $\mathcal{T}(\tau^m(K)) \leq 2 \cdot s \cdot m$ .*

Powyższe oszacowanie można poprawić przy następującym założeniu.

**Twierdzenie 13.15** ([141]). *Jeśli węzeł  $K$  ma diagram z  $s$  skrzyżowaniami w którym jest co najmniej jedna para skrzyżowań z Rysunku 13.5, wówczas  $\mathcal{T}(\tau^m(K)) \leq 2 \cdot (s - 2) \cdot m$ .*

**Twierdzenie 13.16** ([141]).

$$\mathcal{T}(\tau^2(\text{trójlistnik})) = 4.$$

**Twierdzenie 13.17** ([142]).

$$\mathcal{T}(\tau^3(\text{trójlistnik})) = 6.$$

**Twierdzenie 13.18** ([140]). *Dla każdego 2-węzła  $F$  dla którego  $\mathcal{T}(F) \neq 0$ , zachodzi  $\mathcal{T}(F) \geq 4$ .*

**Twierdzenie 13.19** ([53]).

$$6 \leq \mathcal{T}(\tau^2(\text{ósemkowy})) \leq 8.$$

**Twierdzenie 13.20** ([53] w połączeniu z [159]).

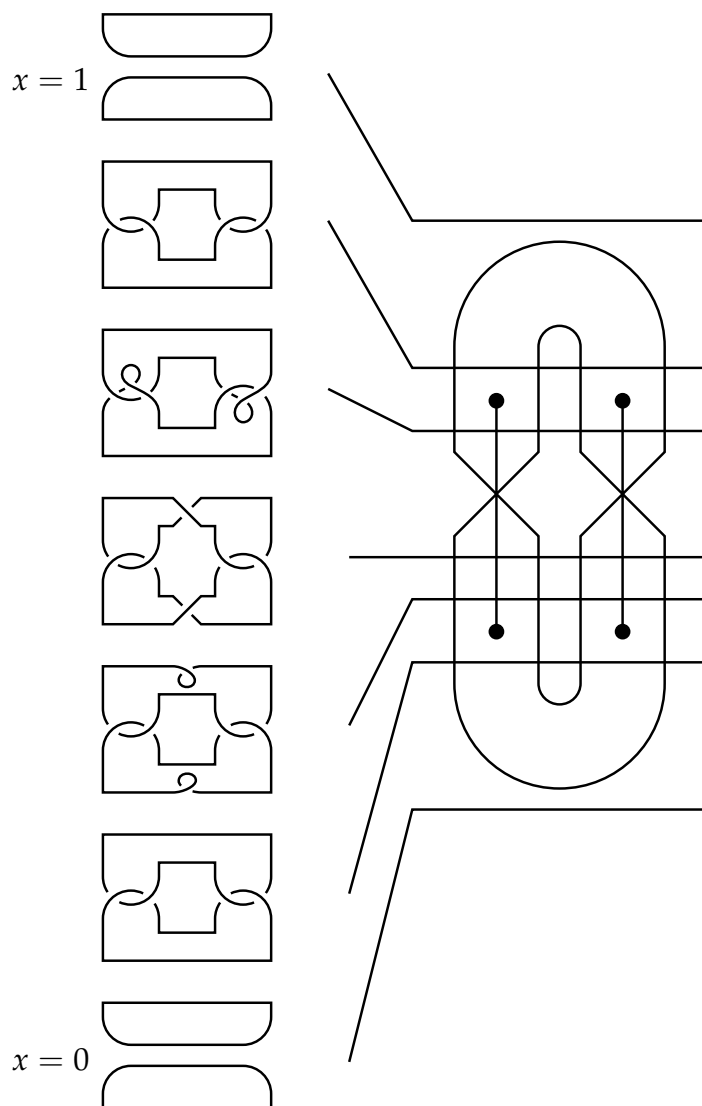
$$6 \leq \mathcal{T}(\tau^2(T(2, 5))) \leq 8.$$

**Twierdzenie 13.21** ([159]). *Dla  $2 \leq r < s$  zachodzi nierówność:*

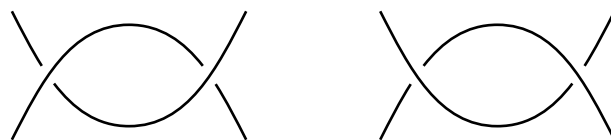
$$\mathcal{T}(\tau^q(T(r, s))) \leq 2q \left( (r-2)(s-1) + r \left[ \frac{s-1}{r} \right] - (r-1) \left[ \frac{s}{r} \right] \right),$$

gdzie zapis  $[x]$  oznacza część całkowitą liczby  $x$ .





Rysunek 13.4: Fragment powierzchni z Twierdzenia 17.2 i jej zbiór osobliwy. [137]



Rysunek 13.5: Para skrzyżowań z założenia twierdzenia. [141]

# Rozdział 14

## Struktury dystrybutywne związane z węzłami

Niech  $(X; *)$  będzie zbiorem z dwuargumentowym działaniem  $*$ , parę tą nazywamy *półką* (ang. shelf) jeśli spełnia

Aksjomat (1):  $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$  (prawa samorozdzielność).

Działanie  $*$  jest odwracalne, jeśli dla każdego  $b$  i  $c$  istnieje dokładnie jedno  $a$  takie, że  $a * b = c$  (takie  $a$  oznaczamy przez  $c \bar{*} b$ ). Równoważnie niech  $*_b : X \rightarrow X$  takie, że  $*_b(a) = a * b$ , wtedy odwracalność działania  $*$  oznacza, że  $*_b$  jest bijekcją ( $\bar{*}_b = *_b^{-1}$ ).

Podajmy teraz kilka możliwych własności działania  $*$ , które przyjmowane w różnych zestawieniach jako aksjomaty, definiują pewne algebry użyteczne w teorii węzłów (cyt. [124]). Aksjomat (2): działanie  $*$  jest odwracalne. Półka  $(X; *)$  spełniająca (1) i (2) nazywa się *wrakiem* (ang. rack, nazwa stworzona przez J.H. Conway w 1959 roku). Aksjomat (3): dla każdego  $a$  zachodzi równość  $a * a = a$  (własność idempotentności).

Wrak  $(X; *)$  spełniający (1), (2) i (3) nazywa się *kwandlem* (ang. quandle), terminologia wprowadzona przez Joyce'a w 1979 roku. Tę polską terminologię zaproponował J. H. Przytycki, w dalszej części pracy zastąpimy ją jednak pierwotną, angielską nazwą. Półka  $(X; *)$  spełniająca (1) i (3) nazywa się *wrzecionem* (ang. spindle).

Jeśli warunek (2) w definicji quandla zastąpimy warunkiem (2'):  $(a * b) * b = a$ , to otrzymamy strukturę wprowadzoną przez Takasakiego w 1942 roku i nazwaną przez niego *kei*. Podstawowym przykładem kei podanym przez Takasakiego jest grupa abelowa z działaniem  $a * b = 2b - a$ . Joyce uogólnił tę definicję na grupy nieabelowe definiując działanie  $a * b = ba^{-1}b$ , strukturę tę nazywamy

rdzennym *kei* (ang. core *kei*).

Przypomnijmy, że quandle jest to niepusty zbiór  $Q$  wraz z działaniem  $*$  :  $Q \times Q \rightarrow Q$  spełniającym warunki:

- (i)  $\forall a \in Q \quad a * a = a$  (idempotentność)
- (ii)  $\forall a, b \in Q \quad \exists! c \in Q \quad c * a = b$  (prawostronna odwracalność)
- (iii)  $\forall a, b, c \in Q \quad (a * b) * c = (a * c) * (b * c)$  (samorozdzielność)

Warunek (ii) może być równoważnie zamieniony na warunek:

(ii')  $\forall a \in Q$  przekształcenie  $*a : Q \rightarrow Q$  zdefiniowane jako  $x \mapsto x * a$  jest bijekcją,

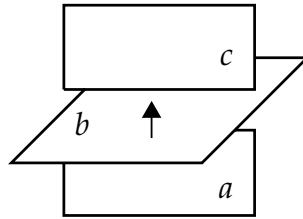
wtedy definiujemy odwzorowanie odwrotne do  $*a$  oznaczane jako  $*a^{-1}$ .

Najczęściej spotykane przykłady quandli to:

1. *quandle trywialny* (z działaniem oznaczanym jako  $*_0$ ), gdy  $\forall x, y \in Q \quad x *_0 y = x$ ,
2. elementy dowolnej grupy  $(G, \cdot)$  z działaniem quandla określonym jak następuje  $\forall a, b \in G \quad a * b = b^{-n} \cdot a \cdot b^n$ , gdzie  $n \in \mathbb{N}$ ,
3. tak zwany *quandle diedralny*  $R_n$  dla  $n > 2$ , jest to zbiór odbić (symetrii) w grupie diedralnej  $D_n$  (izometrii  $n$ -kąta foremnego na siebie). Wtedy  $R_n$  można identyfikować ze zbiorem  $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$  z działaniem quandlowym  $i * j = 2j - i \pmod{n}$ ,
4. *quandle Alexandera*, czyli dowolny  $\Lambda$ -moduł  $M$ , gdzie  $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  to pierścień wielomianów Laurenta nad  $\mathbb{Z}$  zmiennej  $t$ . Działanie quandlowe określone jest tutaj jako  $\forall a, b \in M \quad a * b = ta + (1-t)b$ .
5.  $S_4$  jako zbiór czteroelementowy  $\{0, 1, 2, 3\}$  z działaniem określonym poniższymi zależnościami.

$$\begin{aligned}
 0 &= 0 * 0 = 1 * 2 = 2 * 3 = 3 * 1 \\
 1 &= 0 * 3 = 1 * 1 = 2 * 0 = 3 * 2 \\
 2 &= 0 * 1 = 1 * 3 = 2 * 2 = 3 * 0 \\
 3 &= 0 * 2 = 1 * 0 = 2 * 1 = 3 * 3
 \end{aligned}$$

Ustalmy quandle  $X$ , niech  $D$  będzie diagramem zorientowanej zawężonej powierzchni, oraz  $\Lambda$  zbiorem składowych tego diagramu. *Quandlewym kolorowaniem*  $\mathcal{C}$  nazywamy odwzorowanie  $\mathcal{C} : \Lambda \rightarrow X$  takie, że wokół każdej krzywej punktów podwójnych zachodzi relacja  $c = a * b$  dla oznaczeń przedstawionych na Rysunku 14.1 (z wektorem normalnym do górnego kawałka płaszczyzny). Warunek ten jest zgodny wokół każdego punktu rozgałęzienia oraz każdego punktu potrójnego na mocy aksjomatów dla quandla. Oznaczmy przez  $Col_X(D)$  zbiór wszystkich kolorowań diagramu  $D$  quandlem  $X$ .



Rysunek 14.1: Quandlewe kolorowanie w otoczeniu krzywej punktów podwójnych. [28]

Dla quandla  $Q$  oraz dowolnej, ustalonej grupy abelowej  $G$  niech  $C^n(Q, G)$  będzie wolną grupą abelową generowaną przez odwzorowania  $\theta : Q^n \rightarrow G$  spełniające warunek:  $\theta(x_1, \dots, x_n) = 0_G$  jeśli  $x_k = x_{k+1}$  dla pewnego  $k = 1, \dots, n-1$ . Operacja brania kobrzeżu  $\delta^n : C^n(Q, G) \rightarrow C^{n+1}(Q, G)$  zdefiniowana jest wzorem

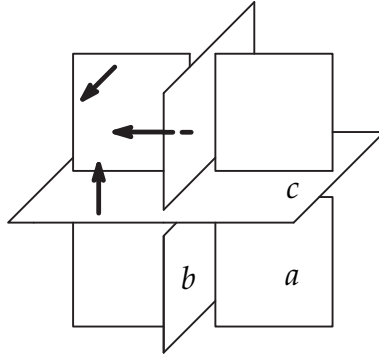
$$(\delta^n \theta)(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{k=2}^n (-1)^k (\theta(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}) + \\ -\theta(x_1 * x_k, \dots, x_{k-1} * x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1})).$$

Grupa kocykli  $Z^n(Q, G)$  to jądro  $\ker(\delta^n)$  natomiast kobrzeży  $B^n(Q, G)$  to obrazy  $\text{im}(\delta^{n-1})$ . Wtedy grupy kohomologii definiujemy jako grupy ilorazowe  $H^n(Q, G) = Z^n(Q, G) / B^n(Q, G)$ .

Niech  $T(D)$  oznacza zbiór wszystkich punktów potrójnych diagramu zorientowanego  $D$ , dla każdego  $t \in T(D)$  oznaczmy przez  $\epsilon(t) \in \{\pm 1\}$  jego znak, oraz kolor  $C(t) = (a, b, c) \in Q^3$  zdefiniowany przy ustaleniu wektorów normalnych, jak na Rysunku 14.2.

Dla kocyklu  $\theta \in Z^3(Q, G)$  i zorientowanego węzła powierzchniowego  $K$ , definiujemy tzw. *niezmiennik kocyklowy* wzorem:

$$\Phi_\theta(K) = \sum_{C \in Col_Q(D)} \prod_{t \in T(D)} \theta(C(t))^{\epsilon(t)} \in \mathbb{Z}[G].$$



Rysunek 14.2: Otoczenie punktu potrójnego z naniesionymi wektorami normalnymi. [28]

W powyższym wzorze wartość  $\theta(C(t))^{\epsilon(t)}$  jest elementem grupy  $G$  zapisywanym multiplikatywnie.

**Stwierdzenie 14.1** ([109]). Zachodzi  $H^3(R_p, \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$  oraz generatorem tej grupy jest klasa kocyklu:

$$\theta_p(x, y, z) = (x - y) \frac{(2z - y)^p + y^p - 2z^p}{p} \in Z^3(R_p, \mathbb{Z}_p).$$

**Twierdzenie 14.2** ([28]). Powyżej zdefiniowany niezmiennik kocyklowy jest dobrze zdefiniowany tzn. nie zależy od wyboru diagramu  $D$  dla powierzchni  $K$ . Ponadto jeśli  $\theta$  i  $\theta'$  są wzajemnie kohomologicznymi kocyklami, wówczas  $\Phi_\theta(K) = \Phi_{\theta'}(K)$ .

Niech  $Q$  będzie skończonym quandlem rzędu  $n$ , oraz niech  $\theta \in Z^3(Q, G)$  będzie kocyklem z abelową grupą współczynników zapisywanych addytywnie.

Dla  $2n(n-1)^2$  zmiennych  $X = \left( X_{p,q,r}^i \right)_{\substack{i=\pm 1 \\ p \neq q \neq r \in Q}}$  definiujemy zbiór  $1 + 2n(n-1)$  funkcji liniowych  $\left\{ F_\theta(X), G_{a,b}^j(X) \right\}_{\substack{j=\pm 1 \\ a \neq b \in Q}}$  następująco:

$$F_\theta(X) = \sum_{k, p \neq q \neq r} X_{p,q,r}^k \theta(p, q, r), \text{ natomiast } G_{a,b}^j(X) = \sum_{x \neq a} X_{x,a,b}^j - \sum_{x \neq a,b} X_{a,x,b}^j + \sum_{x \neq b} X_{a,b,x}^j - \sum_{x \neq a} X_{x,a,b}^{-j} + \sum_{x \neq a,b} X_{a*x^{-1},x,b}^{-j} - \sum_{x \neq b} X_{a*x^{-1},b*x^{-1},x}^{-j}.$$

Jeśli  $A = \left( A_{p,q,r}^i \right)_{\substack{i=\pm 1 \\ p \neq q \neq r \in Q}}$  jest rozwiązaniem układu

$\left\{ F_\theta(X) \neq 0, G_{a,b}^j(X) = 0 \right\}_{\substack{j=\pm 1 \\ a \neq b \in Q}}$  w liczbach całkowitych, to definiujemy

$$\tau(\theta) = \min \sum_{i, p \neq q \neq r} |A_{p,q,r}^i|,$$

gdzie minimum bierzemy po wszystkich takich  $A$ . Jeśli nie ma rozwiązania to przyjmujemy  $\tau(\theta) = 0$ .

**Twierdzenie 14.3** ([142]). *Jeśli  $\Phi_\theta(F) \notin \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[G]$  dla zorientowanej zawężonej powierzchni  $F$ , wówczas  $\mathcal{T}(F) \geq \tau(\theta)$ .*

*Dowód.* Dla dowolnego zorientowanego diagramu  $D$  węzła powierzchniowego  $F$  istnieje pokolorowania szachownicą obszarów  $\Lambda(D)$  w  $\mathbb{R}^3$  oddzielonych powierzchnią odpowiadającą  $D$  na dwa sposoby. Ustalmy jeden z nich i przyporządkujmy kolorom wartości  $\pm 1$  poprzez ustalenie funkcji  $\lambda : \Lambda(D) \rightarrow \{\pm 1\}$ . Niech  $E(D)$  oznacza zbiór krawędzi tzn. łuków punktów podwójnych diagramu  $D$ , punkt brzegowy każdej takiej krawędzi to punkt potrójny bądź punkt rozgałęzienia. Dla krawędzi  $e \in E(D)$  definiujemy styczny wektor  $\vec{v}(e)$  tak, że wraz górnym i dolnym kawałkiem powierzchni są trójką zgodną z orientacją  $\mathbb{R}^3$ . Jako  $\lambda(e)$  przyjmujemy  $\lambda(R)$  dla  $R \in \Lambda(D)$  jednego z czterech obszarów przyległych do  $e$  na które wskazują normalna do górnego i dolnego kawałka płaszczyzny.

Oznaczmy górny kawałek przez  $\beta$  oraz przez  $\alpha$  oznaczmy jeden z dwóch dolnych kawałków tak, że normalna do  $\beta$  wskazuje od  $\alpha$ . Kiedy  $D$  jest pokolorowany przez  $C \in \text{Col}_Q(D)$ , wtedy uporządkowaną parę  $(C(\alpha), C(\beta))$  nazywamy kolorem krawędzi  $e$  i oznaczamy  $C(e) \in Q^2$ . Zauważmy, że jeśli jednym z punktów brzegowych krawędzi  $e$  jest punkt rozgałęzienia to  $C(e) = (a, a)$  dla pewnego  $a \in Q$ . Dla każdego  $j \in \{\pm 1\}$  i  $a, b \in Q$  oznaczmy przez  $E_{a,b}^j(D)$  podzbiór  $E(D)$  zawierający krawędzie  $e$  takie, że  $\lambda(e) = j$  oraz  $C(e) = (a, b)$ .

Dla punktu potrójnego  $t \in T(D)$  definiujemy  $\lambda(t) \in \{\pm 1\}$  jako  $\lambda(R)$ , gdzie  $R \in \Lambda(D)$  jest jednym z ośmiu obszarów wokół punktu  $t$  do którego wskazują normalna do górnego, środkowego i dolnego kawałka płaszczyzny. Zauważmy, że punkt potrójny  $t$  ma również swój zdefiniowany znak  $\epsilon(t)$  oraz kolor  $C(t) \in Q^3$ .

Dla każdego  $i, s \in \{\pm 1\}$  oraz  $p, q, r \in Q$  definiujemy  $T_{p,q,r}^{i,s}(D)$  podzbiór  $T(D)$  składający się z takich punktów potrójnych  $t$ , że  $\lambda(t) = i$ ,  $\epsilon(t) = s$  oraz  $C(t) = (p, q, r)$ , oznaczmy  $A_{p,q,r}^{i,s}$  jako liczbę elementów tego zbioru. Ponadto niech  $A_{p,q,r}^i = A_{p,q,r}^{i,+1} - A_{p,q,r}^{i,-1}$  oraz przyjmijmy  $A_C = \left( A_{p,q,r}^i \right)_{p \neq q \neq r \in Q}^{i=\pm 1}$ . Widzimy, że  $F_\theta(A_C) = \sum_{t \in T(D)} \epsilon(t) \theta(C(t))$  (tu zapis w postaci addytywnej).

Pokażemy teraz, że  $G_{a,b}^j(A_C) = 0$  dla każdego  $j \in \{\pm 1\}$  oraz  $a \neq b \in Q$ . Zliczając liczbę krawędzi w  $E_{a,b}^j(D)$ , a każda z nich ma na brzegu punkty potrójne (gdyż  $a \neq b \in Q$ ), możemy to zrobić na dwa sposoby: jako liczbę punktów końcowych względem orientacji krawędzi, bądź jako liczbę punktów początkowych.

Pierwszy z tych sposobów daje nam liczbę:

$$\sum_{x \in Q} A_{x,a,b}^{j,+1} + \sum_{x \in Q} A_{a,x,b}^{j,-1} + \sum_{x \in Q} A_{a,b,x}^{j,+1} + \sum_{x \in Q} A_{x,a,b}^{-j,-1} + \sum_{x \in Q} A_{a*x^{-1},x,b}^{-j,+1} + \sum_{x \in Q} A_{a*x^{-1},b*x^{-1},x}^{-j,-1}$$

uzyskaną następująco. Załóżmy, że krawędź  $e \in E_{a,b}^j(D)$  ma punkt końcowy  $t \in T_{p,q,r}^{i,s}(D)$  względem orientacji  $\vec{v}(e)$ . Jeśli  $s = +1 = \epsilon(t)$  to wtedy  $e$  musi być jednym z przypadków  $e_1, e_3$  lub  $e_5$ , na przykład jeśli  $e = e_1$  wtedy  $i = j$  oraz  $(q, r) = (a, b)$ , zatem  $\lambda(t) = j$  oraz  $C(t) = (x, a, b)$  dla pewnego  $x \in Q$  i liczba tych krawędzi uwzględniona jest przy pierwszej sumie powyżej. Liczby w przypadkach  $e = e_3$  lub  $e = e_5$  dane są analogicznie przez odpowiednio trzecią i piątą sumę.

W przypadku  $s = -1 = \epsilon(t)$  sytuacja jest podobna do poprzedniej za wyjątkiem orientacji krawędzi, która jest przeciwna. Tutaj  $e$  musi być jedną z  $e_2, e_4$  lub  $e_6$ . Jeśli na przykład  $e = e_6$  wtedy  $-i = j$  oraz  $(p * r, q * r) = (a, b)$  mamy zatem  $\lambda(t) = -j$  oraz  $C(t) = (a * x^{-1}, b * x^{-1}, x)$  dla pewnego  $x \in Q$  i liczba tych krawędzi dana jest przez szóstą sumę powyżej. Podobnie przypadki  $e = e_2$  i  $e = e_5$  realizują krawędzie w drugiej i czwartej sumie.

Zliczając teraz punkty początkowe krawędzi (względem orientacji) analogicznie jak wyżej, ich liczba w  $E_{a,b}^j(D)$  wynosi:

$$\sum_{x \in Q} A_{x,a,b}^{j,-1} + \sum_{x \in Q} A_{a,x,b}^{j,+1} + \sum_{x \in Q} A_{a,b,x}^{j,-1} + \sum_{x \in Q} A_{x,a,b}^{-j,+1} + \sum_{x \in Q} A_{a*x^{-1},x,b}^{-j,-1} + \sum_{x \in Q} A_{a*x^{-1},b*x^{-1},x}^{-j,+1}$$

Sumy te są równe w obu przypadkach, stąd po uproszczeniu tych samych wyrazów otrzymujemy  $G_{a,b}^j(A_C) = 0$ .

Weźmy teraz zorientowany diagram  $D$  dla  $F$  realizujący minimalną liczbę punktów potrójnych  $\mathcal{T}(F)$ . Z założenia twierdzenia istnieje  $Q$ -kolorowanie  $C \in Col_Q(D)$  spełniające warunek  $\sum_{t \in T(D)} \epsilon(t)\theta(C(t)) \neq 0$ , ponieważ gdyby

wszystkie kolorowania dawały trywialną sumę to niezmiennik kocyklowy byłby trywialny. Mamy z powyższych rozważań, że  $A_C$  jest rozwiązaniem układu

$$\left\{ F_\theta(X) \neq 0, G_{a,b}^j(X) = 0 \right\}_{a \neq b \in Q}^{j=\pm 1} \text{ w liczbach całkowitych, zatem}$$

$$\mathcal{T}(F) = \sum_{\substack{i,s=\pm 1 \\ p,q,r \in Q}} A_{p,q,r}^{i,s} \geq \sum_{i,p \neq q \neq r} |A_{p,q,r}^i| \geq \tau(\theta),$$

gdzie pierwsza równość wynika z tego, że zliczamy wszystkie punkty potrójne diagramu  $D$ . Pierwsza nierówność powyżej to zastosowanie algebraicznej zależności  $|x| + |y| \geq |x - y|$  oraz faktu, że pomijamy w tej sumie niektóre elementy (warunki pod znakiem sumy), natomiast ostatnia nierówność wynika wprost z definicji  $\tau(\theta)$ .  $\square$

# Rozdział 15

## Niezmienniki wybranych ruchów Rosemana

Mówimy, że diagram  $D_F$  jest  $p$ -diagramem jeśli nie posiada punktu potrójnego, tzn. dla każdego  $x \in D_F$  mamy  $\#(\pi^{-1}(x) \cap F) < 3$  (nie ma on na filmie wykonanego III ruchu Reidemeistera).

Dwa  $p$ -diagramy  $D_F$  oraz  $D_{F'}$  są  $p$ -równoważne, jeśli istnieje skończony ciąg  $p$ -diagramów  $D_F = D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow \dots \rightarrow D_n = D_{F'}$  taki, że dla każdego  $i = 1, 2, \dots, n-1$  przejście  $D_i \rightarrow D_{i+1}$  jest jednym spośród czterech ruchów Rosemana, które łączą wyłącznie  $p$ -diagramy (czyli ruchy I-IV), bądź izotopia diagramu w  $\mathbb{R}^3$ .

Zastanówmy się nad następującym problemem.

**Pytanie 1.** Czy istnieją dwa  $p$ -diagramy równoważnych powierzchni, które nie są  $p$ -równoważne?

Analogiczne pytanie, lecz dla punktów rozgałęzienia (zamiast punktów potrójnych w powyższej definicji), rozważał S. Satoh w pracy [138], dając pozytywną odpowiedź oraz podając przykład dwóch takich diagramów bez punktów rozgałęzienia.

Niech  $F \subset \mathbb{R}^4$  będzie zorientowanym splotem powierzchniowym takim, że  $D_F$  jest  $p$ -diagramem. Zdefiniujmy  $A_f$  jako zbiór tych okręgów  $c \subset \Gamma$  (gdzie  $\Gamma$  to zbiór dwupoziomowy), że  $(\pi^{-1}(\pi(c))) \cap F$  ma niepusty przekrój z dwiema różnymi składowymi powierzchni  $F$ .

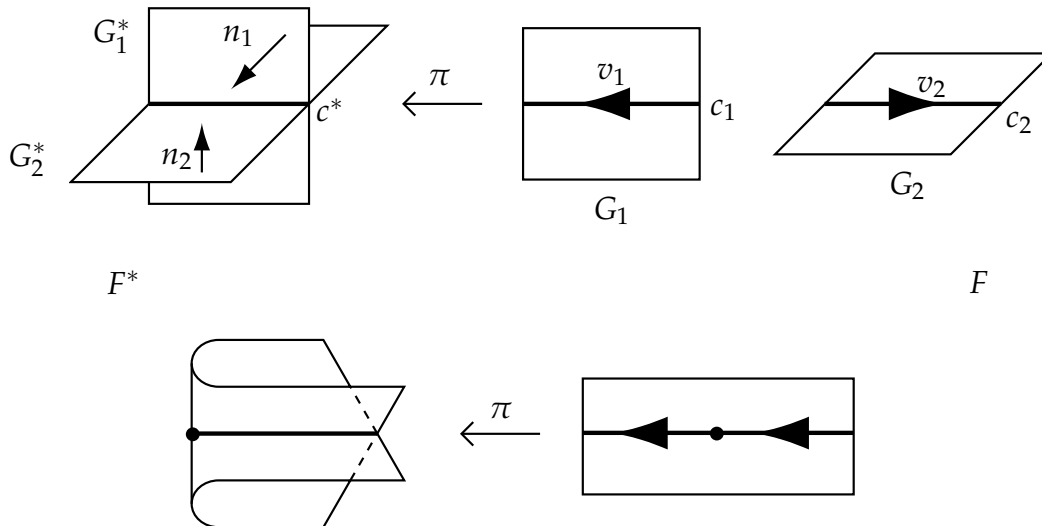
Na wszystkie okręgi w zbiorze  $A_f$  zadajmy orientację następująco.

Niech  $G_1^*$  oraz  $G_2^*$  będą dwoma kawałkami płaszczyzny w  $F^*$ , przecinającymi się wzdłuż krzywej punktów podwójnych  $c^*$ . Niech  $c_1 \subset G_1$  oraz  $c_2 \subset G_2$  będą



krzywymi na zbiorze dwupoziomowym, będącymi przeciwobrazami krzywej  $c^*$  przy rzutowaniu. Niech  $\vec{n}_1$  oraz  $\vec{n}_2$  będą wektorami normalnymi odpowiednio do  $G_1^*$  oraz  $G_2^*$ .

Wówczas orientacja wektora  $\vec{v}_1$  na  $c_1$  jest określona poprzez warunek, że uporządkowana trójka  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \pi(\vec{v}_1))$  jest zgodna z orientacją na  $\mathbb{R}^3$ . Ukazuje to Rysunek 15.1. Analogicznie definiujemy orientację wektora  $\vec{v}_2$  na  $c_2$ .



Rysunek 15.1: Orientowanie krzywych ze zbioru dwupoziomowego. [138]

Będziemy również potrzebować rozróżniania dwóch typów obszarów.

**Lemat 15.1** ([148]). *Zbiór  $F \setminus \Gamma$  może być pokolorowany w szachownicę, tzn. możemy pokolorować każdą ze składowych jednym z dwóch kolorów 0 lub 1, tak że przyległe (poprzez wspólną krawędź) obszary mają różne kolory.*

Z lematu tego możemy wywnioskować przydatny fakt dotyczący naszego specjalnego zbioru okręgów.

**Wniosek 15.2** (J. [68]). *Zbiór  $(\cup A_f) \cup (F \setminus \Gamma)$  może być pokolorowany w szachownicę, ponieważ możemy kolorować kolejno obszary na każdej ze składowych powierzchni  $F$ , traktując je jako oddzielne węzły powierzchniowe.*

Pokolorujmy zatem nasz zbiór  $(\cup A_f) \cup (F \setminus \Gamma)$  w (jedną z dwóch możliwych) ustaloną szachownicę. Będziemy wreszcie potrzebować jeszcze jednej definicji dla rozróżniania pomiędzy dwoma typami elementów ze zbioru  $A_f$ .

Niech zbiór  $X \subset A_f$  składa się z okręgów  $d$  leżących na obszarach koloru 1, które leżą „wyżej” względem osi kierunku rzutowania, niż  $(\pi^{-1}(\pi(d)) \cap F) \setminus d$ .

Autor udowodnił następującą obserwację.

**Twierdzenie 15.3** (J. [68]). *Niezmiennikiem  $p$ -diagramów, względem  $p$ -równoważności dla zorientowanego splotu  $F \subset \mathbb{R}^4$  jest klasa*

$$\left[ \bigcup \left\{ c \in A_f : \left( \pi^{-1}(\pi(c)) \cap F \right) \setminus c \in X \right\} \right] \in H_1(F, \mathbb{Z}).$$

*Dowód.* Możemy procedować sprawdzając wszystkie cztery elementarne ruchy zawierające  $p$ -diagramy.

Dla I oraz II ruchu Rosemana, teza twierdzenia jest spełniona, ponieważ zarówno umiejscowienie jak i kolor obszarów otaczających krzywe ze zbioru  $A_f$  nie zmieniają się jako, że ich obrazy rzutowania nie biorą udziału w tych ruchach. W przypadku ruchu III jesteśmy w sytuacji pojawienia się lub zniknięcia pary okręgów na zbiorze dwupoziomowym. Jeśli okręgi te nie należą do zbioru  $A_f$ , wówczas używamy tego samego argumentu, jak w przypadku poprzednich ruchów. Jeśli natomiast okręgi te należą do zbioru  $A_f$  to z faktu, że ich klasa homologii, jako 1-łańcucha, jest elementem zerowym, nie wpływa to na nasz niezmiennik.

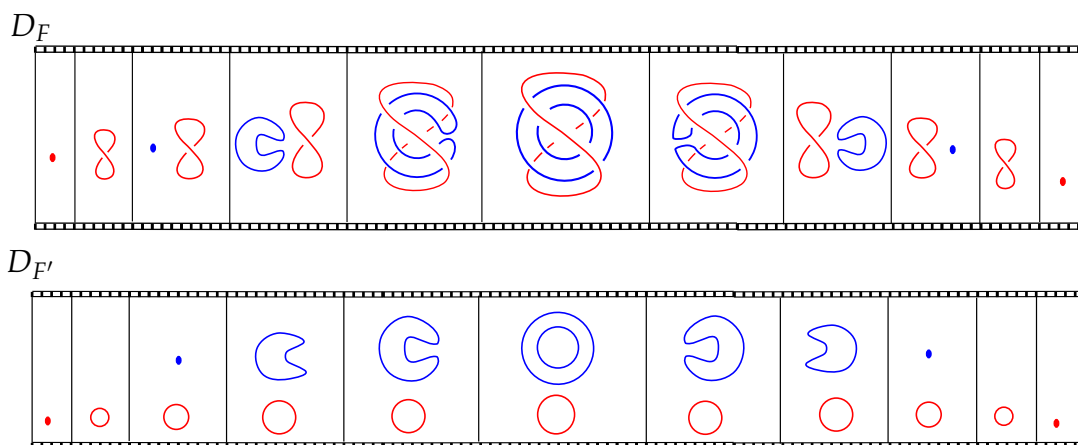
Bardziej interesująca jest ostatnia z transformacji. W przypadku ruchu IV, pokazanego na Rysunku 12.11 możemy zaobserwować, że wszystkie (biorące udział w tym ruchu) krzywe ze zbioru dwupoziomowego należą albo do okręgów ze zbioru  $A_f$  albo są podzbiarami okręgów z poza zbioru  $A_f$  (zarówno przed jak i po transformacji). Jeśli jest to ostatni z wspomnianych przypadków, wtedy używamy argumentu jak w przypadku ruchu numer II. W przeciwnym razie wnioskujemy, że krzywe ze zbioru dwupoziomowego (w tym lokalnym obszarze który przekształcamy), leżące „wyżej” w stosunku do kierunku rzutowania, leżą obie na obszarze o tym samym kolorze. Co więcej, ta sytuacja się nie zmienia po przeprowadzeniu tego ruchu. Klasa homologii 1-łańcucha (z naszą zdefiniowaną orientacją) na którym leżą odpowiednie „niższe” krzywe, nie zmienia się (z addytywności grupy), co kończy dowód.  $\square$

Dzięki temu twierdzeniu możemy teraz rozwiązać wspomniany wcześniej problem.

**Twierdzenie 15.4** (J. [68]). *Istnieją dwa  $p$ -diagramy równoważnych powierzchni, które nie są  $p$ -równoważne.*

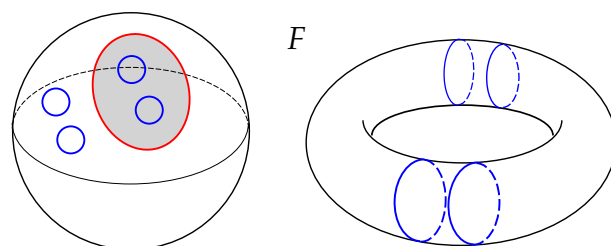
*Dowód.* Rozpatrzmy dwa diagramy  $D_F$  oraz  $D_{F'}$  zdefiniowane przy pomocy filmów, jak na Rysunku 15.2. Są to diagramy splotu sfery  $S^2$  i torusa  $T^2$ . Reprezen-

tują one  $p$ -diagramy, ponieważ nie dokonujemy  $III$  ruchu Reidemeistera pomiędzy żadnymi klatkami. Nasze diagramy są otrzymane ze splotów powierzchniowych  $F$  oraz  $F'$  które są równoważne.



Rysunek 15.2: Filmy dwóch diagramów dla  $D_F$  oraz  $D_{F'}$

Jednakże,  $p$ -diagramy  $D_F$  oraz  $D_{F'}$  nie są  $p$ -równoważne. Z Rysunku 15.3 bazowej powierzchni dla  $F$  z zaznaczonym zbiorem dwupoziomym (osiem okręgów, z czego dwa leżą na "czarnym" polu szachownicy, składającej się z dwóch pól), możemy wywnioskować, że wspomniany wcześniej niezmiennik dla przypadku diagramu  $D_F$ , daje nietrywialną klasę (która to jest klasą jednego z okręgów naniesionych na torus), w odmiennosci do przypadku diagramu  $D_{F'}$  dla którego zbiór dwupoziomowy jest pusty.  $\square$



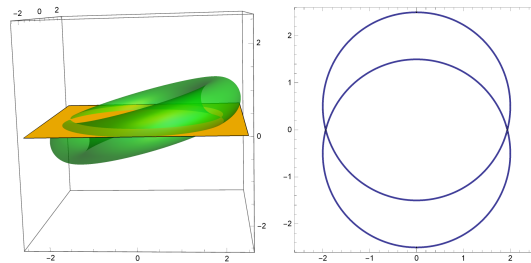
Rysunek 15.3: Powierzchnia bazowa dla  $F$  z kolorowaniem oraz z zaznaczonym zbiorem dwupoziomym

## 15.1 Hiperboliczne rozszczepienie i diagramy markowane

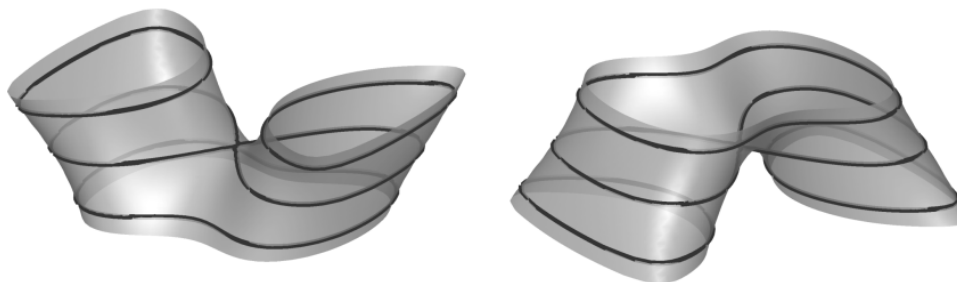
Niech  $\mathbb{R}_t^3$  oznacza teraz  $\mathbb{R}^3 \times \{t\}$  dla  $t \in \mathbb{R}$  (porównaj podrozdział 12.1).

**Twierdzenie 15.5** ([86], [100], [107]). *Dla dowolnej zawężonej powierzchni  $F \subset \mathbb{R}^4$  istnieje równoważna z nią zawężona powierzchnia  $F'$ , mająca skończoną liczbę punktów krytycznych Morse'a taka, że wszystkie jej punkty siodłowe leżą w hiperprzestrzeni  $\mathbb{R}_0^3$ , maksima leżą w  $\mathbb{R}_1^3$  oraz minima leżą w  $\mathbb{R}_{-1}^3$  (jest to tzw. hiperboliczne rozszczepienie). Zobacz poglądowy Rysunek 15.4 dla standardowego, trywialnie zawężonego torusa.*

Cięcie zerowe  $\mathbb{R}_0^3 \cap F'$  hiperbolicznego rozszczepienia powierzchni daje nam graf o wierzchołkach stopnia cztery (możliwe są pętle bez wierzchołków). Zadajmy na każdy wierzchołek tzw. *marker*, informujący o typie punktu siodłowego (Rysunki: 15.5 oraz 15.6). Wykonując teraz rzutowanie tego grafu w położeniu ogólnym do  $\mathbb{R}^2$  oraz oznaczając typy skrzyżowań łuków, jak w przypadku klasycznych węzłów, otrzymujemy tzw. *diagram markowany* (termin ten dotyczy również tego typu grafów, które nie powstały z cięcia powierzchni).

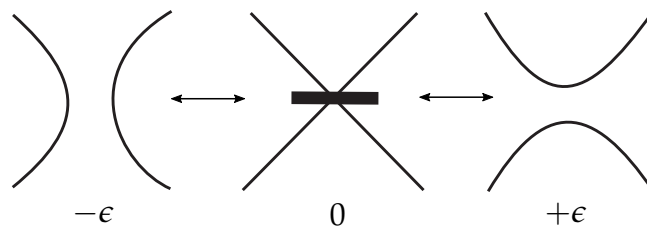


Rysunek 15.4: Hiperboliczne rozszczepienie torusa.



Rysunek 15.5: Dwa typy punktów siodłowych. [90]

**Twierdzenie 15.6** ([100]). *Każdą zawężoną powierzchnię można zakodować jako diagram markowany, oraz z każdego jej diagramu markowanego możemy odtworzyć całą informację o typie zawężonej powierzchni, z której powstał.*



Rysunek 15.6: Reguła wygładzenia markerów.

Dla diagramu markowanego  $D$  oznaczamy przez  $L_+(D)$  oraz  $L_-(D)$  diagramy otrzymane z  $D$  poprzez usunięcie każdego z wierzchołków, wygładzeniem sąsiadujących łuków w konwencji pokazanej na Rysunku 15.6 dla  $+\epsilon$  oraz  $-\epsilon$  odpowiednio.

Mamy następującą charakteryzację markowanych diagramów odpowiadających zawężłonym powierzchniom.

**Twierdzenie 15.7** ([100]). *Diagram markowany  $D$  jest diagramem pewnej zawężłonej powierzchni w  $\mathbb{R}^4$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $L_+(D)$  oraz  $L_-(D)$  są klasycznymi planarnymi diagramami trywialnie zanurzonych splotów w  $\mathbb{R}^3$ .*

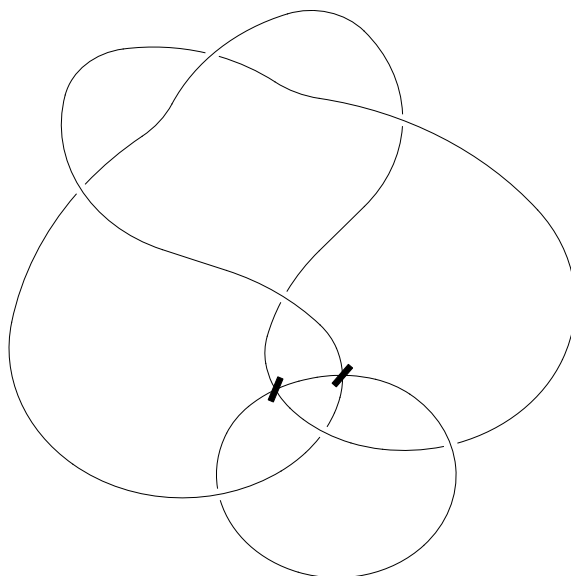
O takim diagramie jak w powyższym twierdzeniu mówimy, że jest *dopuszczalny* lub, że jest *ch-diagramem*. *Ch-indeks* diagramu markowanego to suma skrzyżowań klasycznych i wierzchołków z markerami.

Przykład diagramu markowanego dla trywialnej sfery pokazuje Rysunek 15.7.

## 15.2 Ruchy Yoshikawy

Zaprezentujemy teraz elementarne ruchy na płaszczyźnie, które charakteryzują równoważne sploty powierzchniowe, zatem są również równoważne ruchom Rosemana.

**Twierdzenie 15.8** ([150], hipoteza podana przez Yoshikawę w [160], więcej szczegółów dowiedziono w pracy [101]). *Dwa sploty powierzchniowe są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy ich markowane diagramy mogą być przekształcone jeden na drugi izotopią w  $\mathbb{R}^2$  oraz skończoną sekwencją dziesięciu typów ruchów ze zbioru  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_8, \Omega'_4, \Omega'_6\}$  (zwanymi ruchami Yoshikawy) pokazanych na Rysunku 15.8 (ich lustrzanych ruchów oraz ruchów mających wszystkie markery, w pokazanym fragmencie diagramu, zamienione na przeciwne).*



Rysunek 15.7: Trywialnie zanurzona sfera. [90]

**Twierdzenie 15.9** ([83], [84]). *Każdy ruch Yoshikawy ze zbioru  $\{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_6, \Omega'_6, \Omega_7\}$  jest niezależny od pozostałych dziewięciu typów ruchów.*

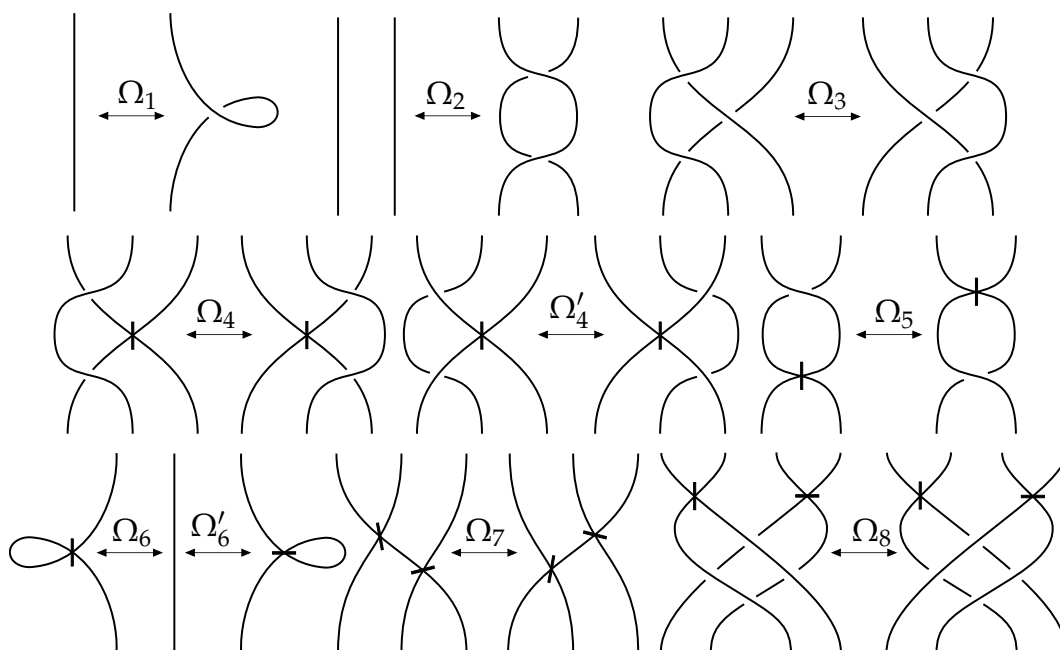
Autor pokazał niezależność ostatniego ruchu, co było otwartym problemem przez co najmniej kilka lat.

**Twierdzenie 15.10** (J. [74]). *Ruch Yoshikawy  $\Omega_8$  jest niezależny od pozostałych dziewięciu typów ruchów.*

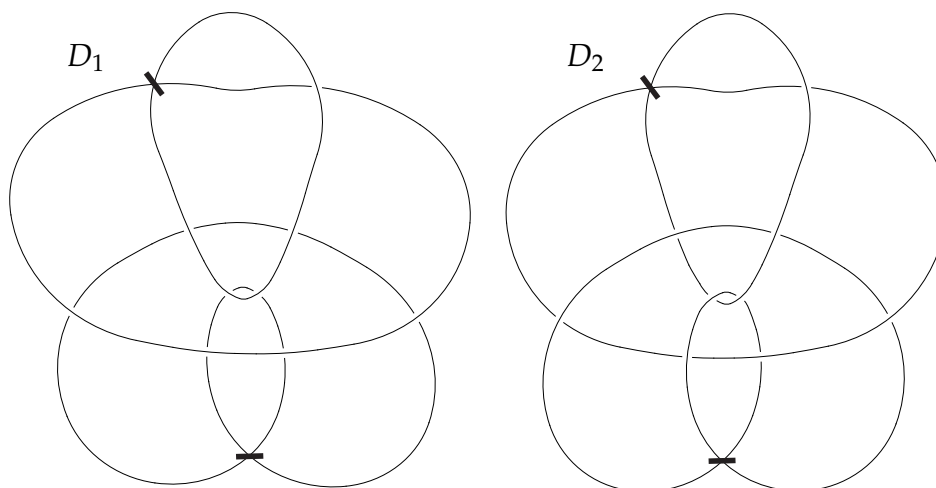
**Przykład 2.** Diagram  $D_1$  z Rysunku 15.9 nie może być przekształcony w diagram  $D_2$  z użyciem jedynie dziewięciu typów ruchów Yoshikawy  $\Omega_1, \dots, \Omega_7, \Omega'_4, \Omega'_6$  oraz planarnej izotopii w  $\mathbb{R}^2$ .

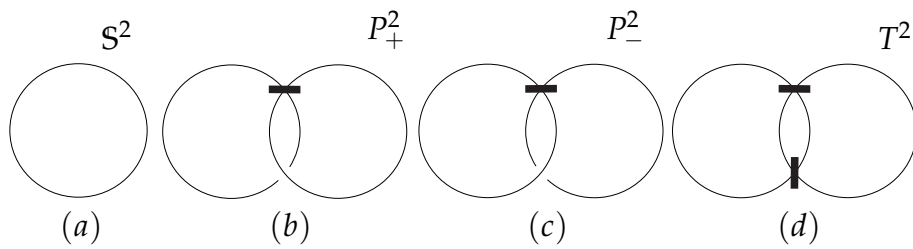
Markowany diagram dla trywialnej sfery  $S^2$  pokazany jest na Rysunku 15.10(a), trywialny torus  $T^2$  pokazany jest na Rysunku 15.10(d). Markowany diagram dla trywialnej dodatniej płaszczyzny rzutowej  $P^2_+$  pokazany jest na Rysunku 15.10(b) (dla ujemnej  $P^2_-$  zob. Rysunek 15.10(c)).

Na Rysunku 15.11 zaprezentowane jest jak ruchy  $\Omega_6, \Omega_7, \Omega_8$  odpowiadają położeniu odpowiednich punktów siodłowych na powierzchni.

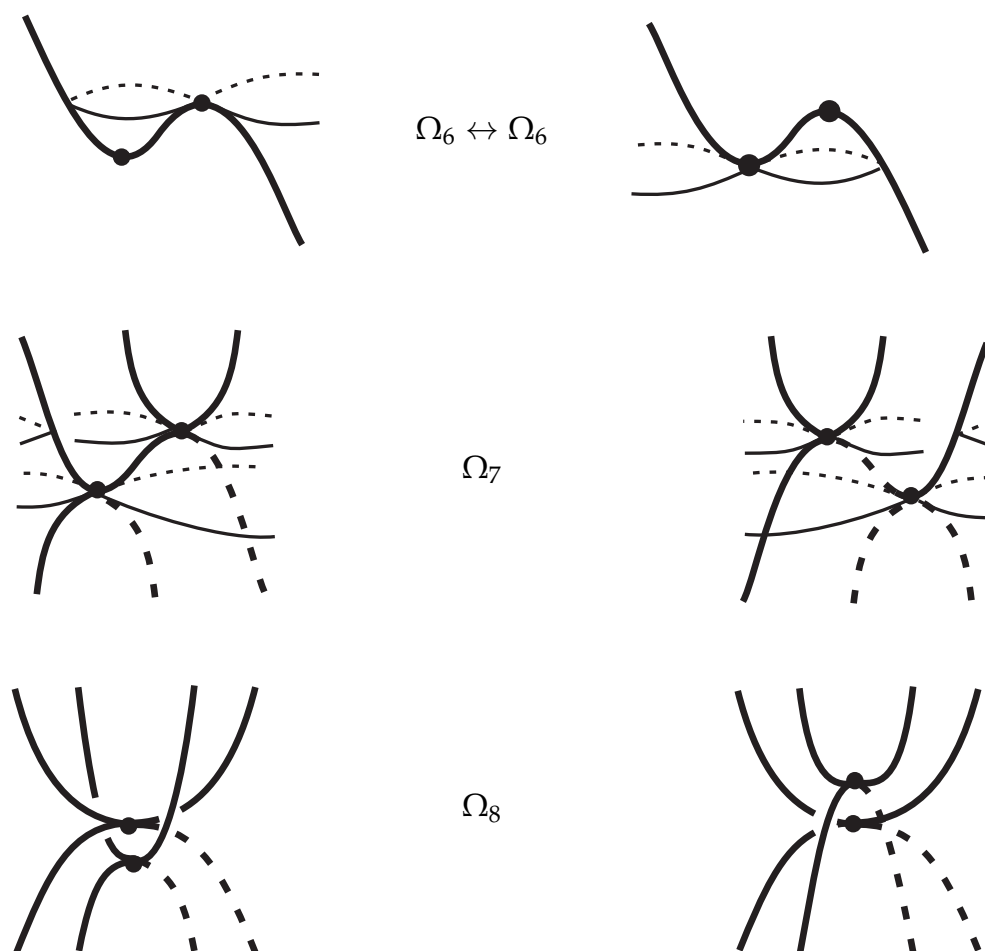


Rysunek 15.8: Ruchy Yoshikawy.

Rysunek 15.9: Diagramy  $D_1$  oraz  $D_2$ .



Rysunek 15.10: Przykłady trywialnie zanurzonych węzłów powierzchniowych.



Rysunek 15.11: Ruchy  $\Omega_6, \Omega_7, \Omega_8$  z punktu widzenia punktów siodłowych. [101]



## Rozdział 16

# Monoid zawężlonych powierzchni, związany z ruchami Yoshikawy

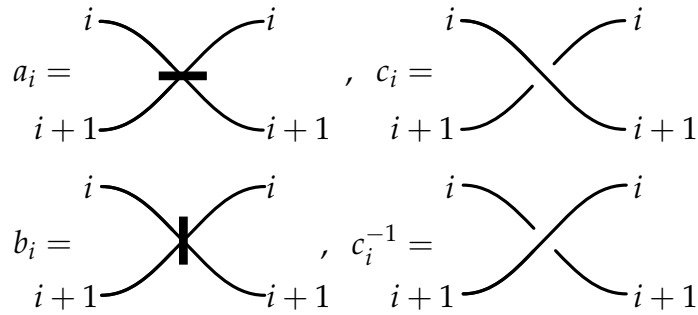
### 16.1 Prezentacja

Mówimy, że diagram markowany jest w postaci *warkoczowej*, jeśli zapominając o markerach jest geometrycznym domknięciem pewnego *warkocza singularnego* tzn. klasycznego warkocza z dodatkową możliwością transversalnego przecinania się pasm (termin wprowadzony niezależnie w pracach [12] oraz [20]) *stopnia*  $m$ , dla pewnego  $m \in \mathbb{Z}_+$  (tzn. posiadający  $m$  numerowanych pasm).

**Stwierdzenie 16.1** ([69]). *Dla każdej zawężlonej powierzchni istnieje jego diagram markowany w postaci warkoczowej.*

*Dowód.* Pozbywamy się markerów pozostawiając w ich miejscu punkty singularne, dalej stosujemy twierdzenie typu Alexandra dla singularnych warkoczy z pracy [20] (mówiące o tym, że każdy splot singularny jest równoważny domknięciu pewnego warkocza singularnego). Ponownie nakładając w odpowiedni sposób markery na wierzchołki otrzymujemy postać warkoczową diagramu markowanego. Zauważmy, że w tej procedurze używamy na diagramie jedynie ruchów typu  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_5$ . □

Autor wprowadźmy monoid  $SSB_m$  odpowiadający markowanym diagramom w postaci warkoczowej z  $m$  pasmami (nazwa powstała przez analogię do struktury singularnych warkoczy  $SB_m$  oraz grupy warkoczy  $B_m$ ). Elementy tego monoidu, tzw. *singularne warkocze powierzchniowe* są generowane przez elementy  $a_i, b_i, c_i, c_i^{-1}$  dla  $i = 1, \dots, m - 1$ , gdzie odpowiednio typów skrzyżowań i typów markerów pomiędzy  $i$ -tym a  $(i + 1)$ -szym pasmem (w horyzontalnym położeniu z numerowanymi od góry pasmami) prezentuje Rysunek 16.1. Pozostałe



Rysunek 16.1: Odpowiedniość generatorów monoidu.

pasma w warkoczach są prostymi odcinkami bez skrzyżowań czy wierzchołków, działaniu w monoidzie odpowiada *konkatenacja* pasm (tzn. zestawienie ich obok siebie i połączenie końcami o tych samych numerach).

Nasze domknięcie diagramu markowanego oznaczać będziemy poprzez dołączenie nawiasu kwadratowego  $[\ ]$  (oraz czasem umieszczając do niego indeks dolny, informujący o liczbie pasm które łączymy).

**Przykład 3.** Mamy dwa typy trywialnie zanurzonych płaszczyzn rzutowych  $[c_1 a_1]$  oraz  $[c_1^{-1} a_1]$ . Standardowy torus  $T^2$  może być przedstawiony jako  $[b_1 a_1]$ . Standardowa butelka Kleina to  $[b_1 a_1 c_1]$ .

Symbol  $\Delta_s$  niech oznacza znany z teorii warkoczy (jako *podstawowy warkocz Garside'a*) dodatni pół-skręt w  $\mathbb{R}^3$  liczby  $s$  pasm biorących udział w danym wyrażeniu (jasne jest z kontekstu których pasm), zawiera on jedynie iloczyn generatorów typu  $c_i$  (np.  $\Delta_4$  na czterech pierwszych pasmach jest równy  $c_1 c_2 c_3 c_1 c_2 c_1$ ).

Niech  $m \in \mathbb{Z}_+$  oraz  $i, k, n \in \{1, \dots, m-1\}$  takie, że  $|k-i|=1$ , ponadto niech  $x_i, y_i \in \{a_i, b_i, c_i, c_i^{-1}\}$ . W monoidzie  $SSB_m$  wprowadzamy następujące relacje:

- A1)  $c_i c_i^{-1} = 1,$
- A2)  $x_i y_n = y_n x_i$  dla  $n \neq i,$
- A3)  $x_i c_k c_i = c_k c_i x_k,$
- A4)  $x_i c_k^{-1} c_i^{-1} = c_k^{-1} c_i^{-1} x_k,$
- A5)  $a_i b_k = b_k a_i,$
- A6)  $a_i b_{i-2} (c_{i-1} c_{i-2} c_i c_{i-1})^2 = a_i b_{i-2}$  dla  $i > 2,$
- A7)  $b_i a_{i-2} (c_{i-1} c_{i-2} c_i c_{i-1})^2 = b_i a_{i-2}$  dla  $i > 2,$

$$A8) a_i^2 = a_i,$$

$$A9) b_i^2 = b_i,$$

$$A10) a_i b_i c_i^2 = a_i b_i,$$

$$A11) a_i b_k \Delta_3 = a_i b_k \Delta_3^{-1}.$$

Oznaczmy przez  $CSB_m$  podzbiór  $SSB_m$  składający się jedynie z tych elementów  $x$ , że  $L_+([x])$  oraz  $L_-([x])$  są diagramami trywialnych klasycznych splotów.

Zdefiniujmy ponadto następujące relacje typu Markova (przyjmując  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $x_i \in \{a_i, b_i, c_i, c_i^{-1}\}$ ):

$$C1) [x_i S_n]_n = [S_n x_i]_n \text{ dla } i < n \text{ oraz } x_i S_n \in CSB_n,$$

$$C2) [S_n]_n = [S_n x_n]_{n+1} \text{ dla } S_n \in CSB_n.$$

**Twierdzenie 16.2** (J. [69]). *Dokonując zamiany w algebraicznym zapisie zawężonej powierzchni, poprzez zastosowanie na słowach jednej z relacji A1)-A11) lub C1)-C2), otrzymamy zapis powierzchni równoważnej.*

Bezpośrednio z obserwacji podczas dokonania dodatniego pół-skrętu w  $\mathbb{R}^3$  liczby  $n$  pasm zawierających  $x_i$ , zachodzi następująca relacja.

**Lemat 16.3** (J. [69]). *Przy założeniach jak w definicji monoidu  $SSB_m$  zachodzi relacja:*

$$A12) x_i \Delta_n = \Delta_n x_{n-i+t-1} \text{ dla } t \leq i < n + t - 1 \leq m \text{ oraz } t \in \mathbb{Z}_+.$$

Używając diagramu podanego przez Montesinosa [110], możemy zapisać algebraicznie formułę dla każdej skręconej-okręconej powierzchni następująco.

**Stwierdzenie 16.4** (J. [69]). *Niech klasyczny węzeł  $\widehat{K}$  jest płat domknięciem warkocza  $K$  na  $2m + 1$  pasmach, wtedy*

$$\tau^n(\widehat{K}) = \left[ \left( \prod_{i=1}^m a_{2i} \right) K \left( \prod_{i=1}^m b_{2i} \right) K^{-1} \Delta_{2m+1}^{2n} \right].$$

Użyjemy teraz tej algebraicznej metody do połączenia twierdzeń Zeemana (Twierdzenie 17.5) oraz Litherlanda (Twierdzenie 12.10).

**Twierdzenie 16.5** (J. [69]). *Równania  $\tau^{-n}(K) = \tau^n(K)$  oraz  $(\tau^n(K))^* = \tau^n(K)$  są równoważne. Dokładniej, mamy:*

$$\tau^n(K) = (\tau^{-n}(K))^*.$$

*Dowód.* Niech  $K = \widehat{R}$ , wówczas

$$\begin{aligned}
(\tau^{-n}(K))^* &= \left[ \left( \prod_{i=1}^m a_{2i} \right) R \left( \prod_{i=1}^m b_{2i} \right) R^{-1} \Delta_{2m+1}^{-2n} \right]^* \text{ odbicie } \underline{\underline{\text{lustrzane}}} \\
&= \left[ \Delta_{2m+1}^{2n} R \left( \prod_{i=1}^m b_{2i} \right) R^{-1} \left( \prod_{i=1}^m a_{2i} \right) \right] \text{ relacja C1)} \\
&= \left[ \left( \prod_{i=1}^m a_{2i} \right) \Delta_{2m+1}^{2n} R \left( \prod_{i=1}^m b_{2i} \right) R^{-1} \right] \text{ relacja A12)} \\
&= \left[ \left( \prod_{i=1}^m a_{2i} \right) R \left( \prod_{i=1}^m b_{2i} \right) R^{-1} \Delta_{2m+1}^{2n} \right] = \tau^n(K)
\end{aligned}$$

□

Niech *indeks singularnych warkoczy* zawężłonej powierzchni  $F$ , oznaczany przez  $Ind_S(F)$ , oznacza minimalny stopień (tzn. ogólną liczbę pasm) spośród wszystkich singularnych warkoczy powierzchniowych, których domknięcie daje diagram powierzchni równoważnej z  $F$ .

Łatwo zauważyć, że jeśli  $Ind_S(F) = 1$  (czyli  $F = [1]_1$ ) wtedy  $F$  jest trywialną sferą  $S^2$ . Zbadajmy to pojęcie dalej.

**Twierdzenie 16.6** (J. [69]). *Jeśli  $Ind_S(F) = 2$ , wtedy istnieje dokładnie sześć różnych typów zawężłonych powierzchni  $F$ . Natomiast istnieje nieskończenie wiele parami różnych zawężłonych powierzchni  $F$  takich, że  $Ind_S(F) = 3$ .*

*Dowód.* Rozpatrzmy elementy  $CSB_2$ , z relacji A2) wynika, że wszystkie są przemienne. Zatem każda powierzchnia jest postaci  $[a_1^\alpha b_1^\beta c_1^\gamma c_1^{-\delta}]_2$ , dla  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ . Dalej z relacji A8) oraz A9) wynika, że wszystkie takie zawężłone powierzchnie są postaci  $[a_1^\alpha b_1^\beta c_1^\gamma c_1^{-\delta}]_2$ , gdzie  $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$  oraz  $\gamma, \delta \geq 0$ .

Jeśli  $\alpha \cdot \beta = 1$  wtedy dzięki relacji A10) mamy  $\gamma, \delta \in \{0, 1\}$  dając nam dwa rodzaje powierzchni  $[a_1 b_1]$  oraz  $[a_1 b_1 c_1]$ . Jeśli natomiast  $\alpha \cdot \beta = 0$  wtedy wygładzenie  $L_+$  lub  $L_-$  jest splotem torusowym  $T(2, \delta - \gamma)$ . Splot ten musi być trywialny (na podstawie Twierdzenia 15.7), więc  $|\delta - \gamma| \in \{0, 1\}$  (korzystając z relacji A1) w razie potrzeby) mamy, że  $\gamma, \delta \in \{0, 1\}$ . To daje nam dalsze cztery typy powierzchni:  $[1]_2, [c_1], [a_1 c_1], [a_1 c_1^{-1}]$ .

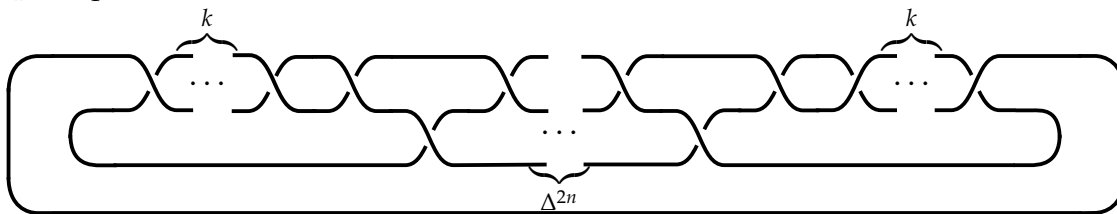
Wszystkie wspomniane sześć zawężłonych powierzchni są znane, jako parami różnego typu.

Co do przypadku  $Ind_S(F) = 3$ , możemy wziąć rodzinę zawężlonych powierzchni  $\tau^2(T(2,k))$  dla nieparzystej liczby pierwszej  $k$ . Są one parami nierównoważne (patrz praca [10]) oraz są 3-pasmowym domknięciem elementu  $a_2c_1^{-k}b_2c_1^k\Delta^4$  zgodnie ze Stwierdzeniem 16.4.  $\square$

W pracy [23] podane są trzy pary diagramów klasycznych splotów takich, że przekształcając diagram jednego z pary w drugi musimy wykonać minimalnie dwa (lub trzy w innych przypadkach) III ruchy Reidemeistera. Podamy poniżej rodzinę o podobnej własności, uzyskanej kompletnie inną metodą.

**Twierdzenie 16.7** (J. [69]). *Istnieje rodzina klasycznych diagramów  $D_{n,k}$  dla  $n \geq 2$  oraz nieparzystego  $k \geq 3$  splotów (o dwóch składowych) z  $6n + 2k$  skrzyżowaniami taka, że potrzeba co najmniej czterech III ruchów Reidemeistera do przekształcenia diagramu  $D_{n,k}$  do trywialnego diagramu bez skrzyżowań.*

*Dowód.* Rozpatrzmy  $D_{n,k}$  jako (zmodyfikowane) płat domknięcie elementu  $c_1^k\Delta^{2n}c_1^{-k}$  (zobacz Rysunek 16.2).



Rysunek 16.2: Diagram  $D_{n,k}$ .

Wiadomo, że każdy III ruch Reidemeistera na klatkach filmu odpowiada jednemu punktowi potrójnemu w diagramie powierzchni (Stwierdzenie 12.7). Z jednoznaczności typu zawężlonej powierzchni dla ustalonego diagramu markowanego (patrz Twierdzenie 15.6) wynika, że wystarczy pokazać istnienie zawężlonej powierzchni  $F$  takiej, że spełnione są następujące trzy warunki:  $L_-(F)$  jest diagramem  $D_{n,k}$ ,  $L_+(F)$  może być rozplątany bez użycia III ruchu Reidemeistera, powierzchnia  $F$  musi mieć co najmniej cztery punkty potrójne przy każdym jej rzutowaniu do  $\mathbb{R}^3$ .

Ostatnia ze wspomnianych rzeczy wynika z połączenia twierdzeń: Satoha (Twierdzenie 13.18) oraz Cochran (Twierdzenie 13.13), dla  $F$  będącym  $n$ -skreconym-okreconym węzłem torusowym  $T(2,k)$ , dla  $n \geq 2$  oraz nieparzystego  $k \geq 3$ .

Dwieście możliwości rozplątania  $L_+(F)$  można wprost, używając jedynie ruchów Reidemeistera typu I lub II. Diagram  $L_+(F)$  jest na początku (zmodyfikowanym) płat domknięciem słowa  $c_1^{-k}c_1^k\Delta^{2n}$ , po oczywistej redukcji słowa  $c_1^{-k}c_1^k$ ,

dalej stopniowo redukujemy każde płat domknięcie (z jednej strony) wyrażenia  $\Delta^2$ . Otrzymujemy na końcu diagram złożony z dwóch rozłącznych okręgów.

Widzimy wreszcie, że  $L_-(F)$  jest zmodyfikowanym poprzez planarną izotopię zaprezentowanym na Rysunku 16.2 diagramem  $D_{n,k}$  ponieważ  $\tau^n(T(2,k)) = [a_2c_1^{-k}b_2c_1^k\Delta^{2n}]$ .  $\square$

## 16.2 Reprezentacja

Dobrze znana reprezentacja Artina grupy warkoczy  $B_n$  może być wykorzystana do obliczenia grupy węzła. Stosując wolny rachunek różniczkowy Foxa do tej reprezentacji, możemy wyprowadzić reprezentację Burau. Jego nieredukowalna część może być wykorzystana do obliczenia wielomianu Alexandra węzła. Gemein rozszerza reprezentację Artina i Burau na reprezentację monoidu pojedynczego warkocza Baeza-Birmaniana  $SB_n$ . Mówimy, że monoid jest liniowy, jeśli jest izomorficzny z submonoidem macierzy  $M_n(K)$  dla pewnej liczby naturalnej  $n$  i pewnego ciała  $K$ . O.T. Dasbach i B. Gemein wykazali wierność dwuwymiarowej rozszerzonej reprezentacji Burau  $SB_3$ , więc ten monoid jest liniowa.

Naturalne jest więc poszukiwanie wiernego odwzorowania monoidu powierzchniowego warkoczy singularnych  $SSB_n$ . Autor pokazał, że dowolna reprezentacja  $SSB_n$ , dla dowolnych  $n \geq 3$ , do monoidu multiplikatywnego wszystkich  $2 \times 2$  lub  $3 \times 3$  macierzy z elementami w ustalonym ciele, nie jest wierna. Wyprowadza również nowe prezentacje monoidu powierzchniowego, jeden ze zmniejszoną liczbą relacji definiujących, a drugi ze zmniejszoną liczbą definiujących go singularnych generatorów.

**Stwierdzenie 16.8** (J. [72]). *Monoid  $SSB_n$  dla  $n \in \mathbb{Z}$  dla  $n > 1$  jest generowany przez  $a, b$  i  $c_i, c_i^{-1}$  dla  $i = 1, \dots, n-1$  i posiada następujące relacje (w stosunku do*

wcześniejszych oznaczeń uprościliśmy też oznaczenia  $a = a_1, b = b_1$ ):

$$c_i c_i^{-1} = 1 = c_i^{-1} c_i, \quad (\text{m1})$$

$$c_i c_j = c_j c_i \quad \text{dla } i + 1 < j < n, \quad (\text{m2})$$

$$c_i c_{i+1} c_i = c_{i+1} c_i c_{i+1} \quad \text{dla } i < n - 1, \quad (\text{m3})$$

$$a c_i = c_i a \quad \text{dla } i \neq 2, \quad (\text{m4})$$

$$b c_i = c_i b \quad \text{dla } i \neq 2, \quad (\text{m5})$$

$$a c_2 c_1^2 c_2 = c_2 c_1^2 c_2 a, \quad (\text{m6})$$

$$b c_2 c_1^2 c_2 = c_2 c_1^2 c_2 b, \quad (\text{m7})$$

$$(a c_2 c_3 c_1 c_2)^2 = (c_2 c_3 c_1 c_2 a)^2, \quad (\text{m8})$$

$$(b c_2 c_3 c_1 c_2)^2 = (c_2 c_3 c_1 c_2 b)^2, \quad (\text{m9})$$

$$a c_2 b c_2^{-1} = c_2 b c_2^{-1} a, \quad (\text{m10})$$

$$a b = b a, \quad (\text{m11})$$

$$a^2 = a, \quad (\text{m12})$$

$$b^2 = b, \quad (\text{m13})$$

$$a c_1 b = a c_1^{-1} b, \quad (\text{m14})$$

$$a (c_1 c_2 c_1) b = a (c_1 c_2 c_1)^{-1} b, \quad (\text{m15})$$

$$a (c_2 c_3 c_1 c_2) b = a (c_2 c_3 c_1 c_2)^{-1} b. \quad (\text{m16})$$

**Stwierdzenie 16.9** (J. [72]). W monoidzie  $SSB_n$  dla  $n \in \mathbb{Z}$  i  $n > 1$  zachodzą następujące relacje.

$$a b c_1 \neq a b, \quad (\text{e1})$$

$$a c_1^2 \neq a, \quad (\text{e2})$$

$$b c_1^2 \neq b, \quad (\text{e3})$$

$$a c_2 \neq c_2 a \quad \text{dla } n > 2, \quad (\text{e4})$$

$$b c_2 \neq c_2 b \quad \text{dla } n > 2, \quad (\text{e5})$$

$$c_1 c_2 \neq c_2 c_1 \quad \text{dla } n > 2, \quad (\text{e6})$$

$$(c_1 c_2 c_1)^2 \neq 1 \quad \text{dla } n > 2. \quad (\text{e7})$$

**Stwierdzenie 16.10** (J. [72]). Dla  $n, m \geq 2$  i dowolnej wiernej reprezentacji  $\phi : SSB_n \rightarrow M_m(K)$ , istnieje wierna reprezentacja  $\rho : SSB_n \rightarrow M_m(K)$  taka, że:

$$\begin{aligned}
\rho(a) &= I_s \oplus 0_{m-s} && \text{gdzie } s \in \{1, \dots, m-1\}, && \text{(p1)} \\
\rho(b) &\notin \{0_m, I_m\}, && && \text{(p2)} \\
\rho(a) &\neq \rho(b), && && \text{(p3)} \\
\rho(a)\rho(b) &\neq \rho(a), && && \text{(p4)} \\
\rho(a)\rho(b) &\neq \rho(b), && && \text{(p5)} \\
\rho(a)\rho(b)\rho(c_1) &\neq \rho(a)\rho(b), && && \text{(p6)} \\
\rho(a)\rho(c_2) &\neq \rho(c_2)\rho(a) && \text{dla } n > 2, && \text{(p7)} \\
\rho(b)\rho(c_2) &\neq \rho(c_2)\rho(b) && \text{dla } n > 2, && \text{(p8)} \\
\rho(c_1)\rho(c_2) &\neq \rho(c_2)\rho(c_1) && \text{dla } n > 2, && \text{(p9)} \\
(\rho(c_1)\rho(c_2)\rho(c_1))^2 &\neq I_m && \text{dla } n > 2, && \text{(p10)} \\
\rho(a)\rho(c_1)^2 &\neq \rho(a), && && \text{(p11)} \\
\rho(b)\rho(c_1)^2 &\neq \rho(b). && && \text{(p12)}
\end{aligned}$$

**Stwierdzenie 16.11** (J. [72]). *Jeśli reprezentacja  $\rho : SSB_n \rightarrow M_m(K)$  dla  $n, m \geq 2$  spełnia  $\text{rank}(\rho(a)) = 1$  or  $\text{rank}(\rho(b)) = 1$ , wtedy  $\rho$  nie jest wierna.*

Ze Stwierdzenia 16.10 oraz Stwierdzenia 16.11 mamy natychmiast następujące.

**Wniosek 16.12.** *Żadna reprezentacja  $\rho : SSB_n \rightarrow M_2(K)$  dla  $n \geq 2$  nie jest wierna.*

**Przykład 4.** Wierna reprezentacja  $\rho$  monoidu  $SSB_2$  może być zdefiniowana (w ciele charakterystyki zero) następująco:

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(c_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

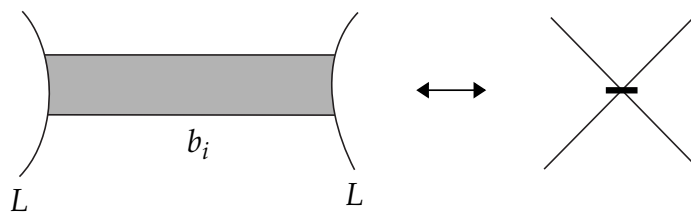
**Twierdzenie 16.13** (J. [72]). *Żadna reprezentacja  $\rho : SSB_n \rightarrow M_3(K)$  dla  $n \geq 3$  nie jest wierna.*



## Rozdział 17

# Powierzchnie jako klasyczne sploty z zaczepionymi wstęgami

Wstęga zaczepiona na splocie  $L$  jest obrazem zanurzenia  $b : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  przecinającego łącze  $L$  dokładnie w podzbiorku  $b(\partial I \times I)$ , gdzie  $I$  to domknięty przedział jednostkowy. Splot ze wstęgami  $LB$  w  $\mathbb{R}^3$  to para  $(L, B)$  składająca się ze splotu  $L$  w  $\mathbb{R}^3$  i zbioru skończonego  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  parami rozłącznych  $n$  wstęg rozpiętych na  $L$ .



Rysunek 17.1: Wstęga odpowiadająca markerowi.

Poprzez izotopię ambientalną  $\mathbb{R}^3$  skracamy wstęgi w splocie ze wstęgami  $LB$  tak, że każde pasmo jest zawarte na małym 2-dysku. Zastępując sąsiedztwo każdej wstęgi sąsiedztwem zaznaczonego wierzchołka z markerem, jak na Rysunku 17.1, otrzymujemy graf markowany, zwany *grafem markowanym stowarzyszonym* z  $LB$ .

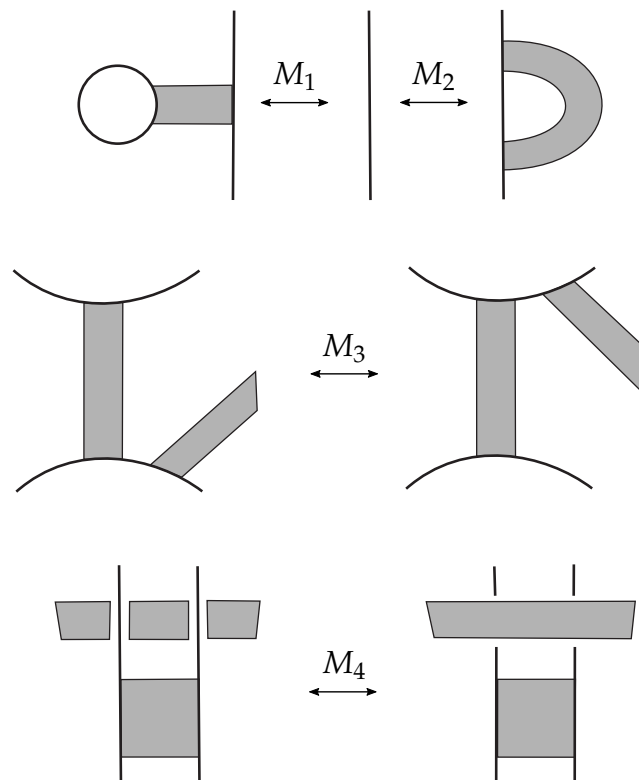
Na odwrót, gdy dany jest markowany graf  $G$  w  $\mathbb{R}^3$ , zastępując każdy markowany wierzchołek wstęgą jak na Rysunku 17.1, otrzymujemy splot ze wstęgami  $LB(G)$ , zwany *splotem ze wstęgami* z  $G$ .

Niech  $D$  będzie dopuszczalnym diagramem markowanym stowarzyszonym ze splotem ze wstęgami  $LB(D) = (L, B)$ ,  $L = L_-(D)$ ,  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  i  $\Delta_1, \dots, \Delta_n \subset \mathbb{R}^3$  będą wzajemnie rozłącznymi dyskami z  $\partial(\cup_{j=1}^n \Delta_j) = L_+(D)$

i niech  $\Delta'_1, \dots, \Delta'_b \subset \mathbb{R}^3$  będą wzajemnie rozłącznymi dyskami z  $\partial(\cup_{k=1}^b \Delta'_k) = L_-(D)$ . Definiujemy  $S(D) \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$  jako *splot powierzchniowy odpowiadający diagramowi  $D$*  poprzez przekroje w następujący sposób.

$$(\mathbb{R}^3, S(D) \cap \mathbb{R}^3_t) = \begin{cases} (\mathbb{R}^3, \emptyset) & \text{dla } t > 1, \\ (\mathbb{R}^3, L_+(D) \cup (\cup_{j=1}^a \Delta_j)) & \text{dla } t = 1, \\ (\mathbb{R}^3, L_+(D)) & \text{dla } 0 < t < 1, \\ (\mathbb{R}^3, L_-(D) \cup (\cup_{i=1}^n b_i)) & \text{dla } t = 0, \\ (\mathbb{R}^3, L_-(D)) & \text{dla } -1 < t < 0, \\ (\mathbb{R}^3, L_-(D) \cup (\cup_{k=1}^b \Delta'_k)) & \text{dla } t = -1, \\ (\mathbb{R}^3, \emptyset) & \text{dla } t < -1. \end{cases}$$

Wiadomo, że typ splotu powierzchniowego  $S(D)$  nie zależy od wyboru trywialnych dysków (por. [100]). Z konstrukcji  $S(D)$  wynika wprost, że  $D$  jest markowanym diagramem przedstawiającym  $S(D)$ . Więcej materiałów na ten temat można znaleźć w [88].

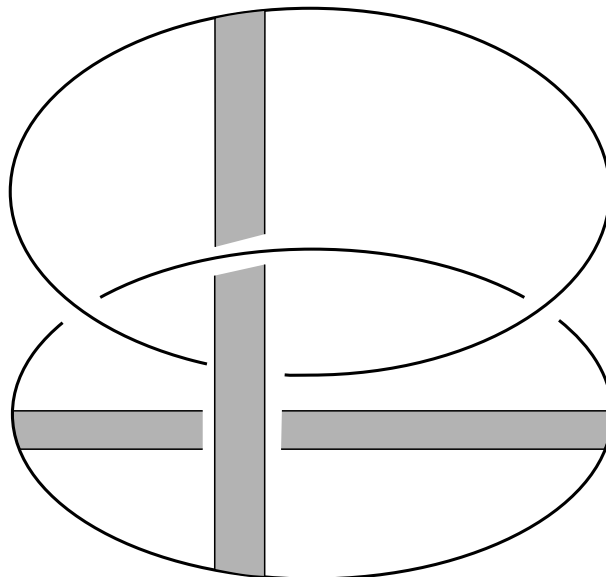


Rysunek 17.2: Ruchy na splotach ze wstęgami.

Mamy analogiczne (do przypadku markowanych grafów) ruchy dla splotów ze wstęgami ([150], [101]), tj. dowolne dwa sploty ze wstęgami reprezentującymi ten sam typ splotu powierzchniowego są powiązane skończoną sekwencją lokalnych ruchów przedstawiona na Rysunku 17.2 (oraz izotopią w  $\mathbb{R}^3$ ). Ruchy  $M_1, M_2, M_3, M_4$  nazywane są w j. angielskim odpowiednio *cup move*, *cap move*, *band-slide*, *band-pass*.

**Twierdzenie 17.1** (J. [74]). *Zbiór  $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$  jest minimalnym zbiorem generującym zbiór ruchów na splotach ze wstęgami.*

**Przykład 5.** Rozważmy diagram markowany dla skręconego-okręconego trójlistnika. Odpowiada on domknięciu singularnego słowa warkoczowego. Modyfikujemy go aby uzyskać splot ze wstęgami pokazany na Rysunku 17.3. Ten węzeł powierzchniowy (a dokładniej 2-węzeł) jest nietrywialny, co można pokazać obliczając jego grupę, która jest izomorficzna z grupą klasycznego trójlistnika.



Rysunek 17.3: Skręconego-okręconego trójlistnik.

*Indeksem wstęgowym* węzła powierzchniowego  $F$ , oznaczanym przez  $bn(F)$ , nazywamy minimalną liczbę wstęg wymaganą dla każdego splotu ze wstęgami reprezentującego  $F$ .

Widzimy, że jeśli  $bn(F) = 0$  wówczas  $F$  jest trywialną 2-sferą  $S^2$ .

**Twierdzenie 17.2** (J. [70]). *Jeśli węzeł powierzchniowy  $F$  spełnia  $bn(F) = 1$  wtedy  $F$  jest jedną z trywialnych płaszczyzn rzutowych  $P_+^2$  lub  $P_-^2$ .*

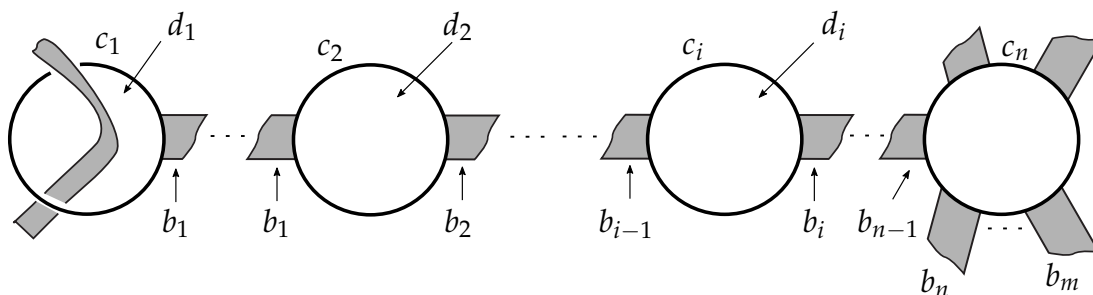
**Twierdzenie 17.3** (J. [70]). Niech  $F$  będzie  $n$ -skreconym-okreconym ( $n \neq \pm 1$ ) nietrywialnym 2-mostowym klasycznym węzłem, wtedy  $bn(F) = 2$ .

**Twierdzenie 17.4** (J. [70]). Niech  $n = 0, 1, 2, \dots$  wówczas istnieje węzeł powierzchniowy  $F$  taki, że  $bn(F) = n$ .

Autor wprowadził też tzw. *płaską postać splotu ze wstęgami*! *postać splotu ze wstęgami* zobacz Rysunek 17.4 którą opisuje następujące twierdzenie o jej istnieniu. Przykład dla dla  $n$ -skreconego-okreconego węzła torusowego  $T(2, 2k + 1)$  pokazany jest na Rysunku 17.5

**Twierdzenie 17.5** (J. [70]). Dla każdego węzła powierzchniowego  $F$  ze splotem ze wstęgami  $BL = (L, B)$  dla  $L = \{a_1, \dots, a_k\}$ , istnieje taki splot ze wstęgami  $BL_1 = (L_1, B_1)$  dla  $F$ , w postaci płaskiej, że  $L_1 = \{c_1, \dots, c_n\}$  oraz  $B_1 = \{b_1, \dots, b_m\}$  i dyski  $d_i$  rozpinające  $c_i$ , dla  $i = 1, \dots, n$ ;  $m \geq n - 1$ ;  $k \geq n$  oraz  $n = 1, 2, \dots$  spełniają następujące warunki.

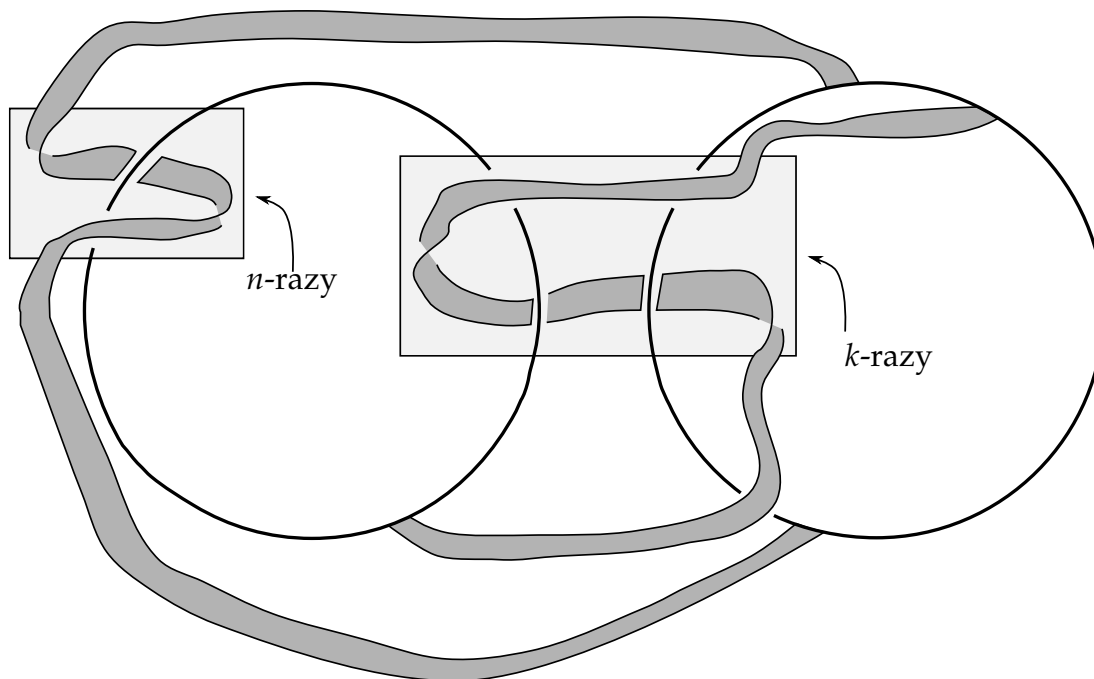
1. Wstęga  $b_i$  ma swoje końca na  $c_i$  oraz  $c_{i+1}$  dla  $i = 1, \dots, n - 1$ .
2. Wszystkie wstęgi  $b_n, \dots, b_m$  mają oba końce na  $c_n$ .
3. Jeśli  $n \geq 2$  wtedy  $d_1 \cap B_1 \neq \emptyset$ .



Rysunek 17.4: Płaska postać splotu ze wstęgami.

## 17.1 Sploty z wiązaniami

Niech  $L$  będzie zorientowanym splotem w  $\mathbb{R}^3$ , niech  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$  będzie zbiorem wiązań (domkniętych odcinków) właściwie zanurzonych w  $\mathbb{R}^3 \setminus L$  i niech  $\chi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z}$  będzie dowolną funkcją, zwaną tu *funkcją kolorującą*. Diagram z wiązaniami jest to regularny rzut splotu  $L$  i wiązań na płaszczyznę z informacją



Rysunek 17.5: Płaska postać dla  $n$ -skreconego-okreconego węzła torusowego  $T(2, 2k + 1)$ .

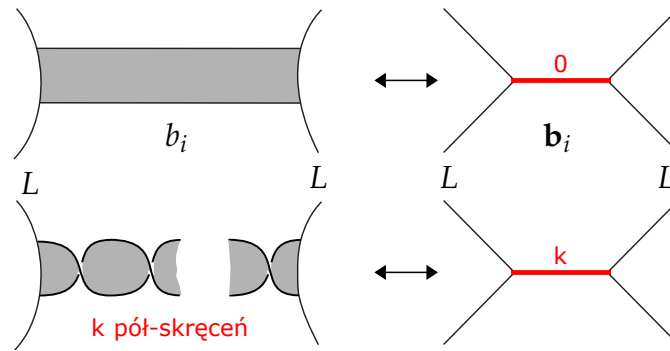
o nad/podskrzyżowaniach i kolorowaniu (tj. wartości funkcji kolorującej wiązania). Więcej informacji na temat diagramów z wiązaniami w przypadku węzłów i splotów klasycznych, można znaleźć w [46] i [92].

*Powierzchniowy diagram z wiązaniami*  $D = (L, \mathcal{B})$  jest diagramem z wiązaniami, w którym każde wiązanie jest zastępowane  $k$ -krotnością pół-skreconej wstęgi (zob. Rysunek 17.6), oba sploty  $L_+(D')$  i  $L_-(D')$  to diagramy klasycznych węzłów lub splotów trywialnych, gdzie  $D'$  to graf markowany stowarzyszony z  $L\mathcal{B}$ . Tak więc funkcja kolorująca tutaj nadaje wiązaniu liczbę pół-skrętów odpowiadającej mu wstęgi. Takie zastąpienie *bandażowaniem*.

Transformację odwrotną nazywamy *rozbandażowaniem* (kiedy występują ujemne pół-skręcenia, każdy z nich liczymy jako pół-skręcenie o wartości  $-1$ ).

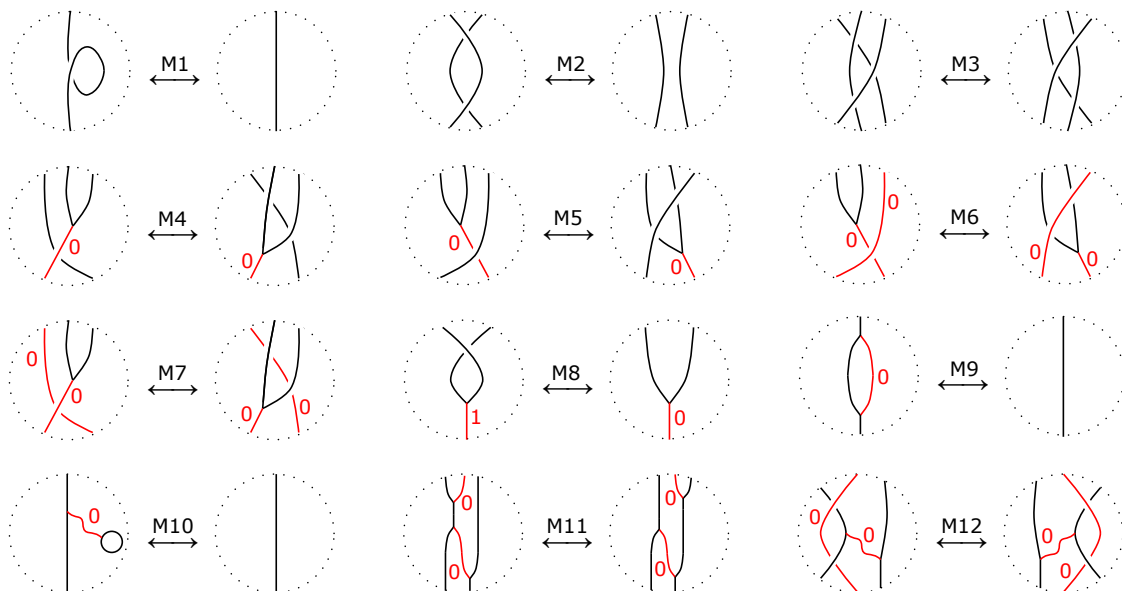
Autor zdefiniował planarne ruchy na powierzchniowych diagramach z wiązaniami które generują ruchy pomiędzy powierzchniowymi diagramami z wiązaniami odpowiadającymi równoważnym splotom powierzchniowym i udowodnił, że jest to minimalny zestaw. Zauważmy, że w przypadku planarnych ruchów Yoshikawy problem czy jest on minimalnym zestawem pozostaje otwarty.

**Twierdzenie 17.6** (J. [76]). *Dwa powierzchniowe diagramy z wiązaniami są związane planarną izotopią i skończoną sekwencją ruchów ze zbioru  $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_{12}\}$  po-*



Rysunek 17.6: Wstęga i wiązanie.

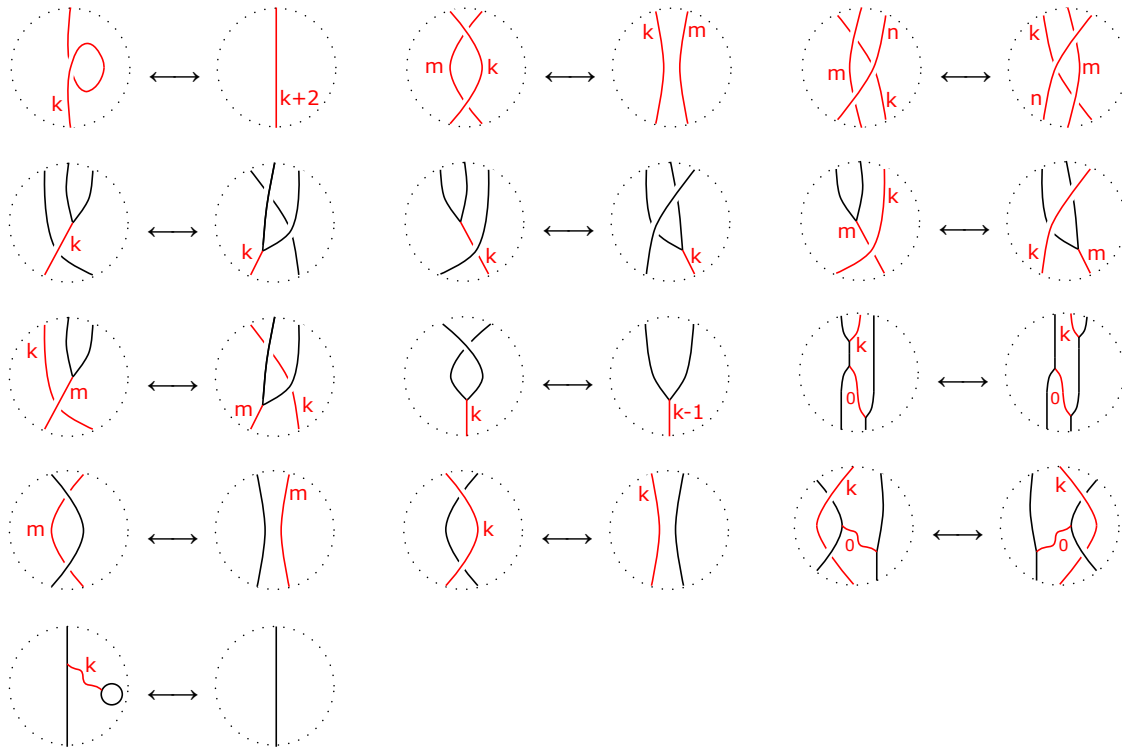
kazanych na Rysunku 17.7 wtedy i tylko wtedy, gdy reprezentują równoważne sploty powierzchniowe. Ponadto, każdy ruch z  $\mathcal{M}$  jest niezależny od pozostałych ruchów ze zbioru  $\mathcal{M}$ .



Rysunek 17.7: Lokalne ruchy na powierzchniowych diagramach z wiązaniami.

Z ruchów w  $\mathcal{M}$  możemy łatwo wyprowadzić użyteczne ruchy z ogólnymi kolorami wiązań jak na Rysunku 17.8.

**Przykład 6.** Na Rysunku 17.9 widzimy przekształcenia pomiędzy diagramem jeden raz skręconego-okręconego trójlistnika (zdefiniowanego jako domknięcie warkocza  $a_2c_1^3b_2c_1^{-3}\Delta^2$ ) a diagramem trywialnie zanurzonej sfery (nie pokazujemy tu ruchów  $M1, \dots, M8$ , ponieważ można je łatwo uzyskać w  $\mathbb{R}^3$ ).



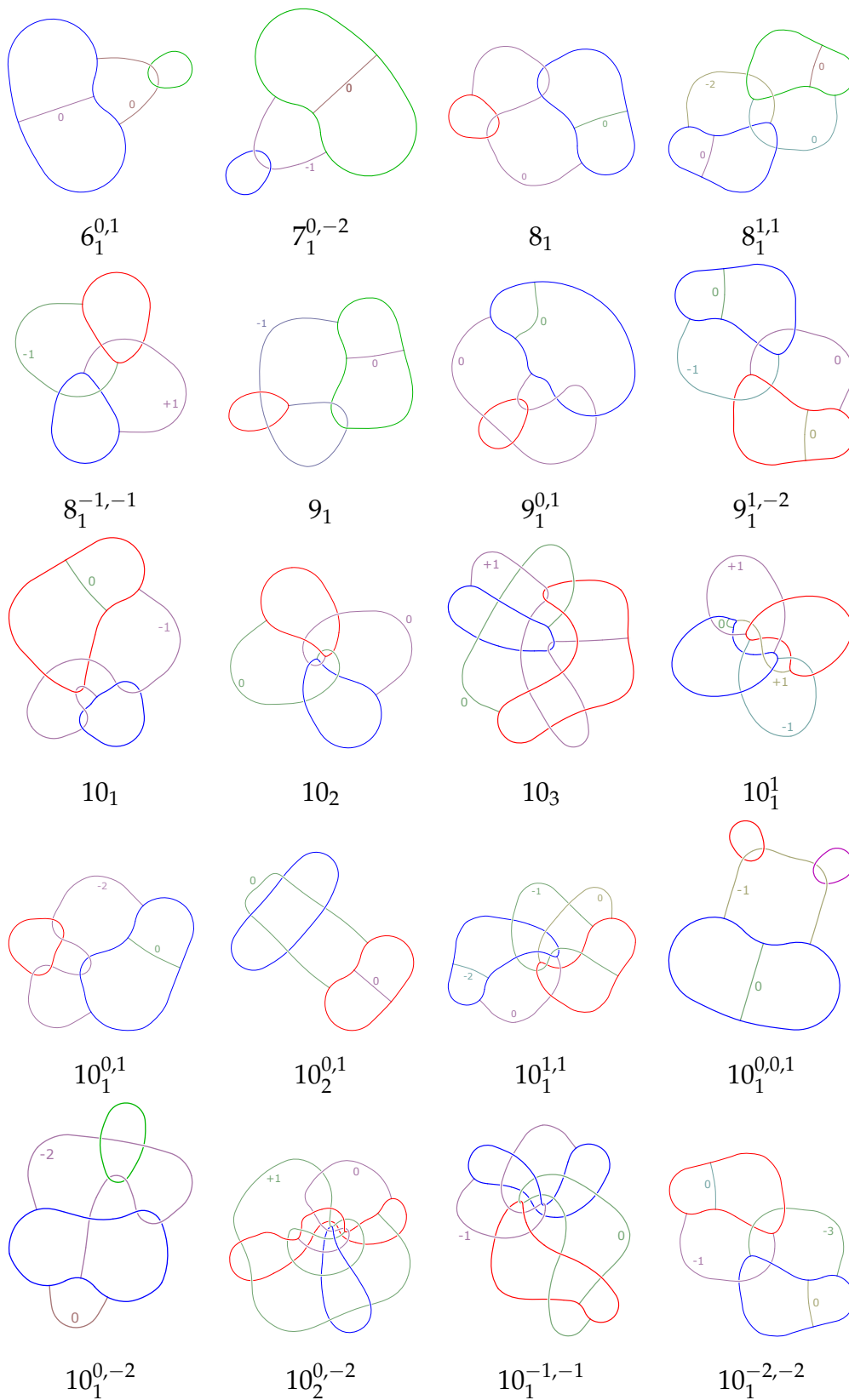
Rysunek 17.8: Wyprowadzone ruchy pochodne.

Analogicznie do płaskich postaci splotów ze wstęgami  $LB$ , możemy zdefiniować *płaskie postaci powierzchniowych diagramów z wiązaniami* jako diagramy, w których sploty odpowiadające  $L$ , jako klasyczne trywialne sploty są okręgami bez przecięć w płaszczyźnie diagramu.

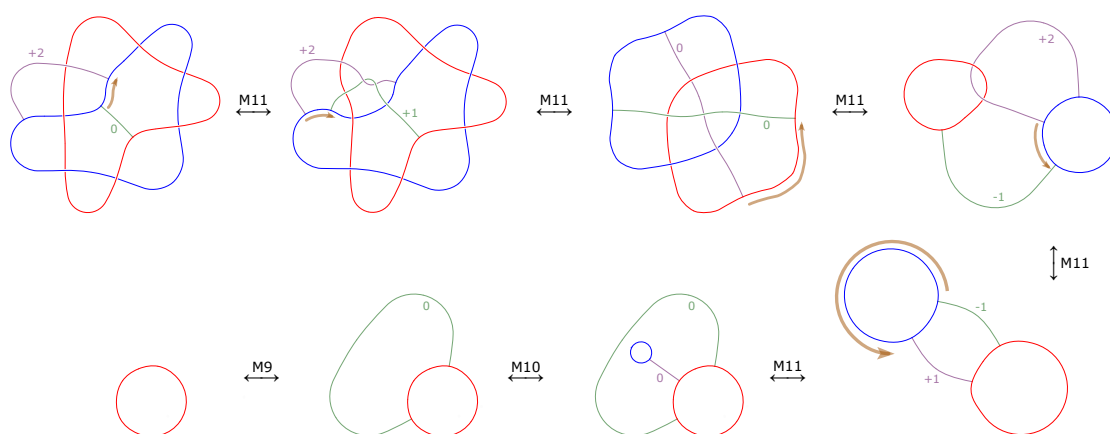
Płaskie postaci powierzchniowych diagramów z wiązaniami dla splotu powierzchniowego  $F$  jest szczególnie przydatna do odczytywania prezentacji grupy slotów powierzchniowych, tj.  $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus \text{int}(N(F)))$ , gdzie  $N(F)$  jest tubularnym otoczeniem  $F$ . Dzieje się tak dlatego, że nie mamy ani relacji z przecinania się pasm (tj. skrzyżowań splot-splot), bo ich nie mamy, ani nie mamy relacji z przecinania się wiązań (tj. przecinania się wiązanie-wiązanie), gdyż nie wnoszą nowych relacji do prezentacji tej grupy. Dlatego interesujące są tutaj tylko trójwalencyjne wierzchołki i skrzyżowania między splotami i wiązaniami.

W następującej tabelicy wyprowadzamy płaskie postaci powierzchniowych diagramów z wiązaniami każdego nietrywialnego splotu powierzchniowego z tabeli Yoshikawy [160].

Tabela 17.1: Nietrywialne sploty powierzchniowe w płaskiej postaci z ch-indekssem  $\leq 10$ .







Rysunek 17.9: Rozplątanie jeden raz skręconego-okręconego trójlistnika.

# Rozdział 18

## Immersje powierzchni w czteroprzestrzeni

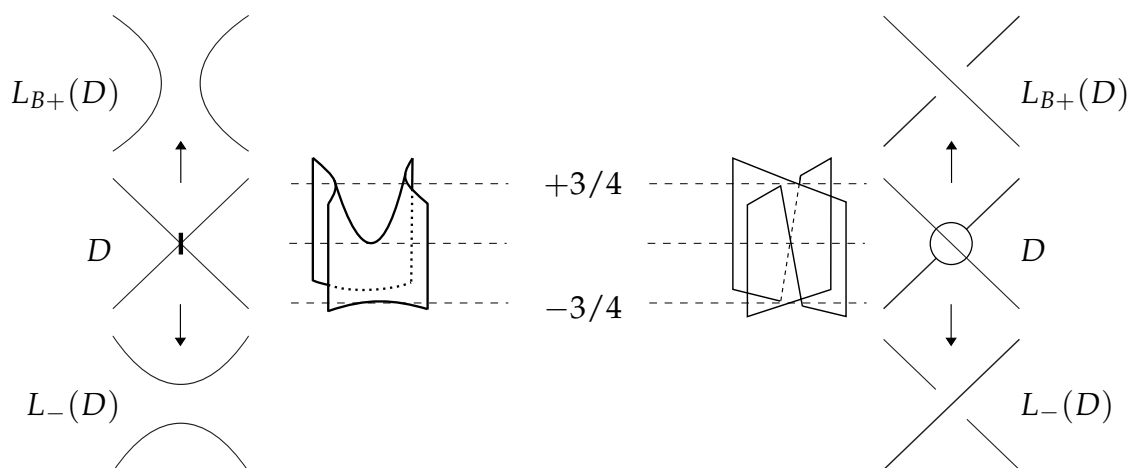
Niech  $X, Y$  będą gładkimi ( $C^\infty$ ) rozmaitościami. Niech  $f : X^n \rightarrow Y^m$  będzie gładkim odwzorowaniem. Nazywane jest ono *immersją* jeśli dla każdego punktu  $x \in X$  indukowane odwzorowanie pochodne jest monomorfizmem.

Z twierdzenie Whitneya o immersjach każde gładkie odwzorowanie  $f : X^n \rightarrow Y^m$  może być z dowolną dokładnością aproksymowane homotopijnie przez immersję gdy  $m \geq 2n$ . Rozważamy zatem gładkie immersje  $f : X^n \rightarrow Y^{2n}$  takie, że następujące warunki są spełnione:

- (i)  $\#|f^{-1}(f(x))| \leq 2$ ,
- (ii) jest tylko skończenie wiele punktów takich, że  $\#|f^{-1}(f(x))| = 2$ ,
- (iii) w każdej osobliwości  $p = f(x) = f(y)$ , istnieje układ współrzędnych wokół  $p$  gdzie te dwie współrzędne podprzestrzenie  $\mathbb{R}^n \times 0$  oraz  $0 \times \mathbb{R}^n$  są dokładnie obrazami immersji  $f$  w pobliżu  $x$  oraz  $y$  odpowiednio. Mówimy wtedy, że to odwzorowanie jest *samopoprzeczne*.

Dzięki twierdzeniu o położeniu ogólnym, każde odwzorowanie  $f : X^n \rightarrow Y^{2n}$  może być z dowolną dokładnością aproksymowane homotopijnie z immersją samopoprzeczna. Jesteśmy tu zainteresowani przypadkiem gdy  $n = 2$ ,  $m = 4$ , gdzie mamy zarówno skończenie punktowe samoprzecięcia, jak i nietrywialną teorię zawężeń kowymiaru 2.

Immersje w tym przypadku wymiarów (lub ich obrazy gdy nie prowadzi to do nieporozumień) zamkniętej (czyli zwartej i bez brzegu) powierzchni  $F$  w czteroprzestrzeni Euklidesową  $\mathbb{R}^4$  (lub równoważnie w  $S^4 = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ ) będziemy nazywać *immersyjny splot powierzchniowy* (lub *immersyjny węzeł powierzchniowy* jeśli powierzchnia bazowa jest spójna).



Rysunek 18.1: Otoczenia markera i punktu osobliwego.

Dwa immersyjne sploty powierzchniowe są *równoważne* jeśli istnieje zachowująca orientację autohomeomorfizm  $\mathbb{R}^4$  (lub  $S^4$ ) przeprowadzający jedną z nich w drugą.

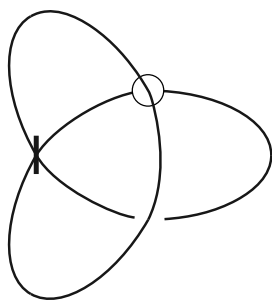
*Osobliwy graf markowany* lub inaczej *osobliwy diagram markowany* jest to 4-walencyjny graf zanurzony (ze sztywnymi wierzchołkami) w płaszczyznę, z wierzchołkami etykietowanymi na jeden z trzech typów: klasyczne skrzyżowania, markowane skrzyżowania, osobliwe skrzyżowania.

Każdy taki graf  $D$  będziemy nazywać *dopuszczalny* wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie wygładzenia markerów oraz odpowiednie zmiany skrzyżowań osobliwych punktów zgodnie z Rysunkiem 18.1, przy interpretacji podniesienie do czteroprzestrzeni jak w przypadku markowanych diagramów opisanych w jednym z poprzednich rozdziałów, dają diagramy trywialnych klasycznych splotów  $L_{B+}$  oraz  $L_{-}$ . Przykład takiego diagramu/grafu podany jest na Rysunku 18.2.

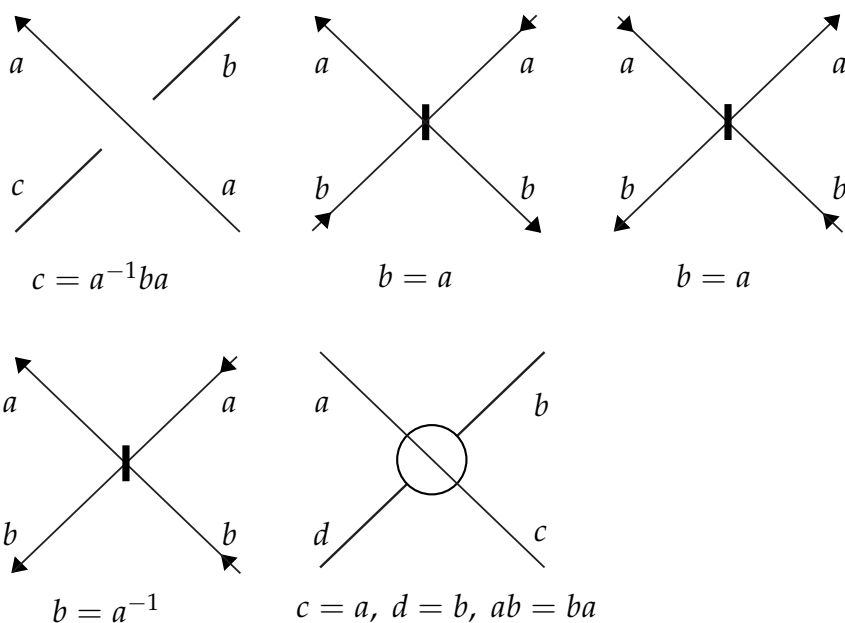
Autor wprowadził zestaw planarnych ruchów na dopuszczalnych osobliwych grafach markowanych łączących równoważne immersje splotów powierzchniowych.

*Grupą* immersyjnego splotu powierzchniowego nazywamy grupę podstawową jego dopełnienia w  $\mathbb{R}^4$ .

**Stwierdzenie 18.1.** *Dla każdego osobliwego diagramu markowanego  $D$  dla immersyjnego splotu powierzchniowego  $F$  z dowolnie ustaloną orientacją nitek (niezależnie czy powierzchnia jest orientowalna), grupa  $F$  jest generowana poprzez spójne składowe ujemnego wygładzenia  $L_{-}(D)$  diagramu  $D$  oraz relacji przedstawionych na Rysunku 18.3.*

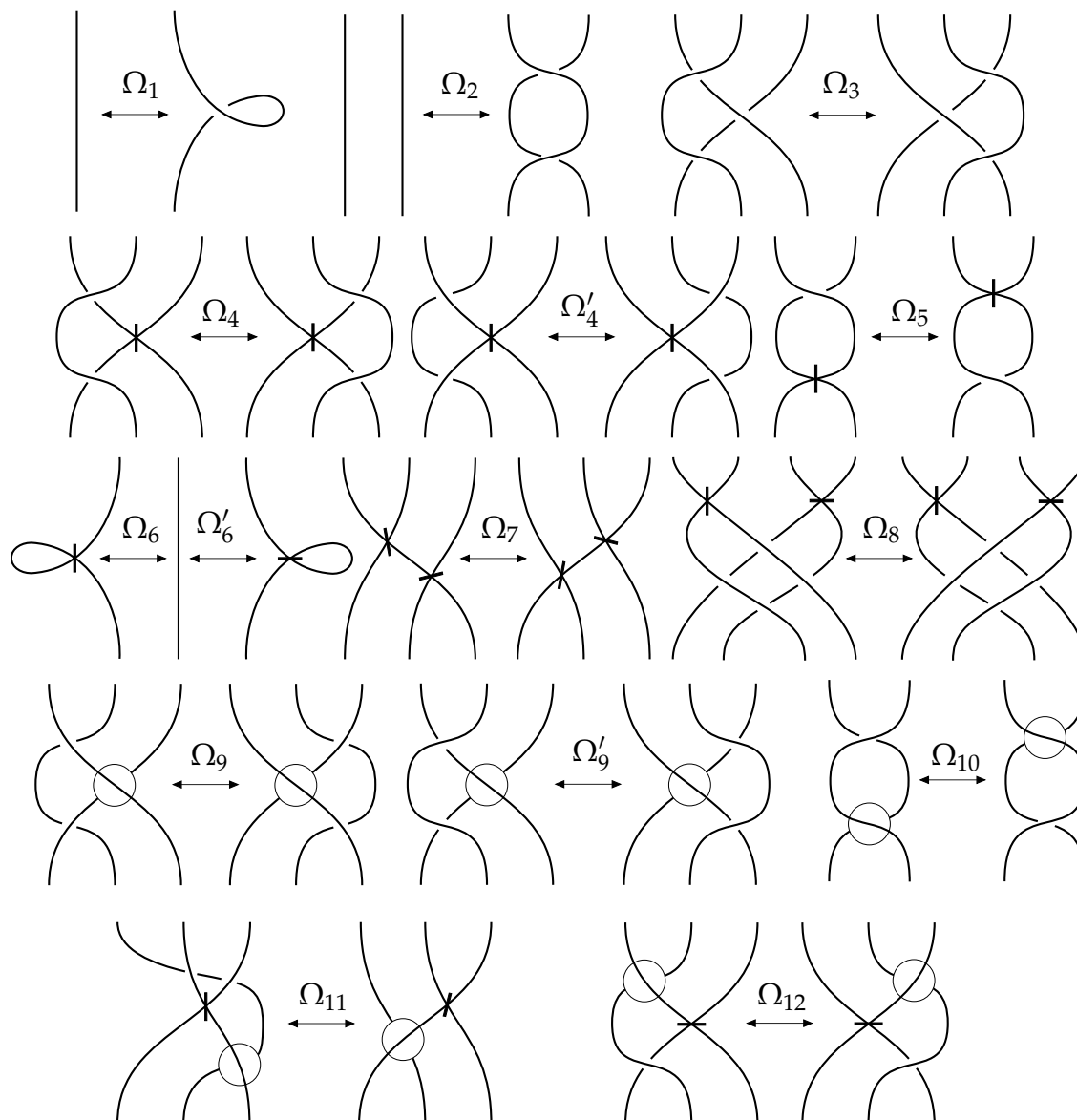


Rysunek 18.2: Przykład dopuszczalnego diagramu.



Rysunek 18.3: Reguły odczytania prezentacji grupy immersji.

**Twierdzenie 18.2** (J. [79]). *Dwa immersyjne sploty powierzchniowe w  $\mathbb{R}^4$  są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy ich osobliwe markowane diagramy są powiązane planarną izotopią i zestawem ruchów ze zbioru pokazanego na Rysunku 18.4.*



Rysunek 18.4: Generujący zestaw ruchów na osobliwych diagramach markowanych.

# Bibliografia

- [1] P. Aceto, M. Golla, and K. Larson. Embedding 3-manifolds in spin 4-manifolds, *Journal of Topology* 10 (2017), 301–323. (cyt. na str. 79)
- [2] C.C. Adams, *The Knot Book*, AMS (1994). (cyt. na str. 46, 48)
- [3] C.C. Adams, Triple crossing number of knots and links, *J. Knot Theory Ramifications* 22 (2013), 1350006. (cyt. na str. 77, 79)
- [4] C.C. Adams, J. Hoste and M. Palmer, Triple-crossing number and moves on triple-crossing link diagram, *J. Knot Theory Ramifications* 28 (2019), 1940001. (cyt. na str. 75)
- [5] C.C. Adams, Spanning Surfaces for Hyperbolic Knots in the 3-Sphere, in *Knots, Low-Dimensional Topology and Applications: Knots in Hellas*, Springer International Publishing, (2019). (cyt. na str. 71)
- [6] C.C. Adams, Multi-Crossing Number of Knots and Links, In *Encyclopedia knot theory*, CRC Press (2021), 63–70. (cyt. na str. 75)
- [7] J.W. Alexander, A lemma on a system of knotted curves, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 9 (1923), 93–95. (cyt. na str. 39)
- [8] J.W. Alexander, Topological Invariants of Knots and Links, *Transactions of the American Mathematical Society*, Volume 30, Issue 2 (1928), 275–306. (cyt. na str. 48)
- [9] J.W. Alexander and G. B. Briggs, On Types of Knotted Curves, *Annals of Mathematics, Second Series*, 28 (1926-1927), 562–86. (cyt. na str. 18)
- [10] S. Asami and S. Satoh, An infinite family of non-invertible surfaces in 4-space, *Bull. London Math. Soc.* 37 (2005), 285–296. (cyt. na str. 124)
- [11] Y. Bae, J.S. Carter, S. Choi, S. Kim, Non-orientable surfaces in 4-dimensional space, *J. Knot Theory Ramifications* 23 (2014), 1430002. (cyt. na str. 89, 91)

- [12] J.C. Baez, Link invariants of finite type and perturbation theory, *Lett. Math. Phys.* 26 (1992), 43–51 (cyt. na str. 120)
- [13] J.C. Baez and J.P. Muniain, *Gauge Fields, Knots and Gravity*, World Scientific Publishing (1994). (cyt. na str. 12)
- [14] S. Bai and W. Wang, New criteria and constructionsof Brunnian links, *J. Knot Theory Ramifications* (2020), 2043008. (cyt. na str. 43)
- [15] J.A. Baldwin, N. Dowlin, A.S. Levine, T. Lidman and R. Sazdanovic, Khovanov homology detects the figure-eight knot. *Bulletin of the London Mathematical Society* 53(3) (2021), 871–876. (cyt. na str. 66)
- [16] J.A. Baldwin, Y. Hu, and S. Sivek, Khovanov homology and the cinquefoil, *arXiv preprint arXiv:2105.12102* (2021). (cyt. na str. 66)
- [17] J.A. Baldwin and S. Sivek, Khovanov homology detects the trefoils, *Duke Mathematical Journal* 171.4 (2022), 885–956. (cyt. na str. 66)
- [18] J.A. Baldwin, S. Sivek, and Y. Xie, Khovanov homology detects the Hopf links. *Math. Res. Lett* 26(5) (2019), 1281—1290. (cyt. na str. 66)
- [19] T.F. Banchoff, Double tangency theorems for pairs of submanifolds, in *Geometry Symposium Utrecht, LNM 894*, Springer-Verlag (1981), 26–48. (cyt. na str. 85)
- [20] J. Birman, New points of view in knot theory, *Bull. Am. Math. Soc.* 28 (1993), 253—287. (cyt. na str. 120)
- [21] G. Burde and H. Zieschang, *Knots*, Walter de Gruyter. Second Revised and Extended Edition (2003). (cyt. na str. 21, 72)
- [22] C. Cao and G.R. Meyerhoff, The orientable cusped hyperbolic 3-manifolds of minimumvolume, *Invent. Math.* 146 (2001), 451—478. (cyt. na str. 47)
- [23] J.S. Carter, M. Elhamdadi, M. Saito, S. Satoh, A lower bound for the number of Reidemeister moves of type III, *Topology Appl.* 153 (2006), 2788–2794. (cyt. na str. 124)
- [24] J.S. Carter, S. Kamada and M. Saito, *Surfaces in 4-Space*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 142, Low-Dimensional Topology, III. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (2004). (cyt. na str. 90, 102)
- [25] J.S. Carter, M. Saito, Canceling branch points on projections of surfaces in 4-space, *Proc. Amer. Math. Soc.* 116 (1992), 229–237. (cyt. na str. 85, 97)

- [26] J. S. Carter and M. Saito, Normal Euler classes of knotted surfaces and triple points on projections, *Proc. Amer. Math. Soc.* 125 (1997), 617–623. (cyt. na str. 97)
- [27] J.S. Carter and M. Saito, *Knotted surfaces and their diagrams*, Math. Surveys and Monographs 55, AMS (1998). (cyt. na str. 88, 90, 91)
- [28] J.S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford and M. Saito, Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 355 (2003), 3947–3989. (cyt. na str. 107, 108)
- [29] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada and M. Saito, Computations of quandle cocycle invariants of knotted curves and surfaces, *Adv. in Math.* 157 (2001), 36–94. (cyt. na str. 92)
- [30] S. Chmutov, S. Duzhin, and J. Mostovoy. *Introduction to Vassiliev knot invariants*, Cambridge University Press, (2012). (cyt. na str. 55)
- [31] T. Cochran, Ribbon knots in  $S^4$ , *J. London Math. Soc.* 28 (1983), 563–576. (cyt. na str. 103)
- [32] J.H. Conway, An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties, in *Computational problems in abstract algebra*, Pergamon (1970), 329–358. (cyt. na str. 36)
- [33] A. Coward, Ordering the Reidemeister moves of a classical knot *Algebraic and Geometric Topology* 6 (2006), 659–671. (cyt. na str. 24)
- [34] P. Cromwell, Homogeneous links, *Journal of the London Mathematical Society* 2 (1989), 535–552. (cyt. na str. 79)
- [35] P. Cromwell, *Knots and Links*, Cambridge University Press (2004). (cyt. na str. 16, 20, 21, 42)
- [36] R.H. Crowell and R.H. Fox, *Introduction to knot theory*, Springer-Verlag (1963). (cyt. na str. 17, 20, 21)
- [37] I.K. Darcy, DNA Knots and Links, In: *Encyclopedia of knot theory*, CRC Press (2021), 901–910. (cyt. na str. 11)
- [38] R.J. Daverman and G.A. Venema, *Embeddings in Manifolds*, (2009). (cyt. na str. 21)
- [39] P. Dąbrowski-Tumański, Knots, links and lassos–topological manifolds in biological objects, *Ph.D. Thesis* (2019). (cyt. na str. 11)



- [40] P. Feller, The degree of the Alexander polynomial is an upper bound for the topological slice genus, *Geometry & Topology* 20 (2016), 1763–1771. (cyt. na str. 79)
- [41] E. Flapan, *When Topology Meets Chemistry. A Topological Look at Molecular Chirality*, Cambridge University Press (2000). (cyt. na str. 11)
- [42] E. Flapan, *Knots, Molecules, and the Universe: An Introduction to Topology*, AMS (2015). (cyt. na str. 11)
- [43] E. Flapan, Synthetic Molecular Knots and Links, In: *Encyclopedia of knot theory*, CRC Press (2021), 919–925. (cyt. na str. 11)
- [44] R.H. Fox, A quick trip through knot theory, in *Topology of 3-manifolds and related topics* (Prentice-Hall, 1962), 120–167. (cyt. na str. 90, 93)
- [45] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett and A. Ocneanu, A new polynomial invariant of knots and links, *Bull. Amer. Math.Soc.* 12 (1985), 239–249 (cyt. na str. 53)  
Millett, and Adrian Ocneanu. A new polynomial invariant of knots and links. *Bull. Amer. Math. Soc.(N.S.)*, 12(2):239–246, 1985
- [46] B. Gabrovšek, An invariant for colored bonded knots, *Stud Appl Math.* 146 (2021), 586–604. (cyt. na str. 132)
- [47] D. Garber, Braid group cryptography, in *Braids: Introductory lectures on braids, configurations and their applications*, World Scientific Publishing (2010) 329–403. (cyt. na str. 12)
- [48] C.A. Giller, A family of links and the Conway calculus, *Transactions of the American Mathematical Society* 270 (1982), 75–109. (cyt. na str. 79)
- [49] C.McA. Gordon and J. Luecke, Knots are determined by their complements, *Journal of the American Mathematical Society* 2.2 (1989), 371–415. (cyt. na str. 44)
- [50] J.E. Greene, Alternating links and definite surfaces, *Duke Mathematical Journal* 166.11 (2017), 2133–2151. (cyt. na str. 38)
- [51] T. Hagge, Every Reidemeister move is needed for each knot type. *Proceedings of the American Mathematical Society* 134 (2005), 295–301. (cyt. na str. 24)
- [52] R. Hanaki, Trivializing number of knots, *Journal of the Mathematical Society of Japan* 66 (2014), 435–447. (cyt. na str. 79)

- [53] E. Hatakenaka, An estimate of the triple point numbers of surface-knots by quandle cocycle invariants, *Topology Appl.* 139 (2004), 129–144. (cyt. na str. 103)
- [54] M. Hedden and Y. Ni, Khovanov module and the detection of unlinks, *Geometry & Topology* 17.5 (2013), 3027–3076. (cyt. na str. 66)
- [55] A. Henrich, N. MacNaughton, S. Narayan, O. Pechenik and J. Townsend, Classical and virtual pseudodiagram theory and new bounds on unknotting numbers and genus. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 20 (2011), 625–650. (cyt. na str. 79)
- [56] M.W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer-Verlag (1976). (cyt. na str. 21)
- [57] J. Hom and Z. Wu, Four-ball genus bounds and a refinement of the Ozsváth-Szabó tau-invariant, *Journal of Symplectic Geometry* 14 (2016), 305–323. (cyt. na str. 79)
- [58] F. Hosokawa, On  $\nabla$ -polynomials of links, *Osaka Math. J.* 10 (1958), 273–282. (cyt. na str. 49)
- [59] J. Hoste, Y. Nakanishi, and K. Taniyama, Unknotting operations involving trivial tangles, *Osaka Journal of Mathematics* 27 (1990), 555–566. (cyt. na str. 79)
- [60] J. Hoste, The enumeration and classification of knots and links, In: *Handbook of knot theory*, Elsevier Science (2005), 209–232. (cyt. na str. 13)
- [61] J. Hoste, Knot Tabulation, In: *Encyclopedia knot theory*, CRC Press (2021) 77–80. (cyt. na str. 13)
- [62] J. Hoste, M. Thistlethwaite and J. Weeks, The First 1,701,936 Knots, *Mathematical Intelligencer* 20 (1998), 33–46. (cyt. na str. 13)
- [63] J.A. Howie, A characterisation of alternating knot exteriors, *Geom. Topol.* 21 (2017), 2353–2371. (cyt. na str. 38)
- [64] A. Inoue, A symmetric motion picture of the twist-spun trefoil, *Experimental Mathematics* 22 (1) (2013), 15–25. (cyt. na str. 94, 95, 96)
- [65] N. Ito, *Knot projections*, CRC Press (2016). (cyt. na str. 12, 13, 16, 17)
- [66] S. Jablan, L. Radović, R. Sazdanović, and A. Zeković, Knots in art. *Symmetry* 4 (2012), 302–328. (cyt. na str. 11)
- [67] D.M. Jackson and I. Moffatt, *An Introduction to Quantum and Vassiliev Knot Invariants*, Springer (2019). (cyt. na str. 17, 18, 25, 32, 45)

- [68] M. Jabłonowski, Knotted surfaces and equivalencies of their diagrams without triple points, *J. Knot Theory Ramifications* 21 (2012), 1250019. (cyt. na str. 112, 113)
- [69] M. Jabłonowski, On a surface singular braid monoid, *Topology and its Applications* 160 (2013), 1773—1780. (cyt. na str. 120, 122, 123, 124)
- [70] M. Jabłonowski, On a banded link presentation of knotted surfaces, *J. Knot Theory Ramifications* 25 (2016), 1640004. (cyt. na str. 130, 131)
- [71] M. Jabłonowski, Minimal hard surface-unlink and classical unlink diagrams, *J. Knot Theory Ramifications* 28 (2019), 1940002. (cyt. na str. 27)
- [72] M. Jabłonowski, Presentations and representations of surface singular braid monoids, *Journal of the Korean Mathematical Society* 54 (2017), 749–762. (cyt. na str. 125, 126, 127)
- [73] M. Jabłonowski and Ł. Trojanowski, Triple-crossing projections, moves on knots and links, and their minimal diagrams, *J. Knot Theory Ramifications* 29 (2020), 2050015. (cyt. na str. 76, 78)
- [74] M. Jabłonowski, Independence of Yoshikawa eighth move and a minimal generating set of band moves, *Fundamenta Mathematicae* 251 (2020), 183–193. (cyt. na str. 79, 117, 130)
- [75] M. Jabłonowski, Triple-crossing number, the genus of a knot or link and torus knots, *Topology and its Applications* 285 (2020), 107389. (cyt. na str. 77, 78)
- [76] M. Jabłonowski, Minimal generating set of planar moves for surfaces embedded in the four-space, *J. Knot Theory Ramifications*, 30 (2021), 2150062. (cyt. na str. 132)
- [77] M. Jabłonowski, Tabulation of knots up to five triple-crossings and moves between oriented diagrams, to appear in *Tokyo Journal of Mathematics* (2022). (cyt. na str. 76, 78)
- [78] M. Jabłonowski, Upper and lower bound on delta-crossing number and tabulation of knots up to four delta-crossings, *Asian-European Journal of Mathematics* (2023), 2350110. (cyt. na str. 78, 79)
- [79] M. Jabłonowski, Minimal generating sets of moves for surfaces immersed in the four-space, submitted *preprint* (2022). (cyt. na str. 139)
- [80] I. Johnson, A. Henrich, *Knot Theory. An Interactive Introduction*, Dover (2017). (cyt. na str. 17, 18, 25, 29, 34, 35)

- [81] V. Jones, A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.* 12(1) (1985), 103–111. (cyt. na str. 50)
- [82] V. Jones, Planar algebras, *New Zealand Journal of Mathematics* 52 (2021), 1–107. (cyt. na str. 74)
- [83] Y. Joungh, J. Kim and S.Y. Lee, Ideal coset invariants for surface-links in  $\mathbb{R}^4$ , *J. Knot Theory Ramifications* 22 (2013), 1350052. (cyt. na str. 117)
- [84] Y. Joungh, J. Kim and S.Y. Lee, On generating sets of Yoshikawa moves for marked graph diagrams of surface-links, *J. Knot Theory Ramifications* 24 (2015), 1550018. (cyt. na str. 117)
- [85] A. Juhász, M. Miller, and I. Zemke, Knot cobordisms, bridge index, and torsion in Floer homology, *Journal of Topology* 13 (2020), 1701–1724. (cyt. na str. 79)
- [86] S. Kamada, Non-orientable surfaces in 4-space, *Osaka J. Math.* 26 (1989), 367–385. (cyt. na str. 86, 115)
- [87] S. Kamada, 2-dimensional braids and chart descriptions, in *Topics in Knot Theory*, NATO ASI Series C 399, Kluwer Academic Publisher (1993), 277–287. (cyt. na str. 103)
- [88] S. Kamada, *Surface-Knots in 4-Space*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, (2017). (cyt. na str. 23, 25, 32, 33, 36, 59, 129)
- [89] L.P. Karageorghis and F. Swenton, Determining the doubly slice genera of prime knots with up to 12 crossings, *J. Knot Theory Ramifications* 30 (2021), 2150057. (cyt. na str. 79)
- [90] A.B. Katok and V. Climenhaga. *Lectures on Surfaces: (almost) everything you wanted to know about them*, Vol. 46, AMS (2008). (cyt. na str. 67, 68, 69, 89, 115, 117)
- [91] L.H. Kauffman, State models and the Jones polynomial, *Topology* 26.3 (1987), 395–407. (cyt. na str. 37, 52)
- [92] L.H. Kauffman, Invariants of graphs in three-space, *Trans. Am. Math. Soc.* 311(2) (1989), 697–697. (cyt. na str. 132)
- [93] L.H. Kauffman, An invariant of regular isotopy, *Transactions of the American Mathematical Society* 318.2 (1990), 417–471. (cyt. na str. 54)
- [94] L. Kauffman and S. Lambropoulou, Unknots and molecular biology, *Milan Journal of Mathematics* 74 (2006), 227–263. (cyt. na str. 26)

- [95] L. Kauffman and S. Lambropoulou, Unknots and DNA, in *Current Developments in Mathematical Biology: Proceedings of the Conference on Mathematical Biology and Dynamical Systems, the University of Texas at Tyler, 7–9 October 2005*, Vol. 38. World Scientific (2007), 39–68. (cyt. na str. 26)
- [96] L. Kauffman, *Knots and Physics*, World Scientific Publishing. Fourth Edition (2013). (cyt. na str. 12)
- [97] L. Kauffman, The Unknotting Problem, in *Open Problems in Mathematics*, Edited by J.F. Nash and Jr., M.Th. Rassias, Springer International Publishing Switzerland (2016), 303–345. (cyt. na str. 26)
- [98] L. Kauffman, Virtual Knot Theory and Virtual Knot Cobordism, in *Knots, Low-Dimensional Topology and Applications: Knots in Hellas*, Springer International Publishing, (2019). (cyt. na str. 72)
- [99] K. Kawamura, On relationship between seven types of Roseman moves, *Topology and its Applications* 196 (2015), 551–557. (cyt. na str. 92)
- [100] A. Kawauchi, T. Shibuya, and S. Suzuki, Descriptions on surfaces in four-space, I; Normal forms, *Math. Sem. Notes Kobe Univ.* 10 (1982), 72–125. (cyt. na str. 115, 116, 129)
- [101] C. Kearton and V. Kurlin, All 2-dimensional links in 4-space live inside a universal 3-dimensional polyhedron, *Algebraic and Geometric Topology* 8 (2008), 1223–1247. (cyt. na str. 116, 119, 130)
- [102] M. Khovanov, A categorification of the Jones polynomial, *Duke Math. J.* 104.1 (2000), 359–426. (cyt. na str. 60, 66)
- [103] M. Kobayashi and T. Kobayashi. On canonical genus and free genus of knot. *J. Knot Theory Ramifications* 5 (1996), 77–85. (cyt. na str. 79)
- [104] P.B. Kronheimer and T.S. Mrowka. Khovanov homology is an unknot-detector. *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.* 113 (2011), 97–208. (cyt. na str. 66)
- [105] M. Lackenby, A polynomial upper bound on Reidemeister moves, *Annals of Mathematics* (2015), 491–564. (cyt. na str. 24)
- [106] R.A. Litherland, Symmetries of twist-spun knots, in *Knot theory and manifolds* (Vancouver, B.C., 1983), 97–107, Lecture Notes in Math. 1144, Springer, Berlin-New York, 1985. (cyt. na str. 95)
- [107] S.J.Jr. Lomonaco, The homotopy groups of knots I. How to compute the algebraic 2-type, *Pacific J. Math.* 95 (1981), 349–390. (cyt. na str. 115)

- [108] W. Menasco and M. Thistlethwaite, The classification of alternating links, *Annals of Mathematics* (1993), 113–171. (cyt. na str. 38)
- [109] T. Mochizuki, Some calculations of cohomology groups of finite Alexander quandles, *J. Pure Appl. Algebra* 179 (2003), 287–330. (cyt. na str. 108)
- [110] J.M. Montesinos, A note on twist spun knots, *Proc. Amer. Math. Soc.* 98 (1986), 180–184. (cyt. na str. 122)
- [111] Y. Moriah, On the free genus of knots, *Proceedings of the American Mathematical Society* (1987), 373–379. (cyt. na str. 79)
- [112] H.R. Morton, Seifert circles and knot polynomials, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 99 (1986), 247–260. (cyt. na str. 79, 81)
- [113] K. Murasugi, On a certain numerical invariant of link types, *Transactions of the American Mathematical Society* 117 (1965), 387–422. (cyt. na str. 79)
- [114] K. Murasugi, Jones polynomials and classical conjectures in knot theory, *Topology* 26.2 (1987), 187–194. (cyt. na str. 37)
- [115] K. Murasugi, On the braid index of alternating links, *Trans. Amer. Math. Soc.* (1) (1991), 237–260. (cyt. na str. 40)
- [116] K. Murasugi, *Knot Theory and its Applications*, Birkhauser (1996). (cyt. na str. 11, 18, 55)
- [117] D. Nishida, Triple crossing number and double crossing braid index, *J. Knot Theory Ramifications* 28 (2019), 1950002. (cyt. na str. 77)
- [118] B. Owens and S. Strle, Immersed disks, slicing numbers and concordance unknotting numbers, *Communications in Analysis and Geometry* 24 (2016), 1107–1138. (cyt. na str. 79)
- [119] P. Ozsváth and Z. Szabó, Knot Floer homology and the four-ball genus, *Geom. Topol.* 7 (2003), 615–639. (cyt. na str. 79)
- [120] O.P. Östlund, Invariants of knot diagrams and relations among Reidemeister moves, *J. Knot Theory Ramifications*, 10(8) (2001), 1215–1227. (cyt. na str. 24)
- [121] M. Polyak, Minimal generating sets of Reidemeister moves, *Quantum Topol.* 1(4) (2010), 399–411. (cyt. na str. 24)
- [122] J.H. Przytycki, *Węzły. Podejście kombinatoryczne do teorii węzłów*, Script. Warszawa (1995). (cyt. na str. 12, 55)



- [123] J.H. Przytycki, 3-coloring and other elementary invariants of knots, in *Knot Theory, Banach Center Publications*, 42 (1998), 275–295. (cyt. na str. 51)
- [124] J.H. Przytycki, *Teoria węzłów i związanych z nimi struktur dystrybucyjnych*, Wydawnictwo UG. Wydanie drugie (2016), spisał M. Jabłonowski. (cyt. na str. 11, 60, 105)
- [125] J.H. Przytycki, Knot Theory: From Fox 3-Colorings of Links to Yang-Baxter Homology and Khovanov Homology. In: *Knots, Low-Dimensional Topology and Applications*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 284 (2019), 115–145. (cyt. na str. 11)
- [126] J.H. Przytycki and P. Traczyk, Invariants of links of Conway type, *Kobe J.Math.* 4 (1987), 115–139. (cyt. na str. 53)
- [127] J.S. Purcell, *Hyperbolic Knot Theory*, AMS (2020). (cyt. na str. 34, 37, 41)
- [128] J. Rasmussen, Khovanov homology and the slice genus, *Inventiones mathematicae* 182 (2010), 419–447. (cyt. na str. 79)
- [129] K. Reidemeister, Elementare Begründung der Knotentheorie, *Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg* 5 (1927), 24–32. (cyt. na str. 18)
- [130] D. Roseman, Reidemeister-type moves for surfaces in four-dimensional space, in "Knot Theory" *Banach Center Publications* 42 (1998), 347–380. (cyt. na str. 91, 92)
- [131] D. Roseman, Projections of codimension two embeddings. In: *Knots in Hellas '98 Series on Knots and Everything*, 24 (2000), 380–410. (cyt. na str. 21, 84)
- [132] C.P. Rourke and B.J. Sanderson, *Introduction to piecewise-linear topology*, Springer-Verlag (1972). (cyt. na str. 21)
- [133] D. Ruberman. Mutation and volume of knots in  $S^3$ , *Invent. Math.* 90 (1987), 189–215. (cyt. na str. 47)
- [134] T.B. Rushing, *Topological embeddings*, Academic Press (1973). (cyt. na str. 21)
- [135] S. Satoh, On non-orientable surfaces in 4-space which are projected with at most one triple point, *Proc. Amer. Math. Soc.* 128 (2000), 2789–2793. (cyt. na str. 85, 86, 99, 100)
- [136] S. Satoh, Lifting a generic surface in 3-space to an embedded surface in 4-space, *Topology Appl.* 106 (2000), 103–113. (cyt. na str. 85, 87, 88, 98, 99)

- [137] S. Satoh, Minimal triple point numbers of some non-orientable surface-links, *Pacific J. Math.* 197 (2001), 213–221. (cyt. na str. [97](#), [98](#), [99](#), [100](#), [101](#), [104](#))
- [138] S. Satoh, Double decker sets of generic surfaces in 3-space as homology classes, *Illinois J. Math.* 45 (2001), 823–832. (cyt. na str. [111](#), [112](#))
- [139] S. Satoh, Surface diagrams of twist-spun 2-knots, *J. Knot Theory Ramifications* 11 (2002), 413–430. (cyt. na str. [103](#))
- [140] S. Satoh, No 2-knot has triple point number two or three, *Osaka J. Math.* 42 (2005), 543–556. (cyt. na str. [103](#))
- [141] S. Satoh and A. Shima, The 2-twist-spun trefoil has the triple point number four, *Trans. Amer. Math. Soc.* 356 (2004), 1007–1024. (cyt. na str. [84](#), [86](#), [88](#), [103](#), [104](#))
- [142] S. Satoh and A. Shima, Triple point numbers and quandle cocycle invariants of knotted surfaces in 4-space, *New Zealand J. Math.* 34 (2005), 71–80. (cyt. na str. [103](#), [109](#))
- [143] M.G. Scharlemann, Unknotting number one knots are prime, *Inventiones mathematicae* 82.1 (1985), 37–55. (cyt. na str. [47](#))
- [144] M.G. Scharlemann and A. Thompson, Link genus and the Conway moves, *Comment. Math. Helv.* 64 (1989), 527–535. (cyt. na str. [79](#))
- [145] H. Schubert, Über eine numerische Knoteninvariante, *Mathematische Zeitschrift* 61.1 (1954), 245–288. (cyt. na str. [47](#))
- [146] T. Shibuya, Some relations among various numerical invariants for links, *Osaka Journal of Mathematics* 11 (1974), 313–322. (cyt. na str. [79](#))
- [147] A. Shima, On simply knotted tori in  $S^4$ , *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 4 (1997), 279–339. (cyt. na str. [83](#))
- [148] A. Shima, An unknotting theorem for tori in  $S^4$ , *Revista Matem. Comp.* 11 (1998), 299–309. (cyt. na str. [112](#))
- [149] C. Sundberg, and M. Thistlethwaite, The rate of growth of the number of prime alternating links and tangles, *Pacific Journal of Mathematics* 182.2 (1998), 329–358. (cyt. na str. [38](#))
- [150] F.J. Swenton, On a calculus for 2-knots and surfaces in 4-space, *J. Knot Theory Ramifications* 10 (2001), 1133–1141. (cyt. na str. [116](#), [130](#))
- [151] M.B. Thistlethwaite, A spanning tree expansion of the Jones polynomial, *Topology* 26.3 (1987), 297–309. (cyt. na str. [37](#))



- [152] B. Trace, On the Reidemeister moves of a classical knot, *Proc. Amer. Math. Soc.* 89 (1983), 722–724. (cyt. na str. 24)
- [153] R.E Tuzun and A.S. Sikora, Verification of the Jones unknot conjecture up to 24 crossings, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 30.03 (2021), 2150020. (cyt. na str. 51)
- [154] O. Viro, Khovanov homology, its definitions and ramifications, *Fund. Math.* 184 (2004), 317–342. (cyt. na str. 60)
- [155] P. Vogel, Representation of links by braids: A new algorithm, *Comment. Math. Helv* 65.1 (1990), 104–113. (cyt. na str. 39)
- [156] H. Wong, Protein Knots, Links and Non-Planar Graphs, In: *Encyclopedia of knot theory*, CRC Press (2021), 911–917. (cyt. na str. 11)
- [157] T. Yajima, On simply knotted spheres in  $\mathbb{R}^4$ , *Osaka J. Math.* 1 (1964), 133–152. (cyt. na str. 102)
- [158] T. Yashiro, Deformations of surfaces in 4-dimensional space, *New Zealand J. Math.* 33 (2004), 187–203. (cyt. na str. 92)
- [159] T. Yashiro, Triple point numbers of twist-spun knots, *J. Knot Theory Ramifications* 14 (2005), 831–840. (cyt. na str. 103)
- [160] K. Yoshikawa, An enumeration of surfaces in four-space, *Osaka J. Math.* 31 (1994), 497–522. (cyt. na str. 116, 134)
- [161] E.C. Zeeman, Twisting spun knots, *Trans. Amer. Math. Soc.* 115 (1965), 417–495. (cyt. na str. 95)

# Skorowidz

- 2-supęł, 41
- 2-węzeł, 83
- 3-sfera, 22
- $P^2$ -redukowalność, 100
- $a$ -łuk, 98
- $m$ -łuk, 98
- $n$ -kolorowalność Foxa, 46
- $p$ -diagram, 111
- $p$ -równoważność, 111
- algorytm
  - Seiferta, 71
  - Vogela, 39
- ambientalna izotopia, 19
- bandażowanie, 132
- butelka Kleina, 69
- BW orientacja, 87
- ch-diagram, 116
- ch-indeks, 116
- charakterystyka Eulera
  - powierzchni, 69
- cień
  - pierwszy, 26
  - złożony, 26
- dekompozycja otwartej książki, 94
- delta równoważność, 16
- diagram
  - markowany, 115
  - splotu klasycznego, 23
  - zawężłonej powierzchni, 85
  - alternujący, 36
  - dodatni, 38
  - naprzemienny, 36
  - nierozszczepialny, 26
  - opadający, 50
  - pierwszy, 26
  - potrójnych skrzyżowań, 74
  - rozzczepialny, 26
  - splotu, 17
  - trójkolorowalny, 45
  - z wiązaniami, 131
  - złożony, 26
- dodatni punkt potrójny, 87
- dodatnia płaszczyzna rzutowa, 86
- dopuszczalny
  - diagram markowany, 116
  - graf osobliwy, 138
- DP graf, 86
- drzewo motkowe, 55
- film, 90
- flype, 37
- funkcja kolorowania wiązań, 131
- głębokość drzewa motkowego, 55
- genus
  - kanoniczny, 77
  - powierzchni, 68
  - splotu, 71
  - węzła, 71
- graf markowany, 128
- grupa
  - zawężłonej powierzchni, 93
  - immersyjnego splotu, 138

- podstawowa, 59
- splotu, 59
- węzła, 59
- gwiazda Dawida, 28
- hiperboliczne rozszczepienie, 115
- hipotezy Taita, 37
- homologie
  - Khovanova, 60
  - małej kategorii, 64
- idempotentność, 106
- immersja, 137
- immersyjny
  - splot powierzchniowy, 137
  - węzeł powierzchniowy, 137
- indeks
  - potrójnych skrzyżowań, 75
  - singularnych warkoczy, 123
  - skrzyżowaniowy, 45
  - warkoczowy, 46
  - wstęgowy, 130
  - zaczepienia, 45
- izotopia, 19
- izotopijne przestrzenie, 19
- kanoniczne dołączenie rączki, 68
- kategoria gładka, 21
- kawałek płaszczyzny
  - środkowy, 85
  - dolny, 85
  - górnny, 85
- kei, 105
  - rdzenny, 106
- klatka filmu, 90
- kod
  - Alexandera-Briggsa, 28
  - DT, 29
  - Gaussa, 30
  - PD, 30
- kolor punktu rozgałęzienia, 87
- kolorowanie
  - quandle, 107
  - w szachownicę, 87
- konkatenacja, 121
- kwadrl, 105
- liczba
  - gordyjska, 46
  - mostowa, 47
  - rozwiązująca, 46
  - skrzyżowaniowa, 45
  - trójkolorująca, 46
  - warkoczowa, 46
  - zaczepienia, 44
- macierz Seiferta, 73
- maksimum powierzchni, 90
- marker, 115
- minimalna liczba punktów
  - potrójnych, 97
  - rozgałęzienia, 97
- minimum powierzchni, 89
- mutanty, 42
- naturalna orientacja, 75
- Nawias Kauffmana, 52
- nić, 74
- niewęzeł, 25
- niezmiennik kocyklowy, 107
- normalna liczba Eulera, 85
- notacja
  - DT, 29
  - Gaussa, 30
  - PD, 30
- objętość hiperboliczna, 47
- odbicie lustrzane, 31
- ogniwo splotu, 22
- okręgi Seiferta, 71
- orientacja splotu, 18
- osobliwy
  - diagram markowany, 138
  - graf markowany, 138
- półka, 105
- płaszczyzna rzutowa, 68

- parasol Whitneya, 84
- pasmo warkocza, 39
- pieczęć Solomona, 28
- pierścienie Boromeusza, 28
- planarna izotopia, 18, 20
- położenie ogólne powierzchni, 84
- południk, 100
- podniesienie zanurzenia, 87
- podstawowy warkocz Garside'a, 121
- postać warkoczowa, 120
- potrójne skrzyżowanie, 74
- powierzchnia, 67
  - bazowa, 83
  - Boya, 88
  - wstęgowa, 94
  - zamknięta, 83
  - zawężłona, 83
  - Seiferta, 70
  - walca, 68
- powierzchniowy diagram z
  - wiązaniem, 132
- prezentacja Wirtingera, 59
- przestrzenna izotopia, 20
- punkt
  - podwójny, 84
  - potrójny, 84
  - rozgałęzienia, 84
  - siodłowy, 89
  - wielokrotny klasycznego splotu, 22
- punkty wielokrotne rzutu, 74
- quandle
  - Alexandera, 106
  - diedralny, 106
  - trywialny, 106
- równoważne
  - zawężłone powierzchnie, 83
  - immersyjne sploty, 138
- równoważność splotów, 23
- regularne rzutowanie, 22
- relacja motkowa, 50
- rodzaj powierzchni, 68
- rozbandażowanie, 132
- ruchy
  - Reidemeistera, 24
  - Reidemeistera wielokątne, 18
  - Rosemana, 91
  - Yoshikawy, 116
  - typu  $J_R$ , 76
  - typu-J, 76
- rzutowanie
  - potrójnego przecięcia, 74
  - regularne, 16
- s-niezmiennik, 66
- samopoprzeczne odwzorowanie, 137
- samorozdzielność, 106
- sfera, 67
- sferyczna izotopia, 20
- siatka powierzchni, 69
- singularne warkocze
  - powierzchniowe, 120
- skręcenie, 37
- skręcony-okręcony 2-węzeł, 94
- skrzyżowanie, 17
- spin, 37
- splot
  - klasyczny, 22
  - powierzchniowy, 83
  - alternujący, 36
  - Brunna, 42
  - dodatni, 38
  - Hopfa, 28
  - naprzemienny, 36
  - nierozszczepialny, 26
  - preclowy, 35
  - rozszczepialny, 26
  - trójkolorowalny, 45
  - trudny, 26
  - trywialny, 25
  - Whiteheada, 28
  - wielokątny, 16

- wymierny, 36
- ze wstęgami, 128
- zorientowany, 18
- stan Kauffmana, 60
- stowarzyszony spłot ze stęgami, 128
- suma spójna
  - diagramów, 25
  - węzłów, 25
- supeł, 41
  - znakowany, 41
- sygnatura, 73
- sympleks, 65
  
- teoria klasycznych węzłów, 21
- torus, 68
- towarzysz węzła, 40
- trójkolorowalność, 45
- trójlistnik, 94
- triangulacja powierzchni, 69
- trywialnie zawężłona powierzchnia, 85
  
- ujemna płaszczyzna rzutowa, 86
- ujemny punkt potrójny, 87
- węzeł
  - ósemka, 28
  - klasyczny, 22
  - powierzchniowy, 83
  - torusowy, 34
  - alternujący, 36
  - babski, 28
  - chiralny, 31
  - Conwaya, 28
  - dokerski, 28
  - dziki, 21
  - hiperboliczny, 40
  - Kinoshita-Terasaki, 28
  - kwadratowy, 28
  - Listinga, 28
  - lustrzany, 31
  - naprzemienny, 36
  - odwracalny, 31
  - odwrotny, 31
  - okresowy, 38
  - płaski, 28
  - periodyczny, 38
  - pięciolistnik, 28
  - pierwszy, 25
  - preclowy, 35
  - satelitarny, 40
  - skręcony, 34
  - trójkolorowalny, 45
  - trudny, 26
  - trywialny, 25
  - wielokątny, 16
  - wymierny, 36
  - złożony, 25
  - zorientowany, 18
  - zwierciadlany, 31
- warkocz, 39
  - domknięty, 39
  - singularny, 120
- warunek Frobeniusa, 63
- wielomian
  - Alexandera, 48
  - Alexandera-Conwaya, 48
  - Conwaya, 48
  - HOMFLYPT, 53
  - Jonesa, 50
  - Kauffmana dwóch zmiennych, 54
  - Khovanova, 66
- wrak, 105
- wrzeciono, 105
- wstęga, 128
  - Moebiusa, 68
- wyznacznik węzła, 55
- wzór Eulera, 69
- wzbogacony stan Kauffmana, 61
- wzorzec węzła, 40
  
- zbiór
  - dwupoziomowy, 83, 84
  - punktów podwójnych, 83

zewnętrze splotu, 44  
zewnętrze zawężonej powierzchni,  
93  
zmiana skrzyżowania, 46  
znak punktu

potrójnego, 87  
rozgałęzienia, 85  
znak skrzyżowania, 37  
zorientowane ruchy Reidemeistera  
wielokątne, 18