MATEMATYKA

ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH

Lata 2010-2018

Poziom podstawowy

972 ZADANIA

Centralnej Komisji Egzaminacyjnej

Z ROZWIĄZANIAMI

Opracował Ryszard Pagacz

OFICYNA EDUKACYJNA
KRZYSZTOF PAZDRO

Projekt okładki i strony tytułowej
Bożena Sawicka

Skład i łamanie
Eryk Krawczyński

Redaktor
Tomasz Szwed

Druk i oprawa
DRUK-SERWIS Sp. z o.o.
ul. Tysiąclecia 8b, 06-400 Ciechanów

Wydanie II, uzupełnione. Warszawa 2018 r.

Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro Sp. z o.o.
ul. Kościańska 4, 01-695 Warszawa
www.pazdro.com.pl
pazdro@pazdro.com.pl

ISBN 978-83-7594-164-7

Spis treści

Wstęp

Od roku 2010 matematyka na poziomie podstawowym jest zdawana na maturze jako przedmiot obowiązkowy. Od tej pory upłynęło już 8 lat. Jest to wystarczający okres czasu, by na podstawie przeglądu arkuszy maturalnych zorientować się, jakiego typu zadań i o jakiej skali trudności może spodziewać się na egzaminie przyszły maturzysta.

W tym zbiorze zebrałem wszystkie zadania z lat 2010 – 2018, które występowały w arkuszach maturalnych CKE na poziomie podstawowym. Zadania zostały jednak podzielone i uporządkowane według rozdziałów, występujących w typowym programie nauczania matematyki w szkole. Obok numeru każdego zadania jest wskazówka, z arkusza której matury dane zadanie pochodzi (miesiąc, rok, nr zadania i liczba punktów). Do wszystkich zadań podałem szkice rozwiązań, również do zadań zamkniętych.

Propozycje rozwiązań tych zadań, sporządzone przez ekspertów CKE, można znaleźć również na stronie www.cke.edu.pl.

Ten zbiór zadań może być świetnym materiałem do samodzielnego przygotowania się do egzaminu. Może również być pomocny nauczycielowi w zaplanowaniu cyklu powtórzeń przygotowujących uczniów do matury.

Zadania oznaczone ^{R}, w związku ze zmianą podstawy programowej, od roku 2015 występują w arkuszach na poziomie rozszerzonym. Przygotowując się tylko do matury na poziomie podstawowym można je pominąć.

Mam nadzieję, że ten bogaty materiał pozwoli uczniom lepiej przygotować się do egzaminu.

Autor

ZADANIA MATURALNE

1. Liczby. Potęgi

Zadanie 1.1. [matura, maj 2010, zad. 3. (1 pkt)]

Liczba $\left(\frac{2^{-2}\cdot 3^{-1}}{2^{-1}\cdot 3^{-2}}\right)^{0}$ jest równa

A. 1 **B.** 4 **C.** 9 **D.** 36

Zadanie 1.2. [matura, sierpień 2010, zad. 2. (1 pkt)]

Iloczyn $81^2 \cdot 9^4$ jest równy

A. 3^4 **B.** 3^0 **C.** 3^{16} **D.** 3^{14}

Zadanie 1.3. [matura, sierpień 2010, zad. 6. (1 pkt)]

Kwadrat liczby $x = 2 - \sqrt{3}$ jest równy

A. $7 - 4\sqrt{3}$ **B.** $7 + 4\sqrt{3}$ **C.** 1 **D.** 7

Zadanie 1.4. [matura, czerwiec 2011, zad. 1. (1 pkt)]

Liczbę $\sqrt{20}$ można przedstawić w postaci

A. $5\sqrt{2}$ **B.** $5\sqrt{4}$ **C.** $4\sqrt{5}$ **D.** $2\sqrt{5}$

Zadanie 1.5. [matura, czerwiec 2011, zad. 2. (1 pkt)]

Potęga $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5}$ (gdzie a i b są różne od zera) jest równa

A. $-5\cdot\frac{a}{b}$ **B.** $\left(\frac{b}{a}\right)^{5}$ **C.** $\frac{b^5}{a}$ **D.** $-\left(\frac{a}{b}\right)^{5}$

Zadanie 1.6. [matura, sierpień 2011, zad. 7. (1 pkt)]

Dla pewnych liczb a i b zachodzą równości: $a^2 - b^2 = 200$ i $a + b = 8$. Dla tych liczb a i b wartość wyrażenia $a - b$ jest równa

A. 25 **B.** 16 **C.** 10 **D.** 2

Zadanie 1.7. [matura, maj 2012, zad. 2. (1 pkt)]

Liczba $\sqrt[3]{(-8)^{-1}}\cdot 16^{\frac{3}{4}}$ jest równa

A. -8 **B.** -4 **C.** 2 **D.** 4

Zadanie 1.8. [matura, maj 2012, zad. 3. (1 pkt)]

Liczba $\left(3-\sqrt{2}\right)^2+4\left(2-\sqrt{2}\right)$ jest równa

A. $19-10\sqrt{2}$ **B.** $17-4\sqrt{2}$ **C.** $15+14\sqrt{2}$ **D.** $19+6\sqrt{2}$

Zadanie 1.9. [matura, czerwiec 2012, zad. 1. (1 pkt)]

Ułamek $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$ jest równy

A. 1 **B.** -1 **C.** $7+4\sqrt{5}$ **D.** $9+4\sqrt{5}$

Zadanie 1.10. [matura, czerwiec 2012, zad. 21. (1 pkt)]

Równość $\left(a+2\sqrt{2}\right)^2=a^2+28\sqrt{2}+8$ zachodzi dla

A. $a=14$ **B.** $a=7\sqrt{2}$ **C.** $a=7$ **D.** $a=2\sqrt{2}$

Zadanie 1.11. [matura, sierpień 2012, zad. 2. (1 pkt)]

Iloczyn $9^{-5}\cdot 3^8$ jest równy

A. 3^{-4} **B.** 3^{-9} **C.** 9^{-1} **D.** 9^{-9}

Zadanie 1.12. [matura, sierpień 2012, zad. 4. (1 pkt)]

Liczba $\left(2-3\sqrt{2}\right)^2$ jest równa

A. -14 **B.** 22 **C.** $-14-12\sqrt{2}$ **D.** $22-12\sqrt{2}$

Zadanie 1.13. [matura, maj 2013, zad. 23. (1 pkt)]

Liczba $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ jest równa

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 4 **D.** $\sqrt{10}-\sqrt{6}$

Zadanie 1.14. [matura, czerwiec 2013, zad. 1. (1 pkt)]

Liczba $\left(\sqrt[3]{16}\cdot 4^{-2}\right)^3$ jest równa

A. 4 **B.** 4^{-4} **C.** 4^{-8} **D.** 4^{-12}

Zadanie 1.15. [matura, sierpień 2013, zad. 3. (1 pkt)]

Liczba $\frac{5^3\cdot 25}{\sqrt{5}}$ jest równa

A. $5^5\sqrt{5}$ **B.** $5^4\sqrt{5}$ **C.** $5^3\sqrt{5}$ **D.** $5^6\sqrt{5}$

Zadanie 1.16. [matura, sierpień 2013, zad. 6. (1 pkt)]

Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunki $a + b = 3$, $b + c = 4$ i $c + a = 5$.
Wtedy suma $a + b + c$ jest równa

A. 20 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 1

Zadanie 1.17. [matura, maj 2014, zad. 3. (1 pkt)]

Wartość wyrażenia $\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{2}{\sqrt{3}+1}$ jest równa

A. -2 **B.** $-2\sqrt{3}$ **C.** 2 **D.** $2\sqrt{3}$

Zadanie 1.18. [matura, maj 2014, zad. 21. (1 pkt)]

Liczba $\left(\frac{1}{\left(\sqrt[3]{729}+\sqrt[4]{256}+2\right)^0}\right)^{-2}$ jest równa

A. $\frac{1}{225}$ **B.** $\frac{1}{15}$ **C.** 1 **D.** 15

Zadanie 1.19. [matura, czerwiec 2014, zad. 8. (1 pkt)]

Liczba $\frac{3^{27}+3^{26}}{3^{26}+3^{25}}$ jest równa

A. 1 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 9

Zadanie 1.20. [matura, sierpień 2014, zad. 2 (1 pkt)]

Liczba $\frac{1}{2} \cdot 2^{2014}$ jest równa

A. 2^{2013} **B.** 2^{2012} **C.** 2^{1007} **D.** 1^{2014}

Zadanie 1.21. [matura, sierpień 2014, zad. 4 (1 pkt)]

Liczba $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{15}$ jest równa

A. $2 + 2\sqrt{15}$ **B.** 8 **C.** $2 + 4\sqrt{15}$ **D.** 2

Zadanie 1.22. [matura, maj 2015, zad. 4. (1 pkt)]

Równość $\frac{m}{5-\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{5}$ zachodzi dla

A. $m = 5$ **B.** $m = 4$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = -5$

Zadanie 1.23. [matura, maj 2015, zad. 3 swe. (1 pkt)]

Liczba $2^{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{2^5}$ jest równa

A. $2^{\frac{20}{3}}$ **B.** 2 **C.** $2^{\frac{4}{5}}$ **D.** 2^3

Zadanie 1.24. [matura, czerwiec 2015, zad. 1. (1 pkt)]

Liczba $2\sqrt{18}-\sqrt{32}$ jest równa

A. $2^{-\frac{3}{2}}$ **B.** $2^{-\frac{1}{2}}$ **C.** $2^{\frac{1}{2}}$ **D.** $2^{\frac{3}{2}}$

Zadanie 1.25. [matura, czerwiec 2015, zad. 2. (1 pkt)]

Wartość wyrażenia $\frac{\sqrt[5]{-32}\cdot 2^{-1}}{4}\cdot 2^2$ jest równa

A. $-\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 1 **D.** -1

Zadanie 1.26. [matura, czerwiec 2015, zad. 1 swe. (1 pkt)]

Liczba $\frac{(0,2)^3}{\sqrt[4]{25^{-3}}}$ jest równa

A. $\sqrt{5^3}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{5^3}}$ **C.** $\sqrt[3]{5^2}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

Zadanie 1.27. [matura, czerwiec 2015, zad. 4 swe. (1 pkt)]

Liczba 17^3+m^3 jest podzielna przez 19 dla

A. $m=-8$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=2$ **D.** $m=8$

Zadanie 1.28. [matura, sierpień 2015, zad. 1. (1 pkt)]

Jeśli $a=\frac{3}{2}$ i $b=2$, to wartość wyrażenia $\frac{a\cdot b}{a+b}$ jest równa

A. $\frac{2}{3}$ **B.** 1 **C.** $\frac{6}{7}$ **D.** $\frac{27}{6}$

Zadanie 1.29. [matura, sierpień 2015, zad. 3. (1 pkt)]

Liczba $\frac{9^5\cdot 5^9}{45^5}$ jest równa

A. 45^{40} **B.** 45^9 **C.** 9^4 **D.** 5^4

Zadanie 1.30. [matura, sierpień 2015, zad. 4. (1 pkt)]

Liczba $\sqrt{\frac{9}{7}}+\sqrt{\frac{7}{9}}$ jest równa

A. $\sqrt{\frac{16}{63}}$ **B.** $\frac{16}{3\sqrt{7}}$ **C.** 1 **D.** $\frac{3+\sqrt{7}}{3\sqrt{7}}$

Zadanie 1.31. [matura, sierpień 2015, zad. 1 swe. (1 pkt)]

Jeśli $a = \frac{2}{3}$ i $b = \frac{1}{2}$, to wartość wyrażenia $\frac{a+b}{a \cdot b}$ jest równa

A. $\frac{7}{2}$ **B.** $\frac{9}{5}$ **C.** $\frac{7}{18}$ **D.** $\frac{3}{2}$

Zadanie 1.32. [matura, sierpień 2015, zad. 3 swe. (1 pkt)]

Liczba $\frac{5^{12} \cdot 9^5}{15^{10}}$ jest równa

A. 25 **B.** 3^7 **C.** 3^3 **D.** $\frac{25}{27}$

Zadanie 1.33. [matura, sierpień 2015, zad. 4 swe. (1 pkt)]

W rozwinięciu dziesiętnym ułamka $\frac{2}{7}$ na trzydziestym miejscu po przecinku stoi cyfra

A. 7 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Zadanie 1.34. [matura, maj 2016, zad. 1. (1 pkt)]

Dla każdej dodatniej liczby a iloraz $\frac{a^{-2,6}}{a^{1,3}}$ jest równy

A. $a^{-3,9}$ **B.** a^{-2} **C.** $a^{-1,3}$ **D.** $a^{1,3}$

Zadanie 1.35. [matura, czerwiec 2016, zad. 1. (1 pkt)]

Liczba $\frac{7^6 \cdot 6^7}{42^6}$ jest równa

A. 42^{36} **B.** 42^7 **C.** 6 **D.** 1

Zadanie 1.36. [matura, czerwiec 2016, zad. 3. (1 pkt)]

Liczba $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$ jest równa

A. $\sqrt[6]{3}$ **B.** $\sqrt[4]{3}$ **C.** $\sqrt[3]{3}$ **D.** $\sqrt{3}$

Zadanie 1.37. [matura, czerwiec 2016, zad. 4. (1 pkt)]

Różnica $50001^2 - 49999^2$ jest równa

A. 2000000 **B.** 200000 **C.** 20000 **D.** 4

Zadanie 1.38. [matura, czerwiec 2016, zad. 15. (1 pkt)]

Słoń waży 5 ton, a waga mrówki jest równa 0,5 grama. Ile razy słoń jest cięższy od mrówki?

A. 10^6 **B.** 10^7 **C.** 10 **D.** 10^8

Zadanie 1.39. [matura, sierpień 2016, zad. 1. (1 pkt)]

Suma pięciu kolejnych liczb całkowitych jest równa 195. Najmniejszą z tych liczb jest

A. 37 **B.** 38 **C.** 39 **D.** 40

Zadanie 1.40. [matura, sierpień 2016, zad. 3. (1 pkt)]

Liczba $\frac{4^5 \cdot 5^4}{20^4}$ jest równa

A. 4^4 **B.** 20^{16} **C.** 20^5 **D.** 4

Zadanie 1.41. [matura, maj 2017, zad. 1. (1 pkt)]

Liczba $5^8 \cdot 16^{-2}$ jest równa

A. $\left(\frac{5}{2}\right)^8$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** 10^8 **D.** 10

Zadanie 1.42. [matura, maj 2017, zad. 2. (1 pkt)]

Liczba $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$ jest równa

A. $\sqrt[3]{52}$ **B.** 3 **C.** $2\sqrt[3]{2}$ **D.** 2

Zadanie 1.43. [matura, maj 2017, zad. 5. (1 pkt)]

Równość $\left(x\sqrt{2} - 2\right)^2 = \left(2 + \sqrt{2}\right)^2$ jest

A. prawdziwa dla $x = -\sqrt{2}$. **B.** prawdziwa dla $x = \sqrt{2}$.

C. prawdziwa dla $x = -1$. **D.** fałszywa dla każdej liczby x.

Zadanie 1.44. [matura, czerwiec 2017, zad. 3. (1 pkt)]

Suma $16^{24} + 16^{24} + 16^{24} + 16^{24}$ jest równa

A. 4^{24} **B.** 4^{25} **C.** 4^{48} **D.** 4^{49}

Zadanie 1.45. [matura, sierpień 2017, zad. 1. (1 pkt]

Niech $a = -2$, $b = 3$. Wartość wyrażenia $a^b - b^a$ jest równa

A. $\frac{73}{9}$ **B.** $\frac{71}{9}$ **C.** $-\frac{73}{9}$ **D.** $-\frac{71}{9}$

Zadanie 1.46. [matura, sierpień 2017, zad. 2. (1 pkt)]

Liczba $9^9 \cdot 81^2$ jest równa

A. 81^4 **B.** 81 **C.** 9^{13} **D.** 9^{36}

Zadanie 1.47. [matura, sierpień 2017, zad. 5. (1 pkt)]

Liczba $\left(2\sqrt{7} - 5\right)^2 \cdot \left(2\sqrt{7} + 5\right)^2$ jest równa

A. 9 **B.** 3 **C.** 2809 **D.** $28 - 20\sqrt{7}$

Zadanie 1.48. [matura, maj 2018, zad. 2. (1 pkt)]

Liczba $\sqrt[3]{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{81}{56}}$ jest równa

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{3}{2\sqrt[3]{21}}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{9}{4}$

Zadanie 1.49. [matura, maj 2018, zad. 3. (1 pkt)]

Dane są liczby $a = 3{,}6 \cdot 10^{-12}$ oraz $b = 2{,}4 \cdot 10^{-20}$. Wtedy iloraz $\frac{a}{b}$ jest równy

A. $8{,}64 \cdot 10^{-32}$ **B.** $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ **C.** $1{,}5 \cdot 10^{8}$ **D.** $8{,}64 \cdot 10^{32}$

Zadanie 1.50. [matura, czerwiec 2018, zad. 1. (1 pkt)]

Dla $x = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1$ oraz $y = \sqrt{2} - 1$ wartość wyrażenia $x^2 - 2xy + y^2$ jest równa

A. 4 **B.** 1 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Zadanie 1.51. [matura, czerwiec 2018, zad. 7. (1 pkt)]

Liczbę $\frac{224}{1111}$ można zapisać w postaci nieskończonego ułamka dziesiętnego okresowego.

Dwudziestą cyfrą po przecinku jego rozwinięcia jest

A. 2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 6

Zadanie 1.52. [matura, czerwiec 2018, zad. 8. (1 pkt)]

Liczba $\frac{8^{20} - 2 \cdot 4^{20}}{2^{20} \cdot 4^{10}}$ jest równa

A. 0 **B.** $2^{20} - 2$ **C.** 2^{19} **D.** $4 - 2^{10}$

Zadanie 1.53. [matura, sierpień 2018, zad. 2. (1 pkt)]

Liczba $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ jest równa

A. $2^{\frac{1}{6}}$ **B.** $2^{\frac{1}{5}}$ **C.** $2^{\frac{1}{3}}$ **D.** $2^{\frac{2}{3}}$

Zadanie 1.54. [matura, sierpień 2018, zad. 3. (1 pkt)]

Dane są liczby $x = 4{,}5 \cdot 10^{-8}$ oraz $y = 1{,}5 \cdot 10^{2}$. Wtedy iloraz $\frac{x}{y}$ jest równy

A. $3 \cdot 10^{-10}$ **B.** $3 \cdot 10^{-6}$ **C.** $6{,}75 \cdot 10^{-10}$ **D.** $6{,}75 \cdot 10^{-6}$

Zadanie 1.55. [matura, sierpień 2018, zad. 5. (1 pkt)]

Równość $\left(a + 2\sqrt{3}\right)^2 = 13 + 4\sqrt{3}$ jest prawdziwa dla

A. $a = \sqrt{13}$ **B.** $a = 1$ **C.** $a = 0$ **D.** $a = \sqrt{13} + 1$

2. Logarytmy

Zadanie 2.1. [matura, maj 2010, zad. 4. (1 pkt)]

Liczba $\log_4 8 + \log_4 2$ jest równa

A. 1 **B.** 2 **C.** $\log_4 6$ **D.** $\log_4 10$

Zadanie 2.2. [matura, sierpień 2010, zad. 3. (1 pkt)]

Liczba $\log_3 9 - \log_3 1$ jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 2.3. [matura, maj 2011, zad. 8. (1 pkt)]

Wyrażenie $\log_4 (2x - 1)$ jest określone dla wszystkich liczb x spełniających warunek

A. $x \le \frac{1}{2}$ **B.** $x > \frac{1}{2}$ **C.** $x \le 0$ **D.** $x > 0$

Zadanie 2.4. [matura, czerwiec 2011, zad. 3. (1 pkt)]

Liczba $\log_{\frac{1}{2}} 8$ jest równa

A. -3 **B.** $-\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 4

Zadanie 2.5. [matura, sierpień 2011, zad. 9. (1 pkt)]

Liczba $\log_2 4 + 2\log_3 1$ jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Zadanie 2.6. [matura, maj 2012, zad. 3. (1 pkt)]

Iloczyn $2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 9$ jest równy

A. -6 **B.** -4 **C.** -1 **D.** 1

Zadanie 2.7. [matura, sierpień 2012, zad. 3. (1 pkt)]

Liczba $\log_3 27 - \log_3 1$ jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 2.8. [matura, maj 2013, zad. 3. (1 pkt)]

Liczba $\log 100 - \log_2 8$ jest równa

A. -2 **B.** -1 **C.** 0 **D.** 1

Zadanie 2.9. [matura, czerwiec 2013, zad. 4. (1 pkt)]

Wartość wyrażenia $\log_2 20 - \log_2 5$ jest równa

A. $\log_2 15$ **B.** 2 **C.** 4 **D.** $\log_2 25$

Zadanie 2.10. [matura, czerwiec 2013, zad. 26. (1 pkt)]

Liczba $\log 4 + \log 5 - \log 2$ jest równa

A. 10 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Zadanie 2.11. [matura, sierpień 2013, zad. 10. (1 pkt)]

Liczba $\log_2 100 - \log_2 50$ jest równa

A. $\log_2 50$ **B.** 1 **C.** 2 **D.** $\log_2 5000$

Zadanie 2.12. [matura, maj 2014, zad. 4. (1 pkt)]

Suma $\log_8 16 + 1$ jest równa

A. 3 **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\log_8 17$ **D.** $\frac{7}{3}$

Zadanie 2.13. [matura, czerwiec 2014, zad. 5. (1 pkt)]

Dane są liczby: $a = \log_3 \frac{1}{9}$, $b = \log_3 3$, $c = \log_3 \frac{1}{27}$. Który z poniższych warunków jest prawdziwy?

A. $c < b < a$ **B.** $b < c < a$ **C.** $a < c < b$ **D.** $c < a < b$

Zadanie 2.14. [matura, sierpień 2014, zad. 3. (1 pkt)]

Liczba $c = \log_3 2$. Wtedy

A. $c^3 = 2$ **B.** $3^c = 2$ **C.** $3^2 = c$ **D.** $c^2 = 3$

Zadanie 2.15. [matura, maj 2015, zad. 2. (1 pkt)]

Dane są liczby: $a = -\frac{1}{27}$, $b = \log_{\frac{1}{4}} 64$, $c = \log_{\frac{1}{3}} 27$. Iloczyn abc jest równy

A. -9 **B.** $-\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 3

Zadanie 2.16. [matura, maj 2015, zad. 4 swe. (1 pkt)]

Liczba $2\log_5 10 - \log_5 4$ jest równa

A. 2 **B.** $\log_5 96$ **C.** $2\log_5 6$ **D.** 5

Zadanie 2.17. [matura, czerwiec 2015, zad. 9 swe. (1 pkt)]

Liczba $8\log_4 2 + 2$ jest równa

A. 8 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 3,5

Zadanie 2.18. [matura, sierpień 2015, zad. 5. (1 pkt)]

Wartość wyrażenia $\log_5 0{,}04 - \frac{1}{2}\log_{25} 5 \cdot \log_{25} 1$ jest równa

A. -3 **B.** $-2\frac{1}{4}$ **C.** -2 **D.** 0

Zadanie 2.19. [matura, maj 2016, zad. 2. (1 pkt)]

Liczba $\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}$ jest równa

A. $\frac{3}{2}$ **B.** 2 **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** 3

Zadanie 2.20. [matura, maj 2016, zad. 31. (2 pkt)]

Skala Richtera służy do określania siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest wzorem $R = \log\frac{A}{A_0}$, gdzie A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, $A_0 = 10^{-4}$ cm jest stałą, nazywaną amplitudą wzorcową. 5 maja 2014 roku w Tajlandii miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 6,2 w skali Richtera. Oblicz amplitudę trzęsienia ziemi w Tajlandii i rozstrzygnij, czy jest ona większa, czy – mniejsza od 100 cm.

Zadanie 2.21. [matura, czerwiec 2016, zad. 6. (1 pkt)]

Wartość wyrażenia $\log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{2}{9}$ jest równa

A. -1 **B.** -2 **C.** $\log_3 \frac{5}{11}$ **D.** $\log_3 \frac{31}{18}$

Zadanie 2.22. [matura, sierpień 2016, zad. 4 swe. (1 pkt)]

Liczba $\frac{\log_3 729}{\log_6 36}$ jest równa

A. $\log_6 693$ **B.** 3 **C.** $\log_{\frac{1}{2}} \frac{81}{4}$ **D.** 4

Zadanie 2.23. [matura, maj 2017, zad. 3. (1 pkt)]

Liczba $2\log_2 3 - 2\log_2 5$ jest równa

A. $\log_2 \frac{9}{25}$ **B.** $\log_2 \frac{3}{5}$ **C.** $\log_2 \frac{9}{5}$ **D.** $\log_2 \frac{6}{25}$

Zadanie 2.24. [matura, czerwiec 2017, zad. 4. (1 pkt)]

Liczba $\log_3 27 - \log_3 1$ jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 2.25. [matura, sierpień 2017, zad. 4. (1 pkt)]

Wartość wyrażenia $\log_4 8 + 5\log_4 2$ jest równa

A. 2 **B.** 4 **C.** $2 + \log_4 5$ **D.** $1 + \log_4 10$

Zadanie 2.26. [matura, maj 2018, zad. 1. (1 pkt)]

Liczba $2\log_3 6 - \log_3 4$ jest równa

A. 4 **B.** 2 **C.** $2\log_3 2$ **D.** $\log_3 8$

Zadanie 2.27. [matura, czerwiec 2018, zad. 2. (1 pkt)]

Dane są liczby: $a = \log_{\frac{1}{2}} 8$, $b = \log_4 8$, $c = \log_4 \frac{1}{2}$. Liczby te spełniają warunek

A. $a > b > c$ **B.** $b > a > c$ **C.** $c > b > a$ **D.** $b > c > a$

Zadanie 2.28. [matura, sierpień 2018, zad. 4. (1 pkt)]

Liczba $\log_4 96 - \log_4 6$ jest równa

A. $\log_4 90$ **B.** $\log_6 96$ **C.** 4 **D.** 2

3. Procenty

Zadanie 3.1. [matura, maj 2010, zad. 2. (1 pkt)]

Spodnie po obniżce ceny o 30% kosztują 126 zł. Ile kosztowały spodnie przed obniżką?

A. 163,80 zł **B.** 180 zł **C.** 294 zł **D.** 420 zł

Zadanie 3.2. [matura, sierpień 2010, zad. 1. (1 pkt)]

Cena towaru bez podatku VAT jest równa 60 zł. Towar ten wraz z podatkiem VAT w wysokości 22% kosztuje

A. 73,20 zł **B.** 49,18 zł **C.** 60,22 zł **D.** 82 zł

Zadanie 3.3. [matura, maj 2011, zad. 2. (1 pkt)]

Pierwsza rata, która stanowi 9% ceny roweru, jest równa 189 zł. Rower kosztuje

A. 1701 zł **B.** 2100 zł **C.** 1890 zł **D.** 2091 zł

Zadanie 3.4. [matura, czerwiec 2011, zad. 5. (1 pkt)]

Cenę pewnego towaru najpierw obniżono o 20%, a następnie nową cenę podwyższono o 10%. W wyniku obu tych zmian cena towaru zmniejszyła się w stosunku do pierwotnej o

A. 88% **B.** 15% **C.** 12% **D.** 10%

Zadanie 3.5. [matura, sierpień 2011, zad. 2. (1 pkt)]

Suma liczby x i 15% tej liczby jest równa 230. Równaniem opisującym tę zależność jest

A. $0,15 \cdot x = 230$ **B.** $0,85 \cdot x = 230$ **C.** $x + 0,15 \cdot x = 230$ **D.** $x - 0,15 \cdot x = 230$

Zadanie 3.6. [matura, maj 2012, zad. 1. (1 pkt)]

Cenę nart obniżono o 20%, a po miesiącu nową cenę obniżono o dalsze 30%. W wyniku obu obniżek cena nart zmniejszyła się o

A. 44% **B.** 50% **C.** 56% **D.** 60%

Zadanie 3.7. [matura, czerwiec 2012, zad. 4. (1 pkt)]

Marża równa 1,5% kwoty pożyczonego kapitału była równa 3000 zł. Wynika stąd, że pożyczono

A. 45 zł **B.** 2000 zł **C.** 200 000 zł **D.** 450 000 zł

Zadanie 3.8. [matura, sierpień 2012, zad. 1. (1 pkt)]

Długość boku kwadratu k_2 jest o 10% większa od długości boku kwadratu k_1. Wówczas pole kwadratu k_2 jest większe od pola kwadratu k_1.

A. o 10% **B.** o 110% **C.** o 21% **D.** o 121%

Zadanie 3.9. [matura, maj 2013, zad. 2. (1 pkt)]

Liczby a i b są dodatnie oraz 12% liczby a jest równe 15% liczby b. Stąd wynika, że a jest równe

A. 103% liczby b **B.** 125% liczby b **C.** 150% liczby b **D.** 153% liczby b

Zadanie 3.10. [matura, czerwiec 2013, zad. 2. (1 pkt)]

Dodatnia liczba x stanowi 70% liczby y. Wówczas

A. $y = \frac{13}{10}x$ **B.** $y = \frac{7}{10}x$ **C.** $y = \frac{10}{7}x$ **D.** $y = \frac{10}{13}x$

Zadanie 3.11. [matura, sierpień 2013, zad. 2. (1 pkt)]

Gdy od 17% liczby 21 odejmiemy 21% liczby 17, to otrzymamy

A. 0 **B.** $\frac{4}{100}$ **C.** 3,57 **D.** 4

Zadanie 3.12. [matura, maj 2014, zad. 2. (1 pkt)]

Jeżeli liczba 78 jest o 50% większa od liczby c, to

A. $c = 60$ **B.** $c = 52$ **C.** $c = 48$ **D.** $c = 39$

Zadanie 3.13. [matura, czerwiec 2014, zad. 2. (1 pkt)]

Czterech przyjaciół zarejestrowało spółkę. Wysokość udziałów poszczególnych wspólników w kapitale zakładowym spółki wyraża stosunek 12 : 8 : 3 : 2. Jaką część kapitału zakładowego stanowi udział największego inwestora?

A. 12% **B.** 32% **C.** 48% **D.** 52%

Zadanie 3.14. [matura, sierpień 2014, zad. 5. (1 pkt)]

Julia połowę swoich oszczędności przeznaczyła na prezent dla Maćka. 10% tego, co jej zostało, przeznaczyła na prezent dla Dominiki. Ile procent oszczędności pozostało Julii?

A. 25 **B.** 40 **C.** 45 **D.** 55

Zadanie 3.15. [matura, maj 2015, zad. 3. (1 pkt)]

Kwotę 1000 zł ulokowano w banku na roczną lokatę oprocentowaną w wysokości 4% w stosunku rocznym. Po zakończeniu lokaty od naliczonych odsetek odprowadzany jest podatek w wysokości 19%. Maksymalna kwota, jaką po upływie roku będzie można wypłacić z banku, jest równa

A. $1000\cdot\left(1-\frac{81}{100}\cdot\frac{4}{100}\right)$ **B.** $1000\cdot\left(1+\frac{19}{100}\cdot\frac{4}{100}\right)$

C. $1000\cdot\left(1+\frac{81}{100}\cdot\frac{4}{100}\right)$ **D.** $1000\cdot\left(1-\frac{19}{100}\cdot\frac{4}{100}\right)$

Zadanie 3.16. [matura, maj 2015, zad. 1 swe. (1 pkt)]

Cena pewnego towaru wraz z 7-procentowym podatkiem VAT jest równa 34 347 zł. Cena tego samego towaru wraz z 23-procentowym podatkiem VAT będzie równa

A. 37 236 zł **B.** 39 842,52 zł **C.** 39 483 zł **D.** 42 246,81 zł

Zadanie 3.17. [matura, czerwiec 2015, zad. 3. (1 pkt)]

Przy 23-procentowej stawce podatku VAT cena brutto samochodu jest równa 45 018 zł. Jaka jest cena netto tego samochodu?

A. 34 663,86 zł **B.** 36 600 zł **C.** 44 995 zł **D.** 55 372,14 zł

Zadanie 3.18. [matura, czerwiec 2015, zad. 22. (1 pkt)]

Liczba 0,3 jest jednym z przybliżeń liczby $\frac{5}{16}$. Błąd względny tego przybliżenia, wyrażony w procentach, jest równy

A. 4% **B.** 0,04% **C.** 2,5% **D.** 0,025%

Zadanie 3.19. [matura, sierpień 2015, zad. 2. (1 pkt)]

Dany jest prostokąt o wymiarach 40 cm × 100 cm. Jeżeli każdy z dłuższych boków tego prostokąta wydłużymy o 20%, a każdy z krótszych boków skrócimy o 20%, to w wyniku obu przekształceń pole tego prostokąta

A. zwiększy się o 8%. **B.** zwiększy się o 4%.
C. zmniejszy się o 8%. **D.** zmniejszy się o 4%.

Zadanie 3.20. [matura, sierpień 2015, zad. 2 swe. (1 pkt)]

Cenę pewnego towaru obniżano dwukrotnie, za każdym razem o 20%. Takie dwie obniżki ceny tego towaru można zastąpić równoważną im jedną obniżką

A. o 40% **B.** o 36% **C.** o 32% **D.** o 28%

Zadanie 3.21. [matura, maj 2016, zad. 3. (1 pkt)]

Liczby a i c są dodatnie. Liczba b stanowi 48% liczby a oraz 32% liczby c. Wynika stąd, że

A. $c = 1{,}5a$ **B.** $c = 1{,}6a$ **C.** $c = 0{,}8a$ **D.** $c = 0{,}16a$

Zadanie 3.22. [matura, czerwiec 2016, zad. 2. (1 pkt)]

Cenę pewnego towaru podwyższono o 20%, a następnie nową cenę tego towaru podwyższono o 30%. Takie dwie podwyżki ceny tego towaru można zastąpić równoważną im jedną podwyżką

A. o 50% **B.** o 56% **C.** o 60% **D.** o 66%

Zadanie 3.23. [matura, sierpień 2016, zad. 2. (1 pkt)]

Buty, które kosztowały 220 złotych, przeceniono i sprzedano za 176 złotych. O ile procent obniżono cenę butów?

A. 80 **B.** 20 **C.** 22 **D.** 44

Zadanie 3.24. [matura, maj 2017, zad. 4. (1 pkt)]

Liczba osobników pewnego zagrożonego wyginięciem gatunku zwierząt wzrosła w stosunku do liczby tych zwierząt z 31 grudnia 2011 r. o 120% i obecnie jest równa 8910. Ile zwierząt liczyła populacja tego gatunku w ostatnim dniu 2011 roku?

A. 4050 **B.** 1782 **C.** 7425 **D.** 7128

Zadanie 3.25. [matura, czerwiec 2017, zad. 2. (1 pkt)]

Iloczyn dodatnich liczb a i b jest równy 1350. Ponadto 15% liczby a jest równe 10% liczby b. Stąd wynika, że b jest równe

A. 9 **B.** 18 **C.** 45 **D.** 50

Zadanie 3.26. [matura, sierpień 2017, zad. 4. (1 pkt)]

Dane są dwa koła. Promień pierwszego koła jest większy od promienia drugiego koła o 30%. Wynika stąd, że pole pierwszego koła jest większe od pola drugiego koła

A. o mniej niż 50%, ale więcej niż 40%. **B.** o mniej niż 60%, ale więcej niż 50%.
C. dokładnie o 60%. **D.** o więcej niż 60%.

Zadanie 3.27. [matura, maj 2018, zad. 4. (1 pkt)]

Cena roweru po obniżce o 15% była równa 850 zł. Przed obniżką ten rower kosztował

A. 865,00 zł **B.** 850,15 zł **C.** 1000,00 zł **D.** 977,50 zł

Zadanie 3.28. [matura, czerwiec 2018, zad. 4. (1 pkt)]

Po dwukrotnej obniżce, za każdym razem o 10% w stosunku do ceny obowiązującej w chwili obniżki, komputer kosztuje 1944 złote. Stąd wynika, że przed tymi obniżkami ten komputer kosztował

A. 2200 złotych. **B.** 2300 złotych. **C.** 2400 złotych. **D.** 3000 złotych.

Zadanie 3.29. [matura, sierpień 2018, zad. 1. (1 pkt)]

Cena pewnego towaru w wyniku obniżki o 10% zmniejszyła się o 2018 zł. Ten towar po tej obniżce kosztował

A. 20 180 zł **B.** 18 162 zł **C.** 2 108 zł **D.** 2 028 zł

4. Wartość bezwzględna

Zadanie 4.1.[R] [matura, maj 2010, zad. 1. (1 pkt)]

Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór rozwiązań nierówności $|x + 7| > 5$

A. 

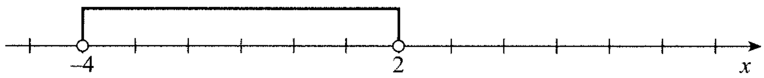
B. 

C. 

D. 

Zadanie 4.2.[R] [matura, sierpień 2010, zad. 4. (1 pkt)]

Wskaż nierówność, która opisuje przedział zaznaczony na osi liczbowej.



A. $|x - 1| < 3$ **B.** $|x + 1| < 3$ **C.** $|x + 1| > 3$ **D.** $|x - 1| > 3$

Zadanie 4.3. [matura, maj 2011, zad. 1. (1 pkt)]

Wskaż nierówność, którą spełnia liczba π

A. $|x + 1| > 5$ **B.** $|x - 1| < 2$ **C.** $\left|x + \frac{2}{3}\right| \le 4$ **D.** $\left|x - \frac{1}{3}\right| \ge 3$

Zadanie 4.4. [matura, czerwiec 2011, zad. 4. (1 pkt)]

Wskaż liczbę, która spełnia równanie $|4x - 5| = x$

A. $x = -1$ **B.** $x = 1$ **C.** $x = 2$ **D.** $x = -2$

Zadanie 4.5. [matura, sierpień 2011, zad. 8. (1 pkt)]

Liczba $|5 - 2| + |1 - 6|$ jest równa

A. 8 **B.** 2 **C.** 3 **D.** –2

Zadanie 4.6. [matura, maj 2012, zad. 5. (1 pkt)]

Wskaż liczbę, która spełnia równanie $|3x + 1| = 4x$

A. $x = -1$ **B.** $x = 1$ **C.** $x = 2$ **D.** $x = -2$

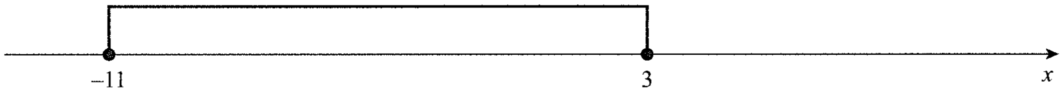
Zadanie 4.7. [matura, czerwiec 2012, zad. 2. (1 pkt)]

Liczbami spełniającymi równanie $|2x + 3| = 5$ są

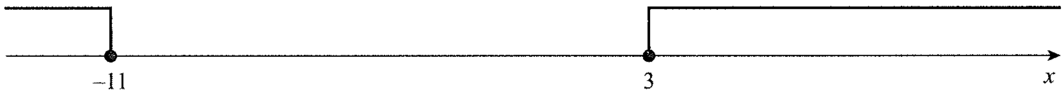
A. 1 i –4 **B.** 1 i 2 **C.** –1 i 4 **D.** –2 i 2

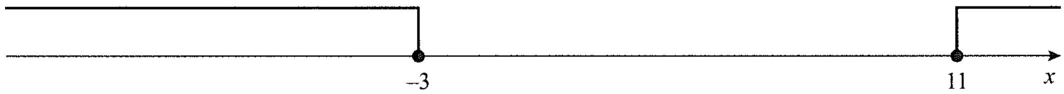
Zadanie 4.8.^{R} [matura, sierpień 2012, zad. 6. (1 pkt)]

Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór rozwiązań nierówności $|x + 4| \leq 7$.

A.


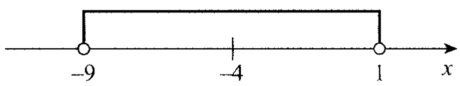
B.

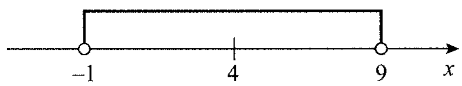

C.


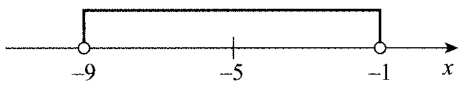
D.


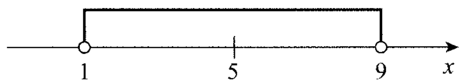
Zadanie 4.9.^{R} [matura, maj 2013, zad. 1. (1 pkt)]

Wskaż rysunek, na którym zaznaczony jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $|x + 4| < 5$.

A.


B.


C.


D.


Zadanie 4.10.^{R} [matura, czerwiec 2013, zad. 3. (1 pkt)]

Przedział $\langle -1, 3\rangle$ jest opisany nierównością

A. $|x + 1| \geq 2$ **B.** $|x + 1| \leq 2$ **C.** $|x - 1| \leq 2$ **D.** $|x - 1| \geq 2$

Zadanie 4.11.^{R} [matura, maj 2014, zad. 9. (1 pkt)]

Dla każdej liczby x, spełniającej warunek $-3 < x < 0$, wyrażenie $\frac{|x+3| - x + 3}{x}$ jest równe

A. 2 **B.** 3 **C.** $-\frac{6}{x}$ **D.** $\frac{6}{x}$

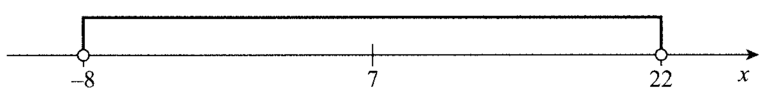
Zadanie 4.12.^{R} [matura, czerwiec 2014, zad. 1. (1 pkt)]

Która z poniższych równości jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x?

A. $\sqrt{x^2} = x$ **B.** $|-x| = x$ **C.** $|x - 1| = x - 1$ **D.** $\sqrt{(x+1)^2} = |x + 1|$

Zadanie 4.13.^{R} [matura, sierpień 2014, zad. 1. (1 pkt)]

Wskaż nierówność, która opisuje przedział zaznaczony na osi liczbowej.



A. $|x - 7| < 15$ **B.** $|x - 7| > 15$ **C.** $|x - 15| < 7$ **D.** $|x - 15| > 7$

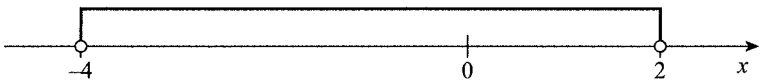
Zadanie 4.14. [matura, maj 2015, zad. 2 swe. (1 pkt)]

Najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią spełniającą nierówność $|x + 4{,}5| \geq 6$ jest

A. $x = 1$ **B.** $x = 2$ **C.** $x = 3$ **D.** $x = 6$

Zadanie 4.15.^R. [matura, czerwiec 2015, zad. 3 swe. (1 pkt)]

Wskaż nierówność, która opisuje zaznaczony na osi liczbowej przedział otwarty $(-4, 2)$.



A. $|x - 1| < 3$ **B.** $|x + 3| < 1$ **C.** $|x + 1| < 3$ **D.** $|x - 3| < 1$

Zadanie 4.16. [matura, sierpień 2016, zad. 13. (1 pkt)]

Liczba $\frac{|3-9|}{-3}$ jest równa

A. 2 **B.** -2 **C.** 0 **D.** -4

Zadanie 4.17. [matura, czerwiec 2017, zad. 1. (1 pkt)]

Liczba $|9 - 2| - |4 - 7|$ jest równa

A. 4 **B.** 10 **C.** -10 **D.** -4

5. Równania. Nierówności

Zadanie 5.1. [matura, maj 2010, zad. 6. (1 pkt)]

Rozwiązaniem równania $\frac{3x-1}{7x+1} = \frac{2}{5}$ jest liczba

A. 1 **B.** $\frac{7}{3}$ **C.** $\frac{4}{7}$ **D.** 7

Zadanie 5.2. [matura, maj 2010, zad. 7. (1 pkt)]

Do zbioru rozwiązań nierówności $(x - 2)(x + 3) < 0$ należy liczba

A. 9 **B.** 7 **C.** 4 **D.** 1

Zadanie 5.3. [matura, maj 2010, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $x^2 - x - 2 \leq 0$.

Zadanie 5.4.^R [matura, maj 2010, zad. 27. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$.

Zadanie 5.5. [matura, sierpień 2010, zad. 7. (1 pkt)]

Zbiorem rozwiązań nierówności $x(x + 5) > 0$ jest

A. $(-\infty\ , 0) \cup (5, +\infty)$. **B.** $(-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$
C. $(-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$ **D.** $(-5, +\infty)$

Zadanie 5.6. [matura, sierpień 2010, zad. 8. (1 pkt)]

Równanie $\frac{x^2 - 4}{(x-4)(x+4)} = 0$ ma

A. nie ma rozwiązań **B.** dokładnie jedno rozwiązania
C. dokładnie dwa rozwiązania **D.** dokładnie cztery rozwiązania

Zadanie 5.7. [matura, sierpień 2010, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $x^2 - 14x + 24 > 0$.

Zadanie 5.8.[R] [matura, sierpień 2010, zad. 27. (2pkt)]

Rozwiąż równanie $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0$.

Zadanie 5.9. [matura, maj 2011, zad. 5. (1 pkt)]

Rozwiązanie równania $x(x + 3) - 49 = x(x - 4)$ należy do przedziału

A. $(-\infty\ , 3)$ **B.** $(10, +\infty)$ **C.** $(-5, -1)$ **D.** $(2, +\infty)$

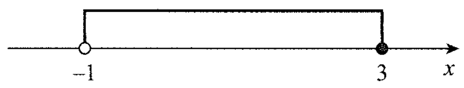
Zadanie 5.10. [matura, maj 2011, zad. 6. (1 pkt)]

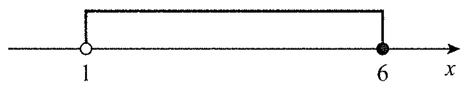
Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{3}{8} + \frac{x}{6} < \frac{5x}{12}$ jest

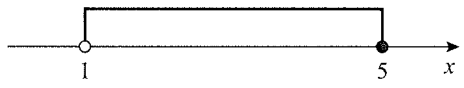
A. 1 **B.** 2 **C.** -1 **D.** -2

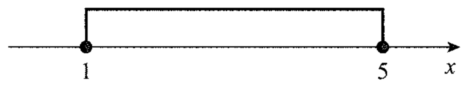
Zadanie 5.11. [matura, maj 2011, zad. 7. (1 pkt)]

Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności: $3(x - 1)(x - 5) \leq 0$ i $x > 1$.

A.


B.


C.


D.


Zadanie 5.12. [matura, maj 2011, zad. 24. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$.

Zadanie 5.13. [matura, czerwiec 2011, zad. 7. (1 pkt)]

Równanie $\frac{x^2 + 25}{x - 5} = 0$

A. nie ma rozwiązań. **B.** ma dokładnie jedno rozwiązania.
C. ma dokładnie dwa rozwiązania. **D.** ma dokładnie trzy rozwiązania.

Zadanie 5.14. [matura, czerwiec 2011, zad. 8. (1 pkt)]

Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $(3-x)(3+x) > (3-x)^2$ jest

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 5.15. [matura, czerwiec 2011, zad. 10. (1 pkt)]

Liczby x_1, x_2 są rozwiązaniami równania $2(x-5)(x+7) = 0$. Suma $x_1 + x_2$ jest równa

A. 2 **B.** -2 **C.** 12 **D.** -12

Zadanie 5.16. [matura, czerwiec 2011, zad. 23. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $-2x^2 + 2x + 24 \geq 0$.

Zadanie 5.17. [matura, sierpień 2011, zad. 1. (1 pkt)]

Rozwiązaniem równania $3(2-3x) = x - 4$ jest

A. $x = 1$ **B.** $x = 2$ **C.** $x = 3$ **D.** $x = 4$

Zadanie 5.18. [matura, sierpień 2011, zad. 24. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $x^2 - 3x + 2 < 0$.

Zadanie 5.19. [matura, maj 2012, zad. 6. (1 pkt)]

Liczby x_1, x_2 są różnymi rozwiązaniami równania $2x^2 + 3x - 7 = 0$. Suma $x_1 + x_2$ jest równa

A. $-\frac{7}{2}$ **B.** $-\frac{7}{4}$ **C.** $-\frac{3}{2}$ **D.** $-\frac{3}{4}$

Zadanie 5.20. [matura, maj 2012, zad. 7. (1 pkt)]

Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y = -3(x-7)(x+2)$ są

A. $x = 7, x = -2$ **B.** $x = -7, x = -2$ **C.** $x = 7, x = 2$ **D.** $x = -7, x = 2$

Zadanie 5.21. [matura, maj 2012, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $x^2 + 8x + 15 > 0$.

Zadanie 5.22. [matura, maj 2012, zad. 28. (2 pkt)]

Liczby $x_1 = -4$ i $x_2 = 3$ są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + 4x^2 - 9x - 36$. Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

Zadanie 5.23. [matura, czerwiec 2012, zad. 3. (1 pkt)]

Równanie $(x+5)(x-3)(x^2+1) = 0$ ma

A. dwa rozwiązania: $x = -5$, $x = 3$.
B. dwa rozwiązania: $x = -3$, $x = 4$.
C. cztery rozwiązania: $x = -5$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$.
D. cztery rozwiązania: $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 5$.

Zadanie 5.24. [matura, czerwiec 2012, zad. 25. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $x^2 - 3x - 10 < 0$.

Zadanie 5.25. [matura, sierpień 2012, zad. 9. (1 pkt)]

Zbiorem rozwiązań nierówności $x(x + 6) < 0$ jest

A $(-6, 0)$. **B.** $(0, 6)$ **C.** $(-\infty, -6) \cup (0, +\infty)$ **D.** $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$

Zadanie 5.26. [matura, sierpień 2012, zad. 11. (1 pkt)]

Równanie $\frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+2)} = 0$ ma

A. dokładnie jedno rozwiązanie **B.** dokładnie dwa rozwiązania
C. dokładnie trzy rozwiązania **D.** dokładnie cztery rozwiązania

Zadanie 5.27. [matura, sierpień 2012, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $x^2 - 8x + 7 \geq 0$.

Zadanie 5.28.^{R} [matura, sierpień 2012, zad. 27. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 - 9x + 54 = 0$.

Zadanie 5.29. [matura, maj 2013, zad. 10. (1 pkt)]

Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $\frac{x}{2} \leq \frac{2x}{3} + \frac{1}{4}$ jest

A. -2 **B.** -1 **C.** 0 **D.** 1

Zadanie 5.30. [matura, maj 2013, zad. 16. (1 pkt)]

Liczba rzeczywistych rozwiązań równania $(x + 1)(x + 2)(x^2 + 3) = 0$ jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Zadanie 5.31.^{R} [matura, maj 2013, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $x^3 + 2x^2 - 8x - 16 = 0$.

Zadanie 5.32. [matura, maj 2013, zad. 30. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 7x + 5 \geq 0$.

Zadanie 5.33. [matura, czerwiec 2013, zad. 17. (1 pkt)]

Funkcja $f(x) = 3x(x^2 + 5)(2 - x)(x + 1)$ ma dokładnie

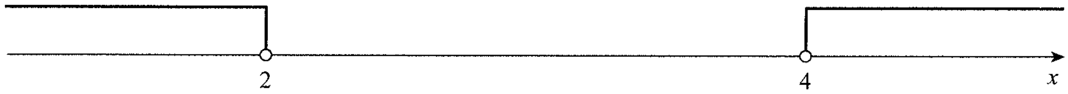
A. dwa miejsca zerowe. **B.** trzy miejsca zerowe.
C. cztery miejsca zerowe. **D.** pięć miejsc zerowych.

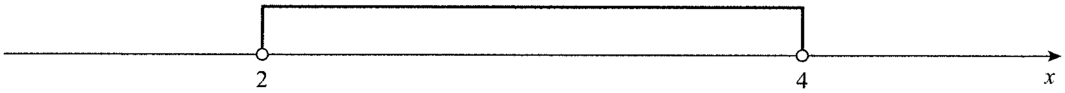
Zadanie 5.34.^{R} [matura, czerwiec 2013, zad. 27. (2 pkt)]

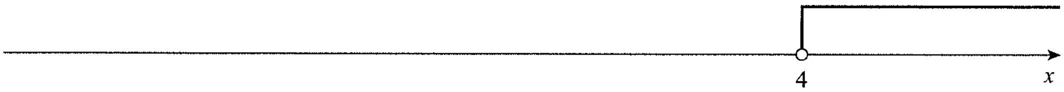
Rozwiąż równanie $3x^3 - 4x^2 - 3x + 4 = 0$.

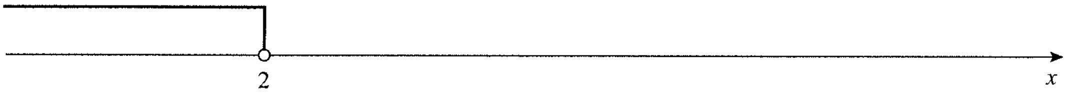
Zadanie 5.35. [matura, sierpień 2013, zad. 1. (1 pkt)]

Wskaż rysunek, na którym przedstawiony jest zbiór rozwiązań nierówności $2(3 - x) > x$.

A. 

B. 

C. 

D. 

Zadanie 5.36. [matura, sierpień 2013, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $3x - x^2 \geq 0$.

Zadanie 5.37.[R] [matura, sierpień 2013, zad. 27. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 - 12x + 72 = 0$.

Zadanie 5.38. [matura, maj 2014, zad. 5. (1 pkt)]

Wspólnym pierwiastkiem równań $(x^2 - 1)(x - 10)(x - 5) = 0$ oraz $\frac{2x - 10}{x - 1} = 0$ jest liczba

A. -1 **B.** 1 **C.** 5 **D.** 10

Zadanie 5.39. [matura, maj 2014, zad. 10. (1 pkt)]

Pierwiastki x_1, x_2 równania $2(x + 2)(x - 2) = 0$ spełniają warunek

A. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$ **B.** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 0$ **C.** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}$

Zadanie 5.40.[R] [matura, maj 2014, zad. 27. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8 = 0$.

Zadanie 5.41. [matura, czerwiec 2014, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $(2x - 3)(3 - x) \geq 0$.

Zadanie 5.42. [matura, sierpień 2014, zad. 6. (1 pkt)]

Rozwiązaniem równania $\frac{x - 5}{7 - x} = \frac{1}{3}$ jest liczba

A. -11 **B.** $\frac{11}{2}$ **C.** $\frac{2}{11}$ **D.** 11

Zadanie 5.43. [matura, sierpień 2014, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $-x^2 - 5x + 14 < 0$.

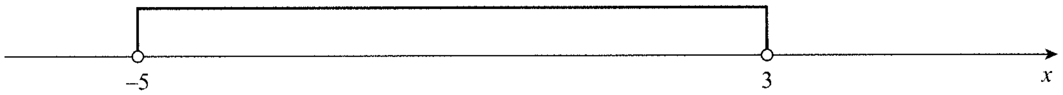
Zadanie 5.44.[R] [matura, sierpień 2014, zad. 27. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 - 11x + 66 = 0$.

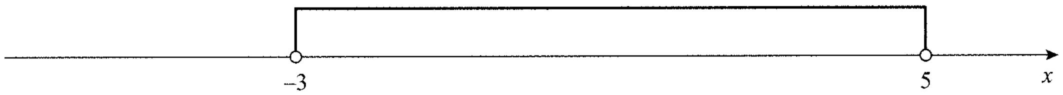
Zadanie 5.45. [matura, maj 2015, zad. 1. (1 pkt)]

Wskaż rysunek, na którym przedstawiono przedział, będący zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $-4 \leq x - 1 \leq 4$.

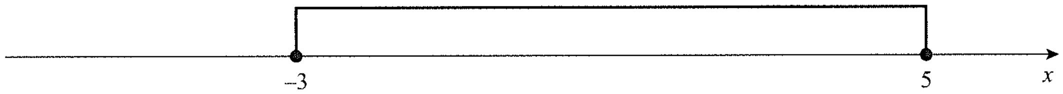
A.



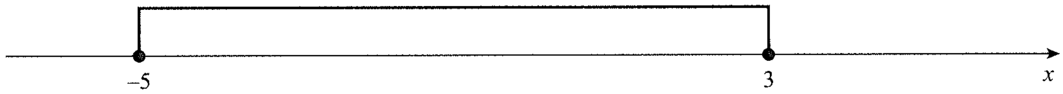
B.



C.



D.



Zadanie 5.46. [matura, maj 2015, zad. 6. (1 pkt)]

Suma wszystkich pierwiastków równania $(x + 3)(x + 7)(x - 11) = 0$ jest równa

A. -1 **B.** 21 **C.** 1 **D.** -21

Zadanie 5.47. [matura, maj 2015, zad. 7. (1 pkt)]

Równanie $\frac{x-1}{x+1} = x - 1$

A. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 1$.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 0$.
C. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = -1$.
D. ma dokładnie dwa rozwiązania: $x = 0$, $x = 1$.

Zadanie 5.48. [matura, maj 2015, zad. 12. (1 pkt)]

Ile liczb całkowitych x spełnia nierówność $\frac{2}{7} < \frac{x}{14} < \frac{4}{3}$?

A. 14 **B.** 15 **C.** 16 **D.** 17

Zadanie 5.49. [matura, maj 2015, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 4x > (x + 3)(x - 2)$.

Zadanie 5.50. [matura, maj 2015, zad. 5 swe. (1 pkt)]

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $\frac{3}{5} - \frac{2x}{3} \geq \frac{x}{6}$ jest przedziałem

A. $\left\langle \frac{9}{15}, +\infty \right)$ **B.** $\left(-\infty, \frac{18}{25} \right\rangle$ **C.** $\left\langle \frac{1}{30}, +\infty \right)$ **D.** $\left(-\infty, \frac{9}{5} \right\rangle$

Zadanie 5.51. [matura, maj 2015, zad. 7 swe. (1 pkt)]

Rozwiązaniem równania $\frac{2x-4}{3-x}=\frac{4}{3}$ jest liczba

A. $x=0$ **B.** $x=\frac{12}{5}$ **C.** $x=2$ **D.** $x=\frac{25}{11}$

Zadanie 5.52. [matura, maj 2015, zad. 27 swe. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $2x^2-4x\geq x-2$.

Zadanie 5.53.^{R} [matura, maj 2015, zad. 28 swe. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $4x^3+4x^2-x-1=0$.

Zadanie 5.54. [matura, czerwiec 2015, zad. 6. (1 pkt)]

Równanie $2x^2+11x+3=0$

A. nie ma rozwiązań rzeczywistych.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste.
C. ma dwa dodatnie rozwiązania rzeczywiste.
D. ma dwa ujemne rozwiązania rzeczywiste.

Zadanie 5.55. [matura, czerwiec 2015, zad. 11. (1 pkt)]

Liczba niewymiernych rozwiązań równania $x^2(x+5)(2x-3)(x^2-7)=0$ jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 5 **D.** 2

Zadanie 5.56. [matura, czerwiec 2015, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $3x^2-9x\leq x-3$.

Zadanie 5.57. [matura, czerwiec 2015, zad. 27. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $x(x^2-2x+3)=0$.

Zadanie 5.58. [matura, czerwiec 2015, zad. 5 swe. (1 pkt)]

Dla $x\neq 0$ równanie $\frac{-2(x-3)}{x}=x-2$

A. nie ma rozwiązań. **B.** ma dokładnie jedno rozwiązanie.
C. ma dwa różne rozwiązania. **D.** ma trzy różne rozwiązania.

Zadanie 5.59. [matura, czerwiec 2015, zad. 26 swe. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $7x^2-28\leq 0$.

Zadanie 5.60.^{R} [matura, czerwiec 2015, zad. 27 swe. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $x^4-2x^3+27x-54=0$.

Zadanie 5.61. [matura, sierpień 2015, zad. 8. (1 pkt)]

Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $2(x-2) \leq 4(x-1)+1$ jest

A. -2 **B.** -1 **C.** 0 **D.** 1

Zadanie 5.62. [matura, sierpień 2015, zad. 9. (1 pkt)]

Rozwiązaniem równania $x^2(x+1) = x^2 - 8$ jest

A. -9 **B.** -2 **C.** 2 **D.** 7

Zadanie 5.63. [matura, sierpień 2015, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $\frac{2x-4}{x} = \frac{x}{2x-4}$, gdzie $x \neq 0$ i $x \neq 2$

Zadanie 5.64. [matura, sierpień 2015, zad. 28. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $20x \geq 4x^2 + 24$.

Zadanie 5.65. [matura, sierpień 2015, zad. 5 swe. (1 pkt)]

Wskaż największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $\frac{x}{4} - \sqrt{3} < 0$.

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8

Zadanie 5.66. [matura, sierpień 2015, zad. 7 swe. (1 pkt)]

Iloczyn liczb spełniających równanie $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0$ jest równy

A. 6 **B.** -5 **C.** 5 **D.** -6

Zadanie 5.67.[R] [matura, sierpień 2015, zad. 26 swe. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $8x^3 + 8x^2 - 3x - 3 = 0$.

Zadanie 5.68. [matura, sierpień 2015, zad. 27 swe. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $5x^2 - 45 \leq 0$.

Zadanie 5.69. [matura, maj 2016, zad. 5. (1 pkt)]

Jedną z liczb, które spełniają nierówność $-x^5 + x^3 - x < -2$, jest

A. 1 **B.** -1 **C.** 2 **D.** -2

Zadanie 5.70. [matura, maj 2016, zad. 9. (1 pkt)]

Równanie wymierne $\frac{3x-1}{x+5} = 3$, gdzie $x \neq -5$,

A. nie ma rozwiązań rzeczywistych.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste.

C. ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste.

D. ma dokładnie trzy rozwiązania rzeczywiste.

Zadanie 5.71. [matura, maj 2016, zad. 27. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 4x > 3x^2 - 6x$.

Zadanie 5.72. [matura, maj 2016, zad. 28. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $(4 - x)(x^2 + 2x - 15) = 0$.

Zadanie 5.73. [matura, maj 2016, zad. 26 swe. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $2x^2 + 5x - 3 > 0$.

Zadanie 5.74.$^{\mathbf{R}}$ [matura, maj 2016, zad. 27 swe. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = 0$.

Zadanie 5.75. [matura, czerwiec 2016, zad. 7. (1 pkt)]

Spośród liczb, które są rozwiązaniami równania $(x - 8)(x^2 - 4)(x^2 + 16) = 0$, wybrano największą i najmniejszą. Suma tych dwóch liczb jest równa

A. 12 **B.** 10 **C.** 6 **D.** 4

Zadanie 5.76. [matura, czerwiec 2016, zad. 8. (1 pkt)]

Rozwiązaniem równania $\frac{x-7}{x} = 5$, gdzie $x \neq 0$, jest liczba należąca do przedziału

A. $(-\infty, -2)$ **B.** $\langle -2, -1)$ **C.** $\langle -1, 0)$ **D.** $(0, +\infty)$

Zadanie 5.77. [matura, czerwiec 2016, zad. 19. (1 pkt)]

Do pewnej liczby a dodano 54. Otrzymaną sumę podzielono przez 2. W wyniku tego działania otrzymano liczbę dwa razy większą od liczby a. Zatem

A. $a = 27$ **B.** $a = 18$ **C.** $a = 24$ **D.** $a = 36$

Zadanie 5.78. [matura, czerwiec 2016, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $\frac{2x+1}{2x} = \frac{2x+1}{x+1}$, gdzie $x \neq -1$ i $x \neq 0$.

Zadanie 5.79. [matura, sierpień 2016, zad. 5. (1 pkt)]

Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $\frac{x}{5} + \sqrt{7} > 0$ jest

A. -14 **B.** -13 **C.** 13 **D.** 14

Zadanie 5.80. [matura, sierpień 2016, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 6x \geq (x - 2)(x - 8)$.

Zadanie 5.81. [matura, maj 2017, zad. 6. (1 pkt)]

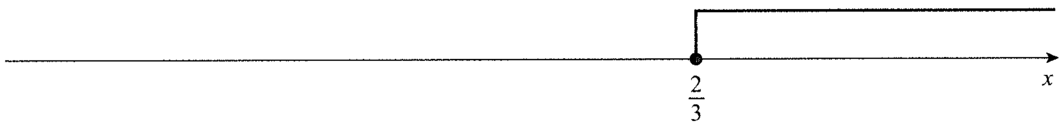
Do zbioru rozwiązań nierówności $(x^4 + 1)(2 - x) > 0$ nie należy liczba

A. -3 **B.** -1 **C.** 1 **D.** 3

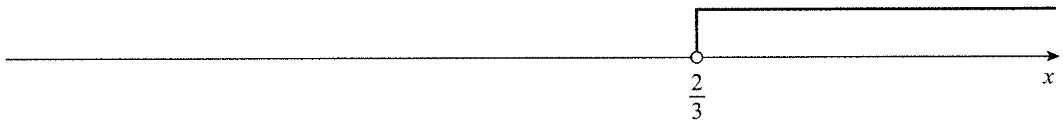
Zadanie 5.82. [matura, maj 2017, zad. 7. (1 pkt)]

Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór wszystkich rozwiązań nierówności $2-3x \geq 4$.

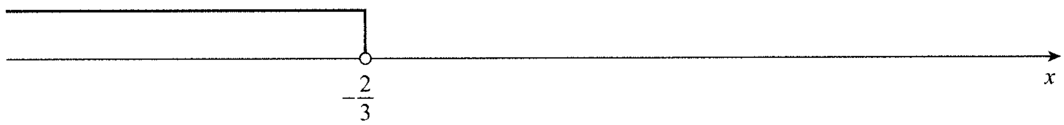
A.



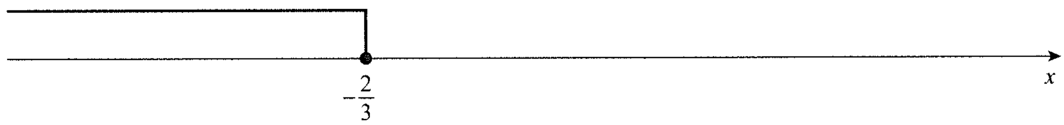
B.



C.



D.



Zadanie 5.83. [matura, maj 2017, zad. 8. (1 pkt)]

Równanie $x(x^2-4)(x^2+4)=0$ z niewiadomą x

A. nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.
B. ma dokładnie dwa rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych.
C. ma dokładnie trzy rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych.
D. ma dokładnie pięć rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zadanie 5.84. [matura, maj 2017, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $8x^2-72x \leq 0$.

Zadanie 5.85. [matura, czerwiec 2017, zad. 10. (1 pkt)]

Równanie $x(x-3)(x^2+25)=0$ ma dokładnie

A. cztery rozwiązania: $x=0, x=3, x=5, x=-5$.
B. trzy rozwiązania: $x=3, x=5, x=-5$.
C. dwa rozwiązania: $x=0, x=3$.
D. jedno rozwiązanie: $x=3$.

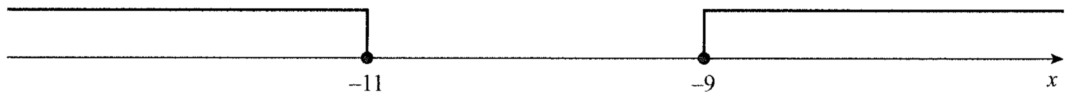
Zadanie 5.86. [matura, czerwiec 2017, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $\left(x-\frac{1}{2}\right)x > 3\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

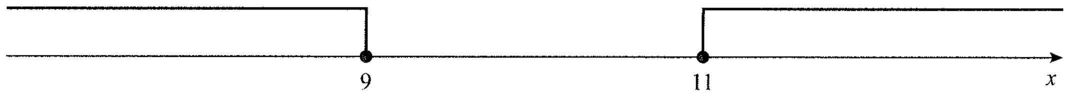
Zadanie 5.87. [matura, sierpień 2017, zad. 6. (1 pkt)]

Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór wszystkich liczb x spełniających warunek: $11 \leq 2x-7 \leq 15$.

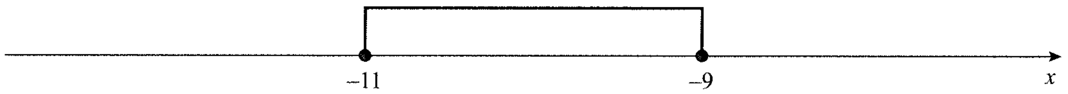
A.



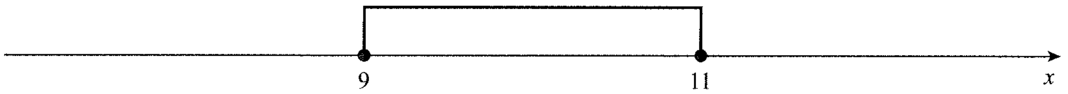
B.



C.



D.



Zadanie 5.88. [matura, sierpień 2017, zad. 8. (1 pkt)]

Rozwiązaniem równania $\frac{x+1}{x+2} = 3$, gdzie $x \neq -2$, jest liczba należąca do przedziału

A. $(-2, 1)$ **B.** $\langle 1, +\infty)$ **C.** $(-\infty, -5)$ **D.** $\langle -5, -2)$

Zadanie 5.89. [matura, sierpień 2017, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $2x^2 + x - 6 \leq 0$.

Zadanie 5.90. [matura, sierpień 2017, zad. 27. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $(x^2 - 6)(3x + 2) = 0$.

Zadanie 5.91. [matura, maj 2018, zad. 5. (1 pkt)]

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $\frac{1-2x}{2} > \frac{1}{3}$ jest przedział

A. $\left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$ **B.** $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ **C.** $\left(\frac{1}{6}, +\infty\right)$ **D.** $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

Zadanie 5.92. [matura, maj 2018, zad. 7. (1 pkt)]

Równanie $\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} = 0$.

A. ma trzy rozwiązania: $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ **B.** ma dwa rozwiązania: $x = 0$, $x = -2$
C. ma dwa rozwiązania: $x = -2$, $x = 2$ **D.** ma jedno rozwiązanie: $x = 0$

Zadanie 5.93. [matura, maj 2018, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 3x > 5$.

Zadanie 5.94. [matura, maj 2018, zad. 27. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $(x^3 + 125)(x^2 - 64) = 0$.

Zadanie 5.95. R [matura, maj 2018, zad. 27 swe. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$.

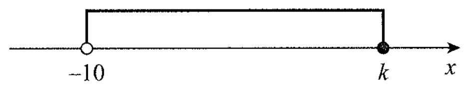
Zadanie 5.96. [matura, czerwiec 2018, zad. 3. (1 pkt)]

Wskaż liczbę spełniającą nierówność $(4 - x)(x + 3)(x + 4) > 0$.

A. 5 **B.** 16 **C.** –4 **D.** –2

Zadanie 5.97. [matura, czerwiec 2018, zad. 5. (1 pkt)]

Na rysunku przedstawiony jest przedział $(-10, k\rangle$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Suma wszystkich liczb całkowitych należących do tego przedziału jest równa 21.



Stąd wynika, że

A. $k = 9$ **B.** $k = 11$ **C.** $k = 21$ **D.** $k = 31$

Zadanie 5.98. [matura, czerwiec 2018, zad. 6. (1 pkt)]

Równanie $x - \frac{1}{2x+1} = 0$

A. ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste.
B. ma dokładnie trzy rozwiązania rzeczywiste.
C. ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste.
D. nie ma rozwiązań.

Zadanie 5.99. [matura, czerwiec 2018, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $2x(1 - x) + 1 - x < 0$.

Zadanie 5.100. [matura, sierpień 2018, zad. 7. (1 pkt)]

Rozwiązaniem równania $\frac{x-2}{3(x+2)} = \frac{1}{9}$ jest liczba

A. –2 **B.** 2 **C.** 4 **D.** –4

Zadanie 5.101. [matura, sierpień 2018, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $x^2 + 6x - 16 < 0$.

Zadanie 5.102. [matura, sierpień 2018, zad. 27. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $(x^3 + 27)(x^2 - 16) = 0$.

6. Funkcja liniowa. Proste

Zadanie 6.1. [matura, maj 2010, zad. 9. (1 pkt)]

Prosta o równaniu $y = -2x + (3m + 3)$ przecina w układzie współrzędnych oś Oy w punkcie $(0, 2)$. Wtedy

A. $m = -\frac{2}{3}$ **B.** $m = -\frac{1}{3}$ **C.** $m = \frac{1}{3}$ **D.** $m = \frac{5}{3}$

Zadanie 6.2. [matura, maj 2010, zad. 20. (1 pkt)]

Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $y = -3x + 5$ jest równy

A. $-\frac{1}{3}$ **B.** -3 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 3

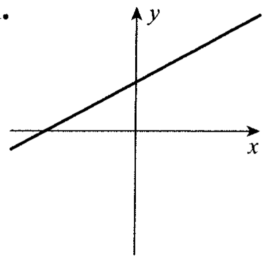
Zadanie 6.3. [matura, sierpień 2010, zad. 10. (1 pkt)]

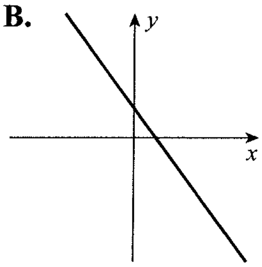
Wskaż m, dla którego funkcja liniowa $f(x) = (m - 1)x + 6$ jest rosnąca

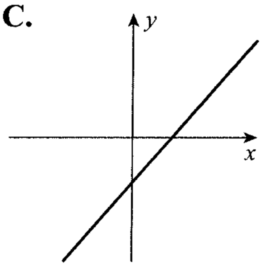
A. $m = -1$ **B.** $m = 0$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = 2$

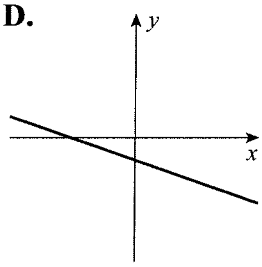
Zadanie 6.4. [matura, sierpień 2010, zad. 12. (1 pkt)]

Na którym rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej $y = ax + b$ takiej, że $a > 0$ i $b < 0$?

A.


B.


C.


D.


Zadanie 6.5. [matura, sierpień 2010, zad. 22. (1 pkt)]

Prosta l ma równanie $y = -\frac{1}{4}x + 7$. Wskaż równanie prostej prostopadłej do prostej l.

A. $y = \frac{1}{4}x + 1$ **B.** $y = -\frac{1}{4}x - 7$ **C.** $y = 4x - 1$ **D.** $y = -4x + 7$

Zadanie 6.6. [matura, maj 2011, zad. 4. (1 pkt)]

Układ równań $\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 6x + ay = 15 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli

A. $a = -1$ **B.** $a = 0$ **C.** $a = 2$ **D.** $a = 3$

Zadanie 6.7. [matura, maj 2011, zad. 10. (1 pkt)]

Funkcja liniowa określona jest wzorem $f(x) = -\sqrt{2}x + 4$. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba

A. $-2\sqrt{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $2\sqrt{2}$

Zadanie 6.8. [matura, maj 2011, zad. 18. (1 pkt)]

Prosta k ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(-2, 1)$.

A. $y = -2x + 3$ **B.** $y = 2x + 1$ **C.** $y = 2x + 5$ **D.** $y = -x + 1$

Zadanie 6.9. [matura, czerwiec 2011, zad. 9. (1 pkt)]

Funkcja liniowa $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

A. jest rosnąca i jej wykres przechodzi przez punkt $(0, 3)$.
B. jest malejąca i jej wykres przechodzi przez punkt $(0, -3)$.
C. jest rosnąca i jej wykres przechodzi przez punkt $(0, -3)$.
D. jest malejąca i jej wykres przechodzi przez punkt $(0, 3)$.

Zadanie 6.10. [matura, czerwiec 2011, zad. 15. (1 pkt)]

Dane są punkty $A = (-2, 2)$ i $B = (4, -2)$. Współczynnik kierunkowy prostej AB jest równy

A. $a = -\frac{2}{3}$ **B.** $a = -\frac{3}{2}$ **C.** $a = \frac{3}{2}$ **D.** $a = \frac{2}{3}$

Zadanie 6.11. [matura, sierpień 2011, zad. 3. (1 pkt)]

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ jest

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

Zadanie 6.12. [matura, sierpień 2011, zad. 4. (1 pkt)]

Funkcja liniowa $f(x) = (m - 2)\,x - 11$ jest rosnąca dla

A. $m > 2$ **B.** $m > 0$ **C.** $m < 13$ **D.** $m < 11$

Zadanie 6.13. [matura, sierpień 2011, zad. 5. (1 pkt)]

Do wykresu funkcji liniowej f należą punkty $A = (1, 2)$, $B = (-2, 5)$. Funkcja f ma wzór

A. $f(x) = x + 3$ **B.** $f(x) = x - 3$ **C.** $f(x) = -x - 3$ **D.** $f(x) = -x + 3$

Zadanie 6.14. [matura, sierpień 2011, zad. 6. (1 pkt)]

Punkt $A = (0, 5)$ leży na prostej k prostopadłej do prostej o równaniu $y = x + 1$. Prosta k ma równanie

A. $y = x + 5$ **B.** $y = -x + 5$ **C.** $y = x - 5$ **D.** $y = -x - 5$

Zadanie 6.15. [matura, maj 2012, zad. 8. (1 pkt)]

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = ax + 6$, gdzie $a > 0$. Wówczas spełniony jest warunek

A. $f(1) > 1$ **B.** $f(2) = 2$ **C.** $f(3) < 3$ **D.** $f(4) = 4$

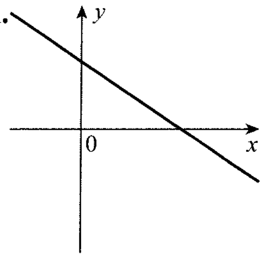
Zadanie 6.16. [matura, maj 2012, zad. 21. (1 pkt)]

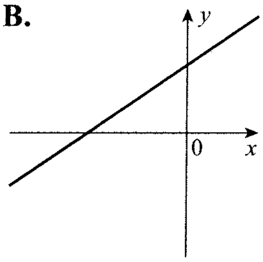
Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x - 6y + 7 = 0$.

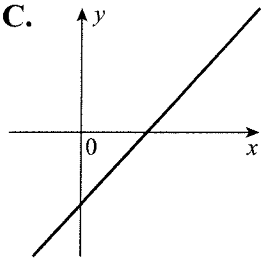
A. $y = \frac{1}{2}x$ **B.** $y = -\frac{1}{2}x$ **C.** $y = 2x$ **D.** $y = -2x$

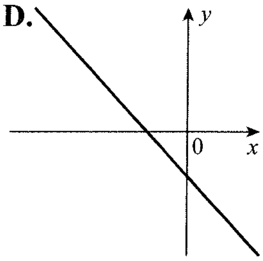
Zadanie 6.17. [matura, czerwiec 2012, zad. 18. (1 pkt)]

Jeden z rysunków przedstawia wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, gdzie $a > 0$ i $b < 0$. Wskaż ten wykres.

A.


B.


C.


D.


Zadanie 6.18. [matura, sierpień 2012, zad. 5. (1 pkt)]

Liczba (-2) jest miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x) = mx + 2$. Wtedy

A. $m = 3$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = -2$ **D.** $m = -4$

Zadanie 6.19. [matura, sierpień 2012, zad. 19. (1 pkt)]

Wskaż równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i prostopadłej do prostej o równaniu $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

A. $y = 3x$ **B.** $y = -3x$ **C.** $y = 3x + 2$ **D.** $y = \frac{1}{3}x + 2$

Zadanie 6.20. [matura, maj 2013, zad. 4. (1 pkt)]

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 5x + 3y = 3 \\ 8x - 6y = 48 \end{cases}$ jest para liczb

A. $x = -3$ i $y = 4$ **B.** $x = -3$ i $y = 6$ **C.** $x = 3$ i $y = -4$ **D.** $x = 9$ i $y = 4$

Zadanie 6.21. [matura, maj 2013, zad. 5. (1 pkt)]

Punkt $A = (0, 1)$ leży na wykresie funkcji liniowej $f(x) = (m - 2)x + m - 3$. Stąd wynika, że

A. $m = 1$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = 4$

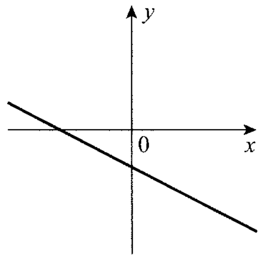
Zadanie 6.22. [matura, maj 2013, zad. 8. (1 pkt)]

Prosta o równaniu $y = \frac{2}{m}x + 1$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{3}{2}x - 1$. Stąd wynika, że

A. $m = -3$ **B.** $m = \frac{2}{3}$ **C.** $m = \frac{3}{2}$ **D.** $m = 3$

Zadanie 6.23. [matura, maj 2013, zad. 9. (1 pkt)]

Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu pewnej funkcji liniowej $y = ax + b$



Jakie znaki mają współczynniki a i b?

A. $a < 0$ i $b < 0$ **B.** $a < 0$ i $b > 0$ **C.** $a > 0$ i $b < 0$ **D.** $a > 0$ i $b > 0$

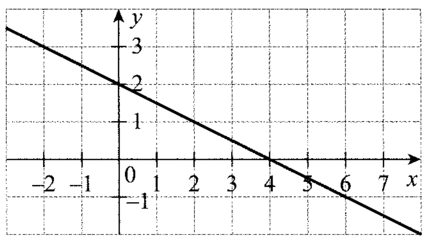
Zadanie 6.24. [matura, czerwiec 2013, zad. 5. (1 pkt)]

Liczba (-3) jest miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x) = (2m - 1)x + 9$. Wtedy

A. $m = -2$ **B.** $m = 0$ **C.** $m = 2$ **D.** $m = 3$

Zadanie 6.25. [matura, czerwiec 2013, zad. 18. (1 pkt)]

Wskaż równanie prostej, której fragment przedstawiony jest na poniższym wykresie



A. $x - 2y - 4 = 0$ **B.** $x + 2y + 4 = 0$ **C.** $x - 2y + 4 = 0$ **D.** $x + 2y - 4 = 0$

Zadanie 6.26. [matura, czerwiec 2013, zad. 25. (1 pkt)]

Dana jest prosta l o równaniu $y = -\frac{2}{5}x$. Prosta k równoległa do prostej l i przecinająca oś Oy w punkcie o współrzędnych $(0, 3)$ ma równanie

A. $y = -0{,}4x + 3$ **B.** $y = -0{,}4x - 3$ **C.** $y = 2{,}5x + 3$ **D.** $y = 2{,}5\,x - 3$

Zadanie 6.27. [matura, sierpień 2013, zad. 4. (1 pkt)]

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 3x - 5y = 0 \\ 2x - y = 14 \end{cases}$ jest para liczb (x, y) taka, że

A. $x < 0$ i $y < 0$ **B.** $x < 0$ i $y > 0$ **C.** $x > 0$ i $y < 0$ **D.** $x > 0$ i $y > 0$

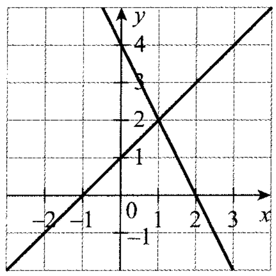
Zadanie 6.28. [matura, sierpień 2013, zad. 7. (1 pkt)]

Prostą równoległą do prostej o równaniu $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$ jest prosta opisana równaniem

A. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ **B.** $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ **C.** $y = \frac{3}{2}x - \frac{4}{3}$ **D.** $y = -\frac{3}{2}x - \frac{4}{3}$

Zadanie 6.29. [matura, maj 2014, zad. 1. (1 pkt)]

Na rysunku przedstawiono geometryczną interpretację jednego z niżej zapisanych układów równań



A. $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

Zadanie 6.30. [matura, maj 2014, zad. 6. (1 pkt)]

Funkcji liniowej $f(x) = (m^2 - 4)x + 2$ jest malejąca, gdy

A. $m \in \{-2, 2\}$ **B.** $m \in (-2, 2)$ **C.** $m \in (-\infty, -2)$ **D.** $m \in (2, +\infty)$

Zadanie 6.31. [matura, maj 2014, zad. 8. (1 pkt)]

Punkt $C = (0, 2)$ jest wierzchołkiem trapezu $ABCD$, którego podstawa AB jest zawarta w prostej o równaniu $y = 2x - 4$. Wskaż równanie prostej zawierającej podstawę CD.

A. $y = \frac{1}{2}x + 2$ **B.** $y = -2x + 2$ **C.** $y = -\frac{1}{2}x + 2$ **D.** $y = 2x + 2$

Zadanie 6.32. [matura, maj 2014, zad. 18. (1 pkt)]

O funkcji liniowej f wiadomo, że $f(1) = 2$. Do wykresu tej funkcji należy punkt $P = (-2, 3)$. Wzór funkcji f to

A. $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ **B.** $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ **C.** $f(x) = -3x + 7$ **D.** $f(x) = -2x + 4$

Zadanie 6.33. [matura, czerwiec 2014, zad. 4. (1 pkt)]

Na prostej o równaniu $y = ax + b$ leżą punkty $K = (1, 0)$, $L = (0, 1)$. Wynika stąd, że

A. $a = -1$ i $b = 1$ **B.** $a = 1$ i $b = -1$ **C.** $a = -1$ i $b = -1$ **D.** $a = 1$ i $b = 1$

Zadanie 6.34. [matura, czerwiec 2014, zad. 6. (1 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 3x - 4$ dla każdej liczby z przedziału $\langle -2, 2\rangle$. Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział

A. $\langle -10, 2\rangle$ **B.** $(-10, 2\rangle$ **C.** $\langle 2, 10\rangle$ **D.** $(2. 10\rangle$

Zadanie 6.35. [matura, czerwiec 2014, zad. 22. (1 pkt)]

Proste o równaniach: $y = mx - 5$ oraz $y = (1 - 2m)x + 7$ są równoległe, gdy

A. $m = -1$ **B.** $m = -\frac{1}{3}$ **C.** $m = \frac{1}{3}$ **D.** $m = 1$

Zadanie 6.36. [matura, sierpień 2014, zad. 12. (1 pkt)]

Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe. Stąd wynika, że

A. $a > 0$ i $b > 0$ **B.** $a < 0$ i $b < 0$ **C.** $a < 0$ i $b > 0$ **D.** $a > 0$ i $b < 0$

Zadanie 6.37. [matura, sierpień 2014, zad. 19. (1 pkt)]

Dane są równania czterech prostych:

$k: y = \frac{1}{2}x + 5$, $l: y = 2x + 5$, $m: y = -2x + 3$, $n: y = 2x - 5$

Prostopadłe są proste

A. l i n **B.** l i m **C.** k i n **D.** k i m

Zadanie 6.38. [matura, maj 2015, zad. 5. (1 pkt)]

Układu równań $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 0,5y = 4 \end{cases}$ opisuje w układzie współrzędnych na płaszczyźnie

A. zbiór pusty. **B.** dokładnie jeden punkt.
C. dokładnie dwa różne punkty. **D.** zbiór nieskończony.

Zadanie 6.39. [matura, maj 2015, zad. 9. (1 pkt)]

Na wykresie funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = (m - 1)x + 3$ leży punkt $S = (5, -2)$. Zatem

A. $m = -1$ **B.** $m = 0$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = 2$

Zadanie 6.40. [matura, maj 2015, zad. 10. (1 pkt)]

Funkcja liniowa f określona wzorem $f(x) = 2x + b$ ma takie samo miejsce zerowe, jakie ma funkcja liniowa $g(x) = -3x + 4$. Stąd wynika, że

A. $b = 4$ **B.** $b = -\frac{3}{2}$ **C.** $b = -\frac{8}{3}$ **D.** $b = \frac{4}{3}$

Zadanie 6.41. [matura, maj 2015, zad. 18. (1 pkt)]

Prosta l o równaniu $y = m^2x + 3$ jest równoległa do prostej k o równaniu $y = (4m - 4)x - 3$. Zatem

A. $m = 2$ **B.** $m = -2$ **C.** $m = -2 - 2\sqrt{2}$ **D.** $m = 2 + 2\sqrt{2}$

Zadanie 6.42. [matura, maj 2015, zad. 19. (1 pkt)]

Proste o równaniach: $y = 2mx - m^2 - 1$ oraz $y = 4m^2x + m^2 + 1$ są prostopadłe dla

A. $m = -\frac{1}{2}$ **B.** $m = \frac{1}{2}$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = 2$

Zadanie 6.43. [matura, maj 2015, zad. 8 swe. (1 pkt)]

Miejscem zerowym funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ jest

A. 0 **B.** 6 **C.** 4 **D.** –6

Zadanie 6.44. [matura, maj 2015, zad. 9 swe. (1 pkt)]

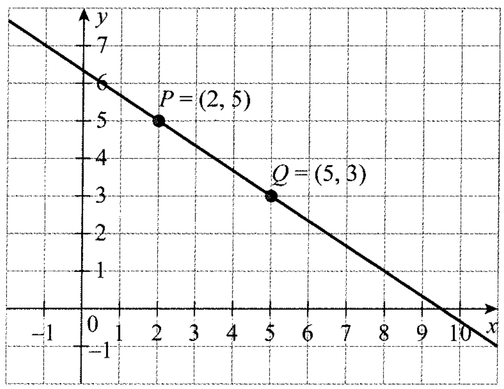
Punkt $M = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ należy do wykresu funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = (3 - 2a)x + 2$.

Wtedy

A. $a = -\frac{1}{2}$ **B.** $a = 2$ **C.** $a = \frac{1}{2}$ **D.** $a = -2$

Zadanie 6.45. [matura, maj 2015, zad. 10 swe. (1 pkt)]

Na rysunku przedstawiono fragment prostej o równaniu $y = ax + b$



Współczynnik kierunkowy tej prostej jest równy

A. $a = -\frac{3}{2}$ **B.** $a = -\frac{2}{3}$ **C.** $a = -\frac{2}{5}$ **D.** $a = -\frac{3}{5}$

Zadanie 6.46. [matura, maj 2015, zad. 18 swe. (1 pkt)]

Dane są punkty $M = (3, -5)$, $N = (-1, 7)$. Prosta przechodząca przez te punkty ma równanie

A. $y = -3x + 4$ **B.** $y = 3x - 4$ **C.** $y = -\frac{1}{3}x + 4$ **D.** $y = 3x + 4$

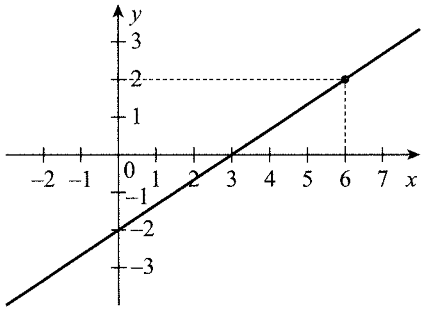
Zadanie 6.47. [matura, czerwiec 2015, zad. 5. (1 pkt)]

Para liczb $x = 2$ i $y = 1$ jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + ay = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$, gdy

A. $a = -3$ **B.** $a = -2$ **C.** $a = 2$ **D.** $a = 3$

Zadanie 6.48. [matura, czerwiec 2015, zad. 9. (1 pkt)]

Na rysunku przedstawiony jest fragment prostej o równaniu $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty $(0, -2)$ i $(6, 2)$. Wtedy



A. $a = \frac{2}{3}$, $b = -2$ **B.** $a = 3$, $b = -2$

C. $a = \frac{3}{2}$, $b = 2$ **D.** $a = -3$, $b = 2$

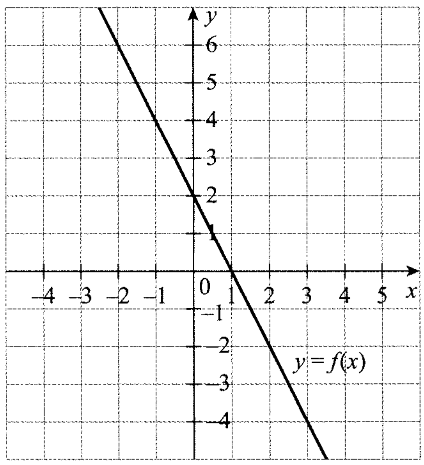
Zadanie 6.49. [matura, czerwiec 2015, zad. 10. (1 pkt)]

Prosta k przecina oś Oy układu współrzędnych w punkcie $(0, 6)$ i jest równoległa do prostej o równaniu $y = -3x$. Wówczas prosta k przecina oś Ox układu współrzędnych w punkcie

A. $(-12, 0)$ **B.** $(-2, 0)$ **C.** $(2, 0)$ **D.** $(6, 0)$

Zadanie 6.50. [matura, czerwiec 2015, zad. 11 swe. (1 pkt)]

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu pewnej funkcji liniowej f. Funkcja liniowa g, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem poziomej osi układu współrzędnych, jest określona wzorem



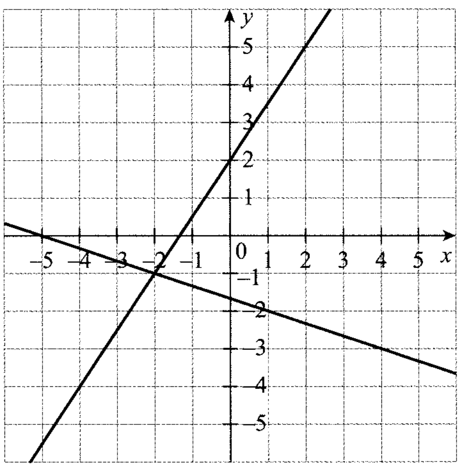
A. $g(x) = -2x - 2$ **B.** $g(x) = 2x - 2$

C. $g(x) = -2x + 2$ **D.** $g(x) = 2x + 2$

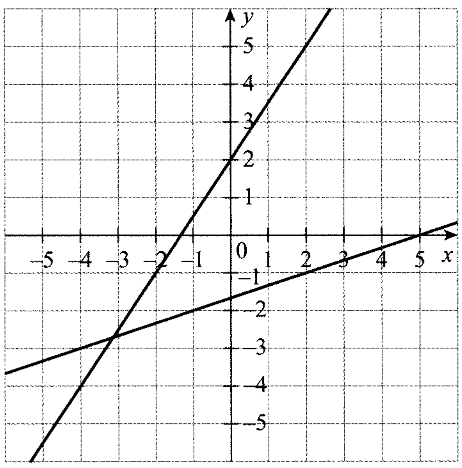
Zadanie 6.51. [matura, sierpień 2015, zad. 7. (1 pkt)]

Na jednym z poniższych rysunków przedstawiono interpretację geometryczną układu równań $\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$. Wskaż ten rysunek.

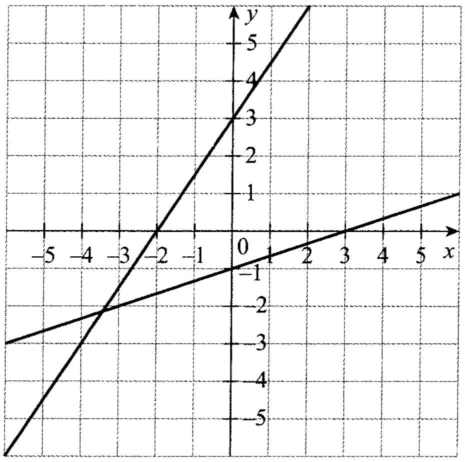
A.



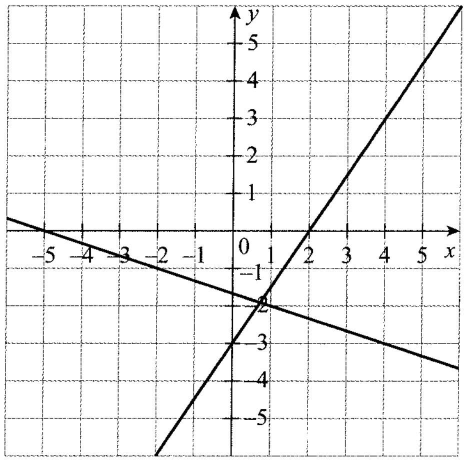
B.



C.



D.



Zadanie 6.52. [matura, sierpień 2015, zad. 12. (1 pkt)]

Wykres funkcji liniowej $y = 2x - 3$ przecina oś Oy w punkcie o współrzędnych

A. $(0, -3)$ **B.** $(-3, 0)$ **C.** $(0, 2)$ **D.** $(0, 3)$

Zadanie 6.53. [matura, sierpień 2015, zad. 20. (1 pkt)]

Współczynnik kierunkowy prostej, na której leżą punkty $A = (-4, 3)$ oraz $B = (8, 7)$, jest równy

A. $a = 3$ **B.** $a = -1$ **C.** $a = \frac{5}{6}$ **D.** $a = \frac{1}{3}$

Zadanie 6.54. [matura, sierpień 2015, zad. 9 swe. (1 pkt)]

Miejsce zerowe funkcji liniowej $f(x) = x + 3m$ jest większe od 2 dla każdej liczby m spełniającej warunek

A. $m < -\frac{2}{3}$ **B.** $-\frac{2}{3} < m < \frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{3} < m < 1$ **D.** $m > 1$

Zadanie 6.55. [matura, maj 2016, zad. 6. (1 pkt)]

Proste o równaniach $2x - 3y = 4$ i $5x - 6y = 7$ przecinają się w punkcie P. Stąd wynika, że

A. $P = (1, 2)$ **B.** $P = (-1, 2)$ **C.** $P = (-1, -2)$ **D.** $P = (1, -2)$

Zadanie 6.56. [matura, maj 2016, zad. 8. (1 pkt)]

Dana jest funkcja liniowa $f(x) = \frac{3}{4}x + 6$. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba

A. 8 **B.** 6 **C.** -6 **D.** -8

Zadanie 6.57. [matura, maj 2016, zad. 20. (1 pkt)]

Proste opisane równaniami $y = \frac{2}{m-1}x + m - 2$ oraz $y = mx + \frac{1}{m+1}$ są prostopadłe, gdy

A. $m = 2$ **B.** $m = \frac{1}{2}$ **C.** $m = \frac{1}{3}$ **D.** $m = -2$

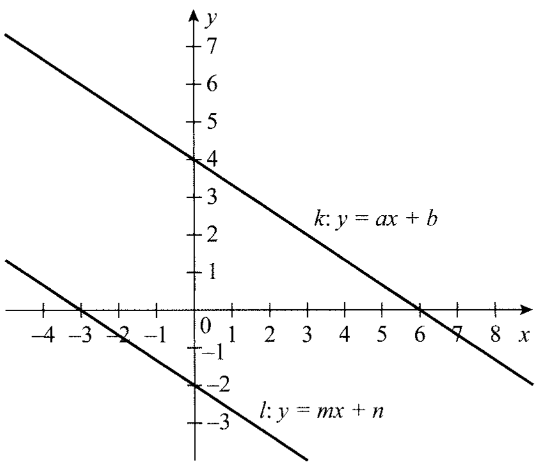
Zadanie 6.58. [matura, czerwiec 2016, zad. 18. (1 pkt)]

Układ równań $\begin{cases} y = -ax + 2a \\ y = \frac{b}{3}x - 2 \end{cases}$ nie ma rozwiązań dla

A. $a = -1$ i $b = -3$ **B.** $a = 1$ i $b = 3$ **C.** $a = 1$ i $b = -3$ **D.** $a = -1$ i $b = 3$

Zadanie 6.59. [matura, czerwiec 2016, zad. 23. (1 pkt)]

Na rysunku przedstawione są dwie proste równoległe k i l o równaniach $y = ax + b$ oraz $y = mx + n$. Początek układu współrzędnych leży między tymi prostymi.

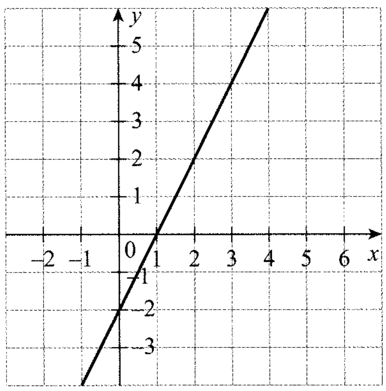


Zatem

A. $a \cdot m > 0$ i $b \cdot n > 0$ **B.** $a \cdot m > 0$ i $b \cdot n < 0$
C. $a \cdot m < 0$ i $b \cdot n > 0$ **D.** $a \cdot m < 0$ i $b \cdot n < 0$

Zadanie 6.60. [matura, sierpień 2016, zad. 7. (1 pkt)]

Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji liniowej f, przy czym $f(0) = -2$ i $f(1) = 0$.



Wykres funkcji g jest symetryczny do wykresu funkcji f względem początku układu współrzędnych. Funkcja g jest określona wzorem

A. $g(x) = 2x + 2$ **B.** $g(x) = 2x - 2$ **C.** $g(x) = -2x + 2$ **D.** $g(x) = -2x - 2$

Zadanie 6.61. [matura, sierpień 2016, zad. 12. (1 pkt)]

Układ równań $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = -10 \end{cases}$

A. nie ma rozwiązań. **B.** ma dokładnie jedno rozwiązanie.
C. ma dokładnie dwa rozwiązania. **D.** ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Zadanie 6.62. [matura, sierpień 2016, zad. 14. (1 pkt)]

Na której z podanych prostych leżą wszystkie punkty o współrzędnych $(m-1, 2m+5)$, gdzie m jest dowolną liczbą rzeczywistą?

A. $y = 2x + 5$ **B.** $y = 2x + 6$ **C.** $y = 2x + 7$ **D.** $y = 2x + 8$

Zadanie 6.63. [matura, maj 2017, zad. 9. (1 pkt)]

Miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x) = \sqrt{3}(x+1) - 12$ jest liczba

A. $\sqrt{3} - 4$ **B.** $-2\sqrt{3} + 1$ **C.** $4\sqrt{3} - 1$ **D.** $-\sqrt{3} + 12$

Zadanie 6.64. [matura, maj 2017, zad. 19. (1 pkt)]

Na płaszczyźnie z układem współrzędnych proste k i l przecinają się pod kątem prostym w punkcie $A = (-2, 4)$. Prosta k jest określona równaniem $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$. Zatem prostą l opisuje równanie

A. $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$ **B.** $y = -\frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$ **C.** $y = 4x - 12$ **D.** $y = 4x + 12$

Zadanie 6.65. [matura, czerwiec 2017, zad. 7. (1 pkt)]

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = 21 - \frac{7}{3}x$. Miejscem zerowym funkcji liniowej f jest

A. -9 **B.** $-\frac{7}{3}$ **C.** 9 **D.** 21

Zadanie 6.66. [matura, czerwiec 2017, zad. 8. (1 pkt)]

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = b \end{cases}$ z niewiadomymi x i y jest para liczb dodatnich. Wynika stąd, że

A. $b < -1$ **B.** $b = -1$ **C.** $-1 < b < 1$ **D.** $b \geq 1$

Zadanie 6.67. [matura, czerwiec 2017, zad. 18. (1 pkt)]

Prosta przechodząca przez punkt $A = (-10, 5)$ i początek układu współrzędnych jest prostopadła do prostej o równaniu

A. $y = -2x + 4$ **B.** $y = \frac{1}{2}x$ **C.** $y = -\frac{1}{2}x + 1$ **D.** $y = 2x - 4$

Zadanie 6.68. [matura, sierpień 2017, zad. 7. (1 pkt)]

Rozważmy treść następującego zadania:

Obwód prostokąta o bokach długości a i b jest równy 60. Jeden z boków tego prostokąta jest o 10 dłuższy od drugiego. Oblicz długości boków tego prostokąta.

Który układ równań opisuje zależności między długościami boków tego prostokąta?

A. $\begin{cases} 2(a+b)=60 \\ a+10=b \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} 2a+b=60 \\ 10b=a \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} 2ab=60 \\ a-b=10 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} 2(a+b)=60 \\ 10a=b \end{cases}$

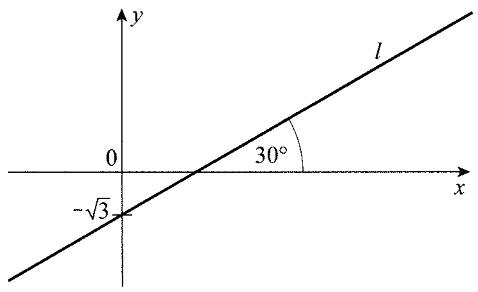
Zadanie 6.69. [matura, sierpień 2017, zad. 20. (1 pkt)]

Prosta k przechodzi przez punkt $A = (4, -4)$ i jest prostopadła do osi Ox. Prosta k ma równanie

A. $x-4=0$ **B.** $x-y=0$ **C.** $y+4=0$ **D.** $x+y=0$.

Zadanie 6.70. [matura, sierpień 2017, zad. 21. (1 pkt)]

Prosta l jest nachylona do osi Ox pod kątem 30° i przecina oś Oy w punkcie $\left(0, -\sqrt{3}\right)$ (zobacz rysunek).



Prosta l ma równanie

A. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$ **B.** $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ **C.** $y = \frac{1}{2}x - \sqrt{3}$ **D.** $y = \frac{1}{2}x + \sqrt{3}$.

Zadanie 6.71. [matura, maj 2018, zad. 8. (1 pkt)]

Funkcja liniowa f określona jest wzorem $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$, dla wszystkich liczb rzeczywistych x.

Wskaż zdanie prawdziwe.

A. Funkcja f jest malejąca i jej wykres przecina oś Oy w punkcie $P = \left(0, \frac{1}{3}\right)$.

B. Funkcja f jest malejąca i jej wykres przecina oś Oy w punkcie $P = (0, -1)$.

C. Funkcja f jest rosnąca i jej wykres przecina oś Oy w punkcie $P = \left(0, \frac{1}{3}\right)$.

D. Funkcja f jest rosnąca i jej wykres przecina oś Oy w punkcie $P = (0, -1)$.

Zadanie 6.72. [matura, maj 2018, zad. 10. (1 pkt)]

Liczba 1 jest miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, a punkt $M = (3, -2)$ należy do wykresu tej funkcji. Współczynnik a we wzorze tej funkcji jest równy

A. 1 **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $-\frac{3}{2}$ **D.** -1

Zadanie 6.73. [matura, maj 2018, zad. 19. (1 pkt)]

Proste o równaniach $y = (m + 2)x + 3$ oraz $y = (2m - 1)x - 3$ są równoległe, gdy

A. $m = 2$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = 0$ **D.** $m = 1$

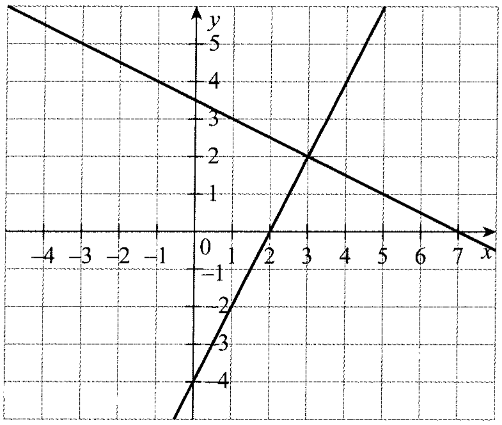
Zadanie 6.74. [matura, czerwiec 2018, zad. 11. (1 pkt)]

Funkcja liniowa $f(x) = (1 - m^2)x + m - 1$ nie ma miejsc zerowych dla

A. $m = 1$ **B.** $m = 0$ **C.** $m = -1$ **D.** $m = -2$

Zadanie 6.75. [matura, sierpień 2018, zad. 6. (1 pkt)]

Na rysunku jest przedstawiona graficzna ilustracja układu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi x i y.



Wskaż ten układ.

A. $\begin{cases} y = -2x + 8 \\ y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} y = 3x - 7 \\ y = -\frac{2}{3}x + 4 \end{cases}$

Zadanie 6.76. [matura, sierpień 2018, zad. 9. (1 pkt)]

Punkt $\left(1, \sqrt{3}\right)$ należy do wykresu funkcji $y = 2\sqrt{3}x + b$. Wtedy współczynnik b jest równy

A. 7 **B.** $3\sqrt{3}$ **C.** -5 **D.** $-\sqrt{3}$

Zadanie 6.77. [matura, sierpień 2018, zad. 20. (1 pkt)]

Proste o równaniach $y = (3m - 4)x + 2$ oraz $y = (12 - m)x + 3m$ są równoległe, gdy

A. $m = 4$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = -4$ **D.** $m = -3$

7. Funkcja kwadratowa

Zadanie 7.1. [matura, maj 2010, zad. 8. (1 pkt)]

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -3x^2 + 3$ jest parabola o wierzchołku w punkcie

A. $(3, 0)$ **B.** $(0, 3)$ **C.** $(-3, 0)$ **D.** $(0, -3)$

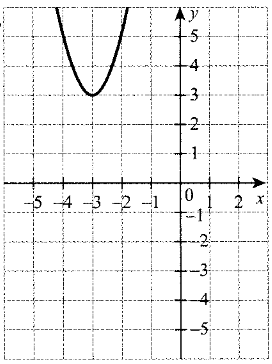
Zadanie 7.2. [matura, sierpień 2010, zad. 9. (1 pkt)]

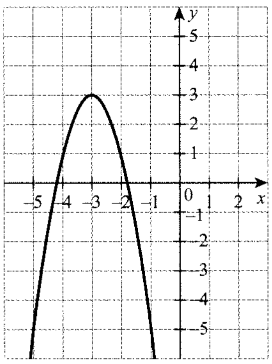
Wierzchołek paraboli $y = x^2 + 4x - 13$ leży na prostej o równaniu

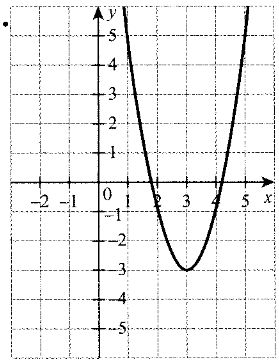
A. $x = -2$ **B.** $x = 2$ **C.** $x = 4$ **D.** $x = -4$

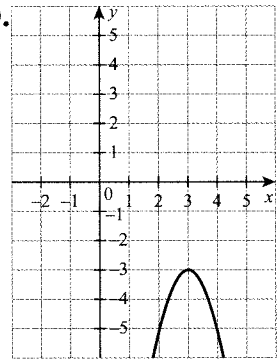
Zadanie 7.3. [matura, sierpień 2010, zad. 11. (1 pkt)]

Zbiorem wartości funkcji kwadratowej f jest przedział $(-\infty, 3\rangle$. Na którym rysunku przedstawiono wykres funkcji f?

A.


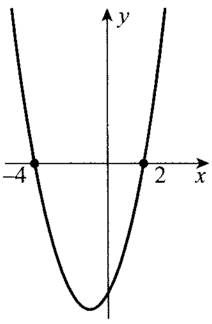
B.


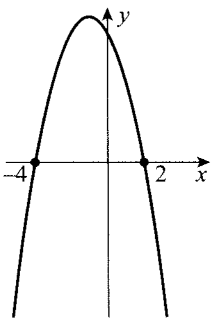
C.


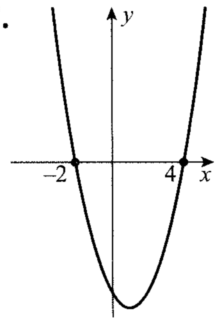
D.


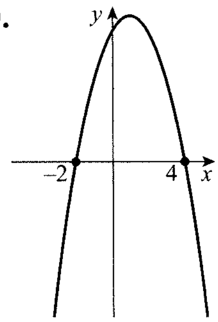
Zadanie 7.4. [matura, maj 2011, zad. 9. (1 pkt)]

Dane są funkcje liniowe $f(x) = x - 2$ oraz $g(x) = x + 4$ określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Wskaż, który z poniższych wykresów jest wykresem funkcji $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

A.


B.


C.


D.


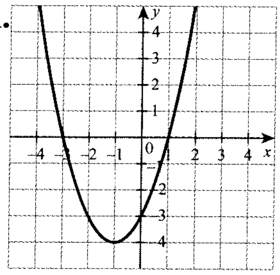
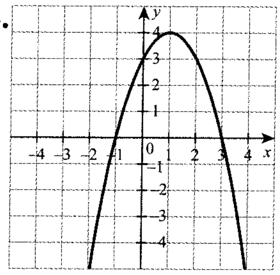
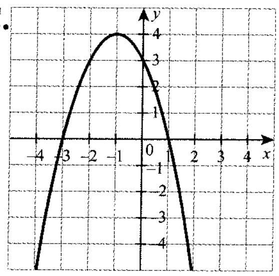
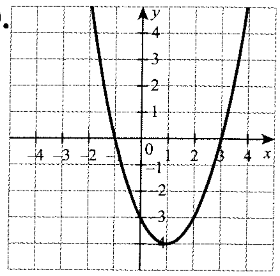
Zadanie 7.5. [matura, sierpień 2011, zad. 10. (1 pkt)]

Zbiorem wartości funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 4$ jest

A. $\langle -4, +\infty)$ **B.** $\langle -2, +\infty)$ **C.** $\langle 2, +\infty)$ **D.** $\langle 4, +\infty)$

Zadanie 7.6. [matura, czerwiec 2012, zad. 5. (1 pkt)]

Na jednym z poniższych rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = x^2 + 2x - 3$. Wskaż ten rysunek.

A.  **B.**  **C.**  **D.** 

Zadanie 7.7. [matura, czerwiec 2012, zad. 6. (1 pkt)]

Wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = x^2 - 4x + 4$ jest punkt o współrzędnych

A. $(0, 2)$ **B.** $(0, -2)$ **C.** $(-2, 0)$ **D.** $(2, 0)$

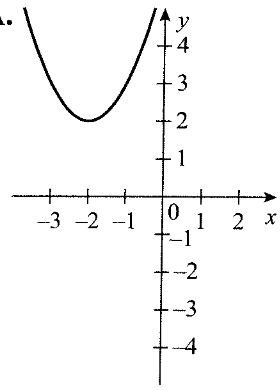
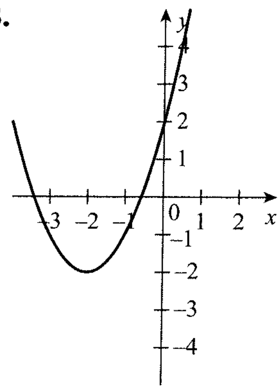
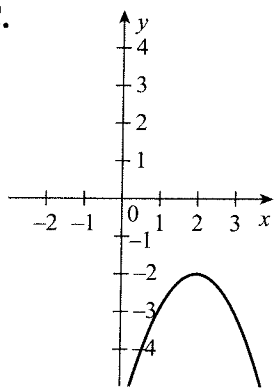
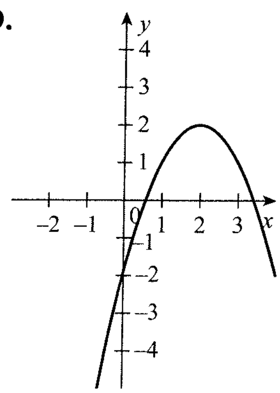
Zadanie 7.8. [matura, sierpień 2012, zad. 7. (1 pkt)]

Dana jest parabola o równaniu $y = x^2 + 8x - 14$. Pierwsza współrzędna wierzchołka tej paraboli jest równa

A. $x = -8$ **B.** $x = -4$ **C.** $x = 4$ **D.** $x = 8$

Zadanie 7.9. [matura, sierpień 2012, zad. 8. (1 pkt)]

Wskaż fragment wykresu funkcji kwadratowej, której zbiorem wartości jest $\langle -2, +\infty)$.

A.  **B.**  **C.**  **D.** 

Zadanie 7.10. [matura, maj 2013, zad. 6. (1 pkt)]

Wierzchołkiem paraboli o równaniu $f(x) = -3(x - 2)^2 + 4$ jest punkt o współrzędnych

A. $(-2, -4)$ **B.** $(-2, 4)$ **C.** $(2, -4)$ **D.** $(2, 4)$

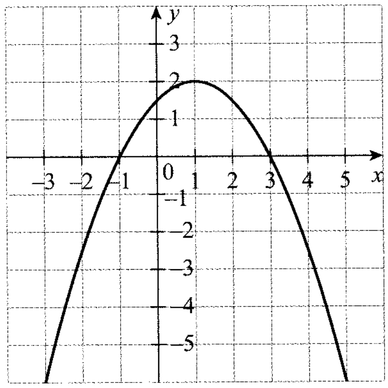
Zadanie 7.11. [matura, sierpień 2013, zad. 9. (1 pkt)]

Wierzchołkiem paraboli o równaniu $y = (x - 1)^2 + 2c$ leży na prostej o równaniu $y = 6$. Wtedy

A. $c = -6$ **B.** $c = -3$ **C.** $c = 3$ **D.** $c = 6$

Zadanie 7.12. [matura, maj 2014, zad. 7. (1 pkt)]

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej f.



Funkcja f jest określona wzorem

A. $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)(x-1)$ **B.** $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)(x+1)$

C. $f(x) = -\frac{1}{2}(x+3)(x-1)$ **D.** $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+1)$

Zadanie 7.13. [matura, maj 2014, zad. 26. (2 pkt)]

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 + bx + c$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $W = (4, 0)$. Oblicz wartości współczynników b i c.

Zadanie 7.14. [matura, czerwiec 2014, zad. 7. (1 pkt)]

Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = 3x^2 + 7x + c$ jest liczba $\frac{-7}{3}$. Wówczas c jest równe

A. 0 **B.** 1 **C.** −98 **D.** 98

Zadanie 7.15. [matura, czerwiec 2014, zad. 10. (1 pkt)]

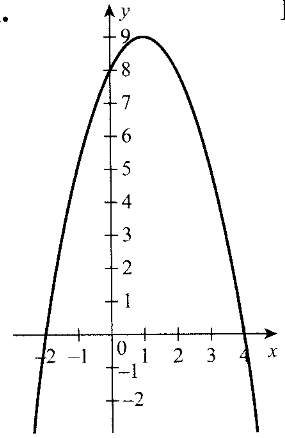
Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli o równaniu $y = (x + 2)(x - 4)$ jest równa

A. −8 **B.** −4 **C.** 1 **D.** 2

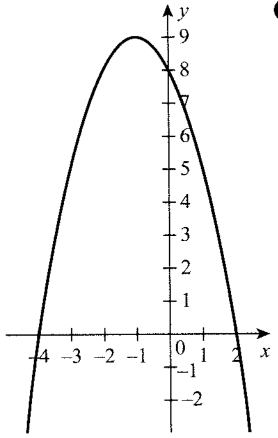
Zadanie 7.16. [matura, sierpień 2014, zad. 10. (1 pkt)]

Wskaż rysunek, na którym przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej, określonej wzorem $f(x) = (x - 2)(x + 4)$

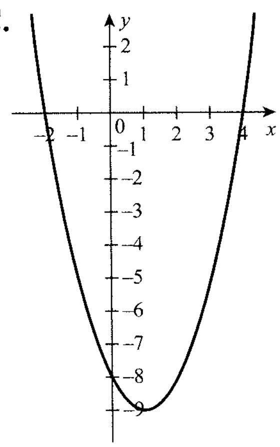
A.



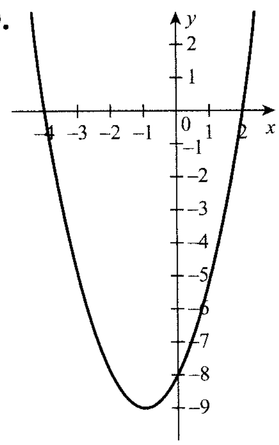
B.



C.



D.



Zadanie 7.17. [matura, sierpień 2014, zad. 11. (1 pkt)]

Funkcja kwadratowa, której zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, -3\rangle$, może być określona wzorem

A. $y = (x + 2)^2 - 3$ **B.** $y = -(x + 3)^2$ **C.** $y = -(x - 2)^2 - 3$ **D.** $y = -x^2 + 3$

Zadanie 7.18. [matura, maj 2015, zad. 11. (1 pkt)]

Funkcja kwadratowa określona jest wzorem $f(x) = x^2 + x + c$. Jeżeli $f(3) = 4$, to

A. $f(1) = -6$ **B.** $f(1) = 0$ **C.** $f(1) = 6$ **D.** $f(1) = 18$

Zadanie 7.19. [matura, maj 2015, zad. 29. (2 pkt)]

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x + 3$ w przedziale $\langle 0, 4\rangle$.

Zadanie 7.20. [matura, czerwiec 2015, zad. 30. (2 pkt)]

Funkcja kwadratowa, f dla $x = -3$ przyjmuje wartość największą równą 4. Do wykresu funkcji f należy punkt $A = (-1, 3)$. Zapisz wzór funkcji kwadratowej f.

Zadanie 7.21. [matura, czerwiec 2015, zad. 10 swe. (1 pkt)]

Najmniejszą wartością funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 4x$ jest

A. -4 **B.** -2 **C.** 0 **D.** 4

Zadanie 7.22. [matura, sierpień 2015, zad. 11. (1 pkt)]

Parabola o wierzchołku $W = (-3, 5)$ i ramionach skierowanych w dół może być wykresem funkcji określonej wzorem

A. $y = 2 \cdot (x + 3)^2 + 5$. **B.** $y = -2 \cdot (x - 3)^2 + 5$.

C. $y = -2 \cdot (x + 3)^2 + 5$. **D.** $y = -2 \cdot (x - 3)^2 - 5$.

Zadanie 7.23. [matura, sierpień 2015, zad. 13. (1 pkt)]

Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $y = f(x)$ ma współrzędne $(2, 2)$. Wówczas wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji $g(x) = f(x + 2)$ ma współrzędne

A. $(4, 2)$. **B.** $(0, 2)$. **C.** $(2, 0)$. **D.** $(2, 4)$.

Zadanie 7.24. [matura, sierpień 2015, zad. 34. (5 pkt)]

Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ jest przedział $(0, 12)$. Największa wartość funkcji f jest równa 9.
Oblicz współczynniki a,b,c, i funkcji f.

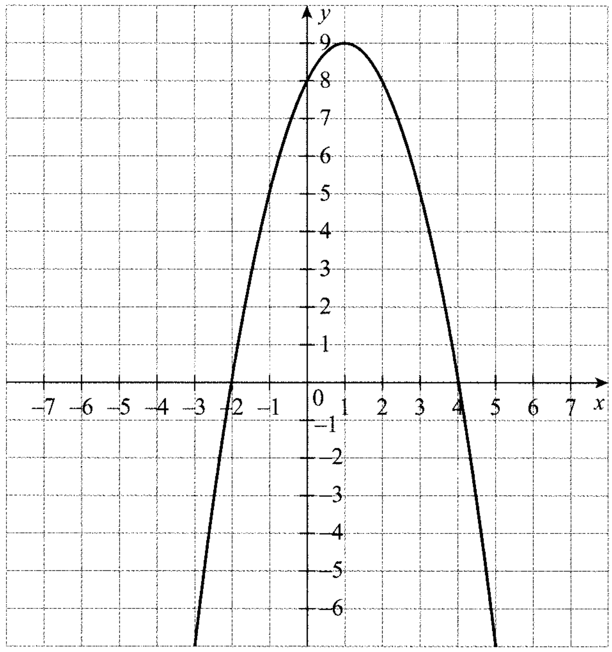
Zadanie 7.25. [matura, sierpień 2015, zad. 11 swe. (1 pkt)]

Osią symetrii wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = -2x^2 - 8x + 6$ jest prosta o równaniu

A. $y = 2$ **B.** $y = -2$ **C.** $x = 2$ **D.** $x = -2$

Informacje do zadań 7.26 i 7.27

Na rysunku przedstawiony jest fragment paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f. Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W = (1, 9)$. Liczby -2 i 4 to miejsca zerowe funkcji f.



Zadanie 7.26. [matura, maj 2016, zad. 10. (1 pkt)]

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

A. $(-\infty; -2\rangle$ **B.** $\langle -2; 4\rangle$ **C.** $\langle 4; +\infty)$ **D.** $(-\infty; 9\rangle$

Zadanie 7.27. [matura, maj 2016, zad. 11. (1 pkt)]

Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle -1; 2\rangle$ jest równa

A. 2 **B.** 5 **C.** 8 **D.** 9

Zadanie 7.28. [matura, czerwiec 2016, zad. 10. (1 pkt)]

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = -2(x+5)(x-11)$. Wskaż maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca.

A. $(-\infty, 3\rangle$ **B.** $(-\infty, 5\rangle$ **C.** $(-\infty, 11\rangle$ **D.** $\langle 6, +\infty)$

Zadanie 7.29. [matura, sierpień 2016, zad. 6. (1 pkt)]

Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = (x-1)(x-9)$. Wynika stąd, że funkcja f jest rosnąca w przedziale

A. $\langle 5, +\infty)$ **B.** $(-\infty, 5\rangle$ **C.** $(-\infty, -5\rangle$ **D.** $\langle -5, +\infty)$

Zadanie 7.30. [matura, sierpień 2016, zad. 10. (1 pkt)]

Jeśli funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + 2x + 3a$ nie ma ani jednego miejsca zerowego, to liczba a spełnia warunek

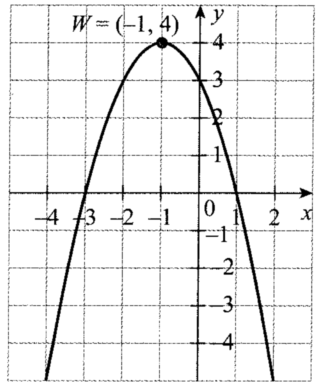
A. $a < -1$ **B.** $-1 \le a < 0$ **C.** $0 \le a < \frac{1}{3}$ **D.** $a > \frac{1}{3}$

Zadanie 7.31. [matura, sierpień 2016, zad. 29. (2 pkt)]

Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = x^2 - 11x$. Oblicz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -6, 6\rangle$.

Zadanie 7.32. [matura, maj 2017, zad. 10. (1 pkt)]

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, której miejsca zerowe to: -3 i 1.
Współczynnik c we wzorze funkcji f jest równy



A. 1 **B.** 2
C. 3 **D.** 4

Zadanie 7.33. [matura, maj 2017, zad. 29. (4 pkt)]

Funkcja kwadratowa f jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Największa wartość funkcji f jest równa 6 oraz $f(-6) = f(0) = \frac{3}{2}$. Oblicz wartość współczynnika a.

Zadanie 7.34. [matura, czerwiec 2017, zad. 9. (1 pkt)]

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = x^2 + bx + c$ oraz $f(-1) = f(3) = 1$.
Współczynnik b jest równy

A. -2 **B.** -1 **C.** 0 **D.** 3

Zadanie 7.35. [matura, czerwiec 2017, zad. 11. (1 pkt)]

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = (x - 3)(7 - x)$. Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f należy do prostej o równaniu

A. $y = -5$ **B.** $y = 5$ **C.** $y = -4$ **D.** $y = 4$

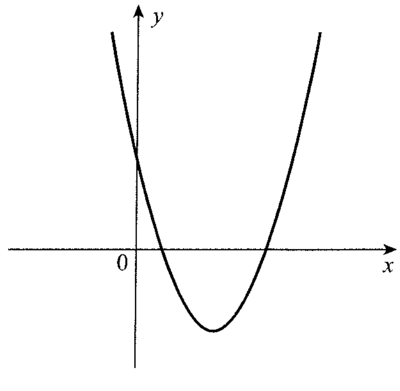
Zadanie 7.36. [matura, czerwiec 2017, zad. 12. (1 pkt)]

Punkt $A = (2017, 0)$ należy do wykresu funkcji f określonej wzorem

A. $f(x) = (x + 2017)^2$ **B.** $f(x) = x^2 - 2017$
C. $f(x) = (x + 2017)(x - 2017)$ **D.** $f(x) = x^2 + 2017$

Zadanie 7.37. [matura, sierpień 2017, zad. 10. (1 pkt)]

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej f jest określona wzorem $f(x) = x^2 + bx + c$.
Współczynniki b i c spełniają warunki:



A. $b < 0, c > 0$ **B.** $b < 0, c < 0$
C. $b > 0, c > 0$ **D.** $b > 0, c < 0$

Zadanie 7.38. [matura, sierpień 2017, zad. 32. (4 pkt)]

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe $x_1 = -2$ i $x_2 = 6$. Wykres funkcji f przechodzi przez punkt $A = (1, -5)$. Oblicz najmniejszą wartość funkcji f.

Zadanie 7.39. [matura, maj 2018, zad. 6. (1 pkt)]

Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = -(x + 3)(x - 5)$. Liczby x_1, x_2 są różnymi miejscami zerowymi funkcji f. Zatem

A. $x_1 + x_2 = -8$ **B.** $x_1 + x_2 = -2$ **C.** $x_1 + x_2 = 2$ **D.** $x_1 + x_2 = 8$

Zadanie 7.40. [matura, maj 2018, zad. 9. (1 pkt)]

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x - 3$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt o współrzędnych

A. $(-6, -3)$ **B.** $(-6, 69)$ **C.** $(3, -12)$ **D.** $(6, -3)$

Zadanie 7.41. [matura, czerwiec 2018, zad. 10. (1 pkt)]

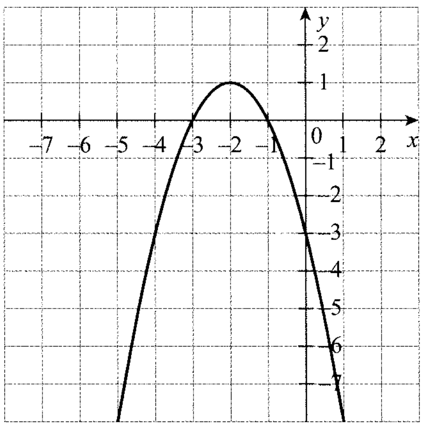
Największą wartością funkcji $y = -(x - 2)^2 + 4$ w przedziale $\langle 3, 5\rangle$ jest

A. 4 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 5

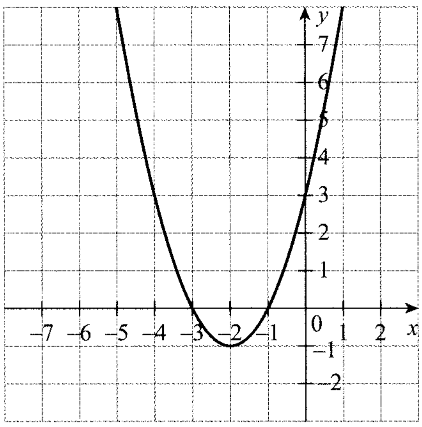
Zadanie 7.42. [matura, czerwiec 2018, zad. 12. (1 pkt)]

Na jednym z rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = -(x - 1)(3 - x)$. Wskaż ten rysunek.

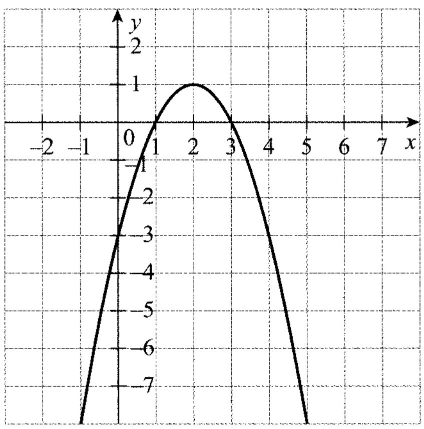
A.



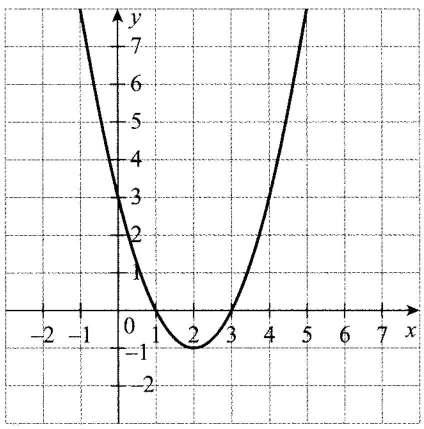
B.



C.



D.



Zadanie 7.43. [matura, czerwiec 2018, zad. 27. (2 pkt)]

Wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabola, na której leży punkt $A = (0, -5)$. Osią symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = 7$. Oblicz wartości współczynników b i c.

Zadanie 7.44. [matura, sierpień 2018, zad. 10. (1 pkt)]

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 2x - 11$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt o współrzędnych

A. $(-2, -3)$ **B.** $(-2, -12)$ **C.** $(1, -8)$ **D.** $(1, -12)$

Zadanie 7.45. [matura, sierpień 2018, zad. 11. (1 pkt)]

Funkcja kwadratowa $f(x) = -3(x - 2)(x - 9)$. Liczby x_1, x_2 są różnymi miejscami zerowymi funkcji f. Zatem

A. $x_1 + x_2 = 11$ **B.** $x_1 + x_2 = -11$ **C.** $x_1 + x_2 = 33$ **D.** $x_1 + x_2 = -33$

Zadanie 7.46. [matura, sierpień 2018, zad. 12. (1 pkt)]

Największą wartością funkcji $y = -(x - 2)^2 + 4$ w przedziale $\langle 3, 5 \rangle$ jest

A. 0 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 3

8. Wyrażenia algebraiczne. Funkcje. Wykresy

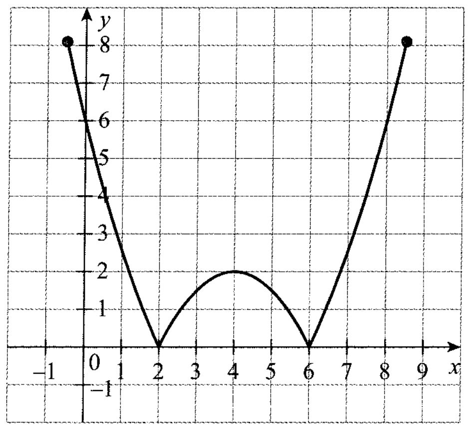
Zadanie 8.1.[R] [matura, maj 2010, zad. 5. (1 pkt)]

Dane są wielomiany $W(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3$ oraz $P(x) = 2x^3 + 12x$.
Wielomian $W(x) + P(x)$ jest równy

A. $5x^2 + 12x - 3$ **B.** $4x^3 + 5x^2 + 12x - 3$
C. $4x^6 + 5x^2 + 12x - 3$ **D.** $4x^3 + 12x^2 - 3$

Zadanie 8.2. [matura, maj 2010, zad. 10. (1 pkt)]

Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x)$.



Które równanie ma dokładnie trzy rozwiązania?

A. $f(x) = 0$ **B.** $f(x) = 1$ **C.** $f(x) = 2$ **D.** $f(x) = 3$

Zadanie 8.3. [matura, sierpień 2010, zad. 5. (1 pkt)]

Wyrażenie $x(x-1)(x+1)$ jest równe

A. $(x-1)^3$ **B.** x^3-1 **C.** x^3-x **D.** x^3

Zadanie 8.4. [matura, sierpień 2010, zad. 13. (1 pkt)]

Do wykresu funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ dla $x\neq 0$ należy punkt $A=(2,6)$. Wtedy

A. $a=2$ **B.** $a=6$ **C.** $a=8$ **D.** $a=12$

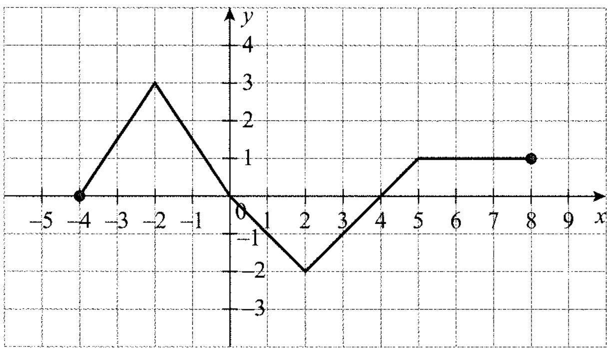
Zadanie 8.5. [matura, maj 2011, zad. 3. (1 pkt)]

Wyrażenie $5a^2-10ab+15a$ jest równe iloczynowi

A. $5a^2(1-10b+3)$ **B.** $5a(a-2b+3)$ **C.** $5a(a-10b+15)$ **D.** $5(a-2b+3)$

Zadanie 8.6. [matura, maj 2011, zad. 26. (2 pkt)]

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.



Odczytaj z wykresu i zapisz:

a) zbiór wartości funkcji f,

b) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca.

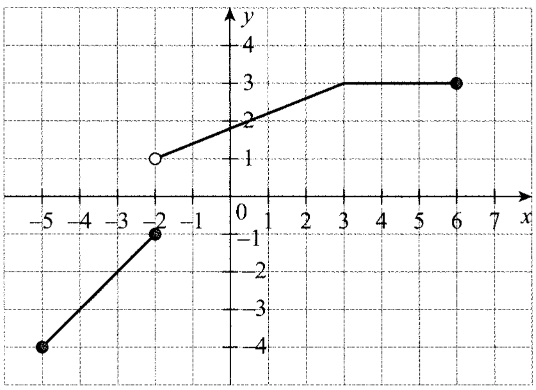
Zadanie 8.7. [matura, czerwiec 2011, zad. 6. (1 pkt)]

Wielomian x^2-100 jest równy

A. $(x-100)^2$ **B.** $(x-10)(x+10)$ **C.** $(x-50)^2$ **D.** $(x-50)(x+50)$

Zadanie 8.8. [matura, czerwiec 2011, zad. 11. (1 pkt)]

Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji $y=f(x)$.



Zbiorem wartości tej funkcji jest

A. $\langle -4, 3\rangle$ **B.** $\langle -4,-1\rangle \cup \langle 1, 3\rangle$ **C.** $\langle -4,-1\rangle \cup (1, 3\rangle$ **D.** $\langle -5, 6\rangle$

Zadanie 8.9. [matura, czerwiec 2011, zad. 24. (2 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \dfrac{2x-b}{x-9}$ dla $x \neq 9$, a $f(14) = 5$. Oblicz współczynnik b.

Zadanie 8.10. [matura, czerwiec 2011, zad. 26. (2 pkt)]

Dane są wielomiany $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1$, $Q(x) = 2x^2 - x - 1$ oraz $W(x) = ax + b$. Wyznacz współczynniki a i b tak, aby wielomian $P(x)$ był równy iloczynowi $Q(x) \cdot W(x)$.

Zadanie 8.11. [matura, sierpień 2011, zad. 11. (1 pkt)]

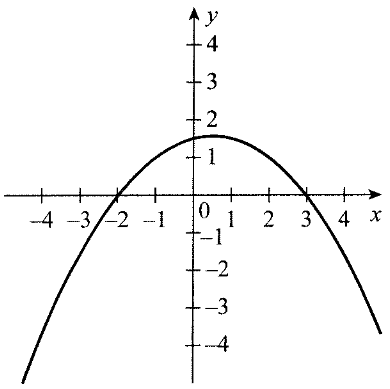
Dane są wielomiany $W(x) = x^3 + 3x^2 + x - 11$ i $V(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.
Stopień wielomianu $W(x) - V(x)$ jest równy

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

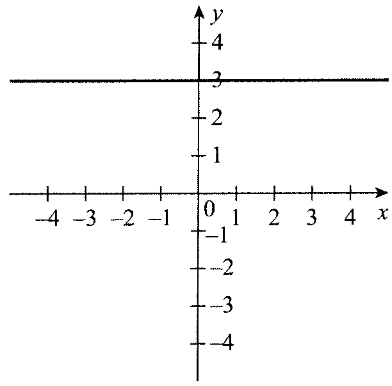
Zadanie 8.12. [matura, maj 2012, zad. 9. (1 pkt)]

Wskaż wykres funkcji, która w przedziale $\langle -4, 4\rangle$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

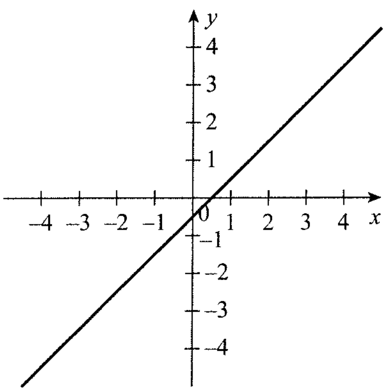
A.



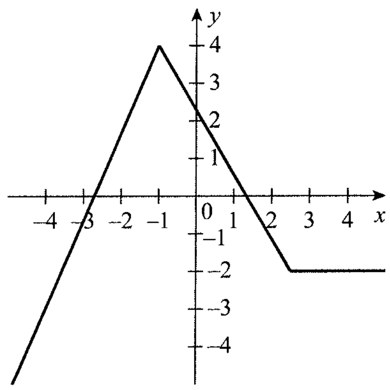
B.



C.



D.



Zadanie 8.13. [matura, czerwiec 2012, zad. 13. (1 pkt)]

Wyrażenie $\dfrac{3x+1}{x-2} - \dfrac{2x-1}{x+3}$ jest równe

A. $\dfrac{x^2+15x+1}{(x-2)(x+3)}$ **B.** $\dfrac{x+2}{(x-2)(x+3)}$ **C.** $\dfrac{x}{(x-2)(x+3)}$ **D.** $\dfrac{x+2}{-5}$

Zadanie 8.14. [matura, czerwiec 2012, zad. 17. (1 pkt)]

Wiadomo, że dziedziną funkcji f określonej wzorem $f(x) = \dfrac{x-7}{2x+a}$ jest zbiór $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Wówczas

A. $a = 2$ **B.** $a = -2$ **C.** $a = 4$ **D.** $a = -4$

Zadanie 8.15. [matura, sierpień 2012, zad. 10. (1 pkt)]

Wielomian $W(x) = x^6 + x^3 - 2$ jest równy iloczynowi

A. $(x^3 + 1)(x^2 - 2)$ **B.** $(x^3 - 1)(x^3 + 2)$ **C.** $(x^2 + 2)(x^4 - 1)$ **D.** $(x^4 - 2)(x + 1)$

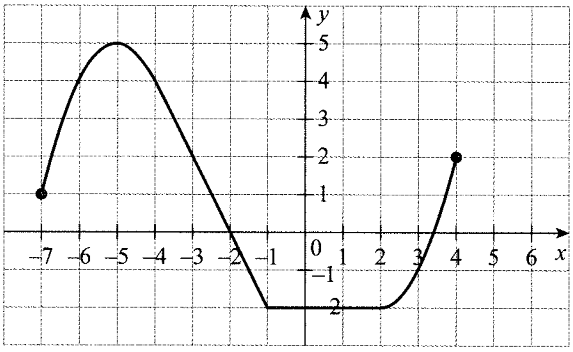
Zadanie 8.16. [matura, maj 2013, zad. 7. (1 pkt)]

Dla każdej liczby rzeczywistej x, wyrażenie $4x^2 - 12x + 9$ jest równe

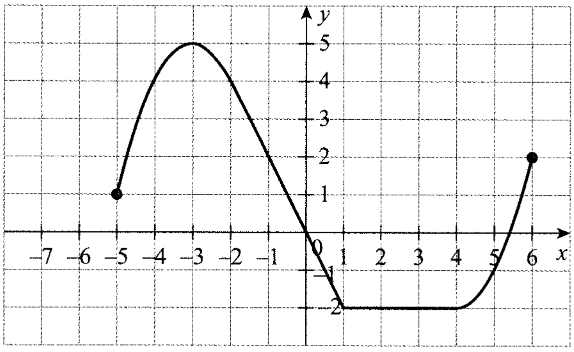
A. $(4x + 3)(x + 3)$ **B.** $(2x + 3)(2x - 3)$ **C.** $(2x - 3)(2x - 3)$ **D.** $(x - 3)(4x - 3)$

Zadanie 8.17. [matura, maj 2013, zad. 11. (1 pkt)]

Na rysunku 1 przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$ określonej dla $x \in \langle -7, 4 \rangle$.



Rys. 1



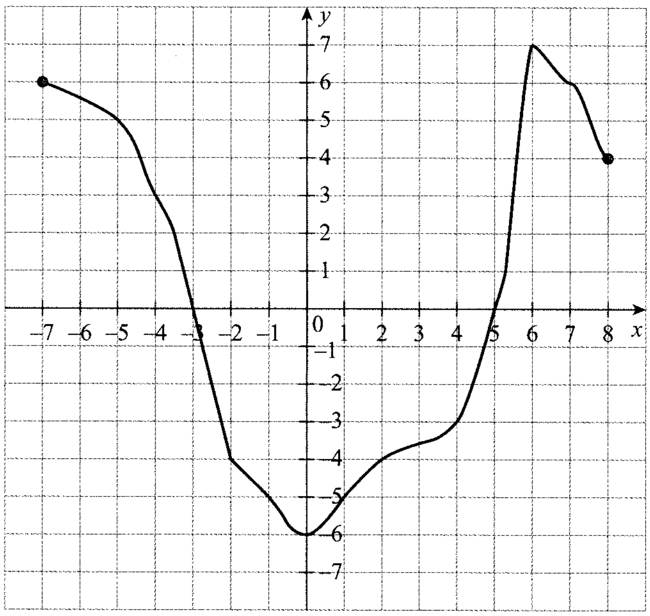
Rys. 2

Rysunek 2 przedstawia wykres funkcji

A. $y = f(x + 2)$ **B.** $y = f(x) - 2$ **C.** $y = f(x - 2)$ **D.** $y = f(x) + 2$

Zadanie 8.18. [matura, maj 2013, zad. 29. (2 pkt)]

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$ określonej dla $x \in \langle -7, 8 \rangle$.

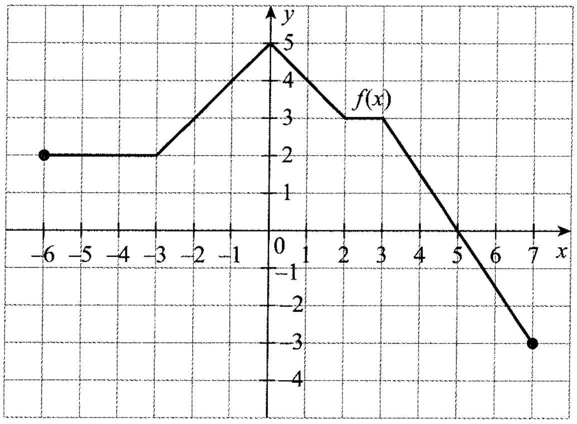


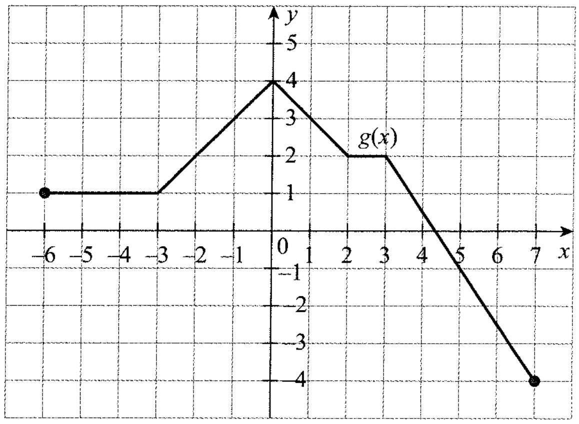
Odczytaj z wykresu i zapisz:

a) największą wartość funkcji f,

b) zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$.

*W zadaniach **8.19**, **8.20** i **8.21** wykorzystaj przedstawione poniżej wykresy funkcji f i g.*





Zadanie 8.19. [matura, czerwiec 2013, zad. 8. (1 pkt)]

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

A. $\langle -3, 5\rangle$ **B.** $\langle -6, 7\rangle$ **C.** $\langle 0, 6\rangle$ **D.** $\langle -5, 8\rangle$

Zadanie 8.20. [matura, czerwiec 2013, zad. 9. (1 pkt)]

Przedziałem, w którym funkcja f przyjmuje tylko wartości ujemne, jest

A. $\langle 5, 0)$ **B.** $(5, 7\rangle$ **C.** $(0, 7\rangle$ **D.** $\langle -6, 5)$

Zadanie 8.21. [matura, czerwiec 2013, zad. 10. (1 pkt)]

Funkcja g jest określona wzorem

A. $g(x) = f(x-1)$ **B.** $g(x) = f(x) - 1$ **C.** $g(x) = f(x+1)$ **D.** $g(x) = f(x) + 1$

Zadanie 8.22. [matura, czerwiec 2013, zad. 12. (1 pkt)]

Iloczyn wielomianów $2x - 3$ oraz $-4x^2 - 6x - 9$ jest równy

A. $-8x^3 + 27$ **B.** $-8x^3 - 27$ **C.** $8x^3 + 27$ **D.** $8x^3 - 27$

Zadanie 8.23. [matura, sierpień 2013, zad. 5. (1 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ dla $x \neq 1$. Wartość funkcji f dla argumentu $x = 2$ jest równa

A. 2 **B.** -4 **C.** 4 **D.** -2

Zadanie 8.24. [matura, sierpień 2013, zad. 8. (1 pkt)]

Dla każdych liczb rzeczywistych a, b wyrażenie $a - b + ab - 1$ jest równe

A. $(a+1)(b-1)$ **B.** $(1-b)(1+a)$ **C.** $(a-1)(b+1)$ **D.** $(a+b)(1+a)$

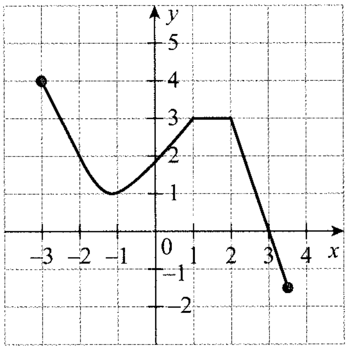
Zadanie 8.25. [matura, sierpień 2013, zad. 11. (1 pkt)]

Wielomian $W(x) = (3x^2 - 2)^2$ jest równy wielomianowi

A. $9x^4 - 12x^2 + 4$ **B.** $9x^4 + 12x^2 + 4$ **C.** $9x^4 - 4$ **D.** $9x^4 + 4$

Zadanie 8.26. [matura, sierpień 2013, zad. 25. (1 pkt)]

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$.



Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle -1, 1\rangle$ jest równa.

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

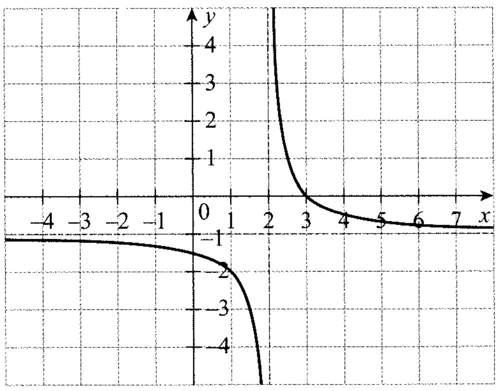
Zadanie 8.27. [matura, maj 2014, zad. 22. (1 pkt)]

Do wykresu funkcji, określonej dla wszystkich liczb rzeczywistych wzorem $y = -2^{x-2}$ należy punkt

A. $A = (1, -2)$ **B.** $B = (2, -1)$ **C.** $C = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ **D.** $D = (4, 4)$

Zadanie 8.28. [matura, maj 2014, zad. 29. (2 pkt)]

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji f, który powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji określonej wzorem $y = \frac{1}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$.



a) Odczytaj z wykresu i zapisz zbiór tych wszystkich argumentów, dla których wartości funkcji f są większe od 0.

b) Podaj miejsce zerowe funkcji g określonej wzorem $g(x) = f(x - 3)$.

Zadanie 8.29. [matura, czerwiec 2014, zad. 3. (1 pkt)]

Dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b wyrażenie $ab + a - b - 1$ jest równe

A. $(a - 1)(b - 1)$ **B.** $(a + 1)(b - 1)$ **C.** $(a - 1)(b + 1)$ **D.** $(a + 1)(b + 1)$

Zadanie 8.30. [matura, czerwiec 2014, zad. 9. (1 pkt)]

Dane są wielomiany $W(x) = 2x^2 - 1$, $P(x) = x^3 + x$ i $Q(x) = (1 - x)(x + 1)$. Stopień wielomianu $W(x) \cdot P(x) \cdot Q(x)$ jest równy

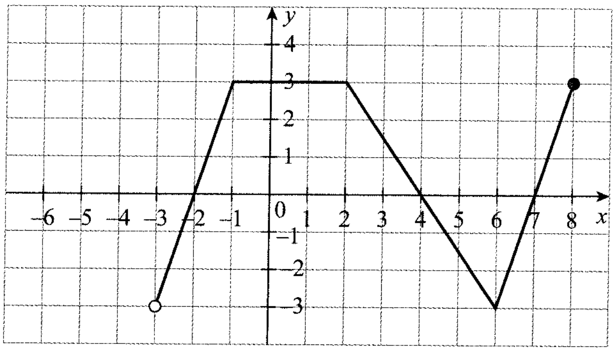
A. 3 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 12

Zadanie 8.31. [matura, sierpień 2014, zad. 7. (1 pkt)]

Jeżeli $a = \frac{b}{c - b}$, to

A. $b = \frac{a+1}{a \cdot c}$ **B.** $b = \frac{a \cdot c}{a+1}$ **C.** $b = \frac{a \cdot c}{a-1}$ **D.** $b = \frac{a-1}{a \cdot c}$

*W zadaniach **8.32 i 8.33** wykorzystaj przedstawiony poniżej wykres funkcji f.*



Zadanie 8.32. [matura, sierpień 2014, zad. 8. (1 pkt)]

Dziedziną funkcji f jest przedział

A. $\langle 0, 3\rangle$ **B.** $(0, 8\rangle$ **C.** $\langle -3, 3\rangle$ **D.** $(-3, 8\rangle$

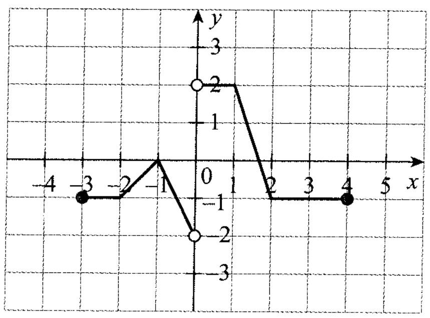
Zadanie 8.33. [matura, sierpień 2014, zad. 9. (1 pkt)]

Największą wartością funkcji f jest

A. 3 **B.** 0 **C.** −3 **D.** 8

Zadanie 8.34. [matura, maj 2015, zad. 8. (1 pkt)]

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.



Zbiorem wartości funkcji f jest

A. $(-2, 2)$ **B.** $\langle -2, 2)$ **C.** $\langle -2, 2\rangle$ **D.** $(-2, 2\rangle$

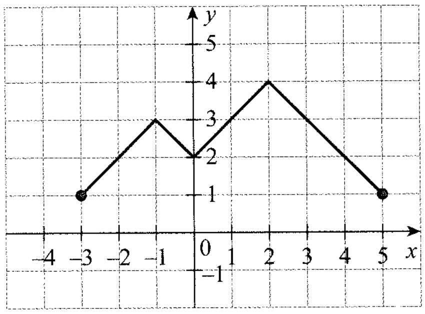
Zadanie 8.35. [matura, maj 2015, zad. 6 swe. (1 pkt)]

Dziedziną funkcji f określonej wzorem $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2 - 4x}$ może być zbiór

A. wszystkich liczb rzeczywistych różnych od 0 i od 4.
B. wszystkich liczb rzeczywistych różnych od –4 i od 4.
C. wszystkich liczb rzeczywistych różnych od –4 i od 0.
D. wszystkich liczb rzeczywistych.

Zadanie 8.36. [matura, maj 2015, zad. 29 swe. (2 pkt)]

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.



Funkcja h określona jest dla $x \in \langle -3, 5\rangle$ wzorem $h(x) = f(x) + q$, gdzie q jest pewną liczbą rzeczywistą. Wiemy, że jednym z miejsc zerowych funkcji h jest liczba $x_0 = -1$.

a) Wyznacz q.
b) Podaj wszystkie pozostałe miejsca zerowe funkcji h.

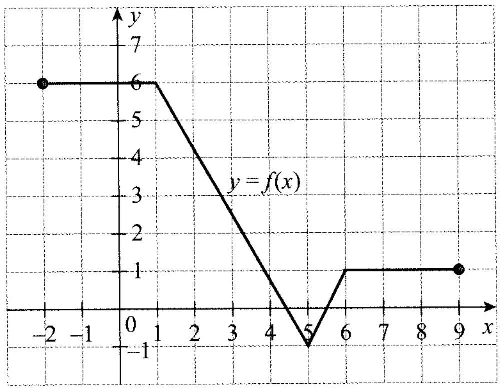
Zadanie 8.37. [matura, czerwiec 2015, zad. 4. (1 pkt)]

Wyrażenie $3a^2 - 12ab + 12b^2$ może być przekształcone do postaci

A. $3(a^2 - b^2)^2$ **B.** $3(a - 2b^2)^2$ **C.** $3(a - 2b)^2$ **D.** $3(a + 2b)^2$

Zadanie 8.38. [matura, czerwiec 2015, zad. 12. (1 pkt)]

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.



Funkcja f jest rosnąca w przedziale

A. $\langle -1, 1\rangle$ **B.** $\langle 1, 5\rangle$ **C.** $\langle 5, 6\rangle$ **D.** $\langle 6, 8\rangle$

Zadanie 8.39. [matura, czerwiec 2015, zad. 7. (1 pkt)]

Do dziedziny funkcji f określonej wzorem $f(x) = \dfrac{x+4}{x(x-1)^2}$ nie mogą należeć liczby

A. $x = -4$ i $x = 0$. **B.** $x = -4$ i $x = 1$. **C.** $x = 0$ i $x = 1$ **D.** $x = -1$ i $x = 1$

Zadanie 8.40. [matura, czerwiec 2015, zad. 8. (1 pkt)]

Wyrażenie $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{x}$, określone dla $x \neq 0$ i $x \neq 1$, jest równe

A. $\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x}$ **B.** $\dfrac{x^2-x-1}{x^2-x}$ **C.** $\dfrac{x-1}{x^2-x}$ **D.** $\dfrac{x^2-x-1}{x-1}$

Zadanie 8.41. [matura, sierpień 2015, zad. 6. (1 pkt)]

Wartość wyrażenia $(a+5)^2$ jest większa od wartości wyrażenia (a^2+10a) o

A. 50 **B.** 10 **C.** 5 **D.** 25

Zadanie 8.42. [matura, sierpień 2015, zad. 10. (1 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \dfrac{2x-8}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$. Wówczas wartość funkcji $f\left(\sqrt{2}\right)$ jest równa

A. $2 - 4\sqrt{2}$ **B.** $1 - 2\sqrt{2}$ **C.** $1 + 2\sqrt{2}$ **D.** $2 + 4\sqrt{2}$

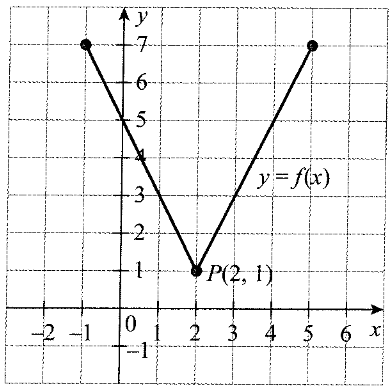
Zadanie 8.43. [matura, sierpień 2015, zad. 6 swe. (1 pkt)]

Wyrażenie $9 - (y-3)^2$ jest równe

A. $-y^2 + 18$ **B.** $-y^2 + 6y$ **C.** $-y^2$ **D.** $-y^2 + 6y + 18$

Zadanie 8.44. [matura, sierpień 2015, zad. 10 swe. (1 pkt)]

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.



Wskaż wzór funkcji, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi Oy układu współrzędnych

A. $y = f(x-4)$ **B.** $y = f(x) - 4$ **C.** $y = f(x+4)$ **D.** $y = f(x) + 4$

Zadanie 8.45. [matura, maj 2016, zad. 4. (1 pkt)]

Równość $\left(2\sqrt{2}-a\right)^2 = 17-12\sqrt{2}$ jest prawdziwa dla

A. $a=3$ **B.** $a=1$ **C.** $a=-2$ **D.** $a=-3$

Zadanie 8.46. [matura, maj 2016, zad. 12. (1 pkt)]

Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\frac{2x^3}{x^6+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Wtedy $f\left(-\sqrt[3]{3}\right)$ jest równa

A. $\frac{-\sqrt[3]{9}}{2}$ **B.** $-\frac{3}{5}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$

Zadanie 8.47. [matura, czerwiec 2016, zad. 5. (1 pkt)]

Najmniejsza wartość wyrażenia $(x-y)(x+y)$ dla $x, y \in \{2, 3, 4\}$ jest równa

A. 2 **B.** −24 **C.** 0 **D.** −12

Zadanie 8.48. [matura, czerwiec 2016, zad. 9. (1 pkt)]

Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\frac{2x^3}{x^4+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wtedy liczba $f\left(-\sqrt{2}\right)$ jest równa

A. $-\frac{8}{5}$ **B.** $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$ **C.** $-\frac{4\sqrt{2}}{5}$ **D.** $-\frac{4}{3}$

Zadanie 8.49. [matura, czerwiec 2016, zad. 24. (1 pkt)]

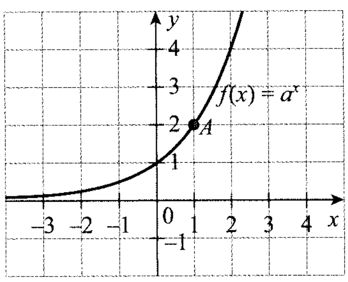
Dane są dwie sumy algebraiczne $3x^3-2x$ oraz $-3x^2-2$. Iloczyn tych sum jest równy

A. $-9x^5+4x$ **B.** $-9x^6+6x^3-6x^2+4x$

C. $-9x^5+6x^3-6x^2+4x$ **D.** $-9x^6+4x$

Zadanie 8.50. [matura, maj 2017, zad. 11. (1 pkt)]

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji wykładniczej f określonej wzorem $f(x)=a^x$. Punkt $A=(1, 2)$ należy do tego wykresu funkcji.



Podstawa a potęgi jest równa

A. $-\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** -2 **D.** 2

Zadanie 8.51. [matura, czerwiec 2017, zad. 5. (1 pkt)]

Dla każdej liczby rzeczywistej x wyrażenie $x^6 - 2x^3 - 3$ jest równa

A. $(x^3 + 1)(x^2 - 3)$ **B.** $(x^3 - 3)(x^3 + 1)$ **C.** $(x^2 + 3)(x^4 - 1)$ **D.** $(x^4 + 1)(x^2 - 3)$

Zadanie 8.52. [matura, czerwiec 2017, zad. 6. (1 pkt)]

Wartość wyrażenia $(b - a)^2$ dla $a = 2\sqrt{3}$ i $b = \sqrt{75}$ jest równa

A. 9 **B.** 27 **C.** 63 **D.** 147

Zadanie 8.53. [matura, maj 2018, zad. 30. (2 pkt)]

Do wykresu funkcji wykładniczej, określonej dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $f(x) = a^x$ (gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$), należy punkt $P = (2, 9)$. Oblicz a i zapisz zbiór wartości funkcji g, określonej wzorem $g(x) = f(x) - 2$.

Zadanie 8.54. [matura, czerwiec 2018, zad. 9. (1 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -2(x + 2)^{-1}(x - 3)^2$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq -2$. Wartość funkcji f dla argumentu 2 jest równa

A. -8 **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 8

Zadanie 8.55. [matura, sierpień 2018, zad. 8. (1 pkt)]

Dane są funkcje $f(x) = 3^x$ oraz $g(x) = f(-x)$, określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Punkt wspólny wykresów funkcji f i g

A. nie istnieje. **B.** ma współrzędne $(1, 0)$

C. ma współrzędne $(0, 1)$ **D.** ma współrzędne $(0, 0)$

9. Trygonometria

Zadanie 9.1. [matura, maj 2010, zad. 14. (1 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{3}{4}$. Wartość wyrażenia $2 - \cos^2\alpha$ jest równa.

A. $\frac{25}{16}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{17}{16}$ **D.** $\frac{31}{16}$

Zadanie 9.2. [matura, maj 2010, zad. 29. (2 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$. Oblicz $\cos\alpha$.

Zadanie 9.3. [matura, sierpień 2010, zad. 16. (1 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{3}{4}$. Wtedy $\sin\alpha$ jest równy.

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$ **D.** $\frac{7}{16}$

Zadanie 9.4. [matura, maj 2011, zad. 13. (1 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. Wtedy

A. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$ **B.** $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$

C. $\sin\alpha = \frac{12}{5}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13}$ **D.** $\sin\alpha = \frac{5}{12}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13}$

Zadanie 9.5. [matura, maj 2011, zad. 14. (1 pkt)]

Wartość wyrażenia $\frac{\sin^2 38^\circ + \cos^2 38^\circ - 1}{\sin^2 52^\circ + \cos^2 52^\circ + 1}$ jest równa

A. $\frac{1}{2}$ **B.** 0 **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** 1

Zadanie 9.6. [matura, maj 2011, zad. 28. (2 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Zadanie 9.7. [matura, czerwiec 2011, zad. 12. (1 pkt)]

W trójkącie prostokątnym dane są kąty ostre: $\alpha = 41^\circ$ i $\beta = 49^\circ$. Wtedy $\frac{\cos\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha}$ równa się

A. $1 + \sin 49^\circ$ **B.** $\sin 49^\circ$ **C.** 1 **D.** 2

Zadanie 9.8. [matura, sierpień 2011, zad. 15. (1 pkt)]

Kąt α jest ostry oraz $\sin\alpha = \cos 47^\circ$. Wtedy miara kąta α jest równa:

A. 6° **B.** 33° **C.** 47° **D.** 43°

Zadanie 9.9. [matura, sierpień 2011, zad. 26. (2 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3 + 2\operatorname{tg}^2\alpha$.

Zadanie 9.10. [matura, maj 2012, zad. 10. (1 pkt)]

Liczba $\operatorname{tg} 30^\circ - \sin 30^\circ$ jest równa

A. $\sqrt{3} - 1$ **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{\sqrt{3} - 1}{6}$ **D.** $\frac{2\sqrt{3} - 3}{6}$

Zadanie 9.11. [matura, maj 2012, zad. 11. (1 pkt)]

W trójkącie prostokątnym ABC odcinek AB jest przeciwprostokątną i $|AB| = 13$ oraz $|BC| = 12$. Wówczas sinus kąta ABC jest równy

A. $\frac{12}{13}$ **B.** $\frac{5}{13}$ **C.** $\frac{5}{12}$ **D.** $\frac{13}{12}$

Zadanie 9.12. [matura, czerwiec 2012, zad. 16. (1 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = 1$. Wówczas

A. $\alpha < 30°$ **B.** $\alpha = 30°$ **C.** $\alpha = 45°$ **D.** $\alpha > 45°$

Zadanie 9.13. [matura, czerwiec 2012, zad. 28. (2 pkt)]

Uzasadnij, że jeżeli α jest kątem ostrym, to $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^4\alpha$.

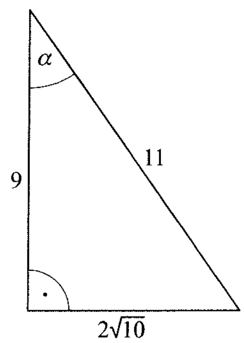
Zadanie 9.14. [matura, sierpień 2012, zad. 14. (1 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{7}{13}$. Wtedy $\operatorname{tg}\alpha$ jest równy

A. $\frac{7}{6}$ **B.** $\frac{7\cdot 13}{120}$ **C.** $\frac{7}{\sqrt{120}}$ **D.** $\frac{7}{13\sqrt{120}}$

Zadanie 9.15. [matura, sierpień 2012, zad. 15. (1 pkt)]

W trójkącie prostokątnym dane są długości boków (zobacz rysunek). Wtedy



A. $\cos\alpha = \frac{9}{11}$ **B.** $\sin\alpha = \frac{9}{11}$

C. $\sin\alpha = \frac{11}{2\sqrt{10}}$ **D.** $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$

Zadanie 9.16. [matura, maj 2013, zad. 14. (1 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Wartość wyrażenia $\cos^2\alpha - 2$ jest równa

A. $-\frac{7}{4}$ **B.** $-\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 9.17. [matura, maj 2013, zad. 27. (2 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha$.

Zadanie 9.18. [matura, czerwiec 2013, zad. 6. (1 pkt)]

Dla każdego kąta ostrego α wyrażenie $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^4\alpha$ jest równe

A. $2\sin^2\alpha$ **B.** $2\cos^2\alpha$ **C.** 1 **D.** 2

Zadanie 9.19. [matura, czerwiec 2013, zad. 7. (1 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. Wartość wyrażenia $1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha$ jest równa

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{11}{9}$ **C.** $\frac{17}{9}$ **D.** $\frac{11}{3}$

Zadanie 9.20. [matura, czerwiec 2013, zad. 28. (2 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia $2 + \sin^3\alpha + \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$.

Zadanie 9.21. [matura, maj sierpień 2013, zad. 24. (1 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Wtedy wartość wyrażenia $2\cos^2\alpha - 1$ jest równa

A. 0 **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{5}{9}$ **D.** 1

Zadanie 9.22. [matura, sierpień 2013, zad. 28. (2 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

Zadanie 9.23. [matura, maj 2014, zad. 14. (1 pkt)]

Jeżeli α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$, to wartość wyrażenia $\frac{3\cos\alpha - 2\sin\alpha}{\sin\alpha - 5\cos\alpha}$ jest równa

A. $-\frac{11}{23}$ **B.** $\frac{24}{5}$ **C.** $-\frac{23}{11}$ **D.** $\frac{5}{24}$

Zadanie 9.24. [matura, czerwiec 2014, zad. 13. (1 pkt)]

Miara kąta α spełnia warunek: $0° < \alpha < 90°$. Wyrażenie $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} + \frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$ jest równe

A. 1 **B.** $2\cos^2\alpha$ **C.** 2 **D.** $2\sin^2\alpha$

Zadanie 9.25. [matura, czerwiec 2014, zad. 28. (2 pkt)]

Kąt α jest ostry oraz $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

Zadanie 9.26. [matura, sierpień 2014, zad. 15. (1 pkt)]

Kąt α jest ostry i spełniona jest równość $3\operatorname{tg}\alpha = 2$. Wtedy wartość wyrażenia $\sin\alpha + \cos\alpha$ jest równa

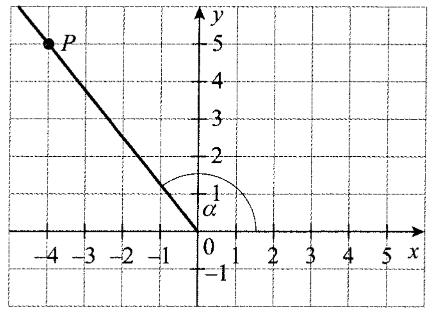
A. 1 **B.** $\frac{5\sqrt{13}}{26}$ **C.** $\frac{5\sqrt{13}}{13}$ **D.** $\sqrt{5}$

Zadanie 9.27. [matura, sierpień 2014, zad. 29. (2 pkt)]

Kąt α jest ostry oraz $\frac{4}{\sin^2\alpha}+\frac{4}{\cos^2\alpha}=25$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

Zadanie 9.28. [matura, maj 2015, zad. 14. (1 pkt)]

Tangens kąta α zaznaczonego na rysunku jest równy



A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $-\frac{4}{5}$

C. -1 **D.** $-\frac{5}{4}$

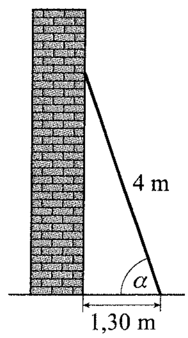
Zadanie 9.29. [matura, maj 2015, zad. 15. (1 pkt)]

Jeśli $0° < \alpha < 90°$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = 2\sin\alpha$, to

A. $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ **B.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\cos\alpha=1$

Zadanie 9.30. [matura, maj 2015, zad. 13 swe. (1 pkt)]

Drabinę o długości 4 metrów oparto o pionowy mur, a jej podstawę umieszczono w odległości 1,30 m od tego muru (zobacz rysunek).
Kąt α, pod jakim ustawiono drabinę, spełnia warunek



A. $0° < \alpha < 30°$ **B.** $30° < \alpha < 45°$
C. $45° < \alpha < 60°$ **D.** $60° < \alpha < 90°$

Zadanie 9.31. [matura, maj 2015, zad. 14 swe. (1 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha=\frac{2}{5}$. Wówczas $\cos\alpha$ jest równy

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{21}}{4}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{\sqrt{21}}{5}$

Zadanie 9.32. [matura, czerwiec 2015, zad. 7. (1 pkt)]

Wartość wyrażenia $\sin 120° - \cos 30°$ jest równa

A. $\sin 90°$ **B.** $\sin 150°$ **C.** $\sin 0°$ **D.** $\sin 60°$

Zadanie 9.33. [matura, czerwiec 2015, zad. 8. (1 pkt)]

Wyrażenie $3\sin^3\alpha\cos\alpha + 3\sin\alpha\cos^3\alpha$ może być przekształcone do postaci

A. 3 **B.** $3\sin\alpha\cos\alpha$ **C.** $3\sin^3\alpha\cos^3\alpha$ **D.** $6\sin^4\alpha\cos^4\alpha$

Zadanie 9.34. [matura, czerwiec 2015, zad. 14 swe. (1 pkt)]

Kąt α jest najmniejszym z kątów trójkąta prostokątnego o bokach długości 2, $\sqrt{3}$, 1. Wtedy

A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ **C.** $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Zadanie 9.35. [matura, czerwiec 2015, zad. 15 swe. (1 pkt)]

Dla każdego kąta α, spełniającego warunek $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, wyrażenie $\frac{2\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ jest równe

A. $\cos\alpha$ **B.** $\sin\alpha$ **C.** $2\sin\alpha$ **D.** $\cos^2\alpha$

Zadanie 9.36. [matura, sierpień 2015, zad. 16. (1pkt)]

Sinus kąta α ostrego jest równy $\frac{3}{4}$. Wówczas

A. $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ **C.** $\cos\alpha = \frac{7}{16}$ **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{16}$

Zadanie 9.37. [matura, sierpień 2015, zad. 17. (1 pkt)]

W trójkącie prostokątnym o długościach przyprostokątnych 2 i 5 cosinus większego z kątów ostrych jest równy

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{2}{5}$ **C.** $\frac{2}{\sqrt{29}}$ **D.** $\frac{5}{\sqrt{29}}$

Zadanie 9.38. [matura, sierpień 2015, zad. 29. (2 pkt)]

Kąt α jest ostry i spełnia równość $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{7}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Zadanie 9.39. [matura, sierpień 2015, zad. 15 swe. (1 pkt)]

Kąt α jest ostry oraz $3\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha = 0$. Wtedy

A. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ **B.** $\operatorname{tg}\alpha = 3$ **C.** $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ **D.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Zadanie 9.40. [matura, maj 2016, zad. 17. (1 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$. Wtedy

A. $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{26}$ **B.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{13}}{13}$ **C.** $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ **D.** $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

Zadanie 9.41. [matura, maj 2016, zad. 28 swe. (2 pkt)]

Kąt α jest ostry i $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{3}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Zadanie 9.42. [matura, sierpień 2016, zad. 9. (1 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Wtedy wartość wyrażenia $\sin\alpha - \cos\alpha$ jest równa

A. $\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{3}{5}$ **C.** $\frac{17}{25}$ **D.** $\frac{1}{25}$

Zadanie 9.43. [matura, sierpień 2016, zad. 16. (1 pkt)]

Wartość wyrażenia $(\mathrm{tg}\, 60^\circ + \mathrm{tg}\, 45^\circ)^2 - \sin 60^\circ$ jest równa

A. $2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $4 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

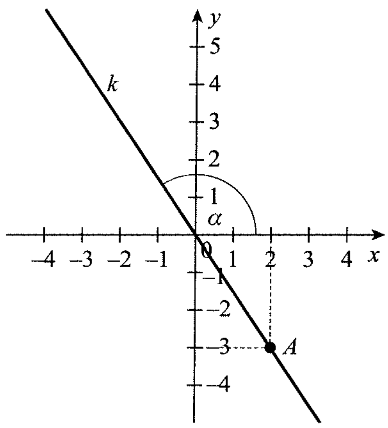
Zadanie 9.44. [matura, maj 2017, zad. 14. (1 pkt)]

Jeśli $m = \sin 50^\circ$, to

A. $m = \sin 40^\circ$ **B.** $m = \cos 40^\circ$ **C.** $m = \cos 50^\circ$ **D.** $m = \mathrm{tg}\, 50^\circ$

Zadanie 9.45. [matura, maj 2017, zad. 18. (1 pkt)]

Na rysunku przedstawiona jest prosta k, przechodząca przez punkt $A = (2, -3)$ i przez początek układu współrzędnych, oraz zaznaczony jest kąt α nachylenia tej prostej do osi Ox.



Zatem

A. $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{2}{3}$ **B.** $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{3}{2}$ **C.** $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2}{3}$ **D.** $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{2}$

Zadanie 9.46. [matura, czerwiec 2017, zad. 15. (1 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{12}{5}$. Wówczas $\sin\alpha$ jest równy

A. $\frac{5}{17}$ **B.** $\frac{12}{17}$ **C.** $\frac{5}{13}$ **D.** $\frac{12}{13}$

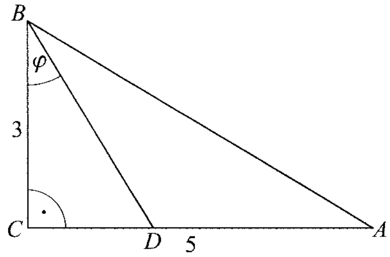
Zadanie 9.47. [matura, czerwiec 2017, zad. 17. (1 pkt)]

Odcinek BD jest zawarty w dwusiecznej kąta ostrego ABC trójkąta prostokątnego, w którym przyprostokątne AC i BC mają długości odpowiednio 5 i 3.

Wówczas miara φ kąta DBC spełnia warunek

A. $20° < \varphi < 25°$ **B.** $25 < \varphi < 30°$

C. $30° < \varphi < 35°$ **D.** $35° < \varphi < 40°$



Zadanie 9.48. [matura, czerwiec 2017, zad. 27. (2 pkt)]

Kąt α jest ostry i spełniona jest równość $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Oblicz wartość wyrażenia $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

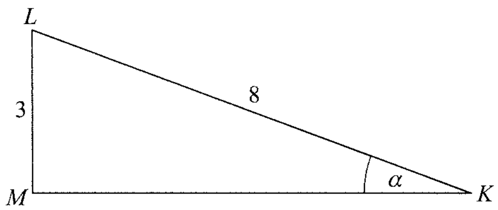
Zadanie 9.49. [matura, sierpień 2017, zad. 13. (1 pkt)]

Kąt α jest ostry i spełniona jest równość $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$. Stąd wynika, że

A. $\cos\alpha = \frac{24}{49}$ **B.** $\cos\alpha = \frac{5}{7}$ **C.** $\cos\alpha = \frac{25}{49}$ **D.** $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{6}}{7}$

Zadanie 9.50. [matura, maj 2018, zad. 14. (1 pkt)]

Przyprostokątna LM trójkąta prostokątnego KLM ma długość 3, a przeciwprostokątna KL ma długość 8 (zobacz rysunek).



Wtedy miara α kąta ostrego LKM tego trójkąta spełnia warunek

A. $27° < \alpha \le 30°$ **B.** $24° < \alpha \le 27°$ **C.** $21° < \alpha \le 24°$ **D.** $18° < \alpha \le 21°$

Zadanie 9.51. [matura, czerwiec 2018, zad. 15. (1 pkt)]

Liczba $1 - \mathrm{tg}40°$ jest

A. ujemna. **B.** dodatnia, ale mniejsza od 0,1.

C. większa od 0,1, ale mniejsza od 0,5. **D.** większa od 0,5.

Zadanie 9.52. [matura, czerwiec 2018, zad. 30. (2 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$.

Zadanie 9.53. [matura, sierpień 2018, zad. 15. (1 pkt)]

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 3, a długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta α jest równa $\sqrt{3}$. Zatem

A. $\alpha = 60°$ **B.** $\alpha \in (40°, 60°)$ **C.** $\alpha \in (30°, 40°)$ **D.** $\alpha \in 30°$

Zadanie 9.54. [matura, sierpień 2018, zad. 16. (1 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Wtedy

A. $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{16}{15}$ **B.** $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{16}$ **C.** $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$ **D.** $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{20}$

10. Ciągi

Zadanie 10.1. [matura, maj 2010, zad. 11. (1 pkt)]

W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_3 = 13$ i $a_5 = 39$. Wtedy wyraz a_1 jest równy

A. 13 **B.** 0 **C.** –13 **D.** –26

Zadanie 10.2. [matura, maj 2010, zad. 12. (1 pkt)]

W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 3$ i $a_4 = 24$. Iloraz tego ciągu jest równy

A. 8 **B.** 2 **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $-\frac{1}{2}$

Zadanie 10.3. [matura, sierpień 2010, zad. 14. (1 pkt)]

W ciągu arytmetycznym (a_n) mamy: $a_2 = 5$ i $a_4 = 11$. Oblicz a_5

A. 8 **B.** 14 **C.** 17 **D.** 6

Zadanie 10.4. [matura, sierpień 2010, zad. 15. (1 pkt)]

W malejącym ciągu geometrycznym (a_n) mamy: $a_1 = -2$ i $a_3 = -4$. Iloraz tego ciągu jest równy

A. –2 **B.** 2 **C.** $-\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{2}$

Zadanie 10.5. [matura, sierpień 2010, zad. 28. (2 pkt)]

Piąty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 26, a suma pięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 70. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

Zadanie 10.6. [matura, maj 2011, zad. 11. (1 pkt)]

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_3 = 1$ i $a_4 = \frac{2}{3}$. Wtedy

A. $a_1 = \frac{2}{3}$ **B.** $a_1 = \frac{4}{9}$ **C.** $a_1 = \frac{3}{2}$ **D.** $a_1 = \frac{9}{4}$

Zadanie 10.7. [matura, maj 2011, zad. 12. (1 pkt)]

Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach dodatnich. Wtedy

A. $a_4 + a_7 = a_{10}$ **B.** $a_4 + a_6 = a_3 + a_8$
C. $a_2 + a_9 = a_3 + a_8$ **D.** $a_5 + a_7 = 2a_8$

Zadanie 10.8. [matura, maj 2011, zad. 27. (2 pkt)]

Liczby x, y, 19 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x + y = 8$. Oblicz x i y.

Zadanie 10.9. [matura, czerwiec 2011, zad. 13. (1 pkt)]

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n - 1$ dla $n \geq 1$. Różnica tego ciągu jest równa

A. -1 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 10.10. [matura, czerwiec 2011, zad. 14. (1 pkt)]

W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $a_3 = -1$. Wtedy wyraz a_1 jest równy

A. $-\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $-\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{2}$

Zadanie 10.11. [matura, czerwiec 2011, zad. 30. (2 pkt)]

Liczby 27, x, 3 są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem malejącego ciągu geometrycznego. Oblicz ósmy wyraz tego ciągu.

Zadanie 10.12. [matura, sierpień 2011, zad. 12. (1 pkt)]

W ciągu geometrycznym (a_n) mamy $a_3 = 5$ i $a_4 = 15$. Wtedy wyraz a_5 jest równy

A. 10 **B.** 20 **C.** 75 **D.** 45

Zadanie 10.13. [matura, sierpień 2011, zad. 16. (1 pkt)]

Ile wyrazów ujemnych ma ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 2n^2 - 9$ dla $n \geq 1$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 10.14. [matura, sierpień 2011, zad. 27. (2 pkt)]

Liczby $2x + 1$, 6, $16x + 2$ są w podanej kolejności pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

Zadanie 10.15. [matura, maj 2012, zad. 17. (1 pkt)]

Miary kątów czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 20°. Najmniejszy kąt tego czworokąta ma miarę

A. 40° **B.** 50° **C.** 60° **D.** 70°

Zadanie 10.16. [matura, maj 2012, zad. 18. (1 pkt)]

Dany jest ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$ dla $n \geq 1$. Wówczas wyraz a_5 tego ciągu jest równy

A. $-\frac{3}{25}$ **B.** $\frac{3}{25}$ **C.** $-\frac{7}{25}$ **D.** $\frac{7}{25}$

Zadanie 10.17. [matura, maj 2012, zad. 32. (4 pkt)]

Ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x, 42, y, z)$ jest geometryczny. Oblicz x, y oraz z.

Zadanie 10.18. [matura, czerwiec 2012, zad. 14. (1 pkt)]

Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \sqrt{2n+4}$ dla $n \geq 1$. Wówczas

A. $a_8 = 2\sqrt{5}$ **B.** $a_8 = 8$ **C.** $a_8 = 5\sqrt{2}$ **D.** $a_8 = \sqrt{12}$

Zadanie 10.19. [matura, czerwiec 2012, zad. 15. (1 pkt)]

Ciąg $\left(2\sqrt{2}, 4, a\right)$ jest geometryczny. Wówczas.

A. $a = 8\sqrt{2}$ **B.** $a = 4\sqrt{2}$ **C.** $a = 8 - 2\sqrt{2}$ **D.** $a = 8 + 2\sqrt{2}$

Zadanie 10.20. [matura, czerwiec 2012, zad. 30. (2 pkt)]

Suma $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych n wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest określona wzorem $S_n = n^2 - 2n$ dla $n \geq 1$. Wyznacz wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

Zadanie 10.21. [matura, sierpień 2012, zad. 12. (1 pkt)]

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{n}{(-2)^n}$ dla $n \geq 1$. Wówczas

A. $a_3 = \frac{1}{2}$ **B.** $a_3 = -\frac{1}{2}$ **C.** $a_3 = \frac{3}{8}$ **D.** $a_3 = -\frac{3}{8}$

Zadanie 10.22. [matura, sierpień 2012, zad. 13. (1 pkt)]

W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 36$, $a_2 = 18$. Wtedy

A. $a_4 = -18$ **B.** $a_4 = 0$ **C.** $a_4 = 4{,}5$ **D.** $a_4 = 144$

Zadanie 10.23. [matura, sierpień 2012, zad. 28. (2 pkt)]

Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3, czwarty wyraz tego ciągu jest równy 15. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 10.24. [matura, maj 2013, zad. 12. (1 pkt)]

Ciąg $(27, 18, x + 5)$ jest geometryczny. Wtedy

A. $x = 4$ **B.** $x = 5$ **C.** $x = 7$ **D.** $x = 9$

Zadanie 10.25. [matura, maj 2013, zad. 13. (1 pkt)]

Ciąg (a_n) określonym dla $n \geq 1$ jest arytmetyczny oraz $a_3 = 10$ i $a_4 = 14$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. $a_1 = -2$ **B.** $a_1 = 2$ **C.** $a_1 = 6$ **D.** $a_1 = 12$.

Zadanie 10.26. [matura, czerwiec 2013, zad. 16. (1 pkt)]

Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = -2 + \frac{12}{n}$ dla $n \geq 1$. Równość $a_n = 4$ zachodzi dla

A. $n = 2$ **B.** $n = 3$ **C.** $n = 4$ **D.** $n = 5$

Zadanie 10.27. [matura, czerwiec 2013, zad. 20. (1 pkt)]

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), w którym różnica $r = -2$ oraz $a_{20} = 17$. Wówczas pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. 45 **B.** 50 **C.** 55 **D.** 60

Zadanie 10.28. [matura, czerwiec 2013, zad. 21. (1 pkt)]

W ciągu geometrycznym (a_n), pierwszy wyraz jest równy $\frac{9}{8}$, a czwarty wyraz jest równy $\frac{1}{3}$.

Wówczas iloraz q tego ciągu jest równy

A. $q = \frac{1}{3}$ **B.** $q = \frac{1}{2}$ **C.** $q = \frac{2}{3}$ **D.** $q = \frac{3}{2}$

Zadanie 10.29. [matura, czerwiec 2013, zad. 31. (2 pkt)]

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 7 \cdot 3^{n+1}$, dla $n \geq 1$.
Oblicz iloraz q tego ciągu.

Zadanie 10.30. [matura, sierpień 2013, zad. 13. (1 pkt)]

Liczby $3x - 4$, 8, 2, w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wtedy

A. $x = -6$ **B.** $x = 0$ **C.** $x = 6$ **D.** $x = 12$

Zadanie 10.31. [matura, sierpień 2013, zad. 21. (1 pkt)]

Liczby 7, a, 49, w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Wtedy a jest równe

A. 14 **B.** 21 **C.** 28 **D.** 42

Zadanie 10.32. [matura, sierpień 2013, zad. 22. (1 pkt)]

Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = n^2 - n$ dla $n \geq 1$. Który wyraz tego ciągu jest równy 6?

A. drugi **B.** trzeci **C.** szósty **D.** trzydziesty

Zadanie 10.33. [matura, maj 2014, zad. 11. (1 pkt)]

Liczby 2, –1, –4 są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla liczb naturalnych $n \geq 1$. Wzór ogólny tego ciągu ma postać

A. $a_n = -3n + 5$ **B.** $a_n = n - 3$ **C.** $a_n = -n + 3$ **D.** $a_n = 3n - 5$

Zadanie 10.34. [matura, maj 2014, zad. 13. (1 pkt)]

Liczby: $x -2$, 6, 12, w podanej kolejności, są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Liczba x jest równa

A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5

Zadanie 10.35. [matura, czerwiec 2014, zad. 11. (1 pkt)]

W ciągu geometrycznym (a_n) określonym dla $n \geq 1$ dane są $a_1 = 5$, natomiast iloraz $q = -2$. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

A. -1705 **B.** -1023 **C.** 1705 **D.** 5115

Zadanie 10.36. [matura, czerwiec 2014, zad. 12. (1 pkt)]

W ciągu arytmetycznym (a_n) określonym dla $n \geq 1$ dane są dwa wyrazy $a_2 = 11$ i $a_4 = 7$. Suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

A. 36 **B.** 40 **C.** 13 **D.** 20.

Zadanie 10.37. [matura, czerwiec 2014, zad. 29. (2 pkt)]

Liczby: 6, $2x + 4$, $x + 26$, w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Oblicz różnicę r tego ciągu.

Zadanie 10.38. [matura, sierpień 2014, zad. 13. (1 pkt)]

Suma dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 35. Pierwszy wyraz a_1 tego ciągu jest równy 3. Wtedy

A. $a_{10} = \frac{7}{2}$ **B.** $a_{10} = 4$ **C.** $a_{10} = \frac{32}{5}$ **D.** $a_{10} = 32$

Zadanie 10.39. [matura, sierpień 2014, zad. 14. (1 pkt)]

Ciąg geometryczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = -\frac{3^n}{4}$ dla $n \geq 1$. Iloraz tego ciągu jest równy

A. -3 **B.** $-\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** 3

Zadanie 10.40. [matura, sierpień 2014, zad. 31. (2 pkt)]

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla $n \geq 1$, w którym $a_5 = 22$ oraz $a_{10} = 47$. Oblicz pierwszy wyraz a_1 i różnicę r tego ciągu.

Zadanie 10.41. [matura, maj 2015, zad. 13. (1 pkt)]

W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, spełniony jest warunek $a_4 = 3a_1$. Iloraz q tego ciągu jest równy

A. $q = \frac{1}{3}$ **B.** $q = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ **C.** $q = \sqrt[3]{3}$ **D.** $q = 3$

Zadanie 10.42. [matura, maj 2015, zad. 34. (5 pkt)]

W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 187. Średnia arytmetyczna pierwszego, trzeciego i dziewiątego wyrazu tego ciągu, jest równa 12. Wyrazy a_1, a_3, a_k ciągu (a_n), w podanej kolejności, tworzą nowy ciąg – trzywyrazowy ciąg geometryczny (b_n). Oblicz k.

Zadanie 10.43. [matura, maj 2015, zad. 11 swe. (1 pkt)]

W ciągu arytmetycznym (a_n) określonym dla $n \geq 1$ dane są $a_1 = -4$ i $r = 2$. Którym wyrazem tego ciągu jest liczba 156?

A. 81 **B.** 80 **C.** 76 **D.** 77

Zadanie 10.44. [matura, maj 2015, zad. 30 swe. (2 pkt)]

Dany jest skończony ciąg, w którym pierwszy wyraz jest równy 444, a ostatni jest równy 653. Każdy wyraz tego ciągu, począwszy od drugiego, jest o 11 większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Zadanie 10.45. [matura, czerwiec 2015, zad. 13. (1 pkt)]

Ciąg geometryczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2^n$ dla $n \geq 1$. Suma dziesięciu początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu jest równa

A. $2(1 - 2^{10})$ **B.** $-2(1 - 2^{10})$ **C.** $2(1 + 2^{10})$ **D.** $-2(1 + 2^{10})$

Zadanie 10.46. [matura, czerwiec 2015, zad. 14. (1 pkt)]

Suma pierwszego i szóstego wyrazu pewnego ciągu arytmetycznego jest równa 13. Wynika stąd, że suma trzeciego i czwartego wyrazu tego ciągu jest równa

A. 13 **B.** 12 **C.** 7 **D.** 6

Zadanie 10.47. [matura, czerwiec 2015, zad. 32. (4 pkt)]

Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny (a_n), dla $n \geq 1$ taki, że $a_5 = 18$. Wyrazy a_1, a_3 oraz a_{13} tego ciągu są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem pewnego ciągu geometrycznego. Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n).

Zadanie 10.48. [matura, czerwiec 2015, zad. 12 swe. (1 pkt)]

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n - 1$ dla $n \geq 1$. Suma stu początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu jest równa

A. 9900 **B.** 9950 **C.** 10000 **D.** 10050

Zadanie 10.49. [matura, czerwiec 2015, zad. 13 swe. (1 pkt)]

Ciąg $x + 35$, $x - 10$, $x + 20$ jest geometryczny. Stąd wynika, że

A. $x = -8$ **B.** $x = -1$ **C.** $x = 5$ **D.** $x = 15$

Zadanie 10.50. [matura, czerwiec 2015, zad. 30 swe. (2 pkt)]

W siedmiowyrazowym ciągu arytmetycznym środkowy wyraz jest równy 0. Udowodnij, że suma wyrazów tego ciągu jest równa 0.

Zadanie 10.51. [matura, czerwiec 2015, zad. 34 swe. (5 pkt)]

Deweloper oferuje możliwość kompletnego wyposażenia kuchni i salonu w ofercie „Malejące raty”. Wysokość pierwszej raty ustalono na 775 zł. Każda następna rata jest o 10 zł mniejsza od poprzedniej. Całkowity koszt wyposażenia kuchni i salonu ustalono na 30 240 zł. Oblicz wysokość ostatniej raty i liczbę wszystkich rat.

Zadanie 10.52. [matura, sierpień 2015, zad. 14. (1 pkt)]

Wszystkie dwucyfrowe liczby naturalne podzielne przez 7 tworzą rosnący ciąg arytmetyczny. Dwunastym wyrazem tego ciągu jest liczba

A. 77 **B.** 84 **C.** 91 **D.** 98

Zadanie 10.53. [matura, sierpień 2015, zad. 15. (1 pkt)]

Ciąg liczbowy określony jest wzorem $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$, gdy $n \geq 1$. Piąty wyraz tego ciągu jest równy

A. -1 **B.** $\frac{31}{33}$ **C.** $\frac{9}{11}$ **D.** 1

Zadanie 10.54. [matura, sierpień 2015, zad. 12 swe. (1 pkt)]

Ciąg (a_n) jest określony dla $n \geq 1$ wzorem $a_n = 2n - 1$. Suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

A. 101 **B.** 121 **C.** 99 **D.** 81

Zadanie 10.55. [matura, sierpień 2015, zad. 13 swe. (1 pkt)]

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) dla $n \geq 1$, w którym $a_{10} = 11$ oraz $a_{100} = 111$. Wtedy różnica r tego ciągu jest równa

A. $\frac{9}{10}$ **B.** -100 **C.** $\frac{10}{9}$ **D.** 100

Zadanie 10.56. [matura, sierpień 2015, zad. 32 swe. (4 pkt)]

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy $r \neq 0$ i pierwszym wyrazie $a_1 = 2$. Pierwszy, drugi i czwarty wyraz tego ciągu są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Oblicz iloraz tego ciągu geometrycznego.

Zadanie 10.57. [matura, maj 2016, zad. 14. (1 pkt)]

Czternasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 8, a różnica tego ciągu jest równa $\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Siódmy wyraz tego ciągu jest równy

A. $\frac{37}{2}$ **B.** $-\frac{37}{2}$ **C.** $-\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{5}{2}$

Zadanie 10.58. [matura, maj 2016, zad. 15. (1 pkt)]

Ciąg $(x, 2x + 3, 4x + 3)$ jest geometryczny. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. -4 **B.** 1 **C.** 0 **D.** -1

Zadanie 10.59. [matura, maj 2016, zad. 31 swe. (2 pkt)]

W skończonym ciągu arytmetycznym (a_n) pierwszy wyraz a_1 jest równy 7 oraz ostatni wyraz a_n jest równy 89. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 2016. Oblicz, ile wyrazów ma ten ciąg.

Zadanie 10.60. [matura, czerwiec 2016, zad. 11. (1 pkt)]

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 6(n - 16)$ dla $n \geq 1$. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

A. -54 **B.** -126 **C.** -630 **D.** -270

Zadanie 10.61. [matura, czerwiec 2016, zad. 12. (1 pkt)]

Dany jest ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_1 = 72$ i $a_4 = 9$. Iloraz q tego ciągu jest równy

A. $q = \frac{1}{2}$ **B.** $q = \frac{1}{6}$ **C.** $q = \frac{1}{4}$ **D.** $q = \frac{1}{8}$

Zadanie 10.62. [matura, czerwiec 2016, zad. 31. (5 pkt)]

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, w którym $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2016$ oraz $a_5 + a_6 + a_7 + \ldots + a_{12} = 2016$. Oblicz pierwszy wyraz, różnicę oraz najmniejszy dodatni wyraz ciągu (a_n).

Zadanie 10.63. [matura, sierpień 2016, zad. 8. (1 pkt)]

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 8, a czwarty wyraz tego ciągu jest równy (-216). Iloraz tego ciągu jest równy

A. $-\frac{224}{3}$ **B.** -3 **C.** -9 **D.** -27

Zadanie 10.64. [matura, sierpień 2016, zad. 11. (1 pkt)]

Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest określona wzorem $S_n = 2n^2 + n$. Wtedy wyraz a_2 jest równy

A. 3 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 10

Zadanie 10.65. [matura, sierpień 2016, zad. 31. (4 pkt)]

Ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = 2016 - 3n$, dla $n \geq 1$. Oblicz sumę wszystkich dodatnich wyrazów tego ciągu.

Zadanie 10.66. [matura, maj 2017, zad. 12. (1 pkt)]

W ciągu arytmetycznym (a_n) określonym dla $n \geq 1$, dane są: $a_1 = 5$, $a_2 = 11$. Wtedy

A. $a_{14} = 71$ **B.** $a_{12} = 71$ **C.** $a_{11} = 71$ **D.** $a_{10} = 71$

Zadanie 10.67. [matura, maj 2017, zad. 13. (1 pkt)]

Dany jest trzywyrazowy ciąg geometryczny $(24, 6, a - 1)$. Stąd wynika, że

A. $a = \frac{5}{2}$ **B.** $a = \frac{2}{5}$ **C.** $a = \frac{3}{2}$ **D.** $a = \frac{2}{3}$

Zadanie 10.68. [matura, maj 2017, zad. 31. (2 pkt)]

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, dane są: wyraz $a_1 = 8$ i suma trzech początkowych wyrazów tego ciągu $S_3 = 33$. Oblicz różnicę $a_{16} - a_{13}$.

Zadanie 10.69. [matura, czerwiec 2017, zad. 13. (1 pkt)]

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, spełniony jest warunek $2a_3 = a_2 + a_1 + 1$. Różnica r tego ciągu jest równa

A. 0 **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Zadanie 10.70. [matura, czerwiec 2017, zad. 14. (1 pkt)]

Dany jest ciąg geometryczny $(x, 2x^2, 4x^3, 8)$ o wyrazach nieujemnych. Wtedy

A. $x = 0$ **B.** $x = 1$ **C.** $x = 2$ **D.** $x = 4$

Zadanie 10.71. [matura, czerwiec 2017, zad. 30. (2 pkt)]

Suma trzydziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równa 30. Ponadto $a_{30} = 30$. Oblicz różnicę tego ciągu.

Zadanie 10.72. [matura, sierpień 2017, zad. 11. (1 pkt)]

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), określonym dla $n \geq 1$, o którym wiemy, że $a_1 = 2$ i $a_2 = 9$. Wtedy $a_n = 79$ dla

A. $n = 10$ **B.** $n = 11$ **C.** $n = 12$ **D.** $n = 13$

Zadanie 10.73. [matura, sierpień 2017, zad. 12. (1 pkt)]

Dany jest trzywyrazowy ciąg geometryczny o wyrazach dodatnich: $(81, 3x, 4)$. Stąd wynika, że

A. $x = 18$ **B.** $x = 6$ **C.** $x = \frac{85}{6}$ **D.** $x = \frac{6}{85}$

Zadanie 10.74. [matura, sierpień 2017, zad. 31. (2 pkt)]

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), określonym dla $n \geq 1$, w którym spełniona jest równość $a_{21} + a_{24} + a_{27} + a_{30} = 100$. Oblicz sumę $a_{25} + a_{26}$.

Zadanie 10.75. [matura, maj 2018, zad. 11. (1 pkt)]

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{5-2n}{6}$ dla $n \geq 1$. Ciąg ten jest

A. arytmetyczny i jego różnica jest równa $r = -\frac{1}{3}$.

B. arytmetyczny i jego różnica jest równa $r = -2$.

C. geometryczny i jego iloraz jest równy $q = -\frac{1}{3}$.

D. geometryczny i jego iloraz jest równy $q = \frac{5}{6}$.

Zadanie 10.76. [matura, maj 2018, zad. 12. (1 pkt)]

Dla ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geq 1$, jest spełniony warunek $a_4 + a_5 + a_6 = 12$. Wtedy

A. $a_5 = 4$ **B.** $a_5 = 3$ **C.** $a_5 = 6$ **D.** $a_5 = 5$

Zadanie 10.77. [matura, maj 2018, zadanie 13. (0-1)]

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geq 1$, w którym $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 2\sqrt{2}$, $a_3 = 4\sqrt{2}$. Wzór na n-ty wyraz tego ciągu ma postać

A. $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n$ **B.** $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}}$ **C.** $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ **D.** $a_n = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{2}$

Zadanie 10.78. [matura, maj 2018, zad. 31. (2 pkt)]

Dwunasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równy 30, a suma jego dwunastu początkowych wyrazów jest równa 162. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

Zadanie 10.79. [matura, czerwiec 2018, zad. 13. (1 pkt)]

Wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) określonego dla $n \geq 1$ są dodatnie i $3a_2 = 2a_3$. Stąd wynika, że iloraz q tego ciągu jest równy

A. $q = \frac{2}{3}$ **B.** $q = \frac{3}{2}$ **C.** $q = 6$ **D.** $q = 5$

Zadanie 10.80. [matura, czerwiec 2018, zad. 14. (1 pkt)]

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony wzorem $a_n = 16 - \frac{1}{2}n$ dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$. Różnica r tego ciągu jest równa

A. $r = -16$ **B.** $r = -\frac{1}{2}$ **C.** $r = -\frac{1}{32}$ **D.** $r = 15\frac{1}{2}$

Zadanie 10.81. [matura, czerwiec 2018, zad. 33. (4 pkt)]

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla liczb naturalnych $n \geq 1$, wyraz szósty jest liczbą dwa razy większą od wyrazu piątego, a suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $S_{10} = \frac{15}{4}$. Oblicz wyraz pierwszy oraz różnicę tego ciągu.

Zadanie 10.82. [matura, sierpień 2018, zad. 13. (1 pkt)]

Ciąg arytmetyczny (a_n), określonego dla $n \geq 1$, spełnia warunek $a_3 + a_4 + a_5 = 15$. Wtedy

A. $a_4 = 5$ **B.** $a_4 = 6$ **C.** $a_4 = 3$ **D.** $a_4 = 4$

Zadanie 10.83. [matura, sierpień 2018, zad. 14. (1 pkt)]

Dla pewnej liczby x ciąg $(x, x + 4, 16)$ jest geometryczny. Liczba x jest równa

A. 8 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 0

Zadanie 10.84 [matura, sierpień 2018, zad. 30. (2 pkt)]

Dziewiąty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geq 1$, jest równy 34, a suma jego ośmiu początkowych wyrazów jest równa 110. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

11. Planimetria

Zadanie 11.1. [matura, maj 2010, zad. 15. (1 pkt)]

Okrąg opisany na kwadracie ma promień 4. Długość boku tego kwadratu jest równa

A. $4\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** 8 **D.** 4

Zadanie 11.2. [matura, maj 2010, zad. 16. (1 pkt)]

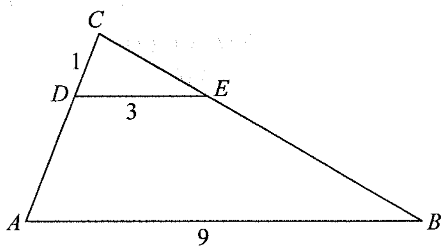
Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 6, a ramię ma długość 5. Wysokość opuszczona na podstawę ma długość

A. 3 **B.** 4 **C.** $\sqrt{34}$ **D.** $\sqrt{61}$

Zadanie 11.3. [matura, maj 2010, zad. 17. (1 pkt)]

Odcinki AB i DE są równoległe. Długości odcinków CD, DE i AB są odpowiednio równe 1, 3 i 9. Długość odcinka AD jest równa

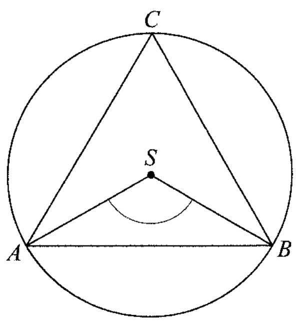
A. 2 **B.** 3
C. 5 **D.** 6



Zadanie 11.4. [matura, maj 2010, zad. 18. (1 pkt)]

Punkty A, B, C leżące na okręgu o środku S są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Miara zaznaczonego na rysunku kąta środkowego ASB jest równa

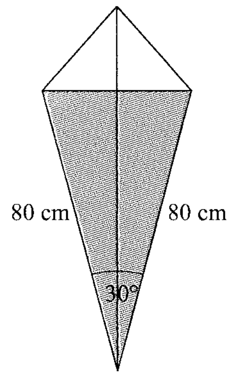
A. 120° **B.** 90°
C. 60° **D.** 30°



Zadanie 11.5. [matura, maj 2010, zad. 19. (1 pkt)]

Latawiec ma wymiary podane na rysunku.
Powierzchnia zacieniowanego trójkąta jest równa

A. 3200 cm^2 **B.** 6400 cm^2
C. 1600 cm^2 **D.** 800 cm^2



Zadanie 11.6. [matura, maj 2010, zad. 31. (2 pkt)]

W trapezie prostokątnym krótsza przekątna dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 6. Oblicz obwód tego trapezu.

Zadanie 11.7. [matura, maj 2010, zad. 34. (5 pkt)]

W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię 240 m^2. Basen w drugim hotelu ma powierzchnię 350 m^2 oraz jest o 5 m dłuższy i 2 m szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary mogą mieć baseny w obu hotelach. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

Zadanie 11.8. [matura, sierpień 2010, zad. 17. (1 pkt)]

Okrąg opisany na trójkącie równobocznym ma promień 12. Wysokość tego trójkąta jest równa

A. 18 **B.** 20 **C.** 22 **D.** 24

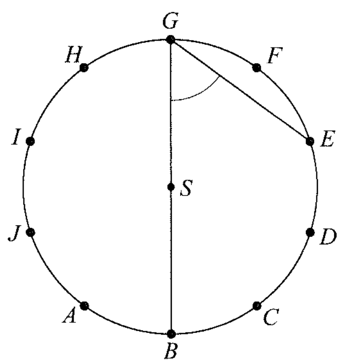
Zadanie 11.9. [matura, sierpień 2010, zad. 18. (1 pkt)]

Przekątna AC prostokąta $ABCD$ ma długość 11, a bok AB jest od niej o 5 krótszy.
Oblicz długość boku AD.

A. $\sqrt{157}$ **B.** $\sqrt{85}$ **C.** 5 **D.** $\sqrt{83}$

Zadanie 11.10. [matura, sierpień 2010, zad. 19. (1 pkt)]

Punkty $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ dzielą okrąg o środku S na dziesięć równych łuków. Oblicz miarę kąta wpisanego BGE zaznaczonego na rysunku.

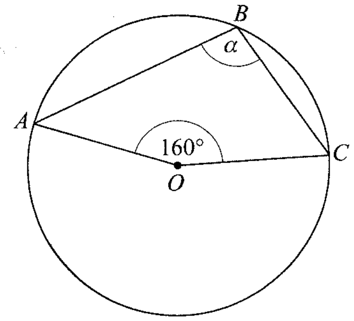


A. 54° **B.** 72° **C.** 60° **D.** 45°

Zadanie 11.11. [matura, maj 2011, zad. 16. (1 pkt)]

Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany α ma miarę

A. 80° **B.** 100°
C. 110° **D.** 120°



Zadanie 11.12. [matura, maj 2011, zad. 17. (1 pkt)]

Wysokość rombu o boku długości 6 i kącie ostrym 60° jest równa

A. $3\sqrt{3}$ **B.** 3 **C.** $6\sqrt{3}$ **D.** 6

Zadanie 11.13. [matura, czerwiec 2011, zad. 17. (1 pkt)]

Obwód prostokąta jest równy 28. Stosunek długości jego boków jest równy 3 : 4. Dłuższy bok tego prostokąta jest równy

A. 14 **B.** 8 **C.** 7 **D.** 6

Zadanie 11.14. [matura, czerwiec 2011, zad. 18. (1 pkt)]

Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 i 8. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy

A. 14 **B.** 8 **C.** 6 **D.** 5

Zadanie 11.15. [matura, czerwiec 2011, zad. 19. (1 pkt)]

Dane są dwa okręgi o promieniach 12 i 17. Większy okrąg przechodzi przez środek mniejszego okręgu. Odległość między środkami tych okręgów jest równa

A. 5 **B.** 12 **C.** 17 **D.** 29

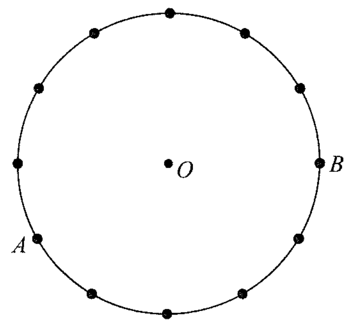
Zadanie 11.16. [matura, sierpień 2011, zad. 21. (1 pkt)]

Dany jest romb o boku długości 4 i kącie ostrym 60°. Pole tego rombu jest równe

A. $16\sqrt{3}$ **B.** 16 **C.** $8\sqrt{3}$ **D.** 8

Zadanie 11.17. [matura, sierpień 2011, zad. 29. (2 pkt)]

Punkty A i B leżą na okręgu o środku O i dzielą ten okrąg na dwa łuki, których stosunek długości jest równy 7 : 5.
Oblicz miarę kąta środkowego opartego na krótszym łuku.



Zadanie 11.18. [matura, sierpień 2011, zad. 31. (5 pkt)]

Dwie szkoły mają prostokątne boiska. Przekątna każdego boiska jest równa 65 m. Boisko w drugiej szkole ma długość o 4 m większą niż boisko w pierwszej szkole, ale szerokość o 8 m mniejszą. Oblicz długość i szerokość każdego z tych boisk.

Zadanie 11.19. [matura, maj 2012, zad. 12. (1 pkt)]

W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 5$ oraz wysokość $|CD| = 2$. Podstawa AB tego trójkąta ma długość

A. 6 **B.** $2\sqrt{21}$ **C.** $2\sqrt{29}$ **D.** 14

Zadanie 11.20. [matura, maj 2012, zad. 13. (1 pkt)]

W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Obwód tego trójkąta jest równy

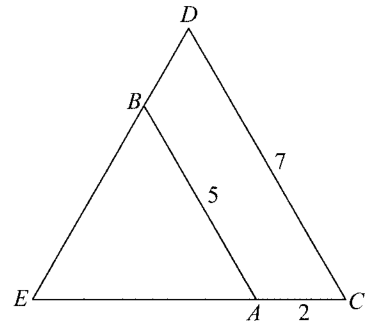
A. $16\sqrt{6}$ **B.** $14\sqrt{6}$ **C.** $12 + 4\sqrt{6}$ **D.** $12 + 2\sqrt{6}$

Zadanie 11.21. [matura, maj 2012, zad. 14. (1 pkt)]

Odcinki AB i CD są równoległe i $|AB| = 5$, $|AC| = 2$, $|CD| = 7$ (zobacz rysunek).
Długość odcinka AE jest równa

A. $\frac{10}{7}$ **B.** $\frac{14}{5}$

C. 3 **D.** 5



Zadanie 11.22. [matura, maj 2012, zad. 15. (1 pkt)]

Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe

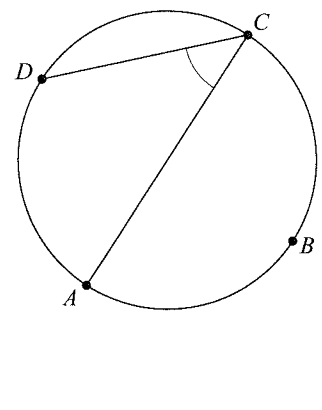
A. 25 **B.** 50 **C.** 75 **D.** 100

Zadanie 11.23. [matura, maj 2012, zad. 16. (1 pkt)]

Punkty A, B, C, D dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta wpisanego ACD jest równa

A. 90° **B.** 60°

C. 45° **D.** 30°



Zadanie 11.24. [matura, czerwiec 2012, zad. 7. (1 pkt)]

Jeden kąt trójkąta ma miarę 54°. Z pozostałych dwóch kątów tego trójkąta jeden jest 6 razy większy od drugiego. Miary pozostałych kątów są równe

A. 21° i 105° **B.** 11° i 66° **C.** 18° i 108° **D.** 16° i 96°

Zadanie 11.25. [matura, czerwiec 2012, zad. 8. (1 pkt)]

Krótszy bok prostokąta ma długość 6. Kąt między przekątną prostokąta i dłuższym bokiem ma miarę 30°. Dłuższy bok prostokąta ma długość

A. $2\sqrt{3}$ **B.** $4\sqrt{3}$ **C.** $6\sqrt{3}$ **D.** 12

Zadanie 11.26. [matura, czerwiec 2012, zad. 9. (1 pkt)]

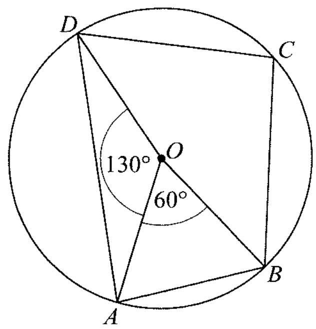
Cięciwa okręgu ma długość 8 cm i jest oddalona od jego środka o 3 cm. Promień tego okręgu ma długość

A. 3 cm **B.** 4 cm **C.** 5 cm **D.** 8 cm

Zadanie 11.27. [matura, czerwiec 2012, zad. 10. (1 pkt)]

Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany BAD ma miarę

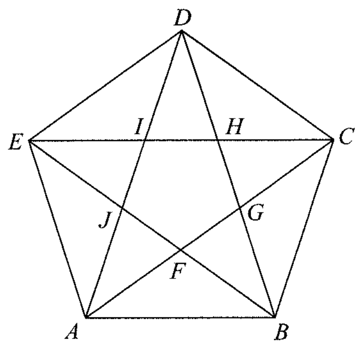
A. 150° **B.** 120°
C. 115° **D.** 85°



Zadanie 11.28. [matura, czerwiec 2012, zad. 11. (1 pkt)]

Pięciokąt $ABCDE$ jest foremny.
Wskaż trójkąt przystający do trójkąta ECD

A. ΔABF **B.** ΔCAB
C. ΔIHD **D.** ΔABD



Zadanie 11.29. [matura, czerwiec 2012, zad. 27. (2 pkt)]

Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 6 i 10 oraz tangens jego kąta ostrego jest równy 3. Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 11.30. [matura, czerwiec 2012, zad. 31. (2 pkt)]

Dany jest romb, którego kąt ostry ma miarę 45°, a jego pole jest równe $50\sqrt{2}$. Oblicz wysokość tego rombu.

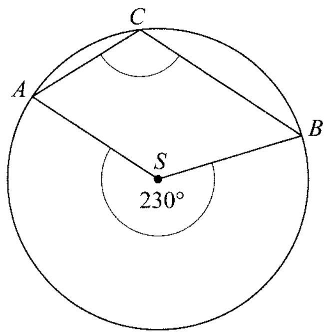
Zadanie 11.31. [matura, sierpień 2012, zad. 16. (1 pkt)]

Przekątna AC prostokąta $ABCD$ ma długość 14. Bok AB tego prostokąta ma długość 6.
Długość boku BC jest równa

A. 8 **B.** $4\sqrt{10}$ **C.** $2\sqrt{58}$ **D.** 10

Zadanie 11.32. [matura, sierpień 2012, zad. 17. (1 pkt)]

Punkty A, B i C leżą na okręgu o środku S (zobacz rysunek).



Miara zaznaczonego kąta wpisanego ACB jest równa

A. 65° **B.** 100° **C.** 115° **D.** 130°

Zadanie 11.33. [matura, sierpień 2012, zad. 18. (1 pkt)]

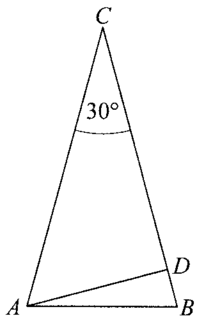
Długość boku trójkąta równobocznego jest równa $24\sqrt{3}$. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy

A. 36 **B.** 18 **C.** 12 **D.** 6

Zadanie 11.34. [matura, sierpień 2012, zad. 29. (2 pkt)]

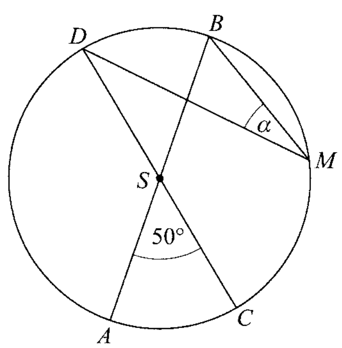
W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 6$ i $|\sphericalangle ACB| = 30°$ (zobacz rysunek).

Oblicz wysokość AD trójkąta opuszczoną z wierzchołka A na bok BC.



Zadanie 11.35. [matura, maj 2013, zad. 15. (1 pkt)]

Średnice AB i CD okręgu o środku S przecinają się pod kątem 50° (tak jak na rysunku).

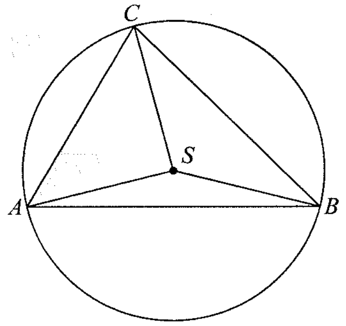


Miara kąta α jest równa

A. 25° **B.** 30° **C.** 40° **D.** 50°

Zadanie 11.36. [matura, maj 2013, zad. 32. (4 pkt)]

Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Kąt ACS jest trzy razy większy od kąta BAS, a kąt CBS jest dwa razy większy od kąta BAS.

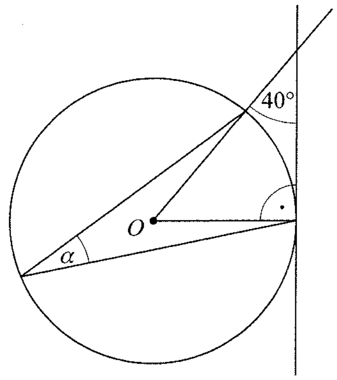


Oblicz kąty trójkąta ABC.

Zadanie 11.37. [matura, czerwiec 2013, zad. 11. (1 pkt)]

Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt α, zaznaczony na rysunku, ma miarę

A. 50° **B.** 45°
C. 25° **D.** 20°



Zadanie 11.38. [matura, czerwiec 2013, zad. 13. (1 pkt)]

Prostokąt $ABCD$ o przekątnej długości $2\sqrt{13}$ jest podobny do prostokąta o bokach długości 2 i 3. Obwód prostokąta $ABCD$ jest równy

A. 10 **B.** 20 **C.** 5 **D.** 24

Zadanie 11.39. [matura, czerwiec 2013, zad. 14. (1 pkt)]

Kosinus kąta ostrego rombu jest równy $\frac{\sqrt{3}}{2}$, bok rombu ma długość 3. Pole tego rombu jest równe

A. $\frac{9}{2}$ **B.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ **D.** 6

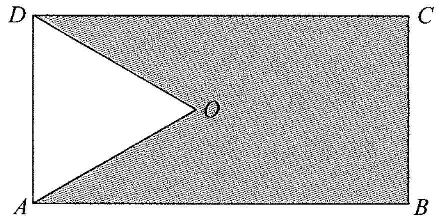
Zadanie 11.40. [matura, czerwiec 2013, zad. 19. (1 pkt)]

Przyprostokątne w trójkącie prostokątnym mają długości 1 oraz $\sqrt{3}$. Najmniejszy kąt w tym trójkącie ma miarę

A. 60° **B.** 30° **C.**45° **D.** 15°

Zadanie 11.41. [matura, sierpień 2013, zad. 12. (1 pkt)]

Z prostokąta $ABCD$ o obwodzie 30 wycięto trójkąt równoboczny AOD o obwodzie 15 (tak jak na rysunku).

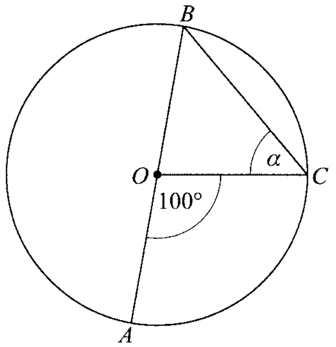


Obwód zacieniowanej figury jest równy

A. 25 **B.** 30 **C.** 35 **D.** 40

Zadanie 11.42. [matura, sierpień 2013, zad. 16. (1 pkt)]

Punkt O jest środkiem okręgu o średnicy AB (tak jak na rysunku).



Kąt α ma miarę

A. 40° **B.** 50° **C.** 60° **D.** 80°

Zadanie 11.43. [matura, sierpień 2013, zad. 17. (1 pkt)]

Najdłuższa przekątna sześciokąta foremnego ma długość 8. Wówczas pole koła opisanego na tym sześciokącie jest równe

A. 4π **B.** 8π **C.** 16π **D.** 64π

Zadanie 11.44. [matura, sierpień 2013, zad. 18. (1 pkt)]

Pole równoległoboku o bokach długości 4 i 12 oraz kącie ostrym 30° jest równe

A. 24 **B.** $12\sqrt{3}$ **C.** 12 **D.** $6\sqrt{3}$

Zadanie 11.45. [matura, sierpień 2013, zad. 32. (5 pkt)]

Dane są dwie prostokątne działki. Działka pierwsza ma powierzchnię równą 6000 m^2. Działka druga ma wymiary większe od wymiarów pierwszej działki o 10 m i 15 m oraz powierzchnię większą o 2250 m^2. Oblicz wymiary pierwszej działki.

Zadanie 11.46. [matura, maj 2014, zad. 12. (1 pkt)]

Jeżeli trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne, a ich pola są, odpowiednio, równe 25 cm^2 i 50 cm^2, to skala podobieństwa $\frac{A'B'}{AB}$ jest równa

A. 2 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Zadanie 11.47. [matura, maj 2014, zad. 16. (1 pkt)]

Wysokość trapezu równoramiennego o kącie ostrym 60° i ramieniu długości $2\sqrt{3}$ jest równa

A. $\sqrt{3}$ **B.** 3 **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** 2

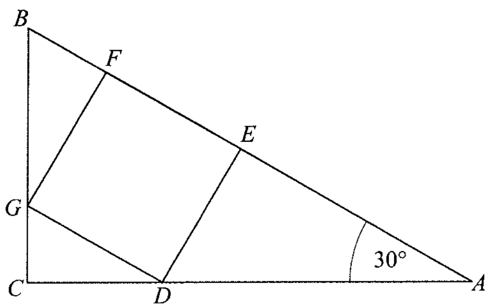
Zadanie 11.48. [matura, maj 2014, zad. 17. (1 pkt)]

Kąt środkowy oparty na łuku, którego długość jest równa $\frac{4}{9}$ długości okręgu, ma miarę

A. 160° **B.** 80° **C.** 40° **D.** 20°

Zadanie 11.49. [matura, maj 2014, zad. 34. (4 pkt)]

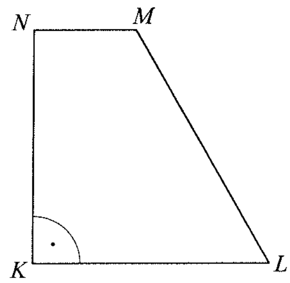
Kąt CAB trójkąta prostokątnego ACB ma miarę 30°. Pole kwadratu $DEFG$, wpisanego w ten trójkąt (zobacz rysunek), jest równe 4.



Oblicz pole trójkąta ACB.

Zadanie 11.50. [matura, czerwiec 2014, zad. 14. (1 pkt)]

W trapezie $KLMN$, w którym $KL \parallel MN$, kąt LKN jest prosty (zobacz rysunek) oraz dane są: $|MN| = 3$, $|KN| = 4\sqrt{3}$, $|\sphericalangle KLM| = 60°$.



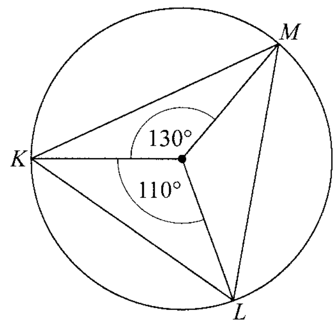
Pole tego trapezu jest równe

A. $4 + 2\sqrt{3}$ **B.** $10\sqrt{3}$ **C.** $20\sqrt{3}$ **D.** $24 + 6\sqrt{3}$

Zadanie 11.51. [matura, czerwiec 2014, zad. 17. (1 pkt)]

Punkt O jest środkiem okręgu (zobacz rysunek).
Miara kąta LKM jest równa

A. 30° **B.** 60°
C. 90° **D.** 120°



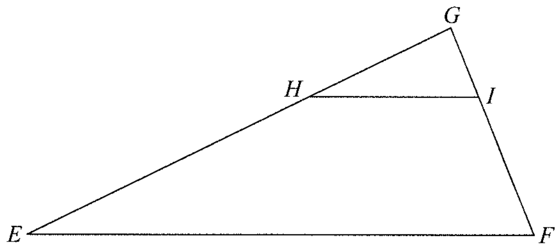
Zadanie 11.52. [matura, czerwiec 2014, zad. 18. (1 pkt)]

Na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości 12 i 9, opisano okrąg. Promień tego okręgu jest równy

A. $\sqrt{108}$ **B.** $\frac{15}{2}$ **C.** 15 **D.** $\frac{\sqrt{108}}{2}$

Zadanie 11.53. [matura, czerwiec 2014, zad. 20. (1 pkt)]

W trójkącie EFG bok EF ma długość 21. Prosta równoległa do boku EF przecina boki EG i FG trójkąta odpowiednio w punktach H oraz I (zobacz rysunek) w taki sposób, że $|HI| = 7$ i $|GI| = 3$. Wtedy długość odcinka FI jest równa



A. 6 **B.** 9 **C.** 12 **D.** 17

Zadanie 11.54. [matura, czerwiec 2014, zad. 21. (1 pkt)]

Na planie miasta, narysowanym w skali 1: 20000, park jest prostokątem o bokach 2 cm i 5 cm. Stąd wynika, że ten park ma powierzchnię

A. 20000 m^2 **B.** 40000 m^2 **C.** 200000 m^2 **D.** 400000 m^2

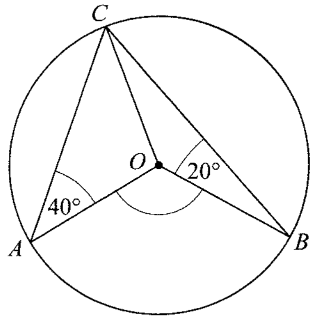
Zadanie 11.55. [matura, sierpień 2014, zad. 16. (1 pkt)]

Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest równy 8. Wysokość tego trójkąta jest równa

A. $4\sqrt{3}$ **B.** $8\sqrt{3}$ **C.** 12 **D.** 6

Zadanie 11.56. [matura, sierpień 2014, zad. 17. (1 pkt)]

Punkty A, B i C leżą na okręgu o środku O (zobacz rysunek).

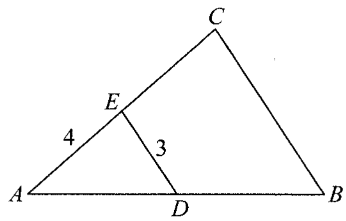


Zaznaczony na rysunku wypukły kąt środkowy AOB ma miarę

A. 60° **B.** 100° **C.** 120° **D.** 140°

Zadanie 11.57. [matura, sierpień 2014, zad. 18. (1 pkt)]

Odcinki BC i DE są równoległe i $|AE| = 4$, $|DE| = 3$ (zobacz rysunek). Punkt D jest środkiem odcinka AB.



Długość odcinka BC jest równa

A. 4 **B.** 6
C. 8 **D.** 16

Zadanie 11.58. [matura, maj 2015, zad. 16. (1 pkt)]

Miara kąta wpisanego w okrąg jest o 20° mniejsza od miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Wynika stąd, że miara kąta wpisanego jest równa.

A. 5° **B.** 10° **C.** 20° **D.** 30°

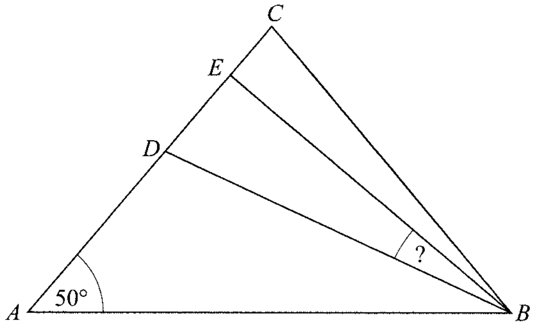
Zadanie 11.59. [matura, maj 2015, zad. 17. (1 pkt)]

Pole rombu o obwodzie 8 jest równe 1. Kąt ostry tego rombu ma miarę α. Wtedy

A. $14° < \alpha < 15°$ **B.** $29° < \alpha < 30°$ **C.** $60° < \alpha < 61°$ **D.** $75° < \alpha < 76°$

Zadanie 11.60. [matura, maj 2015, zad. 15 swe. (1 pkt)]

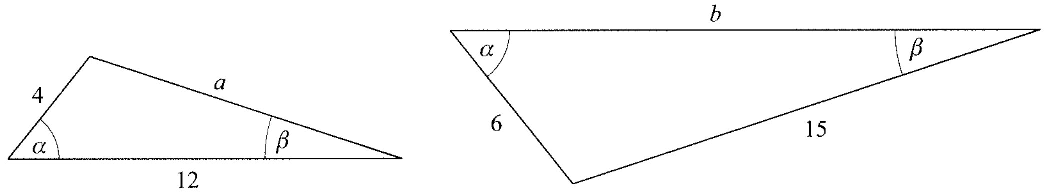
W trójkącie równoramiennym ABC spełnione są warunki: $|AC| = |BC|$, $|\sphericalangle CAB| = 50°$. Odcinek BD jest dwusieczną kąta ABC, a odcinek BE jest wysokością opuszczoną z wierzchołka B na bok AC. Miara kąta EBD jest równa



A. 10° **B.** 12,5° **C.** 13,5° **D.** 15°

Zadanie 11.61. [matura, maj 2015, zad. 16 swe. (1 pkt)]

Przedstawione na rysunku trójkąty są podobne.



Wówczas

A. $a = 13$, $b = 17$ **B.** $a = 10$, $b = 18$ **C.** $a = 9$, $b = 19$ **D.** $a = 11$, $b = 13$

Zadanie 11.62. [matura, czerwiec 2015, zad. 15. (1 pkt)]

Miary kątów wewnętrznych pewnego trójkąta pozostają w stosunku 3: 4: 5. Najmniejszy kąt wewnętrzny tego trójkąta ma miarę

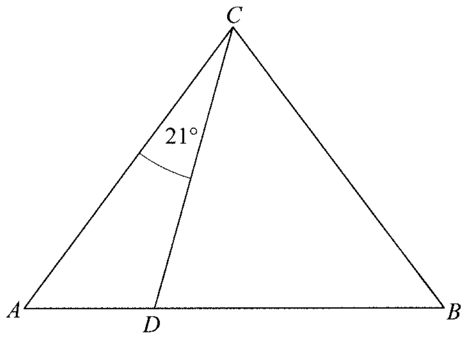
A. 45° **B.** 90° **C.** 75° **D.** 60°

Zadanie 11.63. [matura, czerwiec 2015, zad. 16. (1 pkt)]

W trójkącie ABC, w którym $|AC| = |BC|$, na boku AB wybrano punkt D taki, że $|BD| = |CD|$ oraz $|\sphericalangle ACD| = 21^\circ$ (zobacz rysunek).

Wynika stąd, że kąt BCD ma miarę

A. 57° **B.** 53°
C. 51° **D.** 55°



Zadanie 11.64. [matura, czerwiec 2015, zad. 17. (1 pkt)]

Długości boków trójkąta są liczbami całkowitymi. Jeden bok ma 7 cm, a drugi ma 2 cm. Trzeci bok tego trójkąta może mieć długość

A. 12 cm **B.** 9 cm **C.** 6 cm **D.** 3 cm

Zadanie 11.65. [matura, czerwiec 2015, zad. 18. (1 pkt)]

Boki trójkąta mają długości 20 i 12, a kąt między tymi bokami ma miarę 120°. Pole tego trójkąta jest równe

A. 60 **B.** 120 **C.** $60\sqrt{3}$ **D.** $120\sqrt{3}$

Zadanie 11.66. [matura, czerwiec 2015, zad. 16 swe. (1 pkt)]

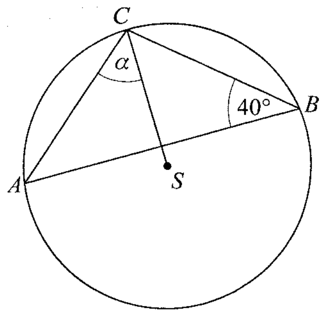
Bok rombu ma taką samą długość jak przekątna kwadratu. Pole rombu jest równe polu kwadratu. Zatem kąt ostry tego rombu ma miarę

A. 75° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 30°

Zadanie 11.67. [matura, czerwiec 2015, zad. 19 swe. (1 pkt)]

W trójkącie ABC wpisanym w okrąg o środku w punkcie S, miara kąta ABC jest równa 40° (zobacz rysunek).
Miara α kąta, jaki bok AC tworzy z promieniem CS, jest równa

A. $\alpha = 40°$ **B.** $\alpha = 45°$
C. $\alpha = 50°$ **D.** $\alpha = 60°$



Zadanie 11.68. [matura, czerwiec 2015, zad. 32 swe. (4 pkt)]

Dany jest romb o boku długości 35. Długości przekątnych tego rombu różnią się o 14.
Oblicz pole tego rombu.

Zadanie 11.69. [matura, sierpień 2015, zad. 18. (1 pkt)]

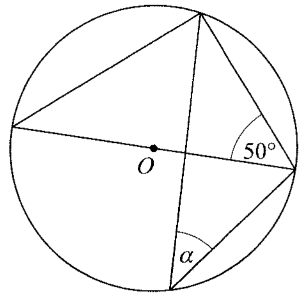
Pole rombu o boku 6 i kącie rozwartym 150° jest równe

A. $18\sqrt{2}$ **B.** 18 **C.** $36\sqrt{2}$ **D.** 36

Zadanie 11.70. [matura, sierpień 2015, zad. 19. (1 pkt)]

W okręgu o środku O dany jest kąt o mierze 50°, zaznaczony na rysunku.
Miara kąta oznaczonego na rysunku literą α jest równa

A. 40° **B.** 50°
C. 20° **D.** 25°



Zadanie 11.71. [matura, sierpień 2015, zad. 16 swe. (1 pkt)]

Dłuższa przekątna sześciokąta foremnego ma długość $2\sqrt{2}$. Pole tego sześciokąta jest równe

A. $12\sqrt{3}$ **B.** $6\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** $3\sqrt{3}$

Zadanie 11.72. [matura, sierpień 2015, zad. 17 swe. (1 pkt)]

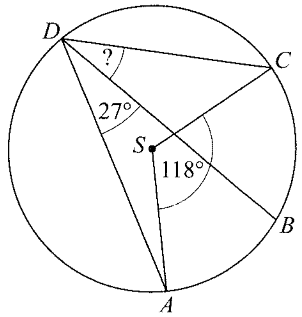
Obwody dwóch trójkątów podobnych, których pola pozostają w stosunku 1 : 4, mogą być równe

A. 9 i 36 **B.** 18 i 36 **C.** 9 i 144 **D.** 18 i 144

Zadanie 11.73. [matura, maj 2016, zad. 7. (1 pkt)]

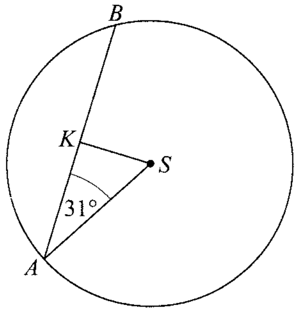
Punkty $ABCD$ leżą na okręgu o środku S (zobacz rysunek).
Miara kąta BDC jest równa

A. 91° **B.** 72,5°
C. 18° **D.** 32°



Zadanie 11.74. [matura, maj 2016, zad. 13. (1 pkt)]

W okręgu o środku w punkcie S poprowadzono cięciwę AB, która utworzyła z promieniem AS kąt o mierze $31°$ (zobacz rysunek). Promień tego okręgu ma długość 10.



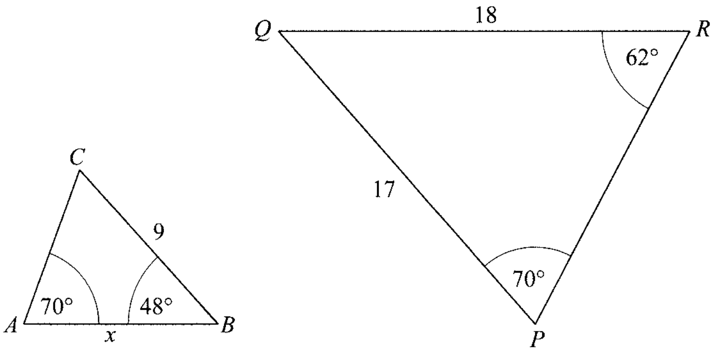
Odległość punktu S od cięciwy AB jest liczbą z przedziału

A. $\left\langle \frac{9}{2}; \frac{11}{2} \right\rangle$ **B.** $\left(\frac{11}{2}; \frac{13}{2} \right\rangle$

C. $\left(\frac{13}{2}; \frac{19}{2} \right\rangle$ **D.** $\left\langle \frac{19}{2}; \frac{37}{2} \right\rangle$

Zadanie 11.75. [matura, maj 2016, zad. 16. (1 pkt)]

Przedstawione na rysunku trójkąty ABC i PQR są podobne. Bok AB trójkąta ABC ma długość



A. 8 **B.** 8,5 **C.** 9,5 **D.** 10

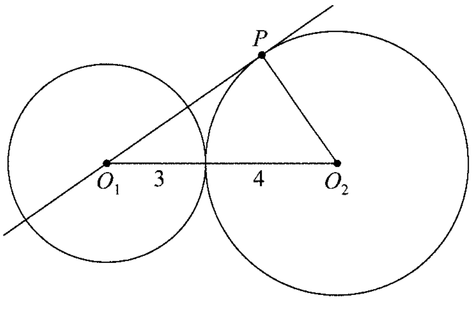
Zadanie 11.76. [matura, maj 2016, zad. 18. (1 pkt)]

Z odcinków o długościach: 5, $2a + 1$, $a - 1$ można zbudować trójkąt równoramienny. Wynika stąd, że

A. $a = 6$ **B.** $a = 4$ **C.** $a = 3$ **D.** $a = 2$

Zadanie 11.77. [matura, maj 2016, zad. 19. (1 pkt)]

Okręgi o promieniach 3 i 4 są styczne zewnętrznie. Prosta styczna do okręgu o promieniu 4 w punkcie P przechodzi przez środek okręgu o promieniu 3 (zobacz rysunek).



Pole trójkąta, którego wierzchołkami są środki okręgów i punkt styczności P, jest równe

A. 14 **B.** $2\sqrt{33}$ **C.** $4\sqrt{33}$ **D.** 12

Zadanie 11.78. [matura, maj 2016, zad. 32. (4 pkt)]

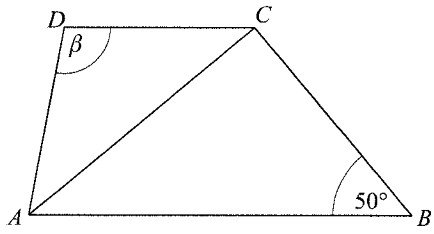
Jeden z kątów trójkąta jest trzy razy większy od mniejszego z dwóch pozostałych kątów, które różnią się o 50°. Oblicz kąty tego trójkąta.

Zadanie 11.79. [matura, czerwiec 2016, zad. 13. (1 pkt)]

Dany jest trapez $ABCD$, w którym przekątna AC jest prostopadła do ramienia BC, $|AD| = |DC|$ oraz $|\sphericalangle ABC| = 50°$ (zobacz rysunek).

Stąd wynika, że

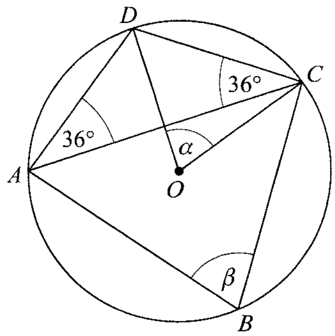
A. $\beta = 100°$ **B.** $\beta = 120°$
C. $\beta = 110°$ **D.** $\beta = 130°$



Zadanie 11.80. [matura, czerwiec 2016, zad. 14. (1 pkt)]

Punkty A, B, C i D leżą na okręgu o środku O (zobacz rysunek).
Miary zaznaczonych kątów α i β są odpowiednio równe

A. $\alpha = 36°, \beta = 72°$ **B.** $\alpha = 54°, \beta = 72°$
C. $\alpha = 36°, \beta = 108°$ **D.** $\alpha = 72°, \beta = 72°$



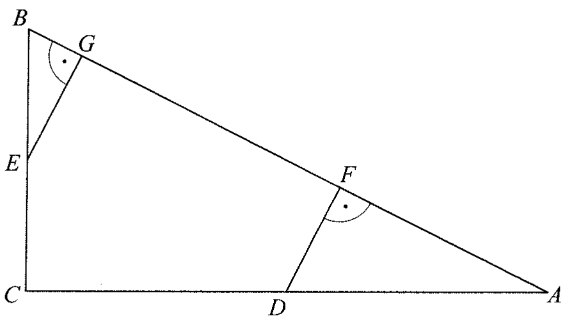
Zadanie 11.81. [matura, czerwiec 2016, zad. 16. (1 pkt)]

Każde z ramion trójkąta równoramiennego ma długość 20. Kąt zawarty między ramionami tego trójkąta ma miarę 150°. Pole tego trójkąta jest równe

A. 100 **B.** 200 **C.** $100\sqrt{3}$ **D.** $100\sqrt{2}$

Zadanie 11.82. [matura, czerwiec 2016, zad. 25. (1 pkt)]

Punkty D i E są środkami przyprostokątnych AC i BC trójkąta prostokątnego ABC. Punkty F i G leżą na przeciwprostokątnej AB tak, że odcinki DF i EG są do niej prostopadłe (zobacz rysunek). Pole trójkąta BGE jest równe 1, a pole trójkąta AFD jest równe 4.



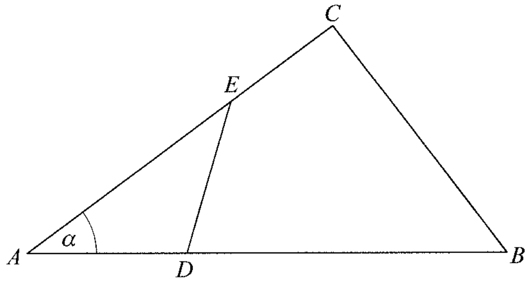
Zatem pole trójkąta ABC jest równe

A. 12 **B.** 16 **C.** 18 **D.** 20

Zadanie 11.83. [matura, czerwiec 2016, zad. 30. (4 pkt)]

W trójkącie ABC dane są długości boków $|AB| = 15$ i $|AC| = 12$ oraz $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, gdzie $\alpha = \sphericalangle BAC$.

Na bokach AB i AC tego trójkąta obrano punkty odpowiednio D i E takie, że $|BD| = 2|AD|$ i $|AE| = 2|CE|$ (zobacz rysunek).



Oblicz pole

a) trójkąta ADE.

b) czworokąta $BCED$.

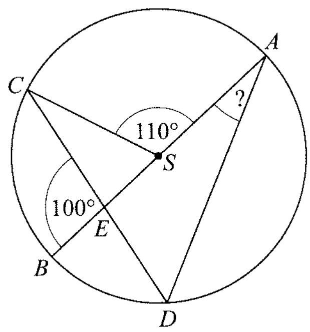
Zadanie 11.84. [matura, sierpień 2016, zad. 18. (1 pkt)]

Przekątne równoległoboku mają długości 4 i 8, a kąt między tymi przekątnymi ma miarę 30°. Pole tego równoległoboku jest równe

A. 32 **B.** 16 **C.** 12 **D.** 8

Zadanie 11.85. [matura, sierpień 2016, zad. 19. (1 pkt)]

Punkty A, B, C i D leżą na okręgu o środku S. Cięciwa CD przecina średnicę AB tego okręgu w punkcie E tak, że $|\sphericalangle BEC| = 100°$. Kąt środkowy ASC ma miarę 110° (zobacz rysunek).



Kąt wpisany BAD ma miarę

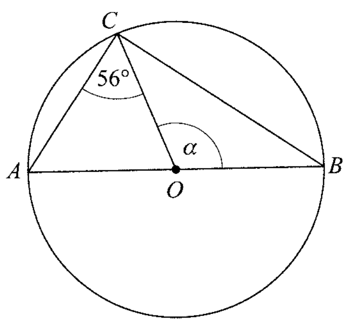
A. 15° **B.** 20° **C.** 25° **D.** 30°

Zadanie 11.86. [matura, maj 2017, zad. 15. (1 pkt)]

Na okręgu o środku w punkcie O leży punkt C (zobacz rysunek). Odcinek AB jest średnicą tego okręgu. Zaznaczony na rysunku kąt środkowy α ma miarę

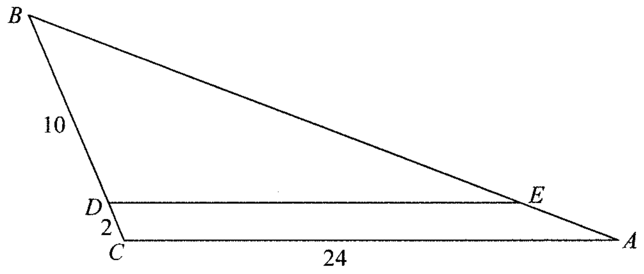
A. 116° **B.** 114°

C. 112° **D.** 110°



Zadanie 11.87. [matura, maj 2017, zad. 16. (1 pkt)]

W trójkącie ABC punkt D leży na boku BC, a punkt E leży na boku AB. Odcinek DE jest równoległy do boku AC, a ponadto $|BD| = 10$, $|BC| = 12$ i $|AC| = 24$ (zobacz rysunek).

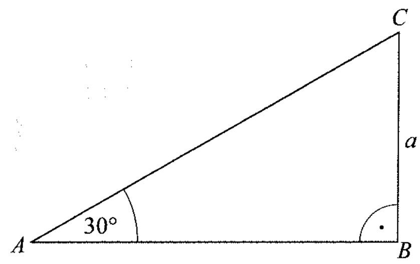


Długość odcinka DE jest równa

A. 22 **B.** 20 **C.** 12 **D.** 11

Zadanie 11.88. [matura, maj 2017, zad. 17. (1 pkt)]

Obwód trójkąta ABC, przedstawionego na rysunku, jest równy



A. $\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$ **B.** $\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$

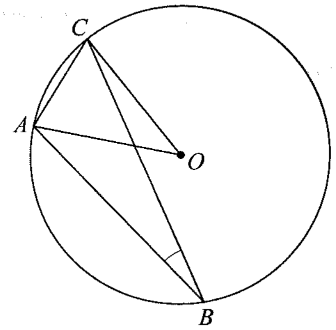
C. $\left(3+\sqrt{3}\right)a$ **D.** $\left(2+\sqrt{2}\right)a$

Zadanie 11.89. [matura, maj 2017, zad. 30. (2 pkt)]

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 26 cm, a jedna z przyprostokątnych jest o 14 cm dłuższa od drugiej. Oblicz obwód tego trójkąta.

Zadanie 11.90. [matura, czerwiec 2017, zad. 16. (1 pkt)]

W okręgu o środku O dany jest kąt wpisany ABC o mierze $20°$ (patrz rysunek).



Miara kąta CAO jest równa

A. $85°$ **B.** $70°$ **C.** $80°$ **D.** $75°$

Zadanie 11.91. [matura, czerwiec 2017, zad. 20. (1 pkt)]

Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A'B'C'$ w skali $\frac{5}{2}$, przy czym $|AB| = \frac{5}{2}|A'B'|$. Stosunek pola trójkąta ABC do pola trójkąta $A'B'C'$ jest równy

A. $\frac{4}{25}$ **B.** $\frac{2}{5}$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{25}{4}$

Zadanie 11.92. [matura, czerwiec 2017, zad. 21. (1 pkt)]

Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym jest równe $\frac{1}{3}\pi^3$. Długość boku tego trójkąta jest równa

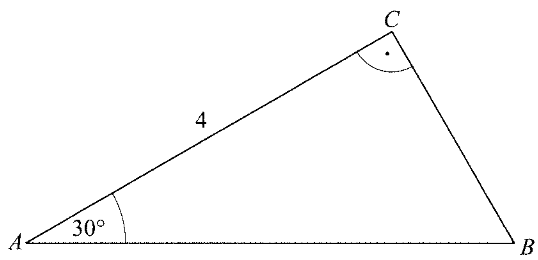
A. $\frac{\pi}{3}$ **B.** π **C.** $\sqrt{3}\pi$ **D.** 3π

Zadanie 11.93. [matura, czerwiec 2017, zad. 22. (1 pkt)]

Pole trójkąta prostokątnego ABC, przedstawionego na rysunku, jest równe

A. $\frac{32\sqrt{3}}{6}$ **B.** $\frac{16\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$



Zadanie 11.94. [matura, czerwiec 2017, zad. 32. (4 pkt)]

Ramię trapezu równoramiennego $ABCD$ ma długość $\sqrt{26}$. Przekątne w tym trapezie są prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je w stosunku 2 : 3. Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 11.95. [matura, sierpień 2017, zad. 9. (1 pkt)]

Linę o długości 100 metrów rozcięto na trzy części, których długości pozostają w stosunku 3 : 4 : 5. Stąd wynika, że najdłuższa z tych części ma długość

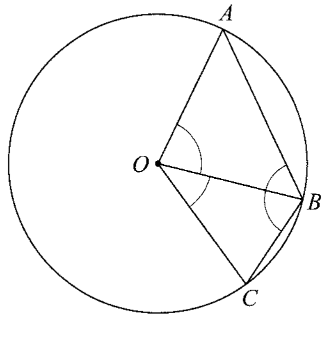
A. $41\frac{2}{3}$ metra. **B.** $33\frac{1}{3}$ metra. **C.** 60 metrów. **D.** 25 metrów.

Zadanie 11.96. [matura, sierpień 2017, zad. 14. (1 pkt)]

Na okręgu o środku w punkcie O leżą punkty A, B i C (zobacz rysunek). Kąt ABC ma miarę 121°, a kąt BOC ma miarę 40°.

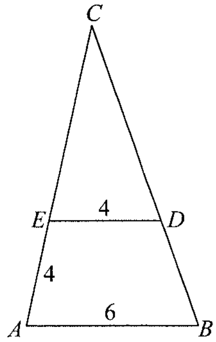
Kąt AOB ma miarę

A. 59° **B.** 50°
C. 81° **D.** 78°



Zadanie 11.97. [matura, sierpień 2017, zad. 15. (1 pkt)]

W trójkącie ABC punkt D leży na boku BC, a punkt E leży na boku AC. Odcinek DE jest równoległy do boku AB, a ponadto $|AE| = |DE| = 4$, $|AB| = 6$ (zobacz rysunek).



Odcinek CE ma długość

A. $\frac{16}{3}$ **B.** $\frac{8}{3}$

C. 8 **D.** 6

Zadanie 11.98. [matura, sierpień 2017, zad. 16. (1 pkt)]

Dany jest trójkąt równoboczny, którego pole jest równe $6\sqrt{3}$. Bok tego trójkąta ma długość

A. $3\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{6}$ **D.** $6\sqrt{2}$

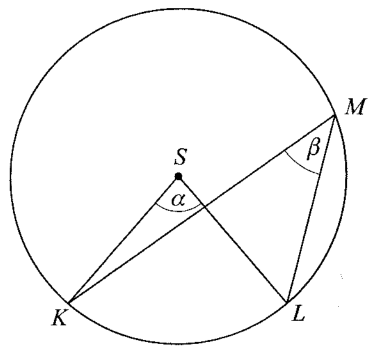
Zadanie 11.99. [matura, maj 2018, zad. 15. (1 pkt)]

Dany jest trójkąt o bokach długości: $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$. Trójkątem podobnym do tego trójkąta jest trójkąt, którego boki mają długości

A. 10, 15, 20 **B.** 20, 45, 80 **C.** $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ **D.** $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$

Zadanie 11.100. [matura, maj 2018, zad. 16. (1 pkt)]

Dany jest okrąg o środku S. Punkty K, L i M leżą na tym okręgu. Na łuku KL tego okręgu są oparte kąty KSL i KML (zobacz rysunek), których miary α i β spełniają warunek $\alpha + \beta = 111°$.

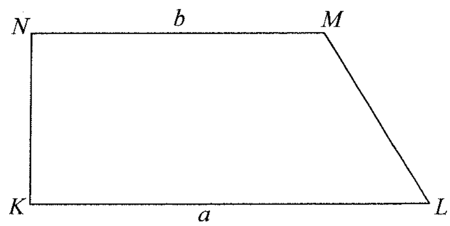


Wynika stąd, że

A. $\alpha = 74°$ **B.** $\alpha = 76°$ **C.** $\alpha = 70°$ **D.** $\alpha = 72°$

Zadanie 11.101. [matura, maj 2018, zad. 17. (1 pkt)]

Dany jest trapez prostokątny $KLMN$, którego podstawy mają długości $|KL| = a$, $|MN| = b$, $a > b$. Kąt KLM ma miarę 60°.



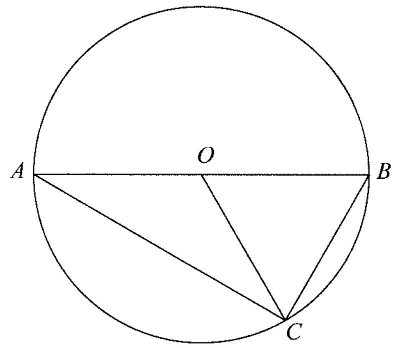
Długość ramienia LM tego trapezu jest równa

A. $a - b$ **B.** $2(a - b)$

C. $a + \frac{1}{2}b$ **D.** $\frac{a+b}{2}$

Zadanie 11.102. [matura, czerwiec 2018, zad. 16. (1 pkt)]

Odcinek AB jest średnicą okręgu o środku O i promieniu r. Na tym okręgu wybrano punkt C, taki, że $|OB| = |BC|$ (zobacz rysunek).

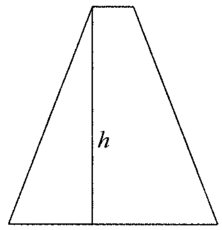


Pole trójkąta AOC jest równe

A. $\frac{1}{2}r^2$ **B.** $\frac{1}{4}r^2$ **C.** $\frac{\pi}{4}r^2$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$

Zadanie 11.103. [matura, czerwiec 2018, zad. 18. (1 pkt)]

Długości boków trapezu równoramiennego są równe 12, 13, 2, 13.



Wysokość h tego trapezu jest równa

A. 5 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12

Zadanie 11.104. [matura, czerwiec 2018, zad. 19. (1 pkt)]

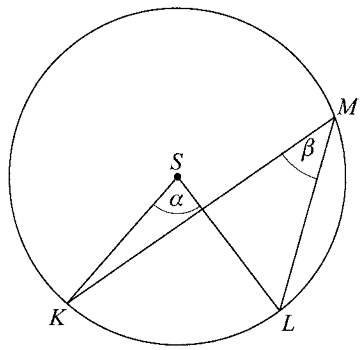
Miary kątów pewnego czworokąta pozostają w stosunku 2: 3: 3: 4. Wynika stąd, że najmniejszy kąt tego czworokąta ma miarę

A. 60° **B.** 50° **C.** 40° **D.** 30°

Zadanie 11.105. [matura, sierpień 2018, zad. 17. (1 pkt)]

Dany jest okrąg o środku S. Punkty K, L, M leżą na tym okręgu. Na łuku KL tego okręgu są oparte kąty KSL i KML (zobacz rysunek), których miary α i β spełniają warunek $\alpha + \beta = 114°$. Wynika stąd, że

A. $\beta = 19°$ **B.** $\beta = 38°$
C. $\beta = 57°$ **D.** $\beta = 76°$



Zadanie 11.106. [matura, sierpień 2018, zad. 18. (1 pkt)]

Różnica miar dwóch sąsiednich kątów wewnętrznych równoległoboku jest równa 80°. Kąt rozwarty tego równoległoboku ma miarę

A. 120° **B.** 125° **C.** 130° **D.** 135°

Zadanie 11.107. [matura, sierpień 2018, zad. 19. (1 pkt)]

Pole trójkąta o bokach długości 4 oraz 9 i kącie między nimi o mierze 60° jest równe

A. 18 **B.** 9 **C.** $18\sqrt{3}$ **D.** $9\sqrt{3}$

Zadanie 11.108. [matura, sierpień 2018, zad. 34. (4 pkt)]

W trójkącie prostokątnym ACB przyprostokątna AC ma długość 5, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2. Oblicz pole trójkąta ACB.

12. Stereometria

Zadanie 12.1. [matura, maj 2010, zad. 23. (1 pkt)]

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o wymiarach $5 \times 3 \times 4$ jest równe

A. 94 **B.** 60 **C.** 47 **D.** 20

Zadanie 12.2. [matura, maj 2010, zad. 24. (1 pkt)]

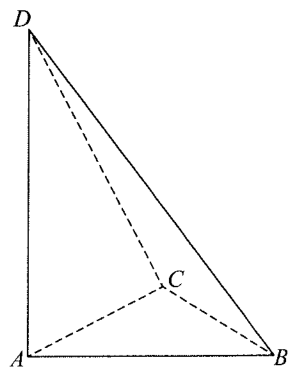
Ostrosłup ma 18 wierzchołków. Liczba wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa

A. 11 **B.** 18 **C.** 27 **D.** 34

Zadanie 12.3. [matura, maj 2010, zad. 32. (4 pkt)]

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt ABC. Krawędź AD jest wysokością ostrosłupa (zobacz rysunek).

Oblicz objętość ostrosłupa $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|AD| = 12$, $|BC| = 6$, $|BD| = |CD| = 13$.



Zadanie 12.4. [matura, sierpień 2010, zad. 23. (1 pkt)]

Objętość sześcianu jest równa 27 cm^3.

Jaka jest suma długości wszystkich krawędzi tego sześcianu?

A. 18 cm **B.** 36 cm **C.** 24 cm **D.** 12 cm

Zadanie 12.5. [matura, sierpień 2010, zad. 24. (1 pkt)]

Graniastosłup ma 15 krawędzi. Ile wierzchołków ma ten graniastosłup?

A. 10 **B.** 5 **C.** 15 **D.** 30

Zadanie 12.6. [matura, sierpień 2010, zad. 33. (4 pkt)]

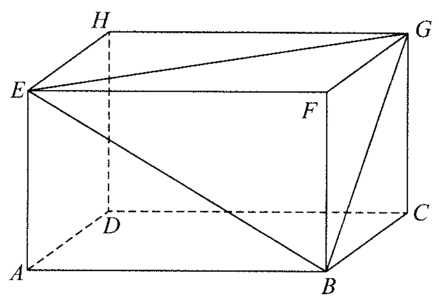
Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$ o podstawach ABC i DEF i krawędziach bocznych AD, BE i CF. Oblicz pole trójkąta ABF wiedząc, że $|AB| = 10$ i $|CF| = 11$. Narysuj ten graniastosłup i zaznacz na nim trójkąt ABF.

Zadanie 12.7. [matura, maj 2011, zad. 15. (1 pkt)]

W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ mamy: $|AB| = 5$, $|AD| = 4$, $|AE| = 3$. Który z odcinków AB, BG, GE, EB jest najdłuższy?

A. AB **B.** BG

C. GE **D.** EB



Zadanie 12.8. [matura, maj 2011, zad. 20. (1 pkt)]

Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 54. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa

A. $\sqrt{6}$ **B.** 3 **C.** 9 **D.** $3\sqrt{3}$

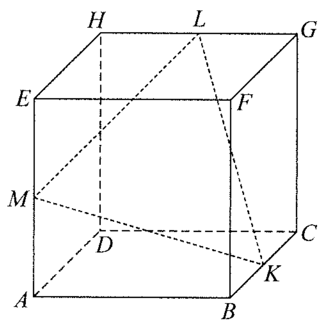
Zadanie 12.9. [matura, maj 2011, zad. 21. (1 pkt)]

Objętość stożka o wysokości 8 i średnicy podstawy 12 jest równa

A. 124π **B.** 96π **C.** 64π **D.** 32π

Zadanie 12.10. [matura, maj 2011, zad. 33. (4 pkt)]

Punkty K, L i M są środkami krawędzi BC, GH i AE sześcianu $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 1 (zobacz rysunek). Oblicz pole trójkąta KLM.



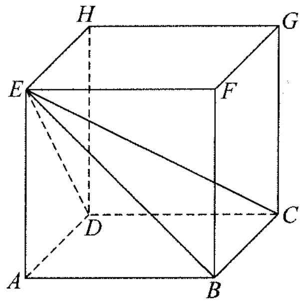
Zadanie 12.11. [matura, czerwiec 2011, zad. 20. (1 pkt)]

Stożek powstał w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 6 i 13 wokół krótszej przyprostokątnej. Promień podstawy tego stożka jest równy

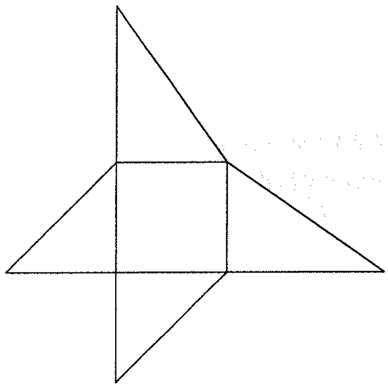
A. 6 **B.** 13 **C.** 6,6 **D.** 3

Zadanie 12.12. [matura, czerwiec 2011, zad. 21. (1 pkt)]

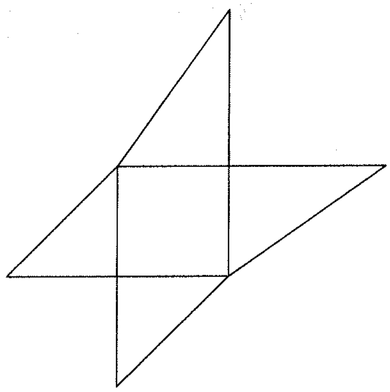
Dany jest sześcian $ABCDEFGH$. Siatką ostrosłupa czworokątnego $ABCDE$ jest



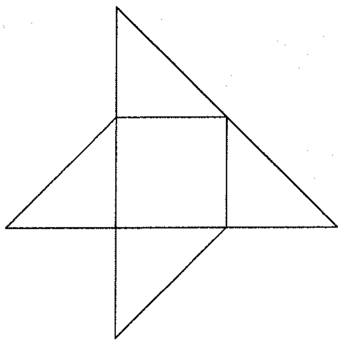
A.



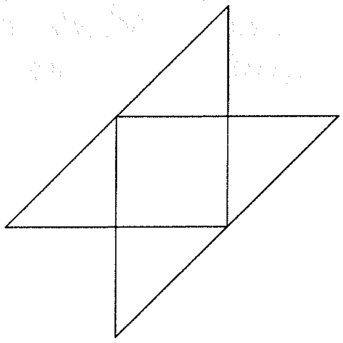
B.



C.



D.

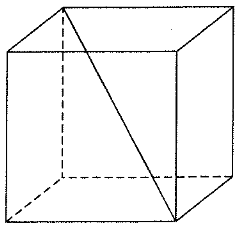


Zadanie 12.13. [matura, czerwiec 2011, zad. 32. (4 pkt)]

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest romb $ABCD$ o boku długości 4. Kąt ABC rombu ma miarę $120°$, $|AS| = |CS| = 10$ i $|BS| = |DS|$. Oblicz sinus kąta nachylenia krawędzi BS do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

Zadanie 12.14. [matura, sierpień 2011, zad. 17. (1 pkt)]

Krawędź sześcianu ma długość 9. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa:



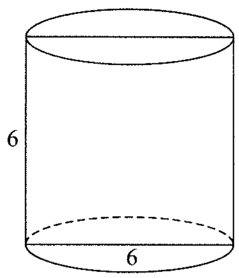
A. $\sqrt[3]{9}$ **B.** $9\sqrt{2}$

C. $9\sqrt{3}$ **D.** $9 + 9\sqrt{2}$

Zadanie 12.15. [matura, sierpień 2011, zad. 20. (1 pkt)]

Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku długości 6. Objętość tego walca jest równa:

A. 108π **B.** 54π
C. 36π **D.** 27π



Zadanie 12.16. [matura, sierpień 2011, zad. 22. (1 pkt)]

Kula ma objętość $V = 288\pi$. Promień r tej kuli jest równy

A. 6 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 12

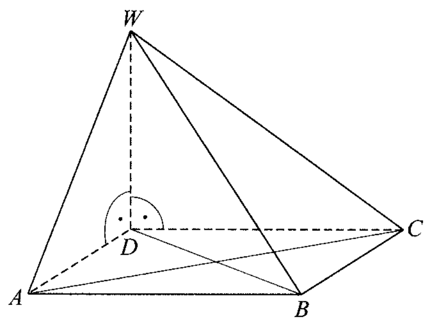
Zadanie 12.17. [matura, sierpień 2011, zad. 23. (1 pkt)]

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym wszystkie krawędzie są tej samej długości. Suma długości wszystkich krawędzi jest równa 90. Wtedy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe

A. 300 **B.** $300\sqrt{3}$ **C.** $300 + 50\sqrt{3}$ **D.** $300 + 25\sqrt{3}$

Zadanie 12.18. [matura, sierpień 2011, zad. 33. (4 pkt)]

Podstawą ostrosłupa $ABCDW$ jest prostokąt $ABCD$. Krawędź boczna DW jest wysokością tego ostrosłupa. Krawędzie boczne AW, BW i CW mają następujące długości: $|AW| = 6$, $|BW| = 9$, $|CW| = 7$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Zadanie 12.19. [matura, maj 2012, zad. 19. (1 pkt)]

Pole powierzchni jednej ściany sześcianu jest równe 4. Objętość tego sześcianu jest równa

A. 6 **B.** 8 **C.** 24 **D.** 64

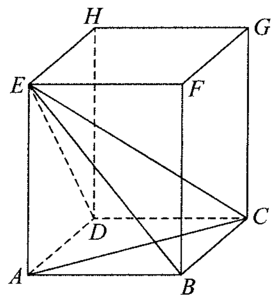
Zadanie 12.20. [matura, maj 2012, zad. 20. (1 pkt)]

Tworząca stożka ma długość 4 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Wysokość tego stożka jest równa

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 16π **C.** $4\sqrt{2}$ **D.** 8π

Zadanie 12.21. [matura, maj 2012, zad. 33. (4 pkt)]

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDEFGH$ przekątna AC podstawy ma długość 4. Kąt ACE jest równy 60°. Oblicz objętość ostrosłupa $ABCDE$ przedstawionego na poniższym rysunku.



Zadanie 12.22. [matura, czerwiec 2012, zad. 22. (1 pkt)]

Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 4 i 6 obracamy wokół dłuższej przyprostokątnej. Objętość powstałego stożka jest równa

A. 96π **B.** 48π **C.** 32π **D.** 8π

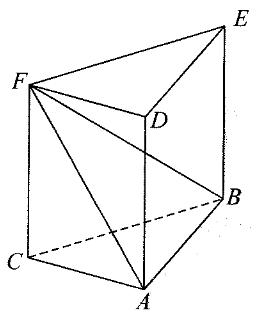
Zadanie 12.23. [matura, czerwiec 2012, zad. 24. (1 pkt)]

Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku a. Jeżeli r oznacza promień podstawy walca, h oznacza wysokość walca, to

A. $r + h = a$ **B.** $h - r = \frac{a}{2}$ **C.** $r - h = \frac{a}{2}$ **D.** $r^2 + h^2 = a^2$

Zadanie 12.24. [matura, czerwiec 2012, zad. 34. (4 pkt)]

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$ o podstawach ABC i DEF i krawędziach bocznych AD, BE i CF (zobacz rysunek). Długość krawędzi podstawy AB jest równa 8, a pole trójkąta ABF jest równe 52. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



Zadanie 12.25. [matura, sierpień 2012, zad. 22. (1 pkt)]

Objętość sześcianu jest równa 64. Pole powierzchni całkowitej tego sześcianu jest równe

A. 512 **B.** 384 **C.** 96 **D.** 16

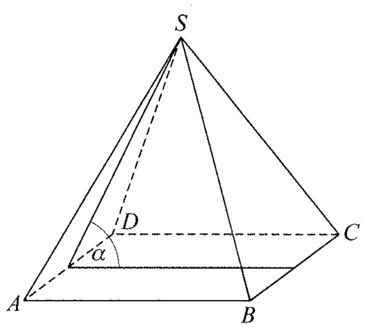
Zadanie 12.26. [matura, sierpień 2012, zad. 23. (1 pkt)]

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku a. Objętość tego stożka wyraża się wzorem

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi a^3$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{8}\pi a^3$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{12}\pi a^3$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{24}\pi a^3$

Zadanie 12.27. [matura, sierpień 2012, zad. 33. (4 pkt)]

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S trójkąt ACS jest równoboczny i ma bok długości 8. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa (zobacz rysunek).



Zadanie 12.28. [matura, maj 2013, zad. 20. (1 pkt)]

Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa jest o 10 większa od liczby wszystkich jego ścian bocznych. Stąd wynika, że podstawą tego graniastosłupa jest

A. czworokąt **B.** pięciokąt **C.** sześciokąt **D.** dziesięciokąt

Zadanie 12.29. [matura, maj 2013, zad. 21. (1 pkt)]

Pole powierzchni bocznej stożka o wysokości 4 i promieniu podstawy 3 jest równe

A. 9π **B.** 12π **C.** 15π **D.** 16π

Zadanie 12.30. [matura, maj 2013, zad. 25. (1 pkt)]

Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości 7 jest równa $28\sqrt{3}$. Długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa jest równa

A. 2 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 16

Zadanie 12.31. [matura, maj 2013, zad. 33. (4 pkt)]

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 100 cm^2, a jego pole powierzchni bocznej jest równe 260 cm^2. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 12.32. [matura, czerwiec 2013, zad. 15. (1 pkt)]

Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 12. Suma długości wszystkich krawędzi tego sześcianu jest równa

A. $12\sqrt{2}$ **B.** $8\sqrt{2}$ **C.** $6\sqrt{2}$ **D.** $3\sqrt{2}$

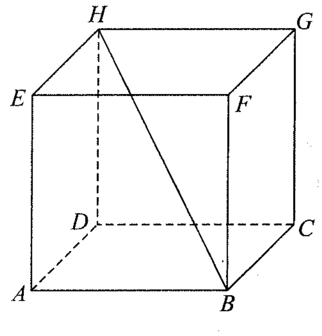
Zadanie 12.33. [matura, czerwiec 2013, zad. 23. (1 pkt)]

Objętość stożka o wysokości h i promieniu podstawy trzy razy mniejszym od wysokości jest równa

A. $\frac{1}{9}\pi h^2$ **B.** $\frac{1}{27}\pi h^2$ **C.** $\frac{1}{9}\pi h^3$ **D.** $\frac{1}{27}\pi h^3$

Zadanie 12.34. [matura, czerwiec 2013, zad. 32. (4 pkt)]

Podstawą graniastosłupa $ABCDEFGH$ jest prostokąt $ABCD$ (zobacz rysunek), którego krótszy bok ma długość 3. Przekątna prostokąta $ABCD$ tworzy z jego dłuższym bokiem kąt $30°$. Przekątna HB graniastosłupa tworzy z płaszczyzną jego podstawy kąt $60°$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



Zadanie 12.35. [matura, sierpień 2013, zad. 19. (1 pkt)]

Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa jest równa 24.
Wtedy liczba wszystkich jego wierzchołków jest równa

A. 6 **B.** 8 **C.** 12 **D.** 16

Zadanie 12.36. [matura, sierpień 2013, zad. 20. (1 pkt)]

Objętość walca o wysokości 8 jest równa 72π. Promień podstawy tego walca jest równy

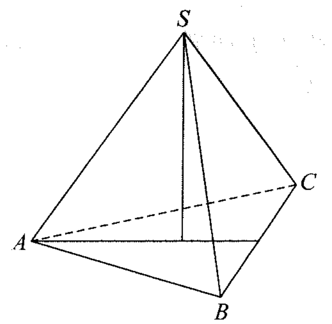
A. 9 **B.** 8 **C.**6 **D.** 3

Zadanie 12.37. [matura, sierpień 2013, zad. 31. (2 pkt)]

Długość krawędzi sześcianu jest o 2 krótsza od długości jego przekątnej. Oblicz długość przekątnej tego sześcianu.

Zadanie 12.38. [matura, sierpień 2013, zad. 34. (4 pkt)]

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ (tak jak na rysunku) jest równa 72, a promień okręgu wpisanego w podstawę ABC tego ostrosłupa jest równy 2. Oblicz tangens kąta między wysokością tego ostrosłupa i jego ścianą boczną.



Zadanie 12.39. [matura, maj 2014, zad. 19. (1 pkt)]

Jeżeli ostrosłup ma 10 krawędzi, to liczba ścian bocznych jest równa

A. 5 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 10

Zadanie 12.40. [matura, maj 2014, zad. 20. (1 pkt)]

Stożek i walec mają takie same podstawy i równe pola powierzchni bocznych. Wtedy tworząca stożka jest

A. sześć razy dłuższa od wysokości walca. **B.** trzy razy dłuższa od wysokości walca.
C. dwa razy dłuższa od wysokości walca. **D.** równa wysokości walca.

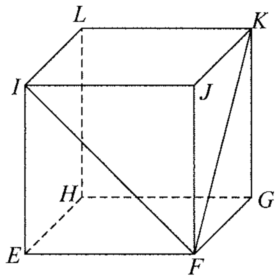
Zadanie 12.41. [matura, maj 2014, zad. 32. (4 pkt)]

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe 198. Stosunki długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka prostopadłościanu to 1: 2: 3. Oblicz długość przekątnej tego prostopadłościanu.

Zadanie 12.42. [matura, czerwiec 2014, zad. 16. (1 pkt)]

W sześcianie $EFGHIJKL$ poprowadzono z wierzchołka F dwie przekątne sąsiednich ścian, FI oraz FK (zobacz rysunek). Miara kąta IFK jest równa

A. 30° **B.** 45°
C. 60° **D.** 90°



Zadanie 12.43. [matura, czerwiec 2014, zad. 24. (1 pkt)]

Objętość walca o promieniu podstawy 4 jest równa 96π. Pole powierzchni bocznej tego walca jest równe

A. 16π **B.** 24π **C.** 32π **D.** 48π

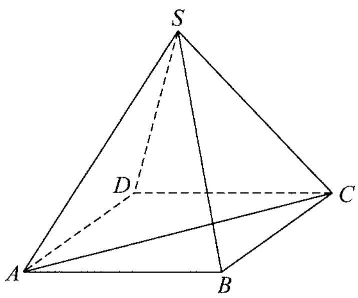
Zadanie 12.44. [matura, czerwiec 2014, zad. 25. (1 pkt)]

Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 432, a krawędź podstawy tego ostrosłupa ma długość 12. Wysokość tego ostrosłupa jest równa

A. 3 **B.** 9 **C.** 27 **D.** 108

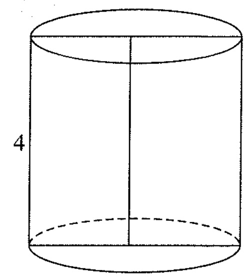
Zadanie 12.45. [matura, czerwiec 2014, zad. 32. (4 pkt)]

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ (zobacz rysunek) przekątna AC podstawy ma długość $4\sqrt{2}$. Kąt ASC między przeciwległymi krawędziami bocznymi ostrosłupa ma miarę 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Zadanie 12.46. [matura, sierpień 2014, zad. 22. (1 pkt)]

Pole powierzchni całkowitej walca, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o boku długości 4, jest równe



A. 256π **B.** 128π
C. 48π **D.** 24π

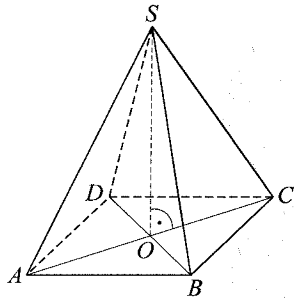
Zadanie 12.47. [matura, sierpień 2014, zad. 23. (1 pkt)]

Ostrosłup i graniastosłup mają równe pola podstaw i równe wysokości. Objętość ostrosłupa jest równa $81\sqrt{3}$. Objętość graniastosłupa jest równa

A. 27 **B.** $27\sqrt{3}$ **C.** 243 **D.** $243\sqrt{3}$

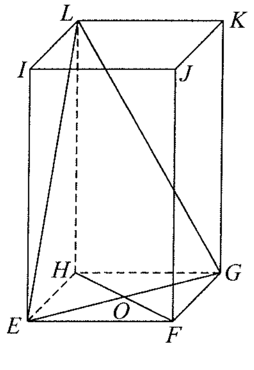
Zadanie 12.48. [matura, sierpień 2014, zad. 33. (4 pkt)]

Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest kwadrat. Wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa jest równa 22, a tangens kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy jest równy $\frac{4\sqrt{6}}{5}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Zadanie 12.49. [matura, maj 2015, zad. 21. (1 pkt)]

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym *EFGHIJKL* wierzchołki *E*, *G*, *L* połączono odcinkami (tak jak na rysunku).



Wskaż kąt między wysokością *OL* trójkąta *EGL* i płaszczyzną podstawy tego graniastosłupa.

A. $\sphericalangle HOL$ **B.** $\sphericalangle OGL$ **C.** $\sphericalangle HLO$ **D.** $\sphericalangle OHL$

Zadanie 12.50. [matura, maj 2015, zad. 22. (1 pkt)]

Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoboczny o boku długości 6. Objętość tego stożka jest równa

A. $27\pi\sqrt{3}$ **B.** $9\pi\sqrt{3}$ **C.** 18π **D.** 6π

Zadanie 12.51. [matura, maj 2015, zad. 23. (1 pkt)]

Każda krawędź graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość równą 8. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe

A. $\frac{8^2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+3\right)$ **B.** $8^2 \cdot \sqrt{3}$ **C.** $\frac{8^2\sqrt{6}}{3}$ **D.** $8^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+3\right)$

Zadanie 12.52. [matura, maj 2015, zad. 32. (4 pkt)]

Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 16. Przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy $\frac{3}{5}$.

Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Zadanie 12.53. [matura, maj 2015, zad. 22 swe. (1 pkt)]

Przekątna ściany sześcianu ma długość 2. Pole powierzchni całkowitej tego sześcianu jest równe

A. 24 **B.** $12\sqrt{2}$ **C.** 12 **D.** $16\sqrt{2}$

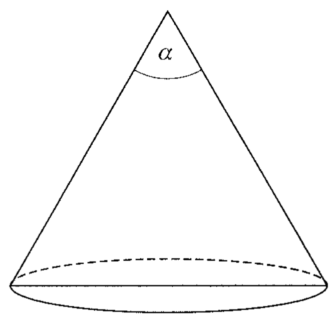
Zadanie 12.54. [matura, maj 2015, zad. 23 swe. (1 pkt)]

Kula o promieniu 5 cm i stożek o promieniu podstawy 10 cm mają równe objętości. Wysokość stożka jest równa

A. $\frac{25}{\pi}$ cm **B.** 10 cm **C.** $\frac{10}{\pi}$ cm **D.** 5 cm

Zadanie 12.55. [matura, czerwiec 2015, zad. 19. (1 pkt)]

Tworząca stożka o promieniu podstawy 3 ma długość 6 (zobacz rysunek).



Kąt α rozwarcia tego stożka jest równy

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 90°

Zadanie 12.56. [matura, czerwiec 2015, zad. 20. (1 pkt)]

Graniastosłup o podstawie ośmiokąta ma dokładnie

A. 16 wierzchołków. **B.** 9 wierzchołków. **C.** 16 krawędzi. **D.** 8 krawędzi.

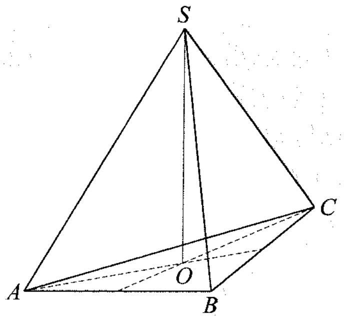
Zadanie 12.57. [matura, czerwiec 2015, zad. 21. (1 pkt)]

W ostrosłupie czworokątnym, w którym wszystkie krawędzie mają tę samą długość, kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy ma miarę.

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $75°$

Zadanie 12.58. [matura, czerwiec 2015, zad. 34. (5 pkt)]

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ jest równa $27\sqrt{3}$. Długość krawędzi AB podstawy ostrosłupa jest równa 6 (zobacz rysunek). Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.



Zadanie 12.59. [matura, czerwiec 2015, zad. 20 swe. (1 pkt)]

Dany jest stożek, którego przekrojem osiowym jest trójkąt o bokach długości: 6, 10 i 10. Stosunek pola powierzchni bocznej stożka do pola jego podstawy jest równy

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{5}{3}$ **D.** $\frac{10}{3}$

Zadanie 12.60. [matura, czerwiec 2015, zad. 21 swe. (1 pkt)]

Każda krawędź ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość równą 8. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe

A. $16\sqrt{3}$ **B.** $32\sqrt{3}$ **C.** $48\sqrt{3}$ **D.** $64\sqrt{3}$

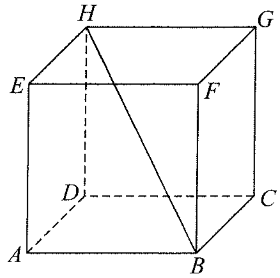
Zadanie 12.61. [matura, czerwiec 2015, zad. 22 swe. (1 pkt)]

Promień kuli o objętości $V = 288\pi$ jest równy

A. 18 **B.** 9 **C.** 8 **D.** 6

Zadanie 12.62. [matura, czerwiec 2015, zad. 33 swe. (4 pkt)]

Wysokość prostopadłościanu $ABCDEFGH$ jest równa 1, a długość przekątnej BH jest równa sumie długości krawędzi AB i BC. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.



Zadanie 12.63. [matura, sierpień 2015, zad. 22. (1 pkt)]

Dany jest trójkąt prostokątny o długościach boków a, b, c, gdzie $a < b < c$. Obracając ten trójkąt wokół prostej zawierającej dłuższą przyprostokątną o kąt 360° otrzymujemy bryłę, której objętość jest równa

A. $V = \frac{1}{3}a^2b\pi$ **B.** $V = a^2b\pi$ **C.** $V = \frac{1}{3}b^2a\pi$ **D.** $V = a^2\pi + ac\pi$

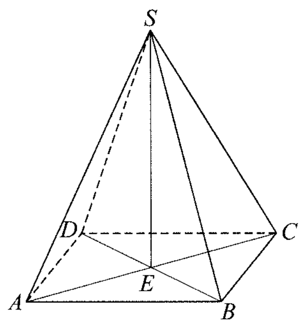
Zadanie 12.64. [matura, sierpień 2015, zad. 23. (1 pkt)]

Przekątna przekroju osiowego walca, którego promień podstawy jest równy 4 i wysokość jest równa 6 ma długość

A. $\sqrt{10}$ **B.** $\sqrt{20}$ **C.** $\sqrt{52}$ **D.** 10

Zadanie 12.65. [matura, sierpień 2015, zad. 33. (4 pkt)]

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt, którego boki pozostają w stosunku 3 : 4, a pole jest równe 192 (zobacz rysunek). Punkt E jest wyznaczony przez przecinające się przekątne podstawy, a odcinek SE jest wysokością ostrosłupa. Każda krawędź boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Oblicz objętość ostrosłupa.



Zadanie 12.66. [matura, sierpień 2015, zad. 20 swe. (1 pkt)]

Każda krawędź ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 9 (ostrosłup taki jest nazywany czworościanem foremnym). Wysokość tego ostrosłupa jest równa

A. $3\sqrt{6}$ **B.** $3\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{6}$ **D.** $3\sqrt{2}$

Zadanie 12.67. [matura, sierpień 2015, zad. 22 swe. (1 pkt)]

Pole podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 36, a miara kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy jest równa 30°. Wysokość tego graniastosłupa jest równa

A. $3\sqrt{2}$ **B.** $6\sqrt{2}$ **C.** $2\sqrt{6}$ **D.** $3\sqrt{6}$

Zadanie 12.68. [matura, sierpień 2015, zad. 34 swe. (5 pkt)]

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ściana boczna o polu równym 10 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

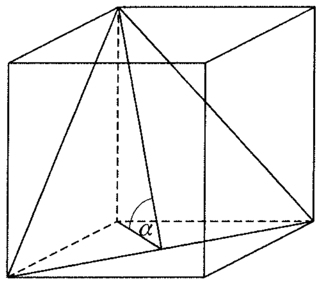
Zadanie 12.69. [matura, maj 2016, zad. 23. (1 pkt)]

Kąt rozwarcia stożka ma miarę 120°, a tworząca tego stożka ma długość 4. Objętość tego stożka jest równa.

A. 36π **B.** 18π **C.** 24π **D.** 8π

Zadanie 12.70. [matura, maj 2016, zad. 24. (1 pkt)]

Przekątna podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy dłuższa od wysokości graniastosłupa. Graniastosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i jeden wierzchołek drugiej podstawy (patrz rysunek).



Płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą graniastosłupa kąt α o mierze

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 75°

Zadanie 12.71. [matura, maj 2016, zad. 33. (5 pkt)]

Podstawą ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC. Wysokość SO tego ostrosłupa jest równa wysokości jego podstawy. Objętość tego ostrosłupa jest równa 27. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa $ABCS$ oraz cosinus kąta, jaki tworzą wysokość ściany bocznej i płaszczyzna podstawy ostrosłupa.

Zadanie 12.72. [matura, czerwiec 2016, zad. 20. (1 pkt)]

Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$. Wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi. Miara kąta ASC jest równa

A. 45° **B.** 30° **C.** 75° **D.** 90°

Zadanie 12.73. [matura, czerwiec 2016, zad. 32. (4 pkt)]

Dany jest stożek o objętości 8π, w którym stosunek wysokości do promienia podstawy jest równy 3 : 8. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.

Zadanie 12.74. [matura, sierpień 2016, zad. 15. (1 pkt)]

Kąt rozwarcia stożka ma miarę 120°, a tworząca tego stożka ma długość 6. Promień podstawy stożka jest równy

A. 3 **B.** 6 **C.** $3\sqrt{3}$ **D.** $6\sqrt{3}$

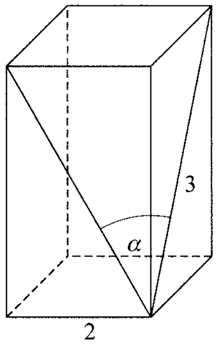
Zadanie 12.75. [matura, sierpień 2016, zad. 17. (1 pkt)]

Dany jest walec, w którym promień podstawy jest równy r, a wysokość walca jest od tego promienia dwa razy większa. Objętość tego walca jest równa

A. $2\pi r^3$ **B.** $4\pi r^3$ **C.** $\pi r^2(r+2)$ **D.** $\pi r^2(r-2)$

Zadanie 12.76. [matura, sierpień 2016, zad. 21. (1 pkt)]

Podstawą graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest kwadrat o boku długości 2, a przekątna ściany bocznej ma długość 3 (zobacz rysunek). Kąt, jaki tworzą przekątne ścian bocznych tego graniastosłupa wychodzące z jednego wierzchołka, ma miarę α.



Wtedy wartość $\sin\frac{\alpha}{2}$ jest równa

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{7}}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$ **D.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$

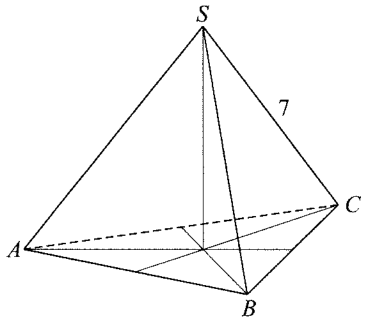
Zadanie 12.77. [matura, sierpień 2016, zad. 22. (1 pkt)]

Różnica liczby krawędzi i liczby wierzchołków ostrosłupa jest równa 11. Podstawą tego ostrosłupa jest

A. dziesięciokąt. **B.** jedenastokąt. **C.** dwunastokąt. **D.** trzynastokąt.

Zadanie 12.78. [matura, sierpień 2016, zad. 33. (5 pkt)]

Trójkąt równoboczny ABC jest podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$, w którym ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°, a krawędź boczna ma długość 7 (zobacz rysunek). Oblicz objętość tego ostrosłupa.



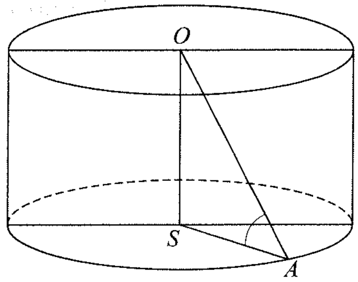
Zadanie 12.79. [matura, maj 2017, zad. 21. (1 pkt)]

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym wysokość jest 3 razy dłuższa od krawędzi podstawy, jest równe 140. Zatem krawędź podstawy tego graniastosłupa jest równa

A. $\sqrt{10}$ **B.** $3\sqrt{10}$ **C.** $\sqrt{42}$ **D.** $3\sqrt{42}$

Zadanie 12.80. [matura, maj 2017, zad. 22. (1 pkt)]

Promień AS podstawy walca jest równy wysokości OS tego walca. Sinus kąta OAS (zobacz rysunek) jest równy



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Zadanie 12.81. [matura, maj 2017, zad. 23. (1 pkt)]

Dany jest stożek o wysokości 4 i średnicy podstawy 12. Objętość tego stożka jest równa

A. 576π **B.** 192π **C.** 144π **D.** 48π

Zadanie 12.82. [matura, maj 2017, zad. 34. (4 pkt)]

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość ściany bocznej prostopadła do krawędzi podstawy ostrosłupa jest równa $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, a pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe $\frac{15\sqrt{3}}{4}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 12.83. [matura, czerwiec 2017, zad. 23. (1 pkt)]

Długość przekątnej sześcianu jest równa 6. Stąd wynika, że pole powierzchni całkowitej tego sześcianu jest równe

A. 72 **B.** 48 **C.** 152 **D.** 108

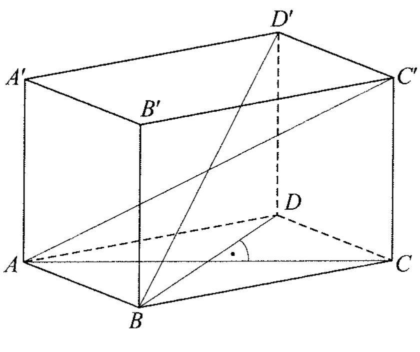
Zadanie 12.84. [matura, czerwiec 2017, zad. 24. (1 pkt)]

Pole powierzchni bocznej walca jest równe 16π, a promień jego podstawy ma długość 2. Wysokość tego walca jest równa

A. 4 **B.** 8 **C.** 4π **D.** 8π

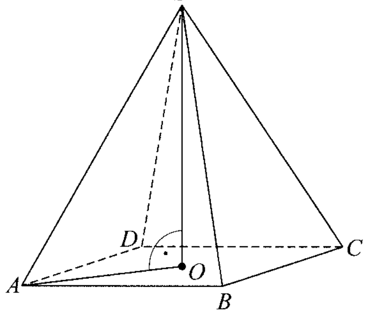
Zadanie 12.85. [matura, czerwiec 2017, zad. 34. (5 pkt)]

Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDA'B'C'D'$ jest romb $ABCD$. Przekątna AC' tego graniastosłupa ma długość 8 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°, a przekątna BD' jest nachylona do tej płaszczyzny pod kątem 45°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



Zadanie 12.86. [matura, sierpień 2017, zad. 18. (1 pkt)]

Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$.



Kąt nachylenia krawędzi bocznej SA ostrosłupa do płaszczyzny podstawy $ABCD$ to

A. $\sphericalangle SAO$ **B.** $\sphericalangle SAB$ **C.** $\sphericalangle SOA$ **D.** $\sphericalangle ASB$

Zadanie 12.87. [matura, sierpień 2017, zad. 19. (1 pkt)]

Graniastosłup ma 14 wierzchołków. Liczba wszystkich krawędzi tego graniastosłupa jest równa

A. 14 **B.** 21 **C.** 28 **D.** 26

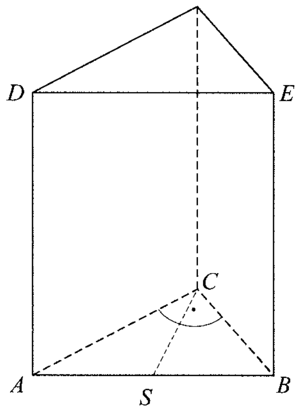
Zadanie 12.88. [matura, sierpień 2017, zad. 22. (1 pkt)]

Dany jest stożek o wysokości 6 i tworzącej $3\sqrt{5}$. Objętość tego stożka jest równa

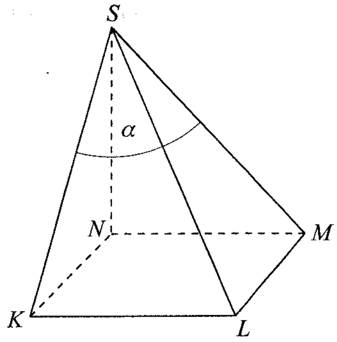
A. 36π **B.** 18π **C.** 108π **D.** 54π

Zadanie 12.89. [matura, sierpień 2017, zad. 34. (5 pkt)]

Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDEF$ jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$ (zobacz rysunek). Stosunek długości przyprostokątnej AC tego trójkąta do długości przyprostokątnej BC jest równy 4: 3. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, a długość odcinka SC jest równa 5. Pole ściany bocznej $BEFC$ graniastosłupa jest równe 48. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



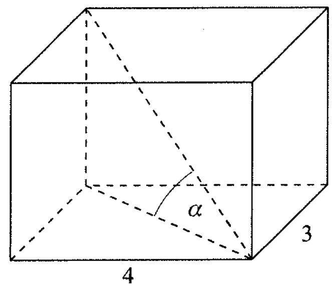
Zadanie 12.90. [matura, maj 2018, zad. 20. (1 pkt)]



Podstawą ostrosłupa jest kwadrat $KLMN$ o boku długości 4. Wysokością tego ostrosłupa jest krawędź NS, a jej długość też jest równa 4 (zobacz rysunek).
Kąt α, jaki tworzą krawędzie KS i MS, spełnia warunek

A. $\alpha = 45°$ **B.** $45° < \alpha < 60°$
C. $\alpha > 60°$ **D.** $\alpha = 60°$.

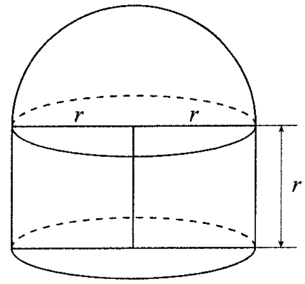
Zadanie 12.91. [matura, maj 2018, zad. 21. (1 pkt)]



Podstawą graniastosłupa prostego jest prostokąt o bokach długości 3 i 4. Kąt α, jaki przekątna tego graniastosłupa tworzy z jego podstawą, jest równy 45° (zobacz rysunek).
Wysokość graniastosłupa jest równa

A. 5 **B.** $3\sqrt{2}$
C. $5\sqrt{2}$ **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

Zadanie 12.92. [matura, maj 2018, zad. 22. (1 pkt)]

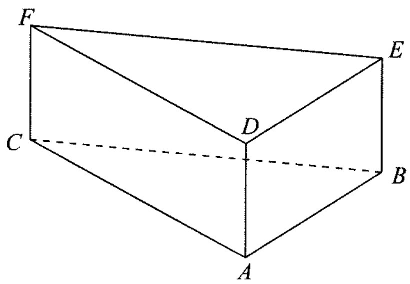


Na rysunku przedstawiono bryłę zbudowaną z walca i półkuli. Wysokość walca jest równa r i jest taka sama jak promień półkuli oraz taka sama jak promień podstawy walca.
Objętość tej bryły jest równa

A. $\frac{5}{3}\pi r^3$ **B.** $\frac{4}{3}\pi r^3$
C. $\frac{2}{3}\pi r^3$ **D.** $\frac{1}{3}\pi r^3$

Zadanie 12.93. [matura, maj 2018, zad. 34. (4 pkt)]

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny (zobacz rysunek). Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe $45\sqrt{3}$. Pole podstawy graniastosłupa jest równe polu jednej ściany bocznej. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



Zadanie 12.94. [matura, czerwiec 2018, zad. 20. (1 pkt)]

Dany jest walec, w którym wysokość jest równa promieniowi podstawy. Objętość tego walca jest równa 27π. Wynika stąd, że promień podstawy tego walca jest równy

A. 9 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 2.

Zadanie 12.95. [matura, czerwiec 2018, zad. 21. (1 pkt)]

Stożek o promieniu podstawy r i kula o tym samym promieniu mają równe objętości. Tangens kąta między tworzącą i płaszczyzną podstawy tego stożka jest równy

A. $\frac{4}{3}$ **B.** 12 **C.** $\sqrt{17}$ **D.** 4

Zadanie 12.96. [matura, czerwiec 2018, zad. 23. (1 pkt)]

Gdy dodamy liczbę wszystkich krawędzi pewnego graniastosłupa do liczby wszystkich jego wierzchołków, to otrzymamy w wyniku 15. Liczba wszystkich krawędzi tego graniastosłupa jest równa

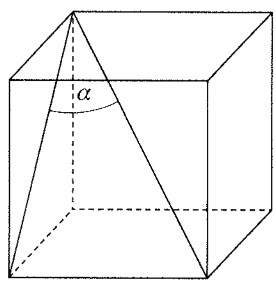
A. 9 **B.** 7 **C.** 6 **D.** 5

Zadanie 12.97. [matura, czerwiec 2018, zad. 32. (5 pkt)]

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości $H = 16$. Cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Zadanie 12.98. [matura, sierpień 2018, zad. 22. (1 pkt)]

Jeżeli α oznacza miarę kąta między przekątną sześcianu a przekątną ściany bocznej tego sześcianu (zobacz rysunek), to



A. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

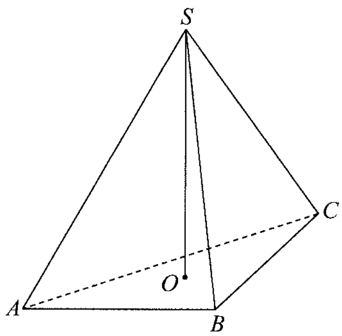
Zadanie 12.99. [matura, sierpień 2018, zad. 23. (1 pkt)]

Przekrój osiowy walca jest kwadratem o przekątnej $10\sqrt{2}$. Pole powierzchni bocznej tego walca jest równe

A. 50π **B.** 100π **C.** 200π **D.** 250π

Zadanie 12.100. [matura, sierpień 2018, zad. 32. (5 pkt)]

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ krawędź podstawy ma długość a. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest dwa razy większe od pola jego podstawy. Oblicz cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa od płaszczyzny jego podstawy.



13. Statystyka

Zadanie 13.1. [matura, maj 2010, zad. 25. (1 pkt)]

Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb x, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 4, 1, 5 jest równa 3. Wtedy

A. $x = 2$ **B.** $x = 3$ **C.** $x = 4$ **D.** $x = 5$

Zadanie 13.2. [matura, maj 2011, zad. 23. (1 pkt)]

Uczniowie pewnej klasy zostali poproszeni o odpowiedź na pytanie: „Ile osób liczy twoja rodzina?" Wyniki przedstawiono w tabeli:

Liczba osób w rodzinie	Liczba uczniów
3	6
4	12
x	2

Średnia liczba osób w rodzinie dla uczniów tej klasy jest równa 4. Wtedy liczba x jest równa

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 7

Zadanie 13.3. [matura, czerwiec 2011, zad. 28. (2 pkt)]

Tabela przedstawia wyniki uzyskane na sprawdzianie przez uczniów klasy III.

Oceny	6	5	4	3	2	1
Liczba uczniów	1	2	6	5	4	2

Oblicz medianę i średnią arytmetyczną uzyskanych ocen.

Zadanie 13.4. [matura, sierpień 2011, zad. 18. (1 pkt)]

Średnia arytmetyczna sześciu liczb: 3, 1, 1, 0, x, 2 jest równa 2. Wtedy liczba x jest równa

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Zadanie 13.5. [matura, maj 2012, zad. 25. (1 pkt)]

Średnia arytmetyczna cen sześciu akcji na giełdzie jest równa 500 zł. Za pięć z tych akcji zapłacono 2300 zł. Cena szóstej akcji jest równa

A. 400 zł **B.** 500 zł **C.** 600 zł **D.** 700 zł

Zadanie 13.6. [matura, czerwiec 2012, zad. 20. (1 pkt)]

W kolejnych sześciu rzutach kostką otrzymano następujące wyniki: 6, 3, 1, 2, 5, 5. Mediana tych wyników jest równa

A. 3 **B.** 3,5 **C.** 4 **D.** 5

Zadanie 13.7. [matura, czerwiec 2012, zad. 26. (2 pkt)]

Średnia wieku w pewnej grupie studentów jest równa 23 lata. Średnia wieku tych studentów i ich opiekuna jest równa 24 lata. Opiekun ma 39 lat. Oblicz, ilu studentów jest w tej grupie.

Zadanie 13.8. [matura, sierpień 2012, zad. 24. (1 pkt)]

Pewna firma zatrudnia 6 osób. Dyrektor zarabia 8000 zł, a pensje pozostałych pracowników są równe: 2000 zł, 2800 zł, 3400 zł, 3600 zł, 4200 zł. Mediana zarobków tych 6 osób jest równa

A. 3400 zł **B.** 3500 zł **C.** 6000 zł **D.** 7000 zł

Zadanie 13.9. [matura, maj 2013, zad. 24. (1 pkt)]

Mediana uporządkowanego niemalejąco zestawu sześciu liczb: 1, 2, 3, x, 5, 8 jest równa 4. Wtedy

A. $x = 2$ **B.** $x = 3$ **C.** $x = 4$ **D.** $x = 5$

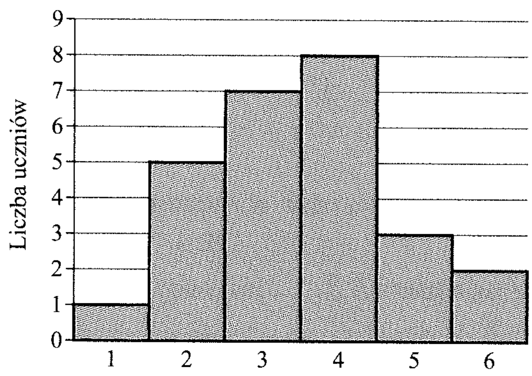
Zadanie 13.10. [matura, czerwiec 2013, zad. 22. (1 pkt)]

Wyniki sprawdzianu z matematyki są przedstawione na poniższym diagramie.

Średnia ocen uzyskanych przez uczniów z tego sprawdzianu jest równa

A. 2 **B.** 3

C. 3,5 **D.** 4



Zadanie 13.11. [matura, sierpień 2013, zad. 29. (2 pkt)]

W tabeli zestawiono oceny z matematyki uczniów klasy 3A na koniec semestru.

Oceny	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	0	4	9	13	x	1

Średnia arytmetyczna tych ocen jest równa 3,6. Oblicz liczbę x ocen bardzo dobrych (5) z matematyki wystawionych na koniec semestru w tej klasie.

Zadanie 13.12. [matura, maj 2014, zad. 25. (1 pkt)]

Mediana zestawu danych 2, 12, a, 10, 5, 3 jest równa 7. Wówczas

A. $a = 4$ **B.** $a = 6$ **C.** $a = 7$ **D.** $a = 9$

Zadanie 13.13. [matura, czerwiec 2014, zad. 15. (1 pkt)]

Średnia arytmetyczna liczby punktów uzyskanych na egzaminie przez studentów I grupy, liczącej 40 studentów, jest równa 30. Dwudziestu studentów tworzących II grupę otrzymało w sumie 1800 punktów. Zatem średni wynik z tego egzaminu, liczony łącznie dla wszystkich studentów z obu grup, jest równy

A. 20 pkt **B.** 30 pkt **C.** 50 pkt **D.** 60 pkt

Zadanie 13.14. [matura, sierpień 2014, zad. 25 swe. (1 pkt)]

Średnia arytmetyczna liczb: x, 13, 7, 5, 5, 3, 2, 11 jest równa 7. Mediana tego zestawu liczb jest równa

A. 6 **B.** 7 **C.** 10 **D.** 5

Zadanie 13.15. [matura, maj 2015, zad. 24. (1 pkt)]

Średnia arytmetyczna zestawu danych: 2, 4, 7, 8, 9 jest taka sama jak średnia arytmetyczna zestawu danych: 2, 4, 7, 8, 9, x. Wynika stąd, że

A. $x = 0$ **B.** $x = 3$ **C.** $x = 5$ **D.** $x = 6$

Zadanie 13.16. [matura, czerwiec 2015, zad. 23. (1 pkt)]

Średnia arytmetyczna zestawu danych: 2, 4, 7, 8, x jest równa n, natomiast średnia arytmetyczna zestawu danych: 2, 4, 7, 8, x, $2x$ jest równa $2n$. Wynika stąd, że

A. $x = 49$ **B.** $x = 21$ **C.** $x = 14$ **D.** $x = 7$

Zadanie 13.17. [matura, czerwiec 2015, zad. 23 swe. (1 pkt)]

Medianą zestawu danych 2, 3, 5, x, 1, 9 jest liczba 4. Wtedy x może być równe

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Zadanie 13.18. [matura, sierpień 2015, zad. 24 swe. (1 pkt)]

Medianą zestawu danych 9, 1, 4, x, 7, 9 jest liczba 8. Wtedy x może być równe

A. 8 **B.** 4 **C.** 7 **D.** 9

Zadanie 13.19. [matura, maj 2016, zad. 25. (1 pkt)]

Średnia arytmetyczna sześciu liczb naturalnych: 31, 16, 25, 29, 27, x, jest równa $\frac{x}{2}$. Mediana tych liczb jest równa

A. 26 **B.** 27 **C.** 28 **D.** 29

Zadanie 13.20. [matura, maj 2016, zad. 26. (2 pkt)]

W tabeli przedstawiono roczne przyrosty wysokości pewnej sosny w ciągu sześciu kolejnych lat.

kolejne lata	1	2	3	4	5	6
przyrost (w cm)	10	10	7	8	8	7

Oblicz średni roczny przyrost wysokości tej sosny w badanym okresie sześciu lat. Otrzymany wynik zaokrąglij do 1 cm. Oblicz błąd względny otrzymanego przybliżenia. Podaj ten błąd w procentach.

Zadanie 13.21. [matura, czerwiec 2016, zad. 22. (1 pkt)]

Średnia arytmetyczna czterech liczb: $x - 1$, $3x$, $5x + 1$ i $7x$ jest równa 72. Wynika stąd, że

A. $x = 9$ **B.** $x = 10$ **C.** $x = 17$ **D.** $x = 18$

Zadanie 13.22. [matura, sierpień 2016, zad. 23. (1 pkt)]

Jeżeli do zestawu czterech danych: 4, 7, 8, x dołączymy liczbę 2, to średnia arytmetyczna wzrośnie o 2. Zatem

A. $x = -51$ **B.** $x = -6$ **C.** $x = 10$ **D.** $x = 29$

Zadanie 13.23. [matura, maj 2017, zad. 24. (1 pkt)]

Średnia arytmetyczna ośmiu liczb: 3, 5, 7, 9, x, 15, 17, 19 jest równa 11. Wtedy

A. $x = 1$ **B.** $x = 2$ **C.** $x = 11$ **D.** $x = 13$

Zadanie 13.24. [matura, sierpień 2017, zad. 23. (1 pkt)]

Średnia arytmetyczna zestawu danych: x, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 jest równa 9. Wtedy mediana tego zestawu danych jest równa

A. 8 **B.** 9 **C.** 10 **D.** 16

Zadanie 13.25. [matura, maj 2018, zad. 23. (1 pkt)]

W zestawie $\underbrace{2, 2, 2, \ldots, 2}_{m \text{ liczb}}, \underbrace{4, 4, 4, \ldots, 4}_{m \text{ liczb}}$ jest $2m$ liczb ($m \geq 1$), w tym m liczb 2 i m liczb 4.

Odchylenie standardowe tego zestawu liczb jest równe

A. 2 **B.** 1 **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **D.** $\sqrt{2}$

Zadanie 13.26. [matura, czerwiec 2018, zad. 22. (1 pkt)]

Wśród 100 osób przeprowadzono ankietę, w której zadano pytanie o liczbę książek przeczytanych w ostatnim roku. Wyniki ankiety zebrano w poniższej tabeli.

Liczba książek	0	1	2	3	4	5
Liczba osób	23	14	28	17	11	7

Średnia liczba przeczytanych książek przez jedną ankietowaną osobę jest równa

A. 0,5 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 2,5

Zadanie 13.27. [matura, sierpień 2018, zad. 24. (1 pkt)]

Abiturient jednego z liceów zestawił w tabeli oceny ze swojego świadectwa ukończenia szkoły.

Ocena	6	5	4	3	2
Liczba ocen	2	3	5	5	1

Mediana przedstawionego zestawu danych jest równa

A. 3 **B.** 3,5 **C.** 4 **D.** 4,5

14. Kombinatoryka

Zadanie 14.1. [matura, maj 2010, zad. 13. (1 pkt)]

Liczba przekątnych siedmiokąta foremnego jest równa.

A. 7 **B.** 14 **C.** 21 **D.** 28

Zadanie 14.2. [matura, czerwiec 2011, zad. 31. (4 pkt)]

Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4 (cyfry mogą się powtarzać).

Zadanie 14.3. [matura, sierpień 2011, zad. 13. (1 pkt)]

Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych o sumie cyfr równej 2?

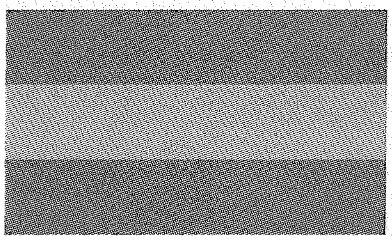
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Zadanie 14.4. [matura, sierpień 2011, zad. 32. (4 pkt)]

Ile jest liczb pięciocyfrowych, spełniających jednocześnie następujące cztery warunki:
(1) cyfry setek, dziesiątek i jedności są parzyste,
(2) cyfra setek jest większa od cyfry dziesiątek,
(3) cyfra dziesiątek jest większa od cyfry jedności,
(4) w zapisie tej liczby nie występuje cyfra 9.

Zadanie 14.5. [matura, maj 2012, zad. 24. (1 pkt)]

Flagę, taką jak pokazano na rysunku, należy zszyć z trzech jednakowej szerokości pasów kolorowej tkaniny. Oba pasy zewnętrzne mają być tego samego koloru, a pas znajdujący się między nimi ma być innego koloru. Liczba różnych takich flag, które można uszyć, mając do dyspozycji tkaniny w 10 kolorach, jest równa



A. 100 **B.** 99 **C.** 90 **D.** 19.

Zadanie 14.6. [matura, czerwiec 2012, zad. 33. (4 pkt)]

Oblicz, ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, jest dokładnie jedna cyfra 7 i dokładnie jedna cyfra parzysta.

Zadanie 14.7. [matura, czerwiec 2013, zad. 29. (2 pkt)]

Oblicz, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których cyfra jedności jest o 3 większa od cyfry setek.

Zadanie 14.8. [matura, sierpień 2013, zad. 15. (1 pkt)]

Ile jest wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 5?

A. 90 **B.** 100 **C.** 180 **D.** 200

Zadanie 14.9. [matura, maj 2014, zad. 24. (1 pkt)]

Na ile sposobów można wybrać dwóch graczy spośród 10 zawodników?

A. 100 **B.** 90 **C.** 45 **D.** 20

Zadanie 14.10. [matura, czerwiec 2015, zad. 24. (1 pkt)]

Ile jest wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 6 i niepodzielnych przez 9?

A. 6 **B.** 10 **C.** 12 **D.** 15

Zadanie 14.11. [matura, czerwiec 2015, zad. 24 swe. (1 pkt)]

Ile jest wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 4?

A. 3 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

Zadanie 14.12. [matura, sierpień 2015, zad. 25. (1 pkt)]

Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych, większych od 3000, utworzonych wyłącznie z cyfr 1, 2, 3, przy założeniu, że cyfry mogą się powtarzać, ale nie wszystkie z tych cyfr muszą być wykorzystane?

A. 3 **B.** 6 **C.** 9 **D.** 27

Zadanie 14.13. [matura, sierpień 2016, zad. 24. (1 pkt)]

Ile jest wszystkich dwucyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 3?

A. 12 **B.** 24 **C.** 29 **D.** 30

Zadanie 14.14. [matura, czerwiec 2017, zad. 31. (2 pkt)]

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ losujemy bez zwracania dwa razy po jednej liczbie. Wylosowane liczby tworzą parę (a, b), gdzie a jest wynikiem pierwszego losowania, b jest wynikiem drugiego losowania. Oblicz, ile jest wszystkich par (a, b) takich, że iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą parzystą.

Zadanie 14.15. [matura, sierpień 2017, zad. 24. (1 pkt)]

Ile jest wszystkich czterocyfrowych liczb naturalnych mniejszych niż 2017?

A. 2016 **B.** 2017 **C.** 1016 **D.** 1017

Zadanie 14.16. [matura, maj 2018, zad. 24. (1 pkt)]

Ile jest wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych mniejszych od 2018 i podzielnych przez 5?

A. 402 **B.** 403 **C.** 203 **D.** 204

Zadanie 14.17. [matura, czerwiec 2018, zad. 24. (1 pkt)]

Liczba wszystkich dodatnich liczb czterocyfrowych parzystych, w których zapisie nie występują cyfry 0 i 2, jest równa

A. $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 3$ **B.** $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3$ **C.** $8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 4$ **D.** $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4$

15. Rachunek prawdopodobieństwa

Zadanie 15.1. [matura, maj 2010, zad. 33. (4 pkt)]

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb oczek w obu rzutach będzie podzielny przez 12. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 15.2. [matura, sierpień 2010, zad. 25. (1 pkt)]

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ wybieramy losowo jedną liczbę. Niech p oznacza prawdopodobieństwo wybrania liczby będącej wielokrotnością liczby 3. Wówczas

A. $p < 0{,}3$ **B.** $p = 0{,}3$ **C.** $p = 0{,}4$ **D.** $p > 0{,}4$

Zadanie 15.3. [matura, sierpień 2010, zad. 32. (4 pkt)]

Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma liczb oczek otrzymanych na obu kostkach jest większa od 6 i iloczyn tych liczb jest nieparzysty.

Zadanie 15.4. [matura, maj 2011, zad. 22. (1 pkt)]

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej trzy wynosi

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{9}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{1}{18}$

Zadanie 15.5. [matura, maj 2011, zad. 30. (2 pkt)]

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

Zadanie 15.6. [matura, czerwiec 2011, zad. 22. (1 pkt)]

Jeżeli A jest zdarzeniem losowym takim, że $P(A) = 6 \cdot P(A')$, oraz A' jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A, to prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

A. $\frac{5}{6}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{1}{7}$ **D.** $\frac{6}{7}$

Zadanie 15.7. [matura, czerwiec 2011, zad. 29. (2 pkt)]

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że liczba oczek w pierwszym rzucie jest o 1 mniejsza od liczby oczek w drugim rzucie.

Zadanie 15.8. [matura, sierpień 2011, zad. 19. (1 pkt)]

Ze zbioru dwucyfrowych liczb naturalnych wybieramy losowo jedną liczbę. Prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 30 jest równe

A. $\frac{1}{90}$ **B.** $\frac{2}{90}$ **C.** $\frac{3}{90}$ **D.** $\frac{10}{90}$

Zadanie 15.9. [matura, sierpień 2011, zad. 30. (2 pkt)]

Dane są dwa pudełka: czerwone i niebieskie. W każdym z tych pudełek znajduje się 10 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 10. Z każdego pudełka losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że numer kuli wylosowanej z czerwonego pudełka jest mniejszy od numeru kuli wylosowanej z niebieskiego pudełka.

Zadanie 15.10. [matura, maj 2012, zad. 31. (2 pkt)]

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6.

Zadanie 15.11. [matura, czerwiec 2012, zad. 23. (1 pkt)]

Jeżeli A i B są zdarzeniami losowymi, B' jest zdarzeniem przeciwnym do B, $P(A) = 0{,}3$, $P(B') = 0{,}4$ oraz $A \cap B = \varnothing$, to $P(A \cup B)$ jest równe

A. 0,12 **B.** 0,18 **C.** 0,6 **D.** 0,9

Zadanie 15.12. [matura, sierpień 2012, zad. 25. (1 pkt)]

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ wybieramy losowo jedną liczbę. Niech p oznacza prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 4. Wówczas

A. $p < \frac{1}{5}$ **B.** $p = \frac{1}{5}$ **C.** $p = \frac{1}{4}$ **D.** $p > \frac{1}{4}$

Zadanie 15.13. [matura, maj 2013, zad. 22. (1 pkt)]

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Niech p oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest równy 5. Wtedy

A. $p = \frac{1}{36}$ **B.** $p = \frac{1}{18}$ **C.** $p = \frac{1}{12}$ **D.** $p = \frac{1}{9}$

Zadanie 15.14. [matura, czerwiec 2013, zad. 24. (1 pkt)]

Rzucamy trzykrotnie symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo, że w trzecim rzucie wypadnie orzeł jest równe

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{3}{8}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{3}{4}$

Zadanie 15.15. [matura, sierpień 2013, zad. 23. (1 pkt)]

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo dwukrotnego otrzymania pięciu oczek jest równe

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{12}$ **C.** $\frac{1}{18}$ **D.** $\frac{1}{36}$

Zadanie 15.16. [matura, maj 2014, zad. 23. (1 pkt)]

Jeżeli A jest zdarzeniem losowym, a A' – zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A oraz zachodzi równość $P(A) = 2 \cdot P(A')$, to

A. $P(A) = \frac{2}{3}$ **B.** $P(A) = \frac{1}{2}$ **C.** $P(A) = \frac{1}{3}$ **D.** $P(A) = \frac{1}{6}$

Zadanie 15.17. [matura, maj 2014, zad. 30. (2 pkt)]

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6.

Zadanie 15.18. [matura, czerwiec 2014, zad. 19. (1 pkt)]

Ze zbioru kolejnych liczb naturalnych $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 30\}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba jest kwadratem liczby całkowitej, jest równe

A. $\frac{4}{30}$ **B.** $\frac{5}{30}$ **C.** $\frac{6}{30}$ **D.** $\frac{10}{30}$

Zadanie 15.19. [matura, czerwiec 2014, zad. 30. (2 pkt)]

Dane są dwa podzbiory zbioru liczb całkowitych: $K = \{-4, -1, 1, 5, 6\}$ i $L = \{-3, -2, 2, 3, 4\}$. Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest dodatni.

Zadanie 15.20. [matura, sierpień 2014, zad. 24. (1 pkt)]

Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo otrzymania, co najmniej jednej reszki jest równe

A. $\frac{7}{8}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{8}$

Zadanie 15.21. [matura, sierpień 2014, zad. 34. (4 pkt)]

Zbiór M tworzą wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe w zapisie, których występują dwie różne cyfry spośród: 1, 2, 3, 4, 5. Ze zbioru M losujemy jedną liczbę, przy czym każda liczba z tego zbioru może być wylosowana z tym samym prawdopodobieństwem. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę większą od 20, w której cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności.

Zadanie 15.22. [matura, maj 2015, zad. 25. (1 pkt)]

W każdym z trzech pojemników znajduje się para kul, z których jedna jest czerwona, a druga – niebieska. Z każdego pojemnika losujemy jedną kulę. Niech p oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dokładnie dwie z trzech wylosowanych kul będą czerwone. Wtedy

A. $p = \frac{1}{4}$ **B.** $p = \frac{3}{8}$ **C.** $p = \frac{1}{2}$ **D.** $p = \frac{2}{3}$

Zadanie 15.23. [matura, maj 2015, zad. 33. (4 pkt)]

Wśród 115 osób przeprowadzono badania ankietowe, związane z zakupami w pewnym kiosku. W poniższej tabeli przedstawiono informacje o tym, ile osób kupiło bilety tramwajowe ulgowe oraz ile osób kupiło bilety tramwajowe normalne.

Rodzaj kupionych biletów	Liczba osób
ulgowe	76
normalne	41

Uwaga! 27 osób spośród ankietowanych kupiło oba rodzaje biletów.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że osoba losowo wybrana spośród ankietowanych nie kupiła żadnego biletu. Wynik przedstaw w formie nieskracalnego ułamka.

Zadanie 15.24. [matura, maj 2015, zad. 25 swe. (1 pkt)]

W pewnej klasie stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców jest równy 4 : 5. Losujemy jedną osobę z tej klasy. Prawdopodobieństwo tego, że będzie to dziewczyna, jest równe

A. $\frac{4}{5}$ **B.** $\frac{4}{9}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{9}$

Zadanie 15.25. [matura, czerwiec 2015, zad. 25. (1 pkt)]

Na loterię przygotowano pulę 100 losów, w tym 4 wygrywające. Po wylosowaniu pewnej liczby losów, wśród których był dokładnie jeden wygrywający, szansa na wygraną była taka sama jak przed rozpoczęciem loterii. Stąd wynika, że wylosowano

A. 4 losy. **B.** 20 losów. **C.** 50 losów. **D.** 25 losów.

Zadanie 15.26. [matura, czerwiec 2015, zad. 31. (2 pkt)]

Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych losowo wybieramy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymamy liczbę podzielną przez 8 lub liczbę podzielną przez 12.

Zadanie 15.27. [matura, czerwiec 2015, zad. 25 swe. (1 pkt)]

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania iloczynu oczek równego cztery jest równe

A. $\frac{1}{12}$ **B.** $\frac{1}{18}$ **C.** $\frac{1}{9}$ **D.** $\frac{5}{36}$

Zadanie 15.28. [matura, czerwiec 2015, zad. 31 swe. (2 pkt)]

Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy kolejno dwie cyfry (losowanie bez zwracania) i tworzymy liczby dwucyfrowe tak, że pierwsza wylosowana cyfra jest cyfrą dziesiątek, a druga – cyfrą jedności. Oblicz prawdopodobieństwo utworzenia liczby podzielnej przez 4.

Zadanie 15.29. [matura, sierpień 2015, zad. 24. (1 pkt)]

W grupie jest 15 kobiet i 18 mężczyzn. Losujemy jedną osobę z tej grupy.
Prawdopodobieństwo tego, że będzie to kobieta, jest równe

A. $\frac{1}{15}$ **B.** $\frac{1}{33}$ **C.** $\frac{15}{33}$ **D.** $\frac{15}{18}$

Zadanie 15.30. [matura, sierpień 2015, zad. 27. (2 pkt)]

Mamy dwa pudełka: w pierwszym znajduje się 6 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 6, a w drugim – 8 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 8. Losujemy po jednej kuli z każdego pudełka i tworzymy liczbę dwucyfrową w ten sposób, że numer kuli wylosowanej z pierwszego pudełka jest cyfrą dziesiątek, a numer kuli wylosowanej z drugiego – cyfrą jedności tej liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że utworzona liczba jest podzielna przez 11.

Zadanie 15.31. [matura, sierpień 2015, zad. 23 swe. (1 pkt)]

Ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, 15\}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby pierwszej jest równe

A. $\frac{7}{16}$ **B.** $\frac{3}{8}$ **C.** $\frac{6}{15}$ **D.** $\frac{7}{15}$

Zadanie 15.32. [matura, sierpień 2015, zad. 28 swe. (2 pkt)]

Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych losowo wybieramy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymamy liczbę podzielną przez 9 lub podzielną przez 12.

Zadanie 15.33. [matura, maj 2016, zad. 22. (1 pkt)]

Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Niech p oznacza prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie dwóch orłów w tych trzech rzutach. Wtedy

A. $0 \leq p < 0{,}2$ **B.** $0{,}2 \leq p \leq 0{,}35$ **C.** $0{,}35 < p \leq 0{,}5$ **D.** $0{,}5 < p \leq 1$

Zadanie 15.34. [matura, maj 2016, zad. 34. (4 pkt)]

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie równa 30. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 15.35. [matura, czerwiec 2016, zad. 21. (1 pkt)]

Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Niech p oznacza prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie jednego orła w tych trzech rzutach. Wtedy

A. $0 \leq p < 0{,}25$ **B.** $0{,}25 \leq p \leq 0{,}4$ **C.** $0{,}4 < p \leq 0{,}5$ **D.** $p > 0{,}5$

Zadanie 15.36. [matura, sierpień 2016, zad. 25. (1 pkt)]

Doświadczenie losowe polega na rzucie dwiema symetrycznymi monetami i sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wynikiem rzutu są dwa orły i sześć oczek na kostce, jest równe

A. $\frac{1}{48}$ **B.** $\frac{1}{24}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Zadanie 15.37. [matura, sierpień 2016, zad. 34. (2 pkt)]

Ze zbioru siedmiu liczb naturalnych $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy dwie różne liczby.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że większą z wylosowanych liczb będzie liczba 5.

Zadanie 15.38. [matura, maj 2017, zad. 25. (1 pkt)]

Ze zbioru dwudziestu czterech kolejnych liczb naturalnych od 1 do 24 losujemy jedną liczbę. Niech A oznacza zdarzenie, że wylosowana liczba będzie dzielnikiem liczby 24. Wtedy prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{1}{6}$

Zadanie 15.39. [matura, maj 2017, zad. 33. (2 pkt)]

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy liczbę, która jest równocześnie mniejsza od 40 i podzielna przez 3. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 15.40. [matura, czerwiec 2017, zad. 25. (1 pkt)]

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania pary liczb, których iloczyn jest większy od 20, jest równe

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{5}{36}$ **C.** $\frac{1}{9}$ **D.** $\frac{2}{9}$

Zadanie 15.41. [matura, sierpień 2017, zad. 25. (1 pkt)]

Z pudełka, w którym jest tylko 6 kul białych i n kul czarnych, losujemy jedną kulę.

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe $\frac{1}{3}$. Liczba kul czarnych jest równa

A. $n = 9$ **B.** $n = 2$ **C.** $n = 18$ **D.** $n = 12$

Zadanie 15.42. [matura, sierpień 2017, zad. 30. (2 pkt)]

Ze zbioru liczb $\{1,2,4,5,10\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że iloraz pierwszej wylosowanej liczby przez drugą wylosowaną liczbę jest liczbą całkowitą.

Zadanie 15.43. [matura, maj 2018, zad. 25. (1 pkt)]

W pudełku jest 50 kuponów, wśród których jest 15 kuponów przegrywających, a pozostałe kupony są wygrywające. Z tego pudełka w sposób losowy wyciągamy jeden kupon. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wyciągniemy kupon wygrywający, jest równe

A. $\frac{15}{35}$ **B.** $\frac{1}{50}$ **C.** $\frac{15}{50}$ **D.** $\frac{35}{50}$

Zadanie 15.44. [matura, maj 2018, zad. 33. (4 pkt)]

Dane są dwa zbiory:
$A = \{100, 200, 300, 400, 500, 600, 700\}$ i $B = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$.
Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie podzielna przez 3. Obliczone prawdopodobieństwo zapisz w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

Zadanie 15.45. [matura, czerwiec 2018, zad. 25. (1 pkt)]

W pudełku znajdują się dwie kule: czarna i biała. Czterokrotnie losujemy ze zwracaniem jedną kulę z tego pudełka. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dokładnie trzy razy w czterech losowaniach wyciągniemy kulę koloru białego, jest równe

A. $\frac{1}{16}$ **B.** $\frac{3}{8}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{3}{4}$

Zadanie 15.46. [matura, czerwiec 2018, zad. 31. (2 pkt)]

Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Po przeprowadzonym doświadczeniu zapisujemy liczbę uzyskanych orłów (od 0 do 4) i liczbę uzyskanych reszek (również od 0 do 4). Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w tych czterech rzutach liczba uzyskanych orłów będzie większa niż liczba uzyskanych reszek.

Zadanie 15.47. [matura, sierpień 2018, zad. 25. (1 pkt)]

W grupie liczącej 29 uczniów (dziewcząt i chłopców) jest 15 chłopców. Z tej grupy trzeba wylosować jedną osobę. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że zostanie wylosowana dziewczyna, jest równe

A. $\frac{14}{15}$ **B.** $\frac{1}{14}$ **C.** $\frac{14}{29}$ **D.** $\frac{15}{29}$

Zadanie 15.48. [matura, sierpień 2018, zad. 33. (4 pkt)]

Ze zbioru $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ losujemy jedną liczbę a, natomiast ze zbioru $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ losujemy liczbę b. Te liczby są – odpowiednio – współczynnikiem kierunkowym i wyrazem wolnym funkcji liniowej $f(x) = ax + b$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymana funkcja f jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe.

16. Geometria analityczna

Zadanie 16.1.^{R} [matura, maj 2010, zad. 21. (1 pkt)]

Wskaż równanie okręgu o promieniu 6.

A. $x^2 + y^2 = 3$ **B.** $x^2 + y^2 = 6$ **C.** $x^2 + y^2 = 12$ **D.** $x^2 + y^2 = 36$

Zadanie 16.2. [matura, maj 2010, zad. 22. (1 pkt)]

Punkty $A = (-5, 2)$ i $B = (3, -2)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC. Obwód tego trójkąta jest równy

A. 30 **B.** $4\sqrt{5}$ **C.** $12\sqrt{5}$ **D.** 36

Zadanie 16.3. [matura, sierpień 2010, zad. 20. (1 pkt)]

Punkty $A = (-1, 3)$ i $C = (-5, 5)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Pole tego kwadratu jest równe

A. 10 **B.** 25 **C.** 50 **D.** 100

Zadanie 16.4.^{R} [matura, sierpień 2010, zad. 21. (1 pkt)]

Okrąg o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$ ma promień równy

A. $\sqrt{13}$ **B.** 13 **C.** 8 **D.** $2\sqrt{2}$

Zadanie 16.5.^{R} [matura, sierpień 2010, zad. 29. (2 pkt)]

Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $S = (4, -2)$ i przechodzącego przez punkt $O = (0, 0)$.

Zadanie 16.6. [matura, sierpień 2010, zad. 30. (2 pkt)]

Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A = (3, 8)$, $B = (1, 2)$ i $C = (6, 7)$ jest prostokątny.

Zadanie 16.7.^{R} [matura, maj 2011, zad. 19. (1 pkt)]

Styczną do okręgu $(x - 1)^2 + y^2 - 4 = 0$ jest prosta o równaniu

A. $x = 1$ **B.** $x = 3$ **C.** $y = 0$ **D.** $y = 4$

Zadanie 16.8. [matura, maj 2011, zad. 31. (4 pkt)]

Okrąg o środku w punkcie $S = (3, 7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y = 2x - 3$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

Zadanie 16.9.^{R} [matura, czerwiec 2011, zad. 16. (1 pkt)]

Dany jest okrąg o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$. Środek tego okręgu ma współrzędne

A. $(2, -3)$ **B.** $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right)$ **C.** $(-2, 3)$ **D.** $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$

Zadanie 16.10.^{R} [matura, czerwiec 2011, zad. 33. (4 pkt)]

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A = (1, 8)$ i stycznego do obu osi układu współrzędnych. Rozważ wszystkie przypadki.

Zadanie 16.11. [matura, sierpień 2011, zad. 14. (1 pkt)]

Dane są punkty $A = (1, -4)$ i $B = (2, 3)$. Odcinek AB ma długość

A. 1 **B.** $4\sqrt{3}$ **C.** $5\sqrt{2}$ **D.** 7

Zadanie 16.12. [matura, maj 2012, zad. 22. (1 pkt)]

Punkt A ma współrzędne $(5, 2012)$. Punkt B jest symetryczny do punktu A względem osi Ox, a punkt C jest symetryczny do punktu B względem osi Oy. Punkt C ma współrzędne

A. $(-5, -2012)$ **B.** $(-2012, -5)$ **C.** $(-5, 2012)$ **D.** $(-2012, 5)$

Zadanie 16.13.[R] [matura, maj 2012, zad. 23. (1 pkt)]

Na okręgu o równaniu $(x-2)^2 + (y+7)^2 = 4$ leży punkt

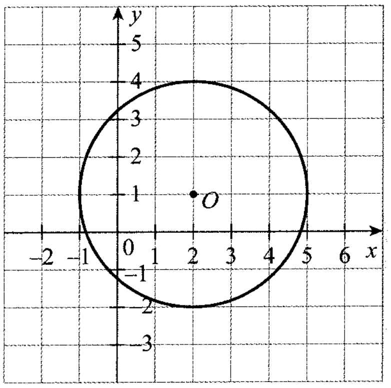
A. $A = (-2, 5)$ **B.** $B = (2, -5)$ **C.** $C = (2, -7)$ **D.** $A = (7, -2)$

Zadanie 16.14. [matura, maj 2012, zad. 29. (2 pkt)]

Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (-2, 2)$ i $B = (2, 10)$

Zadanie 16.15.[R] [matura, czerwiec 2012, zad. 12. (1 pkt)]

Punkt O jest środkiem okręgu przedstawionego na rysunku.



Równanie tego okręgu ma postać:

A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ **B.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 3$

C. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$ **D.** $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 3$

Zadanie 16.16. [matura, czerwiec 2012, zad. 19. (1 pkt)]

Punkt $S = (2, 7)$ jest środkiem odcinka AB, w którym $A = (-1, 3)$. Punkt B ma współrzędne:

A. $B = (5, 11)$ **B.** $B = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ **C.** $B = \left(-\frac{3}{2}, -5\right)$ **D.** $B = (3, 11)$

Zadanie 16.17. [matura, czerwiec 2012, zad. 32. (4 pkt)]

Punkty $A = (2,11)$, $B = (8, 23)$, $C = (6, 14)$ są wierzchołkami trójkąta. Wysokość trójkąta poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą AB w punkcie D. Oblicz współrzędne punktu D.

Zadanie 16.18. [matura, sierpień 2012, zad. 20. (1 pkt)]

Punkty $B = (-2, 4)$ i $C = (5, 1)$ są dwoma sąsiednimi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Pole tego kwadratu jest równe

A. 74 **B.** 58 **C.** 40 **D.** 29

Zadanie 16.19.[R] [matura, sierpień 2012, zad. 21. (1 pkt)]

Dany jest okrąg o równaniu $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 100$. Środek tego okręgu ma współrzędne

A. $(-4, -6)$ **B.** $(4, 6)$ **C.** $(4, -6)$ **D.** $(-4, 6)$

Zadanie 16.20. [matura, sierpień 2012, zad. 32. (4 pkt)]

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$ oraz $A = (2, 1)$ i $C = (1, 9)$. Podstawa AB tego trójkąta jest zawarta w prostej $y = \frac{1}{2}x$. Oblicz współrzędne wierzchołka B.

Zadanie 16.21. [matura, maj 2013, zad. 17. (1 pkt)]

Punkty $A = (-1, 2)$ i $B = (5, -2)$ są dwoma sąsiednimi wierzchołkami rombu $ABCD$. Obwód tego rombu jest równy

A. $\sqrt{13}$ **B.** 13 **C.** 676 **D.** $8\sqrt{13}$

Zadanie 16.22. [matura, maj 2013, zad. 18. (1 pkt)]

Punkt $S = (-4, 7)$ jest środkiem odcinka PQ, gdzie $Q = (17, 12)$. Zatem punkt P ma współrzędne

A. $P = (2, -25)$ **B.** $P = (38, 17)$ **C.** $P = (-25, 2)$ **D.** $P = (-12, 4)$.

Zadanie 16.23.R [matura, maj 2013, zad. 19. (1 pkt)]

Odległość między środkami okręgów o równaniach $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ oraz $x^2 + y^2 = 10$ jest równa

A. $\sqrt{5}$ **B.** $\sqrt{10} - 3$ **C.** 3 **D.** 5

Zadanie 16.24.R [matura, czerwiec 2013, zad. 34. (5 pkt)]

Wierzchołki trapezu $ABCD$ mają współrzędne: $A = (-1, -5)$, $B = (5, 1)$, $C = (1, 3)$, $D = (-2, 0)$. Napisz równanie okręgu, który jest styczny do podstawy AB tego trapezu, a jego środek jest punktem przecięcia się prostych zawierających ramiona AD oraz BC trapezu $ABCD$.

Zadanie 16.25. [matura, sierpień 2013, zad. 14. (1 pkt)]

Punkt $S = (4, 1)$ jest środkiem odcinka AB, gdzie $A = (a, 0)$ i $B = (a + 3,2)$. Zatem

A. $a = 0$ **B.** $a = \frac{1}{2}$ **C.** $a = 2$ **D.** $a = \frac{5}{2}$

Zadanie 16.26. [matura, sierpień 2013, zad. 33. (4 pkt)]

Punkty $A = (-1, -5)$, $B = (3, -1)$, $C = (2, 4)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz pole tego równoległoboku.

Zadanie 16.27.R [matura, maj 2014, zad. 15. (1 pkt)]

Liczba punktów wspólnych okręgu o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ z osiami układu współrzędnych jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Zadanie 16.28.R [matura, czerwiec 2014, zad. 23. (1 pkt)]

Punkty $M = (2, 0)$ i $N = (0, -2)$ są punktami styczności okręgu z osiami układu współrzędnych. Które z poniższych równań opisuje ten okrąg?

A. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ **B.** $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$

C. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ **D.** $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Zadanie 16.29. [matura, czerwiec 2014, zad. 34. (4 pkt)]

Podstawą trójkąta równoramiennego ABC jest bok AB, gdzie $A = (2, 1)$ i $B = (5, 2)$. Ramię tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $2x - y - 3 = 0$. Oblicz współrzędne wierzchołka C.

Zadanie 16.30.^{R} [matura, sierpień 2014, zad. 20. (1 pkt)]

Punkty $P = (-1, 0)$ leży na okręgu o promieniu 3. Równanie tego okręgu może mieć postać

A. $(x + 1)^2 + y^2 = 9$ **B.** $x^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 = 3$

C. $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$ **D.** $(x + 1)^2 + y^2 = 3$

Zadanie 16.31. [matura, sierpień 2014, zad. 21. (1 pkt)]

Punkty $A = (13, -12)$ i $C = (15, 8)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Przekątne tego kwadratu przecinają się w punkcie

A. $S = (2, -20)$ **B.** $S = (14, 10)$ **C.** $S = (14, -2)$ **D.** $S = (28, -4)$.

Zadanie 16.32. [matura, maj 2015, zad. 20. (1 pkt)]

Dane są punkty $M = (-2, 1)$ i $N = (-1, 3)$. Punkt K jest środkiem odcinka MN. Obrazem punktu K w symetrii względem początku układu współrzędnych jest punkt

A. $K' = \left(2, -\frac{3}{2}\right)$ **B.** $K' = \left(2, \frac{3}{2}\right)$ **C.** $K' = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ **D.** $K' = \left(\frac{3}{2}, -2\right)$.

Zadanie 16.33. [matura, maj 2015, zad. 30. (2 pkt)]

W układzie współrzędnych są dane punkty $A = (-43, -12)$ i $B = (50, 19)$. Prosta AB przecina oś Ox w punkcie P. Oblicz pierwszą współrzędną punktu P.

Zadanie 16.34. [matura, maj 2015, zad. 19 swe. (1 pkt)]

Dane są punkty: $P = (-2, -2)$ i $Q = (3, 3)$. Odległość punktu P od punktu Q jest równa

A. 1 **B.** 5 **C.** $5\sqrt{2}$ **D.** $2\sqrt{5}$.

Zadanie 16.35. [matura, maj 2015, zad. 20 swe. (1 pkt)]

Punkt $K = (-4, 4)$ jest końcem odcinka KL, punkt L leży na osi Ox, a środek S tego odcinka leży na osi Oy. Wynika stąd, że

A. $S = (0, 2)$ **B.** $S = (-2, 0)$ **C.** $S = (4, 0)$ **D.** $S = (0, 4)$

Zadanie 16.36.^{R}. [matura, maj 2015, zad. 21 swe. (1 pkt)]

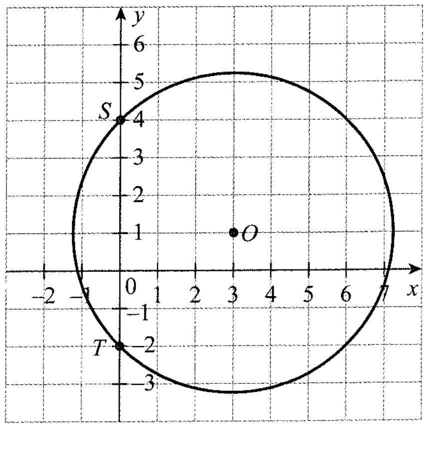
Okrąg przedstawiony na rysunku ma środek w punkcie $O = (3, 1)$ i przechodzi przez punkty $S = (0, 4)$ i $T = (0, -2)$. Okrąg ten jest opisany przez równanie

A. $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 18$

B. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 18$

C. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 18$

D. $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 18$



Zadanie 16.37. [matura, czerwiec 2015, zad. 33. (4 pkt)]

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$.
Ponadto wiadomo, że $A = (-2, 4)$ i $B = (6, -2)$. Wierzchołek C należy do osi Oy. Oblicz współrzędne wierzchołka C.

Zadanie 16.38. [matura, czerwiec 2015, zad. 17 swe. (1 pkt)]

Dane są punkty $A = (-2, 5)$ oraz $B = (4, -1)$. Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC jest równy

A. $\sqrt{6}$ **B.** $2\sqrt{6}$ **C.** $6\sqrt{3}$ **D.** $3\sqrt{3}$.

Zadanie 16.39. [matura, czerwiec 2015, zad. 18 swe. (1 pkt)]

Suma odległości punktu $A = (-2, 4)$ od prostych o równaniach $x = 3$ i $y = -1$ jest równa

A. 10 **B.** 9 **C.** 8 **D.** 7

Zadanie 16.40. [matura, sierpień 2015, zad. 21. (1 pkt)]

Punkt $S = (2, -5)$ jest środkiem odcinka AB, gdzie $A = (-4, 3)$ i $B = (8, b)$. Wtedy

A. $b = -13$ **B.** $b = -2$ **C.** $b = -1$ **D.** $b = 6$

Zadanie 16.41. [matura, sierpień 2015, zad. 32. (4 pkt)]

Wyznacz równanie osi symetrii trójkąta o wierzchołkach $A = (-2, 2)$, $B = (6, -2)$, $C = (10, 6)$.

Zadanie 16.42. [matura, sierpień 2015, zad. 18 swe. (1 pkt)]

Punkt $A = (3, 2)$ i C są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$, a punkt $O = (6, 5)$ jest środkiem okręgu opisanego na tym kwadracie. Współrzędne punktu C są równe

A. $(9, 8)$ **B.** $(15, 12)$ **C.** $\left(4\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$ **D.** $(3, 3)$

Zadanie 16.43.^{R}. [matura, sierpień 2015, zad. 19 swe. (1 pkt)]

Okrąg opisany równaniem $(x-2)^2 + (y+2)^2 = r^2$ jest styczny do osi Oy. Promień r tego okręgu jest równy

A. $\sqrt{13}$ **B.** $\sqrt{5}$ **C.** 3 **D.** 2

Zadanie 16.44. [matura, sierpień 2015, zad. 21 swe. (1 pkt)]

Dane są punkty $A = (2, 3)$ oraz $B = (-6, -3)$. Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny ABC jest równy

A. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

Zadanie 16.45. [matura, maj 2016, zad. 21. (1 pkt)]

W układzie współrzędnych dane są punkty $A = (a; 6)$ oraz $B = (7; b)$. Środkiem odcinka AB jest punkt $M = (3; 4)$. Wynika stąd, że

A. $a = 5$ i $b = 5$ **B.** $a = -1$ i $b = 2$ **C.** $a = 4$ i $b = 10$ **D.** $a = -4$ i $b = -2$

Zadanie 16.46. [matura, czerwiec 2016, zad. 17. (1 pkt)]

Prosta określona wzorem $y = ax + 1$ jest symetralną odcinka AB, gdzie $A = (-3, 2)$ i $B = (1, 4)$. Wynika stąd, że

A. $a = -\frac{1}{2}$ **B.** $a = \frac{1}{2}$ **C.** $a = -2$ **D.** $a = 2$

Zadanie 16.47. [matura, czerwiec 2016, zad. 27. (2 pkt)]

Dane są proste o równaniach $y = x + 2$ oraz $y = -3x + b$, które przecinają się w punkcie leżącym na osi Oy układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta, którego dwa boki zawierają się w danych prostych, a trzeci jest zawarty w osi Ox.

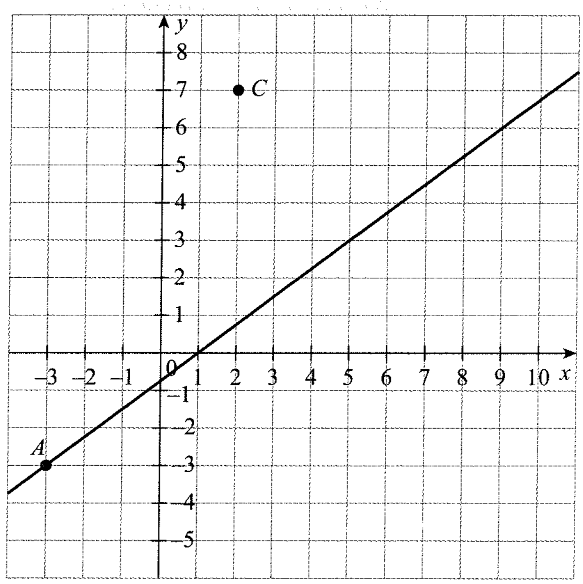
Zadanie 16.48. [matura, sierpień 2016, zad. 20. (1 pkt)]

Okręgi o środkach $S_1 = (3, 4)$ oraz $S_2 = (9, -4)$ i równych promieniach są styczne zewnętrznie. Promień każdego z tych okręgów jest równy

A. 8 **B.** 6 **C.** 5 **D.** $\frac{5}{2}$

Zadanie 16.49. [matura, sierpień 2016, zad. 32. (4 pkt)]

Na rysunku przedstawione są dwa wierzchołki trójkąta prostokątnego ABC: $A = (-3, -3)$ i $C = (2, 7)$ oraz prosta o równaniu $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$, zawierająca przeciwprostokątną AB tego trójkąta.
Oblicz współrzędne wierzchołka B tego trójkąta i długość odcinka AB.



Zadanie 16.50. [matura, maj 2017, zad. 20. (1 pkt)]

Dany jest okrąg o środku $S = (2, 3)$ i promieniu $r = 5$. Który z podanych punktów leży na tym okręgu?

A. $A = (-1, 7)$ **B.** $B = (2, -3)$ **C.** $C = 3, 2)$ **D.** $D = (5, 3)$.

Zadanie 16.51. [matura, maj 2017, zad. 32. (5 pkt)]

Dane są punkty $A = (-4, 0)$ i $M = (2, 9)$ oraz prosta k o równaniu $y = -2x + 10$. Wierzchołek B trójkąta ABC to punkt przecięcia prostej k z osią Ox układu współrzędnych, a wierzchołek C jest punktem przecięcia prostej k z prostą AM. Oblicz pole trójkąta ABC.

Zadanie 16.52. [matura, czerwiec 2017, zad. 19. (1 pkt)]

Punkty $A = (-21, 11)$ i $B = (3, 17)$ są końcami odcinka AB. Obrazem tego odcinka w symetrii względem osi Ox układu współrzędnych jest odcinek $A'B'$. Środkiem odcinka $A'B'$ jest punkt o współrzędnych

A. $(-9, -14)$ **B.** $(-9, 14)$ **C.** $(9, -14)$ **D.** $(9, 14)$.

Zadanie 16.53. [matura, czerwiec 2017, zad. 33. (4 pkt)]

Punkty $A = (-2, -8)$ i $B = (14, -8)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AB| = |AC|$. Wysokość AD tego trójkąta jest zawarta w prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x - 7$. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego trójkąta.

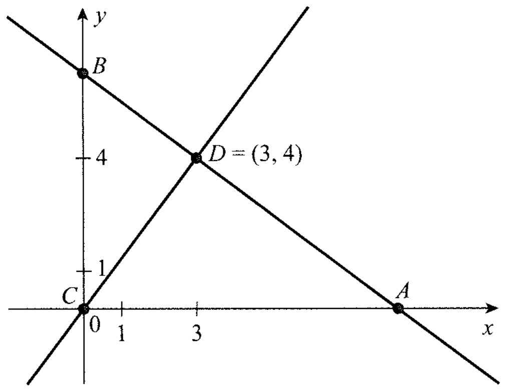
Zadanie 16.54. [matura, sierpień 2017, zad. 17. (1 pkt)]

Punkty $B = (-2, 4)$ i $C = (5, 1)$ są sąsiednimi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Pole tego kwadratu jest równe

A. 29 **B.** 40 **C.** 58 **D.** 74.

Zadanie 16.55. [matura, sierpień 2017, zad. 33. (4 pkt)]

Punkt $C = (0, 0)$ jest wierzchołkiem trójkąta prostokątnego ABC, którego wierzchołek A leży na osi Ox, a wierzchołek B na osi Oy układu współrzędnych. Prosta zawierająca wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C przecina przeciwprostokątną AB w punkcie $D = (3, 4)$.



Oblicz współrzędne wierzchołków A i B tego trójkąta oraz długość przeciwprostokątnej AB.

Zadanie 16.56. [matura, maj 2018, zad. 18. (1 pkt)]

Punkt $K = (2, 2)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego KLM, w którym $|KM| = |LM|$. Odcinek MN jest wysokością trójkąta i $N = (4, 3)$. Zatem

A. $L = (5, 3)$ **B.** $L = (6, 4)$ **C.** $L = (3, 5)$ **D.** $L = (4, 6)$

Zadanie 16.57. [matura, maj 2018, zad. 32. (5 pkt)]

W układzie współrzędnych punkty $A = (4, 3)$ i $B = (10, 5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = 2x + 3$. Oblicz współrzędne punktu C, dla którego kąt ABC jest prosty.

Zadanie 16.58. R [matura, maj 2018, zad. 18 swe. (1 pkt)]

Średnicą okręgu jest odcinek KL, gdzie $K = (6, 8)$, $L = (-6, -8)$. Równanie tego okręgu ma postać

A. $x^2 + y^2 = 200$ **B.** $x^2 + y^2 = 100$ **C.** $x^2 + y^2 = 400$ **D.** $x^2 + y^2 = 300$

Zadanie 16.59. [matura, czerwiec 2018, zad. 17. (1 pkt)]

Okrąg o środku $S_1 = (2, 1)$ i promieniu r oraz okrąg o środku $S_2 = (5, 5)$ i promieniu 4 są styczne zewnętrznie. Wtedy

A. $r = 1$ **B.** $r = 2$ **C.** $r = 3$ **D.** $r = 4$

Zadanie 16.60. [matura, czerwiec 2018, zad. 34. (4 pkt)]

Punkty $A = (-1, 1)$ i $C = (1, 9)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Podstawa AB tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Oblicz współrzędne wierzchołka B tego trójkąta.

Zadanie 16.61. [matura, sierpień 2018, zad. 21. (1 pkt)]

Punkt $A = (-3, 2)$ jest końcem odcinka AB, a punkt $M = (4, 1)$ jest środkiem tego odcinka. Długość odcinka AB jest równa

A. $2\sqrt{5}$ **B.** $4\sqrt{5}$ **C.** $5\sqrt{2}$ **D.** $10\sqrt{2}$

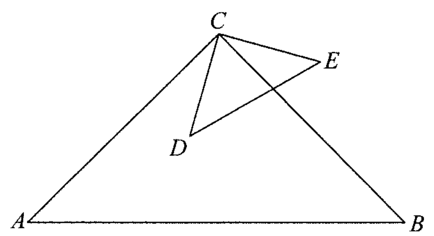
Zadanie 16.62. [matura, sierpień 2018, zad. 31. (2 pkt)]

Punkty $A = (2, 4)$, $B = (0, 0)$, $C = (4, -2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Punkt D jest środkiem boku AC tego trójkąta. Wyznacz równanie prostej BD.

17. Dowody (geometria)

Zadanie 17.1. [matura, maj 2010, zad. 28. (2 pkt)]

Trójkąty prostokątne równoramienne ABC i CDE są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku C jest prosty).



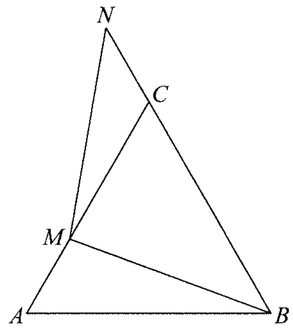
Wykaż, że $|AD| = |BE|$.

Zadanie 17.2. [matura, maj 2011, zad. 29. (2 pkt)]

Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Na boku BC wybrano taki punkt E, że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt AED jest prosty.

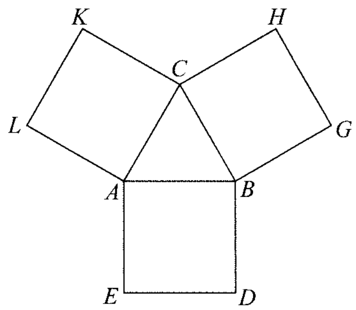
Zadanie 17.3. [matura, czerwiec 2011, zad. 25. (2 pkt)]

Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M tak, że $|AM| = |CN|$.
Wykaż, że $|BM| = |MN|$.



Zadanie 17.4. [matura, sierpień 2011, zad. 28. (2 pkt)]

Na bokach trójkąta równobocznego ABC (na zewnątrz tego trójkąta) zbudowano kwadraty $ABDE$, $CBGH$ i $ACKL$.



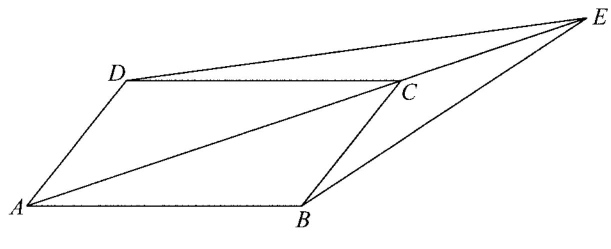
Udowodnij, że trójkąt KGE jest równoboczny.

Zadanie 17.5. [matura, maj 2012, zad. 30. (2 pkt)]

W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów A i B. Dwusieczne te przecinają się w punkcie P. Uzasadnij, że kąt APB jest rozwarty.

Zadanie 17.6. [matura, sierpień 2012, zad. 30. (2 pkt)]

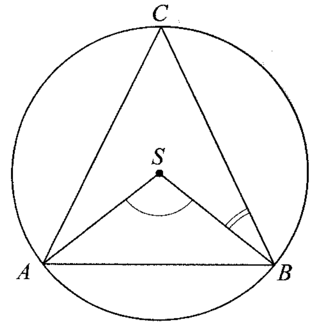
Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przedłużeniu przekątnej AC wybrano punkt E tak, że $|CE| = \frac{1}{2}|AC|$ (zobacz rysunek).



Uzasadnij, że pole równoległoboku $ABCD$ jest cztery razy większe od pola trójkąta DCE.

Zadanie 17.7. [matura, maj 2014, zad. 31. (2 pkt)]

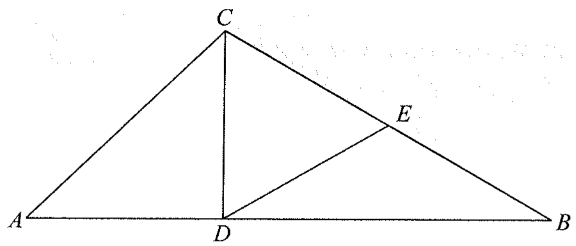
Środek S okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym ABC, o ramionach AC i BC, leży wewnątrz tego trójkąta (zobacz rysunek).



Wykaż, że miara kąta wypukłego ASB jest cztery razy większa od miary kąta wypukłego SBC.

Zadanie 17.8. [matura, czerwiec 2014, zad. 31. (2 pkt)]

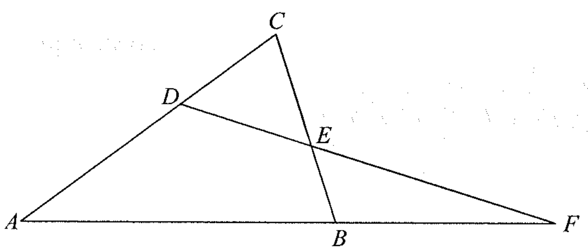
Dany jest trójkąt ABC. Odcinek CD jest wysokością tego trójkąta, punkt E jest środkiem boku BC (tak jak na rysunku) i $|CD| = |DE|$.



Udowodnij, że trójkąt CDE jest równoboczny.

Zadanie 17.9. [matura, sierpień 2014, zad. 30. (2 pkt)]

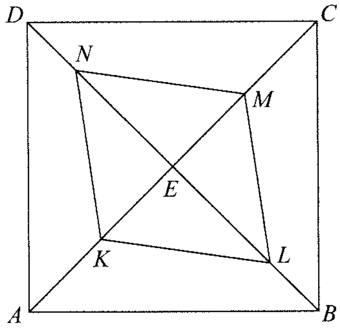
Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AC| > |BC|$. Na bokach AC i BC tego trójkąta obrano odpowiednio takie punkty D i E, że zachodzi równość $|CD| = |CE|$. Proste AB i DE przecinają się w punkcie F (zobacz rysunek).



Wykaż, że $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| - 2 \cdot |\sphericalangle AFD|$.

Zadanie 17.10. [matura, maj 2015, zad. 28. (2 pkt)]

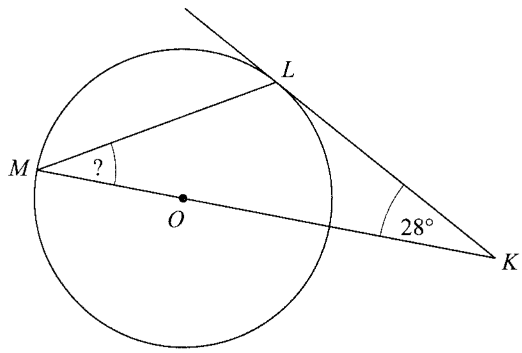
Dany jest kwadrat $ABCD$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Punkty K i M są środkami odcinków – odpowiednio – AE i EC. Punkty L i N leżą na przekątnej BD tak, że $|BL| = \frac{1}{3}|BE|$, $|DN| = \frac{1}{3}|DE|$ (zobacz rysunek).



Wykaż, że stosunek pola czworokąta $KLMN$ do pola kwadratu $ABCD$ jest równy 1: 3.

Zadanie 17.11. [matura, maj 2015, zad. 31 swe. (2 pkt)]

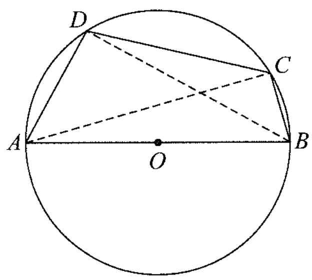
Dany jest okrąg o środku w punkcie O. Prosta KL jest styczna do tego okręgu w punkcie L, a środek O tego okręgu leży na odcinku KM (zobacz rysunek).



Udowodnij, że kąt KML ma miarę 31°.

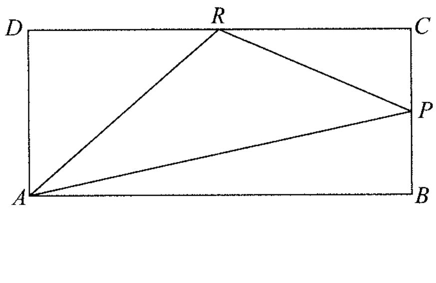
Zadanie 17.12. [matura, czerwiec 2015, zad. 28. (2 pkt)]

Czworokąt $ABCD$ wpisano w okrąg tak, że bok AB jest średnicą tego okręgu (zobacz rysunek).
Udowodnij, że $|AD|^2 + |BD|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$.



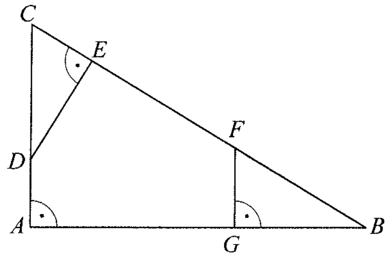
Zadanie 17.13. [matura, sierpień 2015, zad. 31. (2 pkt)]

W prostokącie $ABCD$ punkt P jest środkiem boku BC, a punkt R jest środkiem boku CD.
Wykaż, że pole trójkąta APR jest równe sumie pól trójkątów ADR oraz PCR.



Zadanie 17.14. [matura, maj 2016, zad. 29. (2 pkt)]

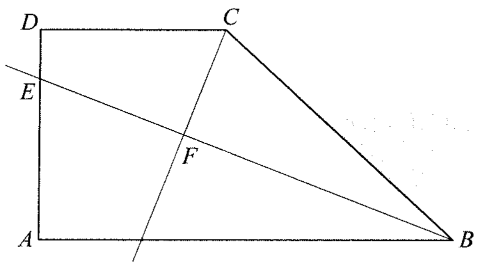
Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Na przyprostokątnych AC i AB tego trójkąta obrano odpowiednio punkty D i G. Na przeciwprostokątnej BC wyznaczono punkty E i F takie, że $|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle BGF| = 90°$ (zobacz rysunek).



Wykaż, że trójkąt CDE jest podobny do trójkąta FBG.

Zadanie 17.15. [matura, czerwiec 2016, zad. 29. (2 pkt)]

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD oraz wysokości AD. Dwusieczna kąta ABC przecina ramię AD w punkcie E oraz dwusieczną kąta BCD w punkcie F (zobacz rysunek).



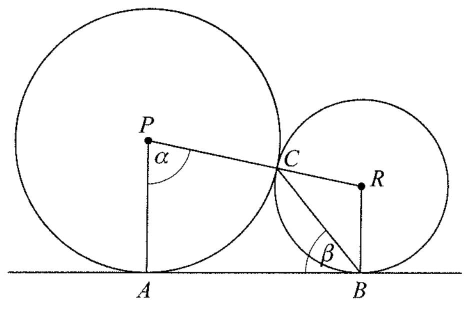
Wykaż, że w czworokącie $CDEF$ sumy miar przeciwległych kątów są sobie równe.

Zadanie 17.16. [matura, sierpień 2016, zad. 30. (2 pkt)]

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przekątne AC oraz BD przecinają się w punkcie S. Wykaż, że jeżeli $|AS| = \frac{5}{6}|AC|$, to pole trójkąta ABS jest 25 razy większe od pola trójkąta DCS.

Zadanie 17.17. [matura, maj 2017, zad. 28. (2 pkt)]

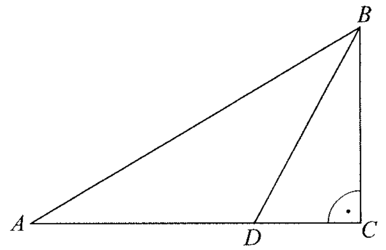
Dane są dwa okręgi o środkach w punktach P i R, styczne zewnętrznie w punkcie C. Prosta AB jest styczna do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B oraz $|\sphericalangle APC| = \alpha$ i $|\sphericalangle ABC| = \beta$ (zobacz rysunek).



Wykaż, że $\alpha = 180° - 2\beta$.

Zadanie 17.18. [matura, czerwiec 2017, zad. 28. (2 pkt)]

Dwusieczna kąta ostrego ABC przecina przyprostokątną AC trójkąta prostokątnego ABC w punkcie D.



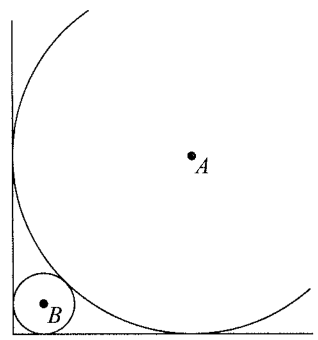
Udowodnij, że jeżeli $|AD| = |BD|$, to $|CD| = \frac{1}{2} \cdot |BD|$.

Zadanie 17.19. [matura, sierpień 2017, zad. 29. (2 pkt)]

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$ i $|\sphericalangle ABC| = 60°$. Niech D oznacza punkt wspólny wysokości poprowadzonej z wierzchołka C kąta prostego i przeciwprostokątnej AB tego trójkąta. Wykaż, że $|AD| : |BD| = 3 : 1$.

Zadanie 17.20. [matura, maj 2018, zad. 29. (2 pkt)]

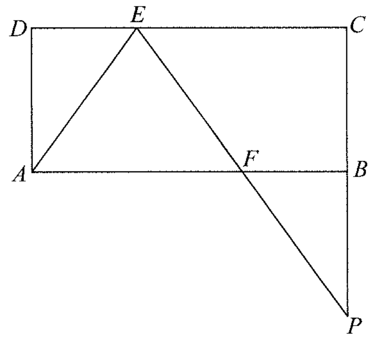
Okręgi o środkach odpowiednio A i B są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest styczny do obu ramion danego kąta prostego (zobacz rysunek). Promień okręgu o środku A jest równy 2.



Uzasadnij, że promień okręgu o środku B jest mniejszy od $\sqrt{2} - 1$.

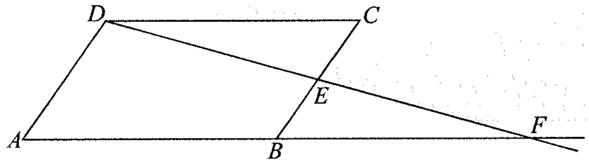
Zadanie 17.21. [matura, czerwiec 2018, zad. 29. (2 pkt)]

Dany jest prostokąt $ABCD$. Na boku CD tego prostokąta wybrano taki punkt E, że $|EC| = 2|DE|$, a na boku AB wybrano taki punkt F, że $|BF| = |DE|$. Niech P oznacza punkt przecięcia prostej EF z prostą BC (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąty AED i FPB są przystające.



Zadanie 17.22. [matura, sierpień 2018, zad. 28. (2 pkt)]

W równoległoboku $ABCD$ punkt E jest środkiem boku BC. Z wierzchołka D poprowadzono prostą przecinającą bok BC w punkcie E. Proste AB i DE przecinają się w punkcie F (zobacz rysunek). Wykaż, że punkt B jest środkiem odcinka AF.



18. Dowody (algebra)

Zadanie 18.1. [matura, maj 2010, zad. 30. (2 pkt)]

Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$.

Zadanie 18.2. [matura, sierpień 2010, zad. 31. (2 pkt)]

Wykaż, że jeżeli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $\sqrt{a^2+b} = \sqrt{a+b^2}$, to $a = b$ lub $a + b = 1$.

Zadanie 18.3. [matura, maj 2011, zad. 25. (2 pkt)]

Uzasadnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$.

Zadanie 18.4. [matura, czerwiec 2011, zad. 27. (2 pkt)]

Uzasadnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością liczby 10.

Zadanie 18.5. [matura, sierpień 2011, zad. 25. (2 pkt)]

Udowodnij, że iloczyn kolejnych liczb naturalnych od, 1 do 16, czyli $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 16$, jest podzielny przez 2^{15}.

Zadanie 18.6. [matura, maj 2012, zad. 27. (2 pkt)]

Uzasadnij, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $0 < a < b < c$, to

$$\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}.$$

Zadanie 18.7. [matura, czerwiec 2012, zad. 29. (2 pkt)]

Uzasadnij, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

Zadanie 18.8. [matura, sierpień 2012, zad. 31. (2 pkt)]

Wykaż, że jeżeli $c < 0$, to trójmian kwadratowy $y = x^2 + bx + c$ ma dwa różne miejsca zerowe.

Zadanie 18.9. [matura, maj 2013, zad. 28. (2 pkt)]

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z takich, że $x + y + z = 0$, prawdziwa jest nierówność $xy + yz + zx \leq 0$.
Możesz skorzystać z tożsamości $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

Zadanie 18.10. [matura, maj 2013, zad. 31. (2 pkt)]

Wykaż, że liczba $6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.

Zadanie 18.11. [matura, czerwiec 2013, zad. 30. (2 pkt)]

Wykaż, że liczba $(1 + 2013^2)(1 + 2013^4)$ jest dzielnikiem liczby
$1 + 2013 + 2013^2 + 2013^3 + 2013^4 + 2013^5 + 2013^6 + 2013^7$.

Zadanie 18.12. [matura, sierpień 2013, zad. 30. (2 pkt)]

Uzasadnij, że jeżeli a jest liczbą rzeczywistą różną od zera i $a + \frac{1}{a} = 3$, to $a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$.

Zadanie 18.13. [matura, maj 2014, zad. 28. (2 pkt)]

Udowodnij, że każda liczba całkowita k, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, ma tę własność, że reszta z dzielenia liczby $3k^2$ przez 7 jest równa 5.

Zadanie 18.14. [matura, czerwiec 2014, zad. 27. (2 pkt)]

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b prawdziwa jest nierówność $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

Zadanie 18.15. [matura, sierpień 2014, zad. 28. (2 pkt)]

Wykaż, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jest podzielna przez 24.

Zadanie 18.16. [matura, maj 2015, zad. 27. (2 pkt)]

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$.

Zadanie 18.17. [matura, czerwiec 2015, zad. 29. (2 pkt)]

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność
$4x^2 + 5y^2 - 4xy \geq 0$.

Zadanie 18.18. [matura, sierpień 2015, zad. 30. (2 pkt)]

Wykaż, że dla wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność
$x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$.

Zadanie 18.19. [matura, maj 2016, zad. 30. (2 pkt)]

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n^2 + 2n$ dla $n \geq 1$. Wykaż, że suma każdych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 18.20. [matura, czerwiec 2016, zad. 28. (2 pkt)]

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność
$x^4 + y^4 + x^2 + y^2 \geq 2(x^3 + y^3)$.

Zadanie 18.21. [matura, sierpień 2016, zad. 28. (2 pkt)]

Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $abc = 1$, to
$a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = ab + bc + ca$.

Zadanie 18.22. [matura, maj 2017, zad. 27. (2 pkt)]

Wykaż, że liczba $4^{2017} + 4^{2018} + 4^{2019} + 4^{2020}$ jest podzielna przez 17.

Zadanie 18.23. [matura, czerwiec 2017, zad. 29. (2 pkt)]

Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $(1,5)^{100} < 6^{25}$.

Zadanie 18.24. [matura, sierpień 2017, zad. 28. (2 pkt)]

Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność
$$4x + \frac{1}{x} \geq 4.$$

Zadanie 18.25. [matura, maj 2018, zad. 28. (2 pkt)]

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b prawdziwa jest nierówność
$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} \geq \frac{2}{a+b}.$$

Zadanie 18.26. [matura, czerwiec 2018, zad. 28. (2 pkt)]

Wykaż, że reszta z dzielenia sumy kwadratów czterech kolejnych liczb naturalnych przez 8 jest równa 6.

Zadanie 18.27. [matura, sierpień 2018, zad. 29. (2 pkt)]

Wykaż, że jeżeli a i b są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$.

19. Inne

Zadanie 19.1.^{R} [matura, sierpień 2010, zad. 34. (5 pkt)]

Kolarz przejechał trasę długości 60 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością większą o 1 km/h, to przejechałby tę trasę w czasie o 6 minut krótszym. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten kolarz.

Zadanie 19.2.^{R} [matura, maj 2011, zad. 32. (5 pkt)]

Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Zadanie 19.3.^{R} [matura, maj 2012, zad. 34. (5 pkt)]

Miasto A i miasto B łączy linia kolejowa długości 210 km. Średnia prędkość pociągu pospiesznego na tej trasie jest o 24 km/h większa od średniej prędkości pociągu osobowego. Pociąg pospieszny pokonuje tę trasę o 1 godzinę krócej niż pociąg osobowy. Oblicz czas pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny.

Zadanie 19.4.^{R} [matura, sierpień 2012, zad. 34. (5 pkt)]

Kolarz pokonał trasę 114 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością mniejszą o 9,5 km/h, to pokonałby tę trasę w czasie o 2 godziny dłuższym. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten kolarz.

Zadanie 19.5.^{R} [matura, maj 2013, zad. 34. (5 pkt)]

Dwa miasta łączy linia kolejowa o długości 336 kilometrów. Pierwszy pociąg przebył tę trasę w czasie o 40 minut krótszym niż drugi pociąg. Średnia prędkość pierwszego pociągu na tej trasie była o 9 km/h większa od średniej prędkości drugiego pociągu. Oblicz średnią prędkość każdego z tych pociągów na tej trasie.

Zadanie 19.6.^{R} [matura, czerwiec 2013, zad. 33. (5 pkt)]

Grupa znajomych wykupiła wspólnie dostęp do Internetu na okres jednego roku. Opłata miesięczna wynosiła 120 złotych. Podzielono tę kwotę na równe części, by każdy ze znajomych płacił tyle samo. Po upływie miesiąca do grupy dołączyły jeszcze dwie osoby i wówczas opłata miesięczna przypadająca na każdego użytkownika zmniejszyła się o 5 złotych. Ile osób liczyła ta grupa w pierwszym miesiącu użytkowania Internetu?

Zadanie 19.7.^{R} [matura, maj 2014, zad. 33. (5 pkt)]

Turysta zwiedzał zamek stojący na wzgórzu. Droga łącząca parking z zamkiem ma długość 2,1 km. Łączny czas wędrówki turysty z parkingu do zamku i z powrotem, nie licząc czasu poświęconego na zwiedzanie, był równy 1 godzinę i 4 minuty. Oblicz, z jaką średnią prędkością turysta wchodził na wzgórze, jeżeli prędkość ta była o $1\frac{\text{km}}{\text{h}}$ mniejsza od średniej prędkości, z jaką schodził ze wzgórza.

Zadanie 19.8.^{R} [matura, czerwiec 2014, zad. 33. (5 pkt)]

Trasę etapu wyścigu kolarskiego o długości 150 km pan Nowak pokonał w czasie o 1 godzinę i 50 minut krótszym niż jego kolega z drużyny, pan Kowalski. Średnia wartość prędkości, z jaką pan Nowak jechał na tym etapie, była o 11 km/h większa od średniej wartości prędkości pana Kowalskiego na tej trasie. Oblicz średnie wartości prędkości, z jakimi przejechali całą trasę obaj zawodnicy.

Zadanie 19.9.^{R} [matura, sierpień 2014, zad. 32. (5 pkt)]

Miasta A i B są odległe o 450 km. Pani Danuta pokonała tę trasę swym samochodem w czasie o 75 minut dłuższym niż pani Lidia. Wartość średniej prędkości, z jaką jechała pani Danuta na całej trasie, była o 18 km/h mniejsza od wartości średniej prędkości, z jaką jechała pani Lidia. Oblicz średnie wartości:

- prędkości, z jaką pani Danuta jechała z A do B.
- prędkości, z jaką pani Lidia jechała z A do B.

Zadanie 19.10. [matura, maj 2015, zad. 31. (2 pkt)]

Jeżeli do licznika i do mianownika nieskracalnego dodatniego ułamka dodamy połowę jego licznika, to otrzymamy $\frac{4}{7}$, a jeżeli do licznika i do mianownika dodamy 1, to otrzymamy $\frac{1}{2}$. Wyznacz ten ułamek.

Zadanie 19.11.^{R}. [matura, maj 2015, zad. 34 swe. (5 pkt)]

Biegacz narciarski Borys wyruszył na trasę biegu o 10 minut później niż inny zawodnik, Adam. Metę zawodów, po przebyciu 15-kilometrowej trasy biegu, obaj zawodnicy pokonali równocześnie. Okazało się, że wartość średniej prędkości na całej trasie w przypadku Borysa była o $4,5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ większa niż w przypadku Adama. Oblicz, w jakim czasie Adam pokonał całą trasę biegu.

Zadanie 19.12.^{R}. [matura, maj 2016, zad. 33 swe. (5 pkt)]

Grupa znajomych wyjeżdżających na biwak wynajęła bus. Koszt wynajęcia busa jest równy 960 złotych i tę kwotę rozłożono po równo pomiędzy uczestników wyjazdu. Do grupy wyjeżdżających dołączyło w ostatniej chwili dwóch znajomych. Wtedy koszt wyjazdu przypadający na jednego uczestnika zmniejszył się o 16 złotych. Oblicz, ile osób wyjechało na biwak.

Zadanie 19.13. [matura, sierpień 2016, zad. 27. (2 pkt)]

Jeżeli do licznika pewnego nieskracalnego ułamka dodamy 32, a mianownik pozostawimy niezmieniony, to otrzymamy liczbę 2. Jeżeli natomiast od licznika i od mianownika tego ułamka odejmiemy 6, to otrzymamy liczbę $\frac{8}{17}$. Wyznacz ten ułamek.

Zadanie 19.14. [matura, czerwiec 2016, zad. 33. (4 pkt)]

Rejsowy samolot z Warszawy do Rzymu przelatuje nad Austrią każdorazowo tą samą trasą z taką samą zakładaną prędkością przelotową. We wtorek jego średnia prędkość była o 10% większa niż prędkość przelotowa, a w czwartek średnia prędkość była o 10% mniejsza od zakładanej prędkości przelotowej. Czas przelotu nad Austrią w czwartek różnił się od wtorkowego o 12 minut. Jak długo trwał przelot tego samolotu nad Austrią we wtorek?

Szkice rozwiązań

1. Liczby. Potęgi

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
1.1	$\left(\frac{2^{-2}\cdot 3^{-1}}{2^{-1}\cdot 3^{-2}}\right)^0=1$	**A**
1.2	$81^2\cdot 9^4=(3^4)^2\cdot(3^2)^4=3^8\cdot 3^8=3^{16}$	**C**
1.3	$\left(2-\sqrt{3}\right)^2=4-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3}$	**A**
1.4	$\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=2\sqrt{5}$	**D**
1.5	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-5}=\left(\frac{b}{a}\right)^5$	**B**
1.6	$(a-b)(a+b)=200,\ (a-b)\cdot 8=200,\ a-b=25$	**A**
1.7	$\sqrt[3]{(-8)^{-1}}\cdot 16^{\frac{3}{4}}=-\frac{1}{2}\cdot 8=-4$	**B**
1.8	$\left(3-\sqrt{2}\right)^2+4\left(2-\sqrt{2}\right)=9-6\sqrt{2}+2+8-4\sqrt{2}=19-10\sqrt{2}$	**A**
1.9	$\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}=\frac{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}=\left(\sqrt{5}+2\right)^2=9+4\sqrt{5}$	**D**
1.10	$\left(a+2\sqrt{2}\right)^2=a^2+4a\sqrt{2}+8,\ 4a=28,\ a=7$	**C**
1.11	$9^{-5}\cdot 3^8=9^{-5}\cdot 9^4=9^{-1}$	**C**
1.12	$\left(2-3\sqrt{2}\right)^2=4-12\sqrt{2}+18=22-12\sqrt{2}$	**D**
1.13	$\frac{\sqrt{50}-\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$	**B**
1.14	$\left(\sqrt[3]{16}\cdot 4^{-2}\right)^3=4^2\cdot 4^{-6}=4^{-4}$	**B**

1.15	$\frac{5^3 \cdot 25}{\sqrt{5}} = \frac{5^3 \cdot 5^2 \cdot \sqrt{5}}{5} = 5^4\sqrt{5}$	**B**
1.16	$2(a+b+c) = 3+4+5,\ a+b+c = 6$	**B**
1.17	$\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}+1-\left(\sqrt{3}-1\right) = 2$	**C**
1.18	$\left(\frac{1}{\left(\sqrt[3]{729}+\sqrt[4]{256}+2\right)^0}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{1}\right)^{-2} = 1$	**C**
1.19	$\frac{3^{27}+3^{26}}{3^{26}+3^{25}} = \frac{3^{26}(3+1)}{3^{25}(3+1)} = 3$	**B**
1.20	$\frac{1}{2} \cdot 2^{2014} = 2^{-1} \cdot 2^{2014} = 2^{2013}$	**A**
1.21	$\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{15} = 5 - 2\sqrt{15} + 3 + 2\sqrt{15} = 8$	**B**
1.22	$m = \frac{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}{5} = \frac{20}{5} = 4$	**B**
1.23	$2^{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{3}} = 2^3$	**D**
1.24	$2\sqrt{18} - \sqrt{32} = 2\sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{16 \cdot 2} = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$	**D**
1.25	$\frac{\sqrt[5]{-32} \cdot 2^{-1}}{4} \cdot 2^2 = -2 \cdot 2^{-1} = -1$	**D**
1.26	$\frac{(0,2)^3}{\sqrt[4]{25^{-3}}} = \frac{5^{-3}}{5^{-\frac{6}{4}}} = 5^{-3+\frac{3}{2}} = 5^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5^3}}$	**B**
1.27	$17^3 + m^3 = (17+m)(17^2 - 17m + m^2),\ m = 2$	**C**
1.28	$\frac{a \cdot b}{a+b} = \frac{3}{\frac{3}{2}+2} = \frac{6}{7}$	**C**
1.29	$\frac{9^5 \cdot 5^9}{45^5} = \frac{9^5 \cdot 5^9}{9^5 \cdot 5^5} = 5^4$	**D**

1.30	$\sqrt{\frac{9}{7}}+\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{3}{\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{16}{3\sqrt{7}}$	**B**
1.31	$\frac{a+b}{a\cdot b}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{7}{6}\cdot 3=\frac{7}{2}$	**A**
1.32	$\frac{5^{12}\cdot 9^5}{15^{10}}=\frac{5^{12}\cdot 3^{10}}{5^{10}\cdot 3^{10}}=5^2=25$	**A**
1.33	$\frac{2}{7}=0,(285714)$	**D**
1.34	$\frac{a^{-2,6}}{a^{1,3}}=a^{-3,9}$	**A**
1.35	$\frac{7^6\cdot 6^7}{42^6}=\frac{7^6\cdot 6^7}{7^6\cdot 6^6}=6$	**C**
1.36	$\sqrt[3]{3\sqrt{3}}=\left(3\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$	**D**
1.37	$50001^2-49999^2=(50001-49999)\cdot(50001+49999)=200\,000$	**B**
1.38	$5\text{t}=5\,000\,000\text{ g}=10\,000\,000\cdot 0,5=10^7\cdot 0,5$	**B**
1.39	$37+38+39+40+41=195$	**A**
1.40	$\frac{4^5\cdot 5^4}{20^4}=\frac{4^5\cdot 5^4}{4^4\cdot 5^4}=4$	**D**
1.41	$5^8\cdot 16^{-2}=5^8\cdot 2^{-8}=\left(\frac{5}{2}\right)^8$	**A**
1.42	$\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{27\cdot 2}-\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}$	**C**
1.43	$\left(-\sqrt{2}-2\right)^2=\left(2+\sqrt{2}\right)^2$	**C**
1.44	$16^{24}+16^{24}+16^{24}+16^{24}=4\cdot 16^{24}=4^{49}$	**D**
1.45	$a^b-b^a=(-2)^3-3^{-2}=-8-\frac{1}{9}=-\frac{73}{9}$	**C**
1.46	$9^9\cdot 81^2=9^9\cdot 9^4=9^{13}$	**C**
1.47	$\left(2\sqrt{7}-5\right)^2\cdot\left(2\sqrt{7}+5\right)^2=\left(\left(2\sqrt{7}-5\right)\cdot\left(2\sqrt{7}+5\right)\right)^2=3^2=9$	**A**

1.48	$\sqrt[3]{\frac{7}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{81}{56}}=\sqrt[3]{\frac{7}{3}\cdot\frac{81}{56}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{3}{2}$	**C**
1.49	$\frac{a}{b}=\frac{3,6\cdot 10^{-12}}{2,4\cdot 10^{-20}}=1,5\cdot 10^{8}$	**C**
1.50	$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2=\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+1-\sqrt{2}+1\right)^2=4$	**A**
1.51	$\frac{224}{1111}=0,(2016)$	**D**
1.52	$\frac{8^{20}-2\cdot 4^{20}}{2^{20}\cdot 4^{10}}=\frac{2^{60}-2^{41}}{2^{20}\cdot 2^{20}}=\frac{2^{41}(2^{19}-1)}{2^{40}}=2(2^{19}-1)=2^{20}-2$	**B**
1.53	$\sqrt{\sqrt[3]{2}}=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{6}}$	**A**
1.54	$\frac{x}{y}=\frac{4,5\cdot 10^{-8}}{1,5\cdot 10^{2}}=3\cdot 10^{-10}$	**A**
1.55	$(a+2\sqrt{3})^2=a^2+4a\sqrt{3}+12,\ a=1$	**B**

2. Logarytmy

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
2.1	$\log_4 8+\log_4 2=\log_4 16=2$	**B**
2.2	$\log_3 9-\log_3 1=2-0=2$	**C**
2.3	$2x-1>0,\ x>\frac{1}{2}$	**B**
2.4	$\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$	**A**
2.5	$\log_2 4+2\log_3 1=2+2\cdot 0=2$	**C**
2.6	$2\cdot\log_{\frac{1}{3}} 9=2\cdot(-2)=-4$	**B**
2.7	$\log_3 27-\log_3 1=3-0=3$	**D**
2.8	$\log 100-\log_2 8=2-3=-1$	**B**
2.9	$\log_2 20-\log_2 5=\log_2 4=2$	**B**

2.10	$\log 4 + \log 5 - \log 2 = \log 10 = 1$	**C**
2.11	$\log_2 100 - \log_2 50 = \log_2 2 = 1$	**B**
2.12	$\log_8 16 + 1 = \dfrac{\log_2 16}{\log_2 8} + 1 = \dfrac{4}{3} + 1 = \dfrac{7}{3}$	**D**
2.13	$a = \log_3 \dfrac{1}{9} = -2,\ b = \log_3 3 = 1,\ c = \log_3 \dfrac{1}{27} = -3$	**D**
2.14	$c = \log_3 2 \Leftrightarrow 3^c = 2$	**B**
2.15	$abc = -\dfrac{1}{27} \cdot (-3) \cdot (-3) = -\dfrac{1}{3}$	**B**
2.16	$2 \log_5 10 - \log_5 4 = \log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 25 = 2$	**A**
2.17	$8 \log_4 2 + 2 = 8 \cdot \dfrac{1}{2} + 2 = 6$	**B**
2.18	$\log_5 0{,}04 - \dfrac{1}{2}\log_{25} 5 \cdot \log_{25} 1 = -2 - \dfrac{1}{2}\log_{25} 5 \cdot 0 = -2$	**C**
2.19	$\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2} = 3$	**D**
2.20	$A = A_0\ 10^R = 10^{-4} 10^{6,2} = 10^{2,2} > 100$	
2.21	$\log_3 \dfrac{3}{2} + \log_3 \dfrac{2}{9} = \log_3 \dfrac{1}{3} = -1$	**A**
2.22	$\dfrac{\log_3 729}{\log_6 36} = \dfrac{6}{2} = 3$	**B**
2.23	$2\log_2 3 - 2\log_2 5 = \log_2 9 - \log_2 25 = \log_2 \dfrac{9}{25}$	**A**
2.24	$\log_3 27 - \log_3 1 = 3 - 0 = 3$	**D**
2.25	$\log_4 8 + 5 \log_4 2 = \log_4 2^3 + \log_4 2^5 = \log_4 2^8 = \log_4 4^4 = 4$	**B**
2.26	$2\log_3 6 - \log_3 4 = \log_3 \dfrac{6^2}{4} = \log_3 9 = 2$	**B**
2.27	$a = \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3,\ b = \log_4 8 = \dfrac{3}{2},\ c = \log_4 \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$	**D**
2.28	$\log_4 96 - \log_4 6 = \log_4 16 = 2$	**D**

3. Procenty

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
3.1	$\frac{126}{0,7} = 180$	**B**
3.2	$1,22 \cdot 60 = 73,2$	**A**
3.3	$\frac{189}{0,09} = 2100$	**B**
3.4	$1,1 \cdot (0,8 \cdot c) = 0,88 \cdot c$	**A**
3.5	$x + 0,15x = 230$	**C**
3.6	$0,7 \cdot (0,8 \cdot c) = 0,56 \cdot c$	**A**
3.7	$\frac{3000}{0,015} = 200\,000$	**C**
3.8	$(1,1)^2 = 1,21$	**C**
3.9	$0,12a = 0,15b$. Stąd $a = \frac{0,15b}{0,12} = 1,25b$	**B**
3.10	$x = 0,7y$. Stąd $y = \frac{x}{0,7} = \frac{10}{7}x$	**C**
3.11	$0,17 \cdot 21 - 0,21 \cdot 17 = 0$	**A**
3.12	$78 = 1,5c$. Stąd $c = 52$	**B**
3.13	$\frac{12}{12+8+3+2} = 0,48$	**C**
3.14	$k - 0,5k - 0,1 \cdot 0,5k = 0,45k$	**C**
3.15	$1000 + 0,04 \cdot 1000 - 0,19 \cdot (0,04 \cdot 1000) = 1000\left(1 + \frac{4}{100}\left(1 - \frac{19}{100}\right)\right)$	**C**
3.16	$1,23 \cdot \left(\frac{34347}{1,07}\right) = 1,23 \cdot 32100 = 39483$	**C**
3.17	$\frac{45018}{1,23} = 36600$	**B**

3.18	$\left(\frac{5}{16}-0,3\right):\frac{5}{16}=\left(\frac{5}{16}-\frac{3}{10}\right)\cdot\frac{16}{5}=1-\frac{48}{50}=0,04$	**A**
3.19	$(0,8\cdot 40)\cdot(1,2\cdot 100)=0,96\cdot(40\cdot 100)$	**D**
3.20	$0,8\cdot(0,8\cdot c)=0,64\cdot c$	**B**
3.21	$0,48a=0,32c$. Stąd $c=1,5a$	**A**
3.22	$1,3\cdot(1,2\cdot c)=1,56\cdot c$	**B**
3.23	$\frac{220-176}{220}=0,2$	**B**
3.24	$\frac{8910}{2,2}=4050$	**A**
3.25	$0,15a=0,1b$. Stąd $a=\frac{2}{3}b$, $a\cdot b=\frac{2}{3}b^2=1350$, $b^2=2025$, $b=45$	**C**
3.26	$1,3^2=1,69$	**D**
3.27	$0,85x=850$, $x=\frac{850}{0,85}=1000$	**C**
3.28	$0,9\cdot(0,9\,x)=1944$, $x=\frac{1944}{0,81}=2400$	**C**
3.29	$0,1\cdot x=2018$, $x=20180$, $20180-2018=18162$	**B**

4. Wartość bezwzględna

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
4.1	$\lvert x+7\rvert>5 \Leftrightarrow x+7<-5$ lub $x+7>5 \Leftrightarrow x<-12$ lub $x>-2$	**C**
4.2	$-4<x<2 \Leftrightarrow -3<x+1<3 \Leftrightarrow \lvert x+1\rvert<3$	**B**
4.3	$\pi<3\frac{1}{3}$. Stąd $\pi+\frac{2}{3}<4$.	**C**
4.4	$\lvert 4\cdot 1-5\rvert=1$	**B**
4.5	$\lvert 5-2\rvert+\lvert 1-6\rvert=3+5=8$	**A**
4.6	$\lvert 3\cdot 1+1\rvert=4\cdot 1$	**B**

4.7	$\|2x+3\| = 5 \Leftrightarrow 2x+3=5$ lub $2x+3=-5 \Leftrightarrow x=1$ lub $x=-4$	**A**
4.8	$\|x+4\| \leq 7 \Leftrightarrow -7 \leq x+4 \leq 7 \Leftrightarrow -11 \leq x \leq 3$	**A**
4.9	$\|x+4\| < 5 \Leftrightarrow -5 < x+4 < 5 \Leftrightarrow -9 < x < 1$	**A**
4.10	$-1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x-1 \leq 2 \Leftrightarrow \|x-1\| \leq 2$	**C**
4.11	$\frac{\|x+3\|-x+3}{x} = \frac{x+3-x+3}{x} = \frac{6}{x}$	**D**
4.12	$\sqrt{(x+1)^2} = \|x+1\|$	**D**
4.13	$-8 < x < 22 \Leftrightarrow -15 < x-7 < 15 \Leftrightarrow \|x-7\| < 15$	**A**
4.14	$\|x+4{,}5\| \geq 6 \Leftrightarrow x \leq -10{,}5$ lub $x \geq 1{,}5$. Stąd $x = 2$	**B**
4.15	$-4 < x < 2 \Leftrightarrow -3 < x+1 < 3 \Leftrightarrow \|x+1\| < 3$	**C**
4.16	$\frac{\|3-9\|}{-3} = \frac{6}{-3} = -2$	**B**
4.17	$\|9-2\| - \|4-7\| = 7-3 = 4$	**A**

5. Równania. Nierówności

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
5.1	$\frac{3x-1}{7x+1} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 15x-5 = 14x+2$ i $x \neq -\frac{1}{7} \Leftrightarrow x = 7$	**D**
5.2	$(x-2)(x+3) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 2)$	**D**
5.5	$x(x+5) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$	**B**
5.6	$\frac{x^2-4}{(x-4)(x+4)} = 0 \Leftrightarrow x^2-4 = 0$ i $x \neq \pm 4 \Leftrightarrow x = -2$ lub $x = 2$	**C**
5.9	$x(x+3) - 49 = x(x-4) \Leftrightarrow 3x - 49 = -4x \Leftrightarrow x = 7$	**D**
5.10	$\frac{3}{8} + \frac{x}{6} < \frac{5x}{12} \Leftrightarrow 9 + 4x < 10x \Leftrightarrow 9 < 6x \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x$	**B**
5.11	$3(x-1)(x-5) \leq 0$ i $x > 1 \Leftrightarrow x \in (1, 5\rangle$	**C**

5.13	$\frac{x^2+25}{x-5}=0 \Leftrightarrow x^2+25=0$ i $x\neq 5 \Leftrightarrow x\in\varnothing$	**A**
5.14	$(3-x)(3+x)>(3-x)^2 \Leftrightarrow (3-x)2x>0 \Leftrightarrow x\in(0,3)$	**B**
5.15	$x_1+x_2=5-7=-2$	**B**
5.17	$3(2-3x)=x-4 \Leftrightarrow 6-9x=x-4 \Leftrightarrow 10=10x \Leftrightarrow x=1$	**A**
5.19	$x_1+x_2=\frac{-3}{2}$	**C**
5.20	$-3(x-7)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=7$ lub $x=-2$	**A**
5.23	$(x+5)(x-3)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=-5$ lub $x=3$	**A**
5.25	$x(x+6)<0 \Leftrightarrow x\in(-6,0)$	**A**
5.26	$\frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+2)}=0 \Leftrightarrow x=-3$ lub $x=2$	**B**
5.29	$\frac{x}{2}\leq\frac{2x}{3}+\frac{1}{4} \Leftrightarrow 6x\leq 8x+3 \Leftrightarrow 2x\geq -3 \Leftrightarrow x\geq -\frac{3}{2}$	**B**
5.30	$(x+1)(x+2)(x^2+3)=0 \Leftrightarrow x=-1$ lub $x=-2$	**C**
5.33	$3x(x^2+5)(2-x)(x+1) \Leftrightarrow x=0$ lub $x=2$ lub $x=-1$	**B**
5.35	$2(3-x)>x \Leftrightarrow 6>3x \Leftrightarrow x<2$	**D**
5.38	$\frac{2x-10}{x-1}=0 \Leftrightarrow x=5,\ (5^2-1)(5-10)(5-5)=0$	**C**
5.39	$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{-2}+\frac{1}{2}=0$	**B**
5.42	$\frac{x-5}{7-x}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x-15=7-x$ i $x\neq 7 \Leftrightarrow 4x=22 \Leftrightarrow x=\frac{11}{2}$	**B**
5.45	$-4\leq x-1\leq 4 \Leftrightarrow -3\leq x\leq 5$	**C**
5.46	$x_1+x_2+x_3=-3-7+11=1$	**C**
5.47	$\frac{x-1}{x+1}=x-1 \Leftrightarrow x-1=x^2-1$ i $x\neq -1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x=0, x=1$	**D**
5.48	$\frac{2}{7}<\frac{x}{14}<\frac{4}{3} \Leftrightarrow 4<x<\frac{56}{3}=18\frac{2}{3},\ x\in\{5,6,7,\ldots,18\}$	**A**
5.50	$\frac{3}{5}-\frac{2x}{3}\geq\frac{x}{6} \Leftrightarrow 18-20x\geq 5x \Leftrightarrow 18\geq 25x \Leftrightarrow x\leq\frac{18}{25}$	**B**

5.51	$\frac{2x-4}{3-x}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow 6x-12=12-4x$ i $x \neq 3 \Leftrightarrow x=\frac{12}{5}$	**B**
5.54	$\Delta=121-24=97,\ x_1=\frac{-11-\sqrt{97}}{4}<0,\ x_2=\frac{-11+\sqrt{97}}{4}<0$	**D**
5.55	$x^2(x+5)(2x-3)(x^2-7)=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=-5,\ x_3=\frac{3}{2},\ x_{4/5}=\pm\sqrt{7}$	**D**
5.58	$\frac{-2(x-3)}{x}=x-2 \Leftrightarrow -2x+6=x^2-2x \Leftrightarrow 6=x^2 \Leftrightarrow x_1=\sqrt{6},\ x_2=-\sqrt{6}$	**C**
5.61	$2(x-2) \leq 4(x-1)+1 \Leftrightarrow 2x-4 \leq 4x-3 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$	**C**
5.62	$x^2(x+1)=x^2-8 \Leftrightarrow x^3=-8 \Leftrightarrow x=-2$	**B**
5.65	$\frac{x}{4}-\sqrt{3}<0 \Leftrightarrow x<4\sqrt{3} \approx 6,9$	**B**
5.66	$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4} \Leftrightarrow x_1=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3,\ x_2=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=-2$	**D**
5.69	$-2^5+2^3-2=-32+16-2=-18<-2$	**C**
5.70	$\frac{3x-1}{x+5}=3 \Leftrightarrow 3x-1=3x+15$ i $x \neq -5$	**A**
5.75	$(x-8)(x^2-4)(x^2+16)=0 \Leftrightarrow x=8$ lub $x=2$ lub $x=-2$	**C**
5.76	$\frac{x-7}{x}=5 \Leftrightarrow x-7=5x$ i $x \neq 0 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{4}$	**B**
5.77	$\frac{a+54}{2}=2a \Leftrightarrow 54=3a \Leftrightarrow a=18$	**B**
5.79	$\frac{x}{5}+\sqrt{7}>0 \Leftrightarrow x>-5\sqrt{7} \approx -13,22$	**B**
5.81	$(x^4+1)(2-x)>0 \Leftrightarrow 2-x>0 \Leftrightarrow x<2$	**D**
5.82	$2-3x \geq 4 \Leftrightarrow -3x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -\frac{2}{3}$	**D**
5.83	$x(x^2-4)(x^2+4)=0 \Leftrightarrow x=0$ lub $x=-2$ lub $x=2$	**C**
5.85	$x(x-3)(x^2+25)=0 \Leftrightarrow x=0$ lub $x=3$	**C**

5.87	$11 \le 2x - 7 \le 15 \Leftrightarrow 18 \le 2x \le 22 \Leftrightarrow 9 \le x \le 11$	**D**
5.88	$\frac{x+1}{x+2} = 3 \Leftrightarrow x+1 = 3x+6 \text{ i } x \neq -2 \Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$	**D**
5.91	$\frac{1-2x}{2} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3-6x > 2 \Leftrightarrow -6x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{6}$	**A**
5.92	$\begin{cases} x^2 + 2x = 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ lub } x = 0 \\ x \neq 2 \text{ i } x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$	**D**
5.96	$\left(4-(-2)\right)(-2+3)(-2+4) > 0$	**D**
5.97	$k > 0,\ \frac{-9+k}{2} \cdot (10+k) = 21,\ (k-9)(10+k) = 42,\ k = 11,$	**B**
5.98	$x - \frac{1}{2x+1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \text{ i } x \neq -\frac{1}{2},\ \Delta = 9,\ x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{2}$	**A**
5.100	$\frac{x-2}{3(x+2)} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 9x - 18 = 3x + 6 \text{ i } x \neq -2,\ 6x = 24,\ x = 4$	**C**

Zadania otwarte

5.3. $\Delta = 9.\ x_1 = \frac{1-3}{2} = -1,\ x_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$ Odp. $x \in \langle -1, 2 \rangle$.

5.4. $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = (x^2 - 4)(x - 7) = 0.$ Odp. $x \in \{-2, 2\ 7\}$.

5.7. $\Delta = 100.\ x_1 = \frac{14-10}{2} = 2,\ x_2 = \frac{14+10}{2} = 12.$ Odp. $x \in (-\infty, 2) \cup (12, +\infty)$.

5.8. $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = (x^2 + 2)(x - 3) = 0.$ Odp. $x = 3$.

5.12. $\Delta = 64.\ x_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{10+8}{6} = 3.$ Odp. $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 3 \right\rangle$.

5.16. $\Delta = 196.\ x_1 = \frac{-2-14}{-4} = 4,\ x_2 = \frac{-2+14}{-4} = -3.$ Odp. $x \in \langle -3, 4 \rangle$.

5.18. $\Delta = 1.\ x_1 = \frac{3-1}{2} = 1,\ x_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$ Odp. $x \in (1, 2)$.

5.21. $\Delta = 4.\ x_1 = \frac{-8-2}{2} = -5,\ x_2 = \frac{-8+2}{2} = -3.$ Odp. $x \in (-\infty, -5) \cup (-3, +\infty)$.

5.22. $x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = (x^2 - 9)(x + 4) = 0.$ Odp. $x_3 = -3$.

5.24. $\Delta = 49.\ x_1 = \frac{3-7}{2} = -2,\ x_2 = \frac{3+7}{2} = 5.$ Odp. $x \in (-2, 5)$.

5.27. $\Delta = 36.\ x_1 = \dfrac{8-6}{2} = 1,\ x_2 = \dfrac{8+6}{2} = 7.$ Odp. $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 7, +\infty)$.

5.28. $x^3 - 6x^2 - 9x + 54 = (x^2 - 9)(x - 6) = 0.$ Odp. $x \in \{-3, 3, 6\}$.

5.31. $x^3 + 2x^2 - 8x - 16 = (x^2 - 8)(x + 2) = 0.$ Odp. $x \in \left\{-2\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2}\right\}$.

5.32. $\Delta = 9.\ x_1 = \dfrac{7-3}{4} = 1,\ x_2 = \dfrac{7+3}{4} = \dfrac{5}{2}.$ Odp. $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \left\langle \dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.

5.34. $3x^3 - 4x^2 - 3x + 4 = (x^2 - 1)(3x - 4) = 0.$ Odp. $x \in \left\{-1, 1, \dfrac{4}{3}\right\}$.

5.36. $x_1 = 0, x_2 = 3.$ Odp. $x \in \langle 0, 3\rangle$.

5.37. $x^3 - 6x^2 - 12x + 72 = (x^2 - 12)(x - 6) = 0.$ Odp. $x \in \left\{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 6\right\}$.

5.40. $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8 = (9x^2 - 4)(x + 2) = 0.$ Odp. $x \in \left\{-2, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right\}$.

5.41. $x_1 = \dfrac{3}{2}, x_2 = 3.$ Odp. $x \in \left\langle \dfrac{3}{2}, 3\right\rangle$.

5.43. $\Delta = 81.\ x_1 = \dfrac{5-9}{-2} = 2,\ x_2 = \dfrac{5+9}{-2} = -7.$ Odp. $x \in (-\infty, -7) \cup (2, +\infty)$.

5.44. $x^3 - 6x^2 - 11x + 66 = (x^2 - 11)(x - 6) = 0.$ Odp. $x \in \left\{-\sqrt{11}, \sqrt{11}, 6\right\}$.

5.49. $(x - 2)(x - 3) > 0.$ $x_1 = 2, x_2 = 3.$ Odp. $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

5.52. $(x - 2)(2x - 1) > 0.\ x_1 = 2,\ x_2 = \dfrac{1}{2}.$ Odp. $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 2, +\infty)$.

5.53. $4x^3 + 4x^2 - x - 1 = (4x^2 - 1)(x + 1) = 0.$ Odp. $x \in \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$.

5.56. $(x - 3)(3x - 1) > 0.\ x_1 = 3,\ x_2 = \dfrac{1}{3}.$ Odp. $x \in \left\langle \dfrac{1}{3}, 3\right\rangle$.

5.57. $x(x^2 - 2x + 3) = 0.\ \Delta = 8$ Odp. $x = 0$.

5.59. $7(x^2 - 4) \leq 0.\ x_1 = -2, x_2 = 2.$ Odp. $x \in \langle -2, 2\rangle$.

5.60. $x^4 - 2x^3 + 27x - 54 = (x^3 + 27)(x - 2) = 0.$ Odp. $x \in \{-3, 2\}$.

5.63. $3x^2 - 16x + 16 = 0.\ \Delta = 64.$ Odp. $x_1 = \dfrac{16-8}{6} = \dfrac{4}{3},\ x_2 = \dfrac{16+8}{6} = 4.$

5.64. $4(x^2 - 5x + 6) \leq 0.\ x_1 = 2, x_2 = 3.$ Odp. $x \in \langle 2, 3\rangle$.

5.67. $8x^3 + 8x^2 - 3x - 3 = (8x^2 - 3)(x + 1) = 0.$ Odp. $x \in \left\{-1, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right\}.$

5.68. $5(x^2 - 9) \le 0.\ x_1 = -3, x_2 = 3.$ Odp. $x \in \langle -3, 3\rangle.$

5.71. $x(x - 2) < 0.\ x_1 = 0, x_2 = 2.$ Odp. $x \in (0, 2).$

5.72. $\Delta = 64.\ x_1 = \frac{-2-8}{2} = -5,\ x_2 = \frac{-2+8}{2} = 3.$ Odp. $x \in \{-5, 3, 4\}.$

5.73. $\Delta = 49.\ x_1 = \frac{-5-7}{4} = -3,\ x_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}.$ Odp. $x \in (-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right).$

5.74. $x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = (x^2 + 2)(x + 3) = 0.$ Odp. $x = -3.$

5.78. $2x^2 - x - 1 = 0.\ \Delta = 9.$ Odp. $x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1+3}{4} = 1.$

5.80. $(x - 2)(2x + 8) \ge 0.\ x_1 = 2, x_2 = -4.$ Odp. $x \in (-\infty, -4\rangle \cup \langle 2, +\infty).$

5.84. $8x(x - 9) \le 0.\ x_1 = 0, x_2 = 9.$ Odp. $x \in \langle 0, 9\rangle.$

5.86. $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3x - 1) > 0.\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{1}{2}.$ Odp. $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$

5.89. $\Delta = 49.\ x_1 = \frac{-1-7}{4} = -2,\ x_2 = \frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2}.$ Odp. $x \in \left\langle -2, \frac{3}{2}\right\rangle.$

5.90. $(x^2 - 6)(3x + 2) = 0.$ Odp. $x \in \left\{-\sqrt{6}, -\frac{2}{3}, \sqrt{6}\right\}.$

5.93. $2x^2 - 3x - 5 > 0,\ \Delta = 9 + 40 = 49,\ x_1 = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2},\ x_2 = \frac{3-7}{4} = \frac{-4}{4} = -1.$

Odp. $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right).$

5.94. $x^3 + 125 = 0$ lub $x^2 - 64 = 0.$ Odp. $x \in \{-5, -8, 8\}.$

5.95. $0 = x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = (x - 7)(x^2 - 4).$ Odp. $x \in \{7, -2, 2\}.$

5.99. $-2x^2 + x + 1 < 0,\ \Delta = 1 + 8 = 9,\ x_1 = \frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{-1-3}{-4} = 1.$

Odp. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty).$

5.101. $\Delta = 36 + 64 = 100,\ x_1 = \frac{-6-10}{2} = -8,\ x_2 = \frac{-6+10}{2} = 2.$ Odp. $x \in (-8; 2).$

5.102. $x^3 = -27$ lub $x^2 = 16$ Odp. $x \in \{-3, -4, 4\}.$

6. Funkcja liniowa. Proste

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
6.1	$3m + 3 = 2 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$	**B**
6.2	$a = -3$	**B**
6.3	$m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$	**D**
6.4	Rosnąca. Przecina oś Oy w części ujemnej.	**C**
6.5	$a_1 \cdot a_2 = -1$	**C**
6.6	$\frac{6}{4} = \frac{a}{2} = \frac{15}{10} \Leftrightarrow a = 3$	**D**
6.7	$-\sqrt{2}x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$	**D**
6.8	$a_1 = a_2$ i $y(-2) = 1$	**C**
6.9	$a = -\frac{1}{2}$. Funkcja malejąca. $f(0) = 3$	**D**
6.10	$a = \frac{-2-2}{4+2} = -\frac{2}{3}$	**A**
6.11	$\begin{cases} 2 + 3 \cdot 1 = 5 \\ 2 \cdot 2 - 1 = 3 \end{cases}$	**A**
6.12	$m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$	**A**
6.13	$a = \frac{5-2}{-2-1} = -1.$ $f(x) = -1(x-1) + 2 = -x + 3$	**D**
6.14	$1 \cdot a_2 = -1$, $a_2 = -1$, $b = 5$	**B**
6.15	$f(1) = a + 6 > 6 > 1$	**A**
6.16	$3x - 6y + 7 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{6}$	**A**
6.17	Rosnąca. Przecina oś Oy w części ujemnej.	**C**
6.18	$m \cdot (-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$	**B**

6.19	$-\frac{1}{3}\cdot a_2=-1,\ a_2=3,\ b=0$	**A**
6.20	$\begin{cases}5\cdot 3+3\cdot(-4)=3\\ 8\cdot 3-6\cdot(-4)=48\end{cases}$	**C**
6.21	$1=(m-2)\cdot 0+m-3 \Leftrightarrow m=4$	**D**
6.22	$\frac{2}{m}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow m=3$	**D**
6.23	Malejąca $a<0$. Przecina oś Oy w części ujemnej $b<0$	**A**
6.24	$(2m-1)\cdot(-3)+9=0 \Leftrightarrow m=2$	**C**
6.25	$y=-\frac{1}{2}x+2,\ x+2y-4=0$	**D**
6.26	$a=-0{,}4.\ \ y=-0{,}4x+3$	**A**
6.27	$\begin{cases}3x-5y=0\\ 2x-y=14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=10\\ y=6\end{cases}$	**D**
6.28	$a=\frac{2}{3}$	**B**
6.29	$y=x+1$ i $y=-2x+4$	**A**
6.30	$m^2-4<0 \Leftrightarrow m\in(-2,2)$	**B**
6.31	$a=2$ i $b=2$	**D**
6.32	$a=\frac{3-2}{-2-1}=-\frac{1}{3}.\ \ y=-\frac{1}{3}(x+2)+3=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$	**A**
6.33	$y=-x+1$	**A**
6.34	$f(-2)=-10.\ f(2)=2$	**A**
6.35	$m=1-2m \Leftrightarrow m=\frac{1}{3}$	**C**
6.36	Rosnąca $a>0$. Dodatnie miejsce zerowe $b<0$	**D**
6.37	$a_1\cdot a_2=-1$	**D**
6.38	$\begin{cases}x-y=3\\ 2x+0{,}5y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=3\\ 4x+y=8\end{cases}$. Proste przecinające się	**B**
6.39	$-2=(m-1)5+3 \Leftrightarrow m=0$	**B**

6.40	$-3x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$. $2\cdot\frac{4}{3}+b=0 \Leftrightarrow b=-\frac{8}{3}$	**C**
6.41	$m^2=4m-4 \Leftrightarrow (m-2)^2=0 \Leftrightarrow m=2$	**A**
6.42	$2m\cdot 4m^2=-1 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$	**A**
6.43	$-\frac{2}{3}x+4=0 \Leftrightarrow x=6$	**B**
6.44	$(3-2a)\cdot\frac{1}{2}+2=3 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$	**C**
6.45	$a=\frac{5-3}{2-5}=-\frac{2}{3}$	**B**
6.46	$a=\frac{7+5}{-1-3}=-3$, $y=-3(x+1)+7=-3x+4$	**A**
6.47	$2+a\cdot 1=5$, $a=3$	**D**
6.48	$a=\frac{2+2}{6-0}=\frac{2}{3}$, $b=-2$	**A**
6.49	$y=-3x+6$	**C**
6.50	$a=2, b=-2$	**B**
6.51	$y=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$, $y=\frac{3}{2}x+2$	**A**
6.52	$b=-3$	**A**
6.53	$a=\frac{7-3}{8+4}=\frac{1}{3}$	**D**
6.54	$x=-3m>2$. $m<-\frac{2}{3}$	**A**
6.55	$2\cdot(-1)-3\cdot(-2)=4$. $5\cdot(-1)-6\cdot(-2)=7$	**C**
6.56	$\frac{3}{4}x+6=0$. $x=-8$	**D**
6.57	$\frac{2}{m-1}\cdot m=-1$. $2m=-m+1$. $m=\frac{1}{3}$	**C**

6.58	$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -x - 2 \end{cases}$	**C**
6.59	$a = m < 0$, $b > 0$, $n < 0$	**B**
6.60	$a = 2$, $b = 2$	**A**
6.61	$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$	**D**
6.62	$2m + 5 = 2(m - 1) + 7$	**C**
6.63	$\sqrt{3}(x + 1) = 12$, $x = \frac{12}{\sqrt{3}} - 1 = 4\sqrt{3} - 1$	**C**
6.64	$y = 4(x + 2) + 4 = 4x + 12$	**D**
6.65	$x = \frac{21 \cdot 3}{7} = 9$	**C**
6.66	$2x = 1 + b > 0$, $2y = 1 - b > 0$	**C**
6.67	$a = \frac{5}{-10} = -\frac{1}{2}$	**D**
6.68	Obwód $2(a + b) = 60$, $a + 10 = b$	**A**
6.69	$x = 4$	**A**
6.70	$b = -\sqrt{3}$, $a = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$	**A**
6.71	$a = \frac{1}{3}$, funkcja rosnąca. $b = -1$	**D**
6.72	$\begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + b = -2 \end{cases}$, $\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a = -2 \end{cases}$, $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$	**D**
6.73	$m + 2 = 2m - 1$, $m = 3$	**B**
6.74	$1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ lub $m = -1$. Dla $m = 1$, $y = 0$. Dla $m = -1$, $y = -2$	**C**
6.75	Rosnąca i miejsce zerowe 2. Malejąca i miejsce zerowe 7.	**B**
6.76	$\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + b$, $b = -\sqrt{3}$	**D**
6.77	$3m - 4 = 12 - m$, $m = 4$	**A**

7. Funkcja kwadratowa

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
7.1	$p = 0, q = 3$	**B**
7.2	$p = \frac{-4}{2} = -2$	**A**
7.3	$q = 3, a < 0$	**B**
7.4	$h(x) = (x - 2) \cdot (x + 4), a > 0, x_1 = 2, x_2 = -4$	**A**
7.5	$q = -4, a > 0$	**A**
7.6	$p = \frac{-2}{2} = -1, a > 0$	**A**
7.7	$p = \frac{4}{2} = 2$	**D**
7.8	$p = \frac{-8}{2} = -4$	**B**
7.9	$q = -2, a > 0$	**B**
7.10	$p = 2, q = 4$	**D**
7.11	$2c = 6, c = 3$	**C**
7.12	$a < 0, x_1 = -1, x_2 = 3$	**D**
7.14	$3\left(-\frac{7}{3}\right)^2 + 7\left(-\frac{7}{3}\right) + c = 0,\ \frac{49}{3} - \frac{49}{3} + c = 0, c = 0$	**A**
7.15	$p = \frac{-2+4}{2} = 1, a > 0$	**C**
7.16	$p = \frac{2-4}{2} = -1, a > 0$	**D**
7.17	$q = -3, a < 0$	**C**
7.18	$4 = 3^2 + 3 + c, c = -8, f(1) = 1 + 1 - 8 = -6$	**A**
7.21	$p = \frac{-4}{2} = -2, q = f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) = -4$	**A**
7.22	$p = -3, q = 5, a < 0$	**C**

7.23	$(2,2)\xrightarrow{[-2,0]}(0,2)$	**B**
7.25	$p=\frac{8}{-4}=-2$	**D**
7.26	$q=9,\ a<0$	**D**
7.27	$f(-1)=5, f(2)=8$	**B**
7.28	$p=\frac{-5+11}{2}=3,\ a<0$	**A**
7.29	$p=\frac{1+9}{2}=5,\ a>0$	**A**
7.30	$\Delta=4-12a<0,\ a>\frac{1}{3}$	**D**
7.32	$c=f(0)=3$	**C**
7.34	$p=\frac{-1+3}{2}=1=\frac{-b}{2},\ b=-2$	**A**
7.35	$p=\frac{3+7}{2}=5,\ q=f(5)=(5-3)(7-5)=4$	**D**
7.36	$f(2017)=(2017+2017)(2017-2017)=0$	**C**
7.37	$c=f(0)>0,\ p=\frac{-b}{2}>0 \Leftrightarrow b<0$	**A**
7.39	$x_1+x_2=-3+5=2$	**C**
7.40	$f(x)=x^2-6x-3=(x-3)^2-12$	**C**
7.41	$W=(2,4),\ 2\notin\langle 3,5\rangle, f(3)=-1+4=3, f(5)=-9+4=-5$	**B**
7.42	$a=1, x_1=1, x_2=3$	**D**
7.44	$f(x)=x^2-2x-11=(x-1)^2-12, p=1, q=-12$	**D**
7.45	$x_1=2, x_2=9$	**A**
7.46	$p=2, y(3)=3, y(5)=-5$	**D**

Zadania otwarte

7.13. $f(x)=2(x-4)^2=2x^2-16x+32.$
Odp. $b=-16,\ c=32.$

7.19. $f(0) = 3,\ \ f(4) = -5,\ \ p = \frac{6}{2} = 3,\ \ f(3) = -6.$

Odp. Min = –6, max = 3.

7.20. $f(x) = a(x + 3)^2 + 4,\ \ 3 = f(-1) = a(-1 + 3)^2 + 4,\ \ a = -\frac{1}{4}.$

Odp. $f(x) = -\frac{1}{4}(x + 3)^2 + 4.$

7.24. $p = \frac{0 + 12}{2} = 6,\ \ q = 9,\ \ f(x) = a(x - 6)^2 + 9,\ \ 0 = f(0) = a(0 - 6)^2 + 9,$

$a = -\frac{9}{36} = -\frac{1}{4},\ \ f(x) = -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 9 = -\frac{1}{4}x^2 + 3x.$

Odp. $a = -\frac{1}{4}$, $b = 3$, $c = 0$.

7.31. $f(-6) = 102,\ \ f(6) = -30,\ \ p = \frac{11}{2},\ \ f\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{121}{4} - \frac{121}{2} = -\frac{121}{4} = -30,25.$

Odp. Min = –30,25. Max = 102.

7.33. $p = \frac{-6 + 0}{2} = -3,\ \ q = 6,\ \ f(x) = a(x + 3)^2 + 6.$

$\frac{3}{2} = f(0) = a(0 + 3)^2 + 6.\ \ 9a = \frac{3}{2} - 6 = -\frac{9}{2}.$

Odp. $a = -\frac{1}{2}$.

7.38. $f(x) = a(x + 2)(x - 6),\ \ -5 = f(1) = a \cdot 3 \cdot (-5),\ \ a = \frac{1}{3},$

$p = \frac{-2 + 6}{2} = 2,\ \ f(2) = \frac{1}{3}(2 + 2)(2 - 6) = -\frac{16}{3}$

Odp. Min $= -\frac{16}{3}$.

7.43. $f(0) = c = -5, -\frac{b}{2} = 7, b = -14$

Odp. $b = -14$, $c = -5$.

8. Wyrażenia algebraiczne. Funkcje. Wykresy

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
8.1	$W(x) + P(x) = (-2x^3 + 5x^2 - 3) + (2x^3 + 12x) = 5x^2 + 12x - 3$	**A**
8.2	$y = 2$	**C**
8.3	$x(x-1)(x+1) = x(x^2-1) = x^3 - x$	**C**
8.4	$6 = \frac{a}{2}$, $a = 12$	**D**
8.5	$5a^2 - 10ab + 15a = 5a(a - 2b + 3)$	**B**
8.7	$x^2 - 100 = (x-10)(x+10)$	**B**
8.8	$\langle -4, -1\rangle \cup (1, 3\rangle$	**C**
8.11	$W(x) - V(x) = x^3 + 3x^2 + x - 11 - x^3 - 3x^2 - 1 = x - 12$	**B**
8.12	$y = 0$	**C**
8.13	$\frac{3x+1}{x-2} - \frac{2x-1}{x+3} = \frac{(3x+1)(x+3)-(2x-1)(x-2)}{(x-2)(x+3)} =$ $= \frac{3x^2+10x+3-(2x^2-5x+2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x^2+15x+1}{(x-2)(x+3)}$	**A**
8.14	$2 \cdot 2 + a = 0$, $a = -4$	**D**
8.15	$W(x) = x^6 + x^3 - 2 = (x^3-1)(x^3+2)$	**B**
8.16	$4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$	**C**
8.17	Przesunięcie o 2 w prawo.	**C**
8.19	$\langle -3, 5\rangle$	**A**
8.20	$(5, 7\rangle$	**B**
8.21	Przesunięcie o 1 w dół.	**B**
8.22	$(2x-3)(-4x^2-6x-9) = -8x^3 + 27$	**A**
8.23	$f(2) = \frac{4}{2-1} = 4$	**C**
8.24	$a - b + ab - 1 = a(1+b) - (b+1) = (a-1)(b+1)$	**C**
8.25	$W(x) = (3x^2-2)^2 = 9x^4 - 12x^2 + 4$	**A**
8.26	$f(1) = 3$	**B**

8.27	$y(2) = -2^0 = -1$	**B**
8.29	$ab + a - b - 1 = a(b + 1) - 1(b + 1) = (a - 1)(b + 1)$	**C**
8.30	$2 + 3 + 2 = 7$	**C**
8.31	$a = \frac{b}{c - b}$, $ac - ba = b$, $ac = b(1 + a)$, $b = \frac{a \cdot c}{a + 1}$	**B**
8.32	$(-3, 8\rangle$	**D**
8.33	Dla $x \in \langle -1, 2\rangle, f(x) = 3$ oraz $f(8) = 3$	**A**
8.34	$(-2, 2\rangle$	**D**
8.35	$x^2 - 4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ i $x \neq 4$	**A**
8.37	$3a^2 - 12ab + 12b^2 = 3(a^2 - 4ab + 4b^2) = 3(a - 2b)^2$	**C**
8.38	$\langle 5, 6)$	**C**
8.39	$x(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ lub $x = 1$	**C**
8.40	$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1(x-1)}{(x-1)x} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x}$	**A**
8.41	$(a + 5)^2 = a^2 + 10a + 25$	**D**
8.42	$f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{2\sqrt{2} - 8}{\sqrt{2}} = \frac{\left(2\sqrt{2} - 8\right)\sqrt{2}}{2} = \frac{4 - 8\sqrt{2}}{2} = 2 - 4\sqrt{2}$	**A**
8.43	$9 - (y - 3)^2 = (3 - (y - 3))(3 + y - 3) = (6 - y)y = 6y - y^2$	**B**
8.44	$P' = (-2, 1)$	**C**
8.45	$\left(2\sqrt{2} - a\right)^2 = 8 - 4a\sqrt{2} + a^2$, $a = 3$	**A**
8.46	$f\left(-\sqrt[3]{3}\right) = \frac{2\left(-\sqrt[3]{3}\right)^3}{\left(-\sqrt[3]{3}\right)^6 + 1} = \frac{-6}{9 + 1} = -\frac{3}{5}$	**B**
8.47	$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2 = \min \Leftrightarrow x^2 = \min$ i $y^2 = \max$. Stąd $2^2 - 4^2$	**D**
8.48	$f\left(-\sqrt{2}\right) = \frac{2\left(-\sqrt{2}\right)^3}{\left(-\sqrt{2}\right)^4 + 1} = \frac{-4\sqrt{2}}{4 + 1} = -\frac{4\sqrt{2}}{5}$	**C**
8.49	$(3x^3 - 2x)(-3x^2 - 2) = -9x^5 - 6x^3 + 6x^3 + 4x = -9x^5 + 4x$	**A**
8.50	$2^1 = 2$	**D**

8.51	$x^6 - 2x^3 - 3 = (x^3 - 3)(x^3 + 1)$	**B**
8.52	$b = \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}, \left(2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}\right)^2 = \left(-3\sqrt{3}\right)^2 = 27$	**B**
8.54	$f(2) = -2(2+2)^{-1}(2-3)^2 = -2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$	**B**
8.55	$f(0) = 3^0 = 1, g(0) = f(-0) = f(0) = 1$	**C**

Zadania otwarte

8.6. Odp. Zbiór wartości funkcji: $\langle -2, 3 \rangle$. Funkcja jest malejąca w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$.

8.9. $5 = f(14) = \frac{28 - b}{5}$, $25 = 28 - b$.

Odp. $b = 3$.

8.10. $-2x^3 + 3x^2 - 1 = (2x^2 - x - 1)(ax + b) = 2ax^3 + (2b - a)x^2 + (-b - a)x - b$.

$$\begin{cases} 2a = -2 \\ 2b - a = 3 \\ -b - a = 0 \\ -b = -1 \end{cases}.$$

Odp. $a = -1$ i $b = 1$.

8.18. Odp. Największa wartość funkcji: 7. Zbiór rozwiązań nierówności: $(-3, 5)$.

8.28. Odp. a) $(2, 3)$. b) 6.

8.36. Odp. a) -3. b) 1, 3.

8.53. $9 = a^2$, $a = 3$, $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^x - 2$

Odp. $Zb.w. = (-2, +\infty)$.

9. Trygonometria

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
9.1	$2 - \cos^2\alpha = 1 + \sin^2\alpha = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$	**A**
9.3	$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$	**C**

9.4	$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{5}$	**A**
9.5	$\frac{\sin^2 38 + \cos^2 38 - 1}{\sin^2 52 + \cos^2 52 + 1} = \frac{1-1}{1+1} = 0$	**B**
9.7	$\frac{\cos\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha} = 1 + \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} = 1 + \frac{\sin 49^\circ}{\cos 41^\circ} = 1 + \frac{\cos 41^\circ}{\cos 41^\circ} = 2$	**D**
9.8	$\sin 43^\circ = \cos 47^\circ$	**D**
9.10	$\operatorname{tg} 30^\circ - \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}$	**D**
9.11	$\lvert AC\rvert = 5$, $\sin\sphericalangle ABC = \frac{\lvert AC\rvert}{\lvert AB\rvert} = \frac{5}{13}$	**B**
9.12	$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$	**C**
9.14	$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{49}{169}} = \frac{\sqrt{120}}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{7}{\sqrt{120}}$	**C**
9.15	$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$, $\cos\alpha = \frac{9}{11}$	**A**
9.16	$\cos^2\alpha - 2 = 1 - \sin^2\alpha - 2 = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$	**A**
9.18	$\sin^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^4\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1$	**C**
9.19	$1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = 1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha = 1 + \sin\alpha = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$	**A**
9.21	$2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(1-\sin^2\alpha\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	**B**
9.23	$\frac{3\cos\alpha - 2\sin\alpha}{\sin\alpha - 5\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha\left(3 - 2\operatorname{tg}\alpha\right)}{\cos\alpha\left(\operatorname{tg}\alpha - 5\right)} = \frac{3 - \frac{4}{5}}{\frac{2}{5} - 5} = -\frac{11}{23}$	**A**
9.24	$\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} + \frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 2$	**C**

9.26	$3\,\mathrm{tg}\,\alpha = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3\sin\alpha = 2\cos\alpha \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{2}{3}\cos\alpha \\ \frac{13}{9}\cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \cos\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13} \end{cases}$	**C**
9.28	$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$	**D**
9.29	$\mathrm{tg}\,\alpha = 2\sin\alpha \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\sin\alpha \Rightarrow \frac{1}{\cos\alpha} = 2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$	**A**
9.30	$\cos\alpha = \frac{1{,}3}{4} = 0{,}325, \alpha \approx 71^\circ$	**D**
9.31	$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$	**D**
9.32	$\sin 120^\circ - \cos 30^\circ = \cos 30^\circ - \cos 30^\circ = 0 = \sin 0^\circ$	**C**
9.33	$3\sin^3\alpha\cos\alpha + 3\sin\alpha\cos^3\alpha = 3\sin\alpha\cos\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 3\sin\alpha\cos\alpha$	**B**
9.34	$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$	**A**
9.35	$\frac{2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \sin\alpha$	**B**
9.36	$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$	**B**
9.37	$c = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}, \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$	**C**
9.39	$3\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha = 0 \Rightarrow 3\sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	**D**
9.40	$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{3}{2}\sin\alpha \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{13}{4}\sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$	**C**
9.42	$\sin\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin\alpha - \cos\alpha = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$	**A**
9.43	$(\mathrm{tg}\,60^\circ + \mathrm{tg}\,45^\circ)^2 - \sin 60^\circ = (\sqrt{3}+1)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 + 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$	**D**

9.44	$\sin 50° = \cos 40°$	**B**
9.45	$A' = (-2, 3)$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$	**B**
9.46	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{5}{12}\sin\alpha \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{169}{144}\sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{12}{13}$	**D**
9.47	$\operatorname{tg}2\varphi = \frac{5}{3} \approx 1{,}6667 \Rightarrow 59° < 2\varphi < 60° \Rightarrow 25° < \varphi < 30°$	**B**
9.49	$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{24}{49}} = \frac{5}{7}$	**B**
9.50	$\sin\alpha = \frac{3}{8} = 0{,}375$, $22° < \alpha < 23°$	**C**
9.51	$1 - 0{,}9 < 1 - \operatorname{tg}40° < 1 - 0{,}8$	**C**
9.53	$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}57735$, $35° < \alpha < 36°$	**C**
9.54	$\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha = \frac{5}{3} - \frac{3}{5} = \frac{16}{15}$	**A**

Zadania otwarte

9.2 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{5}{12}\cos\alpha \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{25}{144}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{144}{169}.$

Odp. $\cos\alpha = \frac{12}{13}$.

9.6. $2 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}.$

Odp. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

9.9. $3 + 2\operatorname{tg}^2\alpha = 3 + 2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 3 + 2\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = 3 + 2\frac{\frac{1}{16}}{\frac{15}{16}} = 3 + \frac{2}{15} = \frac{47}{15}.$

9.13. $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha = (1-\cos^2\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha + \cos^4\alpha + \cos^2\alpha =$
$= 1 - \cos^2\alpha + \cos^4\alpha = \sin^2\alpha + \cos^4\alpha.$

9.17. $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = \sin^2\alpha - 3(1-\sin^2\alpha) = 4\sin^2\alpha - 3 = 3 - 3 = 0.$

9.20. $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{7}{16}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}.$

$2 + \sin^3\alpha + \sin\alpha\cdot\cos^2\alpha = 2 + \sin\alpha\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = 2 + \sin\alpha = \frac{11}{4}.$

9.22. $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\cos\alpha\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 1\right)}{\cos\alpha\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1\right)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}.$

9.25. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha\left(1+\sin\alpha\right)} = \frac{\sin\alpha + 1}{\cos\alpha\left(1+\sin\alpha\right)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}.$

9.27. $\frac{4}{\sin^2\alpha} + \frac{4}{\cos^2\alpha} = 25 \Rightarrow \frac{4\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha} = 25 \Rightarrow \frac{4}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha} = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = \frac{4}{25}$

Odp. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{2}{5}.$

9.38. $\frac{7}{2} = \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

Odp. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{2}{7}.$

9.41. $\frac{3}{2} = \left(\sin\alpha + \cos\alpha\right)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha,$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$

Odp. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{4}.$

9.48. $\frac{7}{4} = \left(\sin\alpha + \cos\alpha\right)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\left(\sin\alpha - \cos\alpha\right)^2 = \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{7}{4} - 1\right) = \frac{1}{4}.$

9.52. $2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha.$

Stąd $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Zatem $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$

10. Ciągi

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
10.1	$2r = a_5 - a_3 = 26$, $a_1 = a_3 - 2r = 13 - 26 = -13$	**C**
10.2	$q^3 = \frac{a_4}{a_1} = 8$, $q = 2$	**B**
10.3	$2r = a_4 - a_2 = 6$, $a_5 = a_4 + r = 11 + 3 = 14$	**B**
10.4	$q^2 = \frac{a_3}{a_1} = 2$, $q = \sqrt{2}$	**D**
10.6	$q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$	**D**
10.7	$a_9 - a_8 = a_3 - a_2 \Rightarrow a_2 + a_9 = a_3 + a_8$	**C**
10.9	$r = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$	**C**
10.10	$q = \frac{a_3}{a_2} = -\sqrt{2} \Rightarrow a_1 = \frac{a_2}{q} = -\frac{1}{2}$	**A**
10.12	$a_5 a_3 = a_4^2 \Rightarrow a_5 \cdot 5 = 225 \Rightarrow a_5 = 45$	**D**
10.13	$2n^2 - 9 < 0 \Rightarrow n \in \{1, 2\}$	**C**
10.15	$\alpha + (\alpha + 20°) + (\alpha + 40°) + (\alpha + 60°) = 4\alpha + 120° = 360°$, $\alpha = 60°$	**C**
10.16	$a_5 = (-1)^5 \cdot \frac{2-5}{5^2} = \frac{3}{25}$	**B**
10.18	$a_8 = \sqrt{2 \cdot 8 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$	**A**
10.19	$a = \frac{4^2}{2\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$	**B**
10.21	$a_3 = \frac{3}{(-2)^3} = -\frac{3}{8}$	**D**
10.22	$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, $a_4 = a_1 q^3 = 36 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{2}$	**C**
10.24	$x + 5 = \frac{18^2}{27} = 12$, $x = 7$	**C**

10.25	$r = a_4 - a_3 = 4,\ a_1 = a_3 - 2r = 10 - 8 = 2$	**B**
10.26	$-2 + \frac{12}{n} = 4 \Leftrightarrow \frac{12}{n} = 6 \Leftrightarrow n = 2$	**A**
10.27	$a_1 = a_{20} - 19r = 17 + 38 = 55$	**C**
10.28	$q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{8}{27},\ q = \frac{2}{3}$	**C**
10.30	$3x - 4 = \frac{8^2}{2} = 32,\ 3x = 36,\ x = 12$	**D**
10.31	$a = \frac{49 + 7}{2} = 28$	**C**
10.32	$n^2 - n = 6 \Leftrightarrow n^2 - n - 6 = 0 \Leftrightarrow (n - 3)(n + 2) = 0,\ n = 3$	**B**
10.33	$r = -3.\quad a_n = 2 + (n - 1)(-3) = -3n + 5$	**A**
10.34	$x - 2 = \frac{6^2}{12} = 3,\ x = 5$	**D**
10.35	$S_{10} = \frac{a_1\left(1 - q^{10}\right)}{1 - q} = \frac{5\left(1 - 1024\right)}{3} = -1705$	**A**
10.36	$2r = a_4 - a_2 = -4,\ r = -2,\ a_1 = a_2 - r = 13,\ S_4 = \frac{13 + 7}{2} \cdot 4 = 40$	**B**
10.38	$35 = S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \left(3 + a_{10}\right)5,\ a_{10} = 4$	**B**
10.39	$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{9}{4}}{-\frac{3}{4}} = 3$	**D**
10.41	$a_1q^3 = 3a_1 \Rightarrow q^3 = 3 \Rightarrow q = \sqrt[3]{3}$	**C**
10.43	$a_n = -4 + (n - 1)2 = -6 + 2n = 156 \Rightarrow 2n = 162 \Rightarrow n = 81$	**A**
10.45	$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2,\ S_{10} = \frac{a_1\left(1 - q^{10}\right)}{1 - q} = \frac{2\left(1 - 2^{10}\right)}{1 - 2} = -2\left(1 - 2^{10}\right)$	**B**
10.46	$13 = a_1 + a_6 = a_1 + a_1 + 5r = a_1 + 2r + a_1 + 3r = a_3 + a_4$	**A**

10.48	$S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = (1 + 199) \cdot 50 = 10000$	**C**
10.49	$(x - 10)^2 = (x + 35)(x + 20)$, $-20x + 100 = 55x + 700$, $75x = -600$	**A**
10.52	$a_1 = 14$, $r = 7$, $a_{12} = a_1 + 11r = 14 + 77 = 91$	**C**
10.53	$a_5 = \frac{2^5 - 1}{2^5 + 1} = \frac{31}{33}$	**B**
10.54	$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{1 + 21}{2} \cdot 11 = 121$	**B**
10.55	$111 = a_{100} = a_1 + 99r$, $11 = a_{10} = a_1 + 9r$, $100 = 90r$, $r = \frac{10}{9}$	**C**
10.57	$a_7 = a_{14} - 7r = 8 + \frac{21}{2} = \frac{37}{2}$	**A**
10.58	$(2x + 3)^2 = x(4x + 3)$, $12x + 9 = 3x$, $x = -1$	**D**
10.60	$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = (-90 - 36) \cdot 5 = -630$	**C**
10.61	$q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{9}{72} = \frac{1}{8}$, $q = \frac{1}{2}$	**A**
10.63	$q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{-216}{8} = -27$, $q = -3$	**B**
10.64	$a_2 = (a_2 + a_1) - a_1 = S_2 - S_1 = 10 - 3 = 7$	**C**
10.66	$r = a_2 - a_1 = 6$, $a_n = 5 + (n - 1)6 = 6n - 1 = 71$, $6n = 72$, $n = 12$	**B**
10.67	$a - 1 = \frac{6^2}{24} = \frac{3}{2}$, $a = \frac{5}{2}$	**A**
10.69	$2(a_1 + 2r) = a_1 + r + a_1 + 1$, $3r = 1$, $r = \frac{1}{3}$	**B**
10.70	$x \neq 0$, $2x^2 = xq$, $q = 2x$, $8 = 4x^3 \cdot 2x = 8x^4$, $x = 1$	**B**
10.72	$r = a_2 - a_1 = 7$, $a_n = 2 + (n - 1)7 = 7n - 5 = 79$, $7n = 84$, $n = 12$	**C**
10.73	$9x^2 = 4 \cdot 81$, $x^2 = 36$, $x = 6$	**B**
10.75	$a_{n+1} - a_n = \frac{5 - 2(n + 1)}{6} - \frac{5 - 2n}{6} = \frac{5 - 2n - 2 - 5 + 2n}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$	**A**

10.76	$12 = a_4 + a_5 + a_6 = a_5 - r + a_5 + a_5 + r = 3a_5,\ a_5 = 4$	**A**
10.77	$q = 2,\ a_n = \sqrt{2} \cdot 2^{n-1} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 2^{n-1} = \frac{2^n}{\sqrt{2}}$	**B**
10.79	$3a_2 = 2a_3 = 2qa_2,\ q = \frac{3}{2}$	**B**
10.80	$r = -\frac{1}{2}$	**B**
10.82	$15 = a_3 + a_4 + a_5 = 3a_4,\ a_4 = 5$	**A**
10.83	$(x + 4)^2 = x \cdot 16,\ x^2 + 8x + 16 = 16x,\ (x - 4)^2 = 0,\ x = 4$	**B**

Zadania otwarte

10.5 $70 = S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5, \qquad a_1 + a_5 = \frac{70 \cdot 2}{5} = 28.$

Odp. $a_1 = 28 - 26 = 2.$

10.8. $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2y = 19 + x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 8 - y \\ 2y = 27 - y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 8 - y \\ y = 9 \end{cases}$

Odp. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 9 \end{cases}.$

10.11. $x^2 = 81, \qquad x = 9, \qquad q = \frac{1}{3}, \qquad a_8 = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \left(\frac{1}{3}\right)^4.$

Odp. $a_8 = \frac{1}{81}.$

10.14. $12 = 2x + 1 + 16x + 2, \qquad 9 = 18x.$

Odp. $x = \frac{1}{2}.$

10.17. $x = \frac{9 + 19}{2} = 14, \qquad q = \frac{42}{14} = 3, \qquad y = 3 \cdot 42 = 126, \qquad z = 3 \cdot 126 = 378.$

Odp. $(x, y, z) = (14, 126, 378).$

10.20. Dla $n \geq 2$ otrzymujemy:

$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - 2n - [(n - 1)^2 - 2(n - 1)] = n^2 - 2n - n^2 + 4n - 3.$

Zatem $a_n = 2n - 3$ dla $n \geq 2$.

Jednocześnie $a_1 = S_1 = -1 = 2 \cdot 1 - 3.$

Odp. $a_n = 2n - 3$ dla $n \geq 1$.

10.23. $3r = 15 - 3 = 12, \qquad r = 4.$

Odp. $S_6 = \frac{2a_1 + 5r}{2} \cdot 6 = (6 + 20) \cdot 3 = 78.$

10.29. Odp. $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7 \cdot 3^{n+2}}{7 \cdot 3^{n+1}} = 3$.

10.37. $2(2x+4) = 6 + x + 26, \qquad 3x = 24, \qquad x = 8.$
Odp. $r = 20 - 6 = 14$.

10.40. $5r = 47 - 22 = 25, \qquad r = 5.$
Odp. $a_1 = a_5 - 4r = 22 - 20 = 2$.

10.42. $\begin{cases} \frac{2a_1 + 10r}{2} \cdot 11 = 187 \\ \frac{a_1 + a_1 + 2r + a_1 + 8r}{3} = 12 \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_1 + 5r = 17 \\ 3a_1 + 10r = 36 \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_1 = 2 \\ r = 3 \end{cases},$

$a_3 = a_1 + 2r = 8, \qquad a_k = a_1 + (k-1)r = 3k - 1, \qquad 8^2 = 2(3k-1), \qquad 6k = 66.$
Odp. $k = 11$.

10.44. $653 = 444 + (n-1)11, \qquad (n-1)11 = 209,$
$n - 1 = 19, \qquad n = 20.$
Odp. $S_{20} = \frac{653 + 444}{2} \cdot 20 = 1097 \cdot 10 = 10970$.

10.47. $a_1 = a_5 - 4r = 18 - 4r, \qquad a_3 = a_5 - 2r = 18 - 2r, \qquad a_{13} = a_5 + 8r = 18 + 8r,$
$(18 - 2r)^2 = (18 - 4r)(18 + 8r), \qquad 18^2 - 72r + 4r^2 = 18^2 + 72r - 32r^2,$
$36r^2 - 144r = 0, \qquad r = 4$ lub $r = 0$.
Ponieważ ciąg rosnący, więc $r = 4$. Zatem $a_1 = 18 - 16 = 2$.
Odp. $a_n = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 2$.

10.50. $a_3 + a_5 = 2a_4, \qquad a_2 + a_6 = 2a_4, \qquad a_1 + a_7 = 2a_4.$
Stąd $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 7a_4 = 0$.

10.51. $30240 = S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 775 + (n-1)(-10)}{2} \cdot n = (780 - 5n)n,$
$5n^2 - 780n + 30240 = 0, \qquad n^2 - 156n + 6048 = 0,$

$\Delta = 24336 - 24192 = 144, \qquad n = \frac{156 - 12}{2} = 72,$
$a_{72} = 775 - 71 \cdot 10 = 65.$
Odp. Ostatnia rata jest równa 65 zł. Są 72 raty.

10.56. $(2 + r)^2 = 2(2 + 3r), \qquad r^2 + 4r + 4 = 4 + 6r,$
$r^2 - 2r = 0, \qquad r(r-2) = 0,$
$r = 2.$
Odp. $q = \frac{4}{2} = 2$.

10.59. $2016 = \frac{7 + 89}{2} \cdot n, \qquad 2016 = 48n.$
Odp. $n = 42$.

10.62. $\begin{cases} \dfrac{a_1 + a_1 + 3r}{2} \cdot 4 = 2016 \\ \dfrac{a_1 + 4r + a_1 + 11r}{2} \cdot 8 = 2016 \end{cases}$ $\begin{cases} 2a_1 + 3r = 1008 \\ 2a_1 + 15r = 504 \end{cases}$.

Odejmując stronami otrzymujemy:

$12r = -504, \quad r = -42, \quad a_1 = \dfrac{1008 + 3 \cdot 42}{2} = 567,$

$a_n = 567 + (n - 1)(-42) = -42n + 609 > 0.$

Stąd $n < \dfrac{609}{42} = \dfrac{29}{2} = 14{,}5$. Zatem $a_{14} = -42 \cdot 14 + 609 = -588 + 609 = 21$.

Odp. $a_1 = 567$. $r = -42$. Najmniejszy dodatni: $a_{14} = 21$.

10.65. $a_n = 2016 - 3n > 0, \quad n < 672.$

Odp. $S_{671} = \dfrac{2016 - 3 + 2016 - 3 \cdot 671}{2} \cdot 671 = \dfrac{2013 + 3}{2} \cdot 671 = 1008 \cdot 671 = 676368.$

10.68. $33 = S_3 = \dfrac{16 + 2r}{2} \cdot 3, \quad 11 = 8 + r, \quad r = 3.$

Odp. $a_{16} - a_{13} = 3r = 9.$

10.71. $30 = a_{30} = a_1 + 29r, \quad a_1 = 30 - 29r,$

$30 = S_{30} = \dfrac{30 - 29r + 30}{2} \cdot 30, \quad 1 = \dfrac{60 - 29r}{2},$

$60 - 29r = 2, \quad 29r = 58.$

Odp. $r = 2.$

10.74. $100 = a_{21} + a_{24} + a_{27} + a_{30} = 4a_1 + 20r + 23r + 26r + 29r = 4a_1 + 98r.$

Odp. $a_{25} + a_{26} = 2a_1 + 24r + 25r = 2a_1 + 49r = \dfrac{1}{2}\left(4a_1 + 98r\right) = 50.$

10.78. $S_{12} = \dfrac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12, \quad 162 = \dfrac{a_1 + 30}{2} \cdot 12, \quad 27 = a_1 + 30.$

Odp. $a_1 = -3.$

10.81. $a_1 + 5r = 2(a_1 + 4r), \quad a_1 = -3r, \quad \dfrac{15}{4} = \dfrac{2a_1 + 9r}{2} \cdot 10 = 3r \cdot 5 = 15r, \quad r = \dfrac{1}{4}.$

Odp. $r = \dfrac{1}{4}, a_1 = -\dfrac{3}{4}.$

10.84. $\begin{cases} a_1 + 8r = 34 \\ \dfrac{2a_1 + 7r}{2} \cdot 8 = 110 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2a_1 + 16r = 68 \\ 2a_1 + 7r = \dfrac{55}{2} \end{cases}, \quad 9r = 68 - \dfrac{55}{2} = \dfrac{81}{2}, \quad r = \dfrac{9}{2}.$

Odp. $r = \dfrac{9}{2}, a_1 = -2.$

11. Planimetria

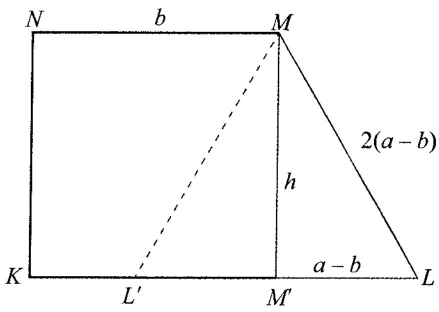
Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
11.1	$a\sqrt{2} = 8,\ a = 4\sqrt{2}$	**A**
11.2	$h^2 + 3^2 = 5^2,\ h = 4$	**B**
11.3	$\frac{x+1}{9} = \frac{1}{3},\ x + 1 = 3,\ x = 2$	**A**
11.4	$\alpha = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$	**A**
11.5	$P = \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 80 \cdot \sin 30^\circ = 1600$	**C**
11.8	$12 = r = \frac{2}{3}h,\ h = 18$	**A**
11.9	$x^2 + 6^2 = 11^2,\ x = \sqrt{121 - 36} = \sqrt{85}$	**B**
11.10	$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{10} \cdot 360^\circ\right) = 54^\circ$	**A**
11.11	$\alpha = \frac{1}{2} \cdot (360^\circ - 160^\circ) = 100^\circ$	**B**
11.12	$a^2 \sin 60^\circ = ah,\ h = a \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$	**A**
11.13	$28 = 2(3a + 4a),\ a = 2,\ 4a = 8$	**B**
11.14	$r = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 64} = 5$	**D**
11.15	$\lvert S_1S_2 \rvert = 17$	**C**
11.16	$P = a^2 \sin 60^\circ = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$	**C**
11.19	$\lvert AB \rvert = 2\sqrt{25 - 4} = 2\sqrt{21}$	**B**
11.20	$5 + 7 + \sqrt{49 - 25} = 12 + 2\sqrt{6}$	**D**

11.21	$\frac{x}{5} = \frac{x+2}{7}$, $7x = 5x + 10$, $x = 5$	**D**
11.22	$P = \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^2 = 50$	**B**
11.23	$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$	**C**
11.24	$\alpha + 6\alpha = 180° - 54°$, $7\alpha = 126°$, $\alpha = 18°$, $6\alpha = 108°$	**C**
11.25	$\frac{b}{6} = \operatorname{tg} 60°$, $b = 6\sqrt{3}$	**C**
11.26	$r = \sqrt{16+9} = 5$	**C**
11.27	$\alpha = \frac{1}{2}(360° - 60° - 130°) = 85°$	**D**
11.28	$\Delta ECD \equiv \Delta DBC \equiv \Delta CAB \equiv \Delta BEA \equiv \Delta ADE$	**B**
11.31	$\lvert BC \rvert = \sqrt{196 - 36} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$	**B**
11.32	$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 230° = 115°$	**C**
11.33	$r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{24\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 12$	**C**
11.35	$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 50° = 25°$	**A**
11.37	$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 50° = 25°$	**C**
11.38	$\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. Skala podobieństwa $s = 2$. Stąd $2 \cdot (2 \cdot 5) = 20$	**B**
11.39	$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$, $P = 3^2 \sin\alpha = \frac{9}{2}$	**A**
11.40	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\alpha = 30°$	**B**
11.41	$30 + 5 = 35$	**C**

11.42	$\alpha = \frac{1}{2}(180° - 80°) = 50°$	**B**
11.43	$P = \pi 4^2 = 16\pi$	**C**
11.44	$P = 4 \cdot 12 \cdot \sin 30° = 24$	**A**
11.46	$s = \sqrt{\frac{50}{25}} = \sqrt{2}$	**C**
11.47	$h = 2\sqrt{3} \cdot \sin 60° = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$	**B**
11.48	$\alpha = \frac{4}{9} \cdot 360° = 160°$	**A**
11.50	$\lvert KL \rvert = 3 + a,\ \frac{4\sqrt{3}}{a} = \mathrm{tg}\,60° = \sqrt{3},\ a = 4,\ P = \frac{3+7}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$	**C**
11.51	$\alpha = \frac{1}{2}(360° - 130° - 110°) = 60°$	**B**
11.52	$r = \frac{1}{2}\sqrt{144 + 81} = \frac{1}{2}\sqrt{225} = \frac{15}{2}$	**B**
11.53	$\frac{x+3}{21} = \frac{3}{7},\ x + 3 = 9,\ x = 6$	**A**
11.54	$P = (2 \cdot 10^4)^2 \cdot (2 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2}) = 4 \cdot 10^8 \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^5 = 400\,000$	**D**
11.55	$h = \frac{3}{2}r = 12$	**C**
11.56	$\alpha = 2(40° + 20°) = 120°$	**C**
11.57	$\lvert AB \rvert = 2c,\ \frac{x}{2c} = \frac{3}{c},\ x = 6$	**B**
11.58	$\alpha + 20° = 2\alpha.\quad \alpha = 20°$	**C**
11.59	$4a = 8,\ a = 2,\ 1 = 2^2 \sin\alpha,\ \sin\alpha = 0{,}25.\quad 14° < \alpha < 15°$	**A**
11.60	$\alpha = (90° - 50°) - \frac{1}{2} \cdot 50° = 15°$	**D**
11.61	$\frac{6}{4} = \frac{b}{12} = \frac{15}{a},\ a = 10,\ b = 18$	**B**

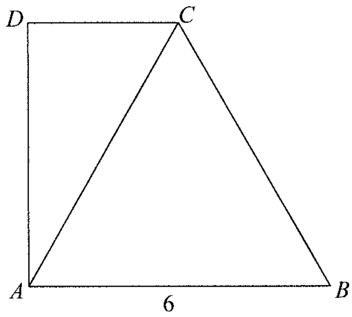
11.62	$3\alpha + 4\alpha + 5\alpha = 180°, \alpha = 15°, 3\alpha = 45°$	**A**
11.63	$\sphericalangle BCD = \beta = \sphericalangle CBD = \sphericalangle BAC, \sphericalangle ADC = 2\beta, \beta + 2\beta + 21° = 180°, \beta = 53°$	**B**
11.64	$2 + x > 7, 2 + 7 > x, 5 < x < 9$	**C**
11.65	$P = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 12 \cdot \sin 120° = 60\sqrt{3}$	**C**
11.66	$\left(a\sqrt{2}\right)^2 \sin\alpha = a^2, \sin\alpha = \frac{1}{2}, \alpha = 30°$	**D**
11.67	$\sphericalangle ASC = 2 \cdot 40° = 80°, \alpha = \frac{1}{2}\left(180° - 80°\right) = 50°$	**C**
11.69	$P = 6^2 \cdot \sin 150° = 18$	**B**
11.70	$\alpha = 90° - 50° = 40°$	**A**
11.71	$6 \cdot \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$	**D**
11.72	$s = \frac{1}{2}$	**B**
11.73	$\alpha + 27° = \frac{1}{2} \cdot 118°, \alpha = 59° - 27° = 32°$	**D**
11.74	$x = 10 \cdot \sin 31° \approx 10 \cdot 0{,}515 = 5{,}15$	**A**
11.75	$\frac{x}{17} = \frac{9}{18}.\quad x = \frac{17}{2} = 8{,}5$	**B**
11.76	$5 + a - 1 > 2a + 1 \Rightarrow a < 3$. Czyli $a = 2$. Wtedy 5, 5, 1	**D**
11.77	$\lvert Q_1P \rvert = \sqrt{7^2 - 4^2} = \sqrt{33},\ \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{33} = 2\sqrt{33}$	**B**
11.79	$\sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA = \sphericalangle CAB = 90° - 50° = 40°, \beta = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$	**A**
11.80	$\alpha = 2 \cdot 36° = 72°, \beta = \frac{1}{2}\sphericalangle ASC = \frac{1}{2}\left(2\alpha\right) = \alpha$	**D**
11.81	$P = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \cdot \sin 150° = 100$	**A**
11.82	$P = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 20$	**D**
11.84	$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot \sin 30° = 8$	**D**

11.85	$\sphericalangle CBA = \sphericalangle CDA = \frac{1}{2} \cdot 110° = 55°$, $\alpha = \sphericalangle BCD = 180° - 100° - 55° = 25°$	**C**
11.86	$\alpha = 2 \cdot \sphericalangle CAB = 2 \cdot 56° = 112°$	**C**
11.87	$\frac{x}{10} = \frac{24}{12} \Rightarrow x = 20$	**B**
11.88	$a + 2a + \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\left(3 + \sqrt{3}\right)$	**C**
11.90	$\alpha = \frac{1}{2}\left(180° - \sphericalangle AOC\right) = \frac{1}{2}\left(180° - 40°\right) = 70°$	**B**
11.91	$P_{ABC} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 P_{A'B'C'}$	**D**
11.92	$\frac{\pi^3}{3} = \pi r^2 = \pi\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \pi\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{3} \Rightarrow a = \pi$	**B**
11.93	$\lvert BC \rvert = 4 \cdot \mathrm{tg}\,30° = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot 4 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$	**C**
11.95	$3x + 4x + 5x = 100$, $x = \frac{25}{3}$, $5x = \frac{125}{3} = 41\frac{2}{3}$	**A**
11.96	$\alpha + 40° = 360° - 2 \cdot 121° = 118°$, $\alpha = 78°$	**D**
11.97	$\frac{x}{4} = \frac{x+4}{6}$, $6x = 4x + 16$, $x = 8$	**C**
11.98	$6\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $a^2 = 24$, $a = 2\sqrt{6}$	**C**
11.99	$2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 10$, $3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 15$, $4\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 20$	**A**
11.100	$111° = 2\beta + \beta = 3\beta$, $\beta = 37°$, $\alpha = 74°$	**A**
11.101		**B**

11.102	$P_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$	**D**
11.103	$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$	**D**
11.104	$2\alpha + 3\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 360°, \alpha = 30°, 2\alpha = 60°$	**A**
11.105	$\alpha = 2\beta,\ 3\beta = 114°, \beta = 38°$	**B**
11.106	$\alpha - (180 - \alpha) = 80°, 2\alpha = 260°, \alpha = 130°$	**C**
11.107	$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 \cdot \sin 60° = 9\sqrt{3}$	**D**

Zadania otwarte

11.6 $|BC| = 6, \qquad |CD| = 3, \qquad |AD| = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}.$



Odp. $6 + 6 + 3 + 3\sqrt{3} = 15 + 3\sqrt{3}.$

11.7. Wymiary pierwszego basenu: x, y. Wymiary drugiego basenu: $x + 5, y + 3$.

$\begin{cases} xy = 240 \\ (x+5)(y+2) = 350 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy = 240 \\ xy + 2x + 5y = 340 \end{cases}$

Odejmując stronami otrzymujemy: $2x + 5y = 100,\ y = 20 - \frac{2}{5}x.$

Wtedy: $x\left(20 - \frac{2}{5}x\right) = 240, \qquad -\frac{2}{5}x^2 + 20x - 240 = 0, \qquad x^2 - 50x + 600 = 0.$

$\Delta = 2500 - 2400 = 100, \qquad x_1 = \frac{50 - 10}{2} = 20, \qquad x_2 = \frac{50 + 10}{2} = 30.$

Odp. Pierwszy basen ma wymiary: 20 m × 12 m lub 30 m × 8 m.
Drugi basen odpowiednio: 25 m × 14 m, 35 m × 10 m.

11.17. Kąt środkowy ma miarę α: $\alpha = 5 \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot 360°\right) = 5 \cdot 30° = 150°.$

11.18. Wymiary pierwszego boiska: x, y. Wymiary drugiego boiska: $x + 4, y - 9$.

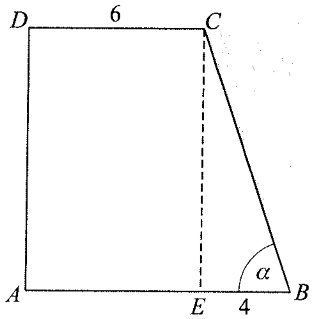
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 65^2 \\ (x+4)^2 + (y-8)^2 = 65^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 65^2 \\ x^2 + 8x + 16 + y^2 - 16y + 64 = 65^2 \end{cases}$$

Odejmując stronami otrzymujemy: $8x - 16y + 80 = 0$.
Stąd $x = 2y - 10$.
Wtedy $65^2 = y^2 + 4y^2 - 40y + 100$,
$5y^2 - 40y - 4125 = 0$, $\quad y^2 - 8y - 825 = 0$,

$\Delta = 64 + 3300 = 3364$, $\quad y_1 = \dfrac{8+58}{2} = 33$, $\quad y_2 = \dfrac{8-58}{2} < 0$

Odp. Pierwszy boisko ma wymiary 56 m × 33 m, drugie 60 m × 25 m.

11.29. $|EC| = 4 \cdot \operatorname{tg}\alpha = 12$.



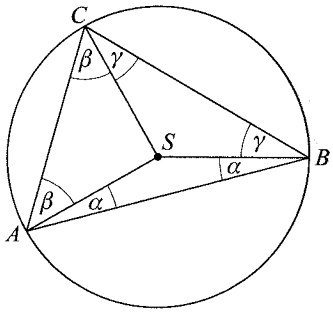
Odp. $P = \dfrac{10+6}{2} \cdot 12 = 96$.

11.30. $50\sqrt{2} = a^2 \sin 45° = a^2 \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad a = 10$, $\quad 50\sqrt{2} = 10 \cdot h$.

Odp. $h = 5\sqrt{2}$.

11.34. Odp. $|AD| = |AC| \sin 30° = 3$.

11.36. $\beta = 3\alpha, \gamma = 2\alpha$, $180° = 2\alpha + 2\gamma + 2\beta$, $90° = \alpha + \gamma + \beta = 6\alpha$, $\alpha = 15°$.



Odp. $\sphericalangle ABC = \alpha + \gamma = 3 \cdot 15° = 45°$.
$\sphericalangle BCA = \gamma + \beta = 5 \cdot 15° = 75°$.
$\sphericalangle BAC = \alpha + \beta = 4 \cdot 15° = 60°$.

11.45. Wymiary pierwsze działki: x, y.

$$\begin{cases} xy = 6000 \\ (x+10)(y+15) = 8250 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy = 6000 \\ xy + 15x + 10y + 150 = 8250 \end{cases}$$

Odejmując stronami otrzymujemy:

$15x + 10y + 150 = 2250, \qquad y = 210 - \frac{3}{2}x.$

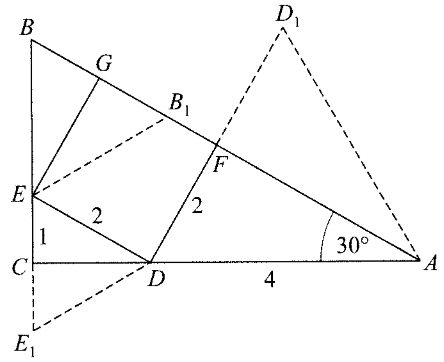
Stąd $x\left(210 - \frac{3}{2}x\right) = 6000, \qquad x^2 - 140x + 4000 = 0,$

$\Delta = 19600 - 16000 = 3600, \qquad x_1 = \frac{140 - 60}{2} = 40, \qquad x_2 = \frac{140 + 60}{2} = 100.$

Odp. Pierwsza działka ma wymiary: 40 m × 150 m, 100 m × 60 m.

11.49. $|AF| = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \qquad |CD| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \qquad 2 = \frac{|BE|\sqrt{3}}{2}, \qquad |BE| = \frac{4\sqrt{3}}{3},$

$|AC| = 4 + \sqrt{3}, \qquad |BC| = 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}.$



Odp. $P = \frac{1}{2}\left(4 + \sqrt{3}\right)\left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{4\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} + 4\right) = 4 + \frac{7\sqrt{3}}{6}.$

11.68. Niech x oznacza długość połowy krótszej przekątnej rombu.
Wtedy
$35^2 = x^2 + (x+7)^2 = 2x^2 + 14x + 49,$
$2x^2 + 14x - 1176 = 0, \qquad x^2 + 7x - 588 = 0,$
$\Delta = 49 + 2352 = 2401, \qquad x_1 = \frac{-7 + 49}{2} = 21, \qquad x_2 = \frac{-7 - 49}{2} < 0.$

Odp. $P = \frac{1}{2} \cdot 42 \cdot 56 = 1176.$

Pole można obliczyć nie rozwiązując równania $2x^2 + 14x = 1176$.

Wystarczy zauważyć, że pole wynosi: $\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (2x + 14) = 2x^2 + 14x.$

11.78. Niech α oznacz najmniejszy kąt. Wtedy $\beta = \alpha + 50°, \gamma = 3\alpha$.
Stąd $\alpha + \alpha + 50° + 3\alpha = 180°, \qquad \alpha = 26°.$
Odp. Miary kątów trójkąta: 26°, 76°, 78°.

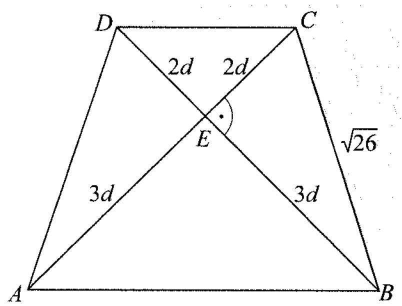
11.83. $|AD| = 5$, $|AE| = 8$, $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$, $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 12 = 90$.

Odp. $P_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 = 20$, $P_{BCED} = 90 - 20 = 70$.

11.89. $26^2 = a^2 + (a + 14)^2 = 2a^2 + 28a + 196$,
$2a^2 + 28a - 480 = 0$, $a^2 + 14a - 240 = 0$.
$\Delta = 196 + 960 = 1156$, $a_1 = \frac{-14 + 34}{2} = 10$, $a_2 = \frac{-14 - 34}{2} < 0$.

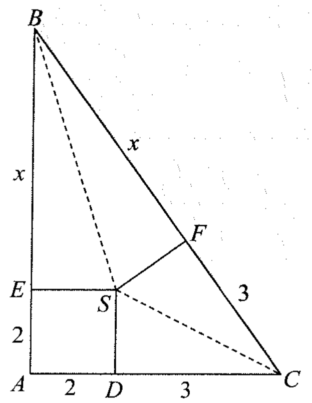
Odp. $10 + 24 + 26 = 60$.

11.94. $4d^2 + 9d^2 = 26$, $d^2 = 2$.



Odp. $P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 5d \cdot 3d + \frac{1}{2} \cdot 5d \cdot 2d = \frac{25d^2}{2} = 25$.

11.108. Oznaczenia takie jak na rysunku.



$(x + 2)^2 + 5^2 = (x + 3)^2$, $4x + 4 + 25 = 6x + 9$, $2x = 20$, $x = 10$.

Odp. $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$.

12. Stereometria

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
12.1	$2 \cdot (5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5) = 94$	**A**
12.2	$k = 2(w - 1) = 2 \cdot (18 - 1) = 34$	**D**
12.4	$a^3 = 27,\ a = 3,\ 12 \cdot 3 = 36$	**B**
12.5	$15 = k = \frac{3 \cdot w}{2},\ w = 10$	**A**
12.7	$\lvert BG\rvert = \lvert AB\rvert < \lvert BE\rvert < \lvert GE\rvert$	**C**
12.8	$6a^2 = 54,\ a = 3,\ d = a\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$	**D**
12.9	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$	**B**
12.11	$r = 13$	**B**
12.12		**A**
12.14	$d = a\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$	**C**
12.15	$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 54\pi$	**B**
12.16	$288\pi = \frac{4}{3}\pi r^3,\ r^3 = 216,\ r = 6$	**A**
12.17	$9a = 90,\ a = 10,\ P = 3 \cdot a^2 + 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 300 + 50\sqrt{3}$	**C**
12.19	$a^2 = 4,\ a^3 = 8$	**B**
12.20	$h = r = 2\sqrt{2}$	**A**
12.22	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 32\pi$	**C**
12.23	$h = a$ i $2r = a \Rightarrow h = 2r \Rightarrow h - r = r \Rightarrow h - r = \frac{a}{2}$	**B**
12.25	$a^3 = 64,\ a = 4,\ 6a^2 = 96$	**C**
12.26	$r = \frac{a}{2},\ h = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{24}\pi a^3$	**D**
12.28	$s_b = w_p,\ k = 3w_p,\ 3w_p = w_p + 10,\ w_p = 5$	**B**

12.29	$P_b = \pi rl = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi$	**C**
12.30	$28\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 7,\ a = 4$	**B**
12.32	$6a^2 = 12,\ a = \sqrt{2},\ 12a = 12\sqrt{2}$	**A**
12.33	$r = \frac{1}{3}h,\ V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot h = \frac{1}{27}\pi h^3$	**D**
12.35	$24 = k = 3w_p,\ w_p = 8,\ w = 2w_p = 16,$	**D**
12.36	$72\pi = \pi r^2 \cdot 8,\ r = 3$	**D**
12.39	$10 = k = 2w_p,\ w_p = 5,\ s_b = w_p = 5$	**A**
12.40	$2\pi rh = \pi rl,\ l = 2h$	**C**
12.42	Trójkąt *FKI* jest równoboczny. Miara kąta wynosi 60°.	**C**
12.43	$96\pi = \pi 4^2 \cdot h,\ h = 6,\ P_b = 2\pi rh = 48\pi$	**D**
12.44	$432 = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot h,\ h = 9$	**B**
12,46	$P = 2 \cdot \pi \cdot 2^2 + 2\pi \cdot 2 \cdot 4 = 24\pi$	**D**
12.47	$V_o = \frac{1}{3}V_g \Rightarrow V_g = 3V_o = 243\sqrt{3}$	**D**
12.49	$\sphericalangle HOL$	**A**
12.50	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = 9\pi\sqrt{3}$	**B**
12.51	$P = 2 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 8^2 = 8^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\right)$	**D**
12.53	$P = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\right) = 12$	**C**
12.54	$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot h,\ h = 5$	**D**
12.55	Trójkąt równoboczny. $\alpha = 60°$	**C**
12.56	$w = 2 \cdot 8 = 16,\ k = 3 \cdot 8 = 24$	**A**
15.57	Trójkąt równoramienny o bokach: 2, 2, $2\sqrt{2}$. $\alpha = 45°$	**B**

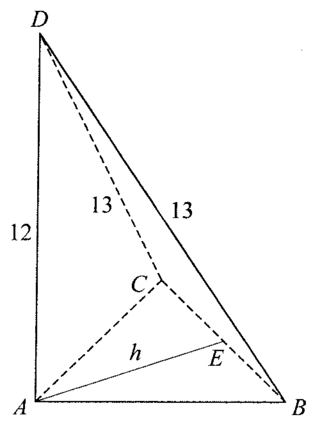
12.59	$\frac{\pi rl}{\pi r^2} = \frac{l}{r} = \frac{10}{3}$	**D**
12.60	$P = 4 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 64\sqrt{3}$	**D**
12.61	$288\pi = \frac{4}{3}\pi r^3,\ r^3 = 216,\ r = 6$	**D**
12.63	$V = \frac{1}{3}a^2 b\pi$	**A**
12.64	$d = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$	**D**
12.66	$h = \sqrt{9^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{81 - 27} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$	**A**
12.67	$a = 6,\ h = a\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} 30° = 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{6}$	**C**
12.69	$h = 2,\ r = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},\ V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot 2 = 8\pi$	**D**
12.70	Trójkąt równoramienny prostokątny. $\alpha = 45°$	**B**
12.72	Trójkąt ASC prostokątny równoramienny. $\sphericalangle ASC = 90°$	**D**
12.74	$r = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$	**C**
12.75	$V = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$	**A**
12.76	$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$	**D**
12.77	$k = 2(w - 1),\ 11 = k - w = w - 2,\ w - 1 = 12$	**C**
12.79	$140 = 2a^2 + 4a \cdot 3a = 14a^2,\ a = \sqrt{10}$	**A**
12.80	Trójkąt ASO prostokątny równoramienny, więc $\alpha = 45°$, $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	**B**
12.81	$V = \frac{1}{3}\pi 6^2 \cdot 4 = 48\pi$	**D**
12.83	$6 = a\sqrt{3},\ a^2 = 12,\ P = 6 \cdot 12 = 72$	**A**

12.84	$16\pi = 2\pi \cdot 2 \cdot h,\ h = 4$	**A**
12.86	$\sphericalangle SAO$	**A**
12.87	$k = \dfrac{3 \cdot w}{2} = 21$	**B**
12.88	$r = \sqrt{45 - 36} = 3,\ V = \dfrac{1}{3}\pi 3^2 \cdot 6 = 18\pi$	**B**
12.90	$KM\| = 4\sqrt{2},\ \|KS\| = \|MS\| = 4\sqrt{2}$. Trójkąt KMS jest równoboczny	**D**
12.91	$d = \sqrt{9 + 16} = 5,\ h = d = 5$	**A**
12.92	$V = \pi r^2 \cdot r + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{3}\pi r^3\right) = \pi r^3 + \dfrac{2}{3}\pi r^3 = \dfrac{5}{3}\pi r^3$	**A**
12.94	$\pi r^3 = 27\pi,\ r = 3$	**C**
12.95	$\dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{4}{3}\pi r^3,\ h = 4r,\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h}{r} = 4$	**D**
12.96	$k + w = k + \dfrac{2k}{3} = 15,\ 5k = 45,\ k = 9$	**A**
12.98	$\sin\alpha = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$	**D**
12.99	$a = 10,\ r = 5,\ P_b = 2\pi rh = 2\pi \cdot 5 \cdot 10 = 100\pi$	**B**

Zadania otwarte

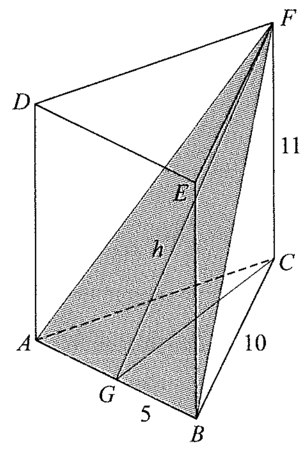
12.3 $|AC| = |AB| = \sqrt{169 - 144} = 5$

Wysokość trójkąta ABC: $h = \sqrt{25 - 9} = 4$.



Odp. $V = \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4\right) \cdot 12 = 48.$

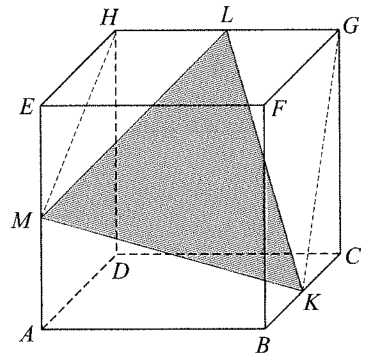
12.6. $|GC|^2 = 100 - 25 = 75$, $h = \sqrt{75 + 121} = 14$



Odp. $P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 14 = 70.$

12.10. $|AK| = |MH| = |KG|$. Stąd trójkąt KML jest równoboczny.

$|AK| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\quad |MK| = \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.



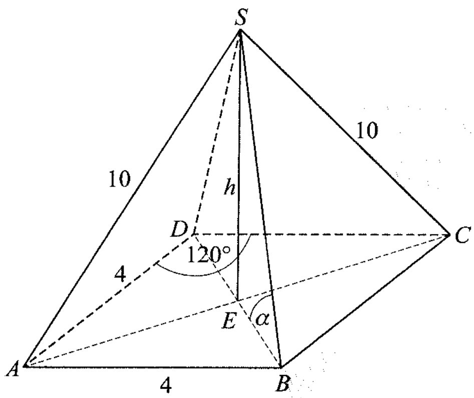
Odp. $P = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

12.13. Trójkąt ABD jest równoboczny.

Zatem $|AE| = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Stąd $h = \sqrt{100 - 12} = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$.

Dalej $|BS| = \sqrt{88 + 4} = \sqrt{92} = 2\sqrt{23}$.



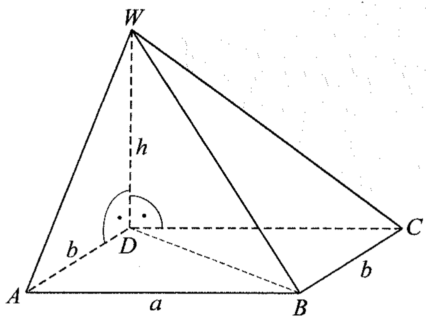
Odp. $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{22}}{2\sqrt{23}} = \sqrt{\dfrac{22}{23}}$.

12.18. Niech $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|DW| = h$. Trójkąty ADW, CDW, BDW są prostokątne. Stąd

$$\begin{cases} a^2 + h^2 = 49 \\ b^2 + h^2 = 36 \\ a^2 + b^2 + h^2 = 81 \end{cases}.$$

Odejmując stronami od sumy dwóch pierwszych trzecie otrzymujemy:

$h^2 = 4$. Stąd $h = 2$, $a = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, $b = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

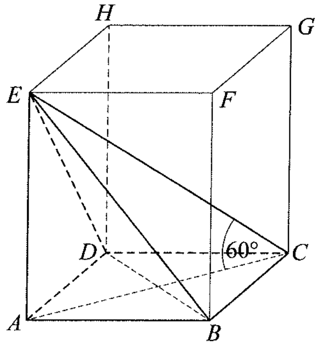


Odp. $V = \dfrac{1}{3} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2 = 8\sqrt{10}$.

12.21. $P_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

Trójkąt ACE jest połową trójkąta równobocznego o boku długości 8.

Zatem $|AE| = 4\sqrt{3}$.

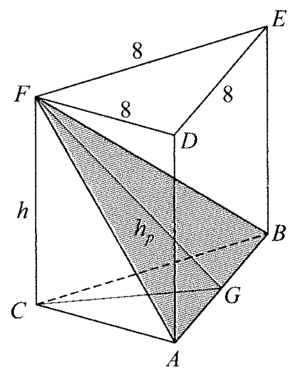


Odp. $V = \dfrac{1}{3} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = \dfrac{32}{3}\sqrt{3}$.

12.24. Oznaczenia tak jak na rysunku.

$52 = P_{ABF} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot h_p = 4h_p$. Stąd $h_p = 13$.

Dalej $|CG| = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$, $h = \sqrt{169 - 48} = \sqrt{121} = 11$

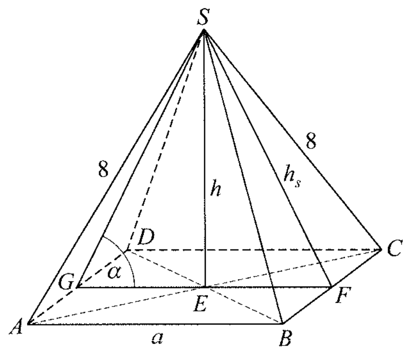


Odp. $V = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} \cdot 11 = 176\sqrt{3}$.

12.27. $|AB| = a$, $8 = a\sqrt{2}$, $a = 4\sqrt{2}$.

Wysokość h trójkąta ACS wynosi: $h = 4\sqrt{3}$.

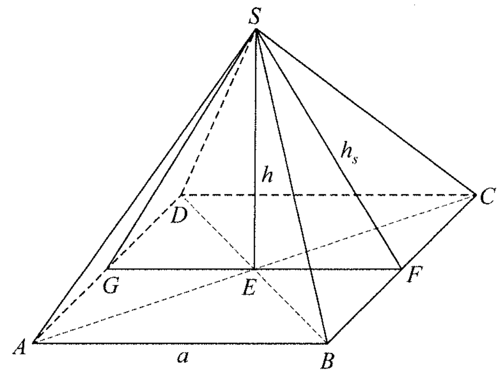
Wysokość h_s trójkąta ADS wynosi: $h_s = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{48 + 8} = 2\sqrt{14}$.



Odp. $\sin\alpha = \frac{h}{h_s} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$.

12.31. $a^2 = 100$, $a = 10$, $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 \cdot h_s = 260$,

$h_s = 13$, $h = \sqrt{169 - 25} = 12$.

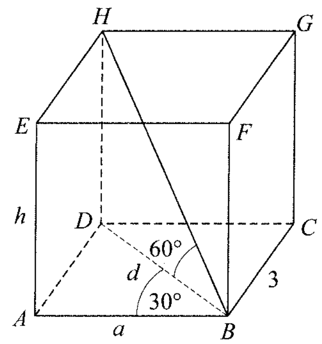


Odp. $V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400$.

12.34. Oznaczenia tak jak na rysunku. $a = d\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}d$, $h = d\,\mathrm{tg}\,60° = d\sqrt{3}$,

$d^2 = 9 + \frac{3}{4}d^2$, $\quad d^2 = 36$, $\quad d = 6$.

Stąd $a = 3\sqrt{3}$, $h = 6\sqrt{3}$



Odp. $V = 3 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 162$.

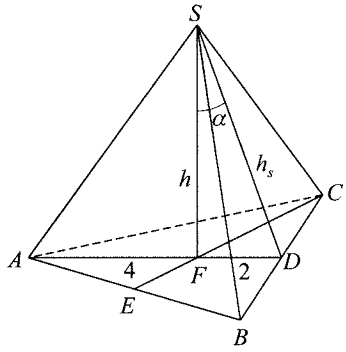
12.37. $a\sqrt{3} = a + 2$.

Odp. $a = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1$.

12.38. Wysokość podstawy: $\quad h_p = r + 2r = 6$.

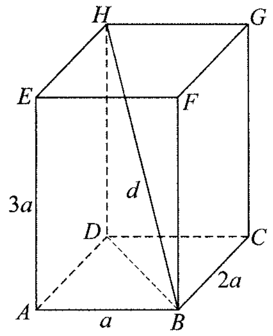
Bok podstawy: $\quad h_p = 6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\quad a = 4\sqrt{3}$.

Wysokość ostrosłupa: $\quad 72 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 \cdot h$, $\quad h = 6\sqrt{3}$.



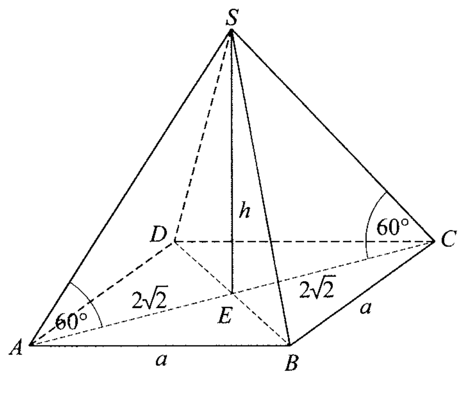
Odp. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

12.41. $198 = 2(2a^2 + 3a^2 + 6a^2)$, $\quad 99 = 11a^2$, $\quad a = 3$.



Odp. $d = \sqrt{9 + 36 + 81} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$.

12.45. Trójkąt ACS jest równoboczny. Zatem $h = \frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$.

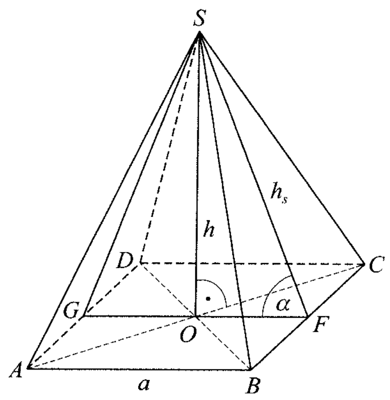


Odp. $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(4\sqrt{2}\right)^2\cdot 2\sqrt{6} = \frac{32\sqrt{6}}{3}$.

12.48. $h = \frac{1}{2}a\cdot\operatorname{tg}\alpha = \frac{2a\sqrt{6}}{5} = \frac{1}{2}a\cdot\frac{4\sqrt{6}}{5} = \frac{2a\sqrt{6}}{5}$,

$22^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{24}{25}a^2 = \frac{25+96}{100}a^2 = \frac{121}{100}a^2$, $\quad 22 = \frac{11}{10}a$, $\quad a = 20$,

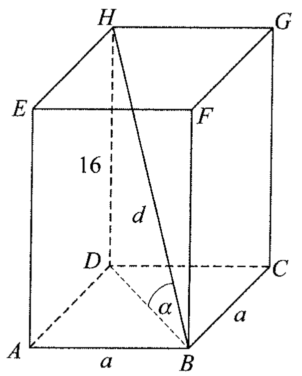
$h = \frac{2\cdot 20\sqrt{6}}{5} = 8\sqrt{6}$.



Odp. $V = \frac{1}{3} \cdot 20^2 \cdot 8\sqrt{6} = \frac{3200\sqrt{6}}{3}$.

12.52. $a\sqrt{2} = d\cos\alpha = \frac{3}{5}d$, $\quad d = \frac{5\sqrt{2}a}{3}$, $\quad \left(a\sqrt{2}\right)^2 + 16^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}a}{3}\right)^2$,

$256 = \frac{50a^2}{9} - 2a^2 = \frac{32a^2}{9}$, $\quad a^2 = 72$, $\quad a = 6\sqrt{2}$.

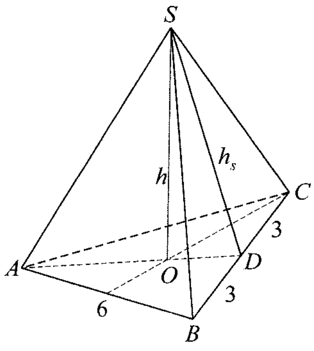


Odp. $P = 2 \cdot 72 + 4 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 16 = 144 + 384\sqrt{2}$.

12.58. Wysokości ostrosłupa, podstawy i ściany bocznej odpowiednio: h, h_p, h_s.

$27\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{36\sqrt{3}}{4} \cdot h$, $\quad h = 9$, $\quad h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$,

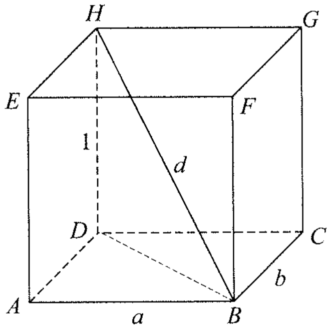
$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{1}{3}h_p\right)^2 = 81 + 3 = 84$, $\quad h_s = 2\sqrt{21}$.



Odp. $P = \frac{36\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(6 \cdot 2\sqrt{21}\right) = 12\sqrt{3} + 18\sqrt{21}$.

12.62. Niech $|AB| = a$, $|BC| = b$.

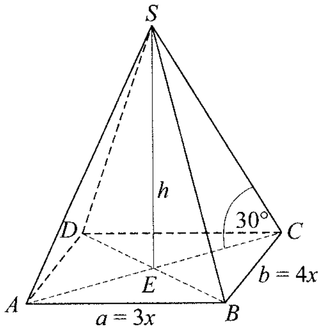
$1 + a^2 + b^2 = (a + b)^2, \qquad 1 = 2ab, \qquad ab = \frac{1}{2}.$



Odp. $V = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$

12.65. $3x \cdot 4x = 192, \qquad x^2 = 16, \qquad x = 4, \qquad a = 12, \qquad b = 16,$

$|AC| = \sqrt{144 + 256} = 20, \qquad |AE| = 10, \qquad |SE| = 10\operatorname{tg}30^\circ = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$

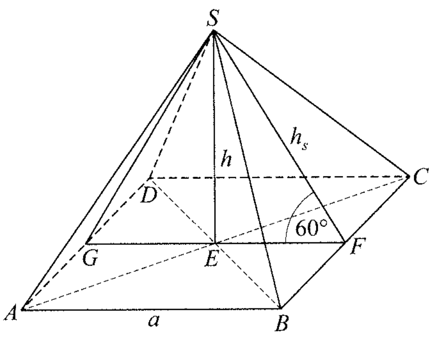


Odp. $V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 16 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} = \frac{640\sqrt{3}}{3}.$

12.68. Trójkąt FSG jest trójkątem równobocznym.

$h_s = a, \qquad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad 10 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a,$

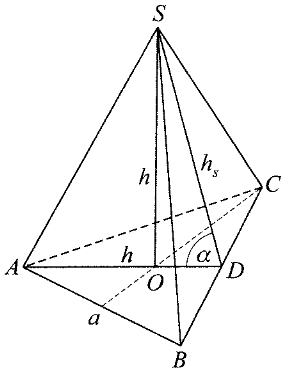
$a = 2\sqrt{5}, \qquad h = \sqrt{15}.$



Odp. $V = \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot \sqrt{15} = \frac{20\sqrt{15}}{3}.$

12.71. $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $\quad 27 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2}{8}$, $\quad a = 6$,

$h = 3\sqrt{3}$, $\quad |OD| = \sqrt{3}$, $\quad h_s = \sqrt{27 + 3} = \sqrt{30}$.



Odp. $P_b = 3 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{30} = 9\sqrt{30}$. $\quad \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{30}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

12.73. $h = 3x$, $\quad r = 8x$, $\quad 8\pi = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 64\pi x^3$, $\quad x = \dfrac{1}{2}$,

$h = \dfrac{3}{2}$, $\quad r = 4$, $\quad l = \sqrt{16 + \dfrac{9}{4}} = \dfrac{\sqrt{73}}{2}$

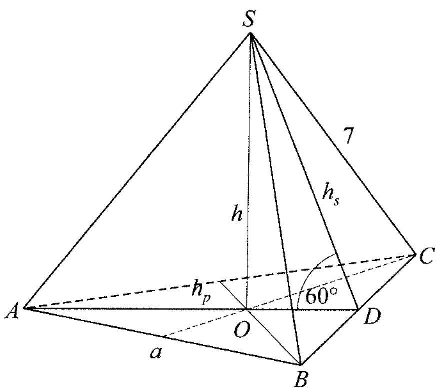
Odp. $P_b = \pi r l = 2\pi\sqrt{73}$.

12.78. $|OD| = \dfrac{1}{3}h_p$, $\quad \dfrac{\frac{1}{3}h_p}{h_s} = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$, $\quad h_s = \dfrac{2}{3}h_p$,

$h = \dfrac{\frac{2}{3}h_p\sqrt{3}}{2} = \dfrac{h_p\sqrt{3}}{3}$, $\quad 49 = \left(\dfrac{2}{3}h_p\right)^2 + h^2 = \dfrac{4}{9}h_p^2 + \dfrac{3}{9}h_p^2 = \dfrac{7}{9}h_p^2$,

$h_p = 3\sqrt{7}$, $\quad h = \sqrt{21}$,

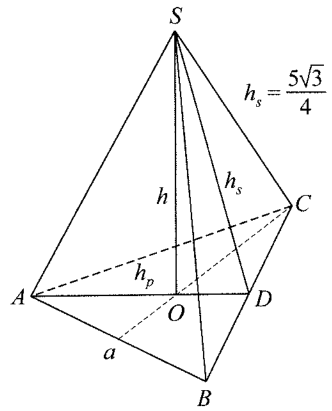
$h_p = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $\quad a = \dfrac{2h_p\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{21}$.



Odp. $V = \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{21} \cdot 3\sqrt{7}\right) \cdot \sqrt{21} = 21\sqrt{7}$.

12.82. $\frac{15\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$, $\quad a = 2$, $\quad h_p = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, $\quad |OD| = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

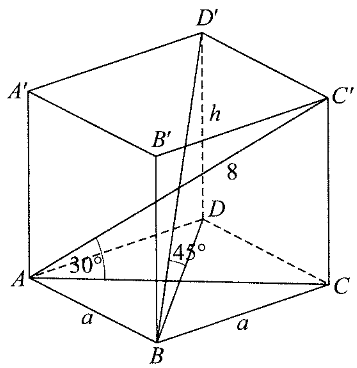
$h = \sqrt{\frac{75}{16} - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{225 - 16}{48}} = \frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}}.$



Odp. $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{209}}{12}.$

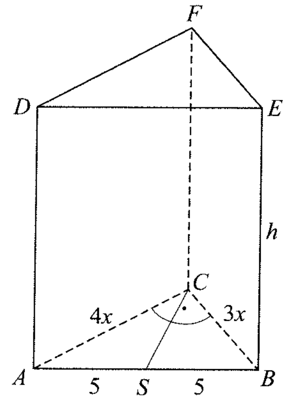
12.85. $h = 4$, $\quad |BD| = 4$,

$|AC| = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$, $\quad a = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4.$



Odp. $P = 4ah + 2\left(\frac{1}{2}|BD| \cdot |AC|\right) = 64 + 16\sqrt{3}.$

12.89. $100 = 16x^2 + 9x^2 = 25x^2, \qquad x = 2,$
$48 = 6h, \qquad h = 8.$



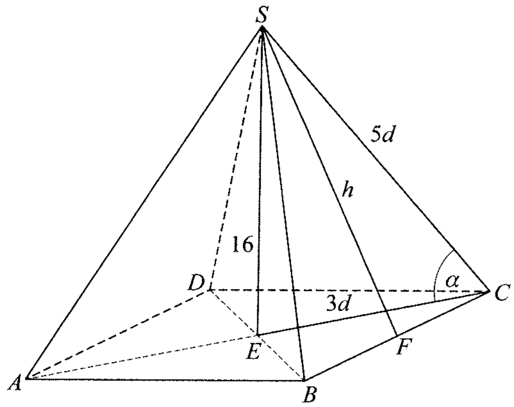
Odp. $V = \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8\right) \cdot 8 = 192.$

12.93. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a \cdot h, \qquad h = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$

$2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = 45\sqrt{3}, \qquad 5a^2 = 4 \cdot 45, \qquad a = 6.$

Odp. $V = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{81}{2}.$

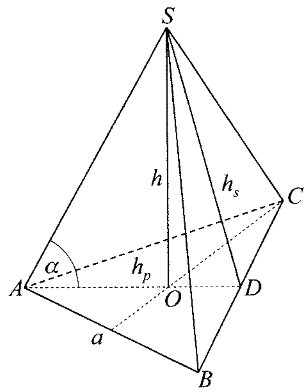
12.97. $25d^2 = 16^2 + 9d^2, \qquad 16d^2 = 16^2, \qquad d = 4.$



Zatem $|EC| = 12$, $|CS| = 20$, $|BC| = 12\sqrt{2}$, $h = \sqrt{400 - 72} = \sqrt{328} = 2\sqrt{82}$.

Odp. $P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{82} = 96\sqrt{41}.$

12.100. $\frac{3ah_s}{2} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \qquad h_s = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \qquad h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad |OD| = \frac{1}{3}h_p = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{9} - \frac{3a^2}{36}} = \frac{a}{2}$$

$$|AS|^2 = h^2 + \left(\frac{2}{3}h_p\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3} = \frac{7a^2}{12},\ |AS| = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$$

Odp. $\cos\alpha = \dfrac{\frac{2}{3}h_p}{|AS|} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{2\sqrt{3}}{a\sqrt{7}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

13. Statystyka

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
13.1	$\frac{x+25}{10} = 3,\ x = 5$	**D**
13.2	$\frac{6 \cdot 3 + 12 \cdot 4 + 2 \cdot x}{20} = \frac{18 + 48 + 2x}{20} = \frac{66 + 2x}{20} = 4,\ x = 7$	**D**
13.4	$\frac{x+7}{6} = 2,\ x = 5$	**C**
13.5	$\frac{x+2300}{6} = 500,\ x = 700$	**D**
13.6	1, 2, 3, 5, 5, 6; $m = \frac{3+5}{2} = 4$	**C**
13.7	2000, 2800, 3400, 3600, 4200, 8000; $m = \frac{3400+3600}{2} = 3500$	**B**

13.9	Dla $x = 5$ otrzymujemy: $m = \frac{3+5}{2} = 4$	**D**
13.10	$\frac{1\cdot 1 + 5\cdot 2 + 7\cdot 3 + 8\cdot 4 + 3\cdot 5 + 2\cdot 6}{1+5+7+8+3+2} = \frac{1+10+21+32+15+12}{26} = \frac{91}{26} = 3{,}5$	**C**
13.12	Dla $a = 9$ otrzymujemy: 2, 3, 5, 9, 10, 12. Wtedy $m = \frac{5+9}{2} = 7$	**D**
13.13	$\frac{40\cdot 30 + 1800}{40+20} = \frac{1200+1800}{60} = \frac{3000}{60} = 50$	**C**
13.14	$\frac{x+46}{8} = 7;\ x = 10;\ 2, 3, 5, 5, 7, 10, 11, 13;\ m = \frac{5+7}{2} = 6$	**A**
13.15	$\frac{30}{5} = 6 = \frac{30+x}{6},\ x = 6$	**D**
13.16	$\begin{cases} \frac{21+x}{5} = n \\ \frac{21+x+2x}{6} = 2n \end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{21+3x}{6}}{\frac{21+x}{5}} = 2 \Rightarrow \frac{7+x}{2}\cdot\frac{5}{21+x} = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 35 + 5x = 84 + 4x \Rightarrow x = 49$	**A**
13.17	Dla $x = 5$ otrzymujemy: 1, 2, 3, 5, 5, 9. Wtedy $m = \frac{3+5}{2} = 4$	**D**
13.18	Dla $x = 9$ otrzymujemy: 1, 4, 7, 9, 9, 9. Wtedy $m = \frac{7+9}{2} = 8$	**D**
13.19	$\frac{128+x}{6} = \frac{x}{2};\ x = 64;\ 16, 25, 27, 29, 31, 64;\ m = \frac{27+29}{2} = 28$	**C**
13.21	$\frac{x - 1 + 3x + 5x + 1 + 7x}{4} = \frac{16x}{4} = 4x = 72,\ x = 18$	**D**
13.22	$\frac{19+x}{4} + 2 = \frac{21+x}{5},\ \frac{27+x}{4} = \frac{21+x}{5},\ 135 + 5x = 84 + 4x,\ x = -51$	**A**
13.23	$\frac{75+x}{8} = 11,\ 75 + x = 88,\ x = 13$	**C**

13.24	$\frac{56+x}{8}=9,\ 56+x=72,\ x=16,\ m=\frac{8+10}{2}=9$	**B**
13.25	$\frac{m\cdot 2+m\cdot 4}{2m}=3,\ \frac{(2-3)^2\cdot m+(4-3)^2\cdot m}{2m}=1$	**B**
13.26	$\frac{0\cdot 23+1\cdot 14+2\cdot 28+3\cdot 17+4\cdot 11+5\cdot 7}{23+14+28+17+11+7}=\frac{200}{100}=2$	**C**
13.27	6655544444333332. Mediana = 4	**C**

Zadania otwarte

13.3 Średnia arytmetyczna:

$$\frac{1\cdot 6+2\cdot 5+6\cdot 4+5\cdot 3+4\cdot 2+2\cdot 1}{1+2+6+5+4+2}=\frac{6+10+24+15+8+2}{20}=\frac{65}{20}=3{,}25$$

Mediana: 3

13.7. $\frac{n\cdot 23+39}{n+1}=24,\qquad 23n+39=24n+24,\qquad n=15.$

Odp. Było 15 studentów.

13.11. $\frac{1\cdot 6+x\cdot 5+13\cdot 4+9\cdot 3+4\cdot 2+0\cdot 1}{1+x+13+9+4+0}=\frac{93+5x}{27+x}=3{,}6;\qquad 93+5x=97{,}2+3{,}6x;$

$1{,}4x=4{,}2$

Odp. $x=3$.

13.20. Średni roczny przyrost wysokości: $\frac{2\cdot 10+2\cdot 8+2\cdot 7}{6}=\frac{50}{6}=\frac{25}{3}\approx 8$ cm.

Błąd względny: $\frac{\frac{25}{3}-8}{\frac{25}{3}}=\frac{1}{25}=4\%$.

14. Kombinatoryka

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
14.1	$\binom{7}{2}-7=14$	**B**

14.3	2000, 1100, 1010, 1001	**D**
14.5	$10 \cdot 9 \cdot 1 = 90$	**C**
14.8	$995 = 100 + (n - 1)5$, $n = 180$	**C**
14.9	$\binom{10}{2} = 45$	**C**
14.10	$\frac{96}{6} - 1 = 15$, $\frac{90}{18} = 5$, $15 - 5 = 10$	**B**
14.11	O cyfrach: 4, 1, 1 są trzy. O cyfrach: 2, 2, 1 też są trzy. Razem $3 + 3 = 6$.	**C**
14.12	Są to liczby postaci: $3c_sc_dc_j$. Jest ich $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.	**D**
14.13	$\frac{99}{3} - 3 = 30$	**D**
14.15	Od 1000 do 2016 jest 1017 liczb.	**D**
14.16	$a_1 = 1000$, $a_n = 2015$, $2015 = 1000 + (n - 1)5$, $403 = 200 + n - 1$, $n = 204$	**D**
14.17	Pierwsza cyfra – 8 możliwości. Ostatnia cyfra – 3 możliwości.	**A**

Zadania otwarte

14.2 Liczb trzycyfrowych jest $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.
Każda cyfra jest 16 razy na każdej pozycji. Stąd
$100 \cdot 16 + 200 \cdot 16 + 300 \cdot 16 + 400 \cdot 16 +$
$+ 10 \cdot 16 + 20 \cdot 16 + 30 \cdot 16 + 40 \cdot 16 +$
$+ 1 \cdot 16 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 16 =$
$= 1000 \cdot 16 + 100 \cdot 16 + 10 \cdot 16 = 1110 \cdot 16 = 17760.$

14.4. Liczby są postaci: *edcba*.
Cyfrę e możemy wybrać na 8 sposobów, natomiast cyfrę d na 9 sposobów.
Cyfry a, b, c muszą spełniać warunki: $c > b > a$ i $a, b, c \in \{0, 2, 4, 6, 9\}$.
Stąd wynika, że $c \geq 4$ i $b \geq 2$.
Możemy wypisać wszystkie kombinacje trzech ostatnich cyfr.
Dla $c = 8$: 864. 862, 860, 842, 840, 820.
Dla $c = 6$: 642. 640, 620,
Dla $c = 4$: 420.
Odp. $8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$.

14.6. Liczby są postaci: *edcba*.
Cyfrę 7 możemy postawić na $\binom{5}{1} = 5$ sposobów.

Cyfrę parzystą można postawić na $\binom{4}{1} = 4$ sposoby.

Ponieważ są cztery cyfry parzyste $\{2, 4, 6, 8\}$, więc mamy 16 możliwości dla tych cyfr.
Na pozostałych pozycjach stawiamy cyfry nieparzyste $\{1, 3, 5, 9\}$.
Możemy to zrobić na $4^3 = 64$ sposobów.
Odp. $5 \cdot 16 \cdot 64 = 5120$.

14.7. Liczby są postaci: $dcba$, gdzie $a = c + 3$. Stąd wynika, że $c \leq 6$.
Cyfrę d możemy postawić na 9 sposobów.
Cyfrę c możemy postawić na 7 sposobów.
Cyfrę b możemy postawić na 10 sposobów.
Cyfrę a możemy postawić na 1 sposób.
Odp. $9 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 1 = 630$.

14.14. Wszystkich par jest $15 \cdot 14 = 210$.
Par, w których iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą nieparzystą jest: $8 \cdot 7 = 56$.
Odp. $210 - 56 = 154$.

15. Rachunek prawdopodobieństwa

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
15.2	$p = \frac{3}{11} < \frac{3}{10}$	**A**
15.4	$p = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$	**D**
15.6	$P(A) = 6 \cdot (1 - P(A)),\ P(A) = \frac{6}{7}$	**D**
15.8	$p = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$	**C**
15.11	$P(A \cup B) = 0{,}3 + (1 - 0{,}4) = 0{,}9$	**D**
15.12	$p = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$	**B**
15.13	$p = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$	**B**
15.14	$p = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$	**C**

15.15	$p = \frac{1}{36}$	**D**
15.16	$P(A) = 2 \cdot (1 - P(A)),\ P(A) = \frac{2}{3}$	**A**
15.18	$p = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$	**B**
15.20	$p = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$	**A**
15.22	$p = \frac{3}{8}$	**B**
15.24	$p = \frac{4}{9}$	**B**
15.25	$p = \frac{4}{100} = \frac{3}{75}$, 25 losów	**D**
15.27	$p = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$	**A**
15.29	$p = \frac{15}{33} = \frac{5}{11}$	**C**
15.31	$p = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$	**B**
15.33	$p = \frac{3}{8} = 0{,}375$	**C**
15.35	$p = \frac{3}{8} = 0{,}375$	**B**
15.36	$p = \frac{1}{24}$	**B**
15.38	$p = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$	**B**
15.40	$p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	**A**
15.41	$p = \frac{6}{6+n} = \frac{1}{3},\ n = 12$	**D**

15.43	$\lvert\Omega\rvert = 50,\ \lvert A\rvert = 35,\ P(A) = \frac{35}{50}$	**D**
15.45	$P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, bo $A = \{bbbc, bbcb, bcbb, cbbb\}$.	**C**
15.47	$\lvert\Omega\rvert = 29,\ \lvert A\rvert = 14,\ P(A) = \frac{14}{29}$	**C**

Zadania otwarte

15.1 $\lvert\Omega\rvert = 36,\ A = \{2 \cdot 6, 4 \cdot 3, 4 \cdot 6, 6 \cdot 2, 6 \cdot 4, 6 \cdot 6\}$.

Odp. $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

15.3. $\lvert\Omega\rvert = 36,\ A = \left\{\underbrace{3+5}_{3\cdot 5}, \underbrace{5+3}_{5\cdot 3}, \underbrace{5+5}_{5\cdot 5}\right\}$.

Odp. $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

15.5. $\lvert\Omega\rvert = 49,\ A = \left\{\begin{matrix} 1+2, 1+5, \\ 2+1, 2+4, 2+7, \\ 3+3, 3+6, \\ 4+2, 4+5, \\ 5+1, 5+4, 5+7, \\ 6+3, 6+6, \\ 7+2, 7+5 \end{matrix}\right\}$.

Odp. $P(A) = \frac{16}{49}$.

15.7. $\lvert\Omega\rvert = 36,\ A = \{1 < 2, 2 < 3, 3 < 4, 4 < 5, 5 < 6\}$.

Odp. $P(A) = \frac{5}{36}$.

15.9. A – numery wylosowanych kul są takie same.
B – numer kuli wylosowanej z czerwonego pudełka jest mniejszy od numeru drugiej kuli.
C – numer kuli wylosowanej z czerwonego pudełka jest większy od numeru drugiej kuli.

$P(A) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}, \qquad P(B) = P(C),$

$1 = \frac{1}{10} + P(B) + P(C), \qquad \frac{9}{10} = 2P(B).$

Odp. $P(B) = \frac{9}{20}$.

15.10. $|\Omega| = 49$, $A = \left\{\begin{array}{l} 1\cdot 6, \\ 2\cdot 3, 2\cdot 6, \\ 3\cdot 2, 3\cdot 4, 3\cdot 6, \\ 4\cdot 3, 4\cdot 6, \\ 5\cdot 6, \\ 6\cdot x, \text{ gdzie } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \end{array}\right\}$.

Odp. $P(A) = \frac{16}{49}$.

15.17. $|\Omega| = 64$, $A = \left\{\begin{array}{l} (5,1),(6,2),(7,3),(8,4), \\ (7,1),(8,2) \end{array}\right\}$.

Odp. $P(A) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$.

15.19. $|\Omega| = 5\cdot 5 = 25$.

Niech a oznacza liczbę wylosowaną z K, b liczbę wylosowaną z L.

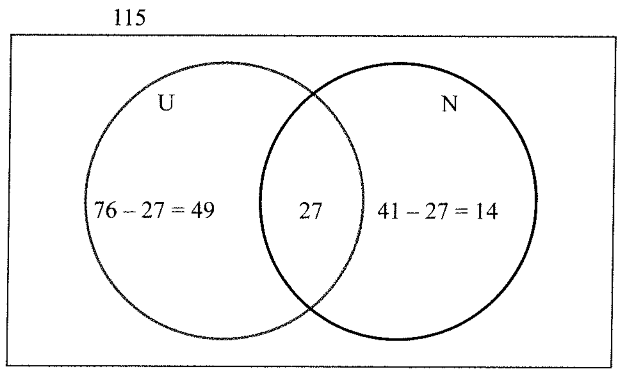
$a\cdot b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$. Zatem $|A| = 3\cdot 3 + 2\cdot 2 = 13$.

Odp. $P(A) = \frac{13}{25}$.

15.21. $M = \left\{\begin{array}{l} 12, 13, 14, 15, \\ 21, \mathbf{23}, \mathbf{24}, \mathbf{25}, \\ 31, 32, \mathbf{34}, \mathbf{35}, \\ 41, 42, 43, \mathbf{45}, \\ 51, 52, 53, 54 \end{array}\right\}$.

Odp. $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

15.23.



Odp. $P(A) = \frac{115 - 76 - 14}{115} = \frac{25}{115} = \frac{5}{23}$.

15.26. $|\Omega| = 90$.

Liczb podzielnych przez 8 jest $\frac{96}{8} - 1 = 11$.

Liczb podzielnych przez 12 jest $\frac{96}{12} = 8$.

Liczb podzielnych przez 24 jest $\frac{96}{24} = 4$.

Odp. $P(A) = \frac{11+8-4}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$.

15.28. $|\Omega| = 8 \cdot 7 = 56$.
Cyfra jedności jest parzysta.

$$A = \left\{\begin{matrix} 12, 32, 52, 72, \\ 24, 64, 84, \\ 16, 36, 56, 76, \\ 28, 48, 68 \end{matrix}\right\}.$$

Odp. $P(A) = \frac{14}{56} = \frac{1}{4}$.

15.30. $|\Omega| = 6 \cdot 8 = 48$, $A = \{11, 22, 33, 44, 55, 66\}$.

Odp. $P(A) = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$.

15.32. $|\Omega| = 90$.

Liczb podzielnych przez 9 jest $\frac{99}{9} - 1 = 10$.

Liczb podzielnych przez 12 jest $\frac{96}{12} = 8$.

Są 2 liczby podzielne przez 36.

Odp. $P(A) = \frac{10+8-2}{90} = \frac{16}{90} = \frac{8}{45}$.

15.34. $|\Omega| = 90 \cdot 89$, $A = \left\{\begin{matrix} 10+20, 11+19, 12+18, 13+17, 14+16, \\ 16+14, 17+13, 18+12, 19+11, 20+10 \end{matrix}\right\}$.

Odp. $P(A) = \frac{10}{90 \cdot 89} = \frac{1}{801}$.

15.37. $|\Omega| = 7 \cdot 6 = 42$, $A = \left\{\begin{matrix} 51, 52, 53, 54, \\ 15, 25, 35, 45 \end{matrix}\right\}$.

Odp. $P(A) = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}$.

15.39. $|\Omega| = 90$, $A = \{12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39\}$.

Odp. $P(A) = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$.

15.42. $|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25$, $A = \left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{4}{1}, \frac{4}{2}, \frac{4}{4}, \frac{5}{1}, \frac{5}{5}, \frac{10}{1}, \frac{10}{2}, \frac{10}{5}, \frac{10}{10}\right\}$.

Odp. $P(A) = \frac{12}{25}$.

15.44. $|\Omega| = 7 \cdot 7 = 49$.

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} 100+10, \boxed{100+11}, 100+12, 100+13, \boxed{100+14}, 100+15, 100+16 \\ \boxed{200+10}, 200+11, 200+12, \boxed{200+13}, 200+14, 200+15, \boxed{200+16} \\ 300+10, 300+11, \boxed{300+12}, 300+13, 300+14, \boxed{300+15}, 300+16 \\ 400+10, \boxed{400+11}, 400+12, 400+13, \boxed{400+14}, 400+15, 400+16 \\ \boxed{500+10}, 500+11, 500+12, \boxed{500+13}, 500+14, 500+15, \boxed{500+16} \\ 600+10, 600+11, \boxed{600+12}, 600+13, 600+14, \boxed{600+15}, 600+16 \\ 700+10, \boxed{700+11}, 700+12, 700+13, \boxed{700+14}, 700+15, 700+16 \end{matrix}\right\}$$

$|A| = 16$

Odp. $P(A) = \frac{16}{49}$.

15.46. $|\Omega| = 2^4 = 16$. $A = \{oooo, ooor, ooro, oroo, rooo\}$.

Odp. $P(A) = \frac{5}{16}$.

15.48. $|\Omega| = 6 \cdot 4 = 24$. $a \in \{1, 2, 3\}$ $b = -1$ $|A| = 3 \cdot 1 = 3$

Odp. $P(A) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

16. Geometria analityczna

Zadania zamknięte

Zad.	Rozwiązanie	Odp.
16.1	$x^2 + y^2 = 36 = 6^2$	**D**
16.2	$\lvert AB\rvert = \sqrt{(3+5)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$, Obwód $12\sqrt{5}$	**C**
16.3	$\lvert AC\rvert = \sqrt{(-5+1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, Pole $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 10$	**A**
16.4	$r = \sqrt{13}$	**A**
16.7	$S = (1, 0)$, $r = 2$, $x = 1 - 2$ lub $x = 1 + 2$ lub $y = 0 + 2$ lub $y = 0 - 2$	**B**
16.9	$S = (-2, 3)$	**C**

16.11	$\lvert AB\rvert = \sqrt{(2-1)^2 + (3+4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$	**C**
16.12	$B = (5, -2012)$, $C = (-5, -2012)$	**A**
16.13	$(2-2)^2 + (-5+7)^2 = 4$, $B = (2, -5)$	**B**
16.15	$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 3^2$	**A**
16.16	$2 = \frac{x-1}{2}$, $7 = \frac{y+3}{2}$, $B = (5, 11)$	**A**
16.18	$\lvert BC\rvert = \sqrt{(5+2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{58}$. Pole $\left(\sqrt{58}\right)^2 = 58$	**B**
16.19	$S = (-4, 6)$	**D**
16.21	$\lvert AB\rvert = \sqrt{(5+1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$. Obwód $8\sqrt{13}$	**D**
16.22	$-4 = \frac{x+17}{2}$, $7 = \frac{y+12}{2}$, $P = (-25, 2)$	**C**
16.23	$S_1 = (-1, 2)$, $S_2 = (0, 0)$, $\lvert S_1S_2\rvert = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$	**A**
16.25	$4 = \frac{a+a+3}{2}$, $a = \frac{5}{2}$	**D**
16.27	$S = (-2, 3)$, $r = 2$. Jeden z osią Oy.	**B**
16.28	$S = (2, -2)$, $r = 2$, $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$	**B**
16.30	$(-1+1)^2 + (0+3)^2 = 9$	**C**
16.31	$S = \left(\frac{13+15}{2}, \frac{-12+8}{2}\right) = (14, -2)$	**C**
16.32	$K = \left(\frac{-2-1}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$, $K' = \left(\frac{3}{2}, -2\right)$	**D**
16.34	$\lvert PQ\rvert = \sqrt{(3+2)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$	**C**
16.35	$L = (x, 0)$, $S = (0, y)$, $y = \frac{4+0}{2} = 2$, $S = (0, 2)$	**A**
16.36	$\lvert OS\rvert = \sqrt{(0-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{18}$, $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 18$	**C**

16.38	$\lvert AB\rvert = \sqrt{(4+2)^2+(-1-5)^2} = 6\sqrt{2},\ h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6},\ r = \frac{2}{3}h = 2\sqrt{6}$	**B**
16.39	$5 + 5 = 10$	**A**
16.40	$\frac{3+b}{2} = -5,\ b = -13$	**A**
16.42	$\frac{3+x}{2} = 6,\ \frac{2+y}{2} = 5,\ C = (9, 8)$	**A**
16.43	$S = (2, -2),\ r = 2$	**D**
16.44	$\lvert AB\rvert = \sqrt{(-6-2)^2+(-3-3)^2} = 10,\ h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3},\ r = \frac{1}{3}h = \frac{5}{3}\sqrt{3}$	**C**
16.45	$\frac{a+7}{2} = 3,\ a = -1,\ \frac{6+b}{2} = 4,\ b = 2$	**B**
16.46	$a_1 = \frac{4-2}{1+3} = \frac{1}{2},\ a = -2$	**C**
16.48	$\lvert S_1S_2\rvert = \sqrt{(9-3)^2+(-4-4)^2} = 10,\ r = 5$	**C**
16.50	$\lvert AS\rvert = \sqrt{(2+1)^2+(3-7)^2} = \sqrt{25} = 5$	**A**
16.52	$A' = (-21, -11),\ B' = (3, -17),\ S = \left(\frac{-21+3}{2}, \frac{-11-17}{2}\right) = (-9, -14)$	**A**
16.54	$\lvert BC\rvert = \sqrt{(5+2)^2+(1-4)^2} = \sqrt{58}$. Pole $\left(\sqrt{58}\right)^2 = 58$	**C**
16.56	$\frac{x+2}{2} = 4,\ x = 6,\ \frac{y+2}{2} = 3,\ y = 4$	**B**
16.58	$r = \lvert KO\rvert = \sqrt{36+64} = 10$	**B**
16.59	$\lvert S_1S_2\rvert = \sqrt{3^2+4^2} = 5,\ r + 4 = 5,\ r = 1$	**A**
16.61	$B = (11, 0),\ \sqrt{(11+3)^2+(0-2)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$	**D**

Zadania otwarte

16.5 $r = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{20}$.

Odp. $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$.

16.6. $a_{AB} = \frac{2-8}{1-3} = 3$, $a_{AC} = \frac{7-8}{6-3} = -\frac{1}{3}$, $a_{AB} \cdot a_{AC} = -1$.

Proste AB i AC są prostopadłe. Zatem trójkąt ABC jest prostokątny.

16.8. Prosta prostopadła do $y = 2x - 3$ przechodząca przez punkt S: $y = -\frac{1}{2}(x-3) + 7$.

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 4x - 6 = -x + 17 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{23}{5} \\ y = \frac{31}{5} \end{cases}$$

Odp. Punkt styczności $\left(\frac{23}{5}, \frac{31}{5}\right)$.

16.10. Środek okręgu $S = (r, r)$, gdzie $r > 0$ i jest promieniem okręgu.

$(1-r)^2 + (8-r)^2 = r^2$, $\quad r^2 - 18r + 65 = 0$,

$\Delta = 64$, $\quad r_1 = \frac{18-8}{2} = 5$, $\quad r_2 = \frac{18+8}{2} = 13$.

Odp. $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$, $(x-13)^2 + (y-13)^2 = 169$.

16.14. $y = -\frac{1}{2}x + 6$, $\quad a_{AB} = 2$, $\quad S_{AB} = (0,6)$.

16.17. Prosta AB: $a_{AB} = \frac{23-11}{8-2} = 2$, $\quad y - 11 = 2(x-2)$, $\quad y = 2x + 7$.

Prosta prostopadła do AB przechodząca przez C: $y = -\frac{1}{2}(x-6) + 14 = -\frac{1}{2}x + 17$.

Punkt przecięcia prostych:

$$\begin{cases} y = 2x + 7 \\ y = -\frac{1}{2}x + 17 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x + 7 \\ 4x + 14 = -x + 34 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 15 \end{cases}.$$

Odp. $D = (4, 15)$.

16.20. $B = (2y, y)$,

$|AC| = \sqrt{(1-2)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{65}$, $\quad |BC| = \sqrt{(1-2y)^2 + (9-y)^2}$,

$(1-2y)^2 + (9-y)^2 = 65$, $\quad 5y^2 - 22y + 17 = 0$.

$\Delta = 144$, $\quad y_1 = \frac{22-12}{10} = 1$, $\quad y_2 = \frac{22+12}{10} = \frac{17}{5}$.

Odp. $B = \left(\frac{34}{5}, \frac{17}{5}\right)$.

16.24. $a_{AB} = \dfrac{1+5}{5+1} = 1.$ Równanie prostej AB: $y = x - 4 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0.$

$a_{AD} = \dfrac{0+5}{-2+1} = -5.$ Równanie prostej AD: $y = -5(x+2) = -5x - 10.$

$a_{BC} = \dfrac{3-1}{1-5} = -\dfrac{1}{2}.$ Równanie prostej AD: $y = -\dfrac{1}{2}(x-1) + 3 = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}.$

Punkt S jest punktem przecięcia prostych AD i BC:

$$\begin{cases} y = -5x - 10 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y = -5x - 10 \\ -10x - 20 = -x + 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases} \quad S = (-3, 5).$$

Promień okręgu jest równy odległości punktu S od prostej AB.

$$r = \frac{|-3-5-4|}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}.$$

Odp. $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 72.$

16.26. $a_{AB} = \dfrac{-1+5}{3+1} = 1.$ Prosta AB: $y = x - 4 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0.$

Wysokość równoległoboku jest równa odległości punktu C od prostej AB.

$$h = \frac{|2-4-4|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}, \qquad |AB| = \sqrt{(3+1)^2 + (-1+5)^2} = 4\sqrt{2}.$$

Odp. $P_{ABCD} = 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 24$

16.29. $C = (x, 2x-3).$

$$|AC| = \sqrt{(x-2)^2 + (2x-3-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + 4(x-2)^2} = \sqrt{5(x-2)^2},$$

$$|BC| = \sqrt{(x-5)^2 + (2x-3-2)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (2x-5)^2},$$

$5(x-2)^2 = (x-5)^2 + (2x-5)^2,$

$5x^2 - 20x + 20 = x^2 - 10x + 25 + 4x^2 - 20x + 25,$

$10x = 30, \qquad x = 3.$

Odp. $C = (3, 3).$

16.33. $a_{AB} = \dfrac{19+12}{50+43} = \dfrac{1}{3}.$ Równanie prostej AB: $y = \dfrac{1}{3}(x-50) + 19 = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{7}{3}.$

Odp. $x = -7.$

16.37. $C = (0, y).$

$$|AC| = \sqrt{(0+2)^2 + (y-4)^2}, \qquad |BC| = \sqrt{(0-6)^2 + (y+2)^2},$$

$4 + y^2 - 8y + 16 = 36 + y^2 + 4y + 4,$

$-12y = 20.$

Odp. $C = \left(0, -\dfrac{5}{3}\right).$

16.41. Trójkąt ABC ma oś symetrii wtedy, gdy jest trójkątem równoramiennym.

$$|AC| = \sqrt{(10+2)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10},$$

$$|AB| = \sqrt{(6+2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5},$$

$$|BC| = \sqrt{(10-6)^2 + (6+2)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Środek AC: $D = \left(\frac{10-2}{2}, \frac{6+2}{2}\right) = (4, 4)$.

$$a_{DB} = \frac{-2-4}{6-4} = -3.$$

Odp. $y = -3(x-4) + 4 = -3x + 16$.

16.47. $\begin{cases} y = x+2 \\ y = -3x+b \end{cases}$, $\quad C = (0, 2)$, $\quad b = 2$, $\quad A = (-2, 0)$, $\quad B = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

Odp. $P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}+2\right)\cdot 2 = \frac{8}{3}$.

16.49. $a_{AC} = \frac{7+3}{2+3} = 2, \qquad a_{CB} = -\frac{1}{2}$.

Równanie prostej CB: $y = -\frac{1}{2}(x-2) + 7 = -\frac{1}{2}x + 8$.

Wyznaczenie współrzędnych punktu B:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \\ y = -\frac{1}{2}x + 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \\ 3x - 3 = -2x + 32 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 7 \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}.$$

Odp. $B = \left(7, \frac{9}{2}\right)$. $\qquad |AB| = \sqrt{(7+3)^2 + \left(\frac{9}{2}+3\right)^2} = \sqrt{\frac{400}{4} + \frac{225}{4}} = \frac{25}{2}$.

16.51. $B = (5, 0)$.

$a_{AM} = \frac{9-0}{2+4} = \frac{3}{2}$. $\qquad$ Równanie prostej AM: $y = \frac{3}{2}(x+4) = \frac{3}{2}x + 6$.

Punkt przecięcia prostych:

$$\begin{cases} y = -2x + 10 \\ y = \frac{3}{2}x + 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2x + 10 \\ -4x + 20 = 3x + 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{8}{7} \\ y = \frac{54}{7} \end{cases} \qquad C = \left(\frac{8}{7}, \frac{54}{7}\right).$$

Odp. $P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot(5+4)\cdot\frac{54}{7} = \frac{247}{7}$.

16.53. Równanie prostej BD: $y = -2(x-14) - 8 = -2x + 20$.

Wyznaczenie współrzędnych punktu D:

$$\begin{cases} y = -2x + 20 \\ y = \frac{1}{2}x - 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2x + 20 \\ -4x + 40 = x - 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{54}{5} \\ y = -\frac{8}{5} \end{cases} \qquad D = \left(\frac{54}{5}, -\frac{8}{5}\right).$$

Niech $C = (x, y)$. Wtedy

$$\frac{54}{5} = \frac{14 + x}{2}, \qquad 108 = 70 + 5x, \qquad -\frac{8}{5} = \frac{-8 + y}{2}, \qquad -16 = -40 + 5y.$$

Odp. $C = \left(\frac{38}{5}, \frac{24}{5}\right)$.

16.55. $a_{CD} = \frac{4}{3}$. Równanie prostej AB: $y = -\frac{3}{4}(x - 3) + 4 = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.

Odp. $A = \left(\frac{25}{3}, 0\right)$, $B = \left(0, \frac{25}{4}\right)$, $|AB| = \sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)^2 + \left(\frac{25}{4}\right)^2} = 25\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}} = 25 \cdot \frac{5}{12} = \frac{125}{12}$.

16.57. $a_{AB} = \frac{5 - 3}{10 - 4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\qquad a_{BC} = -3$, $\qquad BC$: $y = -3(x - 10) + 5 = -3x + 35$

$2x + 3 = -3x + 35$, $\qquad 5x = 32$, $\qquad x = \frac{32}{5}$.

Odp. $C = \left(\frac{32}{5}, \frac{79}{5}\right)$.

16.60. $B = \left(x, \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)$, $\qquad |AC| = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68}$, $|BC| = \sqrt{(x - 1)^2 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{15}{2}\right)^2}$.

$x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{30}{4}x + \frac{225}{4} = 68$, $\qquad 5x^2 - 38x - 43 = 0$.

$\Delta = 1444 + 860 = 2304 = 48^2 \qquad x_1 = \frac{38 + 48}{10} = 8{,}6 \qquad x_2 = \frac{38 - 48}{10} = -1$.

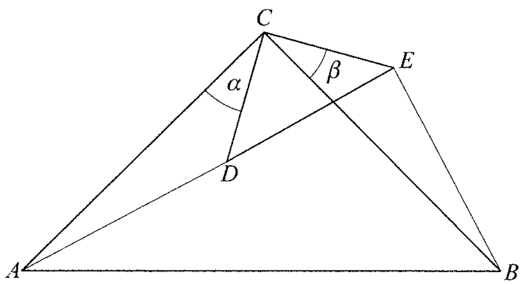
Odp. $B = (8{,}6;\ 5{,}8)$.

16.62. $D = (3, 1)$

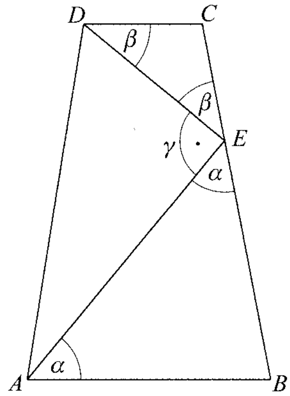
Odp. $y = \frac{1}{3}x$.

17. Dowody (geometria)

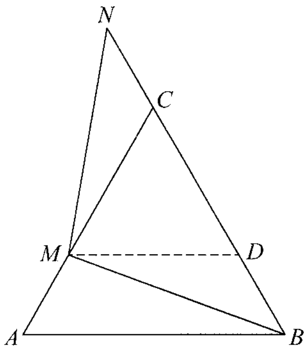
17.1. $\beta = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$, $|AC| = |BC|$, $|CD| = |CE|$.
Trójkąty ACD i BCE są przystające (cecha *bkb*). Stąd $|AD| = |BE|$.



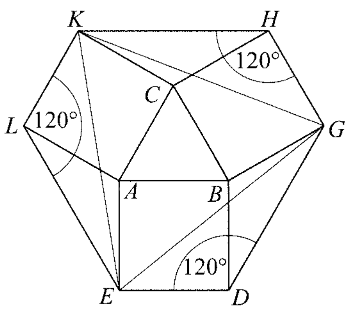
17.2. $\sphericalangle ABC + \sphericalangle DCB = 180°$, $180° - 2\alpha + 180° - 2\beta = 180°$, $\alpha + \beta = 90°$.
Stąd $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 90°$.



17.3. $MD \parallel AB$. Stąd $|BD| = |AM| = |CN|$.
Dalej $|MD| = |MC|$, bo trójkąt MDC jest trójkątem równobocznym.
Również $\sphericalangle MDC = 120° = \sphericalangle NCM$.
Zatem trójkąty MCN i MDB są przystające (cecha bkb). Stąd $|BM| = |MN|$.

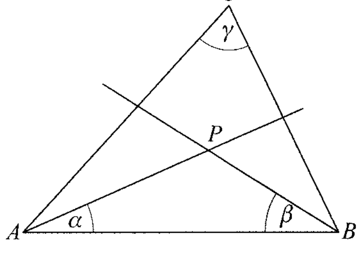


17.4. Trójkąt DBG, EAL, KCH są przystające. Stąd $|DG| = |EL| = |KH|$.
Trójkąt EDG, ELK, KHG są przystające. Stąd $|EG| = |EK| = |KG|$.
Zatem trójkąt EKG jest równoboczny.

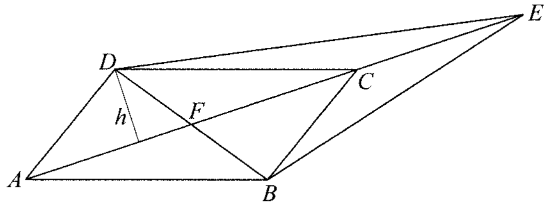


17.5. $2\alpha + 2\beta = 180° - \gamma$, $\alpha + \beta = 90° - \frac{1}{2}\gamma$.

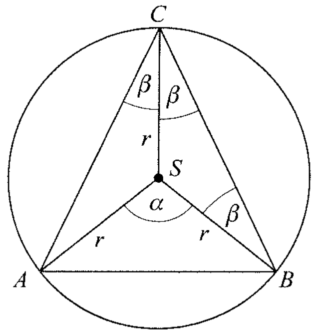
$$\sphericalangle APB = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - \left(90° - \frac{1}{2}\gamma\right) = 90° + \frac{1}{2}\gamma > 90°.$$



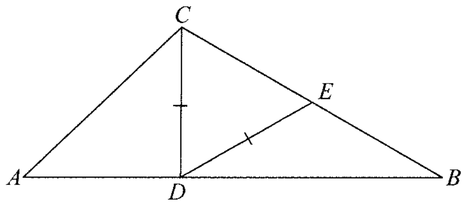
17.6. $P_{ADF} = P_{CDF}$ ($|AF| = |FC|$ i wspólna wysokość).
Tak samo $P_{AFB} = P_{BCF}$ i $P_{AFB} = P_{ADF}$.
Stąd $P_{ABCD} = 4P_{AFD}$.
Jednocześnie $|AF| = |CE|$ i wspólna wysokość. Stąd $P_{AFD} = P_{CDE}$.
Zatem $P_{ABCD} = 4P_{CDE}$.



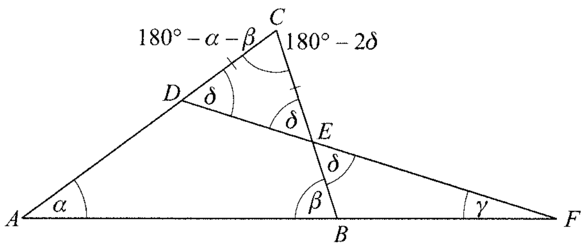
17.7. Trójkąt BSC jest równoramienny, zatem $\sphericalangle SCB = \sphericalangle SBC = \beta$.
CS zawiera się w dwusiecznej kąta ACB, czyli $\sphericalangle ACB = 2\beta$.
$\alpha = 2(2\beta) = 4\beta$ (twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym).



17.8. Punkt E jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD. Zatem $|DE| = |EC|$.
Czyli $|CD| = |DE| = |EC|$. Zatem trójkąt CDE jest równoboczny.



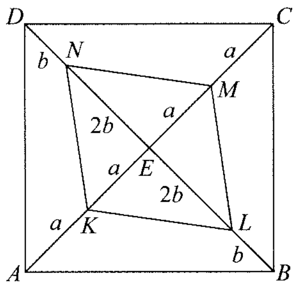
17.9. Z trójkątów ABC i CDE wynika, że $\alpha + \beta = 2\delta$.
Z trójkątów ABC i BEF wynika, że $\beta = \delta + \gamma$.
Z drugiej równości wynika, że $\delta = \beta - \gamma$.
Wtedy $\alpha + \beta = 2(\beta - \gamma)$, $\alpha = \beta - 2\gamma$.



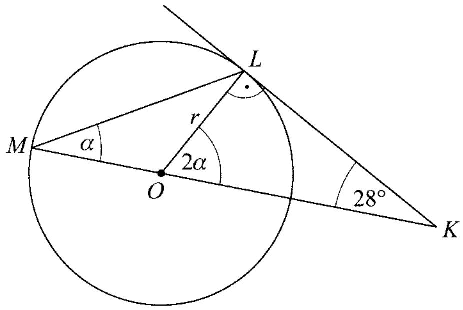
17.10. $P_{ABCD} = 4P_{ABE}$, $\quad P_{KLMN} = 4P_{KLE}$,

$$P_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 3b = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot 2b\right) = 3P_{KLE}.$$

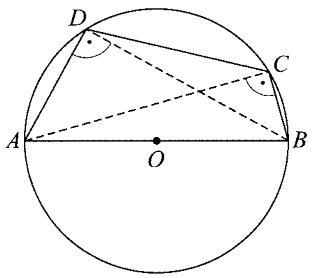
Stąd $\frac{P_{KLMN}}{P_{ABCD}} = \frac{4P_{KLE}}{4P_{ABE}} = \frac{P_{KLE}}{3P_{KLE}} = \frac{1}{3}$.



17.11. Kąt środkowy KOL jest równy 2α.
Trójkąt KLO jest prostokątny. Stąd $2\alpha = 90° - 28° = 62°$, $\alpha = 31°$.

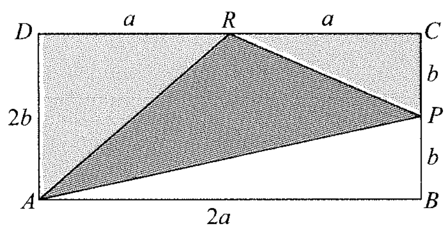


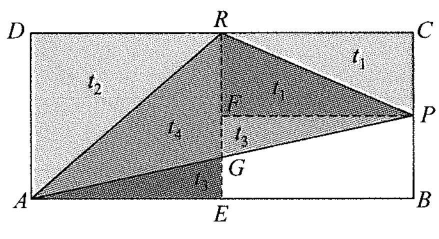
17.12. Trójkąty ABC i ABD są prostokątne.
Stąd $|BC|^2 + |AC|^2 = |AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2$.



17.13. $P_{ABCD} = 4ab$, $\quad P_{ABP} = ab$, $\quad P_{ARD} = ab$, $\quad P_{PCR} = \frac{1}{2}ab$.

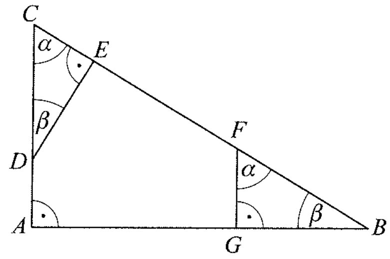
Stąd $P_{APR} = 4ab - ab - ab - \frac{1}{2}ab = \frac{3}{2}ab = ab + \frac{1}{2}ab = P_{ARD} + P_{PCR}$.



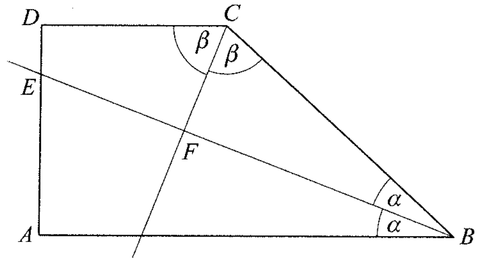


II sposób. Patrz rysunek.
$P_{ARD} = t_1 + t_3 + t_4 = t_1 + t_2$.

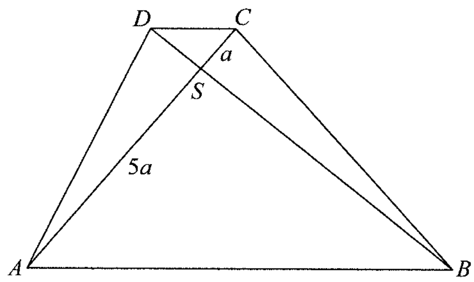
17.14. Trójkąty ABC, BFG, CDE są trójkątami prostokątnymi o tych samych kątach. Stąd teza.



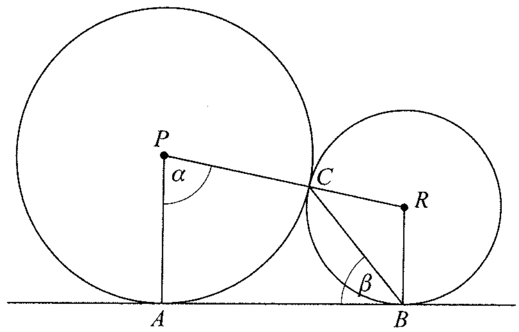
17.15. $2\alpha + 2\beta = 180°$. $\alpha + \beta = 90°$.
Stąd $\sphericalangle BFC = 90° = \sphericalangle CFE$.
Zatem $\sphericalangle CFE + \sphericalangle EDC = 180°$.
Dlatego również $\sphericalangle FED + \sphericalangle DCF = 180°$.
Czyli $\sphericalangle CFE + \sphericalangle EDC = \sphericalangle FED + \sphericalangle DCF$.



17.16. Zatem $|AS| = 5|SC|$. Czyli skala podobieństwa trójkątów CDS i ABS wynosi 5.
Stąd $P_{ABS} = 5^2 \cdot P_{CDS}$.

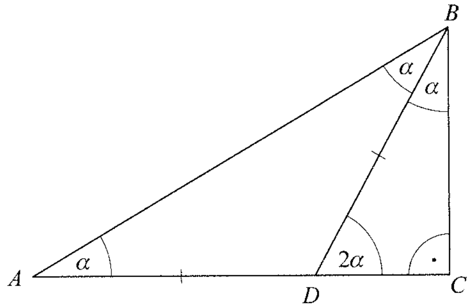


17.17. Czworokąt $ABRP$ jest trapezem. Stąd $\alpha + \sphericalangle BRC = 180°$.
Ponieważ $\sphericalangle BRC = 180° - 2(90° - \beta) = 2\beta$, więc $\alpha + 2\beta = 180°$. Stąd teza.

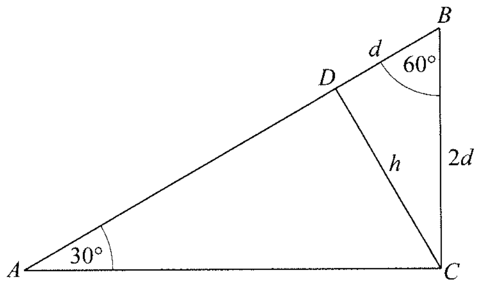


17.18. Zauważmy, że $\alpha = 30°$.

Czyli trójkąt BCD jest połową trójkąta równobocznego. Stąd $|CD| = \frac{1}{2} \cdot |BD|$.



17.19. Niech $|BD| = d$. Trójkąt BCD jest połową trójkąta równobocznego. Stąd $|BC| = 2d$. Trójkąt ABC jest również połową trójkąta równobocznego. Zatem $|AB| = 2|BC| = 4d$. Stąd $|AD| = 3d$. Czyli $|AD| : |BD| = 3 : 1$.



17.20. $r\sqrt{2} + r + 2 = 2\sqrt{2}$, $\qquad r\left(\sqrt{2} + 1\right) = 2\sqrt{2} - 2$.

$$r = \frac{2\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2} + 1} = \left(2\sqrt{2} - 2\right)\left(\sqrt{2} - 1\right) = 6 - 4\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1 + \underbrace{7 - 5\sqrt{2}}_{<0} < \sqrt{2} - 1.$$

17.21. $|BF| = \frac{1}{2}|EC|$. Stąd $|BC| = |BP|$.

Zatem $|BF| = |DE|$ i $|BP| = |DA|$ oraz $|\sphericalangle FBP| = |\sphericalangle ADE|$. Z cechy *bkb* wynika teza.

17.22. Trójkąty CDE i BEF są przystające. Wynika to z cechy *kbk* przystawania trójkątów, bo $\sphericalangle|DCE| = \sphericalangle|EBF|$, $|CE| = |BE|$, $\sphericalangle|DEC| = \sphericalangle|BEF|$. Stąd $|DC| = |BF|$. A ponieważ $|AB| = |DC|$, więc stąd otrzymujemy tezę.

18. Dowody (algebra)

18.1. $\frac{a^2 + 1}{a + 1} \geq \frac{a + 1}{2} \Leftrightarrow 2a^2 + 2 \geq a^2 + 2a + 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 \geq 0$.

Ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa.

18.2. $\sqrt{a^2 + b} = \sqrt{a + b^2} \Rightarrow a^2 + b = a + b^2 \Rightarrow (a - b)(a + b) - (a - b) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a - b)(a + b - 1) = 0 \Rightarrow a = b$ lub $a + b = 1$

18.3. $a + b = 1 \Rightarrow 1 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 7 + 2ab \Rightarrow ab = -3.$
$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 49 - 18 = 31.$

18.4. $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) = 10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n =$
$= 10(3^n - 2^{n-1})$, gdzie $n - 1 \geq 0$.

18.5. $2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 16 = 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 9 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 11 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 13 \cdot (2 \cdot 7) \cdot 2^4 =$
$= 2^{1+2+1+3+1+2+1+4} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 7 = 2^{15} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$

18.6. $\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2a + 2b + 2c > 3a + 3b \Leftrightarrow 2c > a + b$
Ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa, bo $c > a$ i $c > b$.

18.7. $n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = 3n^2 + 6n + 5 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2.$
II sposób.
$(n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 = 3n^2 + 2.$

18.8. $\Delta = b^2 - 4c$. Dla $c < 0$, $\Delta > 0$.
Czyli trójmian $y = x^2 + bx + c$ ma dwa różne miejsca zerowe.

18.9. $0 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx).$
Stąd oraz z tego, że $x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$ wynika $xy + yz + zx \leq 0$.

18.10. $6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98} = 6^{98} \cdot (36 - 12 + 10) = 17 \cdot 2 \cdot 6^{98}.$

18.11. $1 + 2013 + 2013^2 + 2013^3 + 2013^4 + 2013^5 + 2013^6 + 2013^7 =$
$= (1 + 2013^2) + 2013 \cdot (1 + 2013^2) + 2013^4 \cdot (1 + 2013^2) + 2013^5 \cdot (1 + 2013^2) =$
$= (1 + 2013^2)(1 + 2013 + 2013^4 + 2013^5) =$
$= (1 + 2013^2)(1 + 2013^4 + 2013(1 + 2013^4)) =$
$= (1 + 2013^2)(1 + 2013^4)(1 + 2013).$

18.12. $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = 7$

18.13. $k = 7n + 2$. Wtedy $3k^2 = 3(49n^2 + 28n + 4) = 7(21n^2 + 12n + 1) + 5.$

18.14. Wynika to z twierdzenia o średniej arytmetycznej i kwadratowej: $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.
II sposób.
$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0.$
Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych a, b.

18.15. $(2n - 2)^3 + (2n)^3 + (2n + 2)^3 =$
$= 8n^3 - 24n^2 + 24n - 8 + 8n^3 + 8n^3 + 24n^2 + 24n + 8 =$
$= 24n^3 + 48n = 24(n^3 + 2n).$

18.16. $4x^2 - 8xy + 5y^2 = (2x - 2y)^2 + y^2 \geq 0$. Nierówność jest prawdziwa.

18.17. $4x^2 - 4xy + 5y^2 = (2x - y)^2 + (2y)^2 \geq 0$. Nierówność jest prawdziwa.

18.18. $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2 \Leftrightarrow x^2(x - y) - y^2(x - y) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 - y^2) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2(x + y) \geq 0.$
Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla nieujemnych x, y.

18.19. $a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 2n + 2(n+1)^2 + 2(n+1) = 4n^2 + 8n + 4 = (2n+2)^2$.

18.20. Następujące nierówności są równoważne:
$x^4 + y^4 + x^2 + y^2 \geq 2(x^3 + y^3) \Leftrightarrow x^2(x^2 + 2x + 1) + y^2(y^2 + 2y + 1) \geq 0 \Leftrightarrow$
$x^2(x+1)^2 + y^2(y+1)^2 \geq 0$. Ostatnia nierówność jest prawdziwa.

18.21. $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{abc}{a} + \frac{abc}{b} + \frac{abc}{c} = bc + ac + ab$.

18.22. $4^{2017} + 4^{2018} + 4^{2019} + 4^{2020} = 4^{2017} \cdot (1 + 4 + 16 + 64) = 17 \cdot 5 \cdot 4^{2017}$.

18.23. $(1{,}5)^{100} = \left((1{,}5)^4\right)^{25} = (5{,}0625)^{25} < 6^{25}$

18.24. $4x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{x} - 4 + \frac{1}{\sqrt{x}} + 4 = \underbrace{\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}_{\geq 0} + 4 \geq 4$.

18.25. $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} \geq \frac{2}{a+b} \Leftrightarrow b(a+b) + a(a+b) \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$.
Ostatnia nierówność jest prawdziwa.

18.26. $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 4n^2 + 4n + 6 = 4n(n+1) + 6$.
Liczba $4n\ (n+1)$ jest podzielna przez 8. Stąd teza.

18.27. $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \Leftrightarrow (a+b)\left(\frac{a+b}{ab}\right) \geq 4 \Leftrightarrow (a+b)(a+b) \geq 4ab \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$. Ostatnia nierówność jest prawdziwa.

Uwaga.
Można też wykorzystać relację między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną dla dodatnich liczb x, y: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

Wtedy $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{ab}} = 4$.

19. Inne

19.1. Niech v oznacza prędkość kolarza. Wtedy:
$\frac{60}{v} = \frac{60}{v+1} + \frac{1}{10}$, $\quad 600(v+1) = 600v + v(v+1)$, $\quad v^2 + v - 600 = 0$,

$\Delta = 2401 = 49^2$, $\quad v_1 = \frac{-1+49}{2} = 24$, $\quad v_2 = \frac{-1-49}{2} = -25 < 0$.

Odp. Kolarz przejechał trasę z prędkością 24 km/h.

19.2. Niech x oznacza liczbę dni, w których turysta pokonał trasę. Wtedy:
$\frac{112}{x} = \frac{112}{x+3} + 12$, $\quad 112(x+3) = 112x + 12x(x+3)$,

$12x^2 + 36x - 336 = 0, \qquad x^2 + 3x - 28 = 0,$

$\Delta = 121 = 11^2, \qquad x_1 = \frac{-3+11}{2} = 4, \qquad x_2 = \frac{-3-11}{2} = -7 < 0.$

Odp. Turysta przechodził dziennie $\frac{112}{4} = 28$ km.

19.3. Niech v oznacza prędkość pociągu pospiesznego. Wtedy:

$\frac{210}{v} + 1 = \frac{210}{v-24}, \qquad 210(v-24) + v(v-24) = 210v, \qquad v^2 - 24v - 5040 = 0,$

$\Delta = 20736 = 144^2, \qquad v_1 = \frac{24+144}{2} = 84, \qquad v_2 = \frac{24-144}{2} = -60 < 0.$

Odp. Pociąg pospieszny przejechał trasę w ciągu $\frac{210}{84} = 2{,}5$ godziny.

19.4. Niech v oznacza prędkość kolarza. Wtedy:

$\frac{114}{v} + 2 = \frac{114}{v-9{,}5}, \qquad 114(v-9{,}5) + 2v(v-9{,}5) = 114v,$

$2v^2 - 19v - 1083 = 0,$

$\Delta = 9025 = 95^2, \qquad v_1 = \frac{19+95}{4} = 28{,}5, \qquad v_2 = \frac{19-95}{4} = -19 < 0.$

Odp. Kolarz jechał z prędkością 28,5 km/h.

19.5. Niech v oznacza prędkość pierwszego pociągu. Wtedy:

$\frac{336}{v} + \frac{2}{3} = \frac{336}{v-9}, \qquad 336(v-9) + \frac{2}{3}v(v-9) = 336v,$

$\frac{2}{3}v^2 - 6v - 3024 = 0, \qquad v^2 - 9v - 4536 = 0,$

$\Delta = 18225 = 135^2, \qquad v_1 = \frac{9+135}{2} = 72, \qquad v_2 = \frac{9-135}{2} = -63 < 0.$

Odp. Pierwszy pociąg jechał z prędkością 72 km/h, drugi pociąg z prędkością 63 km/h.

19.6. Niech n oznacza liczbę osób w grupie w pierwszym miesiącu. Wtedy:

$\frac{120}{n} - 5 = \frac{120}{n+2}, \qquad 120(n+2) - 5n(n+2) = 120n,$

$-5n^2 - 10n + 240 = 0, \qquad n^2 + 2n - 48 = 0,$

$\Delta = 196 = 14^2, \qquad n_1 = \frac{-2+14}{2} = 6, \qquad n_2 = \frac{-2-14}{2} = -8 < 0.$

Odp. W grupie było 6 osób.

19.7. Niech v oznacza prędkość wchodzenia turysty na wzgórze. Wtedy:

$\frac{2{,}1}{v} + \frac{2{,}1}{v+1} = \frac{16}{15}, \qquad 31{,}5(v+1) + 31{,}5v = 16v(v+1),$

$16v^2 - 47v - 31{,}5 = 0,$

$\Delta = 4225 = 65^2, \qquad v_1 = \frac{47+65}{32} = 3{,}5 \qquad v_2 = \frac{47-65}{32} = -\frac{9}{16} < 0.$

Odp. Turysta wchodził na wzgórze z prędkością 3,5 km/h.

19.8. Niech v oznacza prędkość pana Nowaka. Wtedy:
Prędkość pana Kowalskiego wynosi $v-11$.

$$\frac{150}{v}+\frac{11}{6}=\frac{150}{v-11},\qquad 150(v-11)+\frac{11}{6}v(v-11)=150v.$$

$$\frac{11}{6}v^2-\frac{121}{6}v-11\cdot 150=0,\qquad v^2-11v-900=0,$$

$$\Delta=3721=61^2,\qquad v_1=\frac{11+61}{2}=36,\qquad v_2=\frac{11-61}{2}=-25<0.$$

Odp. Pan Nowak jechał z prędkością 36 km/h, pan Kowalski 25 km/h.

19.9. Niech v oznacza prędkość pani Danuty. Wtedy:
Prędkość pani Lidii wynosi $v+18$.

$$\frac{450}{v}-\frac{5}{4}=\frac{450}{v+18},\qquad 450(v+18)-\frac{5}{4}v(v+18)=450v,$$

$$-\frac{5}{4}v^2-\frac{90}{4}v+8100=0,\qquad v^2+18v-6480=0,$$

$$\Delta=26244=162^2,\qquad v_1=\frac{-18+162}{2}=72,\qquad v_2=\frac{-18-162}{2}=-90<0.$$

Odp. Pani Danuta jechała z prędkością 72 km/h, pani Lidia 90 km/h.

19.10. Niech x oznacza licznik ułamka, zaś y mianownik. Wtedy:

$$\begin{cases}\dfrac{x+\frac{1}{2}x}{y+\frac{1}{2}x}=\dfrac{4}{7}\\[2ex] \dfrac{x+1}{y+1}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{21}{2}x=4y+2x\\ 2x+2=y+1\end{cases}\qquad \begin{cases}17x=8y\\ 2x+1=y\end{cases}$$

$$\begin{cases}17x=16x+8\\ y=2x+1\end{cases}\qquad \begin{cases}x=8\\ y=17\end{cases}.$$

Odp. $\frac{8}{17}$.

19.11. Niech v oznacza prędkość Borysa. Wtedy:
Prędkość Adama wynosi $v-4{,}5$.

$$\frac{15}{v}+\frac{1}{6}=\frac{15}{v-4{,}5},\qquad 15\left(v-\frac{9}{2}\right)+\frac{1}{6}v\left(v-\frac{9}{2}\right)=15v,$$

$$\frac{1}{6}v^2-\frac{3}{4}v-\frac{135}{2}=0,\qquad 2v^2-9v-810=0,$$

$$\Delta=6561=81^2,\qquad v_1=\frac{9+81}{4}=22{,}5,\qquad v_2=\frac{9-81}{4}=-18<0.$$

Borys biegł z prędkością 22,5 km/h, Adam z prędkością 18 km/h.

Odp. Adam przebiegł trasę w czasie $\frac{15}{18}=\frac{5}{6}h=50$ min.

19.12. Niech n oznacza liczbę osób uczestniczących w biwaku. Wtedy:

$$\frac{960}{n} + 16 = \frac{960}{n-2}, \qquad 960(n-2) + 16n(n-2) = 960n,$$

$$16n^2 - 32n - 1920 = 0, \qquad n^2 - 2n - 120 = 0,$$

$$\Delta = 484 = 22^2, \qquad n_1 = \frac{2+22}{2} = 12, \qquad n_2 = \frac{2-22}{2} = -10 < 0.$$

Odp. Na biwak wyjechało 12 osób.

19.13. Niech x oznacza licznik ułamka, zaś y mianownik. Wtedy:

$$\begin{cases} \dfrac{x+32}{y} = 2 \\ \dfrac{x-6}{y-6} = \dfrac{8}{17} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 32 = 2y \\ 17x - 102 = 8y - 48 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4x - 128 = -4y \\ 17x - 54 = 8y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 32 = 2y \\ 13x = 182 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 14 \\ y = 23 \end{cases}.$$

Odp. $\frac{14}{23}$.

19.14. Niech t oznacza czas przelotu nad Austrią we wtorek.

Wtedy czas przelotu w czwartek wynosi $t + \frac{1}{5}$.

Prędkość we wtorek wynosi $\frac{s}{t}$, gdzie s oznacza długość trasy nad Austrią.

Prędkość w czwartek wynosi $\dfrac{s}{t + \frac{1}{5}}$.

Niech v będzie zakładaną prędkość przelotową. Wtedy

$$\begin{cases} \dfrac{s}{t} = 1{,}1v \\ \dfrac{s}{t + \frac{1}{5}} = 0{,}9v \end{cases}.$$

Dzieląc stronami otrzymujemy:

$$\frac{t + \frac{1}{5}}{t} = \frac{11}{9}, \qquad 9t + \frac{9}{5} = 11t, \qquad \frac{9}{5} = 2t.$$

Odp. Samolot nad Austrią leciał $\frac{9}{10}h = 54$ min.