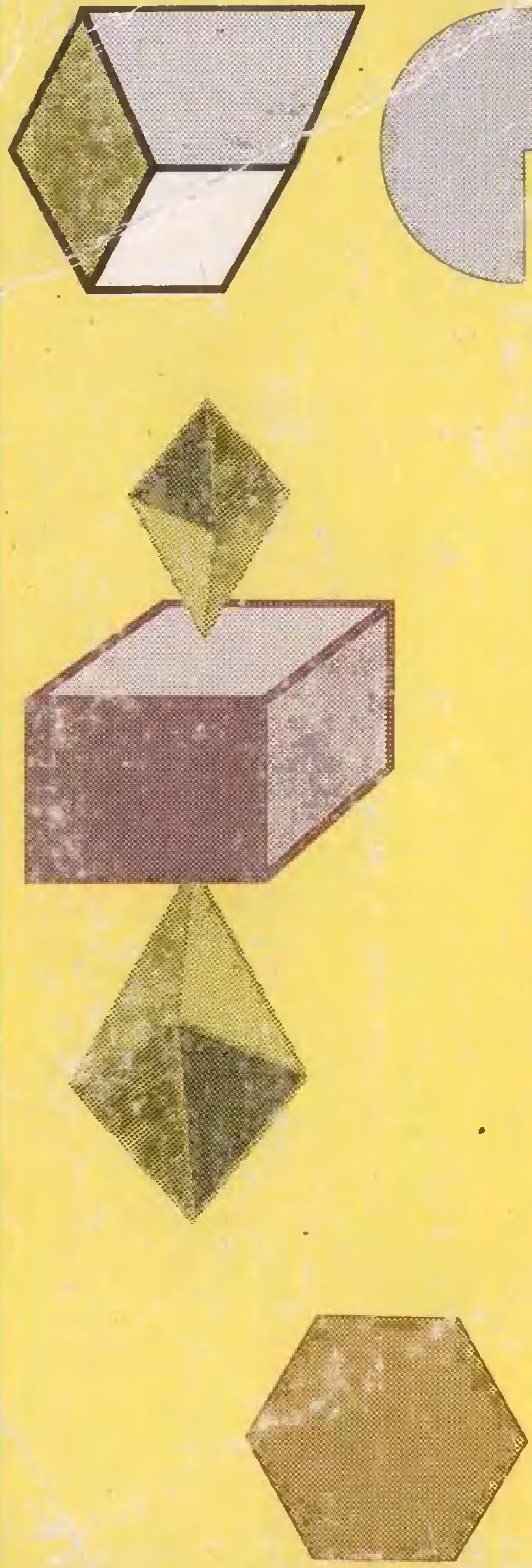


HENRYK PAWŁOWSKI

Autor niniejszej książki jest nauczycielem matematyki w IV Liceum Ogólnokształcącym im. T. Kościuszki i SLO PW „POLTECH" w Toruniu.

W czasie studiów matematycznych na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu zetknął się z ogromnie zasłużonym dla „królowej nauk" wybitnym dydaktykiem matematyki profesorem Leonem Jeśmanowiczem i już wtedy przejął od Niego wielką pasję pracy z uzdolnioną młodzieżą.

Henryk Pawłowski jest członkiem toruńskiego oddziału Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pod którego patronatem prowadzi od roku 1982 międzyszkolne koła matematyczne.

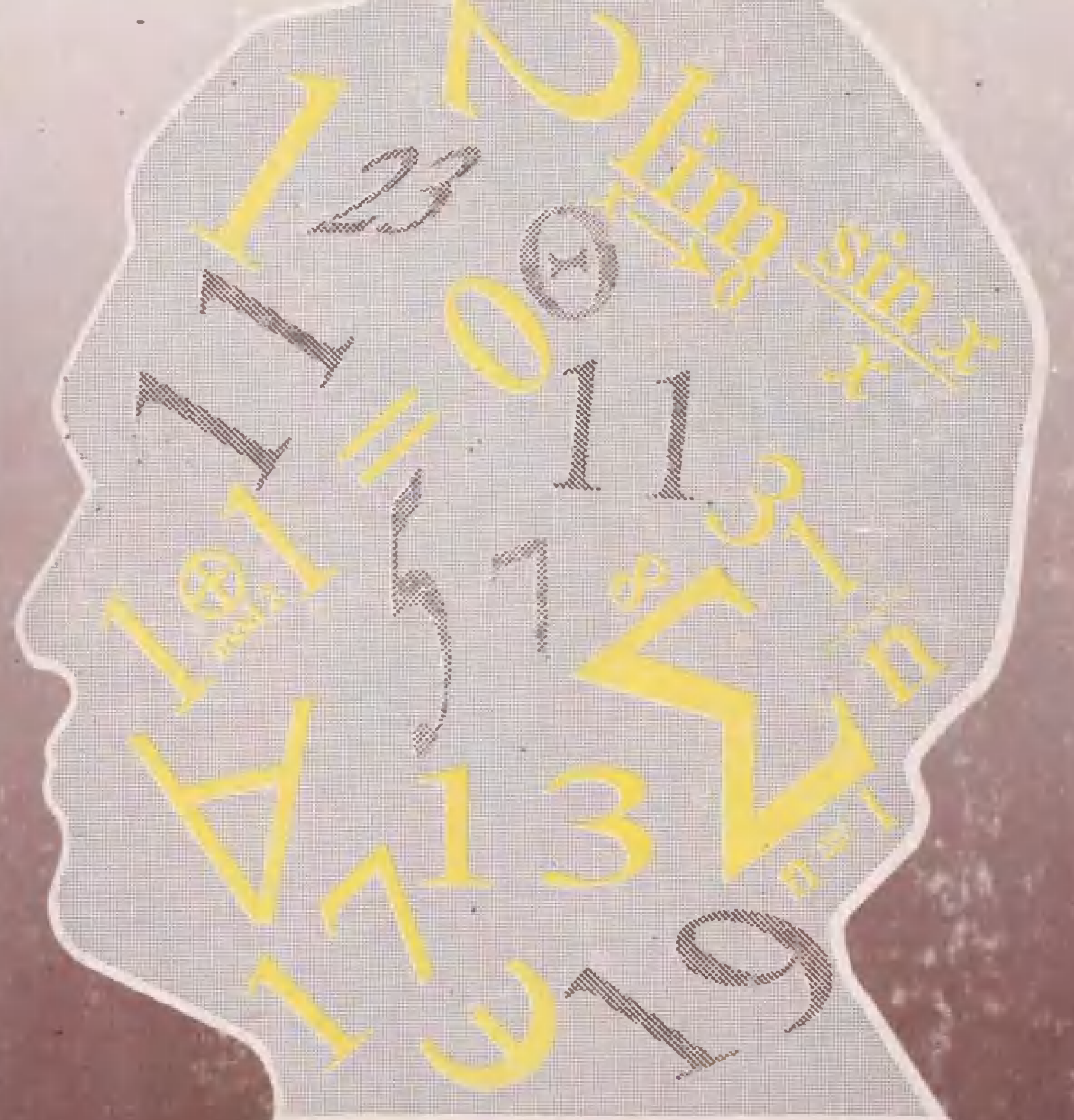
Kilkudziesięciu członków tych kół to finaliści i laureaci Ogólnopolskich Olimpiad Matematycznych, kilkunastu zostało laureatami Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych i medalistami Międzynarodowych Olimpiad Matematycznych w Finlandii, Polsce, Australii, Niemczech, Chinach, Szwecji, Rosji, Turcji i Hong-Kongu.

Henryk Pawłowski od roku 1990 jest członkiem Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej w Warszawie.

KÓŁKO MATEMATYCZNE DLA OLIMPIJCZYKÓW

HENRYK PAWŁOWSKI

HENRYK PAWŁOWSKI



KÓŁKO MATEMATYCZNE DLA OLIMPIJCZYKÓW

HENRYK PAWŁOWSKI

KÓŁKO MATEMATYCZNE DLA OLIMPIJCZYKÓW

TURPRESS
TORUŃ 1994

Projekt okładki – Andrzej Urbański
Redakcja techniczna – Zdzisław Preisner
Skład komputerowy – Danuta Tołkanowicz

ISBN 83-902482-3-9

Oficyna Wydawnicza
TURPRESS – Toruń, ul. Mickiewicza 109, tel. 275–73

Druk: SP. Drukarnia Kujawska – Inowrocław

Spis treści

Wstęp

Podstawową formą zajęć pozalekcyjnych z matematyki są szkolne i międzyszkolne koła matematyczne. Stwarzają one duże możliwości rozwoju zainteresowań i zdolności uczniów. Koła te skupiają więc przede wszystkim młodzież uzdolnioną matematycznie, chcącą rozwijać i pogłębiać swoje zainteresowania matematyką. Praca koła matematycznego powinna służyć m.in. przygotowaniu jego uczestników do udziału w konkursach i olimpiadach matematycznych.

Niniejsza książka stanowi próbę przyjścia z pomocą uczniom, pragnącym stawać w szranki olimpiad matematycznych, oraz nauczycielom, przygotowującym do nich młodzież. Jest ona opracowaniem kilkunastu tematów wielu spotkań Międzyszkolnego Koła Matematycznego, prowadzonego przeze mnie dla młodzieży w Toruniu. Zawarte w książce zadania pochodzą z konkursów i olimpiad matematycznych z całego niemal świata. Wiele zebranych w niej zadań ma pełne wzorcowe rozwiązania, choć znacznie więcej jest przeznaczonych do samodzielnej pracy. Część podanych w książce rozwiązań pochodzi od moich Drogich Uczniów – uczestników zajęć Koła, lub została przez nich zainspirowana. Zadania mają różny stopień trudności, czego nie starałem się w żaden sposób akcentować.

Ostatni rozdział niniejszej książki stanowi zbiór zadań z narodowych olimpiad matematycznych oraz z materiałów jury międzynarodowych olimpiad matematycznych. Część z nich związana jest z metodami podanymi w rozdziałach poprzednich. Wszystkie zadania można traktować jako zadania treningowe przed każdym etapem olimpiady matematycznej.

Chciałbym w tym miejscu gorąco podziękować wszystkim, których życzliwość i dobre słowo zachęciły mnie do opracowania w formie tej książki tematów zajęć koła matematycznego dla olimpijczyków, prowadzonego przeze mnie w Toruniu od roku 1983. Opracowując ten zbiór korzystałem z dostępnej mi literatury, której wykaz znajduje się na końcu tej książki.

Henryk Pawłowski

I. SUMY I ILOCZYNY

1. Znaki sumy i iloczynu

Niech będzie dany ciąg liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Sumę jego wyrazów $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ oznaczamy symbolem

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i$$

i czytamy „suma a_i, po i od 1 do n". Literę i nazywamy *wskaźnikiem sumowania*, $i = 1$ - *dolną granicą sumowania*, $i = n$ - *górną granicą sumowania*. Zamiast słowa *wskaźnik* używa się też słowa *indeks*.

Dolną granicą sumowania nie musi być liczba 1, indeks sumowania możemy oznaczyć jakąkolwiek literą.

Symbol $(*)$ można określić ściśle za pomocą następującej definicji indukcyjnej:

$$(**) \qquad \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1, \qquad \sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}.$$

A oto własności znaku sumowania:

1° $\quad \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$,

2° $\quad \sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$,

3° $\quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{n} a_i$, dla dowolnego $1 \le p < n$.

Wszystkie te własności w łatwy sposób otrzymujemy, korzystając z praw działań dodawania i mnożenia w zbiorze liczb rzeczywistych.
Iloczyn $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ wyrazów ciągu liczbowego oznacza się symbolem

(∇) $$\prod_{i=1}^{n} a_i .$$

Symbol ten określamy indukcyjnie w następujący sposób:

(∇∇) $$\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1 , \qquad \prod_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) a_{n+1} .$$

Znak iloczynu ma własności analogiczne do znaku sumy. Oto one:

1° $$\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right),$$

2° $$\prod_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c^n \prod_{i=1}^{n} a_i ,$$

3° $$\prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{p} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=p+1}^{n} a_i\right), \text{ dla dowolnego } 1 \le p < n.$$

Niech będą dane dwa zbiory skończone:

$$M = \{1, 2, 3, \dots m\} \text{ i } N = \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Funkcję odwzorowującą iloczyn kartezjański $M \times N$ w zbiór $\mathbf{R}$ liczb rzeczywistych nazywamy macierzą prostokątną o wyrazach rzeczywistych i piszemy ją zwykle w postaci tablicy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} .$$

Liczby a_{ij} $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$ nazywamy *wyrazami lub elementami macierzy*; poziome rzędy tej tablicy - *wierszami macierzy*, a pionowe - jej *kolumnami*. Mówimy, że mamy macierz o m wierszach i n kolumnach i zapisujemy krótko $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$.

Sumę wyrazów macierzy $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ oznaczamy symbolem

$$\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} a_{ij} \quad \text{lub} \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}, \qquad \text{gdy } m = n,$$

a iloczyn - symbolem

$$\prod_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le i\le n}} a_{ij} \quad \text{lub} \quad \prod_{i,j=1}^{n} a_{ij}, \qquad \text{gdy } m = n.$$

Dodamy teraz wszystkie wyrazy macierzy $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ dwoma sposobami:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & + & a_{12} & + \cdots + & a_{1n} & & = & & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \\
+ & & + & & + & & & & + \\
a_{21} & + & a_{22} & + \cdots + & a_{2n} & & = & & \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \\
+ & & + & & + & & & & + \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\
+ & & + & & + & & & & + \\
a_{m1} & + & a_{m2} & + \cdots + & a_{mn} & & = & & \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \\
\| & & \| & & \| & & & & \| \\
\sum_{i=1}^{m} a_{i1} & + & \sum_{i=1}^{m} a_{i2} & + \cdots + & \sum_{i=1}^{m} a_{in} & = & \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right) & = & \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)
\end{array}$$

Tak więc $\sum\limits_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} a_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\right).$

Opuszczając tutaj nawiasy, mamy równość

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}.$$

Analogiczną własność ma znak iloczynu, mianowicie

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} a_{ij} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m} a_{ij}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Zapisz przy użyciu symbolu $\sum$ następujące sumy:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n,$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot n,$$

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + (n-1)\cdot n,$$

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n!,$$

$$\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!},$$

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2} + \frac{5}{2^2\cdot 3^2} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}.$$

Zadanie 2. Napisz bez używania symbolu $\sum$ następujące sumy:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k\cdot(k+1)\cdot 2^k, \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot h(k), \quad \text{gdzie} \quad h(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}.$$

Zadanie 3. Napisz przy użyciu znaku iloczynu następujące iloczyny:

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1),$$

$$1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n,$$

$$(1^1\cdot 1!)\cdot(2^2\cdot 2!)\cdot(3^3\cdot 3!)\cdot\ldots\cdot(n^n\cdot n!),$$

$$\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}.$$

Zadanie 4. Napisz bez używania symbolu $\prod$ następujące iloczyny:

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}, \qquad \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^4-\frac{1}{4}}{(2k)^4+\frac{1}{4}}, \qquad \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}\right).$$

Zadanie 5. Udowodnij, że

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})\cdot B_k + a_n B_n,$$

gdzie $B_k = \sum\limits_{j=1}^{k} b_j$, dla $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

UWAGA. Równość $(*)$, to tzw. tożsamość Abela[1].

Zadanie 6. Wykaż, że

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j.$$

Zadanie 7. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j = \sum_{j=1}^{n}(n-j+1)\cdot j.$$

[1] Niels Henrik Abel (1802 - 1829) - wybitny algebraik norweski

Zadanie 8. Udowodnij, że

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 .$$

UWAGA. Jest to tzw. tożsamość Lagrange'a[1]

Zadanie 9. Wykaż, że

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = n\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i - a_j\right)\left(b_i - b_j\right) \cdot$$

UWAGA. Jest to tzw. tożsamość Czebyszewa[2]. .

Zadanie 10. Niech M i N będą liczbami naturalnymi, $M \ge N$. Oblicz sumę

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} \max\{i, k\}.$$

Odp. $\dfrac{(N-1)N(N+1)}{6} + \dfrac{N\cdot M\cdot(M+1)}{2}$.

Zadanie 11. Oblicz sumę

$$\sum_{n=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} k\left(1+\frac{1}{n}\right)^k . \qquad \text{Odp. } \frac{p(p+1)(p+2)}{3}.$$

Zadanie 12. Liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_m$ oraz $y_1, y_2, \ldots, y_m$ spełniają warunki: $0 < x_i < y_i \le 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Udowodnij, że

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{y_i} \le m - \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - x_i\right).$$

[1]Joseph Louis de Lagrange (1736 - 1813) - wybitny matematyk francuski zajmujący się głównie teorią liczb i analizą matematyczną.

[2]Pafnutij Czebyszew (1821 - 1894) - matematyk rosyjski, twórca petersburskiej szkoły matematycznej

Zadanie 13. Rozstrzygnij, co jest większe

$$\prod_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} j \qquad \text{czy} \qquad \sum_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{k} j .$$

2. Wyznaczanie sum i iloczynów

Umiejętność wyznaczania sum czy iloczynów to prawdziwa sztuka. Tutaj potrzebne jest nie tylko duże doświadczenie i intuicja, lecz także znajomość rozmaitych technik -„ kruczków". Im właśnie poświęcimy niniejszy rozdział. Zademonstrujemy na różnych przykładach rozmaite sposoby obliczania sum i iloczynów.

Sposób pierwszy oparty będzie na dwóch oczywistych równościach:

(1) $$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + \\ +(a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1 ,$$

(2) $$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_1} ,$$

które należy zastosować do ciągu (a_n) obranego odpowiednio dla danej sumy czy iloczynu.

Zadanie 1. Oblicz sumę

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} .$$

Rozwiązanie :

❑ Podstawiając w równości (1) wyrazy ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = -\dfrac{1}{n}$ otrzymamy, iż

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} . \qquad \blacksquare$$

Zadanie 2. Oblicz sumę

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!\,.$$

Rozwiązanie:

❑ Przyjmijmy w równości (1)

$$a_k = k! \qquad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \dots, n\,. \qquad \blacksquare$$

Zadanie 3. Oblicz iloczyn

$$\prod_{k=1}^{n} \left(k^k \cdot k!\right).$$

Rozwiązanie:

❑ Zauważmy, że dla każdego $k = 1, 2, 3, \dots$

$$k^k = \frac{(k!)^k}{\left[(k-1)!\right]^k}\,.$$

Zatem wystarczy w równości (2) przyjąć

$$a_k = \left[(k-1)!\right]^k \qquad \text{dla} \quad k = 1, 2, \dots, n, n+1$$

i wówczas $$\prod_{k=1}^{n} \left(k^k \cdot k!\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1} = (n!)^{n+1}\,. \qquad \blacksquare$$

Zadanie 4. Niech m będzie liczbą naturalną. Oblicz sumę

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\dots(k+m)\,.$$

Rozwiązanie:

❑ Podstawmy w równości (1)

$$a_k = \frac{(k-1)\,k\,(k+1)\dots(k+m)}{m+2}\,.$$

Wówczas

$$a_{k+1} - a_k = \frac{1}{m+2} \cdot k(k+1)(k+2)\dots(k+1+m) -$$

$$-\frac{1}{m+2}(k-1)(k)(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+m) = k(k+1)(k+2)\dots(k+m).$$

Zatem $$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\dots(k+m) = \frac{n(n+1)\dots(n+m+1)}{m+2}\,. \qquad \blacksquare$$

Zadanie 5. Oblicz iloczyn

$$\prod_{k=1}^{n} \left(2^k - 1\right)!!\,,$$

gdzie dla dowolnego naturalnego n, $n!!$ oznacza iloczyn

$$n(n-2)(n-4)(n-6)\cdot\ldots\,.$$

Rozwiązanie:

❑ Zauważmy najpierw, że dla każdego $k = 1, 2, 3\dots$

$$(2k-1)!! = \frac{(2k)!}{(2k)!!} \qquad \text{oraz} \qquad (2k)!! = 2^k \cdot k!.$$

Stąd możemy napisać, że

$$\left(2^k - 1\right)!! = \frac{2\left(2^k\right)!}{2^{2^k}} : \frac{2\left(2^{k-1}\right)!}{2^{2^{k-1}}}\,.$$

I widać teraz, że jeżeli w równości (2) przyjmiemy

$$a_k = \frac{2\left(2^k\right)!}{2^{2^k}}\,, \qquad \text{to otrzymamy}$$

$$\prod_{k=1}^{n} \left(2^k - 1\right)!! = \frac{2\left(2^n\right)!}{2^{2^n}}\,. \qquad \blacksquare$$

Zadanie 6. Oblicz sumę

$$\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Rozwiązanie:

❑ Przyjmij w równości (1) $a_k = \frac{(2k-1)^3 -2}{24}$, a otrzymasz, że

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$ ■

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Oblicz sumy:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} \qquad (x \neq 1).$$

2. Oblicz iloczyny:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}, \qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)^4+\frac{1}{4}}{(2k)^4+\frac{1}{4}},$$

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}\right), \qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{(2n-k)(2n+2k-1)}{(4k-3)(4n-4k+3)}.$$

Sposób drugi nazwijmy metodą „tam i z powrotem”.

Tę metodę zastosował dziewięcioletni Gauss[1] do obliczenia sumy liczb naturalnych od 1 do 100, czym zadziwił swojego nauczyciela matematyki. Mianowicie, sumę tę (oznaczmy ją przez S_{100}) zapisał dwojako:

$$S_{100} = 1+2+3+\ldots+99+100 \qquad (\text{„tam”})$$

i $$S_{100} = 100+99+98+\ldots+2+1 \qquad (\text{„z powrotem”}),$$

po czym równości te dodał stronami i otrzymał

[1] Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) - niemiecki matematyk, uważany za jednego z trzech (obok Archimedesa i I. Newtona) największych matematyków świata, przez współczesnych nazywany „księciem matematyków”.

$$2S_{100} = (1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(99+2)+(100+1).$$

Następnie zauważył, że każda ze stu par liczb w nawiasach ma tę samą sumę, równą 101. To pozwoliło mu szybko otrzymać wynik:

$$S_{100} = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050.$$

Pokażmy tę metodę na innych przykładach.

Zadanie 1. Niech n będzie liczbą naturalną nieparzystą.
Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \sqrt{\binom{n}{k}}.$$

Rozwiązanie:

❑ Oznaczmy naszą sumę przez S_n i zapiszmy ją dwojako:

$$S_n = \sqrt{\binom{n}{0}} - \sqrt{\binom{n}{1}} + \sqrt{\binom{n}{2}} - \sqrt{\binom{n}{3}} \pm \ldots + \sqrt{\binom{n}{n-3}} - \sqrt{\binom{n}{n-2}} + \sqrt{\binom{n}{n-1}} - \sqrt{\binom{n}{n}}$$

(„tam”)

$$S_n = -\sqrt{\binom{n}{n}} + \sqrt{\binom{n}{n-1}} - \sqrt{\binom{n}{n-2}} + \sqrt{\binom{n}{n-3}} \mp \ldots - \sqrt{\binom{n}{3}} + \sqrt{\binom{n}{2}} - \sqrt{\binom{n}{1}} + \sqrt{\binom{n}{0}}$$

(„ z powrotem”)

Teraz dodajmy te równości:

$$2S_n = \left(\sqrt{\binom{n}{0}} - \sqrt{\binom{n}{n}}\right) + \left(-\sqrt{\binom{n}{1}} + \sqrt{\binom{n}{n-1}}\right) + \ldots + \left(-\sqrt{\binom{n}{n}} + \sqrt{\binom{n}{0}}\right).$$

Widzimy ,że suma liczb w każdym nawiasie wynosi 0, gdyż

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}, \quad \text{dla każdego } 0 \le m \le n.$$

Stąd $2S_n = 0$, czyli $S_n = 0$. ■

Zadanie 2. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{\binom{2n+1}{k}^2}.$$

Rozwiązanie:

❑ Piszemy, jak w poprzednim przykładzie:

$$S_n = \frac{1}{\binom{2n+1}{0}^2} - \frac{1}{\binom{2n+1}{1}^2} + \frac{1}{\binom{2n+1}{2}^2} - \frac{1}{\binom{2n+1}{3}^2} \pm \ldots + \frac{1}{\binom{2n+1}{n}^2} - \frac{1}{\binom{2n+1}{2n+1}^2}$$

(„tam").

$$S_n = -\frac{1}{\binom{2n+1}{2n+1}^2} + \frac{1}{\binom{2n+1}{2n}^2} - \frac{1}{\binom{2n+1}{2n-1}^2} + \frac{1}{\binom{2n+1}{2n-2}^2} \mp \ldots - \frac{1}{\binom{2n+1}{1}^2} + \frac{1}{\binom{2n+1}{0}^2}$$

(„z powrotem").

Dodając te równości stronami, otrzymamy

$$2S_n = 0\,, \qquad \text{gdyż } \binom{2n+1}{k} = \binom{2n+1}{2n+1-k}, \quad \text{skąd } S_n = 0 \qquad \blacksquare$$

Zadanie 3. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}^2} = \frac{n+1}{n+2}\left(1 + (-1)^n\right).$$

Rozwiązanie:

❑ Oznaczmy $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}^2}$ przez S_n.

Dla nieparzystych n otrzymamy, podobnie jak w poprzednich przykładach, że $S_n = 0$.

Przypadek, gdy n jest liczbą parzystą sprowadzimy do już rozważonego.

W tym celu oznaczmy $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (k+1)}{\binom{n}{k}}$ przez T_n, i zapiszmy T_n dwojako:

$$T_n = \frac{1}{\binom{n}{0}} - \frac{2}{\binom{n}{1}} + \frac{3}{\binom{n}{2}} - \frac{4}{\binom{n}{3}} \pm \ldots + \frac{n+1}{\binom{n}{n}} \qquad (\text{„tam"})$$

$$\text{i} \quad T_n = \frac{n+1}{\binom{n}{n}} - \frac{n}{\binom{n}{n-1}} + \frac{n-1}{\binom{n}{n-2}} - \frac{n-2}{\binom{n}{n-3}} \pm \ldots + \frac{1}{\binom{n}{0}}$$

(„z powrotem").

Dodając równości te stronami otrzymujemy, że

$$2T_n = (n+2)\left(\frac{1}{\binom{n}{0}} - \frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} - \frac{1}{\binom{n}{3}} \pm \ldots + \frac{1}{\binom{n}{n}}\right) = (n+2)\cdot S_n.$$

Z drugiej strony

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (k+1)\, k!\,(n-k)!}{n!} = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\binom{n+1}{k+1}} =$$

$$= (n+1)\left(1 - S_{n+1}\right).$$

Ale $S_{n+1} = 0$, gdyż $n+1$ jest nieparzyste. Zatem $T_n = n+1$.

Otrzymaliśmy więc, że $2T_n = (n+2)\cdot S_n$ i $T_n = n+1$.

Stąd $S_n = \dfrac{2(n+1)}{n+2}$. Pozostało tylko zauważyć, że

$$\frac{n+1}{n+2}\cdot\left(1+(-1)^n\right) = \begin{cases} 0: & 2 \nmid n \\ \dfrac{2(n+1)}{n+2} & : 2 \mid n \end{cases} \cdot \blacksquare$$

Zadanie 4. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}.$$

Rozwiązanie:

❑ Wprowadźmy najpierw oznaczenia:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}} = D_n, \qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{\binom{n}{k}} = E_n,$$

$$\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k} = F_n.$$

Teraz zapiszmy dwojako E_n:

$$E_n = \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{2}{\binom{n}{1}} + \ldots + \frac{n+1}{\binom{n}{n}} \qquad \text{(„tam”)}$$

$$E_n = \frac{n+1}{\binom{n}{n}} + \frac{n}{\binom{n}{n-1}} + \ldots + \frac{1}{\binom{n}{0}} \qquad \text{(„z powrotem”)}.$$

Dodajmy równości te stronami; otrzymamy

$$2E_n = (n+2)\cdot D_n,$$

a stąd $$D_n = \frac{2}{n+2}\cdot E_n.$$

Zauważmy teraz, że

$$E_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{\binom{n}{k}} = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n+1}{k+1}} = (n+1)\left(D_{n+1}-1\right).$$

Wobec tego

$$D_n = \frac{2}{n+2}\cdot(n+1)\left(D_{n+1}-1\right), \text{ skąd}$$

$$D_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)}\cdot D_n.$$

Pokażemy metodą indukcji matematycznej, że $D_n = F_n$ dla każdego całkowitego $n \ge 0$ i zadanie będzie rozwiązane.

Sprawdzamy, że dla $n=0$ $D_n = F_n$, gdyż $D_0 = 1 = F_0$

Załóżmy, że dla pewnego $n \ge 0$ $D_n = F_n$.

Wówczas

$$D_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)}\cdot D_n = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)}\cdot F_n =$$

$$= 1 + \frac{n+2}{2(n+1)}\cdot\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k} =$$

$$= 1 + \frac{n+2}{2^{n+2}}\cdot\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k} = \frac{n+2}{2^{n+2}}\cdot\sum_{k=1}^{n+2}\frac{2^k}{k} = F_{n+1}.$$

Kończy to dowód kroku indukcyjnego. Na mocy indukcji zupełnej stwierdzamy, że istotnie $D_n = F_n$ dla każdego całkowitego $n \ge 0$. ■

Zadanie 5. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \ge 1$ zachodzi równość

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} + \operatorname{ctg}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{n} + \ldots + \operatorname{ctg}\frac{(n-1)\pi}{n} = 0 .$$

Rozwiązanie:

❑ Oznaczmy lewą stronę naszej równości przez S_n i napiszmy ją dwojako:

$$S_n = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} + \operatorname{ctg}\frac{2\pi}{n} + \ldots + \operatorname{ctg}\frac{(n-1)\pi}{n} \qquad \text{(„tam”)}$$

i
$$S_n = \operatorname{ctg}\frac{(n-1)\pi}{n} + \operatorname{ctg}\frac{(n-2)\pi}{n} + \ldots + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$$

(„z powrotem”).

Po dodaniu tych równości stronami, otrzymamy

$$S_n = \left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} + \operatorname{ctg}\frac{(n-1)\pi}{n}\right) + \left(\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{ctg}\frac{(n-2)\pi}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \ldots + \left(\operatorname{ctg}\frac{(n-1)\pi}{n} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\right).$$

Ale dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n} + \operatorname{ctg}\frac{(n-k)\pi}{n} = \frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}} + \frac{\cos\frac{(n-k)\pi}{n}}{\sin\frac{(n-k)\pi}{n}} =$$

$$= \frac{\sin\pi}{\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\sin\frac{(n-k)\pi}{n}} = 0 .$$

W takim razie $2S_n = 0$, czyli $S_n = 0$. ■

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Udowodnij równości:

1° $$\sum_{k=0}^{n} k\cdot\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1},$$

2° $$\sum_{k=0}^{n} k\cdot\binom{n}{k}^2 = \frac{n}{2}\cdot\binom{2n}{n},$$

3° $$\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{3\pi}{n} + \cos\frac{5\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{(2n-1)\pi}{n} = 0,$$

4° $$\sin\frac{m\pi}{n} + \sin\frac{3m\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(2n-1)m\pi}{n} = 0 .$$

2. Niech $S_k = 1!(1+1^2) + 2!(1+2^2) + \ldots + k!(1+k^2)$.

Udowodnij, że

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)S_1 + \left(1+\frac{1}{2}\right)S_2 + \ldots + \left(1+\frac{1}{n}\right)S_n = (n+2)! - 2 .$$

3. Niech $h(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}$. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n} h(k) = n\,(h(n) - 1).$$

4. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Niech $x_0 = \frac{1}{n}$,

$$x_j = \frac{1}{n-j}\cdot\sum_{i=0}^{j-1} x_i, \quad \text{dla } j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Oblicz sumę

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_j .$$

Odp. 1.

Sposób trzeci polega na zastosowaniu twierdzenia, które mówi, kiedy dwa wielomiany są równe (wyznaczają tę samą funkcję).

Twierdzenie. *Dwa wielomiany*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0),$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \quad (b_m \neq 0)$$

o współczynnikach rzeczywistych są równe ($f(x) = g(x)$ *dla każdego* $x \in \mathbf{R}$) *wtedy i tylko wtedy, gdy* $n = m$ *i* $a_n = b_m$, $a_{n-1} = b_{m-1}, \ldots, a_0 = b_0$.

DOWÓD

❑ Implikacja

$$(n = m \wedge a_n = b_m \wedge a_{n-1} = b_{m-1} \wedge \ldots \wedge a_0 = b_0) \Rightarrow (f(x) \equiv g(x))$$

jest oczywista.

Zajmiemy się więc dowodem implikacji:

$$(f(x) \equiv g(x)) \Rightarrow (n = m \wedge a_n = b_m \wedge a_{n-1} = b_{m-1} \wedge \ldots \wedge a_0 = b_0).$$

W tym celu wystarczy, że udowodnimy następujący

Lemat. *Jeżeli wielomian*

$$h(x) = c_k x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

jest funkcją zerową, tzn. $h(x) = 0$ *dla każdego* $x \in \mathbf{R}$,

to $c_k = c_{k-1} = \ldots = c_1 = c_0 = 0$.

Podamy kilka dowodów tego lematu.

DOWÓD I. (*przez sprzeczność*)

❑ Przypuśćmy, że nie wszystkie współczynniki wielomianu $h(x)$ są równe zeru; wtedy bez zmniejszenia ogólności rozumowania można przyjąć, że $c_k \neq 0$. Gdyby bowiem było $c_k = c_{k-1} = \ldots = c_{l+1} = 0$

i $c_l \neq 0$, to mielibyśmy $h(x) = c_l x^l + c_{l-1}x^{l-1} + \ldots + c_1 x + c_0$, gdzie $c_l \neq 0$.

Obierzmy liczbę d, większą od wszystkich następujących liczb:

$1, k, \frac{-c_0}{c_k}, \frac{-c_1}{c_k}, \ldots, \frac{-c_{k-1}}{c_k}$. $h(d^2) = 0$, gdyż z założenia h jest funkcją zerową. Wobec tego

$$0 = \frac{h(d^2)}{c_k} = \frac{c_0}{c_k} + \frac{c_1}{c_k}d^2 + \frac{c_2}{c_k}d^4 \ldots + \frac{c_{k-1}}{c_k}d^{2(k-1)} + d^{2k}.$$

Zatem

$$d^{2k} = -\frac{c_0}{c_k} - \frac{c_1}{c_k}d^2 - \frac{c_2}{c_k}d^4 - \ldots - \frac{c_{k-1}}{c_k}d^{2(k-1)} <$$

$$< d + d \cdot d^2 + d \cdot d^4 + \ldots + d \cdot d^{2(k-1)} \leq k \cdot d \cdot d^{2(k-1)} = k \cdot d^{2k-1},$$

więc $d^{2k} < k \cdot d^{2k-1}$. Stąd wynika, że $d < k$, co jest sprzeczne z tym, że d jest większe od k.

Otrzymana sprzeczność dowodzi słuszności naszego lematu. ■

DOWÓD II. (*indukcja względem st* $h(x)$).

❑ Dla $k = 0$ lemat jest oczywiście prawdziwy, gdyż wówczas $c_0 = h(x) \equiv 0$.

Załóżmy przeto, że twierdzenie nasze jest słuszne dla wszystkich liczb całkowitych nieujemnych $l \leq k - 1$.

Rozważmy wielomian

$$h(x) = c_k x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \ldots + c_1 x + c_0.$$

Oczywiście wielomiany $h(2x)$ i $2^k h(x)$ są zerowe, gdyż wielomian $h(x)$ jest, z założenia, zerowy.

Stąd otrzymujemy, że zerowy jest także wielomian

$$h(2x) - 2^k \cdot h(x).$$

Otóż wielomian

$$h(2x) - 2^k \cdot h(x) = -2^{k-1}c_{k-1}x^{k-1} - 3 \cdot 2^{k-2}c_{k-2}x^{k-2} - \ldots - (1 - 2^k)c_0$$

jest zerowy i stopnia $\le k-1$. Stosując do niego założenie indukcyjne otrzymujemy, iż

$$c_{k-1} = c_{k-2} = \ldots = c_0 = 0, \quad \text{a tzn. że}$$

$h(x) = c_k x^k$. Stąd wynika, że również

$$c_k = 0, \quad \text{gdyż} \quad c_k = h(1) = 0, \quad \text{bo} \quad h(x) \equiv 0.$$

Zatem wszystkie współczynniki wielomianu $h(x)$ są równe zeru. Kończy to dowód kroku indukcyjnego.

Na mocy indukcji matematycznej otrzymaliśmy słuszność naszego lematu dla każdego całkowitego $k \ge 0$. ■

DOWÓD III. (*z zastosowaniem ciągłości funkcji wielomianowej*)

❑ Skoro $h(x) = c_k x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \ldots + c_1 x + c_0 \equiv 0$,

to $c_0 = h(0) = 0$ i $h(x) = x\left(c_k x^{k-1} + c_{k-1}x^{k-2} + \ldots + c_1\right)$.

Zatem $c_k x^{k-1} + c_{k-1}x^{k-2} + \ldots + c_1 = 0$ dla każdego $x \ne 0$.

Niech $h_1(x) = c_k x^{k-1} + c_{k-1}x^{k-2} + \ldots + c_1$.

Otóż $\lim_{x\to 0} h_1(x) = h_1(0)$, bo wielomian jest funkcją ciągłą w zbiorze liczb rzeczywistych, a więc w szczególności w $x_0 = 0$.

Z drugiej strony, $\lim_{x\to 0} h_1(x) = 0$, gdyż $h_1(x) = 0$ dla $x_0 \ne 0$.

Zatem $h_1(0) = 0$ i ostatecznie $h_1(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$.
Z równości $h_1(0) = 0$ wynika, iż $c_1 = 0$.
Mamy zatem

$$h_1(x) = c_k x^{k-1} + c_{k-1}x^{k-2} + \ldots + c_2 x = x\cdot\left(c_k x^{k-2} + c_{k-1}x^{k-3} + \ldots + c_3 x + c_2\right).$$

Powtarzając znane nam już rozumowanie do wielomianu

$$h_2(x) = c_k x^{k-2} + c_{k-1}x^{k-3} + \ldots + c_3 x + c_2$$

otrzymamy, że również $c_2 = 0$ itd... .

W końcu otrzymamy, że wszystkie współczynniki wielomianu $h(x)$ są równe 0. ■

DOWÓD IV. (*z zastosowaniem różniczkowalności funkcji wielomianowej*).

❑ Skoro wielomian $h(x)$ jest funkcją zerową, zatem funkcjami ta - kimi są wszystkie jego pochodne, w szczególności pochodne rzędu $l = 0, 1, 2, \ldots, k$. Stąd natychmiast otrzymujemy słuszność lematu. ■

Wróćmy do naszej implikacji.
W założeniu mamy tożsamość $f(x) \equiv g(x)$, czyli że funkcja

$f(x) - g(x)$ jest zerowa.
Lecz

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} a_n x^n + \ldots + a_{m+1}x^{m+1} + (a_m - b_m)x^m + \ldots + (a_0 - b_0), & \text{gdy } n > m \\ (a_n - b_n)x^n + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0), & \text{gdy } n = m \\ -b_m x^m - \ldots - b_{n+1}x^{n+1} + (a_n - b_n)x^n + \ldots + (a_0 - b_0), & \text{gdy } n < m. \end{cases}$$

Zatem stąd już łatwo wysnuć, że musi być
$n = m \wedge a_n = b_m \wedge \ldots \wedge a_1 = b_1 \wedge a_0 = b_0$. ■

Przejdźmy teraz do zadań na wyznaczanie sum i iloczynów z zastosowaniem udowodnionego przed chwilą twierdzenia.

Zadanie 1. Oblicz sumę

$$\sum_{k=1}^{m-l} \binom{l+k-1}{l}.$$

Rozwiązanie:
❑ Rozważmy wielomian

$$f(x) = 1 + (1+x) + (1+x)^2 + \ldots + (1+x)^{m-1}$$

i obliczmy współczynnik przy x^l w tym wielomianie.

Z jednej strony, rozwijając według wzoru Newtona każdy występujący w tej sumie składnik postaci $(1+x)^k$ (dla $k = 2, 3, 4, \ldots, m-1$) i porządkując wszystkie otrzymane jednomiany otrzymamy, iż interesujący nas współczynnik wynosi

$$\sum_{k=1}^{m-l} \binom{l+k-1}{l}.$$

Z drugiej strony, wielomian ten jest sumą ciągu geometrycznego

$1, (1+x), (1+x)^2, \ldots, (1+x)^{m-1}$.

Zatem

$$f(x) = \frac{(1+x)^m - 1}{(1+x)-1} = \frac{1}{x}\left[(1+x)^m - 1\right] = \frac{1}{x}\cdot\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}x^k = \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}x^{k-1}$$

i współczynnik przy x^l w tym wielomianie wynosi $\binom{m}{l+1}$.

Z twierdzenia o równości wielomianów otrzymujemy, że

$$\sum_{k=1}^{m-l}\binom{l+k-1}{l} = \binom{m}{l+1}. \qquad \blacksquare$$

Zadanie 2. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

Rozwiązanie:

❑ Rozważmy wielomian $f(x) = (1+x)^n(x+1)^n$ i zapytajmy o współczynnik przy x^n w tym wielomianie.

Z jednej strony, współczynnik ten równy jest

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2, \text{ gdyż}$$

$$(1+x)^n(1+x)^n \equiv \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n\right] \times$$

$$\times\left[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}\right] = \left[\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2\right]x^n + \ldots .$$

Z drugiej zaś strony, wynosi on $\binom{2n}{n}$, gdyż

$$(1+x)^n(x+1)^n = (1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k.$$

Wobec tego na mocy twierdzenia o równości wielomianów otrzymujemy, iż

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}. \qquad \blacksquare$$

Zadanie 3. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2}. \qquad \text{Odp. } \binom{2n}{n}^2.$$

Zadanie 4. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2.$$

Rozwiązanie:

❑ Rozważmy wielomian

$f(x) = (1+x)^n(x-1)^n$ i podobnie, jak w poprzednim zadaniu,

zapytajmy o współczynnik przy x^n w tym wielomianie.

Otóż wynosi on $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2$, gdyż

$$(1+x)^n(x-1)^n = \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n\right] \times$$

$$\times\left[\binom{n}{0}^n x^n - \binom{n}{1}x^{n-1} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}\right] =$$

$$= \left[\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \binom{n}{3}^2 + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}^2\right]x^n + \ldots .$$

Z drugiej strony, współczynnik ten wynosi $(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}}$, gdy n jest parzyste, lub 0, gdy n jest nieparzyste, gdyż

$$(1+x)^n(x-1)^n = (-1)^n(1-x^2)^n = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{2k}.$$

Z twierdzenia o równości dwóch wielomianów otrzymujemy, że

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2 = \begin{cases} 0; & 2 \nmid n \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}}; & 2 \mid n . \end{cases}$$

■

Zadanie 5. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1}. \qquad \text{Odp. } \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Zadanie 6. Oznaczmy przez B_n^k współczynnik przy x^k w wielomianie $(1+x+x^2)^n$. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{2n}\left(B_n^k\right)^2. \qquad \text{Odp. } B_{2n}^{2n}.$$

Sposób czwarty (z zastosowaniem liczb zespolonych).

Zadanie 1. Oblicz sumy

$$S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx$$

i

$$C = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx.$$

Rozwiązanie:

❑ Rozważmy sumę $\sum_{k=0}^{n}(\cos x + i\sin x)^k$. Stosując wzór de Moivre'a[1] możemy napisać:

$$\sum_{k=0}^{n}(\cos x + i\sin x)^k = \sum_{k=0}^{n}(\cos kx + i\sin kx) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\cos kx + i\cdot\sum_{k=0}^{n}\sin kx = (C+1) + i\cdot S.$$

Z drugiej strony, na mocy wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego, rozważana suma

$$\sum_{k=0}^{n}(\cos x + i\sin x)^k = \frac{1-(\cos x + i\sin x)^{n+1}}{1-(\cos x + i\sin x)} = \frac{1-\cos(n+1)x - i\sin(n+1)x}{(1-\cos x) - i\sin x} =$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{n+1}{2}x - 2i\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\cos\frac{n+1}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2} - 2i\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\left(\sin\frac{n+1}{2}x - i\cos\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{n+1}{2}x + i\sin\frac{n+1}{2}x}{\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right) =$$

[1] Abraham de Moivre (1667 - 1754) - matematyk angielski

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} + i\cdot\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Korzystając teraz z kryterium równości liczb zespolonych ($z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ i $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$) otrzymujemy równości:

$$C+1 = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \quad \text{i} \quad S = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

stąd

$$C = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} - 1 =$$

$$= \frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{nx}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{nx}{2}\left(\cos\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Ostatecznie:

$$S = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \quad \text{i} \quad C = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

gdy $x \neq k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.

Natomiast, gdy $x = k\pi$, to $S = 0$, $C = (-1)^n \cdot n$. ■

Zadanie 2. Wyznacz sumy:

$$S_1 = \sin x + \binom{n}{1}\sin 2x + \binom{n}{2}\sin 3x + \ldots + \binom{n}{n}\sin(n+1)x,$$

$$C_1 = \cos x + \binom{n}{1}\cos 2x + \binom{n}{2}\cos 3x + \ldots + \binom{n}{n}\cos(n+1)x.$$

Rozwiązanie:

❑ Dla $z = \cos x + i\sin x$ rozważmy tożsamość

$$z(1+z)^n = z + \binom{n}{1}z^2 + \binom{n}{2}z^3 + \ldots + \binom{n}{n}z^{n+1}.$$

Korzystając zarówno z niej, jak i ze wzoru de Moivre'a otrzymujemy:

$$C_1 + i\cdot S_1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{k+1} = z(1+z)^n =$$

$$= (\cos x + i\sin x)\cdot\left[(1+\cos x) + i\sin x\right]^n =$$

$$= (\cos x + i\sin x)\left(2\cos^2\frac{x}{2} + 2i\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right)^n =$$

$$= 2^n\cos^n\frac{x}{2}(\cos x + i\sin x)\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)^n =$$

$$= 2^n\cos^n\frac{x}{2}(\cos x + i\sin x)\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right) =$$

$$= 2^n\cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{n+2}{2}x + i\sin\frac{n+2}{2}x\right) =$$

$$= 2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{n+2}{2}x + i\,2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{n+2}{2}x,$$

skąd wynika, że

$$C_1 = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{n+2}{2} x, \quad S_1 = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{n+2}{2} x. \quad \blacksquare$$

Zadanie 3. Oblicz sumy:

(1) $\sum_{k=0}^{n} \binom{4n}{4k}$, (2) $\sum_{k=0}^{2n} \binom{4n}{2k}$, (3) $\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1}$,

(4) $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{4n}{4k+1}$, (5) $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{4n}{4k+3}$.

Rozwiązanie:

☐ (1) Dla każdej liczby zespolonej z mamy wzór

$$(1+z)^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} z^k, \quad \text{więc}$$

$$(*) \qquad (1+i)^{4n} + (1-i)^{4n} + (1+1)^{4n} + (1-1)^{4n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} \left[i^k + (-i)^k + 1^k + (-1)^k \right].$$

Ale $$i^s + (-i)^s + 1^s + (-1)^s = \begin{cases} 4: & 4 \mid s \\ 0: & 4 \nmid s \end{cases}.$$

Zatem niezerowymi składnikami sumy (*) są te, których wykładniki są liczbami podzielnymi przez 4. Wobec tego

$$(1+i)^{4n} + (1-i)^{4n} + 2^{4n} = 4 \sum_{k=0}^{n} \binom{4n}{k}.$$

A ponieważ

$$(1+i)^{4n} = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{4n} = 2^{2n}(-1)^n,$$

$$(1-i)^{4n} = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) \right]^{4n} = 2^{2n}(-1)^n,$$

więc

$$4 \sum_{k=0}^{n} \binom{4n}{4k} = (-1)^n \cdot 2^{2n+1} + 2^{4n} \quad \text{i ostatecznie}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{4n}{4k} = (-1)^n \cdot 2^{2n-1} + 2^{4n-2}.$$

(2) Rozważmy teraz sumę $(1+1)^{4n} + (1-1)^{4n}$. Mamy

$$(1+1)^{4n} + (1-1)^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} \left[1^k + (-1)^k \right] = 2 \cdot \sum_{k=0}^{2n} \binom{4n}{2k},$$

skąd

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{4n}{2k} = 2^{4n-1}.$$

(3) Tym razem obliczmy różnicę $(1+1)^{4n} - (1-1)^{4n}$. Otóż

$$(1+1)^{4n} - (1-1)^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} \left[1^k - (-1)^k \right] = 2 \cdot \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1}.$$

Stąd wynika, że

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1} = 2^{4n-1}.$$

Sumy (4) i (5) otrzymamy jednocześnie, albowiem

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{4n}{4k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{4n}{4n-(4k+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{4n}{4(n-k-1)+3} = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{4n}{4s+3},$$

oraz

$$2^{4n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1} = 2\sum_{k=0}^{n-1} \binom{4n}{4k+1} = 2\sum_{k=0}^{n-1} \binom{4n}{4k+3}.$$

Wobec tego

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{4n}{4k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{4n}{4k+3} = 2^{4n-2}.$$ ■

Zadanie 4. Wyznacz sumę

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \cos^n\left(\frac{\pi j}{n}\right).$$

Rozwiązanie:

□ Niech $\omega = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$.

Wówczas

$$\omega^{\pm j} = \cos\frac{\pi j}{n} \pm i\sin\frac{\pi j}{n}, \quad \text{stąd}$$

$\cos\frac{\pi j}{n} = \frac{1}{2}\left(\omega^j + \omega^{-j}\right)$. Oczywiście $\omega^n = -1$.

Rozważana suma

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \cos^n\left(\frac{\pi j}{n}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{nj}\left(\frac{\omega^j + \omega^{-j}}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{nj} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega^{j(n-2k)} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{j(2n-2k)} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{n}\right] n = \frac{n}{2^{n-1}}.$$ ■

Zadanie 5. Oblicz sumę

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2k\pi}{2n+1}.$$

Rozwiązanie:

□ Rozważmy równanie $x^{2n+1} - 1 = 0$, którego pierwiastkami są liczby

$$1,\ \cos\frac{2\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi}{2n+1},\quad \cos\frac{4\pi}{2n+1} + i\sin\frac{4\pi}{2n+1},$$

$$,\ \ldots,\ \cos\frac{4n\pi}{2n+1} + i\sin\frac{4n\pi}{2n+1}.$$

Ze wzorów Viete'a[1] dla danego równania wynika, że suma jego pierwiastków jest równa zero. Stąd mamy równość:

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{2n} \cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + i\left(\sum_{k=1}^{2n} \sin\frac{2k\pi}{2n+1}\right) = 0,$$

a z niej natychmiast

$$\sum_{k=1}^{2n} \cos\frac{2k\pi}{2n+1} = -1.$$

Ale

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} = \cos\frac{4n\pi}{2n+1}; \quad \cos\frac{4\pi}{2n+1} = \cos\frac{(4n-2)\pi}{2n+1}$$

itd...., bowiem $\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$.

Wobec tego

$$\sum_{k=1}^{2n} \cos\frac{2k\pi}{2n+1} = 2\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2k\pi}{2n+1}.$$

[1] Vieta Francois (1540 - 1603) - matematyk francuski

Zatem

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2k\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}.$$ ■

Zadanie 6. Wyznacz sumę

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}.$$

Rozwiązanie:

❑ Weźmy pod uwagę równanie $x^3 - 1 = 0$ i jego pierwiastki

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}, \quad \varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}.$$

Wówczas

$$(1+\varepsilon_0)^{3n} = 2^{3n},$$

$$(1+\varepsilon_1)^{3n} = \left[\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\frac{2\pi}{3}\right]^{3n} =$$

$$= \left[2\cos\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{3n} = \cos n\pi = (-1)^n$$

i analogicznie $(1+\varepsilon_2)^{3n} = (-1)^n$. Zatem

(1) $$(1+\varepsilon_0)^{3n} + (1+\varepsilon_1)^{3n} + (1+\varepsilon_2)^{3n} = 2^{3n} + 2(-1)^n.$$

Z drugiej strony, ponieważ

$$(1+\varepsilon_0)^{3n} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} \varepsilon_0^{\,k},$$

$$(1+\varepsilon_1)^{3n} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} \varepsilon_1^{\,k},$$

$$(1+\varepsilon_2)^{3n} = \sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} \varepsilon_2^{\,k}, \text{ więc}$$

(2) $$(1+\varepsilon_0)^{3n} + (1+\varepsilon_1)^{3n} + (1+\varepsilon_2)^{3n} = 3\cdot\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k},$$

gdyż $\varepsilon_1^{\,2} = \varepsilon_2$, $\varepsilon_2^{\,2} = \varepsilon_1$, oraz $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$.

Zatem z (1) i (2) otrzymujemy, że rozważana suma

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} = \frac{2^{3n} + 2(-1)^n}{3}.$$ ■

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Wyznacz sumy:

$$C_2 = \cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx,$$

$$C_3 = \cos^2 x + \cos^2 2x + \ldots + \cos^2 nx,$$

$$S_2 = \sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n\sin nx,$$

$$S_3 = \sin^2 x + \sin^2 2x + \ldots + \sin^2 nx.$$

Odp. $C_2 = \dfrac{C}{n+1}$, $S_2 = \dfrac{S}{n+1}$, *(zob. zadanie 1)*

$$C_3 = \frac{n}{2} + \frac{\sin nx\cdot\cos(n+1)x}{2\sin x},$$

$$S_3 = \frac{n}{2} - \frac{\sin nx\cdot\cos(n+1)x}{2\sin x},$$

gdy $x \neq k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

2. Wyznacz sumę

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}.$$ Odp. 2^{2n-1}.

II. CZĘŚĆ CAŁKOWITA LICZBY RZECZYWISTEJ

Częścią całkowitą liczby rzeczywistej x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą od x i oznaczamy symbolem $[x]$.

np. $[2,3] = 2$, $[-2,3] = -3$, $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$, $[-3] = -3$.

Jeżeli $n \leq x < n + 1$, gdzie n jest liczbą całkowitą, to $[x] = n$.

Z określenia symbolu $[x]$ wynika, iż $[x] \leq x < [x] + 1$ czyli, że $0 \leq x - [x] < 1$.

Liczbę $\alpha = x - [x]$ nazywamy *częścią ułamkową liczby* x i oznaczmy ją symbolem $\{x\}$.

Tak więc $0 \leq \{x\} < 1$. Oczywiście $x = [x] + \{x\}$.

Ćwiczenie. Sprawdź, że $[\pi]^{[\pi-1]} + [\pi - 1] = [\pi - 1]^{[\pi]} + [\pi]$.

Zadanie 1. Wykaż, że jeżeli $x, y \in \mathbf{R}$ oraz $x \leq y$, to

$$[x] \leq [y].$$

Rozwiązanie:

❑ Mamy: $[x] \leq x$, z określenia $[x]$,
$x \leq y$, z założenia.

Zatem $[x] \leq y$. Lecz $[y]$ jest największą spośród wszystkich liczb całkowitych nie większych od y. Wobec tego, istotnie, $[x] \leq [y]$, czego należało dowieść. ■

Zadanie 2. Wykaż, że

$[-x] = -[x]$, gdy x jest liczbą całkowitą

$[-x] = -[x] - 1$, gdy x nie jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie:

❑ Jeżeli x jest liczbą całkowitą, to $-x$ też jest liczbą całkowitą i oczywiście $[-x] = -[x]$, bo $[-x] = -x$ i $[x] = x$. Niech x będzie liczbą niecałkowitą. Zatem $x = [x] + \alpha$, gdzie $\alpha \in (0,1)$. I wówczas $-x = [x] - \alpha = -[x] - 1 + (1 - \alpha)$. Stąd mamy, że $[-x] = -[x] - 1$, gdyż dla $\alpha \in (0,1)$ $1 - \alpha \in (0,1)$. ■

Zadanie 3. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x oraz dla każdej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$[x + n] = [x] + n.$$

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$[x + y] \geq [x] + [y].$$

Rozwiązanie:

❑ Mamy: $x = [x] + \alpha;\quad 0 \leq \alpha < 1$

$y = [y] + \beta;\quad 0 \leq \beta < 1.$

Wówczas $x + y = [x] + [y] + \alpha + \beta$. Stąd

$$[x + y] = \begin{cases} [x] + [y], & \text{gdy } 0 \leq \alpha + \beta < 1 \\ [x] + [y] + 1, & \text{gdy } 1 \leq \alpha + \beta < 2. \end{cases}$$

Kończy to dowód nierówności zadania. ■

Zadanie 5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots x_n$ zachodzi nierówność

$$\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] \geq \sum_{i=1}^{n} [x_i].$$

Zadanie 6. Wykaż, że jeżeli $[x] = [y]$, to

$$|x - y| < 1.$$

Zadanie 7. Udowodnij, że jeżeli n jest liczbą naturalną, a x - liczbą rzeczywistą, to

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right].$$

Rozwiązanie:

❑ Oznaczmy $\left[\frac{[x]}{n}\right]$ przez a. Wówczas mamy nierówność $a \leq \frac{[x]}{n} < a + 1$, czyli nierówność $a \cdot n \leq [x] < n \cdot (a + 1)$. Stąd wynika, że również $a \cdot n \leq x < n \cdot (a + 1)$, gdyż liczby $a \cdot n$ i $a(n + 1)$ są całkowite.

Zatem $a \leq \frac{x}{n} < a + 1$, a to oznacza, że $\left[\frac{x}{n}\right] = a$. ■

Zadanie 8. Udowodnij, że jeżeli liczby x, y, n są naturalne, to

$$\left[\frac{\left[\frac{n}{x}\right]}{y}\right] = \left[\frac{n}{xy}\right].$$

Zadanie 9. Udowodnij, że dla każdego $x \in \mathbf{R}$ prawdziwa jest równość

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x].$$

Rozwiązanie:

❑ Niech $x = [x] + \alpha$, gdzie $\alpha \in \langle 0,1)$. Jeżeli $\alpha \in \langle 0, \frac{1}{2})$, to

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = \left[[x] + \alpha + \frac{1}{2}\right] = [x] + \left[\alpha + \frac{1}{2}\right] = [x].$$

oraz

$$[2x] - [x] = [2[x] + 2\alpha] - [x] = 2[x] + [2\alpha] - [x] = [x].$$

Mamy zatem żądaną równość.

Niech $\alpha \in \langle \frac{1}{2}, 1)$. Wówczas $\alpha = \frac{1}{2} + \beta$, gdzie $\beta \in \langle 0, \frac{1}{2})$.

Mamy $$x = [x] + \beta + \frac{1}{2}$$

i $$\left[x + \frac{1}{2}\right] = [[x] + 1 + \beta] = [x] + 1,$$

$$[2x] - [x] = [2[x] + 1 + 2\beta] - [x] = 2[x] + 1 - [x] = [x] + 1,$$

więc i w tym przypadku otrzymaliśmy równość zadania. ■

Zadanie 10. (X Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna) Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\left[\frac{n+1}{2+}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \left[\frac{n+4}{8}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \ldots = n.$$

Zadanie 11. Udowodnij, że jeżeli n jest dowolną liczbą naturalną, to

$$\left[\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right].$$

Rozwiązanie:

❑ Oznaczmy $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ przez a_n, $\sqrt{4n+2}$ przez b_n.
Zauważmy teraz, że

$$4n + 1 < a_n^2 = 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)} < 4n + 2 = b_n^2,$$

skąd wynika, że $a_n < b_n$. Jest więc $[a_n] \le [b_n]$.

Z drugiej strony $[b_n]^2 < 4n + 2$, gdyż liczba $4n + 2$ nie jest kwadratem liczby naturalnej. Zatem $[b_n] \le \sqrt{4n+1} < a_n$, a stąd wynika, że $[b_n] \le [a_n]$. Ostatecznie otrzymaliśmy, że $[a_n] \le [b_n]$ oraz $[b_n] \le [a_n]$, czyli równość $[a_n] = [b_n]$, której należało dowieść. ■

Zadanie 12. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n i dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

Zadanie 13. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$[2x] + [2y] \ge [x] + [y] + [x + y].$$

Rozwiązanie:

❑ Rozważmy najpierw przypadek, gdy $x, y \in \langle 0, 1)$. Wówczas albo $x + y < 1$ albo $1 \le x + y < 2$. Jeśli $x + y < 1$, to $[x + y] = 0$ i oczywiście

$$[2x] + [2y] \ge 0 = [x] + [y] + [x + y].$$

Jeśli $1 \le x + y < 2$, to $[x + y] = 1$ i wówczas

$[2x] + [2y] \ge [2x] = 1 = [x] + [y] + [x + y]$, gdyż co najmniej jedna z liczb x, y jest nie mniejsza niż $\frac{1}{2}$.

Niech x, y będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi i $x = [x] + \alpha$, $y = [y] + \beta$, gdzie $\alpha, \beta \in \langle 0, 1)$. Wówczas

$$[2x] + [2y] = [2[x] + 2\alpha] + [2[y] + 2\beta] = 2[x] + 2[y] + [2\alpha] + [2\beta] \ge$$
$$\ge 2[x] + 2[y] + [\alpha] + [\beta] + [\alpha + \beta] = [x] + [y] + ([x] + [y] + [\alpha + \beta]) =$$
$$[x] + [y] + [[x] + \alpha + [y] + \beta] = [x] + [y] + [x + y].$$ ■

Zadanie 14. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$[3x] + [3y] + [3z] \ge 2[x] + 2[y] + 2[z] + [x + y + z].$$

Zadanie 15. Wykaż, że jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$ nie jest całkowita, to

$$\frac{p}{q} \geq \left[\frac{p}{q}\right] + \frac{1}{q}.$$

Zadanie 16. Wykaż, że jeżeli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są liczbami naturalnymi, to

$$\left[\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right] + n - 1 \leq x_1 + x_2 + \ldots + x_n .$$

Zadanie 17. Oblicz część całkowitą liczby

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \sqrt[5]{\frac{5}{4}} + \ldots + \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}} .$$ Odp. n.

Zadanie 18. Ciąg (x_n) określony jest następująco: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ dla $n \geq 1$. Oblicz część całkowitą liczby

$$\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{x_{100} + 1} .$$ Odp. 1.

Zadanie 19. Udowodnij, że każdej liczby naturalnej n liczba

$$\left[\left(5 + \sqrt{19}\right)^n\right]$$ jest nieparzysta.

Zadanie 20. Oblicz granice:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right]$. Odp. 1.

(b) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cdot \left(\left[\frac{1}{x^2}\right] + \left[\frac{2}{x^2}\right] + \ldots + \left[\frac{k}{x^2}\right]\right)$. Odp. $\frac{k(k+1)}{2}$.

(c) $\lim\limits_{x \to 0} x^4 \cdot \left(1+2+3+\ldots+\left[\frac{1}{x^2}\right]\right)$. Odp. $\frac{1}{2}$.

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{[P(x)]}{P([x])}$, jeśli $P(x) = x^{13} + x^7 + x + 1$. Odp. 1.

Zadanie 21. Oblicz sumę

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n - \left[\sqrt{k-1}\right]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}.$$ Odp. $\frac{n(n+1)}{2}$.

Zadanie 22. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $[n!\, e] - 1$ jest podzielna przez n.

Zadanie 23. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n i dla każdej rzeczywistej a równanie $(n+1)x - [nx] = a$ ma dokładnie $n + 1$ pierwiastków.

Zadanie 24. (XXXVI Olimpiada Matematyczna). Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\left[\sqrt{9n-1}\right] = \left[\sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right].$$

Zadanie 25. Wykaż, że dla każdego naturalnego n

$$\left[\sqrt{n}\right] + \left[\sqrt[3]{n}\right] + \left[\sqrt[4]{n}\right] + \ldots + \left[\sqrt[n]{n}\right] =$$
$$= \left[\log_2 n\right] + \left[\log_3 n\right] + \ldots + \left[\log_n n\right].$$

1. Część całkowita w równaniach

Rozwiązywanie równania ze zmienną „pod znakiem" część całkowita zazwyczaj sprowadza się do rozwiązywania nierówności lub układów nierówności. *Prześledźmy to na następujących zadaniach.*

Zadanie 1. Rozwiąż równanie

$$\left[\frac{5 + 6x}{8}\right] = \frac{15x - 7}{5} .$$

Rozwiązanie:

❑ Podstawmy $\frac{15x - 7}{5} = t$. Wówczas $x = \frac{5t + 7}{15}$

i równanie otrzymuje postać $\left[\frac{10t + 39}{40}\right] = t$.

Z określania części całkowitej wynika, że $0 \le \frac{10t + 39}{40} - t < 1$, czyli że $-\frac{1}{30} < t \le 1,3$.
A ponieważ jednocześnie t jest liczbą całkowitą, więc musi być $t = 0$ lub $t = 1$.
Gdy $t = 0$, to $x = \frac{7}{15}$; gdy zaś $t = 1$, to $x = \frac{4}{5}$. ■

Zadanie 2. Rozwiąż równanie
$$[x - 1] = \left[\frac{x + 2}{2}\right].$$

Rozwiązanie:

❑ Wykonaj wykresy funkcji $x \to [x - 1]$ i $x \to \left[\frac{x + 2}{2}\right]$, a przekonasz się, że pokrywają się one w przedziale $\langle 3, 5)$. ■

Zadanie 3. Rozwiąż równanie
$$x^3 - [x] = 3.$$

Rozwiązanie:
❑ $x = [x] + \alpha$, gdzie $\alpha \in \langle 0, 1)$, więc nasze równanie możemy przepisać tak: $x^3 - (x - \alpha) = 3$ lub równoważnie $x^3 - x = 3 - \alpha$.

Wynika stąd, że $2 < x^3 - x \le 3$. Ale, oczywiście dla $x \ge 2$

$x^3 - x = x(x^2 - 1) \ge 2 \cdot (4 - 1) = 6 > 3$, zaś dla $x \le -1$

$x^3 - x = x(x^2 - 1) \le 0 < 2$, a dla $-1 < x \le 0$

$x^3 - x \le -x < 1$.

Wreszcie dla $0 < x \le 1$ $x^3 - x < x^3 < 1$. Zatem musi być x z przedziału $(1, 2)$. Wówczas $[x] = 1$ i równanie nasze ma postać $x^3 - 1 = 3$, skąd $x^3 = 4$, czyli $x = \sqrt[3]{4}$. ■

Zadanie 4. Rozwiąż równanie
$$2x \cdot \operatorname{sgn}[x] = x^2 - a^2.$$

Rozwiązanie:
❑ Rozważmy trzy przypadki:

1° $x < 0$. Wówczas $\operatorname{sgn}[x] = -1$ i równanie nasze przybiera postać $x^2 + 2x - a^2 = 0$. Spośród jego pierwiastków $x_1 = -1 + \sqrt{1 + a^2}$, $x_2 = -1 - \sqrt{1 + a^2}$, tylko drugi jest ujemny dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$.

2° $0 \le x < 1$. Wówczas $\operatorname{sgn}[x] = 0$ i mamy równanie $x^2 - a^2 = 0$, czyli $x^2 = a^2$. Równanie to spełniają liczby $-a$ i a, jeśli tylko $|a| < 1$.

3° $x \ge 1$. Wówczas $\operatorname{sgn}[x] = 1$ i równanie nasze ma postać $x^2 - 2x - a^2 = 0$. Spośród jego pierwiastków $x_1 = 1 + \sqrt{1 + a^2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{1 + a^2}$, tylko pierwszy jest większy od 1 dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$.

Otrzymaliśmy zatem, iż zbiorem rozwiązań danego równania, jest
$$\left\{-1 - \sqrt{1 + a^2},\ 1 + \sqrt{1 + a^2},\ |a|\right\},\ \text{gdy } |a| < 1$$
$$\left\{-1 - \sqrt{1 + a^2},\ 1 + \sqrt{1 + a^2}\right\},\ \text{gdy } |a| \ge 1.$$ ■

Zadanie 5. Rozwiąż równanie
$$\frac{x}{[x]} - \frac{1}{x} + \frac{[x]}{x} = 2.$$

Rozwiązanie:
❑ Rozwiązań tego równania będziemy szukać oczywiście w zbiorze $\{x \in \mathbf{R};\ [x] \ne 0\}$. Ale w zbiorze tym nasze równanie jest rów - noważne równaniu $(x - [x])^2 = [x]$, które z kolei jest sprzeczne. ■

Zadanie 6. (XLIV Olimpiada Matematyczna). Rozwiąż równanie

$$\frac{(x^2-1)(|x|+1)}{x+\operatorname{sgn} x} = [x+1],$$ gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1: & x > 0 \\ 0: & x = 0 \\ -1: & x < 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

❑ Podane równanie ma oczywiście sens, gdy $x \neq 0$.
Rozważmy dwa przypadki:

1° $x < 0$. Wówczas otrzymujemy do rozwiązania równanie
$1 - x^2 = [x+1]$.

2° $x > 0$. Wówczas równanie zadania przyjmuje postać:
$x^2 - 1 = [x+1]$.

Ale, gdy $x < -2$, to $x + 1 < -1$. Wobec tego $x(x+1) > 2$, czyli $x^2 + x > 1$, skąd $1 - x^2 < x$, co w połączeniu z oczywistą nierównością $x < [x+1]$ daje nierówność $1 - x^2 < [x+1]$.

Gdy zaś $x \geq 3$, to $x - 1 \geq 2$, skąd $x(x-1) > 2$, czyli

$$x^2 - 1 > x + 1.$$

Ale $x + 1 \geq [x+1]$. Wobec tego $x^2 - 1 > [x+1]$.

Tak więc rozwiązań równania zadania szukać będziemy w zbiorze $\langle -2, 0) \cup (0, 3)$.
W przedziale $\langle -2, 0)$ jest ono (jak już wiemy) równoważne równaniu

$$1 - x^2 = [x+1].$$

Gdy $-2 \leq x < -1$, to $-1 \leq x + 1 < 0$, więc $[x+1] = -1$.
A wówczas

$$1 - x^2 = [x+1] \Leftrightarrow 1 - x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}.$$

Gdy $-1 \leq x < 0$, to $0 \leq x + 1 < 1$, więc $[x+1] = 0$.
A wówczas

$$1 - x^2 = [x+1] \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1.$$

Zatem równanie $1 - x^2 = [x+1]$ ma w przedziale $\langle -2, 0)$ dwa rozwiązania: $-\sqrt{2}, -1$.

Rozważmy podane równanie w przedziale $(0, 3)$. Jest ono tutaj równoważne równaniu $x^2 - 1 = [x+1]$.
Niech $0 < x < 1$, wówczas $1 < x+1 < 2$, więc $[x+1] = 1$ i $x^2 - 1 = [x+1] \Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$, lecz $\sqrt{2} \notin (0,1)$.
Gdy $1 \leq x < 2$, to $2 \leq x + 1 < 3$, więc $[x+1] = 2$, a wówczas

$$x^2 - 1 = [x+1] \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}.$$

Gdy z kolei $2 \leq x < 3$, to $3 \leq x + 1 < 4$, więc $[x+1] = 3$, a wtedy $x^2 - 1 = [x+1] \Leftrightarrow x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Tak więc równanie $x^2 - 1 = [x+1]$ ma w przedziale $(0, 3)$ również dwa rozwiązania: $\sqrt{3}$, 2.

Reasumując otrzymujemy, iż zbiorem rozwiązań podanego w zadaniu równania jest $\{-\sqrt{2}, -1, \sqrt{3}, 2\}$. ■

Zadanie 7. Rozwiąż równanie

$$\frac{19x + 16}{10} = \left[\frac{4x + 7}{3}\right].$$

Rozwiązanie:

❑ Niech $x \in \mathbf{R}$ spełnia podane równanie. Wobec tego spełnia także nierówności $\frac{19x+16}{10} \le \frac{4x+7}{3} < \frac{19x+26}{10}$, gdyż

$[\alpha] \le \alpha < [\alpha]+1$ i dalej, również nierówności:

$$57x + 48 \le 40x + 70 < 57x + 78,$$
$$-22 \le -17x < 8,$$
$$-8 < 17x \le 22,$$
$$-\frac{8}{17} < x \le \frac{22}{17},$$
$$\frac{120}{170} < \frac{19x+16}{10} \le \frac{690}{170},$$
$$0,71 < \frac{19x+16}{10} \le 4,06.$$

Stąd wnosimy, iż $\frac{19x+16}{10}$ jest liczbą całkowitą z przedziału $<1,4>$.

Zatem ostatecznie $x \in \left\{-\frac{6}{19}, \frac{4}{19}, \frac{14}{19}, \frac{24}{19}\right\}$.

Odp. Zbiorem rozwiązań podanego równania jest zbiór

$$\left\{-\frac{6}{19}, \frac{4}{19}, \frac{14}{19}, \frac{24}{19}\right\}$$ ■

Zadanie 8. Zilustruj na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych zbiór

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2 ;\quad x^{[y]} \cdot y^{[x]} = xy\right\}.$$

Rozwiązanie:

❑ Rozważmy cztery przypadki:

1° $[x] = [y] = 0$. Ma to oczywiście miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x, y \in (0,1)$. Ale wówczas również $xy \in (0,1)$,

więc nie zachodzi równość $x^{[y]} \cdot y^{[x]} = xy$.
Zbiór A jest, w tym przypadku, pusty.

2° $[x] = 0$ i $[y] \ge 1$. Wówczas $x \in (0,1)$ i $y \ge 1$ oraz $xy = x^{[y]} \cdot y^{[x]} \Leftrightarrow xy = x^{[y]}$. Ale $xy = x^{[y]} \le x \le xy$, skąd $x = x^{[y]} = xy$, czyli $y = 1$.

Zbiór A to, w tym przypadku,
$\{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2 ;\ 0 < x < 1 \text{ i } y = 1\}$.

3° $[x] \ge 1$ i $[y] = 0$. Rozumując jak przed chwilą, otrzymamy, że w tym przypadku zbiór A to

$\{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2 ;\ x = 1 \text{ i } 0 < y < 1\}$.

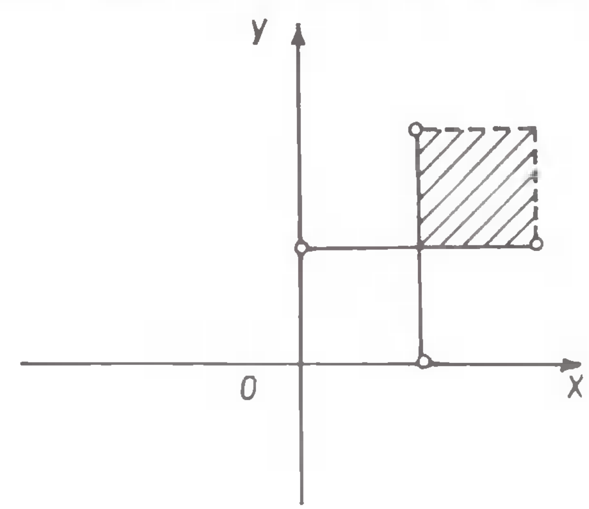
4° $[x] \ge 1$ i $[y] \ge 1$. Mamy więc $x \ge 1$ i $y \ge 1$. Wówczas

$x^{[y]} \cdot y^{[x]} = xy \Leftrightarrow x^{[y]-1} \cdot y^{[x]-1} = 1$. Stąd $[y] - 1 = [x] - 1 = 0$, czyli $[x] = [y] = 1$, a to, z kolei, zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \le x < 2$ i $1 \le y < 2$.

Zbiór A to, w tym przypadku,

$\{(x,y) \in \mathrm{R}_+^2 ;\ 1 \le x < 2 \text{ i } 1 \le y < 2\}$. ■

Poniżej widzimy ilustrację geometryczną rozważanego zbioru.



Zadanie 9. Rozwiąż równanie

$$x^2 - 8[x] + 7 = 0.$$

Rozwiązanie:

❑ Załóżmy, że x spełnia podane równanie i $n = [x]$. Z równania tego wynika, że $x^2 + 7 = 8n$. Wobec tego musi być $n \geq 0$.

Korzystając z nierówności $n \leq x < n + 1$ otrzymujemy:

$$n^2 + 7 \leq x^2 + 7 < (n+1)^2 + 7 = n^2 + 2n + 8.$$

Ale $x^2 + 7 = 8n$, więc $n^2 + 7 \leq 8n < n^2 + 2n + 8$.

Nierówność $n^2 + 7 \leq 8n$ spełniają wszystkie liczby całkowite n z przedziału $\langle 1, 7 \rangle$.

Nierówność $8n < n^2 + 2n + 8$ zachodzi dla wszystkich $n < 2$ lub $n > 4$, więc albo $1 \leq n < 2$ albo $4 < n \leq 7$.

Ale n jest liczbą całkowitą, wobec tego $n = 1, 5, 6, 7$. Podstawiając te wartości do równania $x^2 + 7 = 8n$ otrzymujemy, że

$$x^2 \in \{1, 33, 41, 49\}, \text{ czyli że } x \in \left\{1, \sqrt{33}, \sqrt{41}, 7\right\} \text{ lub}$$

$$x \in \left\{-1, -\sqrt{33}, -\sqrt{41}, -7\right\}.$$

Podstawiając otrzymane wartości x do równania przekonujemy się, że spełniają je tylko liczby: $1, \sqrt{33}, \sqrt{41}, 7$. One też stanowią rozwiązania tego równania. ■

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Rozwiąż równania:

a) $\left[\dfrac{8x + 19}{7}\right] = \dfrac{16(x+1)}{11}$.

Odp. $\left\{\dfrac{17}{16}, \dfrac{7}{4}, \dfrac{39}{16}, \dfrac{225}{8}, \dfrac{61}{16}\right\}$.

b) $\left[\dfrac{x^2 - 2}{3}\right] = [x]$.

Odp: $\langle -1, 0) \cup \langle \sqrt{8}, 3) \cup \langle \sqrt{11}, \sqrt{14}) \cup \langle 4, \sqrt{17})$.

c) $x^4 - [x - 1] = 2$.

Odp. $x = \sqrt[4]{4}$.

d) $1 - |x + 1| = \dfrac{[x] - x}{|x - 1|}$.

Odp. $\left\{-2, -\sqrt{5}, 0\right\}$.

e) $x - \sqrt{[x]} = \dfrac{1}{2}$. Odp. $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$.

f) $\sqrt{x^2 - [x]^2} = 3 - x$. Odp. $\left\{\dfrac{5}{3}, \dfrac{13}{6}, 3\right\}$.

g) $[x] + \dfrac{1}{[x]} = \{x\} + \dfrac{1}{\{x\}}$.

Odp. $\left\{n + \dfrac{1}{n};\ n \in \mathbf{N} \wedge n \geq 2\right\}$.

h) $\operatorname{tg}[x] \cdot \operatorname{tg}\{x\} = 1$.

Odp. $\left\{(2n+1) \cdot \dfrac{\pi}{2};\ n \in \mathbf{Z}\right\}$.

i) $[x^3] + [x^2] + [x] = \{x\} - 1$.

Odp. $x = -1$.

Zadanie 2. Wykaż, że

$$\left[\frac{n}{k}\right]+\left[\frac{n+1}{k}\right]+\left[\frac{n+2}{k}\right]+\ldots+\left[\frac{n+k-1}{k}\right]=n.$$

Zadanie 3. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1,1 \\ \{x\}+y+[z]=2,2 \\ [x]+\{y\}+z=3,3. \end{cases}$$

Odp. $x=1,\ y=0,2,\ z=2,1.$

Zadanie 4. Rozwiąż w liczbach pierwszych równanie

$$\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\ldots+\left[\sqrt{x^2-1}\right]=y.$$

Odp. $\{(2,3),(3,13)\}$.

Zadanie 5. Dla każdej liczby naturalnej n rozwiąż równanie

$$\left[\frac{x+1}{2}\right]+\left[\frac{x+2}{3}\right]+\left[\frac{x+3}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{x+n}{n+1}\right]=n.$$

Odp. $x=1$.

Zadanie 6. Udowodnij, że jeżeli liczba a spełnia równanie

$$x-[x]+\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]=1,$$

to jest niewymierna.

2. Część całkowita i zadania na podzielność

Rozważmy liczbę $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$. Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą. Wyznaczmy $\max\{k\in\mathbf{N};\ p^k|n!\}$.

Obliczmy, ile jest w ciągu $1,2,3,\ldots,n$ liczb podzielnych przez p. Jeśli takich liczb jest k, to wśród nich największą jest liczba kp.

Zatem $kp\le n<(k+1)p$, czyli $k\le\frac{n}{p}<k+1$, a to oznacza, że

$$k=\left[\frac{n}{p}\right].$$

Wśród liczb $1,2,3,\ldots,n$ podzielne przez p są więc liczby $p,2p,3p,\ldots,\left[\frac{n}{p}\right]p$. Możemy zatem zapisać $n!$ tak:

$$n!=p\cdot 2p\cdot 3p\cdot\ldots\cdot\left[\frac{n}{p}\right]p\cdot M_1=p^{\left[\frac{n}{p}\right]}\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\left[\frac{n}{p}\right]\cdot M_1=p^{\left[\frac{n}{p}\right]}\cdot\left[\frac{n}{p}\right]!\cdot M_1,$$

gdzie $p\nmid M_1$.

Jeżeli $\left[\frac{n}{p}\right]<p$, to $\max\{k\in\mathbf{N};\ p^k|n!\}=\left[\frac{n}{p}\right]$.

Jeżeli natomiast $\left[\frac{n}{p}\right]\ge p$, to obliczmy, ile jest liczb podzielnych przez p w ciągu $1,2,3,\ldots,\left[\frac{n}{p}\right]$. Jest ich oczywiście $\left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{p}\right]$, czyli $\left[\frac{n}{p^2}\right]$.

Wobec tego $\left[\frac{n}{p}\right]!=p\cdot 2p\cdot\ldots\cdot\left[\frac{n}{p^2}\right]\cdot p\cdot M_2=p^{\left[\frac{n}{p^2}\right]}\cdot\left[\frac{n}{p^2}\right]!\cdot M_2$,

gdzie $p\nmid M_2$.

Jeżeli $\left[\frac{n}{p^2}\right] < p$, to $\max\{k \in \mathrm{N};\ p^k | n!\} = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right]$.

Jeżeli $\left[\frac{n}{p^2}\right] \geq p$, to, rozumując jak przed chwilą, otrzymamy:

$$\max\{k \in \mathrm{N};\ p^k | n!\} = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots .$$

W istocie rzeczy powyższa suma jest skończona, gdyż dla pewnego $s \in \mathbf{N}$ otrzymamy, że $\left[\frac{n}{p^s}\right] = 0$. Ostatecznie:

$$\max\{k \in \mathrm{N};\ p^k | n!\} = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots + \left[\frac{n}{p^{s-1}}\right],$$

gdzie s jest taką liczbą, że

$$p^{s-1} \leq n < p^s.$$

Zastosujmy otrzymany wzór do rozwiązania kilku zadań:

Zadanie 1. Ilu zerami kończy się liczba

$$1993!?$$

Rozwiązanie:

❑ Obliczmy, jaka maksymalna potęga liczby 10 dzieli 1993! i zadanie będzie rozwiązane. Ale $10 = 2 \cdot 5$, więc wystarczy obliczyć maksymalną potęgę liczby 5, która dzieli 1993! (dlaczego?). Stąd wynika, że liczba 1993! ma na końcu

$$\left[\frac{1993}{5}\right] + \left[\frac{1993}{5^2}\right] + \left[\frac{1993}{5^3}\right] + \left[\frac{1993}{5^4}\right] = 398 + 79 + 15 + 3 = 495 \text{ zer.}$$ ■

Zadanie 2. Wykaż, że dla żadnej liczby naturalnej n liczba 2^n nie dzieli $n!$.

Rozwiązanie:

❑ Niech $s \geq 0$ będzie taką liczbą całkowitą, że $2^s \leq n < 2^{s+1}$. Wówczas

$$\max\{k \in \mathrm{N};\ 2^k | n!\} = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{2^s}\right] \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^s} =$$

$$= \frac{n}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{s-1}}\right) = \frac{n}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^s}}{1 - \frac{1}{2}} = n - \frac{n}{2^s} \leq n - 1.$$

A stąd wynika teza naszego zadania. ■

Zadanie 3. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $(n!)!$ jest podzielna przez $(n!)^{(n-1)!}$.

Rozwiązanie:

❑ Niech p będzie liczbą pierwszą oraz

$$\alpha = \max\left\{k \in \mathrm{N};\ p^k \middle| n!^{(n-1)!}\right\}$$

$$\beta = \max\{l \in \mathrm{N};\ p^l | (n!)!\}.$$

Wówczas

$$\beta = \left[\frac{n!}{p}\right] + \left[\frac{n!}{p^2}\right] + \left[\frac{n!}{p^3}\right] + \dots + \left[\frac{n!}{p^k}\right] + \dots,$$

natomiast

$$\alpha = (n-1)! \cdot \left(\left[\frac{n!}{p}\right] + \left[\frac{n!}{p^2}\right] + \left[\frac{n!}{p^3}\right] + \dots + \left[\frac{n!}{p^k}\right] + \dots\right).$$

Zauważmy, że

$\left[\frac{n!}{p^k}\right] = \left[(n-1)! \cdot \frac{n}{p^k}\right] \geq \left[(n-1)! \cdot \left[\frac{n}{p^k}\right]\right] = (n-1)! \cdot \left[\frac{n}{p^k}\right]$, dla każdego k. Wobec tego $\alpha \geq \beta$. Kończy to dowód żądanej podzielności. ■

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnych naturalnych m i n liczba

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!\,n!(m+n)!} \quad \text{jest całkowita.}$$

Rozwiązanie:

❑ Niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech

$$\alpha = \max\{k \in \mathbf{N};\ p^k \mid (2m)!\}, \qquad \beta = \max\{k \in \mathbf{N};\ p^k \mid (2n)!\}$$

$$\alpha_1 = \max\{k \in \mathbf{N};\ p^k \mid m!\}, \qquad \beta_1 = \max\{k \in \mathbf{N};\ p^k \mid n!\}$$

$$\gamma = \max\{k \in \mathbf{N};\ p^k \mid (m+n)!\}.$$

Jeżeli pokażemy, że $\alpha + \beta \ge \alpha_1 + \beta_1 + \gamma$, to zadanie będzie rozwiązane, prawda? Wiemy już, że

$$\alpha = \left[\frac{2m}{p}\right] + \left[\frac{2m}{p^2}\right] + \left[\frac{2m}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{2m}{p^k}\right] + \ldots,$$

$$\beta = \left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] + \left[\frac{2n}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{2n}{p^k}\right] + \ldots,$$

$$\alpha_1 = \left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \left[\frac{m}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{m}{p^k}\right] + \ldots,$$

$$\beta = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right] + \ldots,$$

$$\gamma = \left[\frac{m+n}{p}\right] + \left[\frac{m+n}{p^2}\right] + \left[\frac{m+n}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{m+n}{p^k}\right] + \ldots.$$

Teraz zauważmy tylko, że dla dowolnego naturalnego k

$$\left[\frac{2m}{p^k}\right] + \left[\frac{2n}{p^k}\right] \ge \left[\frac{m}{p^k}\right] + \left[\frac{n}{p^k}\right] + \left[\frac{m+n}{p^k}\right],$$

co wynika ze znanej już nam nierówności

$$[2x] + [2y] \ge [x] + [y] + [x+y].$$

Zatem, istotnie $\alpha + \beta \ge \alpha_1 + \beta_1 + \gamma$. ■

Zadanie 5. Niech n i $k_1, k_2, \ldots, k_s$ będą liczbami naturalnymi, przy czym niech $k_1 + k_2 + \ldots + k_s \le n$. Wykaż, że liczba

$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_s!} \quad \text{jest całkowita.}$$

Zadanie 6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych m, n, q liczba

$$\frac{(3m)!(3n)!(3q)!}{(m!)^2(n!)^2(q!)^2(m+n+q)!} \quad \text{jest całkowita.}$$

Zadanie 7. Udowodnij, że dla każdego naturalnego n liczba

$$(2^n - 2^0)(2^n - 2^1)(2^n - 2^2)\ldots(2^n - 2^{n-1})$$

jest podzielna przez $n!$.

Zadanie 8. Oznaczmy przez $\tau(n)$ i $\sigma(n)$ odpowiednio liczbę i sumę wszystkich dzielników liczby naturalnej n. Udowodnij, że

1° $$\tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right]$$

2° $$\sigma(1) + \sigma(2) + \ldots + \sigma(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + 2\cdot\left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + n\cdot\left[\frac{n}{n}\right].$$

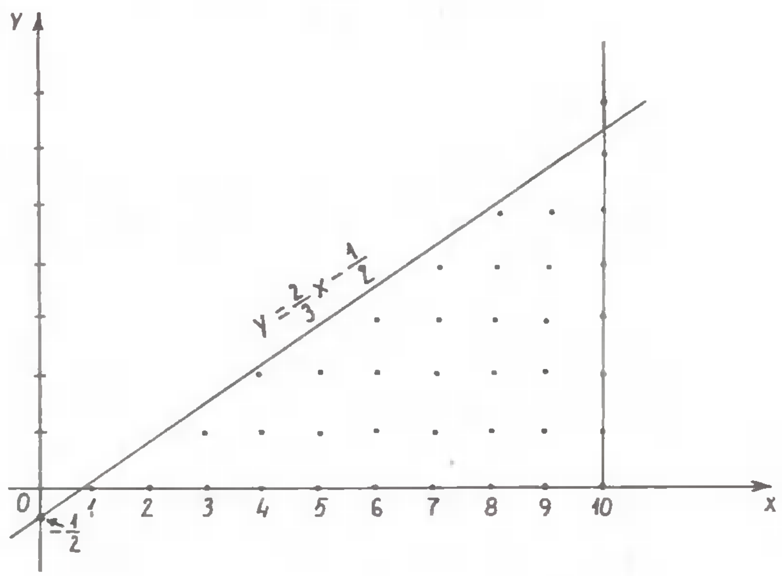
Zadanie 9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \ge 1$ liczba $(2^n)!$ dzieli się przez 2^{2^n-1}, lecz nie dzieli się przez 2^{2^n}.

3. Część całkowita liczby rzeczywistej i punkty kratowe

Punktem kratowym nazywamy, jak wiadomo, taki punkt na płaszczyźnie kartezjańskiej, którego obie współrzędne są całkowite.

Rozważmy następujący problem:

❑ Ile punktów kratowych należy do trójkąta utworzonego na płaszczyźnie przez proste o równaniach $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$, $x = 10$ i $y = 0$?



Obliczmy wartości funkcji $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$ dla całkowitych $x = 1, 2, \ldots, 10$; otrzymamy odpowiednio:

$$y = \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{3}{2}, \frac{13}{6}, \frac{17}{6}, \frac{7}{2}, \frac{25}{6}, \frac{29}{6}, \frac{11}{2}, \frac{37}{6}.$$

Łatwo zauważyć, że do naszego trójkąta należy tyle punktów kratowych, ile wynosi suma części całkowitych otrzymanych wartości y plus 10 (punkty leżące na osi odciętych):

$$\left[\frac{1}{6}\right] + \left[\frac{5}{6}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{13}{6}\right] + \left[\frac{17}{6}\right] + \left[\frac{7}{2}\right] + \left[\frac{25}{6}\right] + \left[\frac{29}{6}\right] + \left[\frac{11}{2}\right] + \left[\frac{37}{6}\right] + 10 =$$

$$= 0 + 0 + 1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 10 = 37$$ ■

Okazuje się, że punkty kratowe mogą być przydatne do dowodzenia tożsamości.

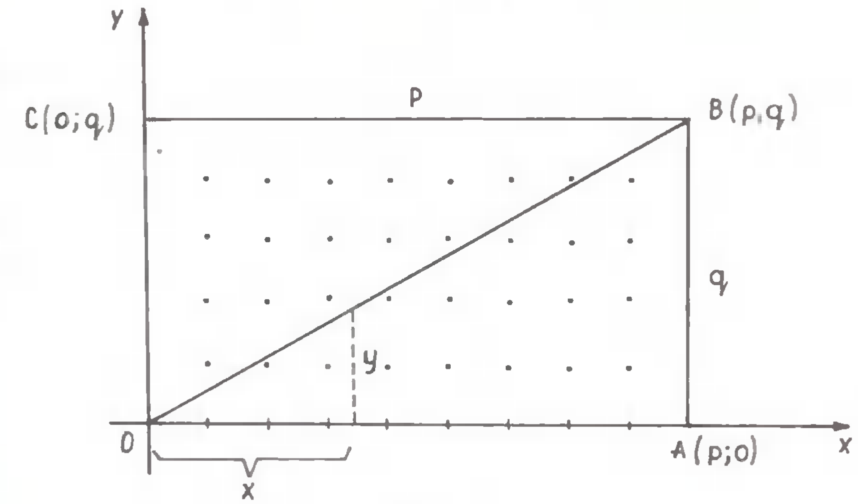
Rozwiążmy dla przykładu takie oto

Zadanie 1. Udowodnij, że jeżeli p i q są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi, to

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left[\frac{kq}{p}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Rozwiązanie:

❑ Rozważmy na płaszczyźnie współrzędnych prostokąt o wierzchołkach $0 = (0,0)$, $A = (p,0)$, $B = (p,q)$, $C = (0,q)$ (rys.)



Punkt kratowy (x, y) leży wewnątrz tego prostokąta wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \le x \le p-1$ oraz $1 \le y \le p-1$. Wszystkich takich punktów jest zatem $(p-1)(q-1)$.

Przeprowadźmy teraz przekątną OB naszego prostokąta; jej równanie ma postać: $y = \frac{p}{q}x$. Zauważmy, że dla $x = 1, 2, 3, \ldots, p-1$ żadna z liczb $\frac{p}{q} \cdot x$ nie jest całkowita, gdyż liczby p i q są, z założenia, względnie pierwsze. Wynika stąd, że na przekątnej OB nie leży żaden z punktów kratowych wewnętrznych tego prostokąta. W takim razie wewnątrz trójkąta OAB znajduje się $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ punktów kratowych. Z drugiej strony, wszystkich takich punktów jest w nim

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\left[\frac{3q}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right].$$

W ten sposób otrzymaliśmy żądaną równość. ■

Zadanie 2. Liczby naturalne p i q są względnie pierwsze, przy czym $p > q$. Rozstrzygnij, która z liczb jest większa

$$\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{kq}{p}\right] \quad \text{czy} \quad \sum_{k=1}^{p}\left[\frac{kp}{q}\right].$$

III. O NIERÓWNOŚCI O ŚREDNICH I PEWNYM JEJ UOGÓLNIENIU

Czy potrafiłby ktoś dać przykład takiej edycji Olimpiady Matematycznej, w której nie byłoby zadania dającego się rozwiązać (zawsze w elegancki sposób !) za pomocą nierówności o średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej liczb nieujemnych, zwanej nierównością Cauchy'ego[1] ? Ileż zadań maturalnych i egzaminacyjnych jest w stanie za jej pomocą rozwiązać uczeń już klasy pierwszej szkoły średniej (a nierzadko wybitny - z klasy VII czy VIII szkoły podstawowej!).

Aż dziw bierze, że do tej pory nierówność ta nie znalazła się w programie nauczania matematyki. Prosta w sformułowaniu, dająca się bardzo elementarnie udowodnić i przebogata w swoich zastosowaniach.

W niniejszym rozdziale zaprezentowany zostanie bodaj najpiękniejszy jej elementarny dowód oraz popatrzymy na jej pewne uogólnienie.
Udowodnimy najpierw następujący

Lemat. *Dla każdej liczby naturalnej n oraz dla dowolnych n liczb nieujemnych* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *takich, że* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$, *zachodzi nierówność*

(1) $$a_1 a_2 \ldots a_n \le 1 .$$

DOWÓD. Zastosujemy indukcję względem n.

❑ Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Dla $n = 2$ mamy

$$a_1 a_2 = a_1(2 - a_1) = -a_1^2 + 2a_1 = -(a_1 - 1)^2 + 1 \le 1.$$

[1] Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) - matematyk i fizyk francuski.

Załóżmy więc, że dla pewnego naturalnego $n \geq 2$ oraz dla dowolnych n liczb nieujemnych o sumie równej n zachodzi nierówność (1), i rozważmy $n+1$ takich liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1}$, że

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = n + 1.$$

Wśród nich jest taka liczba, która jest nie większa od 1 oraz taka, która jest nie mniejsza od 1 (w przeciwnym razie byłoby $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} > n + 1$ lub $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} < n + 1$).

Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $a_n \leq 1$ i $a_{n+1} \geq 1$. Wówczas $(a_n - 1)(a_{n+1} - 1) \leq 0$, czyli $a_n a_{n+1} \leq a_n + a_{n+1} - 1$.

Rozważmy teraz liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + a_{n+1} - 1$. Są one nieujemne, jest ich n oraz ich suma wynosi n.

Zatem, na mocy założenia indukcyjnego, otrzymujemy

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-1}(a_n + a_{n+1} - 1) \leq 1.$$

Stąd oraz z poczynionej wcześniej uwagi wynika, że

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n a_{n+1} \leq a_1 a_2 \ldots a_{n-1}(a_n + a_{n+1} - 1) \leq 1$$

czyli, że $a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} \leq 1$.

Kończy to dowód kroku indukcyjnego oraz dowód słuszności lematu dla dowolnej liczby naturalnej n. ■

Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Wówczas liczby $\dfrac{n x_i}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, też są dodatnie, jest ich n oraz ich suma wynosi n. Na mocy lematu otrzymujemy

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{n x_i}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} \leq 1.$$

Nierówność ta jest równoważna kolejno nierównościom:

$$n^n \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n} \leq 1,$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n,$$

(2) $$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Ostatnia nierówność, to właśnie słynna nierówność Cauchy'ego.

Zauważmy, że gdy któraś z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest zerem, to nierówność (2) zachodzi w oczywisty sposób.

Odnotujmy też, że równość w nierówności Cauchy'ego ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Istotnie, jeśli $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, to średnie arytmetyczna i geometryczna tych liczb są równe.

Załóżmy teraz, że średnie te są równe, oraz że, na przykład $x_1 \neq x_2$. Wówczas $(x_1 - x_2)^2 > 0$, czyli

$$x_1 + x_2 > 2\sqrt{x_1 x_2}.$$

W konsekwencji otrzymujemy

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \sqrt[n]{\left(\sqrt{x_1 x_2}\right)^2 x_3 \ldots x_n} \leq$$

$$\leq \frac{2\sqrt{x_1 x_2} + x_3 + \ldots + x_n}{n} < \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

a więc sprzeczność. Jeśli więc średnie te są równe, to

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

Otrzymaliśmy ostatecznie następujące

Twierdzenie. *Jeżeli* n *jest dowolną liczbą naturalną,* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - *dowolnymi liczbami nieujemnymi, to*

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n .$$

Stosując nierówność Cauchy'ego do liczb $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$, gdzie $x_i > 0$ i $i = 1, 2, \ldots, n$, otrzymamy kolejno nierówności:

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x_n}},$$

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}},$$

$$(3) \qquad \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

Ostatnia z powyżej wpisanych nierówności - to nierówność pomiędzy średnią geometryczną i średnią harmoniczną liczb dodatnich

$$x_1, x_2, \ldots, x_n .$$

Równość pomiędzy tymi średnimi ma, oczywiście, miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \ldots = \frac{1}{x_n}$, czyli, gdy $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Mamy więc kolejne

Twierdzenie. *Jeżeli* n *jest dowolną liczbą naturalną;* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - *dowolnymi liczbami dodatnimi, to*

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}},$$

przy czym równość zachodzi tutaj wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n .$$

Wniosek. Dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geq 2$) zachodzi nierówność

$$(4) \qquad \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}},$$

przy czym równość występuje tutaj wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n .$$

Ostatnia nierówność, to zależność między średnią arytmetyczną i średnią harmoniczną liczb dodatnich. Warto ją zapamiętać, gdyż też bardzo często przydaje się do zadań na dowodzenie nierówności czy też do rozwiązywania równań nieoznaczonych w liczbach dodatnich (o których będzie mowa w następnym rozdziale).

Przejdźmy teraz do zapowiedzianego, w tytule obecnego rozdziału, uogólnienia.

Wprowadźmy oznaczenia:

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} .$$

Rozważmy macierz prostokątną $\left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ liczb nieujemnych i obliczmy średnie geometryczne liczb każdego jej wiersza, oznaczając je odpowiednio przez $G_1, G_2, \dots, G_m$, oraz średnie arytmetyczne liczb każdej kolumny tej macierzy, oznaczając je odpowiednio przez $A_1, A_2, \dots, A_n$.

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{matrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_m \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_n \end{matrix} & \end{array}$$

Okazuje się, że prawdziwe jest następujące

Twierdzenie.

(5) $$G(A_1, A_2, \dots, A_n) \ge A(G_1, G_2, \dots, G_m).$$

DOWÓD. ❑

(a) Jeżeli któraś ze średnich $A_1, A_2, \dots, A_n$ będzie zerem, na przykład $A_1 = 0$, wówczas oczywiście, będzie $a_{11} = a_{21} = \dots = a_{m1} = 0$,

$$G(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0, \quad G_1 = G_2 = \dots = G_m = 0, \quad A(G_1, G_2, \dots, G_m) = 0.$$

Nierówność (5) jest więc w tym przypadku oczywista.

(b) Niech więc $A_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Wówczas z nierówności Cauchy'ego, dla każdego $i = 1, 2, \dots, m$ mamy

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{A_j} \ge \frac{nG_i}{G(A_1, A_2, \dots, A_n)},$$

skąd, po dodaniu tych nierówności stronami, otrzymujemy, że

$$\frac{mA_1}{A_1} + \frac{mA_2}{A_2} + \dots + \frac{mA_n}{A_n} \ge \frac{n \cdot m \cdot A(G_1, G_2, \dots, G_m)}{G(A_1, A_2, \dots, A_n)},$$

czyli, że

$$G(A_1, A_2, \dots, A_n) \ge A(G_1, G_2, \dots, G_m). \qquad \blacksquare$$

Zauważmy, że nierówność ta staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna z kolumn jest zerowa lub, gdy liczby we wszystkich wierszach są proporcjonalne.

Nierówność (5) jest uogólnieniem nierówności Cauchy'ego, choć nie tylko tej nierówności.

1. Rozważmy macierz kwadratową $n \times n$ postaci

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_1 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix},$$

gdzie $a_i \ge 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Wówczas

$$G_1 = G_2 = \dots = G_n = G(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n = A(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

a nierówność (5) przyjmuje postać nierówności Cauchy'ego

$$A(a_1, a_2, \dots, a_n) \ge G(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

2. Jeżeli rozważylibyśmy macierz prostokątną $n \times 2$ postaci takiej

$$\begin{bmatrix} a_1^2 & b_1^2 \\ a_2^2 & b_2^2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n^2 & b_n^2 \end{bmatrix},$$

to nierówność (5) otrzyma postać

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \cdot \frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}{n}} \ge \frac{|a_1b_1| + |a_2b_2| + \dots + |a_nb_n|}{n},$$

z której bez trudu uzyskamy nierówność

$$(6)\qquad \left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right) \geq \left(a_1b_1+\ldots+a_nb_n\right)^2,$$

czyli tzw. nierówność Schwarza.

3. A teraz rozważmy m ciągów liczb nieujemnych $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$; $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$; ...; $a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}$ oraz liczby wymierne dodatnie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, których suma wynosi 1. Sprowadźmy te liczby do wspólnego mianownika M:

$\alpha_1 = \dfrac{A_1}{M}$, $\alpha_2 = \dfrac{A_2}{M}$, ..., $\alpha_m = \dfrac{A_m}{M}$, gdzie $A_1, A_2, \ldots, A_m$ są liczbami naturalnymi o sumie M.

Spójrzmy na macierz $n \times M$ postaci

$$\left[\begin{array}{ccccc}
\underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{1n} & \cdots & a_{1n} \end{matrix}}_{A_1 \text{ kolumn}} &
\underbrace{\begin{matrix} a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n} & a_{2n} & \cdots & a_{2n} \end{matrix}}_{A_2 \text{ kolumn}} &
\cdots\cdots &
\underbrace{\begin{matrix} a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{m1} \\ a_{m2} & a_{m2} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mn} & a_{mn} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}}_{A_m \text{ kolumn}}
\end{array}\right].$$

Widzimy, że nierówność (5) przyjmuje postać

$$a_{11}^{\alpha_1}a_{21}^{\alpha_2}\ldots a_{m1}^{\alpha_m} + a_{12}^{\alpha_1}a_{22}^{\alpha_2}\ldots a_{m2}^{\alpha_m} + \ldots + a_{1n}^{\alpha_1}a_{2n}^{\alpha_2}\ldots a_{mn}^{\alpha_m} \leq$$

$$\leq \left(a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{1n}\right)^{\alpha_1}\cdot\left(a_{21}+a_{22}+\ldots+a_{2n}\right)^{\alpha_2}\ldots\left(a_{m1}+a_{m2}+\ldots+a_{mn}\right)^{\alpha_m},$$

a więc postać znanej nierówności Höldera.

4. Weźmy teraz pod uwagę macierz

$$\left[\begin{array}{cc}
\underbrace{\begin{matrix} a_1^\beta & a_1^\beta & \cdots & a_1^\beta \\ a_2^\beta & a_2^\beta & \cdots & a_2^\beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^\beta & a_n^\beta & \cdots & a_n^\beta \end{matrix}}_{\alpha} &
\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{matrix}}_{\beta-\alpha}
\end{array}\right],$$

gdzie $a_i \geq 0$ $i = 1, 2, \ldots, n$ $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$ i $\alpha \leq \beta$.

Wówczas, jeżeli obie strony otrzymanej dla tej macierzy nierówności (5) podniesiemy do potęgi α^{-1}, to otrzymamy kolejną znaną nierówność o średnich potęgowych, czyli nierówność

$$\left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \ldots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \geq \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

5. Rozważmy teraz macierz $(n+1) \times (n+1)$ postaci:

$$\begin{bmatrix}
1 & 1+\frac{x}{n} & 1+\frac{x}{n} & \ldots & 1+\frac{x}{n} \\
1+\frac{x}{n} & 1 & 1+\frac{x}{n} & \ldots & 1+\frac{x}{n} \\
1+\frac{x}{n} & 1+\frac{x}{n} & 1 & \vdots & 1+\frac{x}{n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1+\frac{x}{n} & 1+\frac{x}{n} & 1+\frac{x}{n} & \ldots & 1
\end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } x \geq -n,\quad n \in \mathbf{N}.$$

Wystarczy powołać się na nierówność (5) i podnieść ją obustronnie do potęgi $n+1$, aby otrzymać nierówność

$$\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

pozwalającą m.in. stwierdzić, że ciąg $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ jest rosnący.

Zanim zakończymy ten rozdział podaniem (już tradycyjnie) zadań do pracy samodzielnej, pokażemy jeszcze równoważność nierówności Cauchy'ego o średnich i nierówności Bernoulliego.

Nierówność Cauchy'ego, czyli nierówność

$$\text{(C)}\qquad \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},$$

gdzie n jest dowolną liczbą naturalną, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - liczbami nieujemnymi, znamy już dobrze.

Przypomnijmy zatem, że nierówność Bernoulliego[1], to nierówność postaci

(B) $$(1+x)^n \geq 1 + nx,$$

prawdziwa dla każdego $x > -1$ oraz dla każdego całkowitego $n \geq 0$.

1. (C) $\Rightarrow$ (B).

Dla $n = 1$ nierówność (B) jest oczywista. Także przy $n \geq 2$ i $-1 \leq x \leq -\frac{1}{n}$ nie ma czego dowodzić.

Niech więc $n \geq 2$ i $x > -\frac{1}{n}$. Wówczas $nx + 1 > 0$ i na mocy nierówności (C) zastosowanej do n liczb: $1 + nx$, $\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-1}$ mamy

$$(1+x)^n = \left(n \cdot \frac{1+x}{n}\right)^n = \left(\frac{(1+nx) + \overbrace{1 + \ldots + 1}^{n-1}}{n}\right)^n \geq$$

$$\geq (1+nx) \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-1} = 1 + nx.$$

2. (B) $\Rightarrow$ (C).

Przyjmijmy od razu, że wszystkie x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ są dodatnie, gdyż jeśli któraś z nich jest zerem, to nie ma czego dowodzić.

Wprowadźmy, dla wygody, następujące oznaczenia

[1] Jacob Bernoulli (1654 - 1705) - matematyk szwajcarski.

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \qquad G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Dla każdego $k = 2, 3, \ldots, n$ mamy $\frac{A_k}{A_{k-1}} > 0$, czyli $\frac{A_k}{A_{k-1}} - 1 > -1$, więc na mocy nierówności (B) mamy:

$$\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right)^k = \left(1 + \left(\frac{A_k}{A_{k-1}} - 1\right)\right)^k \geq 1 + k\left(\frac{A_k}{A_{k-1}} - 1\right) =$$

$$= \frac{A_{k-1} + kA_k - kA_{k-1}}{A_{k-1}} = \frac{x_k}{A_{k-1}},$$

czyli $A_k^k \geq x_k A_{k-1}^{k-1}$.

Wobec tego

$$A_n^n \geq x_n A_{n-1}^{n-1} \geq x_n x_{n-1} A_{n-2}^{n-2} \geq \ldots \geq x_n x_{n-1} \ldots x_2 A_1^1 = G_n^n,$$

skąd $A_n \geq G_n$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Udowodnij, że jeżeli liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są nieujemne, to:

(a) $\left(x_1^n + (n-1)\right)\left(x_n^2 + (n-1)\right)\ldots\left(x_n^n + (n-1)\right) \geq \left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)^n$.

(b) $\left(x_1 + x_2^3 + x_3^5 + \ldots + x_n^{2n-1}\right)\left(x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + \ldots + x_{n-1}^{2n-1} + x_n\right) \times$

$\times\left(x_1^5 + x_2^7 + x_3^9 + \ldots + x_{n-2}^{2n-1} + x_{n-1} + x_n^3\right)\ldots\left(x_1^{2n-1} + x_2 + x_3^3 + \ldots + x_n^{2n-3}\right) \geq$

$$\geq \left(x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n\right)^n.$$

(c) $\left(1 + x_1\right)\left(1 + x_2\right)\ldots\left(1 + x_n\right) \geq \left(1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\right)^n$.

2. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $x+y+z=1$. Wykaż, że

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

3. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $xyz = 1$. Udowodnij, że

$$(x+2y)(y+2z)(z+2x) \geq 27.$$

4. Liczby dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Wykaż, że:

(a) $$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{x_n}\right) \geq (n+1)^n.$$

(b) $$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2+\ldots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2 \geq \frac{\left(n^2+1\right)^2}{n}.$$

(c) $$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^n+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^n+\ldots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^n \geq \frac{\left(n^2+1\right)^n}{n^{n-1}}.$$

(d) $$\left(\frac{1}{a_1^2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{a_2^2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{a_n^2}-1\right) \geq \left(n^2-1\right)^n.$$

5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$3+(a+b+c)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq \frac{3(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1}.$$

IV. RÓWNANIA NIEOZNACZONE

Równaniem nieoznaczonym nazywamy równanie z większą niż 1 liczbą niewiadomych. Zazwyczaj rozwiązujemy równania nieoznaczone w liczbach całkowitych.

Nie ma, niestety, ogólnej metody pozwalającej rozwiązać każde równanie nieoznaczone. Są tylko sposoby rozwiązywania pewnych typów równań nieoznaczonych i tym głównie zajmiemy się teraz.

1. Zamiana na iloczyn.

Zadanie 1. Rozwiąż w liczbach całkowitych x, y równanie

$$xy - 2x + 3y = 16.$$

Rozwiązanie:

❑ Dane równanie jest równoważne równaniom:

$$x(y-2) + 3y - 6 = 10,$$

$$(x+3)(y-2) = 10.$$

Z ostatniego równania wynika, że $x+3$ i $y-2$ są podzielnikami liczby 10. Liczba ta ma osiem podzielników: $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$. Stąd osiem układów równań:

$$\begin{cases} x+3=1 \\ y-2=10 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+3=-1 \\ y-2=-10 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+3=5 \\ y-2=2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+3=-5 \\ y-2=-2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x+3=2 \\ y-2=5 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+3=-2 \\ y-2=-5 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+3=10 \\ y-2=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+3=-10 \\ y-2=-1 \end{cases}.$$

Pary liczb całkowitych: $(-2,12)$, $(-4,-8)$, $(-1,7)$, $(-5,-3)$, $(2,4)$, $(-8,0)$, $(7,3)$, $(-13,1)$ będące rozwiązaniami odpowiednio, tych kolejno napisanych, układów równań, są rozwiązaniami w liczbach całkowitych naszego równania. ■

Zadanie 2. Rozwiąż w liczbach całkowitych x, y równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p},$$

gdzie p jest daną liczbą pierwszą.

Rozwiązanie:

❑ Zauważmy najpierw, że oczywiście musi być $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Nasze równanie równoważne jest równaniom:

$$xy = px + py,$$

$$(x-p)(y-p) = p^2.$$

Stąd wynika, że $x - p$, $y - p$ są podzielnikami liczby p^2. Liczba p^2 ma ich sześć: ± 1, $\pm p$, $\pm p^2$.

Podobnie, jak w poprzednim przykładzie otrzymamy, że rozwiązaniami danego równania w liczbach całkowitych są pary:

$$(p+1,\ p+p^2), \qquad (p-1,\ p-p^2), \qquad (2p, 2p),$$
$$(p+p^2,\ p+1), \qquad (p-p^2,\ p-1).$$ ■

Zadanie 3. Rozwiąż w liczbach całkowitych x, y równania:

1° $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

Odp. $(4,1); (4,-3); (-4,1); (-4,-3)$.

2° $x^2 + x + 41 = y^2$.

Odp. $(40,41); (-41,41); (-41,-41); (40,-41)$.

3° $(x^2+1)(y^2+1) = (x+y)^2 + 1$.

Odp. $(0, y)$, gdzie $y \in \mathbf{Z}$,

$(x, 0)$, gdzie $x \in \mathbf{Z}$,

$(1,2); (2,2); (-1,-2); (-2,-1)$.

Zadanie 4. Wykaż, że równanie $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną, posiada dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach naturalnych wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą.

2. Metoda prób

Zadanie 5. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

Rozwiązanie:

❑ Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $x \le y \le z$.

Rozważmy następujące przypadki:

a) $x = 1$; wówczas równanie nie posiada rozwiązań, gdyż $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \neq 0$.

b) $x = 2$; mamy wówczas równania równoważne:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}; \qquad (y-2)(z-2) = 4.$$

A ponieważ $0 \le y - 2 \le z - 2$, więc otrzymujemy tutaj dwa rozwiązania: $(2,3,6)$, $(2,4,4)$.

c) $x = 3$; równanie nasze przybierze postać

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}.$$

Jeśli $y = 3$, to i $z = 3$. Otrzymamy rozwiązanie $(3,3,3)$.

Jeśli $y \ge 4$, to również $z \ge 4$, a wówczas

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < \frac{2}{3}.$$

d) $x \geq 4$; wówczas $y \geq 4$ i $z \geq 4$ oraz

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1 .$$

Ostatecznie, dla $x \leq y \leq z$ nasze równanie posiada trzy rozwiązania w liczbach całkowitych: $(2,3,6)$, $(2,4,4)$, $(3,3,3)$.
Uwzględniając również wszystkie nietożsamościowe permutacje liczb $2,3,6$ oraz $2,4,4$ otrzymujemy ostatecznie, że nasze równanie posiada w liczbach całkowitych aż dziewięć rozwiązań: $(2,3,6)$, $(2,6,3)$, $(3,2,6)$, $(3,6,2)$, $(6,2,3)$, $(6,3,2)$, $(2,4,4)$, $(4,2,4)$, $(4,4,2)$, $(3,3,3)$. ■

Zadanie 6. Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb naturalnych, dla których

$$x \mid y+1 \quad \text{i} \quad y \mid x+1.$$

Rozwiązanie:
❑ Załóżmy najpierw, że $x \leq y$. Z warunków zadania wynika, że iloczyn $(x+1)(y+1)$ jest podzielny przez xy. Ale $(x+1)(y+1) = xy + x + y + 1$. Stąd też wynika, że suma $x + y + 1$ jest podzielna przez xy. Istnieje zatem liczba naturalna p taka, że

$$x + y + 1 = pxy, \quad \text{czyli, że}$$

$$(*) \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = p .$$

$x \geq 1$ i $y \geq 1$, więc $0 < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \leq 1 + 1 + 1 = 3$.

Zatem $p = 1, 2, 3$.

a) $p = 1$. Wówczas równanie $(*)$ ma postać

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1$$

i rozumując jak w poprzednim przykładzie otrzymamy jego rozwiązanie: $(2,3)$.

b) $p = 2$; $\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 2$ - brak rozwiązań.

c) $p = 3$; otrzymujemy równanie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 3$, którego rozwiązaniem jest para liczb $(1,1)$.

Ostatecznie; jedynymi parami liczb naturalnych spełniającymi równanie zadania są: $(1,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$. ■

Zadanie 7. Rozwiąż równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xyz} = 1$$

w liczbach naturalnych x, y, z.

Rozwiązanie:
❑ Wyznaczymy wszystkie rozwiązania (x, y, z) naszego równania w liczbach naturalnych takich, że $x \leq y \leq z$.

Niech trójka (x, y, z) będzie takim rozwiązaniem. Wtedy oczywiście $x > 1$, a ponadto $x < 4$, gdyż inaczej

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xyz} \leq \frac{61}{64} < 1 .$$

Mamy zatem $x = 2$ lub $x = 3$.

Jeśli $x = 2$, to równanie nasze przyjmie postać $3y + 3z + 3 = yz$, czyli $(y-3)(z-3) = 12$. Stąd wynika, że liczby $y - 3$ i $z - 3$ są naturalnymi dzielnikami liczby 12. Tym samym $(y, z) = (4, 15)$ lub $(y, z) = (5, 9)$ lub $(y, z) = (6, 7)$.

Jeżeli natomiast $x = 3$, to otrzymujemy równanie $2y + 2z + 2 = yz$, czyli $(y-2)(z-2) = 6$.

Rozumując, jak przed chwilą otrzymamy, iż
$(y, z) = (3, 8)$ lub $(y, z) = (4, 5)$.

Rozwiązaniami (x, y, z) naszego równania takimi, że $x \le y \le z$ są więc jedynie trójki: $(2, 4, 15)$, $(2, 5, 9)$, $(2, 6, 7)$, $(3, 3, 8)$, $(3, 4, 5)$, co bez trudu sprawdzimy, podstawiając je do równania ■

Zadanie 8. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie

$$\frac{xy}{x} + \frac{yz}{y} + \frac{zx}{z} = 3.$$

Odp. $(1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, 1, -1)$, $(1, -1, -1)$.

Zadanie 9. (XL Olimpiada Matematyczna)
Wyznacz wszystkie liczby naturalne x, y, z spełniające równanie

$$1 = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{y^2} + \frac{4}{z^2}.$$

Odp. $x = 3, y = 2, z = 12$ lub $x = y = z = 3$.

3. Dowodzenie przez sprzeczność

Zadanie 10. Rozwiąż w liczbach całkowitych x, y, z równanie

$$x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0.$$

Rozwiązanie:
❑ Pokażemy, że trójka $(0, 0, 0)$ jest jedynym rozwiązaniem tego równania w liczbach całkowitych.
Rozważmy następujące przypadki:

a) $x \ne 0$, $y \ne 0$, $z \ne 0$.

Niech $d = NWD(x, y, z)$. Wówczas $x = dx_1$, $y = dy_1$, $z = dz_1$,

gdzie $NWD(x_1, y_1, z_1) = 1$. Podstawiając dx_1, dy_1, dz_1 do naszego równania otrzymamy

$$(*) \qquad x_1^3 - 2y_1^3 - 4z_1^3 = 0.$$

Stąd wnosimy, że x_1^3 jest liczbą parzystą, czyli x_1 jest liczbą parzystą. Niech $x_1 = 2x_2$. Po podstawieniu x_1 do równania $(*)$ otrzymamy równanie

$$8x_2^3 - 2y_1^3 - 4z_1^3 = 0, \text{ czyli}$$

$$4x_2^3 - y_1^3 - 2z_1^3 = 0.$$

Stąd, podobnie jak przed chwilą, otrzymujemy parzystość y_1 i ... w końcu także z_1, co prowadzi ostatecznie do sprzeczności z tym, że $NWD(x_1, y_1, z_1) = 1$.

b) jedna z liczb x, y, z jest równa zeru.

Np. niech $x = 0$; otrzymamy równanie

$$y^3 + 2z^3 = 0.$$

Jeśli teraz założymy, że np. $y = 0$, to i $z = 0$. Taki przypadek jednak wykluczyliśmy.

Jeżeli zaś $y \ne 0$ i $z \ne 0$, to rozumując jak w przypadku a) otrzymamy znowu sprzeczność.

Jeśli zatem trójka (x_0, y_0, z_0) spełnia nasze równanie, to

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że trójka $(0, 0, 0)$ spełnia rzeczywiście równanie zadania.

Jest więc to jedyne rozwiązanie tego równania w liczbach całkowitych. ■

Zadanie 11. Wykaż, że równanie $2x^2 - 215y^2 = 1$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

Rozwiązanie:
❑ Załóżmy, że równanie to posiada rozwiązanie w liczbach całkowitych. Wobec tego ma je także równanie $(2x)^2 = 430y^2 + 2$, co z kolei jest niemożliwe, bowiem kwadrat liczby parzystej zawsze kończy się 0, 4 lub 6. ■

Zadanie 12. Udowodnij, że równanie $14^x + 19^y = 29^z$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych nieujemnych x, y, z.

Rozwiązanie.
❑ Zauważmy najpierw, że potęgi liczb $14, 19$ i 29 z dzielenia przez 5 dają resztę 1 lub 4. Gdyby więc dla pewnych liczb całkowitych nieujemnych x, y, z była spełniona równość $14^x + 19^y = 29^z$, to oznaczałoby to, że liczby $14^x + 19^y$ i 29^z dają z dzielenia przez 5 te same reszty, gdy tymczasem

$$14^x + 19^y \equiv 2 \pmod 5 \quad \text{lub}$$

$$14^x + 19^y \equiv 0 \pmod 5, \quad \text{lub}$$

$$14^x + 19^y \equiv 3 \pmod 5,$$

a $\quad 29^z \equiv 1 \pmod 5$ lub $29^z \equiv 4 \pmod 5$. ■

Zadanie 13. Rozwiąż w liczbach całkowitych x, y, z, u równanie

$$x^4 + 4y^4 = 2(z^4 + 4u^4).$$

Odp. $(0, 0, 0, 0)$.

Zadanie 14. Wykaż, że równanie

$$3x^2 - 4y^2 = 13$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

4. Metoda jednoznaczności.

Zadanie 15. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie

$$(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)\dots(x_n^2 + 1) = 2^n \cdot n! \cdot x_1 x_2 \dots x_n,$$

gdzie n jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie:
❑ Jak wiadomo, $a^2 + b^2 \geq 2ab$ dla dowolnych rzeczywistych a i b, przy czym $a^2 + b^2 = 2ab$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$. Zatem na mocy tej nierówności:

$$x_1^2 + 1 \geq 2x_1,$$

$$x_2^2 + 2^2 \geq 2 \cdot 2x_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n^2 + n^2 \geq 2 \cdot nx_n,$$

przy czym nierówności te stają się równościami wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = 1, \ x_2 = 2, \ \dots, \ x_n = n$.

Mnożąc nierówności te stronami, otrzymamy

$$(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 2^2)\dots(x_n^2 + n^2) \geq 2^n \cdot n! \cdot x_1 \dots x_n.$$

Wobec tego $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 2^2)\dots(x_n^2 + n^2) = 2^n \cdot n! \cdot x_1 \dots x_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n$.

Dane równanie ma więc tylko jedno rozwiązanie: $(1, 2, 3, \dots, n)$. ■

Zadanie 16. Rozwiąż w liczbach dodatnich równanie

$$\frac{64x^2y^2}{4x^2 + y^2} = (x + 1)(y + 2)(2x + y).$$

Rozwiązanie:
❑ Równanie to jest równoważne równaniu

$$64x^2y^2 = (x + 1)(y + 2)(2x + y)(4x^2 + y^2).$$

Stosując znaną nierówność $a + b \ge 2\sqrt{ab}$, (prawdziwą dla dowolnych nieujemnych a i b, która staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$), otrzymamy:

$$(x+1)(y+2)(2x+y)\left(4x^2+y^2\right) \ge$$

$$\ge 2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{2y}\cdot 2\sqrt{2xy}\cdot 2\sqrt{4x^2y^2} = 64x^2y^2.$$

Zatem $64x^2y^2 = (x+1)(y+2)(2x+y)\left(4x^2+y^2\right)$

wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 1$ i $y = 1$. ■

Zadanie 17. Rozwiąż równanie

$$55\left(x^3y^3 + x^2 + y^2\right) = 229\left(xy^3 + 1\right)$$

w liczbach naturalnych x, y.

Rozwiązanie:

❑ Wykonajmy następujące równoważne przekształcenia tego równania:

$$\frac{x^3y^3 + x^2 + y^2}{xy^3 + 1} = \frac{229}{55},$$

$$\frac{x^2\left(xy^3+1\right) + y^2}{xy^3 + 1} = \frac{55\cdot 4 + 9}{55},$$

$$x^2 + \frac{y^2}{xy^3 + 1} = 4 + \frac{9}{55},$$

$$x^2 + \frac{y^2}{xy + \frac{1}{y^2}} = 4 + \frac{1}{6 + \frac{1}{9}}.$$

Stąd: $x^2 = 4$, $xy = 6$, $y^2 = 9$, gdyż każda liczba wymierna ma tylko jedno przedstawienie w postaci ułamka łańcuchowego.
Z równań $x^2 = 4$, $xy = 6$, $y^2 = 9$ otrzymujemy:

$$x = 2, \quad y = 3.$$ ■

Zadanie 18. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych x,y,z równanie

$$3x^2 + y^2 + z^2 = 2x(y+z).$$

Rozwiązanie:

❑ Przenieśmy w równaniu tym wszystko na lewą stronę, a zauważymy, że możemy je napisać następująco:

$$(x-y)^2 + (x-z)^2 + x^2 = 0,$$

skąd już widać, że $x = y = z = 0$.
Po sprawdzeniu, że trójka $(0, 0, 0)$, istotnie spełnia nasze równanie, otrzymujemy ją, jako jedyne rozwiązanie tego równania. ■

Zadanie 19. Dla danej liczby naturalnej $n \ge 1$ wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb dodatnich spełniające równanie:

$$\frac{\sqrt{x^ny^n} - 1}{\sqrt{xy} - 1} = \sqrt{\frac{x^n - 1}{x - 1}\cdot\frac{y^n - 1}{y - 1}}.$$

Rozwiązanie:

❑ Aby równanie to miało sens, musi być: $(*)$ $x \ne 1$, $y \ne 1$, $xy \ne 1$.
Dla $n = 1$ dane równanie jest spełnione przez każdą parę (x, y) liczb dodatnich takich, że $(*)$.
Niech $n \ge 2$. Wówczas równanie nasze możemy przepisać

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sqrt{xy}\right)^k = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1} y^k\right)}.$$

Ono z kolei zachodzi, (na mocy znanej nierówności Schwarza[1]

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

[1] Herman Amandus Schwarz (1843 - 1902) - matematyk niemiecki, zajmujący się głównie analizą matematyczną.

w której znak równości występuje, gdy $a_i = t \cdot b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ gdzie t jest pewną liczbą rzeczywistą), wtedy i tylko wtedy, gdy $\sqrt{x}^k = t \cdot \sqrt{y}^k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, gdzie $t > 0$.

Stąd dla $k = 0$ otrzymujemy $t = 1$, czyli ostatecznie, że $x = y$.

Reasumując, podane równanie spełnia:

dla $n = 1$ każda para (x, y) liczb dodatnich takich, że $(*)$,

dla $n \geq 2$ każda para (x, y) liczb dodatnich takich, że $(*)$ oraz $x = y$. ■

Zadanie 20. Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb dodatnich spełniające równanie
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{8xy}{(1 + ax)(1 + by)},$$
gdzie a i b są danymi liczbami dodatnimi.

Rozwiązanie:

❑ Zauważmy, że
$$\frac{8xy}{(1+ax)(1+by)} = \frac{2xy}{\frac{1+ax}{2}\cdot\frac{1+by}{2}} \leq \frac{2xy}{\sqrt{ax}\cdot\sqrt{by}} = 2\cdot\sqrt{\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}} \leq \frac{x}{a}+\frac{y}{b},$$
na mocy przytoczonej w zadaniu 16 nierówności.

Wobec tego
$$\frac{8xy}{(1 + ax)(1 + by)} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$$
wtedy i tylko wtedy, gdy $1 = ax$, $1 = by$, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$,

czyli, gdy $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, i $a = b$.

Stąd wnosimy, że:

1° gdy $a \neq b$, to dane równanie nie ma rozwiązań,

2° gdy $a = b$, wówczas jedynym rozwiązaniem naszego równania jest para $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$. ■

Zadanie 21. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych równania:

(1) $\sqrt{x} + \sqrt{y - 1} + \sqrt{z - 2} = \frac{1}{2}(x + y + z)$.

Odp. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

(2) $\sqrt{x_1 - 1} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + 3\sqrt{x_3 - 3^2} + \ldots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$.

Odp. $x_k = k(k+1)$, $k = 1, 2, 3 \dots, n$.

Zadanie 22. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych równania:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x(y + z + t)$.

Odp. $x = y = z = t = 0$.

(2) $(x - y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2$.

Odp. $x = y$ lub $y = z$.

(3) $\sqrt{x - y + z} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

Zadanie 23. (XLII Olimpiada Matematyczna)
Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb dodatnich spełniających równanie
$$\frac{27xy}{(1 + 2ax)(1 + 2by)} = \frac{1}{ab} + \frac{x}{a} + \frac{y}{b},$$
gdzie a i b są liczbami dodatnimi.

Odp. Gdy $a \neq b$ - rozwiązań brak,
gdy $a = b$, dane równanie posiada dokładnie jedno rozwiązanie: $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$.

Zadanie 24. (XXXIII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna). Wyznacz wszystkie liczby całkowite a, b, c takie, że $1 < a < b < c$ oraz liczba $(a-1)(b-1)(c-1)$ jest dzielnikiem liczby $abc - 1$.

Odp. $(2, 4, 8)$, $(3, 5, 15)$.

Zadanie 25 (XXXV Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna). Wyznacz wszystkie pary (m, n) liczb całkowitych dodatnich, dla których liczba

$$\frac{n^3 + 1}{mn - 1}$$

jest całkowita.

Odp. $(2,2)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,5)$, $(3,5)$.

Zadanie 26. Rozwiąż w liczbach naturalnych x, y, z, t równania:

(1) $17(xyzt + xy + xt + zt + 1) = 54(yzt + y + t)$.

Odp. $(3, 1, 2, 5)$.

(2) $31(xyzt + xy + xt + zt + 1) = 40(yzt + y + t)$.

Odp. $(1, 3, 2, 4)$.

Zadanie 27. Rozwiąż w liczbach naturalnych równania:

(1) $(y+1)^x - 1 = y!$.

Odp. $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,4)$.

(2) $1! + 2! + \ldots + (x+1)! = y^{z+1}$.

Odp. $(2, 3, 1)$.

V. RÓWNANIA FUNKCYJNE

Równania, w których niewiadomymi są funkcje, nazywamy równaniami funkcyjnymi. Oto przykłady takich równań:

$$f(-x) = f(x), \qquad x \in \mathbf{R},$$

$$f(-x) = -f(x), \qquad x \in \mathbf{R},$$

$$f(x) - 2f(1-x) = x^2, \qquad x \in \mathbf{R},$$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x, \qquad x \in \mathbf{R} - \{0,1\}.$$

Rozwiązać równanie funkcyjne oznacza znaleźć wszystkie funkcje, które je spełniają, lub wykazać, że takie funkcje nie istnieją.

Ogólnej metody rozwiązywania równań funkcyjnych nie ma. Zależy ona od typu równania, czy nawet klasy równań.

Na olimpiadach matematycznych na ogół występują równania funkcyjne, które rozwiązuje się metodą podstawiania, przy czym klasy funkcji, w których takie równania się rozwiązuje, są rozmaite. Metoda ta pod względem logicznym przypomina znaną dobrze metodę „analizy starożytnych" rozwiązywania równań, w których niewiadomymi są liczby.

Tej właśnie metodzie rozwiązywania równań funkcyjnych poświęcimy niniejszy rozdział.

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} - \{0,1\} \to \mathbf{R}$ spełniające dla każdego $x \in \mathbf{R} - \{0,1\}$ równanie

(1) $$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x.$$

Rozwiązanie:

❑ Załóżmy, że funkcja f spełnia dla wszystkich $x \neq 0$ i $x \neq 1$ podane równanie funkcyjne. Podstawmy w równaniu tym w miejsce x $\frac{1}{1-x}$. Otrzymamy równanie

(2) $$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-x}.$$

Jeśli teraz w tym równaniu dokonamy tego samego podstawienia, to otrzymamy równanie

(3) $$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{x-1}{x}.$$

Odejmując stronami równania (3) i (2) dostaniemy równanie

(4) $$f(x) - f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x^2 - x + 1}{x(x-1)}.$$

Po dodaniu stronami równań (1) i (4) otrzymamy

$$2f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x(x-1)}, \text{ czyli}$$

(*) $$f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{2x(x-1)}.$$

Zakładając więc istnienie funkcji spełniającej warunki zadania otrzymaliśmy, że jest to funkcja postaci (*). Bez większego trudu sprawdzimy, że funkcja ta spełnia równanie (1). Jest więc to jedyna funkcja spełniająca dla każdych $x \neq 0$ i $x \neq 1$ równanie (1). ■

Zadanie 2. Znajdź wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające dla każdych $x, y \in \mathbf{R}$ równanie

(1) $$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y).$$

Rozwiązanie:

❑ Załóżmy, że istnieje funkcja f spełniająca to równanie. Przyjmując

w nim $x = y$ otrzymamy $2xf(x) = 2x(f(x))^2$, skąd dla każdego $x \neq 0$, $f(x) = 0$ lub $f(x) = 1$.

1° Niech dla $x \neq 0$ - $f(x) = 0$. Wówczas z równania (1) przy dowolnym y otrzymamy $x \cdot f(y) = 0$, czyli $f(y) = 0$.

2° Niech dla $x \neq 0$ - $f(x) = 1$. Wówczas w ten sam sposób, jak przed chwilą, uzyskamy $f(y) = 1$ dla każdego $y \neq 0$.

Oznaczmy $f(0) = c$. Otrzymaliśmy więc, że jeżeli f spełnia równanie (1), to jest postaci

$$f(x) \equiv 0 \quad \text{lub} \quad f(x) = \begin{cases} 1 : & x \neq 0 \\ c : & x = 0. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że obie te funkcje spełniają podane w zadaniu równanie funkcyjne. ■

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R}$ równanie

$$f(x) \cdot f(y) - xy = f(x) + f(y) - 1.$$

Odp. $f(x) = -x + 1$, $f(x) = x + 1$.

Zadanie 4. Znajdź wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające dla każdego $x \in \mathbf{R}$ równanie

$$2f(x) + f(1-x) = x^2.$$

Odp. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

Zadanie 5. Znajdź wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R}$ równanie

$$f(x+y)^2 = f(x)^2 + f(y)^2.$$

Rozwiązanie:

❑ Niech f będzie szukaną funkcją. Podstawiając do naszego równania $x = y = 0$, otrzymamy $f(0)^2 = 2f(0)^2$, skąd $f(0) = 0$.

Przyjmując w tej samej równości x - dowolne, $y = -x$, otrzymamy

$$0 = f(0)^2 = f(x)^2 + f(-x)^2,$$

stąd natychmiast wynika, że $f(x) \equiv 0$. Oczywiście, funkcja stała równa 0 spełnia równanie zadania. Jest więc to jedyna funkcja, której szukaliśmy. ■

Zadanie 6. (XLIV Olimpiada Matematyczna). Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takie, że

$$f(x+y) - f(x-y) = f(x)\cdot f(y) \qquad \text{dla} \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Rozwiązanie:

❑ Załóżmy, że funkcja f spełnia dane równanie funkcyjne. Podstawiając w nim $x = y = 0$, otrzymujemy $f(0) = 0$.
Przyjmując teraz w naszym równaniu $x = 0$, y - dowolne, otrzymujemy $f(-y) = f(y)$. Zatem f jest funkcją parzystą. Podstawmy z kolei w danym równaniu $x = y$, a następnie $x = -y$. Otrzymamy związki

$$f(2y) = f(y)^2 \text{ oraz } -f(-2y) = f(-y)f(y),$$

skąd wynika, iż

$$f(2y) = -f(2y), \qquad \text{bo } f \text{ - parzysta.}$$

Zatem $2f(2y) = 0$, czyli $f(2y) = 0$.
Z dowolności wyboru y wynika, że f jest funkcją równą tożsamościowo zeru. Łatwo sprawdzić, że funkcja ta spełnia podane w zadaniu równanie funkcyjne. ■

Zadanie 7. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takie, że

$$f(x+y) - f(x-y) = 4xy, \qquad x, y \in \mathbf{R}.$$

Odp. $f(x) = x^2 + c$.

Zadanie 8. Znajdź wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takie, że

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2 \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Odp. $f(x) = x + 1$.

Zadanie 9. (XLI Olimpiada Matematyczna).
Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$ równanie

(*) $$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2).$$

Rozwiązanie:

❑ Niech f będzie szukaną funkcją. Podstawmy w równaniu (*)

$x + y = u$, $x - y = v$. Wówczas otrzymamy równanie

(**) $$v \cdot f(u) - u \cdot f(v) = uv(u^2 - v^2),$$

które przy $u \neq 0$ i $v \neq 0$ jest równoważne równaniu

(***) $$\frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v} = u^2 - v^2, \text{ czyli równaniu}$$

(****) $$\frac{f(u)}{u} - u^2 = \frac{f(v)}{v} - v^2.$$

Z ostatniego równania wnosimy, że funkcja $\dfrac{f(x)}{x} - x^2$ jest stała.

Mamy więc $\dfrac{f(x)}{x} - x^2 \equiv c$ dla pewnego $c \in \mathbf{R}$, czyli

(*****) $$f(x) \equiv x^3 + cx.$$

Jeśli w równaniu (**) podstawimy $v = 0$, $u \neq 0$ (lub $u = 0$, $v \neq 0$), to otrzymamy $f(0) = 0$. Ale każda funkcja postaci (*****) również w punkcie 0 przyjmuje wartość 0.
Tak więc, jeśli funkcja f spełnia podane równanie, to jest postaci (*****). Łatwo sprawdzimy, że funkcje tej postaci spełniają dane równanie funkcyjne. ■

Zadanie 10. (XLIII Olimpiada Matematyczna).
Niech $\mathbf{Q}_+$ oznacza zbiór liczb wymiernych dodatnich. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{Q}_+ \to \mathbf{Q}_+$ spełniające dla wszystkich $x \in \mathbf{Q}_+$ warunki:

(1) $$f(x+1) = f(x) + 1 \quad \text{oraz}$$

(2) $$f(x^3) = (f(x))^3.$$

Rozwiązanie:

❑ Niech f będzie szukaną funkcją. Pokażemy, że $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbf{N}$ i $(p,q) = 1$.

Mamy:

$$(*)\qquad f\left(\left(\frac{p}{q} + q^2\right)^3\right) \overset{(2)}{=} \left(f\left(\frac{p}{q} + q^2\right)\right)^3 \overset{(1)}{=} \left(f\left(\frac{p}{q}\right) + q^2\right)^3 =$$

$$= \left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^3 + 3\cdot\left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^2 q^2 + 3\cdot f\left(\frac{p}{q}\right)\cdot q^4 + q^6.$$

Z drugiej strony,

$$(**)\qquad f\left(\left(\frac{p}{q}+q^2\right)^3\right) = f\left(\left(\frac{p}{q}\right)^3 + 3p^2 + 3pq^3 + q^6\right) \overset{(1)}{=} f\left(\left(\frac{p}{q}\right)^3\right) +$$

$$+3p^2 + 3pq^3 + q^6 \overset{(2)}{=} \left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^3 + 3p^2 + 3pq^3 + q^6.$$

Z $(*)$ i $(**)$ otrzymujemy kolejno równości:

$$\left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^2 \cdot q^2 + f\left(\frac{p}{q}\right)\cdot q^4 = p^2 + pq^3,$$

$$\left(q\cdot f\left(\frac{p}{q}\right) - p\right)\cdot\left(f\left(\frac{p}{q}\right)\cdot q + p + q^2\right) = 0.$$

Stąd

$$q\cdot f\left(\frac{p}{q}\right) - p = 0, \quad \text{czyli} \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja $f(x) = x$, $x \in \mathbf{Q}_+$ spełnia podane w zadaniu warunki. ∎

Zadanie 11. (XLIV Olimpiada Matematyczna).

Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające warunki:

$$(1)\qquad f(-x) = -f(x), \qquad x \in \mathbf{R}$$

$$(2)\qquad f(x+1) = f(x) + 1, \qquad x \in \mathbf{R}$$

$$(3)\qquad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} f(x), \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Rozwiązanie:

❑ Sprawdzenie, że funkcja $f(x) = x$ spełnia warunki zadania, jest natychmiastowe.

Pokażemy, że jest to jedyna funkcja czyniąca zadość tym warunkom.

Rozważmy funkcję $g(x) = f(x) - x$. Wykażemy, że $g(x) \equiv 0$ i zadanie będzie rozwiązane. Otóż

$$(4)\ g(-x) = f(-x) + x \overset{(1)}{=} -f(x) + x = -(f(x) - x) = -g(x),$$

$$(5)\quad g(x+1) = f(x+1) - (x+1) \overset{(2)}{=} f(x) + 1 - x - 1 = f(x) - x = g(x),$$

$$(6)\quad g\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \overset{(3)}{=} \frac{1}{x^2} f(x) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}(f(x) - x) = \frac{1}{x^2} g(x).$$

Z (4) wnioskujemy, że $g(0) = 0$, zaś z (5) - $g(-1) = 0$.

Niech $x \neq 0$ i $x \neq -1$. Wówczas

$$g(x) \overset{(5)}{\equiv} g(x+1) \overset{(6)}{\equiv} (x+1)^2 \cdot g\left(\frac{1}{x+1}\right) \overset{(4)}{\equiv} -(x+1)^2 \cdot g\left(\frac{-1}{x+1}\right) \overset{(5)}{\equiv}$$

$$\overset{(5)}{\equiv} -(x+1)^2 \cdot g\left(\frac{-1}{x+1} + 1\right) \equiv -(x+1)^2 \cdot g\left(\frac{x}{x+1}\right) \overset{(6)}{\equiv}$$

$$\overset{(6)}{\equiv} -(x+1)^2 \cdot \frac{x^2}{(x+1)^2} \cdot g\left(\frac{x+1}{x}\right) \equiv -x^2 \cdot g\left(1 + \frac{1}{x}\right) \overset{(5)}{\equiv} -x^2 \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) \overset{(6)}{\equiv}$$

$$\stackrel{(6)}{\equiv} - x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot g(x) \equiv -g(x).$$

Stąd

$$2g(x) \equiv 0, \quad \text{czyli } g(x) \equiv 0. \quad \blacksquare$$

Zadanie 12. (XXXIII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna). Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takie, że

$$f\left(x^2 + f(y)\right) = y + (f(x))^2$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R}$.

Rozwiązanie:

❑ Niech $f(0) = c$. Podstawiając w równaniu zadania $x = 0$, otrzymamy

(1) $f(f(y)) = y + c^2,\ y \in \mathbf{R}$. Podstawmy tutaj $y = -c^2$;

otrzymamy $f\left(f(-c^2)\right) = 0$.

Z równości

$$f\left(f\left(x^2 + f(y)\right)\right) = f\left(y + (f(x))^2\right) \quad \text{i z (1)}$$

otrzymujemy

(2) $x^2 + f(y) + c^2 = f\left(y + (f(x))^2\right)$.

Niech $\alpha \in \mathbf{R}$ będzie takie, że $f(\alpha) = 0$. (co najmniej jedną liczbę taką znajdziemy).

Wówczas z (2) po podstawieniu $x = \alpha$ wynika, że $\alpha^2 + c^2 = 0$, skąd $c = \alpha = 0$. Zatem $f(x) = 0$ tylko dla $x = 0$. Wobec tego z (1) otrzymujemy $f(f(y)) = y$.

Podstawmy do równania zadania $y = 0$.

Dostaniemy $f\left(x^2\right) = (f(x))^2$, skąd

$$f(u) = \left(f\left(\sqrt{u}\right)\right)^2 > 0 \quad \text{dla każdego } u > 0.$$

Niech $u > 0,\ v \in \mathbf{R}$. Wówczas z danego równania

$$f\left(u + f(f(v))\right) = f(v) + \left(f\left(\sqrt{u}\right)\right)^2, \text{ czyli}$$

$$f(u+v) = f(u) + f(v).$$

Przypuśćmy, że $x > y$. Wówczas

$$f(x) = f\left((x-y) + y\right) = f(x-y) + f(y) > f(y).$$

Zatem, jeśli

$$f(x) > x, \text{ to } x = f(f(x)) > f(x), \text{ natomiast}$$

jeśli $f(x) < x$, to $x = f(f(x)) < f(x)$, czyli $x < f(x)$.

Musi więc być

$$f(x) \equiv x.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja ta spełnia podane w zadaniu równanie. ■

Zadanie 13. (XXVII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna). Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbf{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ takie, że

(1) $f(xf(y)) \cdot f(y) = f(x+y)$ dla wszystkich $x, y \geq 0$,

(2) $f(2) = 0$,

(3) $f(x) \neq 0$ dla $0 \leq x < 2$.

Rozwiązanie:

❑ Niech f będzie szukaną funkcją. Podstawiając w warunku (1) $y = 2$ otrzymamy, na mocy (2), $f(x+2) = 0$ dla każdego $x \geq 0$.

Uwzględniając warunek (3), uzyskujemy $f(x) = 0$ dla każdego $x \geq 2$. Niech $0 \leq x < 2$. Wówczas

$$f\big((2-x)\cdot f(x)\big)\cdot f(x) = f(2-x+x) = 0, \text{ stąd}$$

$$f\big((2-x)\cdot f(x)\big) = 0 \text{ i } (2-x)\cdot f(x) \geq 2, \text{ czyli}$$

$$\frac{1}{f(x)} \leq \frac{2-x}{2}.$$

Niech teraz $0 \leq x < y < 2$. Wówczas

$$f\big((y-x)\cdot f(x)\big)\cdot f(x) = f(y-x+x) = f(y) \neq 0.$$

Wobec tego $f\big((y-x)\cdot f(x)\big) \neq 0$ i $(y-x)\cdot f(x) < 2$.

Otrzymaliśmy więc, że

$$\frac{y-x}{2} < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{2-x}{2} \quad \text{dla dowolnego} \quad y \in (x, 2).$$

Dlatego $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{2-x}{2}$, czyli $f(x) = \dfrac{2}{2-x}$.

Ostatecznie otrzymaliśmy, że jeżeli istnieje funkcja $f\colon \mathbf{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ spełniająca warunki (1) - (3), to jest postaci

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-x}: & 0 \leq x < 2 \\ 0 \quad : & x \geq 2. \end{cases}$$

Pozostaje sprawdzić, że funkcja ta spełnia podane w zadaniu warunki.

Sprawdzenie (2) i (3) jest natychmiastowe.

Oznaczmy lewą i prawą stronę równania z warunku (1) odpowiednio przez L i P. Rozróżniamy dwa przypadki:

1° $x < 2$. Wówczas

$$L = f\left(\frac{2y}{2-x}\right)\cdot\frac{2}{2-x}$$

oraz zachodzi równoważność

$$x + y < 2 \Leftrightarrow \frac{2y}{2-x} < 2.$$

Jeśli więc $x+y \geq 2$, to $L = 0 = P$, a jeśli $x + y < 2$, to

$$L = \frac{2}{2-\dfrac{2y}{2-x}}\cdot\frac{2}{2-x} = \frac{2}{2-(x+y)} = P.$$

2° $x \geq 2$. Wówczas także $x + y \geq 2$ i $L = 0 = P$. ■

Zadanie 14. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R}_+$ równanie

(*) $$f\left(x^y\right) = f(x)^{f(y)}.$$

$\mathbf{R}_+$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.

Rozwiązanie:

❑ Zauważmy, że funkcja $f(x) \equiv 1$ spełnia podane równanie.

Niech $f(a) \neq 1$ dla pewnego $a > 0$. Wówczas dla każdych $x, y \in \mathbf{R}_+$:

$$f(a)^{f(xy)} = f\left(a^{xy}\right) = f\left(\left(a^x\right)^y\right) = f\left(a^x\right)^{f(y)} = f(a)^{f(x)f(y)},$$

skąd

(1) $$f(x)f(y) = f(xy), \quad x, y > 0.$$

oraz

$$f(a)^{f(x+y)} = f\left(a^{x+y}\right) = f\left(a^x a^y\right) = f\left(a^x\right)f\left(a^y\right) =$$

$$= f(a)^{f(x)}\cdot f(a)^{f(y)} = f(a)^{f(x)+f(y)}, \quad \text{skąd}$$

(2) $$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y > 0.$$

Z (2) wynika przez łatwą indukcję, że

(2') $$f\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) = f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + \ldots + f\left(x_n\right)$$

dla dowolnych $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}_+$.

Z (1) otrzymujemy, że $f(1) = f(1)^2$, czyli $f(1) = 1$, bo $f(1) > 0$.

Z (2') wynika, że $f(n) = f(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n}) = n \cdot f(1) = n$ dla $n \in \mathbf{N}$.

Niech m i n będą liczbami naturalnymi. Wówczas

$$f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot n = f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot f(n) = f\left(\frac{m}{n} \cdot n\right) = f(m) = m.$$

Zatem

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}.$$

Pokażemy teraz, że $f(x) = x$ dla dowolnego $x > 0$. Załóżmy, że dla pewnego $x > 0$ $f(x) < x$ (w przypadku $f(x) > x$ rozumujemy podobnie).

Wówczas, obierając taką liczbę wymierną dodatnią $\frac{m}{n}$, aby

$$f(x) < \frac{m}{n} < x, \quad \text{otrzymamy}$$

$$f(x) = f\left(\frac{m}{n} + \left(x - \frac{m}{n}\right)\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) + f\left(x - \frac{m}{n}\right) > f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n},$$

a więc sprzeczność.

Zatem rzeczywiście musi być $f(x) \equiv x$. Bez trudu sprawdzamy, że funkcja ta spełnia równanie zadania.

Funkcje $f_1(x) \equiv 1$ i $f_2(x) \equiv x$ są więc jedynymi rozwiązaniami danego równania funkcyjnego. ■

Zadanie 15. Wyznacz wszystkie funkcje różnowartościowe $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające równanie

(1) $$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1 \quad \text{dla wszystkich} \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Rozwiązanie:

❑ Załóżmy, że różnowartościowa funkcja f spełnia podane równanie. Zamieniając w nim rolami x i y otrzymamy równanie

(2) $$f(f(y) + x) = f(x + y) + 1.$$

Z (1) i (2) wynika, że

$$f(f(x) + y) = f(f(y) + x),$$

skąd, na mocy różnowartościowości f, otrzymujemy, że

$$f(x) + y = f(y) + x, \quad \text{czyli}$$

(3) $$f(x) - f(y) = x - y.$$

Dalej mamy

$$1 = f(f(x) + y) - f(x + y) \overset{(3)}{=} f(x) + y - (x + y) = f(x) - x,$$

skąd

$$f(x) = x + 1.$$

Bez trudu sprawdzamy, że funkcja ta spełnia podane równanie. ■

Zadanie 16. Niech $\mathbf{Q}_+$ oznacza zbiór liczb wymiernych dodatnich. Znajdź wszystkie funkcje $f: \mathbf{Q}_+ \to \mathbf{Q}_+$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbf{Q}_+$ równanie

(1) $$f\left(x + \frac{y}{x}\right) = f(x) + \frac{f(y)}{f(x)} + 2y.$$

Rozwiązanie:

❑ Niech f będzie szukaną funkcją. Podstawiając w równaniu (1) $x = 1, y = 1$; $x = 1, y = 2$; $x = 2, y = 2$, otrzymamy kolejno równości:

$$f(2) = f(1) + 1 + 2,$$

$$f(3) = f(1) + \frac{f(2)}{f(1)} + 4,$$

$$f(3) = f(2) + 1 + 4,$$

z których wynikają równości:

$$f(1) + \frac{f(2)}{f(1)} = f(2) + 1,$$

$$f(1) + \frac{f(1) + f(3)}{f(1)} = f(2) + 1,$$

$$1 + \frac{3}{f(1)} = 4, \quad \text{a stąd} \quad f(1) = 1.$$

Przyjmując w równaniu (1) $x = y = n$, gdzie $n \in \mathbf{N}$, otrzymamy

$f(n+1) = f(n) + 1 + 2n$, skąd przez łatwą indukcję wynika, że

$$f(n) = n^2.$$

Niech tym razem w równaniu (1) $x = n$, $y = m$, gdzie $n, m \in \mathbf{N}$. Wówczas

$$(*) \qquad f\left(n + \frac{m}{n}\right) = f(n) + \frac{f(m)}{f(n)} + 2m.$$

A, gdy w tym samym równaniu przyjmiemy $x = \frac{m}{n}$, $y = m$, to otrzymamy równanie

$$(**) \qquad f\left(\frac{m}{n} + n\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) + \frac{f(m)}{f\left(\frac{m}{n}\right)} + 2m.$$

Z $(*)$ i $(**)$ wynika, że

$$f(n) + \frac{f(m)}{f(n)} = f\left(\frac{m}{n}\right) + \frac{f(m)}{f\left(\frac{m}{n}\right)}, \text{ a stąd, że}$$

$$(***) \qquad \left(f\left(\frac{m}{n}\right) - \frac{f(m)}{f(n)}\right)\left(\frac{f(n)}{f\left(\frac{m}{n}\right)} - 1\right) = 0.$$

Niech $\frac{p}{q}$ będzie dowolną liczbą wymierną dodatnią ($p, q \in \mathbf{N}$).

1° Jeżeli $f(q) \neq f\left(\frac{p}{q}\right)$, to $\frac{f(q)}{f\left(\frac{p}{q}\right)} - 1 \neq 0$

i podstawiając w równaniu $(***)$ $m = p$, $n = q$ otrzymamy

$$f\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{f(p)}{f(q)} = 0, \text{ skąd}$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{f(p)}{f(q)} = \frac{p^2}{q^2} = \left(\frac{p}{q}\right)^2.$$

2° Jeżeli zaś $f(q) = f\left(\frac{p}{q}\right)$, to

$$\frac{f(2q)}{f\left(\frac{2p}{2q}\right)} = \frac{4q^2}{f\left(\frac{2p}{2q}\right)} \neq \frac{q^2}{f\left(\frac{p}{q}\right)} = \frac{f(q)}{f\left(\frac{p}{q}\right)} = 1 \text{ i wobec tego}$$

z $(***)$ przy $m = 2p$, $n = 2q$ otrzymamy

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{2p}{2q}\right) = \frac{f(2p)}{f(2q)} = \frac{(2p)^2}{(2q)^2} = \left(\frac{p}{q}\right)^2.$$

Jeżeli więc funkcja f spełnia warunki zadania, to jest postaci $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{Q}_+$. Łatwo sprawdzić, że funkcja ta spełnia podane równanie. ■

Zadanie 17. Niech $n > 1$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ciągłe w zerze i spełniające dla każdego $x \in \mathbf{R}$ równanie

(1) $$n \cdot f(nx) = f(x) + nx.$$

Rozwiązanie:

❑ Niech f będzie szukaną funkcją. Podstawiając do równania (1) $x = 0$, otrzymujemy $f(0) = 0$. Podstawiając $x = \frac{x}{n}$, otrzymamy

$$f(x) = \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n}.$$

Stąd

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{x}{n^2}\right) + \frac{x}{n^2}, \text{ czyli}$$

$$f(x) = \frac{1}{n^2} \cdot f\left(\frac{x}{n^2}\right) + \frac{x}{n^3} + \frac{x}{n}.$$

Lecz $f\left(\frac{x}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{x}{n^3}\right) + \frac{x}{n^3}$. Zatem

$$f(x) = \frac{1}{n^3} \cdot f\left(\frac{x}{n^3}\right) + \frac{x}{n^5} + \frac{x}{n^3} + \frac{x}{n} \quad \text{itd...}.$$

Przez łatwą indukcję ze względu na k, uzyskujemy, że

$$f(x) = \frac{1}{n^k} \cdot f\left(\frac{x}{n^k}\right) + \frac{x}{n^{2k-1}} + \frac{x}{n^{2k-3}} + \ldots + \frac{x}{n}.$$

Przechodząc w równości tej do granicy przy $k \to \infty$ i korzystając z ciągłości f w zerze otrzymujemy wzór funkcji f, a mianowicie

$$f(x) = \frac{n}{n^2 - 1} x.$$

Bez trudu sprawdzamy, że funkcja ta spełnia warunki zadania. ■

Zadanie 18. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ciągłe w $\mathbf{R}$ oraz spełniające dla każdych $x, y \in \mathbf{R}$ równanie

(*) $$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Rozwiązanie:

❑ Niech f będzie szukaną funkcją. Podstawiając w danym równaniu $x = y = 0$, otrzymamy $f(0) = 2f(0)$, skąd $f(0) = 0$. Przyjmując z kolei w nim x - dowolne, zaś $y = -x$ otrzymujemy $f(x) = -f(-x)$. Zatem f jest nieparzysta.

Metodą indukcji matematycznej otrzymujemy, iż

$f(nx) = nf(x)$ dla każdego naturalnego n.

Niech $m < 0$ będzie dowolną liczbą całkowitą. Wówczas

$$f(mx) = -f(-mx) = -(-m)f(x) = mf(x).$$

Zatem równość $f(nx) = nf(x)$ mamy już dla każdego całkowitego n.

Oznaczmy $f(1) = a$. Z równości $f(nx) = nf(x)$ przy $x = 1$ otrzymujemy $f(n) = a \cdot n$, dla każdego całkowitego n.

Niech p będzie liczbą całkowitą, q - liczbą naturalną. Wówczas

$$q \cdot f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = f(p) = ap, \quad \text{czyli}$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a \cdot \frac{p}{q}.$$

Zatem $f(x)=ax$ dla każdego $x\in\mathbf{Q}$. Niech $x\notin\mathbf{Q}$. Istnieje ciąg (q_n) liczb wymiernych zbieżny do x (np $q_n=\frac{[nx]}{n}$). Korzystając z ciągłości funkcji f w zbiorze $\mathbf{R}$ możemy napisać:

$$f(x)=f\left(\lim_{n\to\infty}q_n\right)=\lim_{n\to\infty}f(q_n)=\lim_{n\to\infty}a\cdot q_n=a\lim_{n\to\infty}q_n=ax.$$

Otrzymaliśmy więc, że jeśli funkcja f spełnia podane w zadaniu warunki, to jest postaci

$$f(x)=ax \quad \text{gdzie} \quad a=f(1).$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja ta spełnia warunki zadania. Jest więc to jedyne rozwiązanie równania funkcyjnego (*) w klasie funkcji ciągłych w zbiorze $\mathbf{R}$. ■

Zadanie 19. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, ciągłe w zerze i spełniające dla każdych $x,y\in\mathbf{R}$ równanie

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy.$$

Rozwiązanie:

❑ Podstawiając w równaniu tym $y=0$, otrzymujemy $f(0)=0$. Ustalmy y. Wówczas dla dowolnego $x\in\mathbf{R}$

$$\lim_{y\to0}(f(x)+f(y)+xy)=f(x)+\lim_{y\to0}f(y)+0=f(x)+f(0)=f(x).$$

Zatem $\lim\limits_{y\to0}f(x+y)=f(x)$, co dowodzi, że funkcja f jest ciągła w zbiorze $\mathbf{R}$.

Łatwo sprawdzić, że funkcja $g(x)=\frac{x(x+1)}{2}$ spełnia warunki zadania.

Rozważmy teraz funkcję

$$h(x)=f(x)-g(x).$$

Otóż funkcja h jest ciągła w zbiorze $\mathbf{R}$, a ponadto dla każdych $x,y\in\mathbf{R}$

$$h(x+y)=h(x)+h(y) \quad (\textit{sprawdź to!}).$$

Jest więc postaci $h(x)=ax$, gdzie $a=h(1)$. Wobec tego

$$f(x)=ax+\frac{x(x+1)}{2}=\frac{1}{2}x^2+\left(a+\frac{1}{2}\right)x.$$

Bez trudu stwierdzamy, że funkcja ta spełnia warunki zadania. ■

Zadanie 20. Znajdź wszystkie funkcje $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, ciągłe w zbiorze $\mathbf{R}$ i spełniające równanie

$$f(x+y)+f(x-y)=2(f(x)+f(y))$$

dla wszystkich $x,y\in\mathbf{R}$. Odp. $f(x)=ax^2$

Zadanie 21. Wyznacz wszystkie funkcje ciągłe $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ spełniające warunki:

(1) $f(1)=1$,

(2) $f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=f(x)+f(y)$ dla wszystkich $x,y\in\mathbf{R}$.

Rozwiązanie:

❑ Niech funkcja f spełnia podane warunki. Podstawiając w (2) $x=y=0$ otrzymamy, iż $f(0)=0$.

Jeżeli x jest dowolne, $y=0$, to z (2) wyniknie $f(x)=f(|x|)$, czyli parzystość funkcji f. Dalej wystarczy rozważyć tylko $x\geq0$. Proste rozumowanie indukcyjne pozwala uzyskać z (2) następującą równość:

$$f\left(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right)=f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)$$

dla dowolnych $x_1,x_2,\ldots x_n\in\mathbf{R}$.

Podstawmy tutaj $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \sqrt{\frac{k}{n}}$. Otrzymamy

$$n \cdot f\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) = f\left(\sqrt{k}\right) = f\left(\sqrt{\underbrace{1+\ldots+1}_{k}}\right) = k \cdot f(1) = k, \text{ skąd}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) = \frac{k}{n} = \left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)^2.$$

Jeżeli więc x jest dowolną liczbą wymierną dodatnią, to

$$f(x) = x^2.$$

Niech $x > 0$ i $x \notin \mathbf{Q}$. Istnieje ciąg (x_n) liczb wymiernych dodatnich zbieżny do x.
Korzystając z ciągłości funkcji f stwierdzamy, że

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = x^2.$$

Otrzymaliśmy zatem, że jeżeli f spełnia podane w zadaniu warunki, to jest postaci $f(x) = x^2$. Sprawdzenie, że funkcja ta spełnia warunki zadania, jest natychmiastowe. ■

Zadanie 22. (XXIV Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna).
Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ spełniające warunki:

(1) $f(xf(y)) = y \cdot f(x)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R}_+$,

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = 0.$

Rozwiązanie:

❑ Przyjmijmy w równości (1) $x = y$. Otrzymamy

(*) $$f(xf(x)) = x \cdot f(x).$$

Gdy natomiast podstawimy w równości (1) $x = 1$, to dostaniemy

(**) $$f(f(y)) = y \cdot f(1).$$ Z (*) wynika, że

(***) $$f(f(xf(x))) = f(xf(x)).$$

Podstawiając w równości (**) $y = xf(x)$ otrzymamy

(****) $$f(f(xf(x))) = x \cdot f(x) \cdot f(1).$$

Zatem

$$x \cdot f(x) \cdot f(1) = f(f(xf(x))) = f(xf(x)) = xf(x),$$

skąd $f(1) = 1$.

Przypuśćmy, że dla pewnego $x > 0$ $f(x) = x$. Wówczas $f(x^k) = x^k$ dla wszystkich naturalnych k.
Istotnie, dla $k = 1$ mamy to z założenia. Jeśli $f(x^k) = x^k$ dla pewnego k, to na mocy (1) możemy napisać,
że

$$f(x^{k+1}) = f(x \cdot f(x^k)) = x^k \cdot f(x) = x^{k+1}.$$

Wobec tego na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy, że $f(x^n) = x^n$ dla każdego naturalnego n.

Pokażemy teraz, że jeżeli $f(x) = x$, to $x = 1$. Jeśli bowiem byłoby $f(x) = x$ i $x > 1$, to ciąg (x^n) byłby rozbieżny do $+\infty$, co z kolei przeczy (2). Gdyby zaś $f(x) = x$ i $x < 1$, to na mocy (1) mielibyśmy

$$f(x^{-1} \cdot f(x)) = x \cdot f(x^{-1}).$$ Ale $f(x) = x$, więc

$$f(x^{-1} \cdot f(x)) = f(x^{-1} \cdot x) = f(1) = 1, \text{ stąd } f(x^{-1}) = x^{-1}.$$

A wówczas $x^{-1} > 1$, więc na mocy rozważonego wyżej przypadku znów otrzymujemy sprzeczność.

Zatem $f(x) = x \Leftrightarrow x = 1$.

Na podstawie równości (1) dla każdego $x > 0$ jest

$f(x \cdot f(x)) = x \cdot f(x)$. Wobec powyższego musi być dla $x > 0$

$$xf(x) = 1, \quad \text{skąd } f(x) = \frac{1}{x}.$$

Oczywiście funkcja $f(x) = \dfrac{1}{x}$ spełnia warunki zadania, co nietrudno sprawdzić. Jest więc to jedyna funkcja, której szukaliśmy. ■

Zadanie 23. (XXXII Olimpiada Matematyczna).
Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ spełniające warunki:

(1) $f(1) = 2,$

(2) $f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1$

dla wszystkich $x, y \in \mathbf{Q}$.

Rozwiązanie:
❑ Niech funkcja f spełnia podane warunki. Wówczas funkcja $g(x) = f(x) - 1$ spełnia warunki:

(a) $g(1) = 1$

i $g(xy) + 1 = (g(x) + 1)(g(y) + 1) - g(x + y) - 1 + 1,$

$g(xy) + 1 = g(x)g(y) + g(x) + g(y) + 1 - g(x + y)$, czyli

(b) $g(x) + g(x + y) = g(x)g(y) + g(x) + g(y).$

Podstawiając w równości (b) $y = 1$, otrzymamy

$g(x) + g(x + 1) = g(x) \cdot g(1) + g(x) + g(1)$, więc na mocy (a)
$g(x) + g(x + 1) = g(x) + g(x) + 1$, czyli

(*) $g(x + 1) = g(x) + 1.$

Stąd $g(1) = g(0 + 1) = g(0) + 1$, więc $g(0) = 0$,

$$g(-1) = g(-1 + 1) - 1 = g(0) - 1 = -1.$$

Proste rozumowanie indukcyjne prowadzi stąd, na mocy (*), do wniosku, iż $g(n) = n$ dla każdego całkowitego n oraz $g(m + x) = m + g(x)$ dla każdej liczby całkowitej m oraz dla każdej liczby wymiernej x.

Niech m będzie liczbą całkowitą, n - liczbą naturalną.
Wówczas na mocy warunku (b) otrzymujemy

$$g\left(\frac{m}{n}\right) + g\left(m + \frac{1}{n}\right) = g(m) \cdot g\left(\frac{1}{n}\right) + g(m) + g\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ale $g(m) = m$, $g\left(m + \frac{1}{n}\right) = g(m) + g\left(\frac{1}{n}\right) = g(m) + g\left(\frac{1}{n}\right)$, więc

$$g\left(\frac{m}{n}\right) + m + g\left(\frac{1}{n}\right) = m \cdot g\left(\frac{1}{n}\right) + m + g\left(\frac{1}{n}\right), \quad g\left(\frac{m}{n}\right) = m \cdot g\left(\frac{1}{n}\right).$$

Jeśli w ostatniej równości podstawimy $m = n$, to otrzymamy

$1 = g(1) = n \cdot g\left(\frac{1}{n}\right)$, skąd $g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. Wobec tego $g\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}$.

Pokazaliśmy, że $g(x) = x$ dla każdego $x \in \mathbf{Q}$. Wobec tego $f(x) = x + 1$ dla każdego $x \in \mathbf{Q}$. Bez trudu stwierdzamy, że funkcja ta spełnia podane w zadaniu warunki.

Zadanie 24. (XLII Olimpiada Matematyczna). Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ monotoniczne i spełniające dla każdego $x \in \mathbf{R}$ równanie

$$f(4x) - f(3x) = 2x.$$

Rozwiązanie:
❑ Udowodnimy najpierw następujący

Lemat. *Funkcja* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *monotoniczna posiada w* $x_0 = 0$ *granice jednostronne właściwe.*

DOWÓD.

❑ Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że f jest rosnąca (gdy f - malejąca rozumujemy analogicznie) i rozważmy zbiory

$$\mathbf{B} = \{ f(x);\ x > 0 \} \quad \text{i} \quad \mathbf{C} = \{ f(x);\ x < 0 \}.$$

Zbiory te są niepuste i ograniczone:

zbiór $\mathbf{B}$ - z dołu,
zbiór $\mathbf{C}$ - z góry, gdyż f - rosnąca.

Niech $p = \inf \mathbf{B}$, $q = \sup \mathbf{C}$. Pokażemy, że

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = p \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = q.$$

Obierzmy dowolnie małe $\varepsilon > 0$. Z definicji kresu dolnego i kresu górnego wynika, że istnieją takie liczby $x' > 0$ i $x'' < 0$, że

$$f(x') < p + \varepsilon \quad \text{i} \quad f(x'') > q - \varepsilon.$$

A wówczas dla każdego $x \in (0; x')$ jest

$$p - \varepsilon < p \le f(x) < f(x') < p + \varepsilon,$$

czyli $|f(x) - p| < \varepsilon$, co dowodzi tego, że

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = p.$$

Podobnie, dla każdego $x \in (x''; 0)$ jest

$$q - \varepsilon < f(x'') < f(x) \le q < q + \varepsilon,$$

czyli $|f(x) - q| < \varepsilon$, skąd wynika, że

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = q. \qquad \blacksquare$$

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Niech f będzie funkcją, którą szukamy. Podstawiając w podanym równaniu $\frac{x}{4}$ w miejsce x, otrzymujemy równanie:

$$f(x) - f\left(\frac{3}{4}x\right) = \frac{x}{2}.$$

Gdy to samo uczynimy w tym równaniu, dostaniemy równanie

$$f\left(\frac{3}{4}x\right) - f\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 x\right) = \frac{x}{2}\cdot\frac{3}{4},$$

a stąd, w ten sam sposób, równanie

$$f\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 x\right) - f\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3 x\right) = \frac{x}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad \text{itd...}.$$

f jest monotoniczna w zbiorze $\mathbf{R}$, więc istnieją granice jednostronne właściwe w zerze.

Niech $x > 0$. Wówczas

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[f\left(\left(\frac{3}{4}\right)^k x\right) - f\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} x\right)\right] + \lim_{t\to 0^+} f(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^k + \lim_{t\to 0^+} f(t) = \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}} + \lim_{t\to 0^+} f(t) =$$

$$= 2x + \lim_{t\to 0^+} f(t)$$

(skorzystaliśmy po drodze ze zbieżności szeregu geometrycznego o ilorazie $3/4$ oraz ze wzoru na sumę takiego szeregu).

Analogicznie otrzymujemy

$$f(x) = 2x + \lim_{t\to 0^-} f(t) \quad \text{dla} \quad x > 0.$$

Stąd $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t) \le \lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$.

Otrzymaliśmy więc, że istnieją takie liczby $c_1 \le c_0 \le c_2$, że

$$f(x) = \begin{cases} 2x + c_1 ; & x < 0 \\ c_0 ; & x = 0 \\ 2x + c_2 ; & x > 0. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że dla dowolnych $c_1 \le c_0 \le c_2$ funkcja f powyższej postaci spełnia warunki zadania. ■

Zadanie 25. Wyznacz wszystkie wielomiany $f(x)$ spełniające dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$ równanie

(*) $$f(x^2) = (f(x))^2.$$

Rozwiązanie:

❑ Niech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ gdzie $a_n \ne 0$, będzie szukanym wielomianem.

Gdy $n = 0$, to wielomian ten przybiera postać $f(x) = a_0$

i wobec (*) mamy $a_0 = a_0^2$, skąd $a_0 = 0$ lub $a_0 = 1$. I istotnie, oba wielomiany $f(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 1$ spełniają podane równanie.

Przypuśćmy, że istnieje $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ takie, że $a_k \ne 0$ i niech $k_0 = \max\{k;\ a_k \ne 0\}$. Wówczas na mocy równości (*), po porównaniu współczynników przy x^{n+k_0}, otrzymamy $2a_n a_{k_0} = 0$, skąd $a_n = 0$, co przeczy temu, że $a_n \ne 0$.

Zatem wielomian $f(x)$ jest postaci $f(x) = a_n x^n$. Wracając z nim do równości (*), dostaniemy $a_n = a_n^2$, skąd $a_n = 1$.

Oczywiście wielomian $f(x) = x^n$ spełnia równanie zadania . Jest więc jedynym rozwiązaniem danego równania. ■

Zadanie 26. Wyznacz wszystkie niezerowe wielomiany $f(x)$ spełniające równanie

(*) $$f(x^2 - 2x) = (f(x-2))^2, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Rozwiązanie

❑ Podane równanie jest równoważne równaniu

(**) $$f((x-1)^2 - 1) = (f((x-1) - 1))^2.$$

Podstawiając tutaj $x - 1 = y$, $f(y-1) = g(y)$ otrzymamy równanie $g(y^2) = (g(y))^2$, a więc to, które rozwiązywaliśmy w poprzednim zadaniu. ■

Zadanie 27. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{Q}_+ \times \mathbf{Q}_+ \to \mathbf{Q}_+$ spełniające warunki:

(1) $f(x, 1) = x, \quad x \in \mathbf{Q}_+,$

(2) $f(x, x) = 1, \quad x \in \mathbf{Q}_+,$

(3) $f(x, y) \cdot f(z, t) = f(xz, yt), \quad x, y, z, t \in \mathbf{Q}_+.$

Rozwiązanie:

❑ Niech f będzie funkcją spełniającą podane warunki. Wówczas

$$f(1, y) \cdot y \overset{(1)}{=} f(1, y) \cdot f(y, 1) \overset{(3)}{=} f(y, y) \overset{(2)}{=} 1, \text{ skąd } f(1, y) = \frac{1}{y},$$

oraz $x \cdot f(1, y) = f(x, 1) \cdot f(1, y) = f(x, y)$, skąd

$$f(x, y) = \frac{x}{y}.$$

Oczywiście funkcja $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ spełnia warunki zadania. ■

Zadanie 28. (XXII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna). Funkcja $f(x, y)$ spełnia warunki:

(1) $f(0, y) = y + 1,$

(2) $f(x + 1, 0) = f(x, 1),$

(3) $f(x + 1, y + 1) = f(x) f(x + 1, y)$

dla wszystkich liczb całkowitych nieujemnych x, y.
Wyznacz $f(4, 1981)$.

Rozwiązanie:
❑ Przyjmując w równości (1) $y = 1$ oraz w (2) $x = 0$, otrzymujemy

$$f(0, 1) = f(1, 0) = 2.$$

Z równości (3) dla $x = 0$ mamy

$$f(1, y + 1) = f(0, f(1, y)),$$

lecz na mocy (1)

$$f(0, f(1, y)) = f(1, y) + 1.$$

Zatem

$$f(1, y + 1) = f(1, y) + 1.$$

Stąd przez łatwą indukcję otrzymujemy
(4) $f(1, y) = y + 2.$

Przyjmijmy teraz w równości (2) $x = 1$, a w równości (4) $y = 1$. Otrzymamy

$$f(2, 0) = f(1, 1) = 3.$$

Z równości (3) dla $x = 1$ wynika

$$f(2, y + 1) = f(1, f(2, y)) = f(2, y) + 2.$$

Stąd przez indukcję

(5) $f(2, y) = 2y + 3.$

Przyjmując w równości (2) $x = 2$, a w równości (5) $y = 1$, dostaniemy

$$f(3, 0) = f(2, 1) = 5.$$

Z równości (3) dla $x = 2$ wynika

$$f(3, y + 1) = f(2, f(3, y)) = 2f(3, y) + 3.$$

Stąd przez indukcję jest
(6) $f(3, y) = 2^y \cdot 5 + 3 \cdot (2^y - 1) = 2^{y+3} - 3.$

Z równości (2) dla $x = 3$ oraz z równości (6) dla $y = 1$ mamy

$$f(4, 0) = f(3, 1) = 13.$$

Podstawiając w równości (3) $x = 3$ i stosując (6) otrzymujemy

$$f(4, y + 1) = f(3, f(4, y)) = 2^{f(4, y) + 3} - 3.$$

Stąd

$$f(4, 0) = 13, \quad f(4, 1) = 2^{16} - 3, \quad f(4, 2) = 2^{2^{16}} - 3$$

i przez indukcję

$f(4, n) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{16}}}}} - 3$ (w zapisie występuje n dwójek).

Wobec tego

$f(4, 1981) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{16}}}}} - 3$ (w zapisie występuje 1981 dwójek),
lub

$f(4, 1981) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{2}}}}} - 3$ (w zapisie występują 1984dwójki). ■

Zadanie 29. Wyznacz wszystkie funkcje różniczkowalne $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające warunki:

(1) $f(1) = 1,$

(2) $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy, \quad x, y \in \mathbf{R}.$

Rozwiązanie:
❑ Niech f będzie szukaną funkcją. Ustalmy y. Z warunku (2) otrzymujemy, że

$$f'(x+y) \equiv f'(x) + y, \quad \text{czyli} \quad f'(x+y) - f'(x) \equiv y.$$

Ostatnia równość jest równoważna, dla dowolnego $y \neq 0$, równości

$$\frac{f'(x+y) - f'(x)}{y} \equiv 1. \qquad \text{Stąd dalej mamy też}$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{f'(x+y) - f'(x)}{y} = 1, \quad \text{czyli, że } f''(x) \equiv 1.$$

Wobec tego $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + ax + b, \quad x \in \mathbf{R}$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$.

Ale $f(1) = 1$ oraz $f(0) = 0$. (co z kolei wynika z (2) przy $x = y = 0$).

Rozwiązując układ równań $\begin{cases} a + b = \frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases}$ otrzymujemy: $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$,

i funkcję f postaci $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{2}$. Nietrudno sprawdzić, że funkcja ta spełnia podane warunki. ■

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

1. Znajdź wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające warunki:

(a) $f(2) = 2,$

(b) $f(xy) = x^2 f(y) + y f(x), \quad x, y \in \mathbf{R}.$

Odp. $f(x) = x^2 - x.$

2. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ spełniające warunki:

(a) $f(x) = x \cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ dla wszystkich $x \neq 0.$

(b) $f(x) + f(y) = f(x+y) + 1$

dla wszystkich $x \neq 0$, $y \neq 0$ takich, że $x + y \neq 0$.

Odp. $f(x) = x + 1.$

3. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R}_+$ równanie

$$f(x \cdot f(y)) + f(y \cdot f(x)) = 2xy.$$

Odp. $f(x) = x.$

4. Wyznacz wszystkie funkcje monotoniczne $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R}_+$ równanie

$$f(xy) \cdot f\left(\frac{f(y)}{x}\right) = 1. \qquad \text{Odp. } f(x) = \frac{1}{x}.$$

5. Wyznacz wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające warunki:

(1) $f(1) = 1,$

(2) $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy.$

Odp. $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{2}.$

6. Wyznacz wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$ równanie

$$f(x) + f(x^2) = 0. \qquad \text{Odp. } f(x) \equiv 0.$$

7. Znajdź wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ciągłe w $\mathbf{R}$ i spełniające równanie

$$f(x^2) + f(x) = x^2 + x \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in \mathbf{R}.$$

Odp. $f(x) = x.$

8. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y, z \in \mathbf{R}$ nierówność

$$f(xy) + f(xz) - 2f(x)f(yz) \geq \frac{1}{2}$$ Odp. $f(x) \equiv \frac{1}{2}$.

9. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające warunki:

(a) $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbf{R}$,

(b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Odp. $f(x) \equiv 0$.

10. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, różniczkowalne i spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R}$ równanie

$$2y \cdot f'(x) = f(x + y) - f(x - y).$$

Odp. $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbf{R}$.

11. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$ równanie

$$x \cdot f(x) = [x] \cdot f(\{x\}) + \{x\} f([x]),$$ gdzie $[x]$ i $\{x\}$ oznaczają odpowiednio, część całkowitą i ułamkową liczby x.

Odp. $f(x) \equiv c$.

12. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$ równanie

$$xf(y) - yf(x) = (x - y)f(xy).$$

Odp. $f(x) = \begin{cases} a: & x \neq 0 \\ b: & x = 0 \end{cases}$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$.

13. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające dla dowolnych $x \in \mathbf{R}$ równanie

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$ Odp. $f(x) = -x + \frac{1}{2}$.

14. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R}$ równanie

$$f(x^2 + y) = f(x) + f(y^2).$$ Odp. $f(x) \equiv 0$.

15. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ spełniające warunki:

(a) $f(m + n) = f(m) \cdot f(n)$ dla wszystkich $m, n \in \mathbf{N}$,

(b) $f(f(n)) = (f(n))^2$ dla pewnego $n \in \mathbf{N}$.

Odp. $f(n) \equiv 1$, $f(n) = 2^n$.

16. Wyznacz wszystkie wielomiany $f(x)$ o współczynnikach rzeczywistych spełniające dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$ równanie

$$f(f(x)) = (f(x))^k,$$ gdzie k jest ustaloną liczbą naturalną.

Odp. $f(x) = x^k$

17. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ spełniające warunki:

(a) $f(2) = 2$,

(b) $f(m) > f(n)$ dla wszystkich $m, n \in \mathbf{N}$, $m > n$,

(c) $f(mn) = f(m)f(n)$ dla wszystkich $m, n \in \mathbf{N}$.

Odp. $f(n) = n$.

18. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające nierówności:

(1) $f(x) \leq x$ dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$

(2) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R}$.

Odp. $f(x) = x$.

19. Znajdź wszystkie funkcje $f: (1; +\infty) \to \mathbf{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in (1; +\infty)$ równanie

$$f(xy) = x \cdot f(y) + y \cdot f(x).$$

Odp. $f(x) = \dfrac{f(a)}{a} x \cdot \ln x$, gdzie $a > 1$ jest pewną liczbą.

20. Wyznacz wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$ równanie

$$P(x^2) + 2x^2 + 10x = 2x \cdot P(x+1) + 3.$$

21. (XXXV Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna). Wyznacz wszystkie funkcje $f: (-1; +\infty) \to (-1; +\infty)$ spełniające warunki:

(1) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ dla wszystkich $x, y \in (-1; +\infty)$.

(2) funkcja $\dfrac{f(x)}{x}$ jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-1; 0)$ i $(0; +\infty)$.

Odp. $f(x) = -\dfrac{x}{x+1}$.

22. (XXXIV Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna). Przyjmujemy $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Rozstrzygnij, czy istnieje taka funkcja $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, że

$$f(1) = 2$$
$$f(f(n)) = f(n) + n \quad \text{dla każdego } n \in \mathbf{N}$$
$$f(n) < f(n+1) \quad \text{dla każdego } n \in \mathbf{N}.$$

23. (VII Austriacko - Polskie Zawody Matematyczne). Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbf{Q}$ równanie

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) - f(xy) + 1.$$

Odp. $f_1(x) \equiv 1$, $f_2(x) \equiv x + 1$.

VI. WOKÓŁ TOŻSAMOŚCI ABELA[1]

Tożsamością albo przekształceniem Abela nazywamy następującą równość:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = x_1(y_1 - y_2) + (x_1 + x_2)(y_2 - y_3) +$$
$$+ (x_1 + x_2 + x_3)(y_3 - y_4) + \dots + (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})(y_{n-1} - y_n) +$$
$$+ (x_1 + x_2 + \dots + x_n)y_n,$$

prawdziwą dla dowolnych liczb rzeczywistych x_i, y_i $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Dla sprawdzenia tej tożsamości wystarczy otworzyć nawiasy po jej prawej stronie i zredukować wyrazy podobne.

Tożsamość Abela ma zastosowanie w teorii szeregów, gdzie używa się jej do dowodu jednego z kryteriów zbieżności szeregów.

My natomiast zobaczymy teraz jej ogromną przydatność do rozwiązywania wielu zadań olimpijskich na dowodzenie nierówności, oraz na obliczanie sum skończonych.

Udowodnijmy przedtem następujący

Lemat. *Jeżeli ciągi liczb rzeczywistych* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *oraz* $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ *spełniają warunki*

(1) $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \ge 0$ *dla* $k = 1, 2, \dots, n$,

[1] Niels Henrik Abel (1802 - 1829) - wybitny algebraik norweski.

(2) $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_n \geq 0,$ *to* $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n \geq 0.$

DOWÓD

❑ Z założeń lematu wynika, iż $\beta_n \geq 0$, $\beta_i - \beta_{i+1} \geq 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ oraz $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \geq 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$ (*sprawdź to!*).

Wobec tego na mocy tożsamości Abela otrzymujemy natychmiast tezę naszego lematu. ■

Przystąpmy do zadań

Zadanie 1. (XVII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna).

Liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz $y_1, y_2, \ldots, y_n$ spełniają warunki: $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0$ oraz $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$. Dowieść, że dla dowolnej permutacji $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ zbioru $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ zachodzi nierówność

(1) $$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2.$$

Rozwiązanie:

❑ Przenosząc składniki lewej strony nierówności na prawą i wykonując odpowiednie przekształcenia otrzymujemy (po uwzględnieniu tego, że $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$) nierówność równoważną

(2) $$\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - z_i) \geq 0.$$

Oznaczmy $\alpha_j = y_j - z_j$ oraz $\beta_j = x_j$, $(j = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Łatwo sprawdzić, że α_j, β_j $(j = 1, 2, 3, \ldots, n)$ spełniają założenia lematu,

$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0$ i $\sum_{j=1}^{n} y_j \geq \sum_{j=1}^{n} z_j$ (*czy widzisz, dlaczego?*).

Stąd $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_n \geq 0$ oraz $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \geq 0$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Zatem na mocy lematu uzyskujemy nierówność (2), a to należało wykazać. ■

Zadanie 2. (XX Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna).

Niech (a_k) $(k = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ będzie ciągiem parami różnych liczb całkowitych dodatnich. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność

(1) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Rozwiązanie:

❑ Przenosząc w nierówności (1) wszystkie wyrazy na lewą stronę, możemy tę nierówność zapisać w postaci równoważnej:

(2) $$\sum_{i=1}^{n} (a_i - i) \cdot \frac{1}{i^2} \geq 0.$$

Przyjmijmy teraz $b_i = a_i - i$, $c_i = \frac{1}{i^2}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Wtedy $a_1 + a_2 + \ldots + a_j \geq 1 + 2 + \ldots + j$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$, gdyż liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są parami różne.

Zatem $b_1 + b_2 + \ldots + b_j = (a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \ldots + (a_j - j) \geq 0$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$. Ponadto $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_n > 0$.

Mamy więc spełnione założenia naszego lematu. Na mocy nierówności lematu zachodzi nierówność (2). ■

Zadanie 3. (XXXV Moskiewska Olimpiada Matematyczna).

Dane są takie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz $y_1, y_2, \ldots, y_n$, że

1° $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0$ oraz $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n \geq 0$,

2° $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq y_1 + y_2 + \ldots + y_k$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej m zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^m \geq \sum_{i=1}^{n} y_i^m .$$

Rozwiązanie:

❑ Zauważmy, że nierówność zadania jest równoważna kolejno nierównościom:

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^m - y_i^m\right) \geq 0,$$

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)\left(x_i^{m-1} + x_i^{m-2} y_i + \ldots + x_i y_i^{m-2} + y_i^{m-1}\right) \geq 0.$$

Przyjmijmy $a_i = x_i - y_i$, $b_i = x_i^{m-1} + x_i^{m-2} y_i + \ldots + x_i y_i^{m-2} + y_i^{m-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Wówczas $\sum_{i=1}^{k} a_i \geq 0$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ oraz $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$.

Na mocy lematu uzyskujemy nierówność (3). ■

Zadanie 4. (XXXIX Olimpiada Matematyczna).
Dane są takie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz $y_1, y_2, \ldots, y_n$, że:

1° $\quad x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0, \quad y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n > 0.$

2° $\quad x_1 x_2 \ldots x_k \geq y_1 y_2 \ldots y_k \quad$ dla $\quad k = 1, 2, \ldots, n.$

Udowodnij, że

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sum_{i=1}^{n} y_i .$$

Rozwiązanie:

❑ Przyjmijmy $a_i = \dfrac{x_i}{y_i}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Wówczas na mocy 1° $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

zaś dzięki 2° $\prod_{i=1}^{k} a_i \geq 1$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

Z nierówności Cauchy'ego (o średniej arytmetycznej i geometrycznej liczb nieujemnych) mamy

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geq k \cdot \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} \geq k \cdot 1 = k \qquad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Wobec tego na mocy tożsamości Abela otrzymujemy, że

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) y_n + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})(y_{n-1} - y_n) +$$
$$+ \ldots + (a_1 + a_2)(y_2 - y_3) + a_1 (y_1 - y_2) \geq n y_n + (n-1)(y_{n-1} - y_n) +$$
$$+ (n-2)(y_{n-2} - y_{n-1}) + \ldots + 2(y_2 - y_3) + 1 \cdot (y_1 - y_2) = \sum_{i=1}^{n} y_i . \quad ■$$

Zadanie 5. (XLIII Olimpiada Matematyczna).

Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ będą liczbami rzeczywistymi.
Dowieść, że następujące dwa warunki są równoważne:

(1) Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i x_i .$$

(2) Dla każdej liczby naturalnej $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{k} b_i \qquad \text{a ponadto } \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i .$$

Rozwiązanie:

❑ Wykażemy, że z (1) wynika (2).

Ponieważ $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ dla dowolnych $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, więc w szczególności dla $x_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mamy

$\sum_{i=1}^{n} a_i \le \sum_{i=1}^{n} b_i$, a dla $x_i = -1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ge \sum_{i=1}^{n} b_i. \text{ Zatem } \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Z kolei, jeśli przyjmiemy $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = -1$ oraz

$x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$, to otrzymamy $\sum_{i=1}^{k} a_i \ge \sum_{i=1}^{k} b_i$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

Wykażemy, że z (2) wynika (1).

Na podstawie przekształcenia Abela zapiszemy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})(a_1 + a_2 + \ldots + a_i) + x_n(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

A ponieważ $x_1 - x_2 \le 0$, $x_2 - x_3 \le 0, \ldots$, $x_{n-1} - x_n \le 0$, oraz $a_1 \ge b_1$, $a_1 + a_2 \ge b_1 + b_2, \ldots$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ge b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, więc na mocy lematu otrzymujemy (1). ■

Zadanie 6. (do samodzielnego rozwiązania).

Liczby dodatnie x_k i y_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ spełniają warunki:

1° $x_1 y_1 < x_2 y_2 < \ldots < x_n y_n$,

2° $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \ge y_1 + y_2 + \ldots + y_k$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

Udowodnij, że $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y_k}.$$

Przejdźmy do zadań na wyznaczanie sum.

Zadanie 1. Wyznacz sumę

$$S_n = 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} \quad (q \ne 1).$$

Rozwiązanie:

❑ Przyjmijmy w tożsamości Abela

$x_k = k$, $y_k = q^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Wówczas $x_k - x_{k+1} = -1$, $y_1 + y_2 + \ldots + y_k = \dfrac{q^k - 1}{q - 1}$ oraz

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n-1} (-1) \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1} + n \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{-1}{q-1} \sum_{k=1}^{n-1} (q^k - 1) +$$

$$+ n \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{-1}{q-1}\left(\frac{q^n - 1}{q - 1} - n\right) + \frac{n(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{nq^n}{q-1} - \frac{q^n - 1}{(q-1)^2}. \ ■$$

Zadanie 2. Wyznacz sumę

$$\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Rozwiązanie:

❑ Podstawmy w tożsamości Abela $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, $y_k = k^2$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Wówczas możemy napisać:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k\left[k^2 - (k+1)^2\right] + n \cdot n^2 = n \cdot n^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k =$$

$$= (n+2)n^2 - 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k. \qquad \text{Stąd}$$

$$3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+2)\, n^2 - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad ■$$

UWAGA. W rozwiązaniu tym milcząco założyliśmy znajomość wzoru na sumę $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)$.

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k.$$

Rozwiązanie:

Przyjmijmy w tożsamości Abela

$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, $y_k = 2^k$ dla $k = 1,2,\ldots,n$. Wówczas

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = \sum_{k=1}^{n-1} k\left(2^k - 2^{k+1}\right) + n \cdot 2^n = n \cdot 2^n - \sum_{k=1}^{n} k\,2^k =$$

$$= n \cdot 2^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} k\,2^k, \text{ skąd wynika, że } \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2^{n+1} - 2. \quad \blacksquare$$

Zadanie 4. Oblicz sumę

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2).$$

Rozwiązanie:

❑ Przyjmijmy tym razem w tożsamości Abela $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, $y_k = k(k+1)(k+2)$, $k = 1,2,\ldots,n,n+1$. Otrzymamy

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k\left[k(k+1)(k+2) - (k+1)(k+2)(k+3)\right] +$$

$$+ n(n+1)(n+2)(n+3) = n(n+1)(n+2)(n+3) - 3\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2).$$

Stąd

$$4 \cdot \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = n(n+1)(n+2)(n+3),$$

czyli $$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}. \quad \blacksquare$$

UWAGA. Analogicznie otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\ldots(k+p) = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p+1)}{p+2}, \quad p \in \mathbf{N}.$$

Zadanie 5. Wyznacz sumę

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Rozwiązanie:

❑ Jeżeli w tożsamości Abela podstawimy: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, $y_k = \frac{1}{k(k+1)}$, $k = 1,2,\ldots,n,n+1$, to otrzymamy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = n \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) =$$

$$= \frac{n}{(n+1)(n+2)} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{n}{(n+1)(n+2)} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{2}{(n+1)(n+2)} - 1.$$

Stąd

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Zadanie 6. (*do samodzielnego rozwiązywania*).

Wyznacz w podany wyżej sposób sumy:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}; \qquad \sum_{k=1}^{n} k \cdot k!; \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!};$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k}; \qquad \sum_{n=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} k\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k.$$

VII. TWIERDZENIE BEZOUTA[1]

Przypomnijmy najpierw, co głosi

Twierdzenie (*o dzieleniu z resztą*).

Dla dowolnej pary wielomianów $f(x)$ *i* $g(x)$, *gdzie* $g(x)$ *nie jest wielomianem zerowym, istnieje dokładnie jedna para wielomianów* $h(x)$ *i* $r(x)$ *takich, że* $f(x) \equiv h(x) \cdot g(x) + r(x)$ *i* $\mathbf{st}\, r(x) < \mathbf{st}\, g(x)$ *lub* $r(x) \equiv 0$.

Wielomiany $h(x)$ i $r(x)$ - to odpowiednio iloraz i reszta z dzielenia wielomianu $f(x)$ przez wielomian $g(x)$.

Jeżeli $r(x) \equiv 0$, to mówimy, że wielomian $f(x)$ jest podzielny przez wielomian $g(x)$. Stąd wynika

Wniosek. Wielomian $f(x)$ jest podzielny przez wielomian $g(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian $h(x)$ taki, że $f(x) \equiv h(x) \cdot g(x)$.

Obecnie zajmijmy się przypadkiem, gdy dzielnik, czyli tutaj - wielomian $g(x)$, jest wielomianem postaci $x - a$. Ponieważ jest to wielomian stopnia pierwszego, więc reszta z dzielenia przez niego dowolnego wielomianu jest wielomianem stałym.
Aby go wyznaczyć, nie jest konieczne wykonywanie dzielenia, albowiem prawdziwe jest następujące

Twierdzenie (Bezouta). *Reszta z dzielenia wielomianu* $f(x)$ *przez wielomian* $x - a$ *jest równa wartości wielomianu* $f(x)$ *w punkcie* a.

---

[1] Bézout Étienne (1730 - 1783) - matematyk francuski

DOWÓD.
☐ Mamy $f(x) \equiv (x-a) \cdot g(x) + r$, gdzie r jest wielomianem stałym. Zatem $f(a) = (a-a) \cdot g(a) + r$, więc $f(a) = r$. ■

Z twierdzenia tego wypływa

Wniosek. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x)$ jest podzielny przez $x - a$.

Przejdźmy do zadań, w których twierdzenie Bezouta znalazło zastosowanie.

Zadanie 1. Wykaż, że wielomian $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ jest podzielny przez $x-1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 0$, zaś jest podzielny przez $x+1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \ldots = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots$

Rozwiązanie:
☐ Z twierdzenia Bezouta wynika, iż

$x - 1 \mid f(x) \Leftrightarrow f(1) = 0$. A przecież $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = f(1)$.

Mamy również

$x + 1 \mid f(x) \Leftrightarrow f(-1) = 0$. A ponieważ $f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$,

więc istotnie
$f(-1) = 0 \Leftrightarrow a_0 + a_2 + a_4 + \ldots = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots$. ■

Zadanie 2. Wielomian $w(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ przy dzieleniu przez $x - 1$ daje resztę 1, a przy dzieleniu przez $x - 4$ resztę 6. Wyznacz a i b.

Rozwiązanie:
☐ Z twierdzenia Bezouta otrzymujemy równości $w(1) = 1$ i $w(4) = 6$. Ale z drugiej strony

$$w(1) = 1 + a + b - 6 = a + b - 5$$

$$w(4) = 64 + 16a + 4b - 6 = 16a + 4b + 58.$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} a + b - 5 = 1 \\ 16a + 4b - 58 = 6 \end{cases}$$

znajdujemy szukane wartości a i b. ■

Zdanie 3. Pewien wielomian daje przy dzieleniu przez $x - 1$ resztę 2, przy dzieleniu przez $x - 2$ resztę 3, a przy dzieleniu przez $x - 3$ resztę 1. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez

$$(x-1)(x-2)(x-3).$$

Rozwiązanie:
☐ Niech $f(x)$ będzie wielomianem, o którym mowa w zadaniu, a $r(x)$ - szukaną resztą z dzielenia $f(x)$ przez $(x-1)(x-2)(x-3)$. Oczywiście $r(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej drugiego, gdyż $(x-1)(x-2)(x-3)$ jest wielomianem stopnia trzeciego. Niech $r(x) = ax^2 + bx + c$. Należy zatem wyznaczyć takie wartości a, b, c, by zachodziła tożsamość

$$f(x) \equiv (x-1)(x-2)(x-3) \cdot g(x) + \left(ax^2 + bx + c\right),$$

dla pewnego wielomianu $g(x)$.

Z twierdzenia Bezouta otrzymujemy równości

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 1.$$

Ale na mocy przed chwilą napisanej tożsamości otrzymujemy, że

$$f(1) = a + b + c$$

$$f(2) = 4a + 2b + c$$

$$f(3) = 9a + 3b + c.$$

Doszliśmy więc do układu równań

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 1, \end{cases}$$

którego rozwiązanie jest szukaną trójką wartości a, b, c. ■

Zadanie 4. Wyznacz resztę z dzielenia $f(x^n)$ przez $f(x)$ jeśli

$$f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1.$$

Rozwiązanie:

❑ Z twierdzenia Bezouta wynika, że $f(x) \equiv (x-1)\cdot g(x) + f(1)$, gdzie $g(x)$ jest pewnym wielomianem.

Ale $f(1) = n$ więc

$f(x) \equiv (x-1)\cdot g(x) + n$. Stąd

$f(x^n) \equiv (x^n - 1)\cdot g(x^n) + n$, czyli

$f(x^n) \equiv (x-1)\cdot f(x)\cdot g(x^n) + n$.

Jest więc

$f(x^n) \equiv f(x)\cdot h(x) + n$, gdzie $h(x) \equiv (x-1)\cdot g(x^n)$.

Zatem szukana reszta wynosi n. ■

Zadanie 5. (XXXIX Olimpiada Matematyczna).

Niech $f(x)$ będzie wielomianem, n - liczbą naturalną. Udowodnij, że jeżeli $f(x^n)$ dzieli się przez $x-1$, to dzieli się również przez

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1.$$

Rozwiązanie:

❑ Skoro $x - 1 \mid f(x^n)$, więc $f(x^n) \equiv (x-1)\cdot g(x)$, gdzie $g(x)$ jest wielomianem. Stąd $f(1) = 0$, czyli $x - 1 \mid f(x)$. Jest więc $f(x) \equiv (x-1)\cdot h(x)$, gdzie $h(x)$ jest wielomianem . Stąd

$f(x^n) \equiv (x^n - 1)\cdot h(x^n) \equiv (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)\cdot h(x^n)$,

co dowodzi tezy. ■

Zadanie 6. Wielomian $P(x)$ stopnia n spełnia warunki

$P(k) = \dfrac{k}{k+1}$ dla $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$. Wyznacz $P(n+1)$.

Rozwiązanie:

❑ Dla każdego $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ mamy więc równość

$$(k+1)\cdot f(k) = k.$$

Rozważmy teraz wielomian $g(x) = (x+1)f(x) - x$. Z podanych w zadaniu warunków wynika, że

$$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = \ldots = g(n) = 0,$$

skąd, na mocy twierdzenia Bezouta, otrzymujemy, że wielomian $g(x)$ jest podzielny przez każdy z dwumianów $x - k$ dla $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$. Wobec tego jest on podzielny także przez ich iloczyn (gdyż każde dwa z nich są względnie pierwsze).

Możemy więc napisać:

$g(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)\cdot h$, gdzie h jest wielomianem stałym, gdyż $g(x)$ jest wielomianem stopnia $(n+1)$ - szego.

Mamy więc tożsamość:

$$(x+1)\cdot f(x) \equiv x + h\cdot x(x-1)(x-2)\ldots(x-n).$$

Podstawiając w niej w miejsce x liczbę -1 otrzymujemy

$$h = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ostatecznie więc

$$f(x) = \frac{x + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{x+1},$$

skąd z łatwością obliczymy, że

$$f(n+1) = \frac{n + 1 + (-1)^{n+1}}{n+2}.$$ ■

Zadanie 7. Dane są liczby naturalne k i p oraz wielomian $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że jeżeli $p+1$ nie dzieli żadnej z liczb $f(k)$,

$f(k+1), \ldots, f(k+p)$, to wielomian $f(x)$ nie posiada pierwiastków wymiernych.

Rozwiązanie:

❑ Załóżmy wbrew tezie, że wielomian $f(x)$ posiada pierwiastek wymierny m. Jest więc on liczbą całkowitą, gdyż wielomian $f(x)$ ma przy x^n współczynnik 1 (jest unormowany).

Mamy więc $f(m) = 0$, skąd, na mocy twierdzenia Bezouta, wynika że $x - m \mid f(x)$, czyli $f(x) \equiv (x - m) \cdot g(x)$, gdzie $g(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych (*czy wiesz, dlaczego?*).

Rozważmy teraz liczby całkowite $f(k+s) = (k+s-m) \cdot g(k+s)$ dla $s = 0, 1, 2, 3, \ldots, p$.

Jest ich tutaj $p+1$. A ponieważ $k+s-m$, dla $s = 0, 1, 2, 3, \ldots, p$ - to kolejne liczby całkowite, więc któraś z nich dzieli się przez $p+1$. Zatem również wśród liczb $f(k+s)$ dla $s = 0, 1, 2, 3, \ldots, p$ jest taka, która dzieli się przez $p+1$, co jest sprzeczne z założeniem zadania. Otrzymana sprzeczność dowodzi oczywiście tezy. ■

Zadanie 8. (XXXI Olimpiada Matematyczna). Udowodnij, że jeżeli wielomian f o współczynnikach całkowitych przyjmuje dla czterech różnych argumentów całkowitych wartość 1, to dla żadnego argumentu całkowitego nie przyjmuje wartości -1.

Rozwiązanie:

❑ Niech x_1, x_2, x_3, x_4 będą tymi różnymi liczbami całkowitymi, dla których $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 1$.

Są one więc pierwiastkami całkowitymi wielomianu $g(x) = f(x) - 1$. Z twierdzenia Bezouta wynika zatem, że $g(x)$ jest podzielny przez każdy z dwumianów $x - x_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, a więc również przez ich iloczyn. Mamy więc $g(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \cdot h(x)$, gdzie $h(x)$ jest oczywiście wielomianem o współczynnikach całkowitych. Gdyby, wbrew tezie, dla pewnego całkowitego $x_5 \notin \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ było $f(x_5) = -1$, to byłoby też $g(x_5) = -2$. Ale wówczas mielibyśmy

$$-2 = (x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3)(x_5 - x_4) \cdot h(x_5),$$

co oczywiście jest raczej niemożliwe, gdyż wśród liczb całkowitych $x_5 - x_1$, $x_5 - x_3$, $x_5 - x_4$, $h(x_5)$ co najmniej cztery są różne. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania. ■

Zadanie 9. Wyznacz wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$ równość

(*) $$x \cdot P(x-1) = (x-2) P(x).$$

Rozwiązanie:

❑ Niech $P(x)$ będzie wielomianem spełniającym tożsamość (*). Podstawiając w niej $x = 0$, $x = 2$, otrzymamy, że $P(0) = 0$ i $P(1) = 0$. Z twierdzenia Bezouta wynika, że $x \mid P(x)$ i $x - 1 \mid P(x)$, a zatem $x(x-1) \mid P(x)$. Wobec tego $P(x) \equiv (x^2 - x) \cdot Q(x)$, gdzie $Q(x)$ jest wielomianem.

Podstawiając wielomian $P(x) = (x^2 - x) \cdot Q(x)$ do równości (*) otrzymamy równość

(**) $$Q(x) = Q(x-1).$$

Z niej zaś wynika, że $Q(x)$ jest wielomianem stałym, czyli dla pewnego $a \in \mathbf{R}$ mamy,

$$Q(x) \equiv a, \quad \text{a więc} \quad P(x) \equiv a(x^2 - x).$$

Zakładając więc, że $P(x)$ jest wielomianem spełniającym równość (*) otrzymaliśmy, że ma postać $P(x) \equiv a(x^2 - x)$. Bez trudu sprawdzisz, że wielomian ten spełnia podaną w zadaniu równość.Jest to zatem jedyny wielomian o żądanej własności. ■

Zadanie 10. Wyznacz wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające tożsamość

(*) $$(x-1) \cdot P(x+1) \equiv (x+2) \cdot P(x).$$

Rozwiązanie:

❑ Zakładając istnienie wielomianów $P(x)$ spełniających tożsamość (*) podstawmy w niej kolejno: $x = 1$, $x = -2$, $x = 0$. Otrzymamy wówczas, że $P(1) = 0$, $P(-1) = 0$, $P(0) = 0$.

Z twierdzenia Bezouta wynika więc, że wielomian $P(x)$ jest podzielny przez x, $x-1$, $x+1$, a zatem również przez iloczyn $x(x-1)(x+1)$. $P(x)$ przyjmuje więc postać $P(x) \equiv (x^3 - x) \cdot Q(x)$, gdzie $Q(x)$ jest pewnym wielomianem.
Podstawiając otrzymany wzór wielomianu $P(x)$ do tożsamości (*) uzyskamy tożsamość

$$(**) \qquad Q(x+1) \equiv Q(x),$$

z której wynika, że $Q(x)$ jest wielomianem stałym.

Zatem jeśli wielomian $P(x)$ spełnia tożsamość (*), to przyjmuje postać

$$P(x) \equiv a(x^3 - x).$$

Z łatwością sprawdzisz, że wielomian ten spełnia podaną w zadaniu równość. Jest więc to jedyny wielomian o żądanej własności. ■

Zadania do samodzielnego rozwiązywania

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające warunki:

1° $P(0) = 0$;

2° $P(x) \equiv \frac{1}{2}\big(P(x+1) + P(x-1)\big)$.

Odp. $P(x) = ax$.

Zadanie 2. Dane są takie wielomiany $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$, że

$$P(x^5) + x \cdot Q(x^5) + x^2 \cdot R(x^5) \equiv (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot S(x).$$

Wykaż, że wielomian $P(x)$ jest podzielny przez $x-1$.

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie wielomiany $W(x)$ spełniające tożsamość

$$(x-1) \cdot W(x+1) \equiv (x+3)W(x-1).$$

Odp. $W(x) = ax(x+2)$

Zadanie 4. (XI Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne).

Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że jeżeli wielomian $Q(x) = P(x) + 12$ ma co najmniej sześć różnych pierwiastków całkowitych, to $P(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

Zadanie 5. Niech $f(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że jeżeli wielomian f przyjmuje wartości podzielne przez 3 dla pewnych trzech kolejnych liczb całkowitych, to przyjmuje je dla każdej liczby całkowitej.

Zadanie 6. Udowodnij, że jeżeli wielomian f o współczynnikach cał--kowitych przyjmuje dla trzech różnych argumentów całkowitych wartość 1, to nie posiada on pierwiastków całkowitych.

VIII. RÓŻNICZKOWANIE WIELOMIANÓW

W tym rozdziale będziemy zajmować się różniczkowaniem wielomianów, przy czym do pochodnej wielomianu podejdziemy czysto algebraicznie.

Rozważmy wielomian $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ o współczynnikach rzeczywistych, gdzie $a_n \neq 0$.

Definicja. *Pochodną wielomianu* $f(x)$ *nazywamy wielomian* $f'(x)$ *postaci* $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$.

Jeżeli $f(x) \equiv c$, *gdzie* $c \in \mathbf{R}$, *to* $f'(x) \equiv 0$.

Z definicji tej wynikają następujące własności operacji różniczkowania wielomianów. Oto one:

1° $\quad \left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$

2° $\quad \left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Udowodnimy własność 2° (własność 1° wynika wprost z definicji).

Jeżeli $f(x) = ax^m$, $g(x) = bx^n$, gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$, to $f(x) \cdot g(x) = abx^{m+n}$, i wówczas

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = (m+n)ab \cdot x^{m+n-1} =$$

$$= ma \cdot x^{m-1} b \cdot x^n + a \cdot x^m \cdot nb \cdot x^{n-1} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Niech $f(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} f_j(x)$, $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} g_k(x)$, gdzie $f_j(x) = a_j x^j$, $g_k(x) = b_k x^k$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Wówczas

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} f_j(x)\cdot g_k(x) \text{ i piszemy}$$

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=\left(\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} f_j(x)\cdot g_k(x)\right)'=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\left(f_j(x)\cdot g_k(x)\right)'=$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\left[f_j'(x)\cdot g_k(x)+f_j(x)\cdot g_k'(x)\right]=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} f_j'(x)\cdot g_k(x)+$$

$$+\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} f_j(x)\cdot g_k'(x)=\left(\sum_{j=0}^{m} f_j'(x)\right)\left(\sum_{k=0}^{n} g_k(x)\right)+\left(\sum_{j=0}^{m} f_j(x)\right)\left(\sum_{k=0}^{n} g_k'(x)\right)=$$

$$=\left(\sum_{j=0}^{m} f_j(x)\right)'\left(\sum_{k=0}^{n} g_k(x)\right)+\left(\sum_{j=0}^{m} f_j(x)\right)\left(\sum_{k=0}^{n} g_k(x)\right)'=$$

$$=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy dwukrotnie z uogólnienia 1° (na przypadek sumy dowolnej, skończonej liczby wielomianów), które otrzymuje się przez łatwą indukcję.

Gdy $f(x)\equiv 0$ lub $g(x)\equiv 0$, to równość 2° jest oczywista.

Z własności 2° otrzymujemy w szczególności, że

$$\left(cf(x)\right)'=c\cdot f'(x),\qquad \text{gdzie } c\in\mathbf{R}.$$

Z własności 2° wynika również, że

$$\left(f(x)^2\right)'=2f(x)\cdot f'(x)\quad\text{i ogólnie}$$

$$\left(f(x)^k\right)'=k\cdot f(x)^{k-1}\cdot f'(x).$$

Wykażemy teraz, że

$$\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x),$$

gdzie $f(x)$ i $g(x)$ są dowolnymi wielomianami.

Istotnie, niech $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$,

$g(x)=b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+\ldots+b_1x+b_0$, gdzie $a_n\neq 0$, $b_k\neq 0$.

Wówczas $f(g(x))=a_ng(x)^n+a_{n-1}g(x)^{n-1}+\ldots+a_1g(x)+a_0$ oraz

$$f(g(x))'=na_ng(x)^{n-1}\cdot g'(x)+(n-1)a_{n-1}g(x)^{n-2}g'(x)+\ldots+a_1g'(x)=$$

$$=(na_ng(x)^{n-1}+(n-1)a_{n-1}g(x)^{n-2}+\ldots+a_1)\cdot g'(x)=f'(g(x))g'(x).$$

1. Pochodne wyższych rzędów

Definicja

$$f^{(0)}(x)=f(x)$$

$$f^{(k+1)}(x)=(f^{(k)}(x))'.$$

Z definicji tej, oraz ze wzoru na pochodną złożenia dwóch wielomianów otrzymujemy następujący

Wniosek.

$$(f(x+c))^{(k)}\equiv f^{(k)}(x+c),\quad k\in\mathbf{N}\cup\{0\}.$$

Sprawdzenie tej równości dla $k=0$ nie sprawia żadnych kłopotów, więc od razu przejdźmy do wykazania , iż dla dowolnego

$$k\in\mathbf{N}\cup\{0\},\ \text{jeśli}\quad (f(x+c))^{(k)}\equiv f^{(k)}(x+c),\ \text{to}$$

$$\left(f(x+c)\right)^{(k+1)}\equiv f^{(k+1)}(x+c).$$

Istotnie,

$$(f(x+c))^{(k+1)}\equiv\left[\left(f(x+c)\right)^{(k)}\right]'\equiv\left(f^{(k)}(x+c)\right)'\equiv f^{(k+1)}(x+c).$$

Na mocy indukcji matematycznej otrzymujemy słuszność wniosku dla każdego $k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$.

Niech $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, gdzie $a_n\neq 0$. Wówczas

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1,$$

$$f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \ldots + 3\cdot 2\cdot a_3 x + 2\cdot 1\cdot a_2,$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}x^{n-4} + \ldots + 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3,$$

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)a_n x^{n-k} + (n-1)(n-2)\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot(n-k)a_{n-1}x^{n-k-1} + \ldots + k!\cdot a_k,$$

lub krócej

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \sum\limits_{m=k}^{n} m(m-1)\ldots(m-k+1)a_m x^{m-k}; & 0 \le k \le n \\ 0 & ; \quad k > n. \end{cases}$$

Stąd $f^{(k)}(0) = k!\,a_k, \quad k = 0,1,2,\ldots,n.$

Wielomian $f(x)$ przyjmuje więc równoważną postać

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(0)}(0)}{0!}$$

Jest to tzw. wzór Maclaurina[1] dla wielomianów. Niech

$f_1(x) \equiv f(x+c)$ gdzie $c \in \mathrm{R}$. Wówczas, jak już wiemy,

$$f_1^{(k)}(x) \equiv f^{(k)}(x+c), \quad \text{skąd} \quad f_1^{(k)}(0) = f^{(k)}(c).$$

Przepisując wzór Maclaurina dla wielomianu $f_1(x)$ otrzymamy wzór:

$$f(x+c) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots + \frac{f^{(1)}(c)}{1!}x + \frac{f^{(0)}(c)}{0!}.$$

Podstawiając w nim za x, $x-c$ otrzymamy:

[1] Colin Maclaurin (1698 - 1746) - matematyk szkocki. Uczeń I. Newtona. Zajmował się głównie analizą matematyczną. Od 1719r. członek Towarzystwa Królewskiego w Londynie.

$$f(x) \equiv \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} + \ldots + \frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c) + \frac{f^{(0)}(c)}{0!}.$$

Ten wzór - to tzw. wzór Taylora[2] dla wielomianów.

Jak wiadomo, liczba c nazywa się *pierwiastkiem n - krotnym wielomianu* $f(x)$ stopnia $\ge n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x-c)^n \mid f(x)$ i $(x-c)^{n+1} \nmid f(x)$ lub, równoważnie, gdy istnieje taki wielomian $g(x)$, że $f(x) \equiv (x-c)^n \cdot g(x)$ i $g(c) \ne 0$.

Udowodnimy teraz następujące

Twierdzenie. *Liczba c jest pierwiastkiem n - krotnym wielomianu $f(x)$ stopnia $\ge n$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

(*) $\quad f^{(k)}(c) = 0,\ k = 0,1,2,\ldots,n-1$ i $f^{(n)}(c) \ne 0.$

DOWÓD. ❑

$\Leftarrow$: Ponieważ mamy równości (*), więc wzór Taylora dla wielomianu $f(x)$ przyjął postać

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \quad \text{i} \quad f^{(n)}(c) \ne 0.$$

Stąd natychmiast wynika żądana krotność pierwiastka c wielomianu $f(x)$.

$\Rightarrow$: Z założenia mamy: $f(x) \equiv (x-c)^n \cdot g(x)$ i $g(c) \ne 0$.

Wówczas

$$f'(x) \equiv n(x-c)^{n-1}\cdot g(x) + (x-c)^n \cdot g'(x) \equiv (x-c)^{n-1}(ng(x) +$$
$$+(x-c)g'(x)) \equiv (x-c)^{n-1}\cdot g_1(x) \quad \text{i} \quad g_1(c) \ne 0,$$

$$f''(x) \equiv (x-c)^{n-2}((n-1)g_1(x) + (x-c)g_1'(x)) \equiv$$
$$\equiv (x-c)^{n-2}\cdot g_2(x) \quad \text{i} \quad g_2(c) \ne 0,$$

[2] Brook Taylor (1685 - 1731) - matematyk angielski. Od 1712r. członek The Royal Society.

$$f'''(x) \equiv (x-c)^{n-3}((n-3)g_2(x)+(x-c)g_2'(x))$$

$$\equiv (x-c)^{n-3}\cdot g_3(x) \quad \text{i} \quad g_3(c)\neq 0,$$

....

$$f^{(n-1)}(x) \equiv (x-c)\cdot g_{n-1}(x) \quad \text{i} \quad g(c)\neq 0,$$

$$f^{(n)}(x) \equiv g_{n-1}(x)+(x-c)\cdot g_{n-1}'(x),$$

i widzimy, że

$$f^{(0)}(c)=f^{(1)}(c)=f^{(2)}(c)=\ldots=f^{(n-1)}(c)=0 \quad \text{i} \quad f^{(n)}(c)\neq 0.$$ ■

Rozwiążmy teraz kilka zadań

Zadanie 1. (XXVIII Olimpiada Matematyczna).
Wykaż, że dla żadnego $n=1,2,3,\ldots$ wielomian

$$Q(x) = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

nie ma pierwiastków wielokrotnych.

Rozwiązanie:

❑ Załóżmy, że liczba a jest pierwiastkiem wielokrotnym wielomianu $Q(x)$. Zachodzi więc równość $Q(x)\equiv(x-a)^k\cdot P(x)$, gdzie $k\geq 2$ i $P(x)$ jest wielomianem.

Wtedy $Q'(x)\equiv k\cdot(x-a)^{k-1}\cdot P(x)+(x-a)^k\cdot P'(x)$.

Stąd otrzymujemy, że

$$x-a \mid Q(x)-Q'(x)=(x-a)^kP(x)-k(x-a)^{k-1}\cdot P(x)-$$

$$-(x-a)^k\cdot P'(x).$$

Z drugiej strony

$$Q(x)-Q'(x)\equiv\frac{x^n}{n!}.$$

Zatem $x-a \;\Big|\; \frac{x^n}{n!}$, skąd, na mocy twierdzenia Bezouta, wynika, że

$$\frac{a^n}{n!}=0, \text{ czyli } a=0.$$

Lecz $Q(0)=1\neq 0$. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania. ■

Zadanie 2. Niech $f(x)$ będzie wielomianem; n i k niech będą liczbami naturalnymi. Udowodnij, że jeżeli $(x-1)^k \mid f(x^n)$, to

$$(x^n-1)^k \mid f(x^n).$$

Rozwiązanie:

❑ Z założenia zadania wynika, że $f(x^n)\equiv(x-1)^k\cdot f_1(x)$. Stąd po zróżniczkowaniu obu stron otrzymujemy

$$n\cdot f'(x^n)\cdot x^{n-1}\equiv k(x-1)^{k-1}f_1(x)+(x-1)^k\cdot f_1'(x)\equiv$$

$\equiv(x-1)^{k-1}(k\cdot f_1(x)+(x-1)\cdot f_1'(x))$, skąd wynika, że

$$(x-1)^{k-1} \;\Big|\; f'(x^n), \text{ czyli } f'(x^n)\equiv(x-1)^{k-1}\cdot f_2(x).$$

Analogicznie otrzymujemy:

$$f''(x^n)\equiv(x-1)^{k-2}\cdot f_3(x),$$

$$f'''(x^n)\equiv(x-1)^{k-3}\cdot f_4(x),$$

....

$$f^{(k-1)}(x^n)\equiv(x-1)\cdot f_k(x),$$

gdzie $f_i(x)$ $i=1,2,3,\ldots,k$ są pewnymi wielomianami.

Z powyższych równości wynika zatem, że

$$f(1)=f'(1)=f''(1)=\ldots=f^{(k-1)}(1)=0.$$

Jest więc $(x-1)^k \mid f(x)$, a stąd $(x^n-1)^k \mid f(x^n)$. ■

Zadanie 3. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n\geq 2$ wielomian

$$P_n(x) = (n-1)x^{n+1} - (n+1)x^n + (n+1)x - (n-1)$$

jest podzielny przez $(x-1)^3$.

Rozwiązanie:

❑ Dla dowodu tej podzielności wystarczy sprawdzić, że

$$P_n(1) = P_n'(1) = P_n''(1) = 0.$$

Otóż $P_n(1) = (n-1)\cdot 1 - (n+1)\cdot 1 + (n+1)\cdot 1 - (n-1) = 0,$

$$P_n'(x) = (n+1)(n-1)x^n - n(n+1)x^{n-1} + (n+1)$$

i $P_n'(1) = (n+1)(n-1) - n(n+1) + n + 1 = n^2 - 1 - n^2 - n + n + 1 = 0,$

oraz $P_n''(x) = (n+1)(n-1)nx^{n-1} - n(n+1)(n-1)x^{n-2}$

i $P_n''(1) = (n+1)(n-1)n - n(n+1)(n-1) = 0.$ ■

Zadanie 4. Niech $f(x) = x^n - mx^{n-1} + mx - 1$, gdzie m i n $(n \geq 3)$ są liczbami naturalnymi. Wyznacz takie wartości m i n, aby wielomian $f(x)$ był podzielny przez $(x-1)^2$.

Rozwiązanie:

❑ Szukamy, oczywiście, takich liczb całkowitych dodatnich m i n $(n \geq 3)$, dla których $f(1) = 0$ i $f'(1) = 0$.

Z warunków tych otrzymujemy równanie $(m-1)(n-2) = 2$, które ma następujące rozwiązania w liczbach całkowitych dodatnich m i n $(n \geq 3)$: $m = 3$ i $n = 3$ lub $m = 2$ i $n = 4$.

Łatwo sprawdzić, że otrzymane wielomiany, a mianowicie: $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ i $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$, spełniają warunek zadania. ■

Zadanie 5. (XXXVIII Olimpiada Matematyczna).
Wielomian $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ spełnia warunki: $P(1) = 0$ oraz $P(x) \geq 0$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$. Udowodnij, że

$$a_n + 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + \ldots + (n+1)a_0 = 0.$$

Rozwiązanie:

❑ Rozważmy wielomian $Q(x) = a_n x + a_{n-1}x^2 + \ldots + a_1 x^n + a_0 x^{n+1}$. Otóż dla każdego $x > 0$ mamy $Q(x) = x^{n+1} \cdot P(x^{-1})$. Zatem $Q(1) = P(1) = 0$ oraz $Q(x) \geq 0$ dla $x > 0$.

Wynika stąd, że liczba 1 jest co najmniej dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu Q. Wobec tego również $Q'(1) = 0$, a ponieważ

$$Q'(x) = a_n x + 2a_{n-1}x + \ldots + (n+1)a_0 x^n,$$

więc istotnie $a_n + 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + \ldots + (n+1)a_0 = 0.$ ■

Zadanie 6. (XXXIX Olimpiada Matematyczna).
Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ liczba $n^{2n} - n^{n+2} + n^n - 1$ jest podzielna przez $(n-1)^3$.

Rozwiązanie:

❑ Oznaczmy liczbę $n^{2n} - n^{n+2} + n^n - 1$ przez L_n i rozważmy wielomian $f(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1.$

Widać, że $f(n) = L_n$.

Pokażemy teraz, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ wielomian $f(x)$ jest podzielny przez $(x-1)^3$. Wystarczy w tym celu sprawdzić, że

$$f(1) = f'(1) = f''(1) = 0 \quad (\textit{uczyń to!}).$$

Zatem $f(x) \equiv (x-1)^3 \cdot g(x)$, gdzie $g(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych (gdyż jest ilorazem z dzielenia wielomianu $f(x)$ o współczynnikach całkowitych przez unormowany wielomian $(x-1)^3$ o współczynnikach całkowitych).

Wobec tego dla każdego naturalnego $n \geq 2$

$$L_n = f(n) = (n-1)^3 \cdot g(n).$$

A stąd już wynika teza zadania, gdyż $g(n)$ jest liczbą całkowitą. ■

Zadanie 7. (XLV Olimpiada Matematyczna).
Wyznacz wszystkie wielomiany $P(x)$ stopnia co najwyżej piątego o współczynnikach rzeczywistych, mające tę własność, że wielomian $P(x)+1$ jest podzielny przez $(x-1)^3$, a wielomian $P(x)-1$ jest podzielny przez $(x+1)^3$.

Rozwiązanie:
❑ Niech $P(x)$ będzie szukanym wielomianem.

Z założeń podanych w zadaniu wynikają tożsamości

$$P(x)+1 \equiv (x-1)^3 \cdot Q(x) \quad \text{i} \quad P(x)-1 \equiv (x+1)^3 \cdot R(x),$$

gdzie $Q(x)$ i $R(x)$ są pewnymi wielomianami.

Różniczkując je obustronnie, otrzymamy

$$P'(x) \equiv (x-1)^2\big(3Q(x)+(x-1)Q'(x)\big) \quad \text{oraz}$$

$$P'(x) \equiv (x+1)^2\big(3R(x)+(x+1)R'(x)\big).$$

Z powyższych tożsamości wynika, że wielomian $P'(x)$ jest podzielny przez $(x-1)^2$ oraz $(x+1)^2$, a więc również przez

$(x-1)^2(x+1)^2 \equiv (x^2-1)^2$, gdyż wielomiany $(x-1)^2$, $(x+1)^2$ są względnie pierwsze. Wobec tego wielomian $P'(x)$ ma postać $P'(x) \equiv a(x^2-1)^2$, gdzie $a \in \mathbf{R}$, gdyż $P(x)$ jest stopnia co najwyżej piątego, a więc $P'(x)$ - stopnia co najwyżej czwartego.

Zatem $P(x) = \int a(x^2-1)^2\,dx$, czyli

$$P(x) = \frac{a}{5}x^2 - \frac{2a}{3}x^3 + ax + c, \quad \text{gdzie } c \text{ jest pewną stałą.}$$

Z wypisanych na samym początku tożsamości wynikają równości $P(1) = -1$ i $P(-1) = 1$, które z kolei prowadzą nas do układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi a i c, a mianowicie

$$\begin{cases} \frac{a}{5} - \frac{2}{3}a + a + c = -1 \\ -\frac{a}{5} + \frac{2}{3}a - a + c = 1 \end{cases}, \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} \frac{8}{15}a + c = -1 \\ -\frac{8}{15}a + c = 1 \end{cases}$$

Układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie. Jest nim para liczb

$$(a,c) = \left(-\frac{15}{8}, 0\right).$$

Zatem poszukiwany wielomian $P(x)$ ma postać

$$-\frac{3}{8}x^5 + \frac{10}{8}x^3 - \frac{15}{8}x.$$

Nietrudno sprawdzić, że spełnia on warunki zadania. ■

Zadanie 8. (XLIII Olimpiada Matematyczna).
Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_r$ zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{r}\left(\sum_{m=1}^{r}\frac{a_m a_n}{m+n}\right) \geq 0.$$

Rozstrzygnij, dla jakich liczb $a_1, a_2, \dots, a_r$ nierówność ta staje się równością.

Rozwiązanie:

❑ Rozważmy wielomian $f(x) = \sum_{n=1}^{r} a_n x^n$.

Podnosząc $f(x)$ do kwadratu otrzymujemy wielomian

(1) $$\left(f(x)\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{r} a_n x^n\right)\left(\sum_{m=1}^{r} a_m x^m\right) = \sum_{n=1}^{r} a_n\left(\sum_{m=1}^{r} a_m x^m\right)x^n = \sum_{n=1}^{r}\left(\sum_{m=1}^{r} a_m a_n x^{m+n}\right).$$

Rozważmy jeszcze wielomian $g(x) = \sum_{n=1}^{r}\left(\sum_{m=1}^{r} \frac{a_m a_n}{m+n} x^{m+n}\right).$

Mamy wykazać, że $g(1) \geq 0.$

Zauważmy, że pochodna wielomianu $g(x)$ równa się

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{r}\left(\sum_{m=1}^{r} a_m a_n x^{m+n-1}\right).$$

Dla $x \neq 0$ możemy, zgodnie z (1), napisać, że

(2) $$g'(x) = \frac{1}{x}\cdot\left(f(x)\right)^2.$$

Z określenia $g(x)$ wynika, że $g(0) = 0$. Funkcja g jest ciągła w przedziale $\langle 0,1\rangle$, oraz dla każdego $x \in (0,1)$ $g'(x) \geq 0$. Wobec tego g jest funkcją niemalejącą. Stąd $g(1) \geq g(0) = 0,$ a to daje nierówność, której mieliśmy dowieść.

Oczywiście, równość w nierówności tej zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi ona w nierówności $g(1) \geq 0$, czyli gdy g jest funkcją stałą. To z kolei wobec (2) ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy f jest wielomianem zerowym, czyli gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$ ■

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Wielomiany $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ oraz $Q(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ spełniają warunek

$P(x)^2 \equiv (x^2 - 1)Q(x)^2 + 1.$

Udowodnij, że

$$P'(x) \equiv n\,Q(x).$$

2. Wielomian $P(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ można przedstawić w postaci $(x^2 + ax + b)^2 + c$, gdzie A, B, C, D, a, b, c, są liczbami rzeczywistymi. Wykaż, że dla pewnego $x \in \mathbf{R}$ zachodzą równości

$$P'(x_0) = P'''(x_0) = 0.$$

3. Dla jakich a, b, c wielomian $x^4 + ax^2 + bx + c$ jest podzielny przez $(x-1)^3$?

4. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ liczba

$$n^{n-1} - 1$$

jest podzielna przez $(n-1)^2$.

5. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ liczba

$n^n - n^2 + n - 1$ dzieli się przez $(n-1)^2$.

IX. WZORY VIETE'A - kluczem do rozwiązania wielu zadań

Wzory Viete'a są natychmiastową konsekwencją tego, że równe wielomiany mają równe odpowiednie współczynniki. Łatwe zatem w wyprowadzeniu i przebogate w zastosowaniach. A mimo to nie wykładane w szkole. Na wstępie przypomnijmy więc

Twierdzenie Viete'a. *Liczby* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *są pierwiastkami wielomianu* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, *gdzie* $a_n \neq 0$, *wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają układ równań:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\sum_{1\le i<j<k\le n} x_i x_j x_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n},$$

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n},$$

zwanych wzorami Viete'a.

Oto dowód tego twierdzenia.

❑ Skoro dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$ mamy $f(x_i) = 0$, więc na mocy twierdzenia Bezouta

$$x - x_i \mid f(x),$$

Zatem $$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \mid f(x),$$

czyli wobec tego $$f(x) \equiv a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Wykonując po prawej stronie tej tożsamości zaznaczone działania, a następnie porządkując otrzymany wielomian według malejących potęg zmiennej x oraz wykorzystując twierdzenie o tożsamości wielomianów, otrzymujemy napisany powyżej układ. ■

W szczególności dla $n = 3$ otrzymujemy.

Twierdzenie. *Liczby* x_1, x_2, x_3 *są pierwiastkami wielomianu* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, *gdzie* $a \neq 0$, *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a},$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Natomiast dla $n = 4$ mamy

Twierdzenie. *Liczby* x_1, x_2, x_3, x_4 *są pierwiastkami wielomianu* $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, *gdzie* $a \neq 0$, *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a},$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a},$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a}.$$

Powtórzenie twierdzenia Viete'a dla $n = 3$ i $n = 4$ wydaje się celowe, gdyż głównie je będziemy wykorzystywać do rozwiązywania zadań .

Przystąpmy więc do zadań.

Zadanie 1. Udowodnij, że jeżeli $a + b + c = 0$, to:

1° $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc,$

2° $2a^4 + 2b^4 + 2c^4 = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2,$

3° $\dfrac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \cdot \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{3},$

4° $\dfrac{a^7 + b^7 + c^7}{7} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \cdot \dfrac{a^5 + b^5 + c^5}{5}.$

Rozwiązanie:

❑ Oznaczmy przez a, b, c pierwiastki wielomianu

$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma .$$

Na mocy wzorów Viete'a

(1) $a + b + c+ = -\alpha$,

(2) $ab + bc + ca = \beta$,

(3) $abc = -\gamma$.

Ponieważ $a + b + c = 0$, więc $\alpha = 0$, a wielomian f przyjmuje postać

$$f(x) = x^3 + \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma.$$

Ad.1°. Ponieważ $f(a) = f(b) = f(c) = 0$, więc

$$\begin{aligned} &a^3 + \beta \cdot a + \gamma = 0, \\ (4) \qquad &b^3 + \beta \cdot b + \gamma = 0, \\ &c^3 + \beta \cdot c + \gamma = 0. \end{aligned}$$

Dodając te równości stronami otrzymujemy

(5) $$a^3 + b^3 + c^3 + \beta \cdot (a + b + c +) + 3\gamma = 0.$$

Uwzględniając teraz równości (1) i (3) stwierdzamy prawdziwość 1°.
Ad. 2° Mnożąc kolejno równości (4) odpowiednio przez a, b, c i dodając stronami, otrzymujemy

$$a^4 + b^4 + c^4 + \beta \cdot (a^2 + b^2 + c^2) + \gamma \cdot (a + b + c) = 0.$$

Natomiast z warunku $a + b + c = 0$ wynika

$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$, czyli - wobec warunku (2) - mamy

(6) $$\beta = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Zatem $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2$, a więc równość 2° jest prawdziwa.

Ad. 3° Mnożąc równości (4) kolejno przez a^2, b^2, c^2 i dodając je stronami, otrzymujemy

$$a^5 + b^5 + c^5 + \beta \cdot (a^3 + b^3 + c^3) + \gamma \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = 0,$$

czyli $a^5 + b^5 + c^5 = -\beta \cdot (a^3 + b^3 + c^3) - \gamma \cdot (a^2 + b^2 + c^2).$

Ale jak z (6) już wiemy $\beta = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$, oraz z warunku (5) dla $a + b + c = 0$ mamy $\gamma = -\frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3)$. Zatem

$$a^5 + b^5 + c^5 = \frac{1}{2}(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2),$$

skąd otrzymujemy już równość 3°.

Ad. 4° Dowód tej równości proponujemy przeprowadzić samodzielnie.

Zadanie 2. Liczby x, y, z, u, v, w spełniają warunki:

(a) $$x + y + z = u + v + w,$$

(b) $$xyz = uvw,$$

(c) $$0 < u \le x \le y \le z \le w, \quad u \le v \le w.$$

Wykaż, że $u = x,\ v = y,\ w = z.$

Rozwiązanie

☐ Rozważmy dwa wielomiany

$$P(t) = (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 + pt^2 + qt + r,$$

$$Q(t) = (t - u)(t - v)(t - w) = t^3 + pt^2 + kt + r,$$

których pierwiastkami są odpowiednio x, y, z i u, v, w.

Zauważmy teraz, że $P(t) - Q(t) = (q - k)t$.
Oznaczając $(q - k)t = R(t)$, mamy $P(t) - Q(t) = R(t)$.
Stąd $R(u) = P(u)$, gdyż $Q(u) = 0$.
Ale $P(u) = (u - x)(u - y)(u - z)$, więc wobec (c) mamy $(q - k)u = R(u) = P(u) \le 0$, stąd $q \le k$, gdyż $u > 0$.
Analogicznie

$$R(w) = P(w) = (w - x)(w - y)(w - z) \le 0, \text{ skąd } q \ge k.$$

Mamy więc $q = k$ oraz $P(t) \equiv Q(t)$, a stąd $u = x,\ v = y,\ w = z$, a to należało wykazać. ■

Zadanie 3. (XXV Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna).
Udowodnij, że jeżeli $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$ oraz $x + y + z = 1$, to

$$0 \le xy + yz + zx - 2xy \le \frac{7}{27}.$$

Rozwiązanie:

❑ Lewą nierówność otrzymujemy, przy podanych założeniach, od razu, gdyż

$$xy + yz + zx - 2xy = (x + y + z)(xy + yz + zx) - 2xyz =$$

$$= xyz + x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) \ge 0.$$

Udowodnijmy więc prawą nierówność. W tym celu rozważmy wielomian

$P(t) = (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - t^2 + qt + r$, którego pierwiastkami są liczby x, y, z.

Zatem $xy + yz + zx = q$, $-xyz = r$.

Zauważmy teraz, że nasza nierówność przyjmuje postać $q + 2r \le \frac{7}{27}$.

Ponieważ jednak $P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}q + r = -\frac{1}{8} + \frac{q + 2r}{2}$,

więc dla dowodu nierówności $q + 2r \le \frac{7}{27}$ wystarczy dowieść, że

$$P\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{216}.$$

Z określenia wielomianu P mamy

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(\frac{1}{2} - z\right).$$

Z założeń zadania wynika, że co najwyżej jedna z liczb x, y, z jest większa od $\frac{1}{2}$ *(dlaczego?)*.

Jeśli któraś z liczb x, y, z jest większa od $\frac{1}{2}$, to $P\left(\frac{1}{2}\right) \le 0$,

a więc $P\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{216}$.

Jeśli natomiast $x, y, z \le \frac{1}{2}$, to stosując nierówność Cauchy'ego o średnich do liczb nieujemnych $\frac{1}{2} - x$, $\frac{1}{2} - y$, $\frac{1}{2} - z$ otrzymujemy

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) \le \left(\frac{\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} - y + \frac{1}{2} - z}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216},$$

przy czym $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{216}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2} - y = \frac{1}{2} - z, \text{ skąd } x = y = z = \frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

Zadanie 4. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunki

$$xyz > 1 \quad \text{oraz} \quad x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Udowodnij, że dokładnie jedna z liczb x, y, z jest mniejsza od 1.

Rozwiązanie:

❑ Rozważmy wielomian $f(t) = t^3 + \alpha \cdot t^2 + \beta \cdot t + \gamma$, którego pierwiastkami są liczby x, y, z. Zatem

$f(t) = (t - x)(t - y)(t - z)$.

Z warunków zadania i wzorów Viete'a otrzymujemy, że

$$-\gamma > 1 \quad \text{i} \quad -\alpha < \frac{\beta}{-\gamma}, \quad \text{czyli, że}$$

$$1 + \gamma > 0 \quad \text{i} \quad \alpha\gamma < \beta, \quad \text{gdyż } -\gamma > 0.$$

Dla uzyskania tezy zadania wystarczy teraz dowieść, że

$$f(1) = (1 - x)(1 - y)(1 - z) > 0 \quad \textit{(dlaczego?)}.$$

Ze wzorów Viete'a i na mocy nierówności Cauchy'ego o średnich otrzymujemy, że

$$-\alpha = x + y + z \geq 3 \cdot \sqrt[3]{xyz} > 3 \cdot \sqrt[3]{1} = 3.$$

Stąd $\alpha + 1 \leq -2$, czyli $\alpha < 0$.

Wobec tego

$f(1) = 1 + \alpha + \beta + \gamma > 1 + \alpha + \alpha\gamma + \gamma = (1 + \alpha)(1 + \gamma) > 0$,

czego należało dowieść. ■

Zadanie 5. Dana jest liczba nieparzysta n oraz takie liczby całkowite a, b, c, d, e, że $n \mid a + b + c + d + e$ i $n \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$. Udowodnij, że

$$n \mid a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 - 5abcde.$$

Rozwiązanie:

❑ Rozważmy wielomian $f(x) = x^5 + \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$, którego pierwiastkami są liczby całkowite a, b, c, d, e.

Zatem $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = f(e) = 0$.

Mamy więc równość $a^5 + \alpha a^4 + \beta a^3 + \gamma a^2 + \delta a + \varepsilon = 0$ oraz analogiczne równości dla b, c, d, e.

Po dodaniu tych równości stronami i przeniesieniu odpowiednich składników w otrzymanej równości na prawą jej stronę dostaniemy

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 - 5abcde = -\alpha\left(a^4 + b^4 + \ldots + e^4\right) -$$

$$-\beta\left(a^3 + b^3 + \ldots + e^3\right) - \gamma\left(a^2 + b^2 + \ldots + e^2\right) - \delta\left(a + b + \ldots + e\right).$$

Na podstawie wzorów Viete'a oraz założeń zadania stwierdzamy, że każdy ze składników występujących po prawej stronie powyższej równości, jest podzielny przez n. Stąd wynika teza. ■

Zadanie 6. Liczby x, y, z spełniają warunki:

1° $\quad x + y + z = a,$

2° $\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}.$

Udowodnij, że co najmniej jedna z liczb x, y, z jest równa a.

Rozwiązanie:

❑ Rozważmy wielomian $f(t) = t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma$, którego pierwiastkami są liczby x, y, z.

Z warunku 1° otrzymujemy, że $\alpha = -a$, natomiast z warunku 2° wynika, że

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{\beta}{-\gamma}, \text{ czyli } \gamma = -\beta a.$$

Wielomian $f(t) = t^3 - at^2 + \beta t - \beta a = (t^2 + \beta)(t - a)$,

skąd wynika teza. ■

Zadanie 7. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

❑ Rozważmy wielomian

$$f(t) = (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma.$$

Pierwiastkami tego wielomianu są, jak widać, liczby x, y, z. Ze wzorów Viete'a otrzymujemy

$$\alpha = -(x + y + z) = -2,$$

$$\beta = xy + yz + zx = \frac{(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} = -5.$$

Pomnóżmy obie strony równań danego układu odpowiednio przez β, α i 1, a następnie tak otrzymane równania dodajmy stronami. Otrzymamy

$$\left(x^3+\alpha x^2+\beta x\right)+\left(y^3+\alpha y^2+\beta y\right)+\left(z^3+\alpha z^2+\beta z\right)=20+14\alpha+2\beta.$$

Stąd

$$-3\gamma = 20+14\cdot(-2)+2\cdot(-5) = -18, \text{ czyli } \gamma = 6.$$

Rozważany wielomian ma więc postać

$$f(t) = t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = (t-1)(t+2)(t-3).$$

Stąd widzimy, że jego pierwiastkami są liczby $1,-2,3$. Wobec tego trójka liczb $(1,-2,3)$ oraz wszystkie jej nietożsamościowe permutacje stanowią zbiór rozwiązań danego układu równań ■

Zadanie 8. Rozłóż na czynniki wielomian

$$x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

Rozwiązanie:

☐ Rozważmy wielomian $f(t) = t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma$, którego pierwiastkami są liczby x, y, z. Mamy więc równości: $f(x) = 0$, $f(y) = 0$, $f(z) = 0$, które po dodaniu stronami i odpowiednich przekształceniach pozwalają otrzymać

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = -\alpha\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)-\beta\cdot(x+y+z) =$$

$$= (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)-(xy+yz+zx)(x+y+z) =$$

$$= \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right].$$

Zadanie 9. (XLV Olimpiada Matematyczna).
Wyznacz wszystkie trójki (x,y,z) liczb wymiernych dodatnich, dla których liczby $x+y+z$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, xyz są naturalne.

Rozwiązanie:

☐ Niech (p,q,r) będzie jedną z takich trójek (x,y,z), o jakie chodzi w zadaniu. Ponieważ liczby $p^{-1}+q^{-1}+r^{-1}$ i pqr są naturalne,

więc liczba $pq+qr+rp = \left(p^{-1}+q^{-1}+r^{-1}\right)pqr$ też jest naturalna.

Mamy więc $p+q+r = a\in\mathbf{N}$, $pq+qr+rp=b\in\mathbf{N}$, $pqr=c\in\mathbf{N}$.

Rozważmy wielomian

$f(x) = (x-p)(x-q)(x-r) = x^3 - ax^2 + bx - c$, którego pierwiastkami są liczby wymierne dodatnie p,q,r. Wielomian ten ma współczynniki całkowite i jest unormowany.

Wynika stąd, że p,q,r są liczbami naturalnymi. Zadanie sprowadza się więc do wyznaczenia wszystkich trójek (p,q,r) liczb naturalnych, dla których liczby $p+q+r$, $p^{-1}+q^{-1}+r^{-1}$, p,q,r są naturalne.

Pierwsza i trzecia z tych liczb - to oczywiście liczby naturalne. Przyjmijmy $p\le q\le r$. Aby liczba $p^{-1}+q^{-1}+r^{-1}$ była naturalna, musi być $p\le 3$, gdyż suma odwrotności trzech liczb większych od 3 jest mniejsza od 1.

Jeżeli $p=1$, to $q^{-1}+r^{-1}$ jest liczbą naturalną, gdy $q=r=2$ lub $q=r=1$.

Jeżeli $p=2$, to warunki $2\le q\le r$ i $q^{-1}+r^{-1}=\frac{1}{2}$ spełniają $q=3$, $r=6$ lub $q=r=4$.

Jeżeli wreszcie $p=3$, to również musi być $q=3$ i $r=3$.

Wszystkimi trójkami liczb wymiernych dodatnich spełniającymi warunki zadania są zatem:

$(1,1,1)$, $(1,2,2)$, $(2,1,2)$, $(2,2,1)$, $(2,3,6)$, $(3,2,6)$, $(2,6,3)$, $(3,6,2)$, $(6,2,3)$, $(6,3,2)$, $(2,4,4)$, $(4,2,4)$, $(4,4,2)$, $(3,3,3)$. ■

Zadanie 10. Wykaż, że liczba $\left(7+\sqrt{48}\right)^{13}+\left(7-\sqrt{48}\right)^{13}$ jest całkowita i dzieli się przez 14.

Rozwiązanie:

❑ Zauważmy najpierw, że liczby $u = 7 + \sqrt{48}$ i $v = 7 - \sqrt{48}$ są pierwiastkami trójmianu kwadratowego $x^2 - 14x + 1$. Mamy więc równości:

$$u^2 = 14u - 1$$
$$v^2 = 14v - 1.$$

Niech $a_n = u^n + v^n$. Wówczas

$a_0 = 2,$

$a_1 = u + v = 14,$

$a_2 = u + v = (14u - 1) + (14v - 1) = 14a_1 - a_0,$

$a_3 = u^3 + v^3 = u(14u - 1) + v(14v - 1) = 14a_2 - a_1,$

....

$a_n = u^n + v^n = u^{n-2}(14u - 1) + v^{n-2}(14v - 1) = 14a_{n-1} - a_{n-2}.$

Z powyższych równości wynika, że wszystkie liczby a_n są całkowite, a ponadto, jeśli n jest nieparzyste, to a_n dzieli się przez 14. Uzyskujemy to przez oczywistą indukcję. ■

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 1. Rozłóż na czynniki wielomiany:

$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$ i

$(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5.$

Zadanie 2. Rozwiąż układy równań:

$$(1) \quad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3. \end{cases}$$

Odp. $x = y = z = 1.$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n \\ x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = n. \end{cases}$$

Odp. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1.$

Zadanie 3. Liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są pierwiastkami wielomianu $x^n + x + 1$. Oblicz sumę

$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n.$ Odp. $-n.$

Zadanie 4. Liczby x, y, z są pierwiastkami równania $x^3 - 3x + 1 = 0$. Oblicz sumę

$x^8 + y^8 + z^8.$ Odp. 186.

Zadanie 5. (XXXI Olimpiada Matematyczna).

Udowodnij, że jeżeli wielomian $ax^3 - ax^2 + 9bx - b$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi, ma wszystkie pierwiastki dodatnie, to są one równe.

Zadanie 6. Wykres funkcji $y = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ $(n > 1)$ przecina prostą $y = a$ w punktach $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a prostą $y = b$ - w punktach $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Prosta A_iB_i tworzy z osią OX kąt α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Oblicz sumę

$\operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\alpha_2 + \ldots + \operatorname{ctg}\alpha_n.$ Odp. 0.

Zadanie 7. (XLV Olimpiada Matematyczna).

Udowodnij, że jeżeli wielomian $x^3 + ax^2 + bx + c$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, to wielomian

$$x^3 + ax^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b)x + \frac{ab - c}{8}$$

również ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste.

Zadanie 8. Udowodnij, że jeżeli pierwiastki równania $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ są w stosunku $p:q:r$, to

$$\frac{bc}{ad} = \frac{(p+q+r)(pq+qr+rp)}{pqr}.$$

Zadanie 9. Wykaż, że jeżeli równanie $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, gdzie $a \neq 0$, ma pierwiastek potrójny, to $bc = 9ad$.

Zadanie 10. Udowodnij, że jeżeli równanie $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste, to $b^2 \geq ac$ i $c^2 \geq bd$.

Zadanie 11. Udowodnij, że jeżeli pierwiastki równania $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tworzą ciąg geometryczny, to $ac^3 = db^3$.

Zadanie 12. Wykaż, że jeżeli dwa pierwiastki wielomianu $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ są liczbami przeciwnymi, to $bc = ad$.

Zadanie 13. Wyznacz współczynniki a, b, c wielomianu $x^5 - 10x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 32$ wiedząc, że wszystkie jego pierwiastki są liczbami dodatnimi.
Odp. $a = 40, b = -80, c = 80$.

Zadanie 14. Wykaż, że jeżeli liczby a i b są różne od zera, to pierwiastki x_1, x_2, x_3 wielomianu $ax^3 - ax^2 + bx + b$ spełniają warunek $$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1.$$

Zadanie 15. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których pierwiastki x_1, x_2, x_3 wielomianu $x^3 - 6x^2 + ax + a$ spełniają równość

$$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0.$$ Odp. -9.

Zadanie 16. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$ jest całkowita i nieparzysta.

X. CIĄGI JEDNOMONOTONICZNE I ZADANIA NA DOWODZENIE NIERÓWNOŚCI

Umiejętność dowodzenia nierówności jest prawdziwą sztuką. Nic więc dziwnego, że zadania na dowodzenie nierówności pojawiają się na olimpiadach matematycznych niesłychanie często. Istnieje wiele metod dowodzenia nierówności. Obecnie zajmiemy się jedną z nich.

Rozważmy ciągi dwuwyrazowe liczb (a_1, a_2), (b_1, b_2) i zapiszmy je w postaci tablicy

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Jeżeli przy tym $a_1 \leq a_2$ i $b_1 \leq b_2$ lub $a_1 \geq a_2$ i $b_1 \geq b_2$, to ciągi te nazywać będziemy *jednomonotonicznymi*.

Podobnie nazywać będziemy ciągi trójwyrazowe (a_1, a_2, a_3) i (b_1, b_2, b_3) zapisywane w postaci tablicy

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix},$$

jeśli tylko $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ i $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ lub $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ i $b_1 \geq b_2 \geq b_3$,

i ogólnie - ciągi n - wyrazowe liczb $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ zapisywane w postaci tablicy

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, \ldots, a_n \\ b_1, & b_2, \ldots, b_n \end{pmatrix},$$ jeśli $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ i $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$

lub $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$ i $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n$.

Np. ciągi

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ a^3 & b^3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0$$

są jednomonotoniczne, a ciągi

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0$$

nie są jednomonotoniczne.

Dla wygody w dalszych rozważaniach wprowadzimy oznaczenia:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2, \qquad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

i ogólnie

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n.$$

Mamy więc
$$\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{bmatrix} = a \cdot \frac{1}{a} + b \cdot \frac{1}{b} = 2,$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} = a \cdot \frac{1}{b+c} + b \cdot \frac{1}{c+a} + c \cdot \frac{1}{a+b} =$$

$$= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b},$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \ldots & a_n^3 \end{bmatrix} = a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + \ldots + a_n^4.$$

Udowodnimy teraz następujące

Twierdzenie. *Jeżeli ciągi* (a_1, a_2), (b_1, b_2) *są jednomonotoniczne, to*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix}$$

DOWÓD.

❑ Zauważmy, że

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 - a_1b_2 - a_2b_1 = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2).$$

A ponieważ ciągi te są jednomonotoniczne, więc otrzymany iloczyn jest liczbą nieujemną. ■

Zanim sformułujemy i udowodnimy analogiczne twierdzenie dla ciągów trój- i więcej wyrazowych, rozwiążmy kilka zadań na dowodzenie nierówności dwóch zmiennych.

Zadanie 1. Wykaż, że jeżeli liczby a i b są dodatnie, to

$$a^3 + b^3 \ge a^2b + ab^2.$$

Rozwiązanie.

❑ Nierówność ta wynika stąd, że ciągi (a, b) i (a^2, b^2) są jednomonotoniczne oraz

$$a^3 + b^3 = \begin{bmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{bmatrix}, \qquad a^2b + ab^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b^2 & a^2 \end{bmatrix}.$$

Następnie wystarczy tylko powołać się na udowodnione przed chwilą twierdzenie. ■

Zadanie 2. Udowodnij, że jeżeli liczby rzeczywiste a i b są różne od zera, to

$$a^4 + b^4 \le \frac{a^6}{b^2} + \frac{b^6}{a^2}.$$

Rozwiązanie.

❑ Tym razem rozważmy ciągi $\left(a^6, b^6\right)$, $\left(\frac{1}{b^2}, \frac{1}{a^2}\right)$. Są one jednomonotoniczne. Zatem

$$a^4 + b^4 = \begin{bmatrix} a^6 & b^6 \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} a^6 & b^6 \\ \frac{1}{b^2} & \frac{1}{a^2} \end{bmatrix} = \frac{a^6}{b^2} + \frac{b^6}{a^2}. \qquad \blacksquare$$

Zadanie 3. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \le \frac{1}{a^3} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{b^3} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Rozwiązanie.

❑ Zauważmy że

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{b} \\ \frac{1}{a^3\sqrt{a}} & \frac{1}{b^3\sqrt{b}} \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{a^3} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{b^3} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{b} \\ \frac{1}{b^3\sqrt{b}} & \frac{1}{a^3\sqrt{a}} \end{bmatrix},$$

oraz to, że ciągi $\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}\right)$, $\left(\frac{1}{b^3\sqrt{b}}, \frac{1}{a^3\sqrt{a}}\right)$ są jednomonotoniczne. ■

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \ge a^2 + b^2.$$

Rozwiązanie.

❑ Ciągi $\left(a^3, b^3\right)$, $\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$ są jednomonotoniczne oraz

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} = \begin{bmatrix} a^3 & b^3 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}, \qquad a^2 + b^2 = \begin{bmatrix} a^3 & b^3 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Zadanie 5. Wykaż, że jeżeli liczby a i b są dodatnie, to

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \ge \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Rozwiązanie.

❑ Widzimy, że

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1}{\sqrt{b}} & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{bmatrix}, \qquad \sqrt{a} + \sqrt{b} = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1}{\sqrt{a}} & \frac{1}{\sqrt{b}} \end{bmatrix},$$

oraz to, że ciągi (a, b), $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$ są jednomonotoniczne. ■

Kolejne zadania spróbuj rozwiązać samodzielnie.

Zadanie 6. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich a i b zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2.$$

Zadanie 7. Wykaż, że jeżeli liczby x i y są dodatnie, n - liczbą naturalną, to

$$x^n + y^n \geq x^{n-1} + y^{n-1}.$$

Zadanie 8. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$a^{c+d} + b^{c+d} \geq a^c b^d + a^d b^c.$$

Pora na nierówności trzech zmiennych. *Przedtem jednak*

Twierdzenie. *Jeżeli ciągi* (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) *są jednomonotoniczne, zaś ciąg* (b_1', b_2', b_3') *jest permutacją zbioru* $\{b_1, b_2, b_3\}$, *to*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1' & b_2' & b_3' \end{bmatrix}.$$

DOWÓD.

❑ Rozważmy sześć liczb postaci $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1' & b_2' & b_3' \end{bmatrix}$.

Należy wykazać, że wśród nich największą jest liczba $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$.

Istotnie, jeżeli ciąg (b_1', b_2', b_3') jest różny od ciągu (b_1, b_2, b_3), to oznacza to, że dla pewnych k, l $(1 \leq k < l \leq 3)$ ciągi (a_k, a_l) i (b_k', b_l') nie są jednomonotoniczne. Przestawiając liczby b_k' i b_l' zwiększymy sumę $\begin{bmatrix} a_k & a_l \\ b_k' & b_l' \end{bmatrix}$, a więc także sumę $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$. ■

A teraz przejdźmy do zadań.

Zadanie 9. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

Rozwiązanie:

❑ Zauważmy, że

$$a^3 + b^3 + c^3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix},$$

$$a^2 b + b^2 c + c^2 a = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{bmatrix}.$$

A ponieważ ciągi (a, b, c) i (a^2, b^2, c^2) są jednomonotoniczne, więc

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{bmatrix} \quad ■$$

Zadanie 10. (VIII Olimpiada Matematyczna).
Wykaż, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Rozwiązanie:

❑ Ponieważ $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix}$,

oraz ciągi (a, b, c) i $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\right)$ są jednomonotoniczne, więc

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} \end{bmatrix}.$$

Po dodaniu powyższych nierówności stronami, otrzymamy nierówność

$$2 \cdot \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \geq 3,$$

która jest równoważna nierówności zadania. ■

Zadanie 11. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Rozwiązanie:

❑ Otóż

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix}$$

oraz ciągi (a^2, b^2, c^2), $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\right)$ są jednomonotoniczne. Wobec tego

$$\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} \end{bmatrix}$$

i

$$\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} \end{bmatrix}.$$

Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy

$$2 \cdot \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) \geq \frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b+c) + \frac{1}{2}(c+a) = a+b+c. \quad ■$$

Zadanie 12. (*do samodzielnego rozwiązywania*).

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwe są nierówności

1° $\quad 2 \cdot (a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$

2° $\quad a+b+c \leq \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$

Nietrudno zauważyć, że jeżeli ciągi (a_1, a_2) i (b_1, b_2) nie są jednomonotoniczne, tzn. zachodzą nierówności $a_1 \leq a_2$ i $b_1 \geq b_2$ lub $a_1 \geq a_2$ i $b_1 \leq b_2$,

to $\quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix}.$

Stąd łatwo też wynika, iż dla ciągów (a_1, a_2, a_3) i (b_1, b_2, b_3) niejednomonotonicznych prawdziwa jest nierówność

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1' & b_2' & b_3' \end{bmatrix}, \qquad \text{gdzie} \quad (b_1', b_2', b_3')$$

jest permutacją zbioru $\{b_1, b_2, b_3\}$. ■

Spróbuj te fakty uzasadnić, a my rozwiążmy kolejne zadania.

Zadanie 13. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Rozwiązanie:

❑ Bez trudu zauważysz, że ciągi $\left(a^5, b^5, c^5\right)$ i $\left(\frac{1}{b^3 c^3}, \frac{1}{c^3 a^3}, \frac{1}{a^3 b^3}\right)$ są jednomonotoniczne, więc

$$(1) \qquad \frac{a^5}{b^3 c^3} + \frac{b^5}{c^3 a^3} + \frac{c^5}{a^3 b^3} = \begin{bmatrix} a^5 & b^5 & c^5 \\ \frac{1}{b^3c^3} & \frac{1}{c^3a^3} & \frac{1}{a^3b^3} \end{bmatrix} \geq$$

$$\geq \begin{bmatrix} a^5 & b^5 & c^5 \\ \frac{1}{c^3 a^3} & \frac{1}{a^3 b^3} & \frac{1}{b^3 c^3} \end{bmatrix} = \frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3}.$$

Łatwo też spostrzec, że ciągi $\left(a^2, b^2, c^2\right)$ i $\left(\frac{1}{a^3}, \frac{1}{b^3}, \frac{1}{c^3}\right)$ nie są jednomonotoniczne.
Zatem

$$(2) \qquad \frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} = \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{c^3} & \frac{1}{a^3} & \frac{1}{b^3} \end{bmatrix} \geq$$

$$\geq \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{a^3} & \frac{1}{b^3} & \frac{1}{c^3} \end{bmatrix} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Z nierówności (1) i (2) otrzymujemy nierówność zadania. ■

Zadanie 14. Wykaż, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$a^3 b + b^3 c + c^3 a \geq a^2 bc + b^2 ca + c^2 a b.$$

Rozwiązanie:

❑ Ponieważ ciągi $\left(a^2, b^2, c^2\right)$ i (bc, ca, ab) nie są jednomonotoniczne, więc

$$a^3b + b^3c + c^3a = \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ ab & bc & ca \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{bmatrix} =$$

$$= a^2bc + b^2ca + c^2ab. \qquad ■$$

Zadanie 15. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^3b}{c} + \frac{a^3c}{b} + \frac{b^3a}{c} + \frac{b^3c}{a} + \frac{c^3a}{b} + \frac{c^3b}{a} \geq 6abc.$$

Rozwiązanie:

❑ Rozważmy ciągi $\left(a^2 b^2, b^2c^2, c^2a^2\right)$, $\left(\frac{c}{ab}, \frac{a}{bc}, \frac{b}{ca}\right)$.

Nie są one jednomonotoniczne, więc

$$(1) \qquad \frac{a^3 b}{c} + \frac{b^3c}{a} + \frac{c^3a}{b} = \begin{bmatrix} a^2 b^2 & b^2c^2 & c^2a^2 \\ \frac{a}{bc} & \frac{b}{ca} & \frac{c}{ab} \end{bmatrix} \geq$$

$$\geq \begin{bmatrix} a^2b^2 & b^2c^2 & c^2a^2 \\ \frac{c}{ab} & \frac{a}{bc} & \frac{b}{ca} \end{bmatrix} = 3abc.$$

Analogicznie,

$$(2) \qquad \frac{a^3c}{b} + \frac{b^3a}{c} + \frac{c^3b}{a} = \begin{bmatrix} a^2b^2 & b^2c^2 & c^2a^2 \\ \frac{b}{ca} & \frac{c}{ab} & \frac{a}{bc} \end{bmatrix} \geq$$

$$\geq \begin{bmatrix} a^2b^2 & b^2c^2 & c^2a^2 \\ \frac{c}{ab} & \frac{a}{bc} & \frac{b}{ca} \end{bmatrix} = 3abc\,.$$

Po dodaniu nierówności (1) i (2) otrzymujemy nierówność zadania. ■

Kolejne zadania rozwiąż samodzielnie.

Zadanie 16. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$\frac{a}{b^4} + \frac{b}{c^4} + \frac{c}{a^4} \geq \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}.$$

Zadanie 17 . Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

Zadanie 18. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc.$$

A teraz zobaczymy powyższą metodę w zadaniach na dowodzenie nierówności n zmiennych $(n \geq 4)$. Przedtem jednak

Twierdzenie. *Jeżeli ciągi* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *są jednomonotoniczne, to dla dowolnej permutacji* $(b_1', b_2', \ldots, b_n')$ *zbioru* $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ *zachodzi nierówność*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ b_1' & b_2' & b_3' & \ldots & b_n' \end{bmatrix}.$$

DOWÓD

❑ Należy po prostu wykazać, że wśród liczb postaci

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1' & b_2' & \ldots & b_n' \end{bmatrix} \quad \text{(ile ich jest?)}$$

największą jest liczba $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1' & b_2' & \ldots & b_n' \end{bmatrix}$.

Rozumujemy, jak w przypadku dla $n = 3$. Jeżeli ciąg $(b_1', b_2', \ldots, b_n')$ jest różny od ciągu $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, to istnieje taka para liczb k, l $(1 \leq k < j \leq n)$, że ciągi (a_k, a_l) i (b_k', b_l') - nie są jednomonotoniczne. Zamieniając miejscami liczby b_k', b_l' zwiększymy sumę $\begin{bmatrix} a_k & a_l \\ b_k' & b_l' \end{bmatrix}$, a w konsekwencji zwiększy się cała suma

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_2 & b_1 \end{bmatrix}.$$

W podobny sposób dowodzimy, że jeżeli ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ nie są jednomonotoniczne, tzn. jeśli

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$$

i $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ lub $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ i $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, to spośród wszystkich sum postaci

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1' & b_2' & \ldots & b_n' \end{bmatrix},$$

gdzie $(b_1', b_2', \ldots, b_n')$ jest permutacją zbioru $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$,

najmniejszą jest suma

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_2 & b_1 \end{bmatrix}.$$ ■

Zadanie 19. Wykaż, że jeżeli liczby a, b, c, d są dodatnie, to

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq a^2b + b^2c + c^2d + d^2a.$$

Rozwiązanie:

❑ Zauważmy, że $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{bmatrix}$,

$$a^2b + b^2c + c^2d + d^2a = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d^2 & a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}.$$

A ponieważ ciągi (a, b, c, d) i (a^2, b^2, c^2, d^2) są jednomonotoniczne,

więc $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d^2 & a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$. ■

Zadanie 20. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ o sumie s zachodzi nierówność

$$\frac{a_1}{s - a_1} + \frac{a_2}{s - a_2} + \ldots + \frac{a_n}{s - a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Rozwiązanie:

❑ Ponieważ

$$\frac{a_1}{s - a_1} + \frac{a_2}{s - a_2} + \ldots + \frac{a_n}{s - a_n} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \frac{1}{s - a_1} & \frac{1}{s - a_2} & \ldots & \frac{1}{s - a_n} \end{bmatrix}$$

oraz ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $\left(\frac{1}{s - a_1}, \frac{1}{s - a_2}, \ldots, \frac{1}{s - a_n}\right)$ są jednomonotoniczne, więc dla każdego $k = 2, 3, \ldots, n$ zachodzą nierówności

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ \frac{1}{s - a_1} & \frac{1}{s - a_2} & \frac{1}{s - a_3} & \ldots & \frac{1}{s - a_n} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ \frac{1}{s - a_1} & \frac{1}{s - a_2} & \frac{1}{s - a_3} & \ldots & \frac{1}{s - a_{k-1}} \end{bmatrix}.$$

Po dodaniu ich stronami otrzymujemy nierówność zadania. ■

Zadanie 21. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

Rozwiązanie:

❑ Zauważmy, że

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_4} & \ldots & \frac{1}{a_1} \end{bmatrix},$$

$$n = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \ldots & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}.$$

Ponadto nietrudno spostrzec, że ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $\left(-\frac{1}{a_1}, -\frac{1}{a_2}, \ldots, -\frac{1}{a_n}\right)$ są jednomonotoniczne. Zatem

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ -\frac{1}{a_1} & -\frac{1}{a_2} & \ldots & -\frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ -\frac{1}{a_2} & -\frac{1}{a_3} & \ldots & -\frac{1}{a_1} \end{bmatrix}.$$

Stąd wynika nierówność, o którą nam chodzi. ■

Zadanie 22. Wykaż, że jeżeli ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ są jednomonotoniczne, to

$$n \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \ldots a_n) \cdot (b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

(jest to tzw. nierówność Czebyszewa).

Rozwiązanie:

❑ Wystarczy zauważyć, że dla każdego $k = 1, 2, \dots, n$ zachodzi nierówność

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_k & b_{k+1} & \dots & b_{k-1} \end{bmatrix}.$$

Po dodaniu tych n nierówności stronami otrzymujemy żądaną nierówność. ■

UWAGA. Gdy ciągi $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ nie są jednomonotoniczne, to

$$n \cdot (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \leq (a_1 + a_2 + \dots a_n) \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_n).$$

Uzasadnienie tego jest natychmiastowe.

Zadanie 23. Udowodnij, że jeżeli liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są dodatnie, to spełniają nierówność

$$n \cdot (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2.$$

Rozwiązanie:

❑ Wystarczy wziąć ciągi $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ oraz powołać się na poprzednią nierówność .

UWAGA. Powyższa nierówność w prosty sposób prowadzi do znanej nierówności między średnią kwadratową i arytmetyczną liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Istotnie, skoro liczby $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \dots n)$, więc

$$n \cdot (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$ ■

Zadanie 24. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

Rozwiązanie:

❑ Przepisujemy tę nierówność w postaci

$$3 \cdot (a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2),$$

i widzimy natychmiast, że jest ona nierównością Czebyszewa dla ciągów jednomonotonicznych (a, b, c) i (a^2, b^2, c^2). ■

Zadanie 25. Liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są dodatnie. Wykaż, że

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Rozwiązanie:

❑ Tym razem rozważamy ciągi $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

i $\left(-\frac{1}{a_1}, -\frac{1}{a_2}, \dots, -\frac{1}{a_n}\right)$.

Są one jednomonotoniczne, więc na mocy nierówności Czebyszewa otrzymujemy

$$n \cdot \left(a_1 \cdot \left(-\frac{1}{a_1}\right) + a_2 \cdot \left(-\frac{1}{a_2}\right) + \dots + a_n \cdot \left(-\frac{1}{a_n}\right)\right) \geq$$

$$\geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot \left(-\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \dots - \frac{1}{a_n}\right).$$

Stąd wynika nierówność zadania . ■

UWAGA. Nierówność ta, napisana w postaci

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}},$$

to znana nierówność między średnią arytmetyczną i harmoniczną liczb dodatnich.

Zadanie 26. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1 + a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \left(\frac{a_1^{-2} + a_2^{-2}+\ldots+a_n^{-2}}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Rozwiązanie:

□ Nierówność ta ma równoważną postać:

$$\left(a_1 + a_2+\ldots+a_n\right)^2\left(a_1^{-2} + a_2^{-2}+\ldots+a_n^{-2}\right) \geq n^3.$$

A teraz wystarczy tylko powołać się na rozwiązywane przed chwilą zadania. Na mocy nierówności zadania 23 mamy

$$n\left(a_1^{-2} + a_2^{-2}+\ldots+a_n^{-2}\right) \geq \left(a_1^{-1} + a_2^{-1}+\ldots+a_n^{-1}\right)^2, \text{ więc}$$

$$\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)^2\left(a_1^{-2}+a_2^{-2}+\ldots+a_n^{-2}\right) \geq \frac{1}{n}\left[\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\left(a_1^{-1}+a_2^{-1}+\ldots+a_n^{-1}\right)\right]^2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{n}\left(n^2\right)^2 = n^3$$

(tutaj z kolei przydała się nierówność zadania 25). ■

Zadanie 27. Liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniają warunek $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$. Udowodnij, że

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Rozwiązanie:

□ Ponieważ ciągi $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ i $\left(\frac{1}{\sqrt{1-a_1}},\frac{1}{\sqrt{1-a_2}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{1-a_n}}\right)$ są jednomonotoniczne, więc z nierówności Czebyszewa

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}}+\ldots+\frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} \geq \frac{1}{n}\cdot\left(a_1+\ldots+a_n\right) \times$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{1-a_1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1-a_n}}\right) = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-a_1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1-a_n}}\right).$$

Ale z ostatniego zadania mamy z kolei:

$$\frac{1}{\sqrt{1-a_1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1-a_n}} \geq n\cdot\left(\frac{1-a_1+1-a_2+\ldots+1-a_n}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= n\cdot\sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Stąd wynika nierówność o którą nam chodziło. ■

Zadania do samodzielnego rozwiązywania

Zadanie 28. Niech a, b, c będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Udowodnij, że

$$9\cdot\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq (a+b+c)^3.$$

Zadanie 29. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzą nierówności:

1° $$a_1^n + a_2^n+\ldots+a_n^n \geq a_1^{n-1}a_2 + a_2^{n-1}a_3+\ldots+a_n^{n-1}a_1.$$

2° $$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Dotychczas dla dowodu nierówności rozważaliśmy zawsze dwa ciągi liczb troszcząc się o to, by były jednomonotoniczne.

Ale są nierówności, dla których dwa takie ciągi to...za mało! I co wtedy? O tym mówi następujące

Twierdzenie. (uogólnienie wcześniejszych twierdzeń).

Jeżeli ciągi $\left(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}\right)$, $\left(a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_n^{(2)}\right)$, ..., $\left(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}\right)$ *są jednomonotoniczne, to*

$$\begin{bmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \dots & a_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & \dots & a_n^{(k)} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1^{(1)'} & a_2^{(1)'} & \dots & a_n^{(1)'} \\ a_1^{(2)'} & a_2^{(2)'} & \dots & a_n^{(2)'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(k)'} & a_2^{(k)'} & \dots & a_n^{(k)'} \end{bmatrix},$$

gdzie ciąg $\left(a_1^{(j)'}, a_2^{(j)'}, \dots, a_n^{(j)'}\right)$ *jest permutacją zbioru* $\left\{a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}\right\}$ *dla* $j = 1, 2, 3, \dots, k$, *zaś*

$$\begin{bmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \dots & a_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & \dots & a_n^{(k)} \end{bmatrix} = a_1^{(1)} \cdot a_1^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_1^{(k)} + a_2^{(1)} \cdot a_2^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_2^{(k)} + \dots$$

$$\dots + a_n^{(1)} \cdot a_n^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_n^{(k)}.$$

Ponieważ idea dowodu tego twierdzenia jest dokładnie taka, jak twierdzeń poprzednich, więc dowód ten opuścimy i od razu przejdziemy do zadań, w których to twierdzenie znalazło zastosowanie.

Zadanie 30. Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi. Wykaż, że

$$a^7 + b^7 + c^7 \geq a^2 b^2 c^2 (a + b + c).$$

Rozwiązanie:

❑ Rozważmy trzy ciągi: $\left(a^3, b^3, c^3\right)$, $\left(a^2, b^2, c^2\right)$, $\left(a^2, b^2, c^2\right)$. Są one jednomonotoniczne oraz

$$a^7 + b^7 + c^7 = \begin{bmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix},$$

$$a^2 b^2 c^2 (a + b + c) = \begin{bmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{bmatrix}.$$

Wystarczy teraz zastosować powyższe twierdzenie i mamy żądaną nierówność. ■

Zadanie 31. (Nierówność Cauchy'ego).

Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ będą liczbami nieujemnymi. Wykaż, że

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Rozwiązanie:

❑ Nierówność tę (zwaną też nierównością między średnią arytmetyczną i geometryczną) przepiszemy następująco:

$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n \geq n \cdot x_1 x_2 \ldots x_n$, gdzie $x_i = \sqrt[n]{a_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Wówczas mamy

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{bmatrix} \geq$$

$$\geq \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \end{bmatrix} = n \cdot x_1 x_2 \ldots x_n. \quad ■$$

Zadanie 32. (Uogólniona nierówność Czebyszewa).

Jeżeli $\left(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}\right)$, $\left(a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_n^{(2)}\right), \ldots,$

$\left(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}\right)$ są ciągami jednomonotonicznymi liczb dodatnich, to

$$\begin{bmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \ldots & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \ldots & a_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & \ldots & a_n^{(k)} \end{bmatrix} \geq \frac{1}{n^{k-1}} \cdot \left(a_1^{(1)} + \ldots + a_n^{(1)}\right)\left(a_1^{(2)} + \ldots + a_n^{(2)}\right) \times$$

$$\times \ldots \cdot \left(a_1^{(k)} + \ldots + a_n^{(k)}\right).$$

Rozwiązanie:

❑ Zauważmy, że dla każdego $l = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{bmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \ldots & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \ldots & a_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & \ldots & a_n^{(k)} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \ldots & a_n^{(1)} \\ a_l^{(2)} & a_{l+1}^{(2)} & \ldots & a_{l-1}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_l^{(k)} & a_{l+1}^{(k)} & \ldots & a_{l-1}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Dodając nierówności te stronami (*ile ich jest?*), uzyskujemy nierówność zadania. ■

Zadanie 33. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prawdziwa jest nierówność

$$n^{m-1} \cdot \left(a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m\right) \geq \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^m,$$

gdzie m jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie:

❑ Korzystając z poprzedniego zadania otrzymujemy:

$$a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \geq \frac{1}{n^{m-1}} \cdot \left(a_1 + \ldots + a_n\right) \times$$

$$\times \left(a_1 + \ldots + a_n\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_1 + \ldots + a_n\right) = \frac{1}{n^{m-1}} \cdot \left(a_1 + \ldots + a_n\right)^m. \quad ■$$

Zadania do samodzielnego rozwiązywania

Zadanie 34. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to:

1° $3 \cdot \left(a^3 + b^3 + c^3\right) \geq (a + b + c) \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right),$

2° $a^3 b + b^2 c + c^2 a \geq a^2 bc + b^2 ca + c^2 ab.$

Zadanie 35. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzą nierówności:

1° $\dfrac{a_1}{a_2^2} + \dfrac{a_2}{a_3^2} + \ldots + \dfrac{a_n}{a_1^2} \geq \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}.$

2° $n \cdot \left(a_1^{k+m} + a_2^{k+m} + \ldots + a_n^{k+m}\right) \geq \left(a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k\right) \times$

$$\times\left(a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m\right),$$

gdzie k i m są liczbami naturalnymi.

3° $(n-1) \cdot \left(a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m\right) \leq \dfrac{a_2^k + a_3^k + \ldots + a_n^k}{a_1^{k-m}} +$

$$+ \frac{a_1^k + a_3^k + \ldots + a_n^k}{a_2^{k-m}} + \ldots + \frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_{n-1}^k}{a_n^{k-m}},$$

gdzie $k > m > 0$ są liczbami całkowitymi.

Zadanie 36. (XIV Olimpiada Matematyczna).
Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$a + b + c \leq \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc}.$$

Zadanie 37. (XXX Olimpiada Matematyczna).
Udowodnij, że jeżeli $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$, to

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b).$$

Zadanie 38. (XXXVII Olimpiada Matematyczna).
Udowodnij, że jeżeli x, y, z są takimi liczbami nieujemnymi, że $x + y + z = 1$, to

$$\frac{x}{x + 1} + \frac{y}{y + 1} + \frac{z}{z + 1} \leq \frac{3}{4}.$$

Zadanie 39. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$\sqrt{\frac{a + b}{c}} + \sqrt{\frac{b + c}{a}} + \sqrt{\frac{c + a}{b}} \geq 3\sqrt{2}.$$

Zadanie 40. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} \geq 4\left(\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b}\right).$$

XI. BOKI TRÓJKĄTA I NIERÓWNOŚCI

Dość często spotykanymi, na olimpiadach matematycznych, zadaniami są te na dowodzenie nierówności związane z bokami trójkąta.

Istnieje ogólna metoda pozwalająca stosunkowo prosto rozwiązywać tego typu zadania. Zajmiemy się nią obecnie.

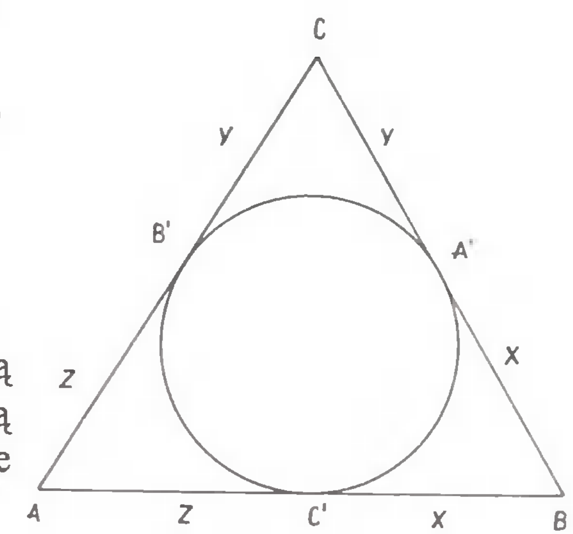
Wpiszmy w trójkąt ABC, w którym boki BC, CA, i AB mają długości odpowiednio $a, b, c,$ okrąg (rys.).

Niech A', B', C' będą punktami styczności tego okręgu z odpowiednimi bokami. Przyjmijmy jeszcze:

$|AC'| = z,\ |BA'| = x,\ |CB'| = y$

Wówczas

(*) $a = x + y,\ b = y + z,$
$c = z + x.$



Zatem, jeżeli liczby a, b, c są długościami boków trójkąta, to istnieją liczby dodatnie x, y, z spełniające równości (*).

Na odwrót, jeżeli $a = x + y,\ b = y + z,\ c = z + x$, gdzie $x > 0$, $y > 0,\ z > 0$, to oczywiście istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c, przy czym x, y, z - to długości odcinków, na które dzielą te boki punkty styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt. Z łatwością obliczamy wówczas

$$x = \frac{c + a - b}{2},\quad y = \frac{a + b - c}{2},\quad z = \frac{b + c - a}{2}$$

lub $x = p - b,\ y = p - c,\ z = p - a$, gdzie $2p = a + b + c$.

Równości (*) pozwalają przejść od nierówności dla boków trójkąta do nierówności dla dowolnych liczb dodatnich. Często przy tym otrzymana nierówność jest łatwiejsza od udowodnienia od tej wyjściowej.

Prześledźmy to na konkretnych przykładach.

Zadanie 1. (XLV Olimpiada Matematyczna).
Udowodnij, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b}.$$

Rozwiązanie:
❑ Niech x, y, z będą takimi liczbami dodatnimi, że $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$. Wówczas

$$x = \frac{c+a-b}{2},\ y = \frac{a+b-c}{2},\ z = \frac{b+c-a}{2}.$$

Dana do udowodnienia nierówność przybiera postać:

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \le \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z}.$$

Zauważmy, że

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4}{x+y} = \frac{(x+y)^2 - 4xy}{xy(x+y)} = \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)} \ge 0.$$

Stąd $\dfrac{1}{x+y} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$; podobnie $\dfrac{1}{y+z} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)$,

$$\frac{1}{z+x} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right).$$

Dodając te trzy nierówności stronami otrzymamy żądaną nierówność. ■

Zadanie 2. (XXXIV Olimpiada Matematyczna).
Udowodnij, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{a-b+c} + \sqrt{-a+b+c} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Rozwiązanie:
❑ Przyjmijmy $a = x + y,\ b = y + z,\ c = z + x$, gdzie $x > 0$, $y > 0,\ z > 0$. Wówczas nasza nierówność przybiera postać:

$$\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} \le \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}, \text{ czyli}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{y+z}{2}} + \sqrt{\frac{z+x}{2}}.$$

A teraz możemy szacować:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} + \frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2} + \frac{\sqrt{z}+\sqrt{x}}{2} \le$$

$$\le \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{y+z}{2}} + \sqrt{\frac{z+x}{2}},$$

gdyż dla dowolnych liczb dodatnich x i y zachodzi nierówność

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \le \sqrt{\frac{x+y}{2}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \le \sqrt{\frac{x+y}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2 \le \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \ge 0\right). \ ■$$

Zadanie 3. (VI Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna).
Wykaż, że jeżeli liczby a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \le 3abc.$$

Rozwiązanie:
❑ Dana do udowodnienia nierówność jest równoważna kolejno nierównościom:

$$\left[a^2(b+c-a) - abc\right] + \left[b^2(c+a-b) - abc\right] + c^2(a+b-c) \le abc,$$

$$a(c-a)(a-b)+b(a-b)(b-c)+c^2(a+b-c)\le abc,$$

$$-(a-b)^2(a+b-c)+c^2(a+b-c)\le abc,$$

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc.$$

Udowodnimy ostatnią nierówność i zadanie będzie rozwiązane.

Podstawmy $a=x+y,\ b=y+z,\ c=z+x$. Wówczas nierówność, której chcemy dowieść, przyjmuje postać:

$$(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz\,.$$

Z kolei tę nierówność otrzymujemy natychmiast przez wymnożenie stronami następujących nierówności:

$$x+y\ge 2\sqrt{xy},\quad y+z\ge 2\sqrt{yz},\quad z+x\ge 2\sqrt{zx}.$$ ■

Zadanie 4. (XXIV Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna). Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta. Udowodnij, że

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0.$$

Rozwiązanie:

❑ Przepiszmy tę nierówność równoważnie

$$a^3b+b^3c+c^3a\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2,$$

a następnie przyjmijmy, jak zwykle, oznaczenia: $a=x+y$, $b=y+z,\ c=z+x$, gdzie $x>0,\ y>0,\ z>0$.

Wówczas

$$a^3b+b^3c+c^3a-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2=(x+y)^2(y+z)(x-z)+$$

$$+(y+z)^2(z+x)(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)=$$

$$=2x^3z+2y^3x+2z^3y-2x^2yz-2xy^2z-2xyz^2=$$

$$2\left(xz(x-y)^2+xy(y-z)^2+yz(z-x)^2\right)\ge 0.$$ ■

Zadanie 5. (III Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna). Udowodnij, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, S - jego polem, to

$$a^2+b^2+c^2\ge 4S\sqrt{3}.$$

Rozwiązanie:

❑ Niech $a=x+y,\ b=y+z,\ c=z+x$, gdzie $x>0$, $y>0,\ z>0$. Ponieważ

$$S=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}},$$

(wzór Herona) więc nierówność, którą mamy udowodnić, wygląda teraz tak:

$$4\cdot\sqrt{3(x+y+z)xyz}\le (x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2.$$

Jeżeli pokażemy, że $\sqrt{3(x+y+z)xyz}\le xy+yz+zx$, to zadanie będzie rozwiązane.

Ale nierówność $\sqrt{3(x+y+z)xyz}\le xy+yz+zx$

jest równoważna nierówności

$$x^2(y-z)^2+y^2(z-x)^2+z^2(x-y)^2\ge 0,$$

a tutaj nie ma czego dowodzić. ■

Zadanie 6. Udowodnij, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$2\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+3.$$

Rozwiązanie:

❑ Podstawmy $a=x+y,\ b=y+z,\ c=z+x$.

Wówczas nierówność zadania przyjmuje postać

$$x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2z+z^2x\ge 2x^2z+2y^2x+2z^2y.$$

Ale

$$x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2z+z^2x-2x^2z-2y^2x-2z^2y=$$

$$= x(x - z)^2 + y(y - x)^2 + z(z - y)^2 \geq 0. \qquad \blacksquare$$

Zadanie 7. Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta. Wykaż, że

$$\frac{a}{b + c - a} + \frac{b}{c + a - b} + \frac{c}{a + b - c} \geq 3.$$

Rozwiązanie:

❑ Jeżeli $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$ gdzie $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, to

$$\frac{a}{b + c - a} + \frac{b}{c + a - b} + \frac{c}{a + b - c} = \frac{x + y}{2z} + \frac{y + z}{2x} + \frac{z + x}{2y} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right)\right] \geq \frac{1}{2}(2 + 2 + 2) = 3. \qquad \blacksquare$$

Zadanie 8. Udowodnij, że jeżeli liczby dodatnie a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$a^2(2b + 2c - a) + b^2(2c + 2a - b) + c^2(2a + 2b - c) \geq 9abc.$$

Rozwiązanie.

❑ Niech $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$, gdzie $x, y, z > 0$. Wówczas

$$a^2(2b + 2c - a) + b^2(2c + 2a - b) + c^2(2a + 2b - c) - 9abc =$$

$$= (x + y)^2(x + y + 4z) + (y + z)^2(y + z + 4x) +$$

$$+ (z + x)^2(z + x + 4y) - 9(x + y)(y + z)(z + x) =$$

$$= 2(x^3 + y^3 + z^3 - x^2y - y^2z - z^2x - y^2x - z^2y + 3xyz) \geq 0$$

(patrz zadanie 3). ■

Zadanie 9. Udowodnij, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b) + 4abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

Rozwiązanie.

❑ Przyjmując, jak zwykle, $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$, gdzie $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, możemy pisać, że

$$a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b) + 4abc - a^3 - b^3 - c^3 =$$

$$= (x + y)(x - y)^2 + (y + z)(y - z)^2 + (z + x)(z - x)^2 +$$

$$+ 4(x + y)(y + z)(z + x) - (x + y)^3 - (y + z)^3 - (z + x)^3 = 8xyz > 0$$

■

Zadanie 10. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $xyz(x + y + z) = 1$. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia

$$(x + y)(x + z).$$

Rozwiązanie:

❑ Niech $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ i rozważmy trójkąt o bokach długości a, b, c (oczywiście on istnieje, albowiem $a < b + c$, $b < c + a$, $c < a + b$). Obwód tego trójkąta jest równy $2p = a + b + c = 2(x + y + z)$, zaś pole (wzór Herona)

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = \sqrt{(x + y + z)xyz}.$$

Z drugiej strony, pole to wynosi $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha$, gdzie α jest kątem między bokami b i c.

Zatem

$$(x + z)(x + y) = bc = \frac{2S}{\sin\alpha} \geq 2 \cdot S = 2,$$

przy czym

$(x + z)(x + y) = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sin\alpha = 1$, czyli, gdy $\alpha = 90^\circ$ (trókąt o bokach a, b, c jest prostokątny).

Ale równość $a^2 = b^2 + c^2$ jest równoważna równości

$$x(x + y + z) = yz.$$

W szczególności, $(x+z)(x+y) = 2$ dla $x+y = x+z = \sqrt{2}$, $y+z = 2$ czyli, gdy $y = z = 1$, $x = \sqrt{2}-1$. ■

Zadanie 11. (*do samodzielnego rozwiązania*).
Niech a, b, c będą długościami boków trójkąta, S - jego polem, $2p$ - obwodem, r - promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Udowodnij nierówności:

1° $2(ab+bc+ca) > a^2+b^2+c^2$,

2° $ab+bc+ca \geq 4\sqrt{3}\,S$,

3° $(p-a)^{-2}+(p-b)^{-2}+(p-c)^{-2} \geq r^{-2}$,

4° $3\sqrt{3}r^2 \leq S \leq p^2/3\sqrt{3}$.

XII. OD KOŁA FORTUNY DO... MAŁEGO TWIERDZENIA FERMATA

Każdy, kto choć raz oglądał w telewizji teleturniej "Koło Fortuny" (a tym bardziej , jeśli miał "szczęście " wziąć w nim udział!) wie , co to za koło.

Jest ono podzielone na ileś tam równych różnokolorowych sektorów.

Załóżmy , że mamy ich p , gdzie p jest ustaloną liczbą pierwszą, i każdy chcemy pomalować na jeden z n kolorów. I tutaj pojawia się **Pytanie:** Ile jest wszystkich różnych takich pokolorowań koła , jeżeli dwa pokolorowania koła , z których jedno, po obrocie tego koła o kąt $k\cdot\frac{360^\circ}{p}$, gdzie $k = 0,1,2,3,\dots,p-1$ staje się drugim , uznajemy za identyczne? Odpowiedź nie wydaje się rzeczą trudną.

Każdy sektor malujemy na jeden z n kolorów.Zatem wszystkich pokolorowań tego koła jest n^p (tyle,ile wszystkich funkcji określonych na zbiorze p elementowym i przyjmujących jedną z n wartości). Wśród tych pokolorowań jest n jednobarwnych i wydawać by sie mogło - n^p-n niejednobarwnych. Lecz każde niejednobarwne pokolorownie tego koła jest w liczbie n^p-n liczone p krotnie (*dlaczego?*) . Wobec tego wszystkich pokolorowań niejednobarwnych naszego koła jest

$\frac{n^p-n}{p}$, a wszystkich nieidentycznych pokolorowań mamy $n+\frac{n^p-n}{p}$.

Liczba $n+\frac{n^p-n}{p}$ jest więc , przy każdym naturalnym n oraz dla dowolnej liczby pierwszej p , całkowita . Stąd otrzymujemy , że dla każdego naturalnego n oraz dla każdej liczby pierwszej p liczba $\dfrac{n^p - n}{p}$ jest całkowita czyli, że p dzieli $n^p - n$.

Łatwo spostrzec, że podzielność $p \mid n^p - n$ zachodzi też dla dowolnego n całkowitego ujemnego ; jeśli bowiem $n < 0$, to $-n > 0$ i $p \mid (-n)^p - (-n) = (-1)(n^p - n)$, gdy $2 \nmid p$. Stąd $p \mid n^p - n$.

Gdy $p = 2$, to podzielność $2 \mid n^2 - n$ jest oczywista.

Zatem $p \mid n^p - n$ dla każdego całkowitego n oraz dla każdej liczby pierwszej p.

Ponieważ $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$, więc z podzielności $p \mid n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$, przy dodatkowym założeniu, że $p \nmid n$ otrzymujemy podzielność $p \mid n^{p-1} - 1$, a więc

Twierdzenie (zw. Małym Twierdzeniem Fermata[1]).

Jeżeli n jest liczbą całkowitą niepodzielną przez liczbę pierwszą p, to

$$p \mid n^{p-1} - 1.$$

A oto kilka nietrudnych zadań olimpijskich, które łatwo rozwiązuje się z zastosowaniem M.T.F.

Zadanie 1. Udowodnij, że jeżeli liczby naturalne a, b, c, d spełniają warunek

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2, \text{ to liczba } a + b + c + d$$

nie jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie

[1] Fermat Pierre de (1601 - 1665) - matematyk francuski, z zawodu prawnik, zajmował się analizą matematyczną, teorią liczb i rachunkiem prawdopodobieństwa.

❑ Wiemy, że każda z liczb : $a^2 - a,\ b^2 - b,\ c^2 - c,\ d^2 - d$ jest parzysta. Ponadto na mocy warunku zadania liczba

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2\left(a^2 + b^2\right) \quad \text{też jest parzysta.}$$

Stąd również liczba

$$a+b+c+d = (a^2+b^2+c^2+d^2) - (a^2-a) - (b^2-b) - (c^2-c) - (d^2-d)$$

jest parzysta. A ponieważ jest jednocześnie większa od 2, więc nie może być pierwsza. ■

Zadanie 2. (XLII Olimpiada Matematyczna).
Każdy wierzchołek pewnego wielokąta ma obie współrzędne całkowite. Długość każdego boku tego wielokąta jest liczbą naturalną. Udowodnij, że jego obwód jest liczbą parzystą.

Zadanie 3. Udowodnij, że jeżeli liczby $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ są całkowite, p zaś jest liczbą pierwszą, to

$$p \mid a_1^p + a_2^p + \ldots + a_k^p \iff p \mid a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

Rozwiązanie:

❑ Dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k$ mamy podzielność

$$p \mid a_i^p - a_i.$$

Wobec tego, że

$$(a_1^p + a_2^p + \ldots + a_k^p) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) = (a_1^p - a_1) + (a_2^p - a_2) + \ldots + (a_k^p - a_k),$$

mamy również podzielność

$$p \mid (a_1^p + a_2^p + \ldots + a_k^p) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_k).$$

Stąd już w oczywisty sposób uzyskujemy tezę. ■

Zadanie 4. (VII Olimpiada Matematyczna).
Udowodnij, że jeżeli a i b są liczbami całkowitymi, to liczba

$$N = ab(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$$

jest podzielna przez 30.

Zadanie 5. Wiadomo, że liczba pierwsza p dzieli liczbę $\underbrace{11\ldots1}_{p}$.

Udowodnij, że $p = 3$.

Zadanie 6. (XXXIII Olimpiada Matematyczna).
Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej p liczba

$$\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\underbrace{33\ldots3}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p} - 123456789$$

jest podzielna przez p.

Zadanie 7. Niech a i b będa liczbami naturalnymi, p zaś - liczbą pierwszą. Udowodnij, że jeżeli liczba $a^p - b^p$ jest podzielna przez p, to jest również podzielna przez p^2.

XIII. TRYGONOMETRIA POMAGA NIE TYLKO GEOMETRII

Często przy rozwiązywaniu zadań z algebry dogodną bywa zamiana występującej w nim zmiennej (lub występujących w nim zmiennych, jeśli jest ich więcej) na odpowiednią funkcję trygonometryczną. Otrzymujemy w ten sposób do rozwiązania zadanie z trygonometrii. I to podstawienie trygonometryczne ma oczywiście sens wtedy, gdy znacznie upraszcza rozwiązanie danego problemu. Wybór tej czy innej funkcji trygonometrycznej zależy przy tym od postaci równania, nierówności czy też innej formy zadaniowej, z którą przyszło nam zmagać się. Często forma ta, to jakiś ukryty wzór trygonometryczny tyle, że ubrany w algebraiczną szatę. Czasem jednak podstawienie takie narzucają założenia, które musi spełniać występująca w danym zadaniu zmienna.

Na przykład, jeśli z warunków zadania wynika, że musi być $|x| \le 1$, to dogodnymi bywają podstawienia

$$x = \sin\alpha\,,\quad \alpha \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

lub $$x = \cos\alpha\,,\quad \alpha \in \langle 0, \pi \rangle,$$

przy czym - które z nich - zależy od konkretnego zadania.

W przypadku, kiedy zmienna x może przyjąć dowolną wartość, możemy podstawić np.

$$x = \operatorname{tg}\alpha\,,\quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

lub $$x = \operatorname{ctg}\alpha\,,\quad \alpha \in (0, \pi).$$

Prześledźmy to na konkretnych zadaniach.

Zadanie 1. Rozwiąż równanie

(1) $$\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$$

Rozwiązanie:

❑ Musimy tutaj oczywiście założyć, by $|x| \le 1$.

Teraz, zatroszczywszy się o nieujemność prawej strony danego równania, możemy podnieść jego obie strony do kwadratu. Otrzymamy równanie algebraiczne ... być może niełatwe do rozwiązania.

Pójdźmy zatem inną drogą.

Podstawiając w równaniu (1) $x = \cos\alpha$, gdzie $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$, przechodzimy do równania

(2) $\sqrt{1-\cos^2\alpha} = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, czyli równania

(3) $|\sin\alpha| = \cos 3\alpha$.

Ale $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$, więc $\sin\alpha \ge 0$ i równanie (3) przybiera postać

(4) $\sin\alpha = \cos 3\alpha$, czyli

(5) $$\cos 3\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{z} - \alpha\right) = 0.$$

Rozwiązując to ostatnie równanie, otrzymamy

$$\alpha = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\quad k \in \mathbf{Z},\quad \text{lub}\quad \alpha = \frac{3}{4}\pi + n\cdot\pi,\quad n \in \mathbf{Z}.$$

Warunek $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ spełniają trzy wartości: $\alpha_1 = \frac{\pi}{8}$, $\alpha_2 = \frac{5}{8}\pi$, $\alpha_3 = \frac{3}{4}\pi$. Wobec tego ostatecznie:

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$x_2 = \cos\frac{5}{8}\pi = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{5\pi}{8}}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$x_3 = \cos\frac{3}{4}\pi = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zatem, zbiorem rozwiązań danego równania jest

$$\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\ \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right\}.$$

Zadanie 2. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

❑ Zauważmy najpierw, że jeżeli trójka liczb (x, y, z) spełnia podany układ równań, to nie może zachodzić żaden z warunków: $|x| = 1$, $|y| = 1$, $|z| = 1$ (*dlaczego?*).

Gdy zaś $|x| \ne 1$ i $|y| \ne 1$ i $|z| \ne 1$, to dany układ jest równoważny układowi

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{1-x^2} \\ z = \dfrac{2y}{1-y^2} \\ x = \dfrac{2z}{1-z^2}. \end{cases}$$

Podstawmy tutaj $x = \operatorname{tg}\alpha$, gdzie $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$

(co narzucają lewe strony powyższych równań, przypominając znany wzór $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$).Wówczas z naszego układu otrzymujemy:

$y = \operatorname{tg} 2\alpha$, $z = \operatorname{tg} 4\alpha$, $x = \operatorname{tg} 8\alpha$. Stąd mamy równanie

$$\operatorname{tg} 8\alpha = \operatorname{tg}\alpha, \quad \text{skąd}$$

$$8\alpha = \alpha + n\cdot\pi, \quad \text{czyli}$$

$$\alpha = n\cdot\frac{\pi}{7}, \text{ gdzie } n\in\mathbf{Z}.$$

Ostatecznie:

$$(*) \qquad x = \operatorname{tg}\left(n\cdot\frac{\pi}{7}\right),\ y = \operatorname{tg}\left(n\cdot\frac{2\pi}{7}\right),\ z = \operatorname{tg}\left(n\cdot\frac{4\pi}{7}\right),$$

gdzie $n\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

Łatwo sprawdzić, że liczby postaci (*) spełniają podany układ równań. ■

Zadanie 3. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 4xy\left(2x^2-1\right) = 1 \\ x^2+y^2 = 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

❑ Drugie równanie danego układu sugeruje, by podstawić: $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$. Wówczas pierwsze równanie układu przyjmie postać

$$4\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\left(2\cos^2\alpha - 1\right) = 1, \text{ czyli kolejno}$$

$$2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha = 1,$$

$$\sin 4\alpha = 1.$$

Rozwiązując ostatnie równanie otrzymamy:

$$4\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ skąd}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{8} + k\cdot\frac{\pi}{2}, \text{ gdzie } k\in\mathbf{Z}.$$

Tak więc $x = \cos\left(\dfrac{\pi}{8} + k\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{8} + k\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$, gdzie $k\in\mathbf{Z}$.

Rozważmy teraz cztery przypadki:

1° $k\equiv 0 \pmod 4$. Wówczas $x = \cos\dfrac{\pi}{8}$, $y = \sin\dfrac{\pi}{8}$.

2° $k\equiv 1 \pmod 4$. Wówczas $x = -\sin\dfrac{\pi}{8}$, $y = \cos\dfrac{\pi}{8}$.

3° $k\equiv 2 \pmod 4$. Wówczas $x = -\cos\dfrac{\pi}{8}$, $y = -\sin\dfrac{\pi}{8}$.

4° $k\equiv 3 \pmod 4$. Wówczas $x = \sin\dfrac{\pi}{8}$, $y = -\cos\dfrac{\pi}{8}$.

Ostatecznie otrzymujemy

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań podanego układu jest

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right),\right.$$
$$\left.\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\right\}. \ ■$$

Zadanie 4. Spośród wszystkich rozwiązań układu

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ z^2+v^2 = 9 \\ xv+yz \ge 6 \end{cases}$$

wyznacz te, dla których suma $x+z$ osiąga wartość największą.

Rozwiązanie:

❑ Dany układ jest równoważny układowi

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 1 \\ \left(\dfrac{z}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{v}{3}\right)^2 = 1 \\ xv + yz \geq 6\,. \end{cases}$$

Podstawmy tutaj: $x = 2\cos\alpha$, $y = 2\sin\alpha$

$z = 3\cos\beta$, $v = 3\sin\beta$,

gdzie $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Wówczas $xv + yz = 6\sin(\alpha + \beta)$.

Tak więc

$$xv + yz \geq 6 \Leftrightarrow 6\sin(\alpha+\beta) \geq 6 \Leftrightarrow \sin(\alpha+\beta) \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha+\beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbf{Z}.$$

Zatem $\beta = \left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2k\pi$.

Mamy więc

$$x = 2\cos\alpha$$

$$z = 3\cos\beta = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi\right) = 3\sin\alpha$$

Stosując znaną nierówność

(*) $ab + cd \leq \sqrt{a^2 + c^2}\cdot\sqrt{b^2 + d^2}$, prawdziwą dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, możemy szacować:

$$x + z = 2\cos\alpha + 3\sin\alpha \leq \sqrt{2^2 + 3^2}\cdot\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \sqrt{13}$$

przy czym

$$x + z = \sqrt{13} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

(gdyż w nierówności (*) równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a, b, c, d spełniają warunek $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$).

Tak więc $x + z = \sqrt{13} \Leftrightarrow 2\sin\alpha = 3\cos\alpha$. Stąd

$4\sin^2\alpha = 9\cos^2\alpha$, czyli $\sin\alpha \pm \dfrac{3}{\sqrt{13}}$ i $\cos = \pm\dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

Wracając do podstawień otrzymujemy, że tylko dla czwórki liczb:

$$x = \frac{4}{\sqrt{13}}, \quad y = \frac{6}{\sqrt{13}}, \quad z = \frac{9}{\sqrt{13}}, \quad v = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

spełniającej podany układ, suma $x + z$ osiąga wartość największą. ■

Zadanie 5. Niech $f(x, y) = \dfrac{|x - y|}{\sqrt{1 + x^2}\cdot\sqrt{1 + y^2}}$.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$f(a, c) \leq f(a, b) + f(b, c).$$

Rozwiązanie:

❑ Niech $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\alpha$, $c = \operatorname{tg}\gamma$, gdzie $\alpha, \beta, \gamma \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Wówczas

$$f(a, b) = \frac{|\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta|}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{\left|\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}\right|}{\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\beta}}} =$$

$$= \left| \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} \right| \cdot \left|\cos\alpha \cdot \cos\beta\right| = \left|\sin(\alpha - \beta)\right|.$$

Analogicznie

$$f(b,c) = \left|\sin(\beta - \gamma)\right|, \qquad f(a,c) = \left|\sin(\alpha - \gamma)\right|.$$

Korzystając ze znanych własności funkcji $x \to |x|$ oraz z ograniczoności przez 1 funkcji $x \to |\cos x|$ otrzymujemy:

$$f(a,c) = \left|\sin(\alpha - \gamma)\right| = \left|\sin((\alpha - \beta) + (\beta - \gamma))\right| =$$

$$= \left|\sin(\alpha - \beta)\cdot\cos(\beta - \gamma) + \sin(\beta - \gamma)\cdot\cos(\alpha - \beta)\right| \le$$

$$\le \left|\sin(\alpha - \beta)\cdot\cos(\beta - \gamma)\right| + \left|\sin(\beta - \gamma)\cdot\cos(\alpha - \beta)\right| =$$

$$= \left|\sin(\alpha - \beta)\right|\cdot\left|\cos(\beta - \gamma)\right| + \left|\sin(\beta - \gamma)\right|\cdot\left|\cos(\alpha - \beta)\right| \le$$

$$\le \left|\sin(\alpha - \beta)\right| + \left|\sin(\beta - \gamma)\right| = f(a,b) + f(b,c). \quad \blacksquare$$

Zadania 6. Udowodnij, że jeżeli

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1 \quad \text{oraz} \quad xu + yv = 0, \quad \text{to}$$

$$x^2 + u^2 = y^2 + v^2 = 1 \quad \text{oraz} \quad xy + uv = 0.$$

Rozwiązanie:

❑ Z podanych założeń wynika, że

$$|x| \le 1, \qquad |y| \le 1, \qquad |u| \le 1, \qquad |v| \le 1.$$

Zatem, niech $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, $u = \cos\beta$, $v = \sin\beta$. Wówczas

$$xu + yv = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}, \quad \text{gdzie} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Możemy więc obliczać :

$$x^2 + u^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\left(\alpha + (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\alpha + \left((-1)^{k+1}\cdot\sin\alpha\right)^2 =$$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

W podobny sposób otrzymamy, że $y^2 + v^2 = 1$.

I na koniec

$$xy + uv = \cos\alpha\cdot\sin\alpha + \cos\left(\alpha + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\alpha - (2k+1)\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \cos\alpha\cdot\sin\alpha - (-1)^{k+1}\cdot\sin\alpha\cdot(-1)^{k+1}\cdot\cos\alpha = 0 \quad \blacksquare$$

Zadanie 7. Ciąg (x_n) jest określony następująco:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + x_n}{2}}, \quad n \ge 1.$$

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$.

Rozwiązanie :

❑ Widzimy, że jeżeli $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, to

$$x_1 = \cos\alpha$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Zakładając, że $x_n = \cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}$, otrzymujemy:

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + x_n}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2^n}.$$

Na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy, że

$$x_n = \cos\frac{\alpha}{2^{n-1}} \qquad \text{dla każdego naturalnego } n.$$

Wobec tego

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = \cos\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^2} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{\alpha}{2^{n-1}} =$$

$$= \cos\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{2^{n-1} \cdot \sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{\frac{\alpha}{2^{n-1}}}} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

i widzimy, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. ■

Zadanie 8. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunki:

(1) $|x| \neq 1, \quad |y| \neq 1, \quad |z| \neq 1,$

(2) $x + y + z = xyz.$

Udowodnij, że

$$\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} = \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2z}{1-z^2}.$$

Rozwiązanie.

❑ Podstawmy: $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$, $z = \operatorname{tg}\gamma$, gdzie $\alpha, \beta, \gamma \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Wówczas warunek (2) przyjmuje postać

(3) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma.$

Oczywiście, musi być $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \neq 1$ i $\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma \neq 1$ i $\operatorname{tg}\gamma \cdot tg\alpha \neq 1$. W przeciwnym wypadku, gdyby np. było $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1$, to otrzymalibyśmy równości

$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 0$ i $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1$, skąd wynika, że

$\operatorname{tg}^2\alpha = -1$ - co jest niemożliwe.

Zatem warunek trzeci jest równoważny kolejno równościom:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

Stąd wnioskujemy, że $\alpha + \beta + \gamma = n \cdot \pi$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$.

Wobec tego $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2n\pi$, skąd

$\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}2\beta + \operatorname{tg}2\gamma = \operatorname{tg}2\alpha \cdot \operatorname{tg}2\beta \cdot \operatorname{tg}2\gamma.$

Z równości tej w oczywisty sposób otrzymujemy tezę zadania. ■

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

1. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych równania:

(a) $\sqrt{\frac{1-|x|}{2}} = 2x^2 - 1.$ Odp. $\left\{-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right\}.$

(b) $\left|2x - \sqrt{1-4x^2}\right| = \sqrt{2}\left(8x^2 - 1\right).$ Odp. $\left\{-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right\}.$

(c) $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1.$ Odp. $\{2\}.$

2. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ xy + yz + zx = 1. \end{cases}$$

Odp. $\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -1\right)\right\}.$

3. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunki:

(1) $|x| \neq \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad |y| \neq \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad |z| \neq \frac{1}{\sqrt{3}},$

(2) $x + y + z = xyz.$

Udowodnij, że

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} + \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \cdot \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \cdot \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}.$$

4. Ciąg (x_n) jest określony następująco:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \sqrt{2^{2n+1} - 2^{2n+1}\sqrt{4^n - x_n^2}} \quad \text{dla} \quad n \geq 1.$$

Wykaż, że istnieje $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ i oblicz ją.

Odp. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \pi.$

5. Ile rozwiązań posiada w przedziale $< 0, 1 >$ równanie

$$8x\left(2x^2 - 1\right)\left(8x^4 - 8x^2 + 1\right) = 1?$$

Odp. Trzy.

6. Ciąg (x_n) jest określony następująco

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x_n^2}}{2}} \quad \text{dla} \quad n \geq 1.$$

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n < 1,03.$$

XIV. ILOCZYN SKALARNY WEKTORÓW W ZADANIACH NIE TYLKO GEOMETRYCZNYCH

Znane są nam dobrze zastosowania iloczynu skalarnego wektorów do pewnych zagadnień miarowych czy też incydencji (jak prostopadłość prostych). Używając iloczynu skalarnego otrzymujemy np. zwięzły i przejrzysty dowód twierdzenia cosinusów albo twierdzenia o równoległoboku, które głosi, że "czworokąt wypukły jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy sumy kwadratów długości przekątnych i kwadratów długości wszystkich boków są równe.

A warto wiedzieć, że iloczyn skalarny czyni bardzo przejrzystymi i prostymi dowody wielu, wcale niełatwych, nierówności. Jak elegancko można przy jego użyciu rozwiązać równanie czy układ równań.

W niniejszym rozdziale zajmiemy się głównie właśnie tymi zastosowaniami iloczynu skalarnego. Zanim jednak przystąpimy do zadań, przypomnijmy, że:

Iloczynem skalarnym wektorów niezerowych u i v nazywamy liczbę równą $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \measuredangle (\vec{u}, \vec{v})$ i piszemy

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \measuredangle (\vec{u}, \vec{v}).$$

Jeżeli $\vec{u} = \vec{0}$ lub $\vec{v} = \vec{0}$, to $\vec{u} \circ \vec{v} = 0.$

A oto własności tego iloczynu.

Dla dowolnych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$:

1° $\quad \vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u} \quad$ (przemienność), 2° $\left(k\vec{u}\right)\circ\vec{v} = k\left(\vec{u}\circ\vec{v}\right)$, gdzie $k\in\mathbf{R}$ (łączność mieszana),

3° $\vec{u}\circ\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}\circ\vec{v}+\vec{u}\circ\vec{w}$

(rozdzielność mnożenia względem dodawania),

4° $\vec{u}^{\,2} = \left|\vec{u}\right|^2$ (kwadrat skalarny),

5° $\vec{u}\circ\vec{v}\le\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|$ (nierówność Schwarza),

$\vec{u}\circ\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right| \Leftrightarrow \vec{u}\parallel\vec{v}$,

6° Jeżeli $\vec{u}\ne\vec{0}$ i $\vec{v}\ne\vec{0}$, to:

$\vec{u}\circ\vec{v}>0 \Leftrightarrow \measuredangle(\vec{u},\vec{v})\in(0^\circ,90^\circ)$,

$\vec{u}\circ\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$,

$\vec{u}\circ\vec{v}<0 \Leftrightarrow \measuredangle(\vec{u},\vec{v})\in(90^\circ,180^\circ)$.

7° Jeżeli $\vec{u}=\left[a_1,a_2\right]$, $\vec{v}=\left[b_1,b_2\right]$, to

$\vec{u}\circ\vec{v}=a_1b_1+a_2b_2$,

i ogólniej, jeżeli $\vec{u}=\left[a_1,a_2,\ldots,a_n\right]$, $\vec{v}=\left[b_1,b_2,\ldots,b_n\right]$, to

$\vec{u}\circ\vec{v}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$, a nierówność (5°) przyjmuje znaną postać, tj.

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$

Pora na zadania

Zadanie 1. Udowodnij, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta ABC, to

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2},\tag{1}$$

przy czym równość zachodzi tutaj wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest równoboczny.

Rozwiązanie:

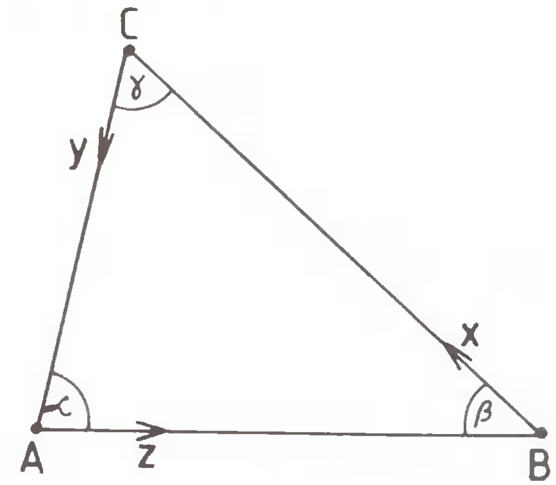
☐ Niech X, Y, Z będą takimi punktami odpowiednio na półprostych $BC^{\to}$, $CA^{\to}$ i $AB^{\to}$, że

$\left|\vec{AZ}\right|=\left|\vec{BX}\right|=\left|\vec{CY}\right|=1$. Wówczas widzimy, że

$\measuredangle\left(\vec{AZ},\vec{BX}\right)=180^\circ-\beta$,

$\measuredangle\left(\vec{BX},\vec{CY}\right)=180^\circ-\gamma$,

$\measuredangle\left(\vec{CY},\vec{AZ}\right)=180^\circ-\alpha$.



Zachodzi oczywiście nierówność :

$\left|\vec{AZ}+\vec{BX}+\vec{CY}\right|^2\ge0$, czyli nierówność

$$\left|\vec{AZ}\right|^2+\left|\vec{BX}\right|^2+\left|\vec{CY}\right|^2+2\cdot\left(\vec{AZ}\circ\vec{BX}+\vec{BX}\circ\vec{CY}+\vec{CY}\circ\vec{AZ}\right)\ge0,$$

z której natychmiast wynika nierówność zadania. Równość mamy tutaj, oczywiście, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\vec{AZ}+\vec{BX}+\vec{CY}=\vec{0}.$$

Wykażemy, że suma trzech wektorów o długości 1 jest wektorem zerowym wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa z tych wektorów tworzą kąt 120°.

Istotnie, niech $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ będą wektorami o długości 1 takimi, że

$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$$

Stąd mamy kolejno:

$$\vec{u}+\vec{v}=-\vec{w},$$

$$\vec{u}^{\,2}+2\,\vec{u}\circ\vec{v}+\vec{v}^{\,2}=\vec{w}^{\,2},$$

$$\vec{u}\circ\vec{v}=-\frac{1}{2},$$

$$\measuredangle(\vec{u},\vec{v})=120^\circ.$$

Analogicznie dowodzimy, że $\measuredangle(\vec{v},\vec{w})=\measuredangle(\vec{w},\vec{u})=120^\circ$.

Na odwrót, jeśli $\measuredangle(\vec{v},\vec{w})=\measuredangle(\vec{w},\vec{u})=\measuredangle(\vec{u},\vec{v})=120^\circ$

oraz $|\vec{u}|=|\vec{v}|=|\vec{w}|=1,$

to $\vec{u}\circ\vec{v}=\vec{v}\circ\vec{w}=\vec{w}\circ\vec{u}=-\frac{1}{2}.$

I wówczas

$$\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right)^2=\vec{u}^{\,2}+\vec{v}^{\,2}+\vec{w}^{\,2}+2\cdot\left(\vec{u}\circ\vec{v}+\vec{v}\circ\vec{w}+\vec{w}\circ\vec{u}\right)=0$$

skąd wynika, że $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$.

Zatem, w naszej nierówności, równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy,

gdy $180^\circ-\beta=180^\circ-\gamma=180^\circ-\alpha=120^\circ$,

a więc, gdy trójkąt ABC jest równoboczny. ■

Zadanie 2. Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta ABC, to

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{3}{2},$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest równoboczny.

Rozwiązanie:

☐ Niech O będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC i niech X, Y, Z będą takimi punktami odpowiednio na półprostych $OA^{\to}$, $OB^{\to}$ i $OC^{\to}$, że

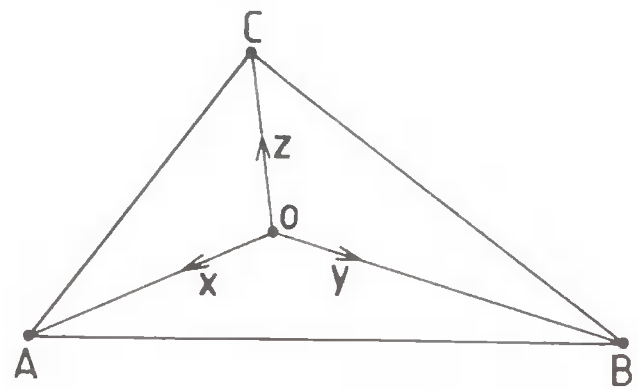
$$|\vec{OX}|=|\vec{OY}|=|\vec{OZ}|=1.$$

Z łatwością stwierdzisz, że

$$\measuredangle\left(\vec{OX},\vec{OY}\right)=90^\circ+\frac{\gamma}{2},$$

$$\measuredangle\left(\vec{OY},\vec{OZ}\right)=90^\circ+\frac{\alpha}{2},$$

$$\measuredangle\left(\vec{OZ},\vec{OX}\right)=90^\circ+\frac{\beta}{2}.$$



I znowu wychodzimy z nierówności

$$\left|\vec{OX}+\vec{OY}+\vec{OZ}\right|^2\ge 0.$$

Z niej wynikają kolejno nierówności

$$|\vec{OX}|^2+|\vec{OY}|^2+|\vec{OZ}|^2+2\cdot\left(\vec{OX}\circ\vec{OY}+\vec{OY}\circ\vec{OZ}+\vec{OZ}\circ\vec{OX}\right)\ge 0,$$

$$3+2\cdot\left(\cos\left(90^\circ+\frac{\gamma}{2}\right)+\cos\left(90^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(90^\circ+\frac{\beta}{2}\right)\right)\ge 0,$$

$$3-2\cdot\left(\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)\ge 0,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{3}{2},$$

a więc i nierówność, którą mieliśmy udowodnić. Równość ma tutaj oczywiście miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = \beta = \gamma = 60°$. ■

Zadanie 3. Udowodnij, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta ABC,

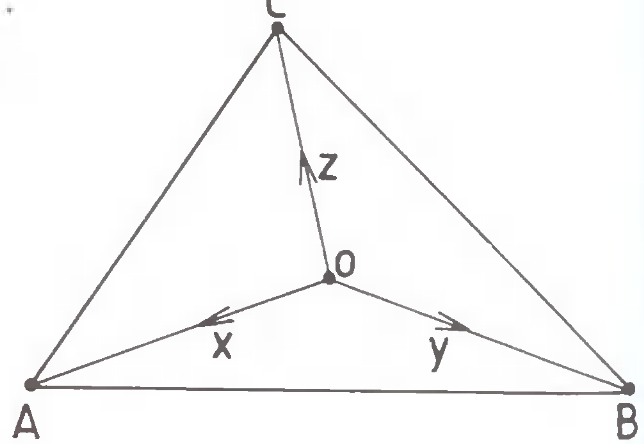
to $$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geq -\frac{3}{2},$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt jest równoboczny.

Rozwiązanie:

❑ Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC i niech X, Y, Z będą punktami odpowiednio na półprostych $OA^{\rightarrow}$, $OB^{\rightarrow}$ i $OC^{\rightarrow}$ takimi, że

$$|\vec{OX}| = |\vec{OY}| = |\vec{OZ}| = 1.$$



I tym razem bez trudu stwierdzamy, że

$$\measuredangle\left(\vec{OX}, \vec{OY}\right) = 2\gamma,$$

$$\measuredangle\left(\vec{OY}, \vec{OZ}\right) = 2\alpha,$$

$$\measuredangle\left(\vec{OZ}, \vec{OX}\right) = 2\beta.$$

Przepisując równoważnie oczywistą nierówność

$$|\vec{OX} + \vec{OY} + \vec{OZ}|^2 \geq 0,$$

otrzymujemy kolejno nierówności:

$$|\vec{OX}|^2 + |\vec{OY}|^2 + |\vec{OZ}|^2 + 2\cdot\left(\vec{OX}\circ\vec{OY} + \vec{OY}\circ\vec{OZ} + \vec{OZ}\circ\vec{OX}\right) \geq 0,$$

$$3 + 2\cdot(\cos 2\gamma + \cos 2\alpha + \cos 2\beta) \geq 0,$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geq -\frac{3}{2},$$

a więc nierówność zadania.

Równość tutaj zachodzi oczywiście wtedy i tylko wtedy, gdy $2\alpha = 2\beta = 2\gamma = 120°$, czyli gdy $\alpha = \beta = \gamma = 60°$. ■

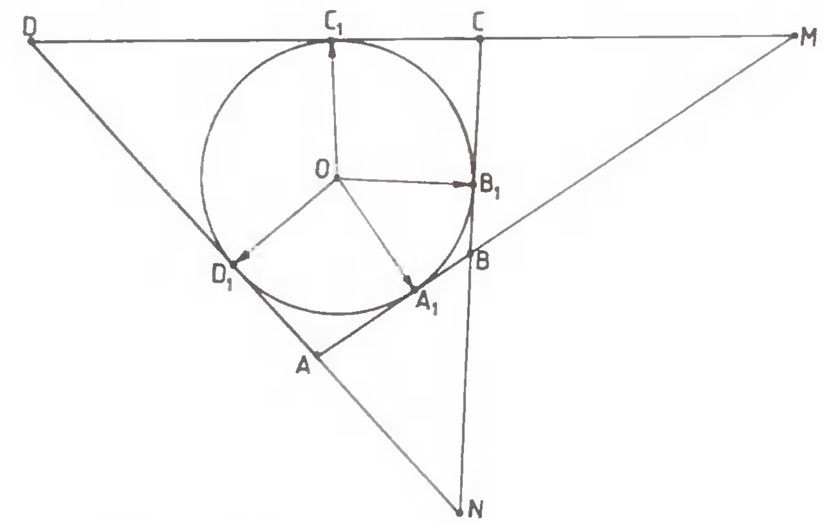
Zadanie 4. Na okręgu opisano czworokąt $ABCD$. Przeciwległe boki AB i CD oraz BC i AD tego czworokąta leżą na prostych przecinających się w punktach odpowiednio M oraz N. Udowodnij, że $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D + \cos M + \cos N \leq 2$.

Rozwiązanie:

❑ Jeżeli O jest środkiem danego okręgu, a A_1, B_1, C_1, D_1 punktami styczności jego z bokami czworokąta, to

$$\vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1} + \vec{OD_1} = \vec{s},$$

przy czym $$|\vec{OA_1}| = |\vec{OB_1}| = |\vec{OC_1}| = |\vec{OD_1}| = r.$$



Mamy $\vec{s}^{\,2} = |\vec{s}|^2 \geq 0$, czyli

$$\left(\vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1} + \vec{OD_1}\right)^2 \geq 0.$$

Stąd wynika, iż

$$4r^2 + 2r^2\Big(\cos(180^\circ - A) + \cos(180^\circ - B) + \cos(180^\circ - C) +$$
$$+ \cos(180^\circ - D) + \cos(180^\circ - M) + \cos(180^\circ - N)\Big) \geq 0,$$

czyli

$$4r^2 - 2r^2(\cos A + \cos B + \cos C + \cos D + \cos M + \cos N) \geq 0,$$

a więc nierówność zadania.

Skorzystaliśmy tutaj z tego, że każdy z czworokątów: AA_1OD_1, A_1BB_1O, D_1NB_1O, A_1MC_1O, B_1CC_1O, C_1DD_1O można wpisać w okrąg.

Równość w powyższej nierówności ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\vec{s} = \vec{v}.$$

Otóż $\vec{s} = \vec{v}$ wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt $ABCD$ jest rombem. Istotnie, niech $\vec{s} = \vec{v}$. Wówczas $\vec{OA_1} + \vec{OB_1} = -\left(\vec{OC_1} + \vec{OD_1}\right)$, skąd wynika, że $\vec{OP} = -\vec{OQ}$, gdzie P i Q są środkami odcinków A_1B_1 i C_1D_1.

Zatem $PQ \perp A_1B_1$ i $PQ \perp C_1D_1$, skąd otrzymujemy, że $A_1B_1 \parallel C_1D_1$. Analogicznie dowodzimy, że $B_1C_1 \parallel D_1A_1$. Wobec tego czworokąt $A_1B_1C_1D_1$ jest prostokątem wpisanym w dany okrąg, a czworokąt $ABCD$ jest rombem. ■

Udowodnienie tego, że jeżeli czworokąt $ABCD$ jest rombem, to $\vec{s} = \vec{v}$, pozostawiamy jako łatwe zadanie do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 5. Wykaż, że jeżeli dla liczb a, b, c z przedziału $\langle -\frac{1}{2}, +\infty)$ zachodzi równość $a + b + c = 1$, to

$$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq 15.$$

Rozwiązanie:

❑ Rozważmy wektory

$$\vec{u} = \left[\sqrt{2a+1}, \sqrt{2b+1}, \sqrt{2c+1}\right], \quad \vec{v} = [1, 1, 1].$$

Wówczas stosując nierówność $\vec{u} \circ \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ otrzymujemy, że

$$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} = \sqrt{2a+1}\cdot 1 + \sqrt{2b+1}\cdot 1 + \sqrt{2c+1}\cdot 1 =$$
$$= \vec{u} \circ \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = \sqrt{\left(\sqrt{2a+1}\right)^2 + \left(\sqrt{2b+1}\right)^2 + \left(\sqrt{2c+1}\right)^2} \times$$
$$\times \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2(a+b+c)+3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15}.$$ ■

Zadanie 6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$a + b + c \geq \sqrt[4]{a^2bc} + \sqrt[4]{ab^2c} + \sqrt[4]{abc^2}.$$

Rozwiązanie:

❑ Zastosujmy nierówność $\vec{u} \circ \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, przyjmując

$$\vec{u} = \left[\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}\right], \quad \vec{v} = \left[\sqrt[4]{bc}, \sqrt[4]{ac}, \sqrt[4]{ab}\right].$$

Otrzymamy:

$$(*) \quad \sqrt[4]{a^2bc} + \sqrt[4]{ab^2c} + \sqrt[4]{abc^2} \leq \sqrt{a+b+c} \cdot \sqrt{\sqrt{bc} + \sqrt{ac} + \sqrt{ab}}.$$

Ta sama nierówność dla wektorów

$$\vec{u_1} = \left[\sqrt{b}, \sqrt{c}, \sqrt{a}\right], \quad \vec{v_1} = \left[\sqrt{c}, \sqrt{a}, \sqrt{b}\right]$$

pozwala uzyskać:

$$(**)\quad \sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab} \le \sqrt{\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{a}\right)^2}\ \times$$

$$\times\sqrt{\left(\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2} = a+b+c.$$

Z (*) i (**) wynika już dowodzona nierówność. ■

Zadanie 7. Rozwiąż równanie

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x+4y-1}{\sqrt{17}}$$

w liczbach rzeczywistych.

Rozwiązanie:

❑ Przepiszmy dane równanie równoważnie

$$\sqrt{17}\cdot\sqrt{x^2+y^2} = x+4y-1.$$

Rozważmy teraz wektory

$$\vec{x} = [\,x,\ y\,], \qquad \vec{y} = [\,1,\ 4\,].$$

Wektory te mają długości:

$|\vec{x}| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad |\vec{y}| = \sqrt{17}$, a ich iloczyn skalarny

$$\vec{x}\circ\vec{y} = x+4y.$$

A ponieważ

$\vec{x}\circ\vec{y} \le |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$, czyli tutaj

$x+4y \le \sqrt{17}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$ dla dowolnych

$x, y \in \mathbf{R}$, i jednocześnie zawsze jest

$x+4y-1 < x+4y$, przeto dane równanie nie

posiada rozwiązań w liczbach rzeczywistych. ■

Zadanie 8. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 36x^2+9y^4+4z^6 = 1 \\ x+y^2+z^3 = \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Rozwiązanie:

❑ Rozważmy wektory:

$$\vec{x} = \left[\,6x,\ 3y^2,\ 2z^3\right], \qquad \vec{y} = \left[\frac{1}{6},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right].$$

i obliczmy ich długości oraz iloczyn skalarny:

$$|\vec{x}| = \sqrt{36x^2+9y^4+4z^6}, \qquad |\vec{y}| = \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}},$$

$$\vec{x}\circ\vec{y} = x+y^2+z^3.$$

Otrzymamy:

$$x+y^2+z^3 \le \sqrt{36x^2+9y^4+4z^6}\cdot\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}} =$$

$$= 1\cdot\frac{\sqrt{14}}{6} < \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Zatem nasz układ nie posiada rozwiązań. ■

Zadanie 9. Wykaż nierówność

$$\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z+\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z \le 1.$$

Rozwiązanie:

❑ Tym razem do nierówności $\vec{u}\circ\vec{v} \le |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ podstawmy wektory:

$$\vec{u} = [\,\sin x\cdot\sin y,\ \cos x\cdot\cos y\,],$$

$$\vec{v} = [\sin z,\ \cos z].$$

Otrzymamy

$$\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z + \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z = \vec{u} \circ \vec{v} \le$$

$$\le \sqrt{\sin^2 x \cdot \sin^2 y + \cos^2 x \cdot \cos^2 y} \cdot \sqrt{\sin^2 z + \cos^2 z} \le$$

$$\le \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1, \qquad \text{gdyż}$$

$\sin^2 y \le 1$, $\cos^2 y \le 1$ i $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. ■

Zadanie 10. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = 3 \\ x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = 3 \\ x^{2n+2} + y^{2n+2} + z^{2n+2} = 3 \end{cases}, \qquad \text{gdzie } n \in \mathbb{N}.$$

Rozwiązanie:

❑ Niech trójka (x, y, z) liczb rzeczywistych spełnia powyższy układ równań. Rozważmy wektory:

$$\vec{u} = [x^n,\ y^n,\ z^n], \qquad \vec{v} = [x^{n+1},\ y^{n+1},\ z^{n+1}].$$

Widzimy wówczas, że

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = \sqrt{3} \qquad \text{oraz}$$

$$\vec{u} \circ \vec{v} = 3 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|.$$

Stąd wynika, że $\measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) = 0°$.

Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają równe długości oraz tworzą kąt o mierze $0°$, są więc równe. Wobec tego ich odpowiednie współrzędne są równe, czyli

$$x^n = x^{n+1}$$
$$y^n = y^{n+1}. \qquad \text{Stąd} \quad x = y = z = 0 \quad \text{lub} \quad x = y = z = 1.$$
$$z^n = z^{n+1}$$

Tylko trójka $(1, 1, 1)$ spełnia podany układ równań. ■

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Wykaż, że jeżeli kąt ACB trójkąta ABC jest rozwarty, to

$$\cos 2a + \cos 2B - \cos 2C > 1.$$

Zadanie 2. Wykaż, że dla dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Zadanie 3. Rozwiąż równanie

$$x\sqrt{1 + x} + \sqrt{3 - x} = 2\sqrt{x^2 + 1}.$$

Zadanie 4. Wyznacz największą wartość funkcji

(1) $y = \sqrt{\frac{1}{2} - \cos 2x} + \sqrt{\frac{1}{2} + \cos 2x}$. Odp. $\sqrt{2}$.

(2) $y = \sqrt{x} + 4\sqrt{1 - \frac{x}{2}}$. Odp. $3\sqrt{2}$.

Zadanie 5. Udowodnij, że jeżeli

$$\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 + y} = 2\sqrt{1 + a}, \qquad \text{to} \qquad x + y \ge 2a.$$

Zadanie 6. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 \\ \log_x y^2 = z. \end{cases}$$

Odp. $(2, 2, 2)$.

Zadanie 7. Udowodnij, że w każdym czworokącie o bokach a_1, a_2, a_3, a_4 zachodzi nierówność

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > \frac{1}{3} a_4^2.$$

Zadanie 8. Wykaż, że jeżeli w czworościanie $ABCD$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ są miarami jego kątów dwuściennych o krawędziach odpowiednio $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}, \overline{AC}, \overline{BD}$, to

$$\sum_{i=1}^{6} \cos \alpha_i \le 2.$$

Zadanie 9. Liczby nieujemne $x_1, x_2, \ldots x_n$ spełniają warunek $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Udowodnij, że

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i(1 - x_i)} \le \sqrt{n - 1}.$$

Zadanie 10. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3. \end{cases}$$

Zadanie 11. Wyznacz największa wartość funkcji:

1° $f(x) = \sqrt{x + 7} + \sqrt{11 - x}$. Odp. 6.

2° $g(x) = \sqrt{4\cos^2 x + 1} + \sqrt{4\sin^2 x + 3}$. Odp. 4.

Zadanie 12. Wykaż nierówność

$$\log_{30}^2 2 + \log_{30}^2 3 + \log_{30}^2 5 > \frac{1}{3}.$$

Zadanie 13. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(a^4 + b^4\right) \ge \left(a^3 + b^3\right)^2.$$

Zadanie 14. Wykaż, że układ równań

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 15 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16 \end{cases}$$ nie posiada rozwiązań.

XV. JEDNA WŁASNOŚĆ FUNKCJI A WIELE ZADAŃ

Wiadomo, że jeżeli funkcja $f: < a, b > \to R$ jest monotoniczna na tym przedziale, to swoje wartości najmniejszą i największą, osiąga na krańcach tego przedziału.

Oczywiste jest także to, że jeżeli funkcja ta nie jest monotoniczna, a wewnątrz przedziału $< a, b >$ osiąga swoje ekstremum, to na którymś z krańców tego przedziału osiąga wartość największą (najmniejszą), gdy tym ekstremum jest minimum (maksimum).

Powyższa własność funkcji znajduje zastosowania w zadaniach na dowodzenie nierówności.

Popatrzmy!

Zadanie 1. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są z przedziału $< 0, 1 >$, to

$$a + b + c \le ab + bc + ca + 1.$$

Rozwiązanie:

❑ Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = x + b + c - bx - bc - cx = (1 - b - c)x + b + c - bc,$$

$x \in < 0, 1 >$.

Funkcja ta jest monotoniczna w przedziale $< 0, 1 >$. Wobec tego największą wartość przyjmuje na jednym z krańców tego przedziału .

A ponieważ

$$f(0) = 1 + (1 - b)(c - 1) \le 1, \quad \text{oraz}$$

$$f(1) = 1 - bc \le 1, \quad \text{więc}$$

$$f(x) \le 1 \quad \text{dla każdego} \quad x \in \langle 0,1 \rangle.$$

W szczególności $f(a) \le 1$, a stąd mamy już nierówność zadania.

■

Zadanie 2. Wykaż, że jeżeli dla każdego $x \in \langle -1,1 \rangle$ $\left| ax^2 + bx + c \right| \le 1$, to dla każdego $x \in \langle -1,1 \rangle$

$$\left| cx^2 - bx + a \right| \le 2.$$

Rozwiązanie:

❑ Podstawiając $x = 0$ do nierówności $\left| ax^2 + bx + c \right| \le 1$, spełnionej z założenia dla każdego $x \in \langle -1,1 \rangle$, otrzymujemy

(*) $$|c| \le 1.$$

Ponadto mamy

$$\left| cx^2 - bx + a \right| = \left| c\left(x^2 - 1\right) + (c - bx + a) \right| \le$$

$$\le |c|\left(1 - x^2\right) + \left| c - bx + a \right| \le |c| + \left| c - bx + a \right|,$$

więc wystarczy zauważyć, że funkcja $f(x) = \left| c - bx + a \right|$ osiąga wartość największą w jednym z końców przedziału $\langle -1,1 \rangle$.

Zatem

$$f(x) \le \max\{f(-1), f(1)\} = \max\{|c + b + a|, |c - b + a|\} \le 1$$

i ostatecznie

$$\left| cx^2 - bx + a \right| \le 1 + 1 = 2, \quad |x| \le 1$$ ■

Zadanie 3. Wykaż, że jeżeli liczby a, b, c są z przedziału $\langle 0,1 \rangle$, to

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \le 1$$

Rozwiązanie:

❑ Rozważmy w przedziale $\langle 0,1 \rangle$ funkcję

$$f(x) = \frac{x}{b+c+1} + \frac{b}{c+x+1} + \frac{c}{x+b+1} + (1-x)(1-b)(1-c).$$

Jej pochodna $f'(x)$ jest postaci

$$f'(x) = d - \frac{b}{(c+x+1)^2} - \frac{c}{(x+b+1)^2},$$

gdzie d jest pewną stałą.

Widzimy zatem, że funkcja $f'(x)$ jest rosnąca w przedziale $\langle 0,1 \rangle$. Stąd wynika, że funkcja $f(x)$ jest rosnąca w tym przedziale, więc osiąga wartość największą w punkcie 1.

W rzeczywistości pokazaliśmy, że $f(a)$ przyjmuje wartość największą dla $a = 1$. Analogicznie pokażemy, że (przy $a = 1$) $f(b)$ osiąga wartość największą dla $b = 1$ i na koniec, że przy $a = b = 1$ $f(c)$ osiąga wartość największą dla $c = 1$.

Pozostaje tylko zauważyć, że lewa strona dowodzonej nierówności jest funkcją symetryczną trzech zmiennych a, b, c i dla trójki $(1,1,1)$ przyjmuje wartość 1. Kończy to dowód nierówności zadania. ■

Zadanie 4. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są z przedziału $\langle 0,1 \rangle$, to

$$a^2 + b^2 + c^2 \le a^2b + b^2c + c^2a + 1.$$

Rozwiązanie:

❑ Rozważmy w przedziale $\langle 0,1 \rangle$ funkcję

$$f(x) = x^2(1-b) - c^2x + b^2 + c^2 - b^2c - 1.$$

Jej pochodna

$$f'(x) = 2(1-b)x - c^2.$$

Jeżeli $b \ne 0$, to $f'(x)$ jest funkcją rosnącą. Wobec tego również $f(x)$ rośnie w przedziale $\langle 0,1 \rangle$, więc

$$\max_{<0,1>} f(x) = f(1) = 1 - b - c^2 + b^2 + c^2 - b^2c - 1 =$$

$$= b(b-1) - b^2c \le 0.$$

Stąd

$f(x) \le 0$ dla każdego $x \in <0,1>$, i dlatego $f(a) \le 0$.

Jeżeli $b = 1$, dowodzimy analogicznie. ∎

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c, d, e należą do przedziału $<p, q>$, gdzie $0 < p < q$, to

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \le 25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2.$$

2. Wykaż, że jeżeli liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są z przedziału $<a, b>$, gdzie $0 < a < b$, to

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \le \frac{(a+b)^2}{4ab} \cdot n^2.$$

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z przedziału $<0,1>$ zachodzi nierówność

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n + 1)^2 \ge 4\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right).$$

4. Niech $x_i \in <0,1>$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Udowodnij, że suma

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_1x_2 - x_2x_3 - \ldots - x_{n-1}x_n - x_nx_1$$

nie przekracza:

(a) 2 dla $n = 4$

(b) $\left[\frac{n}{2}\right]$ dla $n \ge 3$.

5. Wykaż, że jeżeli liczby x, y, z są z przedziału $<0,1>$, to

$$2\left(x^3 + y^3 + z^3\right) - \left(x^2y + y^2z + z^2x\right) \le 3.$$

6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb a, b, c z przedziału $<0,1>$ prawdziwa jest nierówność

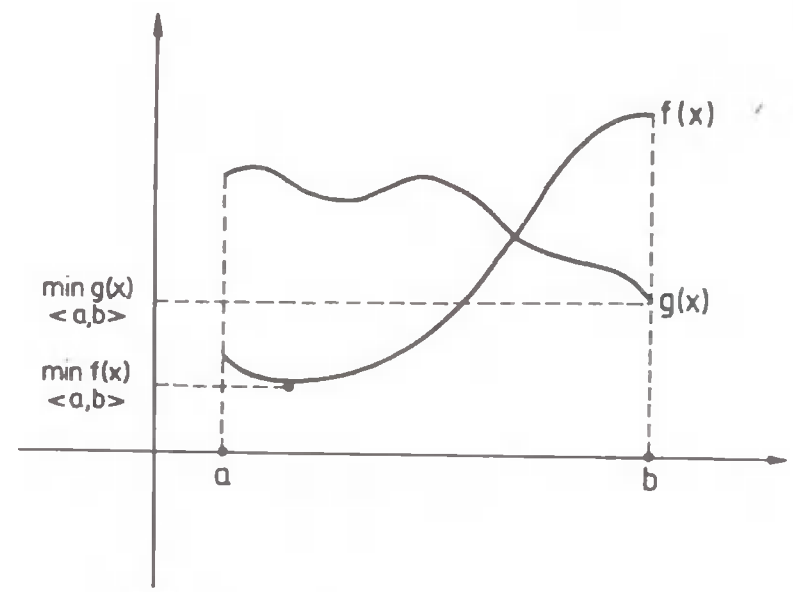
$$\sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-c)(1-a)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} \le 1 + \sqrt{abc}.$$

7. Udowodnij, że dla dowolnych liczb x, y, z z przedziału $<0,1>$ zachodzi nierówność

$$3\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right) - 2xyz(x+y+z) \le 3.$$

XVI. SUMA MINIMÓW I MINIMUM SUMY

Rozważmy dwie funkcje f i g, określone na przedziale $< a, b >$ oraz przyjmujące w różnych punktach tego przedziału swoje wartości najmniejsze (będziemy oznaczać je odpowiednio: $\min\limits_{<a,b>} f$ i $\min\limits_{<a,b>} g$).



Nietrudno zauważyć, że zachodzi nierówność:

(*) $$\min_{<a,b>} f(x) + \min_{<a,b>} g(x) \le \min_{<a,b>}\big(f(x) + g(x)\big).$$

Istotnie, niech $\min\limits_{<a,b>}\big(f(x) + g(x)\big) = f(x_0) + g(x_0)$, dla pewenego $x_0 \in < a, b >$. Wówczas, oczywiście

$$f(x_0) \ge \min_{<a,b>} f(x) \quad \text{i} \quad g(x_0) \ge \min_{<a,b>} g(x).$$

Stąd od razu wynika nierówność (*). W nierówności tej znak równości występuje, naturalnie, wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje f i g osiągają swe wartości najmniejsze w tym samym punkcie.

Gdy rozważać będziemy n funkcji $f_i\colon \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz ich wartości najmniejsze w tym przedziale, to przez łatwą indukcję otrzymamy dla nich nierówność

$$(**) \qquad \sum_{k=1}^{n} \min_{\langle a,b\rangle} f_k(x) \le \min_{\langle a,b\rangle}\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right),$$

a w niej równość dokładnie wtedy, gdy swe wartości najmniejsze funkcje f_k osiągną w tym samym punkcie.

Gdybyśmy wzięli pod uwagę funkcje f i g określone na przedziale $\langle a, b\rangle$ oraz ich wartości największe w tym przedziale (oznaczone odpowiednio: $\max\limits_{\langle a,b\rangle} f(x)$ i $\max\limits_{\langle a,b\rangle} g(x)$), to bez trudu otrzymamy nierówność

$$(***) \qquad \max_{\langle a,b\rangle} f(x) + \max_{\langle a,b\rangle} g(x) \ge \max_{\langle a,b\rangle}\big(f(x) + g(x)\big),$$

zaś dla n funkcji $f_k\colon \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ i ich wartości największych - nierówność

$$(****) \qquad \sum_{k=1}^{n} \max_{\langle a,b\rangle} f_k(x) \ge \max_{\langle a,b\rangle}\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right).$$

1. Minima funkcji kwadratowych i nierówności kwadratowe

Zacznijmy od funkcji kwadratowej postaci

$$f(x) = ax^2 + 2bx, \quad \text{gdzie} \quad a > 0.$$

Aby znaleźć jej minimum, przedstawmy ją w postaci kanonicznej,

$$ax^2 + 2bx = a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}x + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{a}.$$

Stąd widzimy, że $\qquad \min\limits_{\mathbf{R}} f(x) = f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = -\dfrac{b^2}{a}.$

Rozważmy teraz n takich funkcji

$$f_i(x) = a_i x^2 + 2b_i x, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Wówczas

$$\min_{\mathbf{R}} f_i(x) = f_i\left(-\frac{b_i}{a_i}\right) = -\frac{b_i^2}{a_i},$$

natomiast

$$\min_{\mathbf{R}}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right) = f\left(-\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}\right) = -\frac{(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n},$$

gdzie $\quad f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) \quad$ i nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \min_{\mathbf{R}} f_i(x) \le \min_{\mathbf{R}} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

przyjmuje postać

$$(1) \qquad \frac{b_1^2}{a_1} + \frac{b_2^2}{a_2} \ldots + \frac{b_n^2}{a_n} \ge \frac{(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2}{a_1 + a_2 + \ldots a_n}.$$

Tym razem przyjrzyjmy się funkcjom kwadratowym postaci

$$f_i(x) = (a_i + b_i)x^2 + 2a_i x + a_i,$$

gdzie a_i oraz b_i są liczbami dodatnimi, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Wówczas widzimy, że

$$\min_{\mathbf{R}} f_i(x) = -\frac{4a_i^2 - 4(a_i + b_i)a_i}{4(a_i + b_i)} = \frac{a_i b_i}{a_i + b_i},$$

zaś

$$\min_{\mathbf{R}}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right) = -\frac{4\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2 - 4\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{4\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i + b_i)\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i}.$$

Wystarczy teraz powołać się na znaną nam już nierówność dla minimów funkcji, by otrzymać nierówność

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \le \frac{AB}{A+B}, \quad \text{gdzie } A = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad B = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

UWAGA. Nierówność ta dla $n = 2$ była zadaniem nr 1 zawodów II stopnia XLIV Olimpiady Matematycznej.

Zadanie 1. Spróbuj otrzymać z nierówności (1) następujące nierówności:

1° $\sqrt{\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)} \ge a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$

(tzw. nierówność Buniakowskiego - Cauchy'ego).

2° $$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \ge \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

(nierówność między średnią kwadratową i średnią arytmetyczną).

3° $$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

(nierówność między średnią arytmetyczną i średnią harmoniczną).

Zadanie 2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich x_i, y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ $(n \ge 2)$ zachodzi nierówność

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i + y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i + y_i)} \ge \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} + \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}.$$

2. Funkcje wykładnicze

Znajdźmy najmniejszą wartość funkcji $f(x) = a \cdot e^x - bx - b$, gdzie $a > 0$, $b > 0$.

Funkcja ta jest różniczkowalna w zbiorze $\mathbf{R}$ liczb rzeczywistych i jej pochodna

$$f'(x) = a \cdot e^x - b, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Widzimy więc, że

$$f'(x) = 0 \iff x = \ln\frac{b}{a},$$

$$f'(x) > 0 \iff x > \ln\frac{b}{a},$$

$$f'(x) < 0 \iff x < \ln\frac{b}{a}.$$

Tak więc

$$\min_{\mathbf{R}} f(x) = f\left(\ln\frac{b}{a}\right) = -b \cdot \ln\frac{b}{a}.$$

Wobec tego dla n takich funkcji

$$f_i(x) = a_i e^x - b_i - b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

nierówność (**) przyjmuje postać

$$b_1 \ln\frac{b_1}{a_1} + \ldots + b_n \ln\frac{b_n}{a_n} \ge (b_1 + \ldots + b_n)\ln\frac{b_1 + \ldots + b_n}{a_1 + \ldots + a_n},$$

skąd po nietrudnych przekształceniach otrzymujemy nierówność

$$\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{b_1}\cdot\left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{b_2}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{b_n}\ \ge\ \left(\frac{b_1+\ldots+b_n}{a_1+\ldots+a_n}\right)^{b_1+\ldots+b_n}.$$

Zadanie 3. Spróbuj otrzymać z powyższej nierówności:

1° nierówność Cauchy'ego

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\ \ge\ \sqrt[n]{a_1\,a_2\ldots a_n}\,.$$

2° nierówność postaci

$$b_1^{\,b_1}\ldots b_n^{\,b_n}\ \ge\ \left(\frac{b_1+\ldots+b_n}{n}\right)^{b_1+\ldots+b_n}.$$

3° nierówność

$$c_1\,b_1+\ldots+c_n\,b_n\ \ge\ c_1^{\,b_1}\cdot\ldots\cdot c_n^{\,b_n}$$

gdzie $b_1+\ldots+b_n=1$.

UWAGA. Nierówność 2°, 3° są uogólnieniami nierówności 1°.

XVII. ZASADA SZUFLADKOWA DIRICHLETA[1]

Głosi ona, że jeżeli n przedmiotów rozmieścimy w m szufladkach i $n>m$ (lub ogólniej $n>k\cdot m$), to w którejś szufladce znajdą się co najmniej dwa przedmioty (lub ogólniej: to w którejś szufladce znajdzie się co najmniej $k+1$ przedmiotów).

Tak oczywisty fakt, dający się wyrazić przy użyciu pojęć z języka potocznego, przydaje się przy rozwiązywaniu wielu zadań matematycznych. Zanim jednak do nich przejdziemy, odnotujmy dwa bardziej matematyczne sformułowania tej prostej zasady.

1. Niech dany będzie zbiór skończony X mający n elementów. Przypuśćmy, że jest sumą k zbiorów parami rozłącznych:

$X=X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_k$ oraz $n>k$. Wówczas w którymś ze zbiorów X_i są co najmniej dwa elementy.

2. Niech X i Y będą zbiorami skończonymi mającymi odpowiednio n i k elementów.
Jeżeli $n>k$, to żadna funkcja określona na zbiorze X i przyjmująca wartości ze zbioru Y nie jest różnowartościowa.

Obecnie pokażemy wielkie bogactwo zastosowań tej oczywistej zasady. A bywa ona przydatna w zadaniach z różnych działów matematyki, choć niejednokrotnie raczej z samego sformułowania zadania nie będzie to widoczne. Właśnie samo zauważenie jej przydatności do rozwiązania zadania może stanowić jego istotną część.

[1] Peter Gustwv Lejeune Dirichlet (13.II.1805 - 5.V.1859) - matematyk niemiecki (z pochodzenia Francuz) zajmujący się głównie analizą matematyczną i teorią liczb.

Ten swoisty festiwal zadań związanych z zasadą szufladkową Dirichleta niech rozpocznie takie oto

Zadanie 1. Wykaż, że w każdym mieście liczącym 1500 000 mieszkańców znajdziemy co najmniej cztery osoby o tej samej liczbie włosów na głowie, jeżeli przyjmiemy, że rośnie ich na ludzkiej głowie co najwyżej 400 000.

Rozwiązanie:

❑ Umieśćmy w wyimaginowanych przez nas szufladkach, ponumerowanych liczbami całkowitymi od 0 do 400 000, mieszkańców półtoramilionowego miasta tak, by w szufladce z numerem k znaleźli się wszyscy ci, którzy mają na swojej głowie k włosów. Ponieważ $1\,500\,000 > 3 \cdot 400\,000$, więc na podstawie zasady szufladkowej wnioskujemy, że co najmniej $4 = (3 + 1)$ osoby mają tę samą liczbę włosów na swojej głowie. ■

Zadanie 2. Udowodnij, że wśród $n + 1$ dowolnych liczb całkowitych znajdą się dwie, których różnica dzieli się przez n.

Rozwiązanie:

❑ Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ będą dowolnymi liczbami całkowitymi. Jeżeli szufladki utożsamimy z resztami z dzielenia liczb całkowitych przez n,

0	1	2	3	4	.....	$n-2$	$n-1$

to każdej z liczb $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}$ przyporządkujemy dokładnie jedną szufladkę, której numer równy jest reszcie z dzielenia liczby a_i przez n. Zgodnie z zasadą szufladkową, w którejś szufladce znajdą się co najmniej dwie liczby. A to oznacza, że ich reszty z dzielenia przez n są równe, więc ich różnica jest liczbą podzielną przez n. ■

Zadanie 3. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ wybrano $n + 1$ różnych liczb. Wykaż, że wśród nich istnieją trzy takie, z których jedna jest sumą dwóch pozostałych.

Rozwiązanie:

❑ Niech $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$ będą wybranymi liczbami.

Rozważmy n różnic: $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$. Są one: liczbami dodatnimi, parami różne i wszystkie mniejsze od $2n$.

Mamy zatem $(2n + 1)$ liczb naturalnych:

$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$, z których każda jest mniejsza od $2n$. Wobec tego wśród nich muszą być liczby równe. Lecz każde dwie spośród $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są różne, i każde dwie spośród wypisanych n różnic, są różne.

Zatem któraś z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ musi być równa którejś z różnic $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$. A to już daje tezę zadania. ■

Zadanie 4. Danych jest n liczb całkowitych. Udowodnij, że wśród nich istnieją takie (być może tylko jedna), których suma jest podzielna przez n.

Rozwiązanie:

❑ Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą danymi liczbami całkowitymi.

Rozważmy n sum postaci

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_j, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Jeżeli któraś jest podzielna przez n, to mamy tezę. Gdy zaś żadna z nich nie dzieli się przez n, to któreś dwie muszą z dzielenia przez n dać tę samą niezerową resztę (sum mamy n, a niezerowych reszt z dzielenia przez n jest $n - 1$). Załóżmy, że sumami tymi są S_k i S_l, gdzie $1 \le k < l \le n$. Wobec tego różnica $S_l - S_k$ dzieli się przez n, a to kończy zadanie, gdyż

$$S_l - S_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_l. \qquad ■$$

Zadanie 5. Udowodnij, że jeżeli liczby całkowite m i n są względnie pierwsze, to istnieje taka liczba naturalna k, że $m^k - 1$ jest liczbą podzielną przez n.

Rozwiązanie:

❑ Wśród $n + 1$ liczb: $m^1, m^2, m^3, \ldots, m^{n+1}$ co najmniej dwie dzielą się przez n z tą samą niezerową resztą. Wobec tego ich różnica jest podzielna przez n. Niech np. będą to liczby m^s i m^t, gdzie

$1 \le s < t \le n+1$. Wówczas $m^t - m^s = m^s\left(m^{t-s} - 1\right)$. A ponieważ n dzieli tę różnicę, czyli również iloczyn $m^s\left(m^{t-s} - 1\right)$, więc dzieli liczbę $m^{t-s} - 1$, gdyż liczby m^s i n są względnie pierwsze. ■

Zadanie 6. Spośród liczb $1, 2, 3, \ldots, 2n$ wybrano $n+1$ liczb. Udowodnij, że wśród wybranych liczb istnieje taka, która jest dzielnikiem którejś z pozostałych n liczb.

Rozwiązanie:

❑ Zauważmy, że każdą liczbę naturalną można przedstawić, i to tylko w jeden sposób, w postaci $2^k(2m+1)$, gdzie k i m są liczbami całkowitymi nieujemnymi. Otrzymać to można rozkładając daną liczbę naturalną na czynniki pierwsze i jako $2m+1$ przyjmując iloczyn wszystkich czynników nieparzystych (gdy takich czynników nie ma, to $m = 0$). Jedyność takiego przedstawienia otrzymujemy z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze.

Niech $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ będą wybranymi liczbami naturalnymi nie większymi od $2n$. Przedstawmy je w postaci $2^{k_i}(2m_i + 1)$, gdzie k_i oraz m_i ($i = 1, 2, \ldots, n+1$) są liczbami całkowitymi nieujemnymi. Rozważmy teraz funkcję f określoną, na zbiorze $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$, wzorem $f(a_i) = m_i$. Mamy oczywiście nierówności

$$2n \ge a_i = 2^{k_i}(2m_i + 1) \ge 2m_i + 1, \qquad \text{skąd} \quad 0 \le m_i \le n - \frac{1}{2},$$

czyli m_i jest jedną z liczb: $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Liczb tych jest n, a elementów zbioru A $n+1$.

Funkcja f nie jest więc różnowartościowa. Istnieją zatem dwie różne liczby a_i oraz a_j, dla których $m_i = m_j = m$.

Jest więc $a_i = 2^{k_i}(2m+1)$, $a_j = 2^{k_j}(2m+1)$.

A ponieważ $a_i : a_j = 2^{k_i - k_j}$ i $a_j : a_i = 2^{k_j - k_i}$, oraz jedna z liczb $k_i - k_j$, $k_j - k_i$ jest dodatnia, więc albo a_j dzieli a_i, albo a_i dzieli a_j.

W ten sposób udowodniliśmy coś więcej, niż wymagało zadanie, mianowicie to, że wśród wybranych liczb istnieją dwie, których iloraz jest naturalną potęgą dwójki. ■

Zadanie 7. (XLIII Olimpiada Matematyczna).
Udowodnij, że wśród dowolnych $n+2$ liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez $2n$.

Rozwiązanie:

❑ Oznaczmy rozważane liczby przez $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ i niech r_i będzie resztą z dzielenia a_i przez $2n$. Jeżeli wśród tych reszt są dwie równe np. $r_i = r_j$ dla pewnych i, j, $i \ne j$, to różnica $a_i - a_j$ dzieli się przez $2n$ i dowód jest zakończony. Załóżmy więc, że reszty r_i są różnymi elementami zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, 2n-1\}$. Co najmniej n spośród tych reszt jest różna od 0 i od n. Zmieniając w razie potrzeby numerację możemy przyjąć, że

$$r_1, r_2, \ldots, r_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n-1\} \setminus \{0, n\} = \{1, 2, \ldots, n-1\} \cup$$
$$\cup \{n+1, n+2, \ldots, 2n-1\} = \{1, 2n-1\} \cup \{2, 2n-2\} \cup$$
$$\cup \ldots \cup \{n-1, n+1\}.$$

Mamy więc n różnych liczb r_i rozmieszczonych w sumie $n-1$ rozłącznych zbiorów $A_j = \{j, 2n-j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wnosimy, że co najmniej dwie z nich należą do tego samego zbioru A_j. Ich suma równa się $2n$, czyli dzieli się przez $2n$. ■

Zadanie 8. (XLIV Olimpiada Matematyczna).
Ciąg (x_n) liczb naturalnych spełnia następujące warunki:

$$x_1 = 1 \quad \text{i} \quad x_n < x_{n+1} \le 2n \qquad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej k istnieją takie dwa wyrazy x_r i x_s tego ciągu, że $x_r - x_s = k$.

Rozwiązanie:

❑ Niech k będzie liczbą naturalną nie większą od liczby naturalnej n. Przedstawmy zbiór $\{1, 2, \ldots, k, k+1, \ldots, 2k\}$ w postaci sumy zbiorów $A_j = \{j, k+j\}$, $j = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Zbiorów tych jest k, a wyrazów ciągu $1 = x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} \le 2k$ jest $k+1$.

Zatem na mocy zasady szufladkowej Dirichleta pewne dwa wyrazy x_s i x_r tego ciągu są elementami jednego ze zbiorów A_j. A to oznacza, że ich różnica wynosi k. ■

Zadanie 9. (XXIV Olimpiada Matematyczna).

Niech n będzie liczbą naturalną. Dany jest zbiór złożony z k liczb naturalnych nie większych od n, gdzie $k > \frac{n+1}{2}$.

Udowodnij, że suma pewnych dwóch liczb tego zbioru (niekoniecznie różnych) jest równa trzeciej.

Rozwiązanie:

❑ Niech a będzie najmniejszą liczbą zbioru. Rozważmy zbiór $k-1$ liczb postaci $x - a$, gdzie x jest liczbą danego, zbioru różną od a. Są to liczby naturalne, mniejsze od n. Gdyby żadna z liczb $x - a$ nie była równa żadnej z liczb należących do danego zbioru, to razem z nimi byłoby $k + (k-1) = 2k - 1$ liczb naturalnych nie przekraczających n, a więc byłoby $2k - 1 \le n$, czyli $k \le \frac{n+1}{2}$, co z kolei przeczy nierówności $k > \frac{n+1}{2}$. Zatem któraś z liczb $x - a$ równa jest pewnej liczbie zbioru, co należało wykazać. ■

Zadanie 10. (XIV Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna).

Dany jest zbiór złożony z dziesięciu liczb naturalnych, dwucyfrowych w rozwinięciu dziesiętnym. Wykaż, że w tym zbiorze istnieją dwa niepuste podzbiory takie, że sumy liczb obu podzbiorów są równe.

Rozwiązanie:

❑ Rozważany zbiór zawiera $2^{10} - 1 = 1023$ niepuste podzbiory. Suma liczb każdego podzbioru jest mniejsza od $10 \cdot 100 = 1000$ (liczb w każdym z nich jest nie więcej niż 10, a każda z nich nie przekracza 100). Umieszczając w jednej szufladce podzbiory, mające jednakową sumę liczb do nich należących, stwierdzamy, że w pewnej szufladce znajdą się co najmniej dwa niepuste podzbiory danego zbioru, gdyż podzbiorów jest 1023, a szufladek mniej niż 1000. Podzbiory te będą miały jednakowe sumy liczb do nich należących. ■

Zadanie 11. Dany jest zbiór S złożony z n elementów. Niech $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ będą niepustymi podzbiorami zbioru S. Wykaż, że ist-nieją takie dwa niepuste podzbiory A i B zbioru $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, że

$$\bigcup_{k \in A} M_k = \bigcup_{k \in B} M_k .$$

Rozwiązanie:

❑ Wszystkich sum złożonych ze zbiorów $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ jest tyle, ile jest wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, czyli $2^{n+1} - 1$. A ponieważ niepustych podzbiorów zbioru S jest $2^n - 1$ i $2^n - 1 < 2^{n+1} - 1$, więc wśród rozważanych sum (będących przecież podzbiorami zbioru S) co najmniej dwie są tym samym podzbiorem zbioru S, więc są równe, a tego należało dowieść. ■

Zadanie 12. (XVI Olimpiada Matematyczna).

W sali znajduje się k osób ($k \ge 2$). Udowodnij, że co najmniej dwie z tych osób mają wśród obecnych tę sama liczbę znajomych (przyjmujemy, że jeżeli osoba A zna osobę B, to również B zna A).

Rozwiązanie:

❑ Niech $f(A)$ będzie liczbą osób na sali, które zna osoba A.

Oczywiście $0 \le f(A) \le k - 1$.

Niemożliwe jest jednak, by funkcja f przyjmowała zarówno wartość 0, jak i $k-1$. Wtedy bowiem byłaby osoba, nazwijmy ją X, nie mająca znajomych na sali $(f(X)=0)$ i osoba Y, znająca wszystkie pozostałe osoby $(f(Y)=k-1)$, a więc i osobę X - sprzeczność. Zatem funkcja f odwzorowuje zbiór k elementowy w zbiór $(k-1)$ - elementowy $\{0,1,2,\ldots,k-2\}$ lub $\{1,2,\ldots,k-1\}$. Nie jest więc różnowartościowa, co oznacza, że istnieją dwie osoby K i L, dla których $f(K)=f(L)$, czyli mające tę samą liczbę znajomych w sali. ■

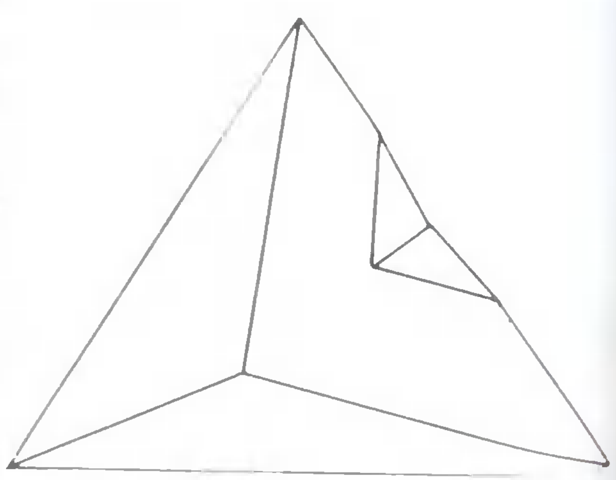
Zadanie 13. (XX Olimpiada Matematyczna).

Udowodnij, że każdy wielościan wypukły ma co najmniej dwie ściany o tej samej liczbie boków.

Rozwiązanie:

❑ Tezę tego zadania otrzymujemy w oczywisty sposób z poprzedniego zadania, jeżeli spróbujemy wyobrazić sobie, że na każdej ścianie wielościanu znajduje się człowiek i że jego znajomymi są ludzie znajdujący się na ścianach mających wspólną krawędź. Każdy z ludzi ma więc tylu znajomych, ile boków ma ściana, na której się znajduje. Ponieważ w myśl tezy poprzedniego zadania istnieją dwie osoby mające te samą liczbę znajomych, więc istnieją dwie ściany o tej samej liczbie boków. ■

Zauważmy, że dla wielościanów niewypukłych teza tego zadania nie zachodzi, bowiem twierdzenie, że ściana, będąca n - kątem, przylega do n innych ścian, jest dla nich nieprawdziwe, co widać na rysunku obok, przedstawiającym czworościan z „odrąbanym " przy jego krawędzi małym czworościanem. Ściana przednia (i „prawa tylna") jest sześciokątna, a przylega ona tylko do pięciu ścian.



Zadanie 14. Udowodnij, że jeżeli w trójkącie równobocznym o boku długości 4 umieścimy 17 punktów, to odległość pewnych dwóch spośród nich nie przekracza 1.

Rozwiązanie:

❑ Podzielmy każdy bok na odcinki długości 1 i poprowadźmy przez punkty podziału proste równoległe do boków trójkąta. Trójkąt podzieli nam się na 16 trójkątów równobocznych o boku długości 1. Szufladkami teraz będą te właśnie trójkąty. W jednym z nich, zgodnie z zasada szufladkową Dirichleta, znajdą się dwa spośród danych punktów. Ponieważ odległość dwóch punktów leżących w trójkącie nie przekracza długości jego największego boku, zatem odległość wspomnianych dwóch punktów jest nie większa od 1. ■

Zadanie 15. Wewnątrz kwadratu o boku długości 1 obrano 51 punktów. Wykaż, że pewne trzy z nich leżą w kole o promieniu $\frac{1}{7}$.

Rozwiązanie:

❑ Podzielmy każdy bok na odcinki długości $\frac{1}{5}$ i poprowadźmy przez punkty podziału proste równoległe do boków kwadratu. Kwadrat podzieli nam się na 25 kwadratów o boku długości $\frac{1}{5}$. Kwadraty te - to szufladki. A ponieważ jest ich 25 i $25 \cdot 2 < 51$, więc zgodnie z zasadą Dirichleta, w jednym z nich znajdą się co najmniej trzy punkty. Zawiera je także koło opisane na tym kwadracie, którego promień

$$r=\frac{\sqrt{2}}{10}=\sqrt{\frac{1}{50}}<\sqrt{\frac{1}{49}}=\frac{1}{7}.$$ ■

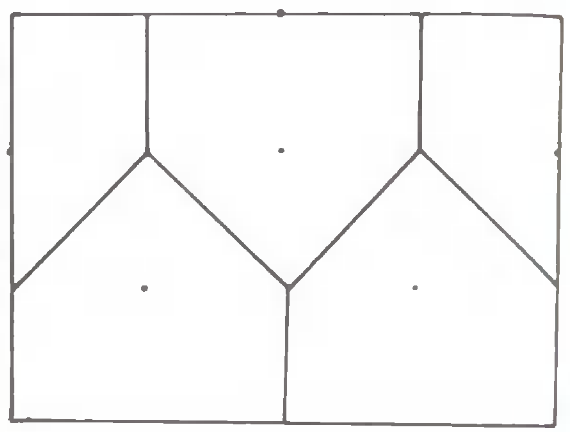
Zadanie 16. W kwadracie danych jest $2n+1$ punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Udowodnij, że trzy spośród nich są wierzchołkami trójkąta o polu nie większym od $\frac{1}{2n}$ pola kwadratu.

Rozwiązanie:

❑ Podzielmy kwadrat na n przystających pasów. W jednym z nich znajdą się co najmniej trzy punkty. Pole trójkąta, którego wierzchołkami są te punkty, nie przekracza połowy pola pasa, tzn. $\frac{1}{2n}$ pola kwadratu. ■

Zadanie 17. W prostokącie o bokach długości 3 i 4 obrano sześć różnych punktów. Udowodnij, że pewne dwa z nich są odległe od siebie o nie więcej niż $\sqrt{5}$.

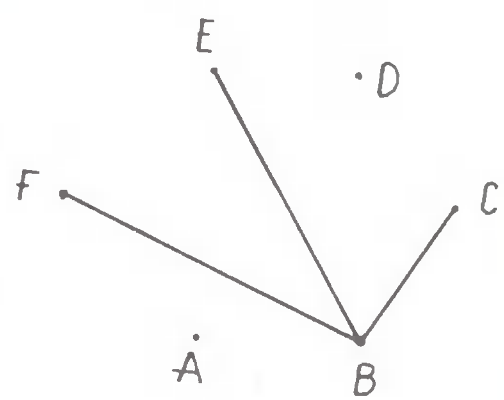
Rozwiązanie:



❑ Podzielmy dany prostokąt na pięć części, jak to pokazuje rysunek obok. Przyjmując je za szufladki, otrzymujemy na mocy zasady Dirichleta, iż pewne dwa spośród danych sześciu punktów , muszą znaleźć się w jednej z takich części. Łatwo widać, że wówczas ich odległość rzeczywiście jest nie większa niż $\sqrt{5}$. ■

Zadanie 18. Każde dwa wierzchołki sześciokąta foremnego połączono odcinkiem zielonym lub czerwonym. Wykaż, że został narysowany co najmniej jeden trójkąt o bokach tego samego koloru.

Rozwiązanie:



❑ Z każdego wierzchołka sześciokąta „ wychodzi " pięć odcinków, więc co najmniej trzy z nich są jednego koloru np. zielonego.Jeżeli któryś z odcinków FC, FE, CE jest zielony, to trójkąt jednokolorowy już mamy.W przeciwnym razie jest nim trójkąt FCE. ■

Zadanie 19. (XXII Olimpiada Matematyczna).
Na płaszczyźnie danych jest pięć punktów kratowych (tzn. punktów o współrzędnych całkowitych). Udowodnij, że środek jednego z odcinków łączących te punkty jest również punktem kratowym.

Rozwiązanie:

❑ Środkiem odcinka o końcach w punktach (a, b) i (c, d) jest, jak wiemy, punkt $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$. Utwórzmy cztery szufladki i oznaczmy je (p, p), (p, n), (n, p), (n, n). Do szufladki oznaczonej (p, p) będziemy wkładać punkty mające obie współrzędne parzyste itd. W jednej z szufladek znajdą się dwa spośród danych punktów, a sumy ich odpowiednich współrzędnych będą obydwie parzyste, zatem połówki sum będą liczbami całkowitymi, co kończy dowód. ■

Zadanie 20. Każdy punkt pewnego okręgu pomalowano na biało lub czarno. Udowodnij, że istnieje trójkąt równoramienny, wpisany w ten okrąg, o wierzchołkach jednego koloru.

Rozwiązanie:

❑ Co najmniej trzy wierzchołki pięciokąta foremnego, wpisanego w ten okrąg, są jednego koloru. Trójkąt o wierzchołkach w tych punktach jest oczywiście równoramienny. ■

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. W każde pole szachownicy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb: -1, 0, 1. Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tym samym wierszu, w tej samej kolumnie i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.

Zadanie 2. Wewnątrz sześcianu o krawędzi 1 obrano 1994 punkty. Udowodnij, że co najmniej 10 spośród nich znajduje się wewnątrz pewnej kuli o promieniu $0,15$.

Zadanie 3. W pewnym turnieju wzięło udział n drużyn ($n \geq 3$). Każda drużyna rozegrała z każdą dokładnie jeden mecz i nie zanotowano remisów. Udowodnij, że jeżeli pewne dwie drużyny wygrały tę samą ilość meczów, to znalazły się takie trzy drużyny A, B, C, że drużyna A wygrała z drużyną B, drużyna B wygrała z drużyną C, drużyna C wygrała z drużyną A.

Zadanie 4. W turnieju piłkarskim bierze udział n drużyn. Wykaż, że w dowolnym momencie znajdą się dwie drużyny, które rozegrały tę samą liczbę meczów.

Zadanie 5. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje liczba zapisana w systemie dziesiętnym przy pomocy tylko zer i jedynek, która dzieli się przez n.

Zadanie 6. Każde dwa wierzchołki siedemnastokąta połączono odcinkiem czerwonym, zielonym lub czarnym. Wykaż, że został narysowany co najmniej jeden trójkąt o bokach jednego koloru.

Zadanie 7. (XL Olimpiada Matematyczna).
Dane są liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$. Wykaż, że istnieje taki niezerowy ciąg $\left(x_1, \ldots, x_{11}\right)$ o wyrazach ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$, że liczba $x_1 a_1 + \ldots + x_{11} a_{11}$ jest podzielna przez 1989.

Zadanie 8. W czworościanie foremnym o krawędzi długości 1 obrano 1001 różnych punktów. Udowodnij, że wśród nich istnieją dwa, których odległość nie przekracza 0,1.

Zadanie 9. W przestrzeni danych jest dziewięć punktów sieciowych,czyli takich, których współrzędne są całkowite. Wykaż, że środek pewnego odcinka, łączącego dwa punkty z tego zbioru, jest punktem sieciowym.

Zadanie 10. Wewnątrz sześcianu o krawędzi długości 1 danych jest 2000 punktów. Udowodnij, że spośród nich można wybrać 75 punktów $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{75}$ takich, że

$$\sum_{j=1}^{75} \left| A_{i_j} A_{i_{j+1}} \right| < 25\sqrt{3},$$

dla dowolnej permutacji $(i_1, i_2, \ldots, i_{75})$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 75\}$. Przyjmujemy $i_{76} = i_1$.

Zadanie 11. Danych jest 12 różnych liczb dwucyfrowych. Wykaż, że wśród nich istnieją takie dwie, których różnica jest liczbą dwucyfrową o jednakowych cyfrach.

Zadanie 12. Udowodnij, że jeżeli żadna z liczb całkowitych $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n-1)d$ nie dzieli się przez n, to liczby n i d nie są względnie pierwsze.

Zadanie 13. Każdą ścianę sześcianu malujemy na biało lub czarno. Wykaż, że zawsze pewne dwie ściany o wspólnej krawędzi pomalujemy na ten sam kolor.

Zadanie 14. Dane są trzy liczby naturalne a, b, c, przy czym a i b są względnie pierwsze. Udowodnij, że istnieje taka liczba naturalna n, dla której $nb + c$ jest liczbą podzielną przez a.

Zadanie 15. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją różne liczby naturalne r i s takie, że liczba $3^r - 3^s$ jest podzielna przez n.

Zadanie 16. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \le 150$ istnieją dwa różne dzielniki d_1 i d_2 liczby 9 000 000 takie, że liczba $d_1 - d_2$ jest podzielna przez n.

Zadanie 17. W kuli o objętości 1 danych jest 11 różnych punktów. Wykaż, że istnieją dwie płaszczyzny zawierające środek tej kuli i wycinające z niej część o objętości $\frac{1}{8}$ oraz nie zawierającej w swoim wnętrzu żadnego z wyróżnionych punktów.

Zadanie 18. (XXI Olimpiada Matematyczna).
Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej nieparzystej $a > 1$ istnieje taka liczba naturalna $b < a$, że $2^b - 1$ dzieli się przez a.

Zadanie 19. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej nieparzystej $n \neq 5$ istnieje nieskończenie wiele wyrazów ciągu

$$1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ \ldots,\ \underbrace{11\ldots1}_{n},\ \ldots$$

podzielnych przez n.

Zadanie 20. W kwadracie o boku długości 1 obrano 102 punkty, z których żadne trzy nie leż ą na jednej prostej. Wykaż, że pewne trzy punkty tego zbioru wyznaczają trójkąt o polu mniejszym od 0,01.

Zadanie 21. (XXXVI Olimpiada Matematyczna).
W turnieju szachowym uczestniczy 66 zawodników, każdy z każdym rozgrywa jedną partię, rozgrywki odbywają się w czterech miastach .

Udowodnij że pewna trójka zawodników rozgrywa wszystkie partie między sobą w tym samym mieście.

Zadanie 22. (VI Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna).
Siedemnaście osób wymienia pomiedzy sobą listy, przy czym każda osoba koresponduje z każdą z pozostałych. Przedmiotem korespondencji są trzy różne zagadnienia, a każda para osób omawia korespondencyjnie tylko jedno z tych zagadnień.
Wykaż, że są takie trzy osoby, których wzajemna korespondencja dotyczy jednego i tego samego zagadnienia.

XVIII. KONGRUENCJE LICZBOWE

Niech a i b będą liczbami całkowitymi, zaś m - liczbą naturalną.
Definicja. *Mówimy, że a przystaje do b według modułu m (albo krótko: modulo m) wtedy i tylko wtedy, gdy różnica $a-b$ dzieli się przez m.*

Zapisujemy to następująco:

(*) $$a \equiv b \pmod m \iff m \mid a-b.$$

i nazywamy *kongruencją*.

Zapis przystawania liczb w postaci (*) wprowadził po raz pierwszy Gauss.

Kongruencje mają wiele własności, podobnych do odpowiednich własności równości. Stąd być może pomysł na używanie symbolu $\equiv$.

A oto podstawowe własności kongruencji:

1° $a \equiv a \pmod m$ (zwrotność),

2° jeżeli $a \equiv b \pmod m$, to $b \equiv a \pmod m$ (symetria),

3° jeżeli $a \equiv b \pmod m$, oraz $b \equiv c \pmod m$, to $a \equiv c \pmod m$ (przechodniość).

Dowód dwóch pierwszych własności jest oczywisty. Trzecią własność otrzymujemy natychmiast z tożsamości $a-c \equiv (a-b)+(b-c)$.
Bez trudu przekonujemy się też, że:

4° jeżeli $a \equiv b \pmod m$, to $a \pm c \equiv b \pm c \pmod m$

(gdyż $a - b = (a + c) - (b + c) = (a - c) - (b - c)$).

5° jeżeli $a \equiv b \pmod{m}$, to $ac \equiv bc \pmod{m}$

(gdyż, jeżeli $m \mid a - b$, to $m \mid c(a - b) = (ac - bc)$).

6° jeżeli $a \equiv b \pmod{m}$ oraz $c \equiv d \pmod{m}$, to
$a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$
(gdyż $(a \pm c) - (b \pm d) = (a - b) + (c - d) = (a - b) - (c - d)$).

7° jeżeli $a \equiv b \pmod{m}$ oraz $c \equiv d \pmod{m}$, to
$ac \equiv bd \pmod{m}$

(gdyż $ac - bd = (a - b)c + (c - d)b$).

Widzimy zatem, że kongruencje **o tym samym** module (podobnie jak równości) można dodawać, odejmować lub mnożyć stronami. Do obu stron kongruencji wolno dodać tą samą liczbę całkowitą.

Twierdzenie o dodawaniu i mnożeniu dwóch kongruencji możemy z łatwością uogólnić przez indukcję na dowolną liczbę kongruencji o tym samym module.

Z twierdzenia o mnożeniu kongruencji wynika, że obie strony kongruencji można podnosić do tej samej potęgi o dowolnym wykładniku naturalnym.

Zauważmy jednak, że **nie można dzielić stronami** kongruencji, ani też **dzielić obu stron kongruencji przez ten sam wspólny dzielnik**.

Na przykład z kongruencji $48 \equiv 18 \pmod{10}$ oraz $12 \equiv 2 \pmod{10}$ nie wynika kongruencja $4 \equiv 9 \pmod{10}$; a z kongruencji $16 \equiv 6 \pmod{10}$ nie wynika kongruencja $8 \equiv 3 \pmod{10}$.

Z twierdzenia, że dzielnik dzielnika danej liczby jest dzielnikiem tej liczby wynika, że dla $d \mid m$ kongruencja $a \equiv b \pmod{m}$ pociąga za sobą kongruencję $a \equiv b \pmod{d}$.

Niech $a = k_1 \cdot m + r_1$, $b = k_2 \cdot m + r_2$, gdzie k_i oraz r_i są liczbami całkowitymi, przy czym

(•) $\qquad 0 \le r_i \le m - 1, \qquad i = 1, 2.$

Wykażemy teraz, że

$$a \equiv b \pmod{m} \iff r_1 = r_2.$$

Implikacja $(\Leftarrow:)$ jest oczywista.

Niech więc $a \equiv b \pmod{m}$.

Oznacza to, że $\qquad m \mid a - b = (k_1 - k_2) \cdot m + (r_1 - r_2).$

Stąd otrzymujemy, że $\qquad m \mid r_1 - r_2.$

Ale na mocy (•) wynika, że $-(m - 1) \le r_1 - r_2 \le m - 1.$

Jest więc $\qquad r_1 - r_2 = 0$, czyli $\qquad r_1 = r_2.$

Kongruencje liczbowe pozwalają rozwiązać (zawsze zgrabnie i elegancko!) wiele zadań z teorii podzielności w zbiorze liczb całkowitych, dosyć często pojawiających się na olimpiadach matematycznych .

Rozwiążmy ich zatem tyle, ile się da.

Zadanie 1. (VI Olimpiada Matematyczna).

Wykaż, że liczba $53^{53} - 33^{33}$ jest podzielna przez 10.

Rozwiązanie:

❑ Dla dowodu tej podzielności wystarczy wykazać, że ostatnie cyfry liczb 53^{53} i 33^{33} są jednakowe.

Ponieważ $53 \equiv 3 \pmod{10}$, $33 \equiv 3 \pmod{10}$, $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$, więc

$$53^{53} \equiv 3^{53} \equiv (3^4)^{13} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$33^{33} \equiv 3^{33} \equiv (3^4)^{8} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{10}.$$

Zatem $53^{53} - 33^{33} \equiv 0 \pmod{10}$. ■

Zadanie 2. (XI Olimpiada Matematyczna)

Wykaż, że jeżeli n jest liczbą całkowitą nieujemną, to liczba

$2^{n+2} + 3^{2n+1}$ jest podzielna przez 7.

Rozwiązanie:

❑ Prawdziwe są oczywiście kongruencje: $3^2 \equiv 2 \pmod 7$,

(1) $3^{2n} \equiv 2^n \pmod 7$, (2) $3 \equiv -2^2 \pmod 7$.

Po wymnożeniu kongruencji (1), (2) stronami, otrzymamy, że

$$3^{2n+1} \equiv -2^{n+2} \pmod 7,$$

czyli $$3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0 \pmod 7.$$ ■

Zadanie 3. (XII Olimpiada Matematyczna).

Udowodnij, że gdy n jest liczbą naturalna, to liczba

$$2^{4^n} + 5$$

jest podzielna przez 21.

Rozwiązanie:

❑ Zachodzą oczywiście kongruencje:

$$2^4 \equiv -5 \pmod{21} \quad \text{oraz} \quad 5^4 \equiv -5 \pmod{21}.$$

Stąd $2^{4^n} \equiv 5^{4^{n-1}} \pmod{21}$ oraz

$$5^{4^{n-1}} \equiv 5^{4^{n-2}} \equiv 5^{4^{n-3}} \equiv \ldots \equiv 5^4 \equiv -5 \pmod{21}.$$

Otrzymaliśmy więc, że

$$2^{4^n} \equiv 5^{4^{n-1}} \pmod{21} \quad \text{oraz} \quad 5^{4^{n-1}} \equiv -5 \pmod{21},$$

skąd wynika, iż

$$2^{4^n} \equiv -5 \pmod{21}, \quad \text{czyli że}$$

$$2^{4^n} + 5 \equiv 0 \pmod{21}.$$ ■

Zadanie 4. (VI Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna).

(a) Wyznacz wszystkie wartości naturalne n, dla których $2^n - 1$ jest liczbą podzielną przez 7.

(b) Wykaż, że dla żadnej wartości naturalnej n liczba $2^n + 1$ nie jest podzielna przez 7.

Rozwiązanie:

❑ (a) Zauważmy, że $2^3 \equiv 1 \pmod 7$. Wobec tego dla każdej liczby naturalnej k mamy kolejno kongruencje:

$$2^{3k} \equiv 1 \pmod 7, \quad \text{czyli} \quad 2^{3k} - 1 \equiv 0 \pmod 7.$$

I dalej:

$$2^{3k+1} \equiv 2 \pmod 7, \quad \text{skąd} \quad 2^{3k+1} - 1 \equiv 1 \pmod 7.$$

$$2^{3k+2} \equiv 4 \pmod 7, \quad \text{skąd} \quad 2^{3k+2} - 1 \equiv 3 \pmod 7.$$

Otrzymaliśmy więc, że

$$2^n - 1 \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod 3.$$

(b) Z każdej z kongruencji:

$$2^{3k} \equiv 1 \pmod 7,$$

$$2^{3k+1} \equiv 2 \pmod 7,$$

$$2^{3k+2} \equiv 4 \pmod 7,$$

wynika odpowiednio, że

$$2^{3k} + 1 \equiv 2 \pmod 7,$$

$$2^{3k+1} \equiv 3 \pmod 7,$$

$$2^{3k+2} + 1 \equiv 5 \pmod 7.$$

A to już daje tezę zadania. ■

Zadanie 5. (XVI Olimpiada Matematyczna).
Wyznacz wszystkie takie liczby pierwsze p, że $4p^2 + 1$ i $6p^2 + 1$ są również liczbami pierwszymi.

Rozwiązanie:
❑ Zbadamy podzielność liczb

$$A = 4p^2 + 1 \quad \text{i} \quad B = 6p^2 + 1 \quad \text{przez} \quad 5.$$

Wiadomo, że reszta z dzielenia przez liczbę naturalną iloczynu dwóch liczb całkowitych równa jest reszcie z dzielenia przez tę liczbę iloczynu ich reszt. Wobec tego:

gdy $p \equiv 0 \pmod 5$, to $A \equiv 1 \pmod 5$, $B \equiv 1 \pmod 5$,

gdy $p \equiv 1 \pmod 5$, to $A \equiv 0 \pmod 5$, $B \equiv 2 \pmod 5$,

gdy $p \equiv 2 \pmod 5$, to $A \equiv 2 \pmod 5$, $B \equiv 0 \pmod 5$,

gdy $p \equiv 3 \pmod 5$, to $A \equiv 2 \pmod 5$, $B \equiv 0 \pmod 5$,

gdy $p \equiv 4 \pmod 5$, to $A \equiv 0 \pmod 5$, $B \equiv 2 \pmod 5$.

Z powyższego wynika, iż liczby A i B mogą być pierwsze jedynie wtedy, gdy $p \equiv 0 \pmod 5$, tzn. gdy $p = 5$, ponieważ p ma być liczbą pierwszą. W tym przypadku $A = 4 \cdot 5^2 + 1 = 101$, $B = 6 \cdot 5^2 + 1 = 151$, a to są liczby pierwsze.

Zatem jedynym rozwiązaniem zadania jest liczba $p = 5$. ■

Zadanie 6. Wyznacz dwie ostatnie cyfry liczby

$$99^{99} - 51^{51}.$$

Rozwiązanie:
❑ Prawdziwe są kongruencje:

$$99 \equiv -1 \pmod{100},$$

$$99^{99} \equiv -1 \pmod{100}.$$

Stąd

(1) $$99^{99} \equiv 99 \pmod{100}.$$

Ponadto zauważmy, że

$$51^2 \equiv 1 \pmod{100}, \quad \text{więc}$$

$$51^{50} \equiv 1 \pmod{100}.$$

Stąd

(2) $$51^{51} \equiv 51 \pmod{100}.$$

Po odjęciu kongruencji (1), (2) stronami otrzymamy:

$$99^{99} - 51^{51} \equiv 48 \pmod{100}.$$

Zatem dwie ostatnie cyfry liczby $99^{99} - 51^{51}$ to 4 i 8. ■

Zadanie 7. Udowodnij, że dla naturalnych $n > 1$ liczby postaci $4 \cdot 2^{2^n} + 1$ są wszystkie złożone.

Rozwiązanie:
❑ Ponieważ $2^2 \equiv -1 \pmod 5$, więc $2^{2^n} \equiv 1 \pmod 5$.

Ale również $4 \equiv -1 \pmod 5$. Mnożąc ostatnie dwie kongruencje stronami otrzymujemy $4 \cdot 2^{2^n} \equiv -1 \pmod 5$, czyli $4 \cdot 2^{2^n} + 1 \equiv 0 \pmod 5$, co daje już tezę, gdyż $4 \cdot 2^{2^n} + 1 > 5$. ■

Zadanie 8. Udowodnij, że dla naturalnych $n > 1$ liczby postaci $9 \cdot 2^{2^n} + 1$ są wszystkie złożone.

Rozwiązanie:
❑ Mamy kongruencję:

$$2^2 \equiv -1 \pmod 5, \quad \text{więc}$$

(1) $$2^{2^n} \equiv 1 \pmod 5.$$

A ponieważ

(2) $$9 \equiv -1 \pmod 5, \quad \text{więc}$$

po pomnożeniu stronami kongruencji (1), (2) dostaniemy:

$$9 \cdot 2^{2^n} \equiv -1 \pmod 5, \quad \text{czyli}$$

$$9 \cdot 2^{2^n} + 1 \equiv 0 \pmod 5.$$

Jednocześnie $9 \cdot 2^{2^n} + 1 > 5$. A to już daje tezę. ■

Zadanie 9. Wyznacz wszystkie pary (p,q) liczb pierwszych, dla których liczby $7p + q$ oraz $pq + 11$ również są pierwsze.

Rozwiązanie:

❑ Jeżeli liczba $pq + 11$ ma być pierwsza, to liczby p i q nie mogą być obie nieparzyste. Niech więc $p = 2$. Wówczas:

gdy $q \equiv 1 \pmod 3$, to $q + 14 \equiv 0 \pmod 3$,

gdy $q \equiv 2 \pmod 3$, to $2q + 11 \equiv 0 \pmod 3$.

Gdy $q \equiv 0 \pmod 3$, czyli, gdy $q = 3$, to liczby $7p + q$ i $pq + 11$ wynoszą odpowiednio 17 i 17. Są więc pierwsze.

Niech $q = 2$. Wówczas:

gdy $p \equiv 1 \pmod 3$, to $7p + 2 \equiv 0 \pmod 3$,

gdy $p \equiv 2 \pmod 3$, to $2p + 11 \equiv 0 \pmod 3$,

gdy $p \equiv 0 \pmod 3$, tzn., gdy $p = 3$, to liczby $7p + q$ i $pq + 11$ są równe odpowiednio 23 i 17, a więc są pierwsze.

Zatem jedynymi parami liczb pierwszych spełniającymi warunki zadania

są: $(3, 2)$, $(2, 3)$. ■

Zadanie 10. Wyznacz resztę z dzielenia przez 7 liczby

$$L = 10^{10^1} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + \ldots + 10^{10^9} + 10^{10^{10}}$$

Rozwiązanie:

❑ Nietrudno sprawdzić, że

$$10^6 \equiv 1 \pmod 7.$$

Stąd dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych k i r

$$10^{6k+r} \equiv 10^r \pmod 7.$$

Z drugiej strony dla każdego naturalnego n

$$10^n \equiv 4 \pmod 6.$$

Wobec tego

$$L \equiv \underbrace{10^4 + 10^4 + \ldots + 10^4}_{10} \pmod 7.$$

A ponieważ $10^5 \equiv 5 \pmod 7$, więc również

$$L \equiv 5 \pmod 7.$$ ■

Zadanie 11. Wyznacz dwie ostatnie cyfry liczby

$$2^{999}.$$

Rozwiązanie:

❑ Ponieważ $2^{10} \equiv 24 \pmod{100}$ oraz

$$2^{12} \equiv 24 \cdot 2^2 \equiv -4 \pmod{100}, \quad \text{więc}$$

$$2^{72} \equiv (-4)^6 \equiv 2^{12} \equiv -4 \pmod{100}.$$

I dalej:

$$2^{432} \equiv 2^{6 \cdot 72} \equiv (-4)^6 \equiv 2^{12} \equiv -4 \pmod{100}, \quad \text{więc}$$

$$2^{864} = \left(2^{432}\right)^2 \equiv (-4)^2 = 16 \pmod{100}.$$

Mamy więc kongruencje:

$$2^{864} \equiv 16 \pmod{100} \qquad \text{oraz} \quad 2^{72} \equiv -4 \pmod{100}.$$

Mnożąc je stronami otrzymamy:

$$2^{936} \equiv -64 \pmod{100}.$$

A stąd

$$2^{996} = 2^{936} \cdot 2^{60} \equiv -64 \cdot 60 \pmod{100}$$

oraz

$$2^{999} = 2^{996} \cdot 2^3 \equiv 36 \cdot 2^3 \pmod{100}, \text{ więc}$$

$$2^{999} \equiv 88 \pmod{100}.$$

Odp. Dwie ostatnie cyfry rozważanej liczby to 8, 8. ∎

Zadanie 12. Wykaż, że liczba $2^{2^5} + 1$ jest podzielna przez 641.

Rozwiązanie:

❑ Zauważmy, że

$$641 = 5 \cdot 2^7 + 1 = 5^4 + 2^4, \quad \text{więc}$$

$$5 \cdot 2^7 \equiv -1 \pmod{641}.$$

Stąd po podniesieniu obu stron do potęgi czwartej otrzymamy

$$5^4 \cdot 2^{28} \equiv 1 \pmod{641}.$$

A ponieważ

$$5^4 \equiv -2^4 \pmod{641}, \qquad \text{więc}$$

$$2^{32} \equiv -1 \pmod{641}, \qquad \text{czyli liczba}$$

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 \quad \text{jest podzielna przez } 641.$$ ∎

Zadanie 13. (XLII Olimpiada Matematyczna).

Dane są liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, e, f takie, że

$$(\bullet) \qquad a + b = c + d = e + f = 101.$$

Udowodnij, że liczby $\dfrac{ace}{bdf}$ nie można zapisać w postaci ułamka $\dfrac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi dodatnimi o sumie mniejszej od 101.

Rozwiązanie:

❑ Z podanych w zadaniu równości $(\bullet)$ wynikają kongruencje:

$$a \equiv -b \pmod{101},$$

$$c \equiv -d \pmod{101},$$

$$e \equiv -f \pmod{101}.$$

Mnożąc je stronami otrzymujemy

$$ace \equiv -bdf \pmod{101}, \quad \text{czyli że liczba}$$

$ace + bdf$ jest podzielna przez 101.

Załóżmy teraz, że

$$\frac{ace}{bdf} = \frac{m}{n}, \qquad \text{gdzie } m \text{ i } n \text{ są liczbami}$$

całkowitymi dodatnimi. Wobec tego

$$ace = k \cdot m \qquad \text{oraz} \quad bdf = k \cdot n, \quad \text{gdzie } k$$

jest liczbą całkowitą dodatnią. W takim razie

$$ace + bdf = k \cdot (m + n).$$

Zatem liczba $k \cdot (m + n)$ jest podzielna przez 101. Z równości $(\bullet)$ wynika, że liczby całkowite a, c, e są z przedziału $< 1, 100 >$, wobec tego nie dzielą się przez 101, więc ich iloczyn również nie dzieli się przez 101.

Zatem liczba k nie dzieli się przez 101, co więcej, jest z nią względnie pierwsza, gdyż 101 jest liczbą pierwszą.

Z podzielności $101 \mid k \cdot (m + n)$ otrzymujemy więc, że $101 \mid (m + n)$ a stąd już wynika, że musi być $m + n \geq 101$. Kończy to dowód tezy zadania. ∎

Zadanie 14. Wykaż, że jeżeli liczba pierwsza $p > 2$ dzieli liczbę $a + 1$, to dla każdej liczby całkowitej $n \geq 0$ liczba p^{n+1} dzieli liczbę $a^{p^n} + 1$.

Rozwiązanie:

❑ Zastosujemy indukcję matematyczną. Dla $n = 0$ żądana podzielność wynika z założenia. Przypuśćmy więc, że dla pewnego całkowitego $n \geq 0$ liczba p^{n+1} dzieli liczbę $a^{p^n} + 1$.

Zachodzi więc kongruencja

$$a^{p^n} \equiv -1 \pmod{p^{n+1}},$$

zatem również - kongruencja

$$a^{p^n} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Podnosząc jej obie strony do l -tej potęgi otrzymamy

$$\left(a^{p^n}\right)^l \equiv (-1)^l \pmod{p}.$$

Mamy więc kongruencję

$$1 - a^{p^n} + a^{2p^n} - a^{3p^n} \pm \ldots - a^{(p-2)p^n} + a^{(p-1)p^n} \equiv$$
$$\equiv \underbrace{1 + \ldots + 1}_{p} \pmod{p}.$$

Z niej to wnosimy, że liczba

$$a^{p^{n+1}} + 1 = \left(a^{p^n} + 1\right)\left[a^{(p-1)p^n} - a^{(p-2)p^n} \pm \ldots - a^{p^n} + 1\right]$$

jest podzielna przez p^{n+2}, gdyż p^{n+1} dzieli $a^{p^n} + 1$ na mocy założenia indukcyjnego, natomiast podzielność liczby

$$a^{(p-1)p^n} - a^{(p-2)p^n} + \ldots - a^{p^n} + 1 \quad \text{przez} \quad p$$

mamy z ostatniej kongruencji.

Na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy, że teza zadania jest spełniona dla każdej liczby całkowitej $n \geq 0$. ∎

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba $2^p + 3^p$ jest podzielna przez 11.

Odp. $p = 5$.

Zadanie 2. Udowodnij, że liczba

$$2222^{5555} + 5555^{2222}$$

jest podzielna przez 7.

Zadanie 3. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$3^{6^n} - 2^{6^n}$$

jest podzielna przez 35.

Zadanie 4. Wyznacz cztery ostatnie cyfry liczby

$$5^{5555}.$$

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb naturalnych, dla których

$$x \equiv -1 \pmod{y} \quad \text{oraz} \quad y \equiv -1 \pmod{x}.$$

Odp. $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$.

Zadanie 6. Wyznacz wszystkie trójki (x, y, z) liczb całkowitych takich, że $2 \leq x \leq y \leq z$, dla których liczby

$$\frac{xy-1}{z}, \quad \frac{yz-1}{x}, \quad \frac{zx-1}{y} \quad \text{są całkowite.}$$

Odp. $(2, 3, 5)$.

Zadanie 7. Udowodnij, że dla naturalnych $n \geq 1$ liczby postaci

$$3 \cdot 2^{2^{2n}} + 1$$

są wszystkie złożone.

Zadanie 8. Udowodnij, że dla naturalnych n liczby postaci $10 \cdot 2^{2^{2n}} + 1$ są wszystkie złożone.

Zadanie 9. Wyznacz resztę z dzielenia liczby

$$10^{3^n} + 10^{3^{n-2}} + 10^{3^{n-3}} + \ldots + 10^{3^{n-n}}$$

przez 3^{n+1}. Odp. n

Zadanie 10. Udowodnij, że dla naturalnych n liczby postaci $7 \cdot 2^{2^{4n+3}} + 1$ są wszystkie złożone.

XIX. SUPLEMENT

Zadania treningowe przed olimpiadą

1. W kole o promieniu 1 obrano 64 różne punkty. Wykaż, że 10 z nich leży w kole o promieniu $\frac{1}{2}$.

2. W przestrzeni danych jest $m \cdot n + 1$ punktów. Wśród dowolnych $m + 1$ z nich istnieją dwa odległe od siebie o 1. Wykaż, że istnieje kula o promieniu 1 zawierająca co najmniej $n + 1$ punktów spośród danych.

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} x_k + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{n+\sqrt{n}}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).$$

4. Liczby dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{1-x_k}} \geq \frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}}{\sqrt{n-1}}.$$

5. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające warunki:

(i) $f(1) = 1$,

(ii) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R}$,

(iii) $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ dla wszystkich $x \neq 0$.

6. Ciąg (x_n) określają warunki :

$$x_0 = 1995\ ,\ x_n = -\frac{1995}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Oblicz sumę $\sum_{n=0}^{1995} 2^n x_n$.

7. Liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n \geq 3)$ są parami różne i spełniają warunek : $x_1 + \frac{1}{x_2} = x_2 + \frac{1}{x_3} = \dots = x_n + \frac{1}{x_1}$.

Udowodnij, że

$$|x_1 x_2 \dots x_n| = 1.$$

8. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych równanie

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 - 1} + \sqrt{x_3 - 2} + \dots + \sqrt{x_n - n + 1} + \frac{n(n-3)}{4} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

9. Liczby naturalne a, b, c tworzą ciąg geometryczny, p jest liczbą pierwszą. Wykaż, że jeżeli liczba $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ dzieli się przez p, to dzieli się także przez p^2.

10. Dany jest ciąg (x_n) taki, że $0 \leq x_1 \leq 1$ oraz $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Udowodnij,że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \sqrt{n}.$$

11. Liczby całkowite x, y, z spełniają warunek $(x-y)(y-z)(z-x) = x + y + z$. Udowodnij, że liczba $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$ jest podzielna przez 81.

12. W pewnej szkole uczy się 1995 uczniów. Każdy z nich ma wśród pozostałych co najmniej 45 znajomych. Udowodnij, że zawsze znajdziemy takich czterech uczniów tej szkoły, którzy mogą usiąść przy okrągłym stole tak, by każdy siedział obok swoich znajomych.

13. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \dots, b_n$ zachodzi nierówność

$$1 + \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 \leq \frac{4}{3}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

14. Wykaż, że jeżeli p i q są różnymi liczbami pierwszymi, to liczba $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ nie jest pierwsza.

15. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, monotoniczne i odwracalne oraz spełniające dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$ równanie

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2x.$$

16. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \cdot \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-1}}.$$

17. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \dots, b_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k b_k} \geq \frac{4n^2}{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2}.$$

18. Rozwiąż w zbiorze liczb całkowitych układ nierówności

$$\begin{cases} 3x^2 + 2yz \leq 1 + y^2 \\ 3y^2 + 2zx \leq 1 + z^2 \\ 3z^2 + 2xy \leq 1 + x^2. \end{cases}$$

19. Ciąg (F_n) określają warunki:

$$F_0 = F_1 = 1 \ , \ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{n-k} = F_{2n} .$$

20. Liczby $a_i \geq 0$ oraz $b_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ spełniają warunki.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i = 1 \ .$$

Wykaż, że $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geq 1 .$

21. Udowodnij, że dla dowolnych $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sin \alpha_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \cos \alpha_i\right)^2 \leq n^2 \ .$$

22. Dla danej liczby pierwszej p określamy ciąg (x_n) następująco:
$x_1 = p \ , \ x_{n+1} = 2^{x_n} - 1$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots .$

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^{x_n} - 2$ jest podzielna przez x_n.

23. Udowodnij, że jeżeli a, b, c są liczbami wymiernymi i jeden pierwiastek równania $ax^3 + bx + c = 0$ jest iloczynem dwóch pozostałych pierwiastków tego równania, to jest on liczbą wymierną.

24. Dla każdej liczby naturalnej n oznaczmy przez a_n ostatnią cyfrę liczby $1 + 2 + 3 + \ldots + n$. Oblicz sumę $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1994}$.

25. Wyznacz wszystkie wielomiany $P(x)$ stopnia n takie, że dla każdego $x \in \mathbf{R}$

$$P(1) + P(x) + P(x^2) + \ldots + P(x^n) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^n)P(x).$$

26. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność

$$\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt[3]{6} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt[4]{24} - \sqrt[3]{6}\right)\ldots\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}\right) < \frac{n!}{(n+1)^n} .$$

27. Udowodnij, że liczba $\dfrac{5^{125} - 1}{5^{25} - 1}$ jest złożona.

28. Udowodnij, że jeżeli liczby a i b są naturalne i liczba $a^2 + ab + 1$ jest podzielna przez $b^2 + ba + 1$, to $a = b$.

29. Oblicz sumę

$$\sum_{j=0}^{11} \frac{x_j^3}{1 - 3x_j + 3x_j^2} \ , \text{gdzie} \ \ x_j = \frac{j}{11} \ \ \text{dla} \ j = 0, 1, 2, \ldots, 11.$$

30. Oblicz iloczyn $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$, jeśli wiadomo, że

$$x_1 x_2 + x_2 = x_2 x_3 + x_3 = \ldots = x_n x_1 + x_1 = -1.$$

31. Ciąg (F_n) jest określony następująco :

$$F_1 = F_2 = 1 \ , \ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{dla} \quad n \geq 3$$

(tzw. ciąg Fibonacciego).

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wielomiany

$$x^{2n+1} + F_{2n+1} x^2 - F_{2n-1} \quad \text{i} \quad x^{2n+2} - F_{2n+2} x^2 + F_{2n}$$

są podzielne przez $x^2 + x - 1$.

32. Wyznacz wszystkie pary funkcji $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ i $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające dla wszystkich $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ układ równań:

$$\begin{cases} f(2x + 1) + 2g(2x + 1) = 2x \\ f\left(\dfrac{x}{x - 1}\right) + g\left(\dfrac{x}{x - 1}\right) = x. \end{cases}$$

33. Liczby nieujemne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ spełniają warunek: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k(1 - x_k)} \leq \sqrt{n-1}.$$

34. Ciąg (x_n) jest określony następująco:

$$x_1 = 2, \quad x_n = n\,x_{n-1} + 1 \quad \text{dla } n = 2, 3, \ldots.$$

Udowodnij, że jeżeli każde dwa wierzchołki $(x_n + 1)$ - kąta wypukłego połączymy odcinkiem pomalowanym na jeden z n kolorów, to otrzymamy co najmniej jeden trójkąt o wierzchołkach w wierzchołkach tego wielokąta i o bokach jednego koloru.

35. Niech d będzie liczbą naturalną. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\frac{1 \cdot d!}{d} + \frac{2(d+1)!}{d^2} + \ldots + \frac{n(d+n-1)!}{d^n} = \frac{(n+d)!}{d^n} - d!.$$

36. Ciąg (x_n) określony jest następująco:

$$x_1 = 3, \quad \sqrt{x_{n+1}} = 2\sqrt{x_n} + \sqrt{3(1 + x_n)} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Udowodnij,że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami naturalnymi.

37. Rozwiąż w liczbach dodatnich układ równań

$$\begin{cases} x^5 + y^5 + z^5 = 9(x + y + z) \\ x + y + z = xyz \end{cases}.$$

38. Rozwiąż równanie

$$(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^6)^2.$$

39. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ liczba

$$\left[\left(\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+2}\right)^3\right] + 1 \quad \text{dzieli się przez 8.}$$

40. Dla każdej liczby naturalnej n przyjmujemy

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$T_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$$

$$U_n = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{3} + \ldots + \frac{T_n}{n+1}.$$

Udowodnij, że

$$T_n = (n+1)(S_{n+1} - 1) \quad \text{oraz} \quad U_n = (n+2)(S_{n+1} - 1) - n.$$

41. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie

$$x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1).$$

42. Liczby nieujemne $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniają warunki:

1° $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$

2° $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1$.

Udowodnij, że dla każdego n $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)\,a_k^2 \leq 1$.

43. Niech m i n będą liczbami naturalnymi, przy czym $m \leq n$. Przyjmujemy

$$T_m = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{m}.$$

Wykaż, że

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k = 2^{2n-1} + \binom{2n-1}{n}.$$

44. Ciąg (a_n) jest określony następująco:

$$a_0 = 2, \; a_1 = 3, \; a_2 = 6.$$

$$a_n = (n+4)a_{n-1} - 4n\,a_{n-2} + (4n-8)a_{n-3}, \quad n \geq 3.$$

Wykaż, że $a_n = n! + 2^n$ dla każdego n.

45. Liczby rzeczywiste x, y, z są parami różne i spełniają warunek

$$(x - y)\sqrt[3]{1 - z^3} + (y - z)\sqrt[3]{1 - x^3} + (z - x)\sqrt[3]{1 - y^3} = 0.$$

Udowodnij, że $(1 - x^3)(1 - y^3)(1 - z^3) = (1 - xyz)^3$.

46. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie

$$x^4 + y^4 + z^4 = 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 + 3.$$

47. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, m są całkowite i $a^2 + 2mb^2$ jest kwadratem liczby całkowitej, to $a^2 + mb^2$ jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych.

48. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby naturalnej n. Ciąg (x_n) jest określony następująco:

$$x_1 = 1995^{1995}, \quad x_{n+1} = S(x_n) \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wyznacz x_{1995}.

49. Ciąg (x_n) określony jest następująco:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n^2 + x_n \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Udowodnij, że dla każdego n

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + x_i} + \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + x_i} = 1.$$

50. Funkcja $f\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ spełnia dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R}_+$ warunek $f(xy) \le f(x)f(y)$. Udowodnij, że dla każdego $x \in \mathbf{R}_+$ oraz dla każdego $n \in \mathbf{N}$

$$f(x^n) \le f(x) \cdot \sqrt{f(x^2)} \cdot \sqrt[3]{f(x^3)} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{f(x^n)}.$$

51. Niech A i B będą takimi liczbami naturalnymi, że

$$(A, B) = 1 \quad \text{i} \quad \frac{A}{B} = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}.$$

Udowodnij, że liczba AB nie jest podzielna przez 5.

52. Udowodnij, że dla każdego $n \ge 2$

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{(n-k)!}\right) = 1 - \frac{1}{n!}.$$

53. Liczby p, q, r są pierwiastkami rzeczywistymi równania

$$x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Wyznacz zbiór wartości sumy $p^2q + q^2r + r^2p$.

54. Niech f będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, zaś a i b takimi różnymi liczbami całkowitymi, że

$$f(a)f(b) = -(a - b)^2.$$

Wykaż, że $f(a) + f(b) = 0$.

55. Udowodnij, że

$$\sum_{k=0}^{997} \frac{(-1)^k}{1995 - k} \cdot \binom{1995 - k}{k} = \frac{1}{1995}.$$

56. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ spełniające warunki:

(i) $f(0) = 1$

(ii) $f(f(n)) = n$ dla wszystkich $n \in \mathbf{Z}$

(iii) $f(f(n + 2) + 2) = n$ dla wszystkich $n \in \mathbf{Z}$.

57. Udowodnij, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} + \sqrt{a^2 - b^2 + c^2} + \sqrt{-a^2 + b^2 + c^2} \le a + b + c.$$

58. Niech k i $n \ge 2$ będą liczbami naturalnymi. Oblicz sumę

$$\left[\frac{2^{n+1}+1}{2^{n-1}+1}\right]+\left[\frac{3^{n+1}+1}{3^{n-1}+1}\right]+\ldots+\left[\frac{k^{n+1}+1}{k^{n-1}+1}\right].$$

59. Wyznacz wszystkie liczby wymierne r, dla których pierwiastki równania $rx^2+(r+1)x+(r-1)=0$ są całkowite.

60. Liczby naturalne a_n i b_n spełniają równość

$$a_n+b_n\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}.$$

Udowodnij, że liczby a_n i b_n są nieparzyste oraz spełniają równość

$$b_n^2=\left(\frac{a_n+(-1)^n}{2}\right)+\left(\frac{a_n-(-1)^n}{2}\right)^2.$$

61. Liczby nieujemne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek $x_1+x_2+\ldots+x_n=n$. Udowodnij, że

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+x_i^2}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}.$$

62. Wyznacz wszystkie trójki (x, y, z) liczb rzeczywistych większych od 1 spełniające równanie

$$x+y+z+\frac{3}{x-1}+\frac{3}{y-1}+\frac{3}{z-1}=2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}+\sqrt{z+2}\right).$$

63. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c, d są dodatnie oraz

$a+b=c+d$ i $a^2+b^2>c^2+d^2$, to $a^5+b^5>c^5+d^5$.

64. Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych nieparzystych m, n, p liczba

$$1^m+2^m+3^m+\ldots+\left[(n-1)^p\right]^m$$

jest podzielna przez n.

65. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ spełniające następujące warunki:

1° $f(x)=xf\left(\frac{1}{x}\right)$ dla wszystkich $x\ne 0$

2° $f(x)+f(y)=1+f(x+y)$ dla wszystkich $x\ne 0,\ y\ne 0$ takich, że $x+y\ne 0$.

66. Liczby dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ spełniają warunek

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}b_k.$$

Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\ge\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

67. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{2n-k}{k+1}\cdot(-1)^{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{n+k}.$$

68. Ciąg (a_n) jest określony następująco:

$a_1=2,\ a_2=3$

$\left(a_{n-1}^2+a_n^2\right)\left(a_n^2+a_{n+1}^2\right)=\left(a_{n-1}a_n+a_na_{n+1}\right)^2$ dla $n=2, 3, \ldots$

Wyznacz a_n.

69. Liczby dodatnie a i b spełniają dla pewnego $x\in\mathbf{R}$ warunek

$$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}.$$

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\frac{\sin^{2n} x}{a^{n-1}} + \frac{\cos^{2n} x}{b^{n-1}} = \frac{1}{(a+b)^{n-1}}.$$

70. Udowodnij, że jeżeli funkcje $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ spełniają dla każdego $x \in \mathbf{R}$ równości

$$f(x+1) = \frac{g(x)}{f(x)} \quad \text{oraz} \quad g(x+1) = \frac{g(x) - 1}{f(x) - 1},$$

to są okresowe.

71. Ciąg (F_n) jest określony następująco:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{dla } n \ge 0.$$

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{F_1F_3} + \frac{1}{F_2F_4} + \frac{1}{F_3F_5} + \ldots + \frac{1}{F_nF_{n+2}}\right).$$

72. Liczby całkowite $n_1, n_2, \ldots, n_{100}$ spełniają warunek

$$\frac{1}{\sqrt{n_1}} + \frac{1}{\sqrt{n_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n_{100}}} = 20.$$

Udowodnij, że co najmniej dwie z nich są równe.

73. Liczby wymierne a i b spełniają dla każdego naturalnego n równość

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = 2a^n b^n.$$

Udowodnij, że liczba $\sqrt{1 - ab}$ jest wymierna.

74. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+1}{\sqrt{1^4+4}} \cdot \frac{2^2+1}{\sqrt{2^4+4}} \cdot \frac{3^2+1}{\sqrt{3^4+4}} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2+1}{\sqrt{n^4+4}}.$$

75. Oblicz $f(1) + f(3) + f(5) + \ldots + f(999997) + f(999999)$,

jeśli $f(n) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1} + \sqrt[3]{n^2-1} + \sqrt[3]{n^2-2n+1}}$

dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots$.

76. Rozstrzygnij, która z dwóch liczb dodatnich a i b jest większa, jeżeli wiadomo, że spełniają one dla pewnego naturalnego n warunki

$$a^n = a + 1 \quad \text{oraz} \quad b^{2n} = b + 3a.$$

77. Dane są takie liczby naturalne a i b ,że suma

$\dfrac{a^2-1}{b+1} + \dfrac{b^2-1}{a+1}$ jest liczbą całkowitą. Udowodnij, że liczby

$\dfrac{a^2-1}{b+1}$ i $\dfrac{b^2-1}{a+1}$ również są całkowite.

78. Udowodnij, ze jeżeli x i y są takimi liczbami całkowitymi, dla których liczba $x^2 + y^2 - x$ dzieli się przez $2xy$, to x jest kwadratem liczby całkowitej.

79. Udowodnij, że jeżeli p i q sa takimi liczbami pierwszymi, dla których liczba $\sqrt{p^2 + 7pq + q^2} + \sqrt{p^2 + 14pq + q^2}$ jest całkowita, to $p = q$.

80. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$(2n^2 + 3n + 1)^n \ge 6^n (n!)^2.$$

81. Wykaż, że liczba $3^n + 2 \cdot 17^n$ nie jest kwadratem liczby całkowitej dla żadnego całkowitego $n \ge 0$.

82. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $xyz = 1$. Udowodnij, że

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \ge 2\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right).$$

oraz rozstrzygnij, kiedy zachodzi tutaj równość.

83. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{a_i}{a_j}\right)\right)^{1/n} \geq 2^n.$$

84. Niech a, b, c, d, p i q będą takimi liczbami naturalnymi, że

$$ad - bc = 1 \text{ oraz } \frac{a}{b} > \frac{p}{q} > \frac{c}{d}.$$

Udowodnij, że:

(i) $q \geq b + d$.

(ii) jeżeli $q = b + d$, to $p = a + c$.

85. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie

$$5(xy + yz + zx) = 4xyz.$$

86. Wewnątrz koła o średnicy 5 obrano 10 różnych punktów. Udowodnij, że pewne dwa z nich są odległe od siebie o mniej niż 2.

87. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}.$$

88. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $xyz = 1$. Wyznacz wartość sumy

$$\frac{x+1}{xy+x+1} + \frac{y+1}{yz+y+1} + \frac{z+1}{zx+z+1}.$$

89. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ spełniające dla wszystkich $x > 0$ równanie

$$f(f(x)) + f(x) = 6x.$$

90. Niech $$S_n = \frac{\sin^{2n+2}\alpha}{\sin^{2n}\beta} + \frac{\cos^{2n+2}\alpha}{\cos^{2n}\beta}$$

Udowodnij, że jeżeli $S_k = 1$ dla pewnego k, to $S_n = 1$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

91. Funkcje $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ są różniczkowalne w $\mathbf{R}$, nie są stałe i spełniają dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R}$ równości

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$$
$$g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y).$$

Udowodnij, że jeżeli $f'(0) = 0$, to $(f(x))^2 + (g(x))^2 \equiv 1$.

92. Rozwiąż w liczbach dodatnich układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \dfrac{1}{4} \\[2mm] \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{4}{x_2} + \ldots + \dfrac{n^2}{x_n} = n^2(n+1)^2. \end{cases}$$

93. Udowodnij, że jeżeli liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są nieujemne, to

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\max_{1\leq i\leq n}\{a_i\}\right)^2.$$

94. Liczby a, b, c parami różne, są różne od zera i spełniają warunek $a + b + c = 0$. Wykaż, że

$$\left(\frac{a-b}{c^2} + \frac{b-c}{a^2} + \frac{c-a}{b^2}\right)\left(\frac{c^2}{a-b} + \frac{a^2}{b-c} + \frac{b^2}{c-a}\right) = 4abc\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^3.$$

95. Niech p będzie liczbą pierwszą. Oblicz sumę wszystkich ułamków nieskracalnych o mianowniku p należących do przedziału (a, b), gdzie a i b są liczbami naturalnymi.

96. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych równanie

$$\left(16x^{200} + 1\right)\left(y^{200} + 1\right) = 16(xy)^{100}.$$

97. Udowodnij, że jeżeli funkcja f spełnia dla każdego $x \in \mathbf{R}$ równość $\sqrt{2}f(x+1) = f(x+2) + f(x)$, to jest okresowa.

98. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie

$$\left[\frac{x}{1!}\right]+\left[\frac{x}{2!}\right]+\left[\frac{x}{3!}\right]+\ldots+\left[\frac{x}{10!}\right]=1001.$$

99. (a). Wykaż, że istnieje liczba nieparzysta n, dla której przy żadnym naturalnym parzystym k żadna z liczb ciągu

$$k^k+1,\quad k^{k^k}+1,\quad k^{k^{k^k}}+1,\quad \ldots$$

nie dzieli się przez n.

(b). Udowodnij, że dla każdej naturalnej n istnieje taka liczba naturalna k, że wszystkie wyrazy ciągu

$$k+1,\quad k^k+1,\quad k^{k^k}+1,\quad k^{k^{k^k}}+1,\quad \ldots$$

są podzielne przez n.

100. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej nieparzystej $n>1$ liczba

$$\left(2^2-1\right)\left(2^3-1\right)\left(2^4-1\right)\ldots\left(2^{n-1}-1\right)$$

jest podzielna przez n.

101. Udowodnij, że jeżeli $a^2+b^2+(a+b)^2=c^2+d^2+(c+d)^2$, to $a^4+b^4+(a+b)^4=c^4+d^4+(c+d)^4$.

102. Rozstrzygnij, czy istnieje sześciokąt o wierzchołkach w punktach kratowych mający boki, których kwadraty długości są sześcioma kolejnymi liczbami naturalnymi.

103. Udowodnij, że jeżeli liczby a i b są naturalne i liczba a^2+ab+b^2 jest podzielna przez $a+b$, to liczba a^4+b^4 jest podzielna przez $(a+b)^2$.

104. Niech $(x]$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od liczby rzeczywistej x. Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych $n\ge 1$, $p\ge 2$ zachodzi równość

$$\left(\frac{p^{n+1}-1}{p^n-1}\cdot\left(\frac{p^{n+1}-2}{p^n-2}\cdot\left(\ldots\left(\frac{p^{n+1}-n}{p^n-n}\right]\ldots\right]\right]\right]=\frac{p^{n+1}-1}{p-1}.$$

105. Udowodnij, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ z przedziału $<-1,1>$ zachodzi nierówność

$$\left|\prod_{i=1}^{n} a_i-\prod_{i=1}^{n} b_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}\left|a_i-b_i\right|.$$

106. Liczby rzeczywiste $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ z przedziału $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ spełniają warunek

$$\sum_{i=1}^{n}\cos^2\alpha_i=1.$$

Udowodnij, że

$$\sum_{i=1}^{n} tg\alpha_i\ge(n-1)\sum_{i=1}^{n}\operatorname{ctg}\alpha_i.$$

107. Udowodnij, że jeżeli liczby całkowite $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p$, gdzie $p>3$ jest liczbą pierwszą, tworzą ciąg arytmetyczny, to suma $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_p^2$ jest liczbą podzielną przez p.

108. Udowodnij, że dla każdego naturalnego n

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{n+k}k^2=n\cdot 2^{2n-2}.$$

109. Rozwiąż równanie

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=\frac{5x-4}{3}.$$

110. W zawodach Olimpiady Matematycznej wzięło udział $(m-1)n+1$ uczestników. Udowodnij, że wśród nich jest albo m uczestników nie znających się nawzajem, albo jeden uczestnik znający się z co najmniej n olimpijczykami. Rozstrzygnij, czy teza zadania jest prawdziwa, gdy liczba uczestników olimpiady wynosi $(m-1)n$.

111. Niech n będzie liczbą złożoną, zaś $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_{m-1} < d_m = n$ wszystkimi dzielnikami liczby n. Udowodnij, że liczba

$$\frac{2}{\log n} \cdot \sum_{i=1}^{m-1} \log d_i$$

jest naturalna.

112. Udowodnij, że jeżeli α, β, γ są kątami dowolnego trójkąta, n - jest liczbą naturalną, to

$$\operatorname{tg}^n \alpha + \operatorname{tg}^n \beta + \operatorname{tg}^n \gamma \geq \left(3\sqrt{3}\right)^n.$$

113. Wyznacz wszystkie rozwiązania w liczbach pierwszych p, q, r równania

$$p^q + q^p = r.$$

114. Niech n będzie liczbą złożoną, zaś $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_k$ - wszystkimi dzielnikami liczby n.
Udowodnij, że

$$\frac{d_1}{\sqrt{n}} + \frac{d_2}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{d_k}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{d_1} + \frac{\sqrt{n}}{d_2} + \ldots + \frac{\sqrt{n}}{d_k}.$$

115. Udowodnij, że jeżeli $a > b > 0$, to

$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

116. Rozwiąż w liczbach naturalnych x, y, z układ równań:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz \\ x^2 = 2(x+y+z) \end{cases}.$$

117. Ciąg (x_n) jest określony następująco:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1} &= 1, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1 \\ -x_{n-1} + 2x_n &= 1. \end{aligned}$$

Wyznacz x_n.

118. (a) Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych M i N zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{i^2 j^2} < 4.$$

(b) Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych M i N zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{ij} \cdot \min\left\{ \frac{1}{i^2}, \frac{1}{j^2} \right\} < 4.$$

119. Ciąg (F_n) jest określony następująco:
$F_1 = 1,\ F_2 = -1,\ F_n = -F_{n-1} - 2F_{n-2}$ dla $n \geq 3$.

Udowodnij, że dla każdego $n \geq 2$

$$2^{n+1} - 7F_{n-1}^2$$

jest kwadratem liczby naturalnej.

120. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie

$$\frac{x}{y} = \frac{\left(x^2 - y^2\right)^{\frac{y}{x}} + 1}{\left(x^2 - y^2\right)^{\frac{y}{x}} - 1}.$$

121. Rozwiąż nierówność

$$[x] \cdot \{x\} < x - 1.$$

122. Dla liczb naturalnych k i n oznaczmy przez $N_n(k)$ liczbę takich liczb naturalnych d, że $d \mid k$ i $k \le d^2 \le n$. Znajdź sumę

$$N_n(1) + N_n(2) + \ldots + N_n(n^2).$$

123. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej p istnieją takie liczby całkowite x i y, że

$$x^2 + y^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

124. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^n}{n}\right).$$

125. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \ge 2$ zachodzi nierówność

$$1\cdot\sqrt{\binom{n}{1}} + 2\cdot\sqrt{\binom{n}{2}} + 3\cdot\sqrt{\binom{n}{3}} + \ldots + n\cdot\sqrt{\binom{n}{n}} < \sqrt{2^{n-1}\cdot n^3}.$$

126. Rozwiąż układ nierówności:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x_1} \ge x_2 \\ 2\sqrt{x_2 - 1} \ge x_3 - 1 \\ 2\sqrt{x_3 - 1} \ge x_4 - 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2\sqrt{x_{n-1} - (n-2)} \ge x_n - (n-2) \\ 2\sqrt{x_n - (n-1)} \ge x_1 + 1. \end{cases}$$

127. Rozstrzygnij, ile wyrazów dodatnich występuje w ciągu

$\sin 1^\circ$, $\sin 10^\circ$, $\sin 100^\circ$, $\sin 1000^\circ$, ...

128. Udowodnij, że

$$[\log_2 x - \log_2[x]] = [\log_2 x] - [\log_2[x]].$$

129. Udowodnij, że jeżeli $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ oraz $|p_1| + |p_2| + |p_3| > 0$, to

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1a_1^n + p_2a_2^n + p_3a_3^n}{p_1b_1^n + p_2b_2^n + p_3b_3^n}$$

dla każdego naturalnego n.

130. Niech $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Wykaż, że

$$x^y = y^x.$$

131. Ciąg (x_n) jest określony następująco:

$$x_1 = \frac{1}{2},\quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n^2 x_n \quad \text{dla } n \ge 1.$$

Wyznacz x_n.

132. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + x$. Wykaż, że dla żadnych liczb całkowitych a i b nie zachodzi równość

$$4f(a) = f(b).$$

133. Niech a, b, c będą pierwiastkami równania

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0.$$

Wykaż, że liczba

$$\frac{a^{1994} - b^{1994}}{a - b} + \frac{b^{1994} - c^{1994}}{b - c} + \frac{c^{1994} - a^{1994}}{c - a}$$

jest całkowita.

134. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej p istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n, dla których $2^n \equiv n \pmod{p}$.

135. Wykaż, że liczba 2^{n-1} dzieli liczbę $n!$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest postaci 2^{k-1}, gdzie k jest liczbą naturalną.

136. Niech $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$
oraz $y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$.
Udowodnij, że dla każdego $n \geq 0$ $y_n^2 = 3x_n^2 + 1$.

137. Wykaż, że jeżeli $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, to
$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geq (x-z)(y-z)(x+y-z)$.

138. Udowodnij, że jeżeli funkcja $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełnia dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$ nierówności

$f(x+2) \geq f(x) + 2$ oraz $f(x+3) \leq f(x) + 3$,
to funkcja $g(x) = f(x) - x$ jest okresowa.

139. Ciąg (a_n) jest określony następująco:

$a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $n(n+1)a_{n+1} = n(n-1)a_n - (n-2)a_{n-1}$,
$n \geq 1$. Oblicz

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{1994}}{a_{1995}}.$$

140. Udowodnij, że suma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ dzieli $n!$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n + 1$ nie jest liczbą pierwszą nieparzystą.

141. Wielomian $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ spełnia warunki:

$$f(1) = 1,\quad f(0,9) = 0,$$

$$-0,1 \leq f(x) \leq 0 \qquad \text{dla wszystkich } 0 \leq x \leq 0,9.$$

Udowodnij, że $n \geq 4$.

142. Niech $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ oraz

$$a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n, & \text{gdy } 2 \mid a_n \cdot a_{n+1} \\ a_{n+1} - a_n, & \text{gdy } 2 \nmid a_n \cdot a_{n+1}. \end{cases}$$

Wykaż, że $a_n \neq 0$ dla wszystkich $n = 1, 2, 3\ldots$.

143. Funkcja $f\colon \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ spełnia warunki:

1° $f(x) - f(y) = f(x)\cdot f\left(\frac{1}{y}\right) - f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot f(y)$

dla wszystkich $x, y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

2° $f(x) = \frac{1}{2}$ dla co najmniej jednego $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Wyznacz $f(-1)$.

144. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$1^n + 2^n + \ldots + 9^n - (1 + 6^n + 8^n)$ jest podzielna przez 18.

145. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba

$$\frac{2^{p-1} - 1}{p}$$

jest kwadratem liczby naturalnej.

146. Dla jakich liczb naturalnych n liczba

$3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n$ jest złożona ?

147. Niech X będzie zbiorem n elementowym. Wyznacz liczbę wszystkich par (A, B) różnych podzbiorów zbioru X takich, że $A \subset B$.

148. Dla każdej liczby naturalnej n niech

$$f(n) = \left[2\sqrt{n}\right] - \left[\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\right].$$

Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których $f(n) = 1$.

149. Rozwiąż w liczbach całkowitych nieujemnych równanie

$$7^x + 1 = 3^y + 5^z.$$

150. Udowodnij, że jeżeli liczby naturalne x, y, z spełniają równanie $x^2 + y^2 + z^2 = 1993$, to $x + y + z$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

151. Wyznacz największą liczbę a, dla której nierówność

$$\frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}} + \frac{y}{\sqrt{z^2 + x^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} > a$$

jest spełniona przez każdą trójkę (x, y, z) liczb rzeczywistych dodatnich.

152. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba $x > 1$ taka, że

$$[\log_x 3] - [\log_x 2] = n.$$

153. Niech $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ będzie ciągiem takich liczb dodatnich, że $a_{i-1}a_{i+1} \le a_i^2$ dla $i = 1, 2, 3, \ldots$. Udowodnij, że dla każdego $n > 1$

$$\frac{a_0 + \ldots + a_n}{n+1} \cdot \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \ge \frac{a_0 + \ldots + a_{n-1}}{n} \cdot \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

154. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = x\left(1993 + \sqrt{1995 - x^2}\right).$$

155. Ciągi (x_n) i (y_n) są określone następująco: $x_0 = 2$, $y_0 = 1$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}, \quad y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_n} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Udowodnij, że ciągi te mają wspólną granicę i wyznacz ją.

156. Liczby naturalne a, b, c, d spełniają warunek $ab = cd$. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $a^n + b^n + c^n + d^n$ jest złożona.

157. Wyznacz wszystkie pary (p, q) liczb pierwszych, dla których liczba $(p + 1)^q$ jest kwadratem liczby naturalnej.

158. Niech

$$1995\left\{\frac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots + \cfrac{1}{1}}}}\right. = \frac{m}{n},$$

gdzie m i n są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi. Wyznacz wartość wyrażenia $m^2 + mn - n^2$.

159. Udowodnij, że jeżeli $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$ oraz $a + b + c \le 3$, to

$$\frac{a}{1 + a^2} + \frac{b}{1 + b^2} + \frac{c}{1 + c^2} \le \frac{3}{2} \le \frac{1}{1 + a} + \frac{1}{1 + b} + \frac{1}{1 + c}.$$

160. Udowodnij, że liczba

$$4^{545} + 545^4 \text{ jest złożona.}$$

161. Udowodnij, że jeżeli dla liczb naturalnych a, b, c liczby $p = b^c + a$, $q = a^b + c$, $r = c^a + b$ są pierwsze, to dwie z nich są równe.

162. Ciąg (x_n) określony jest następująco:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \left[\frac{3}{2} x_n\right] \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Udowodnij, że :

1° w ciągu (x_n) występuje nieskończenie wiele liczb parzystych i nieskończene wiele liczb nieparzystych.

2° ciąg $\left((-1)^{x_n}\right)$ nie jest okresowy.

163. Ciąg (a_n) określony jest natępująco:

$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_{2^k+j} = -a_j$ dla $1 \le j \le 2^k,\ k = 1, 2, 3, \ldots$.

Oblicz sumę $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1994}$.

164. Oblicz sumę

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \binom{n-k}{k} \frac{1}{4^k}.$$

165. Rozstrzygnij, ile rozwiązań w liczbach całkowitych posiada równanie

$$\left[\sqrt[1995]{n}\right] + \left[\sqrt[1995]{\frac{n+1}{2}}\right] + \left[\sqrt[1995]{\frac{n+2}{3}}\right] + \ldots + \left[\sqrt[1995]{\frac{n+1994}{1995}}\right] = 1996.$$

166. Niech n będzie liczbą naturalną, zaś $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ takimi liczbami rzeczywistymi, że

$\sum_{i=1}^{n} \sin^2 \alpha_i = 1$. Udowodnij, że $\left| \sum_{i=1}^{n} \sin 2\alpha_i \right| \le 2\sqrt{n-1}$.

167. Dla danej liczby naturalnej n rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} \binom{2}{2} x_1 = \binom{4}{4} \\ \binom{3}{2} x_1 + \binom{2}{2} x_2 = \binom{5}{4} \\ \binom{4}{2} x_1 + \binom{3}{2} x_2 + \binom{2}{2} x_3 = \binom{6}{4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \binom{n+1}{2} x_1 + \binom{n}{2} x_2 + \ldots + \binom{2}{2} x_n = \binom{n+3}{4} \end{cases}$$

168. Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych k, m, n liczba

$1^m + 2^m + 3^m + \ldots + (n^k - 1)^m + (n^k)^m$

jest podzielna przez n^{k-1}.

169. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \ge 2$ zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{n-k} \cdot \frac{1}{2k-1} < 4.$$

170. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)}.$$

171. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=3}^{n} \left(1 - \operatorname{tg}^4 \frac{\pi}{2^k}\right).$$

172. Udowodnij, że pierwiastki kwadratowe trzech różnych liczb pierwszych nie mogą być wyrazami tego samego ciągu geometrycznego.

173. Liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Udowodnij, że

$$\sum_{\substack{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \\ |\varepsilon_i| = 1,\ i = 1, 2, \ldots n}} \left| \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \ldots + \varepsilon_n x_n \right| \le 2^n.$$

174. Udowodnij, że jeżeli

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cos \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \cos(\alpha_i + 1) = 0, \quad \text{to}$$

dla każdego $\beta \in \mathbf{R}$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cos(\alpha_i + \beta) = 0.$$

175. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{32}$ całkowite nieparzyste i niepodzielne przez 3 tworzą ciąg arytmetyczny. Wykaż, że liczba

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \ldots + a_{31}^2 - a_{32}^2$$

jest podzielna przez 384.

176. Niech S będzie podzbiorem zbioru liczb wymiernych o następujących własnościach:

a) jeżeli $x, y \in S$, to $x + y \in S$ i $xy \in S$.

b) dla każdej liczby wymiernej r zachodzi dokładnie jeden z warunków: $r \in S$, $-r \in S$, $r = 0$.
Udowodnij, że S jest zbiorem liczb wymiernych dodatnich.

177. Dana jest liczba pierwsza $p \geq 3$. Oznaczmy przez r_k resztę z dzielenia liczby k^p przez p^2 $(k = 1, 2, \ldots, p-1)$. Oblicz

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_{p-1}.$$

178. Wyznacz sumę

$$\frac{\sin 1}{\cos 0 \cdot \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \cdot \cos 2} + \frac{\sin 1}{\cos 2 \cdot \cos 3} + \ldots + \frac{\sin 1}{\cos(n-1) \cdot \cos n}.$$

179. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + \ldots + 2nx_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ kx_1 + 2kx_2 + 3kx_3 + \ldots + (1 + k^2)x_k + \ldots + nkx_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ nx_1 + 2nx_2 + 3nx_3 + \ldots + (1 + n^2)x_n = 0 \end{cases}$$

180. Udowodnij, że liczba $2^{147} - 1$ jest podzielna przez 343.

181. Udowodnij, że jeżeli $k_1, k_2, \ldots, k_n$ $(n \geq 2)$ są liczbami całkowitymi nieujemnymi, to

$$k_1! \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n! \geq \left(\left[\frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}{n}\right]!\right)^n.$$

182. Udowodnij, że jeżeli liczby a i b są dodatnie, m - liczbą całkowitą, to

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m \geq 2^{m+1}.$$

183. Niech

$$f(a, b, c) = \left| \frac{|b-a|}{|ab|} + \frac{b+a}{ab} - \frac{2}{c} \right| + \frac{|b-a|}{|ab|} + \frac{b+a}{ab} - \frac{2}{c}.$$

Udowodnij, że

$$f(a, b, c) = 4 \max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\}.$$

184. Wykaż, że jeżeli liczby wymierne dodatnie a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$\left(1 + \frac{b-c}{a}\right)^a \left(1 + \frac{c-a}{b}\right)^b \left(1 + \frac{a-b}{c}\right)^c \leq 1.$$

185. Udowodnij, że jeżeli $n \geq 2$ jest liczbą naturalną, to liczba

$$\sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \ldots + \sqrt[n-1]{n - 1 + \sqrt[n]{n}}}}$$

jest niewymierna.

186. Oblicz $$\sum_{n=1}^{1995} \frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}}}.$$

187. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których równanie

$|x| + |x+1| + |x+2| + \ldots + |x+n| = n$

posiada rozwiązanie.

188. Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n liczba

$$\frac{[(m\cdot n)!]^2}{(m!)^{n+1}\cdot(n!)^{m+1}}$$

jest naturalna.

189. W przedziale $\left(1;(2n-1)^2\right)$ wyróżniono n liczb naturalnych, z których każde dwie są względnie pierwsze. Udowodnij, że wśród wyróżnionych liczb jest co najmniej jedna liczba pierwsza.

190. Dana jest funkcja $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ oraz liczba $a \neq 0$. Udowodnij, że jeżeli f jest funkcją parzystą, zaś $g(x) = f(x-a)$ - funkcją nieparzystą, to f jest funkcją okresową.

191. Wyznacz sumę

$$\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\cdot\frac{n^2+n+1}{n!}.$$

192. Udowodnij, że jeżeli liczby a i b są nieujemne, n - liczbą naturalną, to

$$\prod_{k=1}^{n}\left(a^k+b^k\right)^2 \geq \left(a^{n+1}+b^{n+1}\right)^2.$$

193. Dla liczb całkowitych m i n takich, że $0 \leq m \leq n$ definiujemy liczby $d_{n,m}$ następująco:

(a) $d_{n,0} = d_{n,n} = 1, \quad n = 0,1,2,\ldots$.

(b) $m\cdot d_{n,m} = m\cdot d_{n-1,m} + (2n-m)d_{n-1,m-1}$ dla $0 < m < n$.

Udowodnij, że wszystkie liczby $d_{n,m}$ są kwadratami liczb całkowitych.

194. Ciąg (a_n) liczb naturalnych jest określony następująco:

$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, dla $n \geq 2$.

Udowodnij, że 2^k dzieli a_n wtedy i tylko wtedy, gdy 2^k dzieli n.

195. Wykaż, że jeżeli liczby a, b, c, d są rzeczywiste oraz

$a^2+b^2+c^2+d^2 \leq 1$, to

$(a+b)^4+(a+c)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4 \leq 6.$

196. Oblicz sumę

$$\frac{2}{3+1}+\frac{2^2}{3^2+1}+\frac{2^3}{3^4+1}+\ldots+\frac{2^{n+1}}{3^{2^n}+1}.$$

197. Niech x i y będą liczbami naturalnymi względnie pierwszymi takimi, że $xy > 1$, zaś n niech będzie liczbą naturalna parzystą. Udowodnij, że $x+y$ nie dzieli liczby x^n+y^n.

198. Niech $n > 1$ będzie liczbą całkowitą. Wyznacz liczbę wszystkich permutacji $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ takich, że

$1 \mid a_1 - a_2,\ 2 \mid a_2 - a_3,\ \ldots,\ n-1 \mid a_{n-1} - a_n.$

199. Niech a_1, a_2, a_3, a_4 i n będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że:

a_i jest względnie pierwsze z n, $i = 1,2,3,4$,

$(ka_1)_n + (ka_2)_n + (ka_3)_n + (ka_4)_n = 2n, \quad k = 1,2,\ldots,n-1.$

Udowodnij, że

$(a_1)_n + (a_j)_n = n$ dla pewnego $2 \leq j \leq 4$.

UWAGA. $(a)_n = a - n\cdot\left[\frac{a}{n}\right].$

200. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi nierówność

$x^4+y^4+(x^2+1)(y^2+1) \geq x^3(1+y)+y^3(1+x)+x+y$

oraz rozstrzygnij, kiedy zachodzi równość.

201. Wykaż, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$(ab + bc + ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right) \geq \frac{9}{4}.$$

202. Dana jest liczba naturalna N. Niech $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ będą wszystkimi dzielnikami tej liczby, zaś a_i niech oznacza liczbę wszystkich dzielników d_i $(i = 1, 2, \dots, n)$. Wykaż, że

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2.$$

203. Znajdź wszystkie wielomiany $P\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takie, że

1° $P(1) = 1$

2° $x^2 P(x-1) P(x+1) \equiv P^2(x)(x-1)(x+1)$.

204. Ciąg (x_n) jest określony następująco:

$$x_0 = 1994, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n + 1} \quad \text{dla} \quad n \geq 0.$$

Udowodnij, że dla każdego $0 \leq n \leq 998$

$$[x_n] = 1994 - n.$$

205. Niech $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x}$ dla $x \neq 0$. Przyjmujemy $f^{(0)}(x) = x$ oraz $f^{(n)}(x) = f\left(f^{(n-1)}(x)\right)$ dla $n \in \mathbf{N}$ oraz $x \neq 0$. Wykaż, że

$$\frac{f^{(n)}(x)}{f^{(n+1)}(x)} = 1 + \frac{1}{f\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2n}\right)}$$

dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$ oraz $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Książki polecane (*w języku polskim*)

[1] Zbiory zadań olimpijskich

1° S. Straszewicz "Zadania z olimpiad matematycznych" t. I - IV. PZWS Warszawa.

2° J. Browkin "Zadania z olimpiad matematycznych" t. V - VI. WS i P Warszawa.

3° H. Steinhaus "Sto zadań" PWN Warszawa.

4° W. Sierpiński "250 zadań z elementarnej teorii liczb" WS i P Warszawa.

5° L. Jeśmanowicz, J. Łoś "Zbiór zadań z algebry" PWN Warszawa.

6° H. Pawłowski, W. Tomalczyk "Zadania z matematyki dla olimpijczyków" Index Books Toruń.

7° H. Pawłowski, W. Tomalczyk "Zadania z matematyki dla najmłodszych olimpijczyków" Spółka TEST Gdynia.

8° M. Grabowski, K. Szymański "Zbiór zadań dla uczniów szkół średnich o zainteresowaniach matematycznych" WS i P Warszawa.

9° E. Stachowski, A.Zalewska "Zbiór zadań z matematyki" OSTOJA Warszawa.

10° Z. Bobiński, P.Nodzyński "Liga Zadaniowa" Agencja Wydawniczo-Reklamowa "Czarny Kruk" Bydgoszcz.

[2] Książki naukowe i popularno-naukowe

1° R. Courant, H. Robins "Co to jest matematyka" PWN Warszawa.

2° H.S. Coxeter "Wstęp do geometrii dawnej i nowej" PWN Warszawa.

3° J. Dynkin, W.Uspienski "Ciekawe zagadnienia matematyczne" PZWS Warszawa.

4° A.Ehrenfeucht "Ciekawy czworościan" PZWS Warszawa.

5° L.M. Jagłom, W.G.Bołtiański "Figury wypukłe" PWN Warszawa.

6° H. Rademacher, O. Toeplitz "O liczbach i figurach" PWN Warszawa.

7° N.J. Wilenkin "Kombinatoryka" PWN Warszawa.

8° S.I. Zetel "Geometria trójkąta" PZWS Warszawa.

9° W. Sierpiński "Wstęp do teorii liczb" WS i P Warszawa.

10° W. Sierpiński "Liczby trójkątne" PZWS Warszawa.

11° W. Sierpiński "Teoria liczb" t. I i II PWN Warszawa.

12° H. Steinhaus "Kalejdoskop matematyczny" PZWS Warszawa.

13° M. Zakrzewski, T. Żak "Kombinatoryka, prawdopodbieństwo i zdrowy rozsądek" Quadrivium Wrocław.

BIBLIOGRAFIA

[1] Czasopisma

1° Kwant - miesięcznik matematyczno-fizyczny popularno-naukowy. Moskwa, Wyd. "Nauka" (*po rosyjsku*).

2° Matiematika w szkolie - dwumiesięcznik naukowo-metodyczny. Moskwa, Wyd. "Piedagogika" (*po rosyjsku*).

3° Crux Mathematicorum - miesięcznik matematyczny. Canadian Mathematical Society (*po angielsku*).

4° Mathematics Magazine. The Mathematical Association of American (*po angielsku*).

5° Mathematics Competitions - Journal of The World Federation of National Mathematics Competitions(*po angielsku*).

[2] Książki:

1° Stefan Straszewicz "Zadania z olimpiad matematycznych" t. I - IV. PZWS Warszawa.

2° Jerzy Browkin "Zadania z olimpiad matematycznych" t. V - VI. WS i P Warszawa.

3° J.L. Babinskaja "Zadaczi matiematiczeskich olimpiad" Moskwa, Wyd. "Nauka" 1975 (*po rosyjsku*).

4° D.W.Fomin "Zadaczi lieningradskich matiematiczieskich olimpiad" Lieningrad 1990 (*po rosyjsku*).

5° G.A. Galpierin, A.K. Tołpygo "Moskowskije matiematiczieskije olimpiady" Moskwa, "Proswieszczenije" 1986 (*po rosyjsku*).

6° A.Grincjawiczius "Zadaczi litowskich matiematiczieskich olimpiad" Wilnius 1992 (*po rosyjsku*).

7° Olof Hamer "Skolornas Matematiktävling Problem 1969-1990" Göteborg 1991.

8° G.N. Jakowliew "Wszechrosijskije matiematiczieskije olimpiady szkolnikow" Moskwa "Proswieszczenije" 1992 (*po rosyjsku*).

9° M.S. Klamkin "USA Mathematical Olympiads 1972 - 1986" The Mathematical Association of America.

10° M.S. Klamkin "International Mathematical Olympiads 1978 - 1985 and Forty Supplementary Problems" The Mathematical Association of America.

11° "The Canadian Mathematical Olympiads (1969 - 1993)". Canadian Mathematical Society.

12° Z.A. Skopiec "Gieomietriczieskije Miniatiury" Moskwa "Proswieszczenije" 1990 (*po rosyjsku*).

13° I.N. Siergiejew "Zarubieżnyje matiematiczieskije olimpiady" Moskwa "Nauka" 1987 (*po rosyjsku*).