LICEUM TECHNIKUM

MATEMATYKA

Henryk Pawłowski

1

ZAKRESY PODSTAWOWY I ROZSZERZONY

Zbiór zadań

Linia 1 ponadstandardowa

OPERON

SERIA SZKOŁA XXI

Henryk Pawłowski

MATEMATYKA 1

ZAKRESY PODSTAWOWY I ROZSZERZONY

Zbiór zadań

dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum

Linia 1
ponadstandardowa

OPERON

Gdynia 2007

Projekt okładki: *Krzysztof Godlewski*
Redaktor prowadzący: *Sebastian Przybyszewski*
Redaktor wspomagający: *Anna Wierzchowska*
Redakcja: *Małgorzata Makowska, Elżbieta Pałasz*
Redakcja graficzna i skład: *Kamila Kwiek, Jacek Papis*
Korekta techniczna: *Anna Wierzchowska*

Konsultacja merytoryczna: *B. Szumny*, *R. Wojciuk*

9-7/II

Wydawca:
Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON Sp. z o.o.
81-212 Gdynia, ul. Hutnicza 3
tel. centrali 058 679 00 00
e-mail: info@operon.pl
http://www.operon.pl

ISBN 978-83-7461-604-1

Spis treści

Od Wydawcy 5

I. Elementy logiki matematycznej 7
1. Zdania. Formy zdaniowe 9
2. Koniunkcja i alternatywa 11
3. Implikacja i równoważność 13
4. Negacja 17
5. Prawa rachunku zdań 17
6. Kwantyfikatory. Zdania logiczne 19

II. Rachunek zbiorów 21
1. Zbiory i działania na nich 23
2. Prawa rachunku zbiorów 28

III. Rachunek algebraiczny 31
1. Ćwiczenia w działaniach na ułamkach 33
2. Obliczenia procentowe 36
3. Potęgowanie liczb. Ćwiczenia w działaniach na potęgach 41
4. Pierwiastkowanie liczb. Ćwiczenia w działaniach na pierwiastkach 46
5. Przekształcanie wyrażeń algebraicznych 51
6. Zasada indukcji matematycznej. Dowodzenie przez indukcję matematyczną 55
7. Trójkąt Pascala i wzór dwumianowy Newtona 57

IV. Zbiór liczb rzeczywistych 59
1. Liczby naturalne i całkowite 61
2. O podzielności liczb 62
3. Rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych 68
4. Liczby wymierne 70
5. Liczby niewymierne 72
6. Uporządkowanie zbioru liczb rzeczywistych 78
7. Dowodzenie nierówności 79
8. Oś liczbowa i przedziały liczbowe 81
9. Wartość bezwzględna liczby 83
10. Równania i nierówności z wartością bezwzględną 84

V. Funkcje liczbowe 87
1. Pojęcie funkcji, funkcja liczbowe i jej wykres 89
2. Dziedzina funkcji, zbiór wartości funkcji 91
3. Wartość funkcji w punkcie 93
4. Najmniejsza i największa wartość funkcji 96
5. Ogólne własności funkcji liczbowych 97
6. Składanie funkcji 101
7. Funkcje odwrotne 102
8. Przekształcenia wykresu funkcji. Sporządzanie wykresów funkcji 102

VI. Funkcje trygonometryczne 105
1. Pojęcie miary kąta i jego uogólnienie 107
2. Miara łukowa kąta 107
3. Funkcje trygonometryczne dowolnego argumentu 108
4. Własności funkcji trygonometrycznych dowolnego argumentu 110

5. Przekształcanie wyrażeń trygonometrycznych 111
6. Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego argumentu 113
7. Dowodzenie tożsamości trygonometrycznych 115
8. Wykresy funkcji trygonometrycznych 116
9. Równanie i nierówności trygonometryczne 118
VII. Funkcje liniowe 121
1.Własności funkcji liniowej i jej wykres 123
2. Równanie i nierówność liniowa z jedną niewiadomą 129
3. Zadania prowadzące do równań i nierówności liniowych 130
4. Równania i nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi 131
5. Układy dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi 131
VIII. Elementy geometrii płaszczyzny 137
1. Odległość dwóch punktów 137
2. Okrąg i koło 140
3. Odległości punktu od prostej 141
4. Wzajemne położenie okręgu i prostej 142
5. Wzajemne położenie dwóch okręgów 144
6. Kąty w kole 147
7. Trójkąt i jego punkty szczególne 148
8. Twierdzenie Talesa i doń odwrotne 151
9. Czworokąt wpisany w okrąg 152
10. Czworokąt opisany na okręgu 153
11. Rodzaje czworokątów 154

Odpowiedzi 157

Literatura pomocnicza 176

Od Wydawcy

Zbiór zadań z matematyki do klasy I przeznaczony jest dla uczniów zakresu podstawowego i rozszerzonego liceum ogólnokształcącego, a także dla uczniów liceum profilowanego i technikum. To pierwszy z trzech tomów zbiorów, które stanowią uzupełnienie podręczników do matematyki opublikowanych przez Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON. Uniwersalny charakter zbioru pozwala jednak korzystać z niego niezależnie od programu nauczania wybranego przez nauczyciela.

Książka jest częścią pakietu edukacyjnego, w którego skład wchodzą: program nauczania, podręcznik, przewodnik metodyczny dla nauczyciela, scenariusze lekcji, testy sprawdzające, zestawy testów przygotowujących do matury, stereogramy oraz filmy edukacyjne. Wszystkie elementy tego zestawu są ze sobą ściśle zintegrowane i pozwalają na pełne wykorzystanie nowoczesnych metod dydaktycznych w nauczaniu matematyki w liceum ogólnokształcącym, profilowanym i technikum.

Zawarte w zbiorze zadania obejmują zagadnienia podzielone na osiem rozdziałów: „Elementy logiki matematycznej", „Rachunek zbiorów", „Rachunek algebraiczny", „Zbiór liczb rzeczywistych", „Funkcje", „Funkcje trygonometryczne", „Funkcje liniowe", „Elementy geometrii płaszczyzny". Systematyczna praca ze zbiorem pomoże uczniom opanować i przećwiczyć umiejętności związane z treścią wymienionych rozdziałów, a także nauczy wykorzystywać zdobytą wiedzę w praktyce dzięki temu, że zadania wielokrotnie nawiązują do sytuacji z życia codziennego. Do korzystania ze zbioru zachęcają uczniów liczne ciekawostki i informacje z wielu dziedzin nauki, które wpleciono w treść zadań. Znakomitym udogodnieniem są najważniejsze twierdzenia, wzory i reguły, zebrane na początku każdego rozdziału. Ważną pomocą powinny się też okazać odpowiedzi do wybranych zadań.

Zadania w zbiorze mają różny stopień trudności. Zadania oznaczone ☆ są średnio trudne, a oznaczone ★ są trudne bądź zawierają materiał z zakresu rozszerzonego. Może je jednak rozwiązać uczeń kształcący się w zakresie podstawowym – po uzupełnieniu niektórych wiadomości.

Będziemy wdzięczni za nadsyłanie pod adresem Wydawnictwa uwag na temat zbioru, jak również propozycji zadań, które moglibyśmy zamieścić w kolejnych wydaniach.

Życzymy sukcesów w „łamaniu głowy" i świetnych ocen z matematyki.

I. Elementy logiki matematycznej

Zdaniem logicznym nazywamy każde zdanie orzekające, któremu można przypisać jedną z dwóch ocen: **prawdę** (wartość logiczna 1) albo **fałsz** (wartość logiczna 0). Zdania w sensie logiki oznaczone są najczęściej małymi literami alfabetu łacińskiego, na przykład: p, q, r.

Funktory zdaniotwórcze (spójniki logiczne)

$(\sim)$ – nieprawda, że;

$(\wedge)$ – i;

$(\vee)$ – lub;

$(\Rightarrow)$ – jeżeli, to;

$(\Leftrightarrow)$ – wtedy i tylko wtedy.

Za pomocą funktorów zdaniotwórczych tworzone są nowe zdania:

$\sim p$ – negacja zdania p;

$p \wedge q$ – koniunkcja zdań p i q;

$p \vee q$ – alternatywa zdań p i q;

$p \Rightarrow q$ – implikacja zdań p i q;

$p \Leftrightarrow q$ – równoważność zdań.

Wyróżniamy dwa rodzaje kwantyfikatorów:

$\bigwedge\limits_{x}$ ogólny, czytamy: „dla każdego x ...”.

$\bigvee\limits_{x}$ szczegółowy, czytamy: „istnieje takie x, że ...”.

Tabela wartości logicznych

Koniunkcja

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Alternatywa

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Negacja

p	$\sim p$
1	0
0	1

Implikacja

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

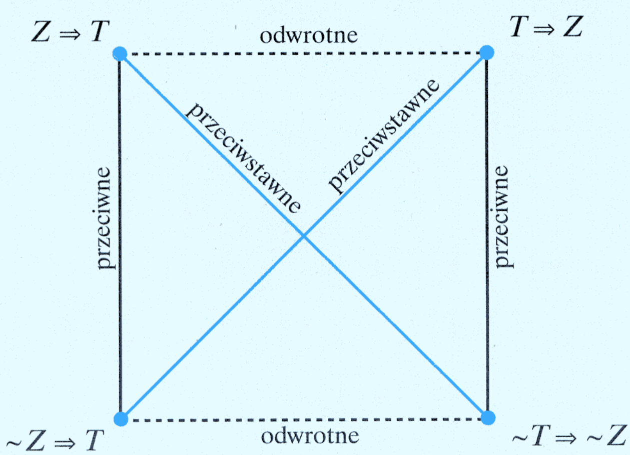
Równoważność

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Prawa rachunku zdań

Nazwa prawa	Treść prawa
podwójne przeczenie	$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
łączność koniunkcji	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
łączność alternatywy	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
zaprzeczenie implikacji	$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$
zaprzeczenie koniunkcji I prawo de Morgana	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$
zaprzeczenie alternatywy II prawo de Morgana	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$
rozdzielność koniunkcji względem alternatywy	$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
rozdzielność alternatywy względem koniunkcji	$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee (p \wedge r)]$
przechodniość implikacji	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Kwadrat logiczny



Zadania

I. Elementy logiki matematycznej

1. Zdania. Formy zdaniowe

1.1. Wskaż, które z podanych zdań są zdaniami logicznymi:
a) Wieloryb jest rybą.
b) Bolek lubi lody.
c) Jasiu, zamknij okno!
d) Liczba 201 jest pierwsza.
e) Rzeka wpada do morza.
f) Bolesław Chrobry był pierwszym królem Polski.
g) Każdy odcinek ma tylko jeden środek.

1.2. Wskaż, które z podanych wyrażeń są zdaniami logicznymi:
a) Czy lubisz lody truskawkowe?
b) 8 jest liczbą złożoną.
c) $4^3 = 65$.
d) x jest liczbą pierwszą.
e) Sześcian dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą dodatnią.
f) Grzyby rosną po deszczu.
g) $x^4 > 0$.
h) Nie istnieje liczba naturalna mniejsza od 0.

1.3. Oceń, czy podane wyrażenia są zdaniami logicznymi:
a) Istnieje liczba naturalna mniejsza od 0.
b) Czy $\sqrt[3]{27}$ równa się 3?
c) Suma kwadratów dwóch liczb naturalnych równa jest kwadratowi sumy tych liczb.
d) Wynieś śmieci!
e) Dzisiaj pójdę do kina.
f) *Hajże na Soplicę!*

1.4. Oceń wartość logiczną zdań:
a) Wisła jest najdłuższą rzeką w Polsce.
b) Śnieżka jest najwyższym szczytem Beskidów.
c) Kalisz jest najstarszym miastem Polski.
d) Mikołaj Kopernik urodził się w Toruniu.
e) Noteć jest dopływem Odry.
f) 121 jest kwadratem liczby naturalnej.
g) Kwadrat jest rombem.
h) Platon był filozofem.

1.5. Oceń, które z podanych zdań są prawdziwe:

a) Liczba $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ jest mniejsza od 6.

b) Kwadrat liczby ujemnej jest liczbą ujemną.

c) Suma kątów przeciwległych czworokąta wpisanego w okrąg może wynosić 181°.

d) Brazylia zdobyła tytuł mistrza świata w piłce nożnej w 2002 roku.

e) Michał Wiśniewski jest liderem zespołu „Elektryczne Gitary".

f) Arnold Schwarzenegger zagrał główną rolę w filmie *Kubuś Puchatek i przyjaciele.*

1.6. Oceń wartość logiczną zdań:

a) 17 jest liczbą złożoną.

b) 81 jest sześcianem liczby naturalnej.

c) $\sqrt{9}$ jest liczbą wymierną.

d) Mars jest czwartą planetą od Słońca.

e) Pierwsze nowożytne igrzyska olimpijskie odbyły się w 1896 roku.

f) Ferdynand Magellan odkrył Amerykę.

1.7. Wskaż, które z podanych wyrażeń są zdaniami logicznymi:

a) 27 jest sześcianem liczby naturalnej.

b) n jest liczbą pierwszą.

c) $2\cdot\left(3^2-\sqrt{81}\right)=0$.

d) $x^2>x$.

e) Trójkąt równoboczny jest ostrokątny.

f) Na czworokącie można opisać okrąg.

g) W każdy romb można wpisać okrąg.

h) Liczba 531 jest podzielna przez 9.

1.8. Oceń wartość logiczną zdań:

a) W każdy trójkąt można wpisać koło.

b) W każdy czworokąt można wpisać koło.

c) Liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ jest mniejsza od 5.

d) Liczba $2^{2^{2^{2}}}+1$ jest podzielna przez 10.

e) W każdym trójkącie długość promienia koła wpisanego jest mniejsza od długości promienia koła opisanego.

f) Istnieje liczba całkowita niepodzielna przez żadną liczbę naturalną większą od 1 i mniejszą od 1000.

g) W roku szkolnym 2002/2003 odbyła się w Polsce LIV Olimpiada Matematyczna.

1.9. Oceń wartość logiczną zdań:

a) Każdy prostokąt jest równoległobokiem.

b) Istnieje prostokąt, który nie jest kwadratem.

c) Każda liczba pierwsza jest nieparzysta.

d) W każdy trójkąt można wpisać okrąg.

e) Każdy kot ma wąsy.

f) Istnieje pies, który ma krótki ogon.
g) Każdy uczeń jest pracowity.

1.10. Oceń wartość logiczną zdań:
a) $13 > 18$.
b) $\sqrt{3} \in \boldsymbol{R}$.
c) $100 \mid 1000$.
d) 14 jest liczbą ujemną.
e) $3^4 = 81$.
f) $\sqrt[3]{-8} = 2$.

1.11. Znajdź takie liczby rzeczywiste, aby podane zdania były prawdziwe:
a) $a + 7 = 15$.
b) $3 \cdot b = 8$.
c) $18 \mid c$.
d) $\sqrt{d} \in \boldsymbol{W}$.
e) $\sqrt[3]{e} = -4$.
f) $4^f = 256$.

2. Koniunkcja i alternatywa

2.1. Podane zdania napisz w formie koniunkcji:
a) Bolek i Lolek wyruszyli w świat.
b) Liczby 3 i 5 są dzielnikami liczby 15.
c) W Toruniu jest wiele zabytków i siedziba Uniwersytetu Mikołaja Kopernika.
d) Trójkąt jest wielokątem mającym trzy boki i trzy wierzchołki.

2.2. Podane zdania napisz w formie alternatywy:
a) Wakacje spędzę nad morzem lub na Mazurach.
b) Bartek będzie studiował matematykę lub informatykę.
c) Kolejna Zimowa Olimpiada odbędzie się w Krakowie lub w Zakopanem.
d) Piotr obejrzy dzisiaj mecz lub pogra na komputerze.
e) W lesie słyszałem śpiew wilgi lub słowika.

2.3. Określ wartość logiczną zdań:
a) Wieloryb jest ssakiem i Polska leży nad Bałtykiem.
b) Toruń słynie z wyrobu pierników i w Toruniu jest Wawel.
c) Kair jest stolicą Grecji i Grecja leży na południu Europy.
d) Każda liczba całkowita jest parzysta i 2001 jest liczbą pierwszą.
e) Sześciokąt ma sześć przekątnych i sześcian ma sześć krawędzi.
f) W każdy równoległobok można wpisać okrąg i istnieje trapez, który można wpisać w okrąg.
g) $3 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ i $3^2 = 6$.

2.4. Określ wartość logiczną zdań:
a) Stolicą Australii jest Sydney lub Canberra.
b) Krzywa wieża jest w Toruniu lub krzywa wieża jest w Pizie.
c) Równanie $2x - 1 = 1$ ma rozwiązanie lub nierówność $x^2 \geqslant 0$ spełnia każda liczba rzeczywista.
d) Kwadrat ma dwie osie symetrii lub dwa środki symetrii.
e) $2^0 = 0$ lub $2 \cdot 0 = 0$.

f) Suma kątów w trójkącie jest równa π lub trójkąt ma dwa kąty proste.
g) Długość okręgu jest mniejsza od długości średnicy lub długość okręgu jest większa od długości promienia.
h) W trójkącie równobocznym wszystkie kąty są równe lub suma kątów w trójkącie jest równa 2π.

2.5. Oceń, czy podane zdania są alternatywą, czy koniunkcją dwóch zdań:
a) Lubię chodzić nad jezioro i na grzyby.
b) Będę czytać książkę lub obejrzę film.
c) Mój brat chodzi do szkoły i moja siostra chodzi do szkoły.
d) Interesuję się numizmatyką i informatyką.
e) Lubię lekcje chemii i fizyki.
f) Paweł lub Tomek będą dziś odpowiadać przy tablicy.
g) Ola mówi zwięźle i zrozumiale.
h) Kupię sobie telewizor lub radio.

2.6. Oceń wartość logiczną zdań:
a) $3+3=6$ i $3+7=9$.
b) $8+9=17$ lub $4+15=19$.
c) $18+3=210$ i $17+6=24$.
d) $8+4=14$ lub $7+9=16$.
e) $8+15>20$ lub $3>7$.

2.7. Oceń wartość logiczną zdań:
a) $13>7$ lub $6>2$.
b) $8 \mid 40$ i $5 \mid 40$.
c) 17 jest liczbą pierwszą lub $8 \mid 16$.
d) $8{,}5 \in \boldsymbol{C}$ i $4 \in \boldsymbol{C}$.
e) $7+4=11$ i $5+3=9$.
f) $8-2=6$ lub $4+3=7$.
g) $4>5\cdot 7$ i $3\cdot 4<7$.
h) $\frac{7}{3}<2\frac{2}{3}$ lub $15>13$.
i) $\pi>\sqrt{2}$ lub $\pi<\sqrt{2}$.
j) $\pi<3{,}14$ i $\sqrt{2}>1{,}4$.

2.8. Znajdź zaprzeczenia podanych zdań i oceń ich wartość logiczną:
a) 13 jest podzielne przez 7.
b) $8>5$.
c) $2\leqslant -7$.
d) $18>3 \quad \vee \quad 3<7$.
e) $(-8)^2=64 \quad \wedge \quad \sqrt{(-15)^2}=15$.
f) 17 jest liczbą parzystą lub 17 jest podzielne przez 7.
g) 3 jest liczbą nieparzystą i 5 nie jest podzielne przez 3.
h) Koń nie jest ssakiem i okoń nie jest rybą.

2.9. Oceń, czy podane zdania są prawdziwe:
a) Liczba 2170 jest parzysta i podzielna przez 7.
b) Liczba $x = 5$ spełnia warunek $\frac{x+1}{x} > 1$ lub $\frac{x-1}{x} > 1$.
c) $(5{,}1)^2 - 20 = 1{,}5$ lub $3^2 - 2^3 = 1$.
d) $\sqrt{2} > \sqrt{3} - 1$ lub $\sqrt{3} < \sqrt{5} - \sqrt{2}$.
e) Liczba $\frac{\sqrt{2} - 1{,}5}{3}$ jest dodatnia lub mniejsza od -3.
f) Liczby 3 i 18 są różne.
g) Liczby 2 i 15 są obie parzyste.
h) Liczba 5 jest parzysta lub liczba 7 jest nieparzysta.

2.10. Znajdź taką wartość zmiennej x, przy której podane formy zdaniowe są zdaniami prawdziwymi:
a) $x > 2$ i $x < 15$.
b) $x^2 < 2$ i $(x-1)^2 > -2$.
c) $x < 11$ lub $x > 51$.
d) Liczba x jest nieparzysta i przy dzieleniu przez 5 daje reszty 2.
e) Liczba całkowita y jest podzielna przez 5 lub przy dzieleniu przez 7 daje reszty 1.
f) $x < 2$ i $x^2 > x$.
g) $x < 3$ lub $x < 4$.
h) $x^2 \leqslant 2x - 1$ i $x > 2$.
i) x jest ujemna i $x < 3$.
j) x jest liczbą dodatnią lub $x < 2$.
k) x jest liczbą naturalną i $x < 11$.
l) $x = 3$ lub $x = 6$.
m) $x = 4$ i $x = -4$.

3. Implikacja i równoważność

3.1. Podane zdania napisz w formie implikacji:
a) Każdy wielokąt foremny można wpisać w okrąg i na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg.
b) W trójkącie równobocznym wysokość, dwusieczna i środkowa poprowadzone z jednego wierzchołka są równej długości.
c) Każda liczba naturalna jest jednocześnie wymierna i całkowita.
d) Każda liczba złożona ma co najmniej trzy dzielniki naturalne.
e) Każda liczba podzielna przez 16 jest podzielna przez 8.
f) Pierwiastek kwadratowy z liczby mniejszej od 121 jest mniejszy od 11.
g) Jeżeli liczby 6, 8, 10 są długościami boków trójkąta, to trójkąt jest równoramienny.

3.2. Podane twierdzenia przedstaw w formie implikacji. Wskaż założenie i tezę oraz sformułuj implikację odwrotną.
a) Sześcian liczby większej od 3 jest liczbą większą od 27.
b) Każda liczba pierwsza jest albo równa 2, albo nieparzysta.

c) Każda liczba podzielna przez 9 jest podzielna również przez 3.
d) Suma kątów wewnętrznych pięciokąta wynosi $540°$.
e) Wielokąt, który ma 20 przekątnych, jest ośmiokątem.
f) Odległości punktu, będącego środkiem odcinka, od końców tego odcinka są równe.
g) Pole powierzchni trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b wyraża się wzorem $\frac{1}{2} a \cdot b$.
h) Suma przeciwległych kątów czworokąta wpisanego w okrąg wynosi $180°$.
i) Przekątna sześcianu o krawędzi a wynosi $a\sqrt{3}$.
j) Dla liczby a niepodzielnej przez 3 liczba $a^2 - 1$ jest podzielna przez 3.
k) Kwadrat liczby podzielnej przez 4 jest podzielny przez 16.
l) Każda liczba, którą można otrzymać, przestawiając cyfry liczby 123456789, jest podzielna przez 9.

3.3. Podane zdania napisz w formie równoważności:
a) Czworokąt, który ma wszystkie boki i kąty równe, jest kwadratem.
b) Równania kierunkowe prostych równoległych na płaszczyźnie mają równe współczynniki kierunkowe.
c) Iloczyn dwóch liczb przeciwnych znaków jest ujemny.
d) Każda liczba podzielna przez 10 w zapisie dziesiętnym ma cyfrę 0 na ostatnim miejscu.
e) Każda liczba, której zapis dziesiętny zakończony jest cyfrą 5 lub 0, jest podzielna przez 5.
f) Trójkąt, którego kąty przy podstawie są równe, jest równoramienny.

3.4. Oceń wartość logiczną zdań:
a) Jeżeli $15 \mid 60$, to $4 \mid 40$.
b) $5 > 4 \Rightarrow 3 = 4$.
c) $8 \mid 64 \Rightarrow 7 \mid 36$.
d) $(8 > 3 \quad \text{i} \quad 4 > 2) \Rightarrow 10 > 8$.
e) $(7 > 5 \quad \text{lub} \quad 4 > 6) \Rightarrow (7 > 4 \quad \text{lub} \quad 15 < 13)$.
f) $(4 > 7) \Rightarrow (6 < 8 \quad \text{i} \quad 4 > 12)$.

3.5. Oceń wartość logiczną zdań:
a) $7 \cdot 3 = 21 \Rightarrow 4 \cdot 8 = 33$.
b) $11^2 = 121 \Rightarrow 5^2 = 26$.
c) $|\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{5} > 1$.
d) $\pi - 3{,}14 = 0{,}001 \Rightarrow 2\pi > 5$.
e) $(\sqrt{3} \in W \quad \text{i} \quad 0{,}5 < \sqrt{3}) \Rightarrow 3^3 = 27$.
f) $(3 + 4)^2 = 49 \Rightarrow (4 + 1)^2 < 26$.
g) $\frac{3}{4\sqrt{2} - 2} = \frac{3(2\sqrt{2} + 1)}{14} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

3.6. Oceń prawdziwość implikacji:
a) Jeśli Kraków leży nad Odrą, to Wisła wpada do Morza Śródziemnego.
b) $3 + 7 = 10 \Rightarrow 1 - 8 = -7$.

c) Jeśli $\sqrt{3} > 2$, to Warszawa leży nad Bugiem.
d) Jeśli $30^2 = 900$, to $\sqrt{7} > \sqrt{7,1}$.
e) $3 \mid 251 \Rightarrow 12 \nmid 251$.
f) Jeśli trójkąt o bokach 5, 12, 13 jest prostokątny, to kwadrat najdłuższego boku jest równy sumie kwadratów boków pozostałych.
g) Jeśli liczba $a = \frac{\sqrt{405} - \sqrt{5}}{4\sqrt{5}}$ jest wymierna, to liczba $a^2 + 1$ jest wymierna.
h) Jeśli liczba $\left(2 + \sqrt{5}\right)^2$ jest wymierna, to liczba $3\sqrt{5}$ jest wymierna.

3.7. Znajdź przykład takiej wartości x, dla której podane wyrażenie jest zdaniem prawdziwym:

a) $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{x^3}$.
b) $x^2 > 9 \Rightarrow x < -3$ lub $x > 3$.
c) $x^3 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x} = -2$.
d) $x > 6 \Rightarrow x > 7$.
e) $x > 5 \Rightarrow |x| > 5$.
f) $|x| > 4 \Rightarrow x > -4$.
g) $x + 2 > 7 \Rightarrow 2x > 4$.
h) $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$.
i) $x + 5 < 54 \Rightarrow 3x + 7 < 5$.

3.8. Oceń wartość logiczną implikacji:
a) Jeżeli 3 jest liczbą pierwszą, to 7 jest dzielnikiem 21.
b) Jeżeli trójkąt jest równoboczny, to ma dwa boki równe.
c) Jeżeli Poznań leży nad Odrą, to jest stolicą Wielkopolski.
d) Jeżeli $2 + 2 = 5$, to $-1 > 0$.
e) Jeżeli $3^{10} + 4^{10} = 5^{10}$, to 6 jest liczbą złożoną.
f) Jeżeli w równoległoboku jeden z kątów jest prosty, to równoległobok ten jest kwadratem.
g) Jeżeli suma kątów w trójkącie jest równa 3π, to w pięciokącie suma kątów jest równa π.
h) $\left(\frac{3}{10}\right)^{-2} = 11\frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad (0,3)^{-1} = \frac{10}{3}$.

3.9. Oceń, czy podane zdania są prawdziwe:
a) Jeżeli liczba jest podzielna przez 3, to jest też podzielna przez 9.
b) Jeśli liczba naturalna jest podzielna przez 7, to jej dwie ostatnie cyfry są podzielne przez 7.
c) Jeśli liczba naturalna jest większa od 1, to jej odwrotność jest również większa od 1.
d) Jeśli $x < 0$, to $\sqrt{x^2} = x$.
e) Jeśli $2(x + 4) > 0$, to $x > 4$.
f) Jeśli $-x < 0$, to $|x| = -x$.
g) Jeśli trójkąt jest ostrokątny, to ma nie więcej niż dwa kąty ostre.
h) Jeśli czworokąt jest wpisany w okrąg, to sumy jego przeciwległych boków są równe.

i) Jeśli trójkąt jest równoramienny, to wszystkie jego kąty są mniejsze od $60°$.
j) Jeśli romb ma środek symetrii, to jest kwadratem.
k) Jeśli czworokąt ma cztery boki równe, to jest kwadratem.
l) Jeśli sześcian jest wpisany w okrąg, to jest on foremny.

3.10. Oceń wartość logiczną zdań:
a) Kilimandżaro jest najwyższą górą w Afryce wtedy i tylko wtedy, gdy struś jest największym ptakiem.
b) Koliber jest najmniejszym ptakiem wtedy i tylko wtedy, gdy w Toruniu jest Pałac Kultury i Nauki.
c) Słońce obraca się wokół Ziemi wtedy i tylko wtedy, gdy doba ma 13 miesięcy.
d) Przekątne prostokąta są równe wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ma trzy wierzchołki.
e) Suma miar kątów pięciokąta foremnego wynosi $540°$ wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt równoboczny ma dwa kąty proste.

3.11. Oceń wartość logiczną zdań:
a) $14 > 3 \iff -3 > -5$.
b) $7{,}5 > 7{,}4 \iff \sqrt{3} \in \boldsymbol{W}$.
c) $\sqrt{15} < \sqrt{13} \iff 2^0 = 1$.
d) $2 = -4 \iff 3^2 = -3^2$.
e) $\frac{3}{4} \cdot 24 = 18 \iff 3 \cdot 7 = 14$.
f) $\dfrac{5}{3-\sqrt{5}} = \dfrac{5(3+\sqrt{5})}{4} \iff \dfrac{8}{7-\sqrt{5}} = \dfrac{7+\sqrt{5}}{2}$.
g) $(8 > 6 \quad \text{lub} \quad 5 > 4) \iff (5 > -5 \quad \text{i} \quad 7 > 15)$.

3.12. Oceń wartość logiczną podanych zdań:
a) Liczba 123456789 jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr liczby 123456789 jest podzielna przez 9.
b) Trójkąt o bokach 6, 8, 10 jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $6^2 + 8^2 = 10^2$.
c) Trójkąt o bokach 8, 9, 10 ma dwa kąty proste wtedy i tylko wtedy, gdy liczba 3 jest wymierna.
d) Liczba –15 jest ujemna wtedy i tylko wtedy, gdy liczba 18 jest ujemna.
e) Konin jest stolicą Polski wtedy i tylko wtedy, gdy $3^2 - 2^3 = 1$.

3.13. Podaj przykłady takich wartości zmiennych, przy których podane formy zdaniowe są zdaniami prawdziwymi.
a) $x^2 > 5 \iff \frac{1}{x} < 0{,}01$.
b) Liczba naturalna m jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba naturalna m jest podzielna przez 8.
c) trójkąt o bokach x, y, z jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy pole trójkąta o bokach x, y, z jest równe $\frac{1}{2}xy$.

4. Negacja

4.1. Utwórz zaprzeczenia zdań:
a) $2^3 > 3^2$.
b) $\sqrt{4+9} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}$.
c) $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną.
d) Przekątne każdego równoległoboku są różnej długości.
e) Koło jest figurą wklęsłą.
f) Kąt rozwarty ma miarę nie większą niż 90°.

4.2. Utwórz zaprzeczenia zdań:
a) Dzisiaj oglądałem mecz i czytałem książkę.
b) Gepard nie jest najszybszym ssakiem lub lew nie jest królem zwierząt.
c) Zbiór liczb naturalnych jest skończony i kwadrat nie jest figurą płaską.
d) Romb można wpisać w okrąg lub romb można opisać na okręgu.
e) $-4 > 0$ lub 7 jest liczbą parzystą.
f) Liczby 2 i $\frac{1}{2}$ są liczbami odwrotnymi lub liczby 1 i -1 są liczbami przeciwnymi.

4.3. Znajdź zaprzeczenia zdań:
a) Deszcz nie jest mokry lub węgiel nie jest czarny.
b) $15{,}2 < 15{,}3 \quad \vee \quad -4 \in N$.
c) $\sqrt{5} \in \boldsymbol{W} \Rightarrow 2 \in \boldsymbol{C}$.
d) $\sqrt{121} = -11 \Rightarrow 7 \mid 15$.
e) $5 \cdot 6 = 30 \Rightarrow (5 \mid 35 \quad \wedge \quad 8 \mid 25)$.
f) Jeżeli Piotr zje jajko, to nie zje pomidora.
g) Jeżeli nie kupię pomarańczy, to kupię mandarynki.

4.4. Napisz zaprzeczenia podanych form zdaniowych:
a) $6x \leqslant 15$.
b) $3x \geqslant -7$.
c) $2x - 4 < 3x + 2$.
d) $8y - 2 > 15$.
e) $8a + 2 = 14$.
f) $15b - 2 = 3b$.
g) $8c \neq 5 + c$.
h) $12d \neq 18 - 3d$.
i) $15 \mid 30a$.
j) $17 \nmid 24m$.

5. Prawa rachunku zdań

☆ **5.1.** Litery p, q, r, s, t oznaczają następujące zdania:
p: Delfin jest rybą.
q: Słowik jest ptakiem.
r: Kumak jest płazem.
s: Grzechotnik jest gadem.
Oceń wartość logiczną każdego z powyższych zdań oraz zdań:
a) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \vee r)$.
b) $[(p \wedge q) \vee p] \Leftrightarrow p$.
c) $(r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (q \Rightarrow s)$.
d) $r \Rightarrow (r \vee q)$.

e) $(q \Longleftrightarrow p) \Rightarrow (s \Longleftrightarrow r)$.
f) $((p \wedge q) \vee r) \Longleftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$.

☆ **5.2.** Litery p, q, r, s, oznaczają następujące zdania:
p: Paryż leży nad Sekwaną.
q: Rzym leży nad Tybrem.
r: Wiedeń leży nad Nilem.
s: Madryt leży nad Amazonką.
Oceń wartość logiczną każdego z powyższych zdań oraz zdań:
a) $(\sim p) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.
b) $\sim (p \Longleftrightarrow q)$.
c) $r \Rightarrow (s \wedge r)$.
d) $((p \Rightarrow s) \Rightarrow p) \Rightarrow p$.
e) $[((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge (p \wedge q)] \Rightarrow r$.
f) $[\sim ((\sim p) \vee (\sim q))] \Longleftrightarrow (p \wedge q)$.

☆ **5.3.** Litery: p, q, r, s, t oznaczają następujące zdania:
p: Polska przyjęła chrzest w 966 roku.
q: W 1000 roku odbył się zjazd w Gnieźnie.
r: Pierwszego rozbioru Polski dokonano w 1775 roku.
s: Powstanie listopadowe wybuchło w 1863 roku.
t: Karol Wojtyła został wybrany na papieża w 1978 roku.
Oceń wartość logiczną każdego z powyższych zdań oraz zdań:
a) $(p \wedge r)(q \vee t)$.
b) $(q \wedge t) \vee p$.
c) $((\sim q) \vee p) \vee ((\sim q) \vee p)$.
d) $\sim (t \wedge (\sim q)) \vee (p \wedge \sim (p \vee t))$.
e) $((\sim r) \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (r \vee (\sim t))$.
f) $(s \wedge (q \Rightarrow (\sim t))) \Rightarrow (p \wedge t)$.

☆ **5.4.** Litery a, b, c, d oznaczają następujące zdania:
a: Adam Małysz w 2003 roku zdobył po raz trzeci Puchar Świata w skokach narciarskich.
b: Robert Korzeniowski jest najlepszym polskim chodziarzem.
c: Dariusz Michalczewski uprawia zawodowo tenis stołowy.
d: Otylia Jędrzejczak zawodowo zajmuje się koszykówką.
Oceń wartość logiczną każdego z powyższych zdań oraz zdań:
a) $a \wedge (\sim d)$.
b) $(b \vee (\sim c)) \wedge (\sim a)$.
c) $(c \vee b) \Rightarrow (a \wedge (\sim a))$.
d) $(a \Rightarrow (a \wedge (\sim b))) \Longleftrightarrow c$.
e) $(d \Rightarrow (\sim c)) \Longleftrightarrow (a \wedge b)$.
f) $(b \wedge (a \Rightarrow (\sim c))) \vee (\sim d)$.

☆ **5.5.** Niech p, q oznaczają zdania:
p: Henryk Sienkiewicz napisał *Potop*.
q: Jan Kochanowski jest autorem trenów.
Napisz takie zdanie r, aby prawdziwe było zdanie:
a) $((\sim p) \vee q) \Rightarrow r$.
b) $((\sim p) \vee (\sim r)) \Longleftrightarrow (q \vee p)$.
c) $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.
d) $q \wedge (p \vee (\sim r))$.
e) $(p \vee (q \Rightarrow (\sim r))) \Rightarrow (p \wedge r)$.
f) $(\sim (p \wedge q)) \wedge (\sim r)$.

☆ **5.6.** Niech litery a, b oznaczają zdania:
a: Azja jest największym kontynentem.
b: Najmniejszym oceanem jest Ocean Atlantycki.

Napisz takie zdanie c, aby prawdziwe było zdanie:

a) $(a \Rightarrow b) \Longleftrightarrow (\sim c)$.
b) $(a \vee b) \wedge c$.
c) $((\sim a) \vee (\sim b)) \Rightarrow (c \wedge a)$.
d) $(c \wedge (a \Rightarrow b)) \Longleftrightarrow ((\sim c) \vee (\sim a))$.
e) $a \wedge (b \vee (\sim c))$.
f) $(\sim c) \Longleftrightarrow (a \wedge (\sim b))$.

☆ **5.7.** Niech p, q, r, oznaczają zdania:
p: Najstarszym miastem świata jest Damaszek w Syrii. (prawda)
q: Najdłuższy mecz piłki nożnej trwał 3 godziny. (fałsz)
r: Zamek błyskawiczny wynaleziono w XIX. (fałsz)
Oceń wartość logiczną zdań:

a) $p \wedge (\sim q)$.
b) $p \Rightarrow (p \vee q)$.
c) $(p \Rightarrow (\sim r)) \wedge q$.
d) $((\sim p) \vee (q)) \wedge (\sim r)$.
e) $(p \vee r) \wedge ((\sim p) \vee q)$.
f) $(p \wedge r) \vee q$.
g) $((\sim p) \wedge q) \Rightarrow ((\sim q) \wedge (\sim r))$.

☆ **5.8.** Wykaż, że następujące wyrażenia są prawami rachunku zdań (tautologiami):

a) $(p \wedge q) \Rightarrow p$.
b) $(p \wedge q) \Rightarrow q$.
c) $p \Rightarrow (p \vee q)$.
d) $q \Rightarrow (p \vee q)$.
e) $\sim (p \wedge (\sim q)) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee q)$.
f) $\sim ((\sim p) \vee (\sim q)) \Leftrightarrow (p \wedge q)$.
g) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$.

☆ **5.9.** Sprawdź, czy następujące wyrażenia są tautologiami:

a) $p \Rightarrow (p \wedge q)$.
b) $q \Rightarrow (p \wedge q)$.
c) $p \Rightarrow ((\sim p) \vee q)$.
d) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \vee q)$.
e) $(\sim p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.
f) $[(p \Rightarrow q) \wedge ((\sim p) \Rightarrow q)] \Rightarrow q$.
g) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow (\sim q))] \Rightarrow q$.

☆ **5.10.** Wybierz funktor: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, który należy wstawić między podane zdania w miejsce $\square$, aby otrzymać tautologię:

a) $(p \square q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$.
b) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \square p)$.
c) $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \square (q \square r)$.
d) $((\sim p) \square (\sim q)) \Leftrightarrow \sim (p \wedge q)$.
e) $((\sim p) \Rightarrow p) \square p$.
f) $(p \Rightarrow q) \square ((\sim q) \Rightarrow (\sim p))$.

6. Kwantyfikatory. Zdania logiczne

6.1. Zapisz następujące zdania za pomocą kwantyfikatorów:

a) Dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność $n > \frac{1}{n}$.
b) Istnieje liczba całkowita k taka, że $\sqrt{k}$ jest liczbą całkowitą.
c) Każda liczba całkowita x jest podzielna przez 3.
d) Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$.
e) Istnieje liczba całkowita n taka, że $\sqrt[3]{n} = \sqrt[5]{n}$.
f) Dla każdej liczby całkowitej k liczba $\frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}$ jest całkowita.
g) Dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^3 - k$ jest podzielna przez 3.

☆ **6.2.** Oceń wartość logiczną każdego zdania z zadania 6.1.

6.3. Podane wyrażenia poprzedź kwantyfikatorem, aby otrzymać zdania prawdziwe:

a) $x^2 \geqslant x$. b) $|x| = x$. c) $x^2 \geqslant 0$. d) $4x + 4 = 4(x+1)$.

e) $\frac{x^2-1}{x+1} = 3$. f) $\sqrt{x^2} = x$. g) $x^2 = 4$. h) $2|n$.

i) k jest liczbą złożoną. j) $6|n(n+1)(n+2)$.

6.4. Zapisz za pomocą kwantyfikatorów następujące zdania:

a) Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $n^3 > n^2$.
b) Każda liczba wymierna jest liczbą całkowitą.
c) Istnieje taka liczba rzeczywista x, że $x^3 = 2$.
d) Istnieje taka liczba całkowita n, że $n^3 = n^2$.
e) Dla każdej liczby całkowitej n istnieje taka liczba całkowita k, że $n = k \cdot 1$.
f) Istnieje taka liczba rzeczywista M, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność $x \leqslant M$.
g) Dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje taka liczba rzeczywista y, że $x + y = 0$.

☆ **6.5.** Oceń wartości logiczne zdań z zadania 6.4.

☆ **6.6.** Trzej bracia: Bartek, Maciek i Tomek łowili ryby. Zapytani o to, ile ryb złowił każdy z nich, odpowiedzieli:

a) Bartek złowił 22 ryby, Maciek zaś 21 ryb.
b) Tomek złowił 19 ryb, a Bartek 21 ryb.
c) Tomek złowił 21 ryb, Maciek zaś 18 ryb.

Wiadomo, że w każdej odpowiedzi tylko jedna jej część jest prawdziwa, oraz że żadni dwaj z nich nie złowili tej samej liczby ryb. Ile ryb złowił każdy z chłopców?

☆ **6.7.** Zapisz słowami następujące zdania:

a) $\bigwedge_{x \in R} (|x| \geqslant 0)$. b) $\bigvee_{x \in R} (x^2 = 2)$. c) $\bigvee_{x \in R} (x < |x|)$.

d) $\bigvee_{x \in R} (-x = x)$. e) $\bigwedge_{x \in R} \bigvee_{y \in R} (x < y)$. f) $\bigvee_{x \in R} \bigwedge_{y \in R} (x < y)$.

☆ **6.8.** Oceń wartość logiczną zdań z zadania 6.7.

6.9. Za pomocą kwantyfikatorów zapisz zaprzeczenia zdań z zadania 6.7.

☆ **6.10.** Rozstrzygnij, czy poprawne jest rozumowanie (podane przez Orygenesa w III w.n.e.): *Jeżeli wiesz, że umarłeś, to umarłeś i jeżeli wiesz, że umarłeś, to nie umarłeś, więc nie wiesz, że umarłeś.*

★ **6.11.** Osiem złotych monet zewnętrznie wygląda jednakowo. Jedna z nich jest fałszywa i lżejsza od pozostałych. Wykryj fałszywą monetę, dwukrotnie używając szalkowej wagi bez odważników.

★ **6.12.** Wśród piętnastu monet zewnętrznie jednakowych jedna jest fałszywa i różni się ciężarem od pozostałych. Za pomocą dwukrotnego użycia szalkowej wagi bez odważników wykryj, czy moneta fałszywa jest lżejsza, czy cięższa.

II. Zbiory

Zbiór elementów mających określoną własność, to zbiór wszystkich i tylko takich elementów, które mają tę własność. Wyróżniamy: **zbiór pusty**, **zbiór skończony** i **zbiór nieskończony**. Symbolami zbiorów są najczęściej duże litery alfabetu łacińskiego, na przykład: A, B, C.

Przyjmujemy następujące oznaczenia **zbiorów liczbowych**:

$\boldsymbol{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych;

$\boldsymbol{W}$ – zbiór liczb wymiernych;

$\boldsymbol{NW}$ – zbiór liczb niewymiernych;

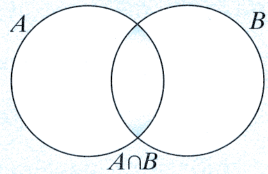
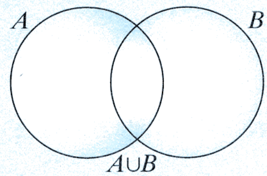
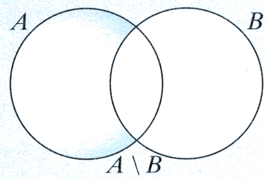
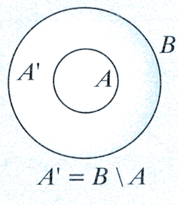
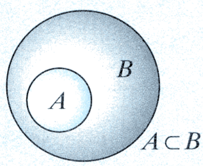
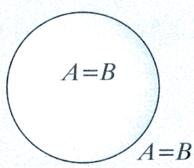
$\boldsymbol{C}$ – zbiór liczb całkowitych;

$\boldsymbol{N}$ – zbiór liczb naturalnych.

Prawa rachunku zbiorów

Nazwa prawa	**Treść prawa**
przemienność iloczynu	$A \cap B = B \cap A$
przemienność sumy	$A \cup B = B \cup A$
łączność iloczynu	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
łączność sumy	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
rozdzielność iloczynu względem sumy	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
rozdzielność sumy względem iloczynu	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
I prawo de Morgana	$(A \cap B)' = A' \cup B'$
II prawo de Morgana	$(A \cup B)' = A' \cap B'$

Działania na zbiorach

Działanie	Definicja	Ilustracja graficzna
Iloczyn zbiorów: $\cap$	$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$	
Suma zbiorów: $\cup$	$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$	
Różnica zbiorów: $\setminus$	$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$	
Dopełnienie zbioru do przestrzeni B: '	$x \in A' \Leftrightarrow x \in B \wedge x \notin A$	
Zawieranie się zbiorów: $\subset$	$A \subset B \Leftrightarrow \bigwedge_{x} (x \in A \Rightarrow x \in B)$	
Równość zbiorów: =	$A = B \Leftrightarrow \bigwedge_{x} (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$	

II. Rachunek zbiorów

1. Zbiory i działania na nich

1.1. Podaj wszystkie elementy następujących zbiorów:
a) $A = \{x\colon x$ jest miesiącem roku kalendarzowego$\}$;
b) $B = \{x\colon x$ jest miastem wojewódzkim w Polsce$\}$;
c) $C = \{x\colon x$ jest liczbą naturalną jednocyfrową$\}$;
d) $D = \{x\colon x$ jest liczbą naturalną mniejszą od 200 i kwadratem liczby naturalnej$\}$;
e) $E = \{p\colon p$ jest liczbą pierwszą i $p^2 - 1$ jest liczbą parzystą$\}$;
f) $F = \{n\colon n$ jest wspólnym dzielnikiem naturalnym liczb 28 i 42$\}$;
g) $G = \{x\colon x$ jest odwrotnością liczby naturalnej mniejszej od 10$\}$.

1.2. Sformułuj warunek, który spełniają wszystkie elementy zbioru:
a) $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}$;
b) $B = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$;
c) $C = \{0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729\}$;
d) $D = \{$wtorek, czwartek, sobota$\}$;
e) $E = \{$miligram, gram, dekagram, kilogram, kwintal, tona$\}$;
f) $F = \{$I, V, X, L, C, D, M$\}$;
g) $G = \{$czworościan foremny, sześcian, ośmiościan foremny, dwunastościan foremny, dwudziestościan foremny$\}$.

1.3. Podaj zbiór liczb naturalnych, które są dzielnikami:
a) liczby 36;
b) liczb 36 i 24;
c) liczb 45 i 30.

1.4. Podaj cztery elementy zbioru A, jeśli:
a) $A = \left\{x\colon x \in \boldsymbol{N} \text{ i } \sqrt{x} \in \boldsymbol{N}\right\}$;
b) $A = \{(x,y)\colon x \in \boldsymbol{R} \wedge y \in \boldsymbol{R} \wedge 2x - y = 3\}$;
c) $A = \{x\colon x \in \boldsymbol{R} \wedge 2x - 1 \geqslant x + 1\}$;
d) $A = \{(x,y)\colon x \in \boldsymbol{R} \wedge y \in \boldsymbol{R} \wedge x + y > 0\}$.

1.5. Podaj cztery elementy zbioru A, jeśli:
a) $A = \left\{x\colon x \in \boldsymbol{W} \text{ i } \sqrt[3]{x} \in \boldsymbol{N}\right\}$;
b) $A = \{z\colon z \in \boldsymbol{R} \wedge z \leqslant 3z - 1\}$;
c) $A = \left\{y\colon y \in \boldsymbol{R} \wedge y + 8 \geqslant 10 \text{ i } y < \sqrt{64}\right\}$;
d) $A = \left\{t\colon t \in \boldsymbol{N} \text{ i } t^3 + 1 > 0\right\}$;
e) $A = \left\{m\colon m \in \boldsymbol{R} \wedge m - 4 < 2\sqrt{2} \text{ i } m^3 + 3 > 0\right\}$.

1.6. Podaj pięć elementów zbioru B, jeśli:
a) $B = \{(x,y)\colon x \in \boldsymbol{R} \wedge y \in \boldsymbol{R} \wedge 2x + y = 4\}$;
b) $B = \{(x,y)\colon x \in \boldsymbol{R} \wedge y \in \boldsymbol{R} \wedge x + 2y - 8 \geqslant 0\}$;
c) $B = \{(a,b)\colon a \in \boldsymbol{R} \wedge b \in \boldsymbol{R} \wedge 3a + b < 1\}$;
d) $B = \{(z,t)\colon z \in \boldsymbol{R} \wedge t \in \boldsymbol{R} \wedge z - t = 1\}$.

1.7. A jest zbiorem filmów, B jest zbiorem filmów sensacyjnych. Wyznacz zbiory:
a) $A \cup B$;
b) $A \cap B$;
c) $A \setminus B$;
d) $B \setminus A$.

1.8. A jest zbiorem trójkątów równobocznych, B – zbiorem trójkątów równoramiennych, C – zbiorem trójkątów prostokątnych. Wyznacz zbiory:

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus C$;
d) $A \cap C$; e) $A \setminus B$; f) $C \setminus A$.

1.9. A jest zbiorem równoległoboków, B jest zbiorem kwadratów. Wyznacz zbiory:

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$;
c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$.

1.10. Co jest częścią wspólną zbioru rombów i zbioru prostokątów?

1.11. Wyznacz kąty trójkąta, który należy do części wspólnej zbioru trójkątów prostokątnych i:

a) zbioru trójkątów równoramiennych,
b) zbioru trójkątów równobocznych.

☆ **1.12.** Podaj przykład zbiorów A i B takich, że A ma 5 elementów, B ma 7 elementów oraz:

a) $A \cup B$ ma 10 elementów;
b) $A \cup B$ ma 12 elementów.

☆ **1.13.** Niech A_n będzie zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez n, zaś B_n – zbiorem dzielników liczby n. Wyznacz zbiory:

a) $A_4 \cap A_6$; b) $B_8 \cap B_9$; c) $A_{16} \cup B_4$;
d) $A_4 \cap B_{16}$; e) $A_{18} \cup A_9$; f) $B_{18} \cup B_9$.

1.14. Niech A i B oznaczają odpowiednio zbiory dzielników naturalnych liczb 14 i 45. Wyznacz: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

1.15. Dane są trzy zbiory: A – zbiór dzielników naturalnych liczby 18, B – zbiór liczb pierwszych mniejszych od 18, C – zbiór liczb złożonych mniejszych od 15. Wyznacz: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus C$, $C \setminus A$, $B \setminus C$, $C \setminus B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $A \cap C$, $A \cup C$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B \cup C$.

1.16. Wyznacz część wspólną następujących zbiorów:

a) zbioru liczb parzystych i zbioru liczb naturalnych podzielnych przez 3,
b) zbioru liczb naturalnych podzielnych przez 3 i zbioru liczb naturalnych podzielnych przez 9,
c) zbioru liczb parzystych i zbioru liczb nieparzystych,
d) zbioru liczb parzystych i zbioru liczb pierwszych?

1.17. Znajdź sumę zbiorów A i B, gdzie:

a) A = zbiór liczb spełniających nierówność: $2 < x < 3$,
B = zbiór liczb spełniających nierówność: $1 < x < 5$;
b) A = zbiór liczb całkowitych spełniających nierówność: $1 < x < 8$,
B = zbiór liczb spełniających nierówność: $3 < x < 10$;
c) A = zbiór liczb całkowitych spełniających nierówność: $1 < x < 3$,
B = zbiór liczb całkowitych spełniających nierówność: $4 < x < 7$.

1.18. Znajdź iloczyn zbiorów A i B, jeśli wiadomo, że:
a) A = zbiór liczb całkowitych dodatnich spełniających nierówność: $-2 < x < 5$,
B = zbiór liczb całkowitych spełniających nierówność: $0 \leqslant x < 10$;
b) A = zbiór liczb ujemnych spełniających nierówność: $-5 \leqslant x < 5$,
B = zbiór liczb całkowitych ujemnych spełniających nierówność: $-8 < x \leqslant 15$;
c) A = zbiór liczb spełniających nierówność: $2 < x < 3$,
B = zbiór liczb spełniających nierówność: $0 < x < 5$.

1.19. Znajdź zbiór $A \setminus (B \cup C)$ oraz zbiór $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, jeśli wiadomo, że:
a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{1, 7\}$;
b) A = zbiór liczb spełniających nierówność: $1 < x < 10$, $B = \{3\}$, $C = \{5\}$;
c) A = zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, B = zbiór liczb spełniających nierówność: $2 < x < 5$, $C = \{4, 6\}$;
d) A = zbiór pusty, B = zbiór liczb pierwszych spełniających nierówność: $0 < x < 10$,
C = dowolny zbiór.

☆ **1.20.** Wyznacz zbiory A i B, jeśli wiadomo, że:
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, $A \cap B = \{7, 8, 9, 10\}$, $B \setminus A = \{4, 5, 6, 11\}$.

☆ **1.21.** Wyznacz zbiory A i B, jeśli wiadomo, że:
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$, $A \cap \{5, 6, 7\} = \varnothing$, $\{1, 2\} \cap B = \varnothing$.

☆ **1.22.** Wyznacz zbiory A i B, jeśli wiadomo, że:
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B \setminus A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $\{3, 9\} \cap B = \varnothing$, $A \cap B = \{1\}$.

☆ **1.23.** A jest zbiorem liczb postaci: $4k + 3$, gdzie $k \in \boldsymbol{N}$. B jest zbiorem liczb postaci: $4k - 1$, gdzie $k \in \boldsymbol{N}$. Znajdź $B \setminus A$.

1.24. Uporządkuj zbiory w kolejności zawierania się:
a) zbiór mieszkańców Azji, zbiór mieszkańców Tokio, zbiór mieszkańców północnej półkuli, zbiór mieszkańców Japonii, zbiór ludzi na całym świecie;
b) zbiór jabłoni, zbiór drzew na całym świecie, zbiór drzew liściastych, zbiór drzew owocowych.

1.25. Wyznacz wszystkie podzbiory zbioru $\{1, 2, 3\}$.

1.26. Podaj, ile różnych podzbiorów można utworzyć ze zbioru:
a) $A = \{x, y, z, t\}$; b) $B = \{a, b, c, d, e\}$.
Wypisz te podzbiory.

1.27. Sprawdź, czy zbiór A jest podzbiorem zbioru B, jeśli:
a) $A = \{x\colon x \in \boldsymbol{N} \text{ i } 6|x\}$, $B = \{x\colon x \in \boldsymbol{N} \text{ i } 3|x\}$;
b) $A = \{x\colon x \in \boldsymbol{R} \text{ i } x \leqslant -2\}$, $B = \{x\colon x \in \boldsymbol{R} \text{ i } x < -1\}$;
c) $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, $B = \{3, 5, 7, 11, 13, 17\}$;
d) $A = \{x\colon x \in \boldsymbol{N} \text{ i } 2|x\}$, B – zbiór liczb złożonych;
e) A – zbiór liczb pierwszych, B – zbiór liczb nieparzystych;
f) $A = \left\{x\colon x \in \boldsymbol{W} \text{ i } \sqrt[6]{x} \in \boldsymbol{W}\right\}$, $B = \left\{x\colon x \in \boldsymbol{W} \text{ i } \sqrt[3]{x} \in \boldsymbol{W}\right\}$.

1.28. Zbadaj, czy podane zbiory są równe:

a) $A=\{x\in \boldsymbol{R}: x>0\}$ i $B=\{x\in \boldsymbol{R}: x\neq 0 \text{ i } x\geqslant 0\}$;

b) $A=\{x\in \boldsymbol{R}: 3x+1>7\}$ i $B=\{x\in \boldsymbol{R}: x>2 \text{ i } x\neq 0\}$;

c) $A=\{n\in \boldsymbol{N}: n<100$ i n jest sumą sześcianów dwóch liczb naturalnych$\}$ i $B=\{2, 9, 16, 28, 35, 54, 65, 72, 91\}$.

☆ **1.29.** Niech a, b, c, d oznaczają różne liczby naturalne. Rozpatrujemy pewne podzbiory zbioru $X=\{a, b, c, d\}$. Wyznacz liczby a, b, c, d, jeśli wiadomo, że:

1. $\{a, b, 1\}\subset X$,
2. $\{1, 2, c\}\subset X$,
3. $\{a, b, 3\}\subset X$,
4. $\{b, d, 4\}\subset X$.

☆ **1.30.** Podaj zbiory A i B, jeśli wiadomo, że:

1. $A; B\subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
2. $A\cap B=\{4, 6, 9\}$,
3. $A\cup\{3, 4, 5\}=\{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$,
4. $B\cup\{4, 6\}=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$,

☆ **1.31.** Wyznacz zbiór X, jeśli wiadomo, że:

1. $X\subset\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
2. $X\subset\{1, 3, 4, 6, 7, 8\}$,
3. $\{1, 3, 4, 6\}\subset X$,

☆ **1.32.** Znajdź zbiór E, jeśli:

a) $\{1, 2, 3, 4\}\subset E$, $\{3, 4, 5, 6\}\subset E$, $E\subset\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\{7, 8\}\cap E=\varnothing$;

b) $E\subset\{1, 2, 3, 4, 7\}$, $E\subset\{3, 4, 5, 6, 7\}$, $\{3, 4\}\subset E$, $7\notin E$.

☆ **1.33.** Wyznacz zbiór E i jego podzbiory A i B, jeśli wiadomo, że:
$E\setminus A=\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $E\setminus B=\{5, 6, 11, 12\}$, $A\cap B=\{1, 2, 3, 4\}$.

☆ **1.34.** Dane są zbiory: $A=\{1, 3, 5, 7\}$, $B=\{5, 7, 8, 9\}$. Wyznacz zbiór X taki, że:
$(A\setminus X)\cup(X\setminus B)=\{1, 3\}$, $\{3, 9\}\subset X$, $|X|=4$.

1.35. Wskaż, który z podanych zbiorów jest pusty, który skończony, a który nieskończony:

a) zbiór cyfr w układzie dziesiątkowym;

b) zbiór liczb podzielnych przez 100;

c) zbiór dzielników liczby 100;

d) zbiór gruszek na wierzbie;

e) zbiór liczb całkowitych;

f) zbiór liczb niewymiernych;

g) zbiór ludzi mieszkających na Marsie;

h) zbiór mieszkańców Krakowa;

i) zbiór turystów w Tatrach.

1.36. Jakim zbiorem punktów jest suma wszystkich prostych prostopadłych do danej prostej na płaszczyźnie?

1.37. Czy zbiór wszystkich punktów pewnego odcinka jest skończony? Odpowiedź uzasadnij.

1.38. Czy zbiór kół współśrodkowych, których długość promienia jest liczbą naturalną, a pole mniejsze od liczby 1000, jest skończony? Odpowiedź uzasadnij.

1.39. Dane są zbiory:

$A = \{x \in \boldsymbol{C}\colon -2 \leqslant x \leqslant 5\}$;

$B = \{x \in \boldsymbol{N}\colon 5 \leqslant x \leqslant 12\}$;

$C = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \ldots\right\}$.

Wśród poniższych zbiorów wskaż zbiory skończone i podaj liczbę elementów każdego z nich:

a) $A \cup C$; b) $A \cap B$; c) $B \cap \boldsymbol{R}$;
d) $B \cup C$; e) $A \cap B \cap C$; f) $(A \cap C) \cup B$;
g) $(A \cap \boldsymbol{N}) \cup (B \cap C)$; h) $A \cap (C \setminus B)$.

1.40. Dany jest zbiór $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Wyznacz dopełnienia następujących podzbiorów zbioru X:

a) $A = \{1, 3, 4\}$; b) $B = \{2, 4, 6\}$; c) $C = \{5\}$; d) $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1.41. Dane są zbiory:

$A = \{x \in \boldsymbol{R}\colon |x| < 1\}$;

$B = \left\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right\}$;

$C = \{x \in \boldsymbol{N}\colon x \geqslant 0\}$.

Wśród podanych niżej zbiorów wskaż zbiory skończone i podaj liczbę elementów każdego z nich:

a) $A \cap B$; b) $A \cap C$; c) $A \cap B \cap C$;
d) $A \cup C$; e) $B \cap C$; f) $A \cap (B \setminus C)$;
g) $A \cap \boldsymbol{N}$; h) $B \cap \boldsymbol{C}$.

☆ **1.42.** Opisz słowami podane zbiory:

a) $A = \left\{x \in \boldsymbol{R}\colon \bigvee_{k \in \boldsymbol{C}} (x = 5k)\right\}$; b) $B = \left\{x \in \boldsymbol{R}\colon \bigvee_{k \in \boldsymbol{C}} (x = \sqrt{3}\,k)\right\}$;

c) $C = \left\{x \in \boldsymbol{R}\colon \bigvee_{k \in \boldsymbol{C}} (x = 2k + 1)\right\}$; d) $D = \left\{a \in \boldsymbol{R}\colon \bigvee_{b \in \boldsymbol{N}} (a = \sqrt[3]{b})\right\}$;

e) $E = \left\{m \in \boldsymbol{R}\colon \bigvee_{n \in \boldsymbol{N}} (m = 3^n)\right\}$; f) $F = \left\{p \in \boldsymbol{R}\colon \bigvee_{q \in \boldsymbol{N}} (p = q^2)\right\}$.

☆ **1.43.** Opisz słowami podane zbiory:

a) $X = \left\{x \in \boldsymbol{R}\colon \bigvee_{p \in \boldsymbol{W}} (x = \sqrt{p})\right\}$; b) $X = \left\{x \in \boldsymbol{R}\colon \bigvee_{y \in \boldsymbol{C}} (x = 7y)\right\}$;

c) $X = \left\{x \in \boldsymbol{R}\colon \bigvee_{k \in \boldsymbol{N}} (x = \sqrt[k]{k})\right\}$; d) $X = \left\{x \in \boldsymbol{R}\colon \bigvee_{a \in \boldsymbol{N}} (x = \pi a^2)\right\}$;

e) $X = \left\{s \in \boldsymbol{R}\colon \bigvee_{r \in \boldsymbol{C}} \left(s = \frac{r}{2}\right)\right\}$; f) $X = \left\{a \in \boldsymbol{R}\colon \bigvee_{b \in \boldsymbol{C}} (a = 5 + b)\right\}$.

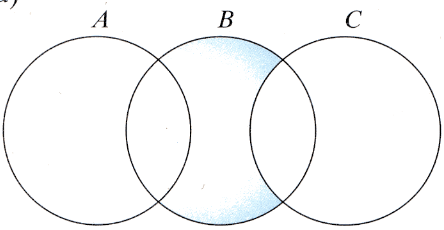
2. Prawa rachunku zbiorów

2.1. O trzech zbiorach A, B i C wiadomo, że $A \subset B$ i $B \not\subset C$. Rozstrzygnij, czy zbiór A może być podzbiorem zbioru C.

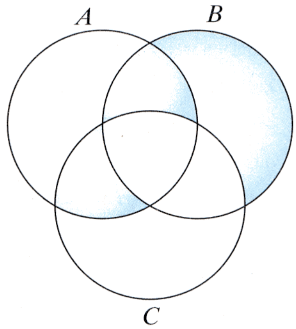
2.2. O trzech zbiorach A, B i C wiadomo, że $A \subset B$ i $A \not\subset C$. Rozstrzygnij czy zbiór B może być podzbiorem zbioru C?

2.3. Używając symboli zbiorów A, B, C i znaków działań na zbiorach, zapisz, jaki zbiór przedstawia zamalowana część na rycinach:

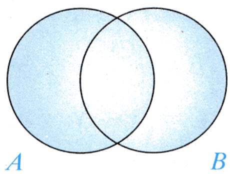
a)



b)



2.4. Wskaż w której części diagramu zbiorów A i B należy umieścić symbole zbioru pustego, jeżeli:



a) $A \cap B = \varnothing$; b) $A \setminus B = \varnothing$;
c) $B \setminus A = \varnothing$; d) $A \setminus B = A$;
e) $B \setminus A = B$; f) $A \subset B$;
g) $B \subset A$; h) $A \cap B = A$;
i) $A \cap B = B$; j) $A \cup B = A$;
k) $A \cup B = B$; l) $A = B$;
m) $A \cup B = A \cap B$; n) $A \cup B = A \setminus B$;
o) $A \cup B = B \setminus A$; p) $A \setminus B = B \setminus A$.

2.5. Zbiory A i B są niepuste. Co można o nich powiedzieć, jeśli:

a) $A \cup B = A$; b) $A \cup B = B$; c) $A \cap B = \varnothing$;
d) $A \cap B = A$; e) $A \cap B = B$; f) $A \setminus B = \varnothing$;
g) $A \setminus B = A$; h) $B \setminus A = \varnothing$; i) $B \setminus A = B$?

2.6. Które z podanych niżej twierdzeń jest prawdziwe, a które fałszywe?

a) Dla dowolnych zbiorów A, B, C, jeśli $A \cap B \cap C = \varnothing$, to $A \cap B = \varnothing$ i $A \cap C = \varnothing$ i $B \cap C = \varnothing$.

b) Dla dowolnych zbiorów A, B, C, jeśli $A \cap B = \varnothing$ i $A \cap C = \varnothing$ i $B \cap C = \varnothing$, to $A \cap B \cap C = \varnothing$.

☆ **2.7.** Uzasadnij, że dla dowolnych podzbiorów A, B i C danego zbioru prawdziwe są równości:

a) $(A \setminus B) \cup (C \setminus B) = (A \cup C) \setminus B$;

b) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.

☆ **2.8.** Wykaż, że dla dowolnych zbiorów A i B prawdziwe są następujące równości:
a) $A\cup(A\cap B)=A$; b) $(A\cup B)\setminus B=A\setminus B$;
c) $(A\setminus B)\cup B=(B\setminus A)\cup A$; d) $A\setminus(A\setminus B)=B\setminus(B\setminus A)$.

2.9. Co można powiedzieć o zbiorach A i B, jeśli $A\cup B=A\cap B$?

☆ **2.10.** Jaki warunek spełniają zbiory A i B, jeśli:
a) $A\cap(A\cup B)=B$; b) $(A\cup B)\setminus B=A$; c) $A\setminus B=B\setminus A$;
d) $(A\setminus B)\cup B=A$; e) $(A\setminus B)\setminus(B\setminus A)=A$?

2.11. Doprowadź następujące wyrażenia do prostszej postaci:
a) $[A\cup(A\setminus A)]\cap A$; b) $[(A\cup A)\setminus A]\cap A$;
c) $(A\cup A)\setminus(A\cap A)$; d) $(A\cup B)\cap(A\cap B)$;
e) $(A\cup B)\cup(A\cap B)$; f) $[(A\cup B)\cup C]\cap[(C\cap B)\cap A]$;
g) $(A\cap B)\setminus(A\cup B)$.

☆ **2.12.** Udowodnij, że dla wszelkich zbiorów A, B, C prawdziwe są równości:
a) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;
b) $(A\setminus B)\cup C=(A\cup C)\setminus(B\setminus C)$;
c) $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus(C\setminus A)$.

☆ **2.13.** Zbadaj, czy dla dowolnych zbiorów A, B, C i D zachodzą równości:
a) $A\cup(A\cap B)=B$; b) $A\setminus(A\cap B)=A$;
c) $(A\cup B)\setminus A=B$;
d) $(A\cup B)\cap(C\cup D)=(A\cap C)\cup(A\cap D)\cup(B\cap C)\cup(B\cap D)$;
e) $(A\cup B)\setminus(A\cup D)=B\setminus D$.

☆ **2.14.** Niech A i B będą pewnymi zbiorami. Zbadaj, czy zawieranie zachodzi między następującymi zbiorami:
a) $A\cap B$ i $A\cup B$; b) $A\setminus B$ i B;
c) $(A\cap B)\setminus A$ i A; d) $A\setminus B$ i $A\cup B$.

☆ **2.15.** Sumę zbiorów $A\setminus B$ i $B\setminus A$ nazywamy różnicą symetryczną zbiorów A i B i oznaczamy symbolem $A\dot{-}B$. Tak więc: $A\dot{-}B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\setminus$. Sprawdź na diagramie, że dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi równość: $A\dot{-}B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

☆ **2.16.** Wiadomo, że $A\dot{-}B=A-B$. Co można powiedzieć o zbiorach A i B ?

☆ **2.17.** Wiadomo, że $A\dot{-}B=A\cup B$. Co można powiedzieć o zbiorach A i B ?

☆ **2.18.** Czy dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi równość $A\dot{-}B=B\dot{-}A$? Odpowiedź uzasadnij.

☆ **2.19.** Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi równość:
$(A\cup B)\dot{-}B=A\dot{-}(A\cap B)$.

☆ **2.20.** Dane są zbiory: $A=\{1,2,3,7\}$, $B=\{2,4,5,7\}$, $C=\{3,5,6,7\}$. Wyznacz $\left(A\dot{-}B\right)\dot{-}C$ i $A\dot{-}\left(B\dot{-}C\right)$.

☆ **2.21.** Sprawdź na diagramie, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi równość: $A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$.

☆ **2.22.** Wykaż, że dla dowolnych zbiorów A i B prawdziwe są następujące równości:
a) $A \dot{-} A = \varnothing$; b) $A \dot{-} \varnothing = A$; c) $A \dot{-} (A \dot{-} B) = B$.

☆ **2.23.** Zbiór A ma 4 elementy, zbiór B ma 3 elementy. Ile elementów może mieć różnica symetryczna tych zbiorów?

☆ **2.24.** Niech A, B i C będą dowolnymi niepustymi zbiorami. Które elementy zbiorów A, B i C należą do zbioru $A \dot{-} B \dot{-} C$?

☆ **2.25.** Każdy ze zbiorów A i B ma nieparzystą liczbę elementów. Czy różnica symetryczna zbiorów A i B może mieć nieparzystą liczbę elementów?

☆ **2.26.** Niech przestrzeń X będzie zbiorem wszystkich wielokątów i niech A będzie zbiorem trójkątów równoramiennych, B – zbiorem trójkątów równobocznych, C – zbiorem trójkątów prostokątnych. Wyznacz zbiory:

a) $(A \cap B) \cap C$; b) $(A \cap B') \cap C$; c) $A' \cap (B \cap C)$;

d) $A' \cap (B' \cap C)$; e) $(A \cap B) \cap C'$.

☆ **2.27.** Jeżeli A jest zbiorem skończonym, to przez $|A|$ oznaczamy liczbę elementów zbioru A. Udowodnij, że jeżeli A i B są zbiorami skończonymi, to:
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

☆ **2.28.** Udowodnij, że jeżeli A, B i C są dowolnymi zbiorami skończonymi, to:
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

☆ **2.29.** Niech $|X| = 1000$ i $X = A \cup B \cup C$. Czy jest możliwe, aby: $|A| = 510$, $|B| = 490$, $|C| = 427$, $|A \cap B| = 189$, $|A \cap C| = 140$, $|B \cap C| = 85$? Odpowiedź uzasadnij.

★ **2.30.** Na Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną zjechało 1000 osób. W sprawozdaniu z tej olimpiady podano, że wśród nich: 811 osób włada językiem angielskim, 752 – językiem rosyjskim, 418 – językiem francuskim, 356 – rosyjskim i francuskim, 570 – rosyjskim i angielskim, 348 – angielskim i francuskim, zaś 297 osób – wszystkimi trzema językami. Wykaż, że w sprawozdaniu tym popełniono błąd.

★ **2.31.** Spośród 40 uczniów pewnej klasy 17 gra w szachy, 21 w brydża, a 6 gra i w szachy, i w brydża. Ilu uczniów:
a) gra w brydża, a nie gra w szachy; b) nie gra ani w szachy, ani w brydża?

★ **2.32.** Spośród 300 uczniów klas trzecich i czwartych liceum 100 wzięło udział w olimpiadzie matematycznej, 80 – w fizycznej, 60 – w informatycznej; w tym 23 – w matematycznej i fizycznej, 16 – w matematycznej i informatycznej, 14 – w fizycznej i informatycznej, a 5 uczniów wzięło udział we wszystkich trzech olimpiadach. Ilu uczniów wzięło udział:
a) tylko w olimpiadzie matematycznej, b) tylko w jednej olimpiadzie,
c) w co najmniej jednej olimpiadzie?

III. Rachunek algebraiczny

Potęgowanie

wykładnik potęgi

podstawa potęgi $\longrightarrow a^n = b \longleftarrow$ wynik potęgowania

Określenie potęgi o wykładniku naturalnym

$a^0 = 1$, gdy $a \neq 0$;

$a^1 = a$, gdy $a \in \boldsymbol{R}$;

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$, gdy $n > 1$ i $n \in \boldsymbol{N}$.

Określenie potęgi o wykładniku całkowitym ujemnymi:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, gdy $a \neq 0$ i $n \in \boldsymbol{N}_+$. W szczególności $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, $a \cdot b \neq 0$.

Działania na potęgach:

Dla dowolnych liczb a i b oraz dowolnych liczb naturalnych m i n:

iloczyn potęg o tych samych podstawach	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
iloraz potęg o tych samych podstawach	$a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0$ i $m > n)$
potęga iloczynu	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
potęga ilorazu	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$
potęga potęgi	$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$

Pierwiastkowanie

stopień pierwiastka $\longrightarrow \sqrt[n]{a} = b \longleftarrow$ wynik pierwiastkowania

liczba pierwiastkowana

Pierwiastkiem stopnia n-tego z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b, której n-ta potęga równa jest a.

Działania na pierwiastkach

1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, gdy $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$;

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, gdy $a \geqslant 0$ i $b > 0$;

3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$, gdy $a \geqslant 0$;

4) $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$, gdy $a \geqslant 0$;

5) $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \cdot p]{a^{n p}}$, gdy $a \geqslant 0$ i $p \in \boldsymbol{N}_+$.

Wzory skróconego mnożenia

kwadrat sumy	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
kwadrat różnicy	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
różnica kwadratów	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
sześcian sumy	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
sześcian różnicy	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
suma sześcianów	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
różnica sześcianów	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
kwadrat sumy trzech składników	$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
różnica n-tych potęg dwóch wyrażeń, gdy $n\in \mathbf{N}$ i $n\geqslant 1$ $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}\cdot b+a^{n-3}\cdot b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$	
suma n-tych potęg dwóch wyrażeń (n jest liczbą nieparzystą) $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}\cdot b+a^{n-3}\cdot b^2-\ldots+a^2b^{n-3}-ab^{n-2}+b^{n-1})$	

Zasada indukcji matematycznej

Jeżeli $T(n)$ oznacza twierdzenie mówiące o liczbie naturalnej n, to aby udowodnić, że twierdzenie to jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od n_0 (n_0 może być 1 albo inną ustaloną liczbą naturalną), wystarczy:

a) dowieść, że jest ono prawdziwe dla liczby n_0;

b) wyprowadzić, że jest ono prawdziwe dla $n+1$, dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od n_0, wychodząc z założenia, że twierdzenie to jest prawdziwe dla liczby n.

Silnia

Symbol $n!$, gdy $n\in \mathbf{N}$, oznacza:

a) liczbę 1, gdy $n=0$ lub $n=1$;

b) iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do n włącznie, gdy $n\geqslant 2$.

Symbol Newtona

$$\binom{n}{k}=\begin{cases}\dfrac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{gdy } 0\leqslant k\leqslant n,\quad n\in \mathbf{N} \text{ i } k\in \mathbf{N}\\ 0, & \text{gdy } k>n,\quad n\in \mathbf{N} \text{ i } k\in \mathbf{N}\end{cases}$$

Dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby naturalnej k takiej, że $0\leqslant k\leqslant n$, spełnione są równości:

$$\binom{n}{0}=1;\quad \binom{n}{n}=1;\quad \binom{n}{1}=n;\quad \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k};\quad \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1};$$

Wzór dwumianowy Newtona

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b+\binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

$$(a-b)^n=\binom{n}{0}a^n-\binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b+\binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\binom{n}{n-1}a\cdot b^{n-1}+(-1)^n\cdot\binom{n}{n}b^n$$

III. Rachunek algebraiczny

1. Ćwiczenia w działaniach na ułamkach

1.1. Oblicz:

a) $2\frac{1}{4}+3\frac{2}{3}-1\frac{3}{5}$;

b) $\frac{1}{18}-\frac{5}{6}+\frac{7}{24}$;

c) $\left(5\frac{4}{5}-3\frac{5}{6}\right)-\left(3\frac{5}{12}-2\frac{3}{4}\right)$;

d) $\left(3\frac{7}{10}-\frac{2}{3}\right)-\left(5\frac{2}{3}+7\frac{1}{15}-4\frac{3}{5}\right)$;

e) $\left(\frac{15}{23}-\frac{3}{46}\right)-\left(-\frac{7}{2}\right)+\frac{7}{23}$;

f) $\left(\frac{16}{3}+\frac{13}{6}\right)-\left(\frac{8}{9}+1\frac{1}{2}-6\frac{2}{9}\right)$.

1.2. Oblicz:

a) $\frac{3}{7}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{21}{6}\cdot\frac{1}{9}$;

b) $3\frac{3}{4}\cdot 2\frac{1}{5}\cdot 7\frac{1}{2}$;

c) $8\frac{2}{3}:\frac{13}{9}\cdot 2\frac{2}{3}$;

d) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{18}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{21}{10}\right)$;

e) $\left(3\frac{3}{4}+5\frac{2}{3}\right):3\frac{1}{4}\cdot\frac{13}{8}$;

f) $\left(\frac{7}{8}-5\frac{3}{16}\right)\cdot\frac{4}{3}+\frac{7}{10}:\left(\frac{2}{15}+\frac{4}{30}\right)$.

1.3. Oblicz:

a) $5{,}043+0{,}71+0{,}003$;

b) $8{,}466-0{,}6666$;

c) $1{,}6+1{,}7+(-1{,}8)+(-1{,}4)$;

d) $7{,}5+(-7{,}3+19{,}4)$;

e) $(-2{,}9)+((-17{,}2)+19{,}4)$;

f) $(-2{,}7+(-16{,}2))+17{,}4$;

g) $(-8{,}9-(-6{,}3))-(12{,}35+4{,}6)$;

h) $(-5{,}4+6{,}7)+(-2{,}5)-(5{,}4+6{,}35)$.

1.4. Oblicz:

a) $\left(13{,}86-3\frac{5}{6}\right)+\left(-3{,}85+4\frac{5}{6}\right)$;

b) $2\frac{1}{11}\cdot\left(-3\frac{1}{6}\right)\cdot 5{,}6$;

c) $(-5{,}1)\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)\cdot 3{,}9\cdot 2\frac{2}{15}$;

d) $\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot 0{,}16\cdot(-7{,}25)\cdot 3\frac{1}{4}$;

e) $(0{,}15+(-0{,}15))\cdot\left(3\frac{3}{4}+2\frac{7}{8}\right)$;

f) $\left(-12\frac{3}{8}+2\frac{3}{8}\right)\cdot(-1{,}75)$;

g) $15\cdot\left(45{,}2:12-30:6\frac{3}{7}\right)-1\frac{35}{36}$.

1.5. Oblicz sumę 0,75 liczby $1\frac{5}{6}$ i 0,875 liczby 42.

1.6. Oblicz różnicę $\frac{11}{13}$ liczby 14,625 i 0,8 liczby $8\frac{1}{3}$.

1.7. Do liczby $4\frac{2}{3}$ dodaj 0,8 sumy liczb 2,1251 i $3\frac{5}{6}$, a otrzymany wynik zmniejsz o różnicę liczby 8,5 i 0,3 sumy liczb $4\frac{5}{6}$ i $2\frac{8}{9}$.

1.8. Znajdź liczbę, której 0,875 jest iloczynem liczby 3,5 przez liczbę trzykrotnie mniejszą.

1.9. Znajdź liczbę, której $\frac{4}{55}$ jest ilorazem sumy liczb 3,45 i $4\frac{1}{6}$ przez różnicę liczb $3\frac{5}{7}$ i 1,75.

1.10. Oblicz:

a) $\dfrac{8 \cdot 8\frac{1}{4} - 12\frac{1}{5} : \frac{61}{10} - \left(-3\frac{1}{3}\right) : \frac{5}{9}}{16 : \frac{8}{5} + 8\frac{2}{5} \cdot 1\frac{2}{7}}$;

b) $0{,}06 - \dfrac{\left(3\frac{4}{5} - 1{,}7\right) : 2\frac{1}{4}}{\left(5\frac{5}{6} - (-1{,}75)\right) \cdot 2{,}6 + (-5{,}6)}$;

c) $\dfrac{20 \cdot 2\frac{1}{10} + 11\frac{2}{5} : \frac{3}{10}}{16 : \frac{20}{9} + 7\frac{3}{4} \cdot \frac{16}{62}} \cdot \dfrac{3\frac{1}{2} \cdot 18 - 5\frac{1}{5} : 6}{3 : \frac{3}{8} + 12 \cdot \frac{9}{144}}$;

d) $3{,}1 : \dfrac{\left(5{,}5 \cdot 3\frac{1}{3} + 3{,}75\right) : \frac{7}{12}}{8 - \frac{10}{27} : \frac{5}{6}}$;

e) $\dfrac{\left(4\frac{1}{12} + 5{,}375\right) : 10\frac{8}{15}}{3\frac{5}{8} - \frac{3}{4} \cdot 3\frac{5}{7}}$.

1.11. Oblicz:

a) $\dfrac{30 \cdot 4\frac{1}{4} - 11\frac{1}{5} : 9\frac{1}{3}}{14 : 2\frac{2}{9} + 8\frac{2}{5} \cdot 14\frac{2}{7}} : \dfrac{1 : 6 + 12 : 5}{2\frac{1}{2} \cdot 15 - 4\frac{13}{15} \cdot 7\frac{3}{5}}$;

b) $\dfrac{\left(\frac{17}{32} - \frac{11}{54}\right) \cdot \left(\frac{9}{16} + \frac{7}{12}\right) \cdot \left(4\frac{10}{11} \cdot 3\frac{1}{5}\right) \cdot \left(2\frac{17}{25} : 1\frac{19}{48}\right)}{\left(6 : 2\frac{5}{8}\right) \cdot \left(3\frac{2}{9} \cdot \frac{63}{64}\right) \cdot \left(7 - 6\frac{25}{29}\right) \cdot \left(3\frac{4}{15} + \frac{38}{75}\right)}$;

c) $\left\{\left[\left(\frac{1}{2498} + \frac{121}{3747} + \frac{4}{6245}\right) \cdot 4\frac{52}{77} - \frac{8}{55}\right] \cdot 6\frac{9}{16} + \frac{1}{18}\right\} : 5\frac{4}{9}$;

d) $\left(10\frac{415}{581} - \frac{73}{445} + \frac{24}{35}\right) : \left(10\frac{23}{81} + 3\frac{74}{89} + 4\frac{4406}{7209}\right) \cdot 8\frac{1}{3}$;

e) $(3{,}6 + 5{,}55) \cdot 0{,}12 + (3 - 0{,}12) : 0{,}036 + 0{,}05 \cdot 0{,}04$;

f) $[(48{,}8889 : 12 - 55{,}23 : 14) \cdot 16 + 4{,}9508] : 20$;

g) $\left[\dfrac{4 : 0{,}128 + 14628{,}25}{1{,}011} \cdot 0{,}00008 + 6{,}84\right] : 12{,}5$;

h) $\dfrac{507{,}6}{0{,}86:0{,}172-10{,}8:36}-385\cdot\left(\dfrac{2{,}16}{27}-3{,}5\cdot 0{,}02\right)$;

i) $\dfrac{0{,}1:0{,}002-(7{,}91:0{,}565-11{,}1:1{,}48)}{2:0{,}16+0{,}625\cdot 2{,}4-1:0{,}125-0{,}25}$;

j) $\left(0{,}5\cdot 0{,}02+7{,}904:0{,}38-21:10\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{9}-\left(5\frac{11}{72}-3\frac{26}{45}\right):45$;

k) $3{,}7+1{,}5\cdot\left(2{,}652:1{,}3-1\frac{17}{30}+\frac{3}{50}\right)\cdot\left(14{,}95+\frac{5}{24}:\frac{25}{42}\right)$;

l) $23{,}276:2{,}3-3{,}6\left[17{,}2\cdot 0{,}125-\left(1\frac{32}{45}-\frac{7}{60}\right)\right]\cdot 2{,}7$;

m) $\left[2{,}1:\dfrac{\left(4{,}5\cdot 1\frac{2}{3}+3{,}75\right)\cdot\frac{7}{135}}{1-\left(\frac{10}{27}:\frac{5}{6}\right)}\right]:2{,}5$;

n) $\dfrac{0{,}8:\left(\frac{4}{5}\cdot 1{,}25\right)}{0{,}64-\frac{1}{25}}+\dfrac{\left(1{,}08-\frac{2}{25}\right):\frac{4}{7}}{\left(6\frac{5}{9}-3\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{2}{17}}+(1{,}2\cdot 0{,}5):\frac{4}{5}$;

o) $\dfrac{\left(6\frac{4}{15}+2\frac{8}{21}:13\frac{8}{9}-3\frac{2}{5}\cdot 1\frac{3}{4}\right)\cdot 1\frac{1}{41}}{432{,}377:25{,}3+2{,}582-4{,}03\cdot 2\frac{2}{5}}+\left(\frac{18}{25}-0{,}39\right):\frac{33}{50}$;

p) $\dfrac{\left(3\frac{1}{3}\cdot 6{,}6+2:12{,}75\right):\left(\frac{2}{3}+\frac{16}{17}+\frac{31}{51}\right)}{\left(75:4\frac{1}{6}-3\frac{9}{23}\cdot 3\right)\cdot\left(\frac{5}{18}+\frac{4}{15}+0{,}35\right)}+\dfrac{9\frac{1}{3}:\frac{28}{33}}{1{,}25\cdot 5{,}6}$.

1.12. Oblicz:

a) $3\frac{1}{5}:\left(\left(1\frac{1}{4}+2{,}5\right)\cdot 3{,}2\right)+\left(4{,}25:\left(4\frac{1}{4}\cdot\left(5{,}25-1\frac{1}{2}\right)\right)\right)\cdot 2$;

b) $\dfrac{4{,}5:\left(47{,}375-\left(26\frac{1}{3}-18\cdot 0{,}75\right)\cdot 2{,}4:0{,}88\right)}{17{,}81:1{,}37-23\frac{2}{3}:1\frac{5}{6}}$;

c) $\left[\dfrac{8{,}8077}{20-\dfrac{28{,}2}{(13{,}333\cdot 0{,}3+0{,}001)}\cdot 2{,}004}+4{,}9\right]\cdot\dfrac{5}{32}$;

d) $\dfrac{(81{,}624:4{,}8-4{,}505)^2+125\cdot 0{,}75}{\left(\left((0{,}44)^2:0{,}88+3{,}53\right)^2-2{,}75^2\right):0{,}52}$;

e) $\dfrac{\left((5{,}2^2:2{,}6+8{,}1)^2-6{,}5^2\right):0{,}025}{(60{,}192:2{,}4-1{,}08)^2-0{,}24\cdot 1400}$;

f) $\left[\dfrac{4\frac{1}{3}+5{,}4+0{,}2(6)}{\frac{13}{15}+0{,}0(3)+0{,}1}:\left(\left(4-0{,}8(3)-2\frac{7}{8}\right):\left(8\frac{7}{24}-7{,}91(6)\right)\right)\right]:\left(\frac{3}{14}+\frac{9}{42}\right);$

g) $\dfrac{2\frac{2}{3}:\left(2{,}8(4):2\frac{2}{15}\right)+\left(2\frac{14}{17}+\left(15\frac{13}{137}-\frac{2068}{137}\right):8{,}01\right)\cdot 5\frac{2}{3}}{\left(\left(1{,}08-\frac{2}{25}\right):0{,}(571428)\right):\left(\left(6{,}(5)-3\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{2}{17}\right)}.$

1.13. Rozwiąż równania:

a) $(0{,}66-0{,}012:0{,}2):\left(1-1\frac{4}{7}\cdot 0{,}4\right)=2\frac{9}{13}x:\left(3{,}125-5{,}6:2\frac{2}{3}\right);$

b) $(1-0{,}021:0{,}06):0{,}13x=\left(2\frac{1}{3}-\left(2\frac{3}{16}-\frac{2}{3}\right)\right):\frac{3}{8};$

c) $\left(3{,}25-\dfrac{(6{,}5625-2{,}5x)\cdot 0{,}53}{0{,}75}\right):6\frac{2}{3}=\frac{4}{15}.$

1.14. Co jest mniejsze: A czy B i ile razy, jeśli:

$A=\left(0{,}8\cdot 7+0{,}8^2\right)\cdot\left(1{,}25\cdot 7-\frac{4}{5}\cdot 1{,}25\right)+31{,}64,\qquad B=\dfrac{(11{,}81+8{,}19)\cdot 0{,}02}{9:11{,}25}?$

1.15. Co jest większe: A czy B i ile razy, jeśli:

$A=(9\cdot 0{,}08+0{,}7\cdot 0{,}08)\cdot\left(9\cdot 12{,}5-0{,}7\cdot 12\frac{1}{2}\right)+9{,}49,\qquad B=\dfrac{(1{,}09-0{,}29)\cdot 1\frac{1}{4}}{\left(18{,}9-16\frac{13}{20}\right)\cdot\frac{8}{9}}?$

☆ **1.16.** Udowodnij, że ułamek, którego licznik jest iloczynem czterech kolejnych liczb naturalnych, a mianownik jest iloczynem kolejnych liczb parzystych, jest skracalny przez 24.

☆ **1.17.** Bartkowi podano szklankę czarnej kawy. Wypił $\frac{1}{5}$ tej kawy i dopełnił szklankę mlekiem. Następnie, po wymieszaniu, znów wypił $\frac{1}{5}$ zawartości szklanki i znów dopełnił mlekiem. Ponownie wymieszał i po wypiciu $\frac{3}{5}$ zawartości szklanki obliczył, że w pozostałej części jest o 28 cm^3 więcej kawy niż mleka. Oblicz, jaka była pojemność szklanki.

★ **1.18.** Udowodnij, że dla $n\in N$ ułamek $\dfrac{14n+3}{21n+4}$ jest nieskracalny.

★ **1.19.** Udowodnij, że $\dfrac{n^4-3n^2+1}{n^4-n^2-2n-1}$ dla $n\in N$ i $n>2$ jest ułamkiem właściwym.

2. Obliczenia procentowe

2.1. Oblicz:

a) 20% liczby 60;
b) 35% liczby 28;
c) 84% liczby 72;
d) 25% liczby 70;
e) 55% liczby 50;
f) 66% liczby 75;
g) 3,5% liczby 24;
h) 0,4% liczby 40;
i) 20,8% liczby 60;
j) 101% liczby 504;
k) 999% liczby 20;
l) 500,8% liczby 30;
m) 300,5% liczby 64;
n) 200,7% liczby 72.

2.2. Znajdź liczbę, której:
a) 18% wynosi 54; b) 1% wynosi 12; c) 10% wynosi 40;
d) 25% wynosi 16; e) 55% wynosi 33; f) 84% wynosi 105;
g) 150% wynosi 17; h) 400% wynosi 12,8.

2.3. Oblicz, jakim procentem liczby 25 jest każda z poniższych liczb:
a) 7, 15, 24, 25; b) 3,2; 8,5; 17,6; 21,9;
c) 0,6; 0,34; 0,99; 0,7; d) 26; 38; 43,5; 50,1.

2.4. Oblicz liczbę x, wiedząc, że jej 20% wynosi:
a) 15; 36; 24; 101; b) 13,8; 50,4; 27; 33;
c) 0,4; 0,85; 0,9; 0; 99; d) 150; 210; 850; 999.

2.5. Oblicz 150% liczby $\dfrac{6{,}62^2+5{,}4\cdot 3{,}38+1{,}22\cdot 3{,}38}{20{,}1^2-13^2+33{,}1\cdot 12{,}9}$.

2.6. Oblicz 8% wartości wyrażenia:

$$\frac{[0,(74)+0{,}0(52)+0{,}2(3)]:\frac{1}{60}}{\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{11}{12}-\frac{1}{6}+\frac{7}{24}\right)\cdot 2{,}20(4)}.$$

2.7. Znajdź liczbę, której 1,31% wynosi:

$$\frac{\left(13\frac{1}{42}-7\frac{11}{18}+2\frac{5}{6}:1\frac{2}{15}\right)\cdot 2\frac{22}{997}-403{,}138:33{,}4}{1\frac{5}{8}+16{,}175-\left(0{,}625+7\frac{1}{5}\cdot 2{,}34\right)}.$$

2.8. Znajdź liczbę, której 1,2% wynosi:

$$\frac{37{,}5\cdot\frac{20}{3}-2\frac{1}{4}:0{,}045}{\frac{20}{49}\cdot 9{,}8+0{,}125:0{,}75}.$$

2.9. Znajdź liczbę, której 40% stanowi $\dfrac{0{,}536^2-0{,}464^2}{3{,}6^2-7{,}2\cdot 2{,}4+2{,}4^2}$.

2.10. Znajdź liczbę, której 2,5% stanowi $\dfrac{\left(9\frac{3}{4}:5{,}2+3{,}4\cdot 2\frac{7}{34}\right):1\frac{9}{16}}{0{,}31\cdot 8\frac{2}{5}-5{,}61:27\frac{1}{2}}$.

2.11. Znajdź liczbę, której 5% stanowi $\dfrac{2\frac{11}{25}-0{,}84\cdot\left(6\frac{8}{9}:2\frac{7}{12}-\frac{5}{12}\cdot 4\frac{4}{35}\right)}{7{,}605:7\frac{1}{2}+3{,}086}$.

2.12. Do $2\frac{1}{3}$% liczby $3\frac{1}{2}$ dodaj 7,3% liczby 57,8.

2.13. Od 8,3% liczby 12,47 odejmij $\frac{3}{5}$ % liczby $\frac{2}{3}$.

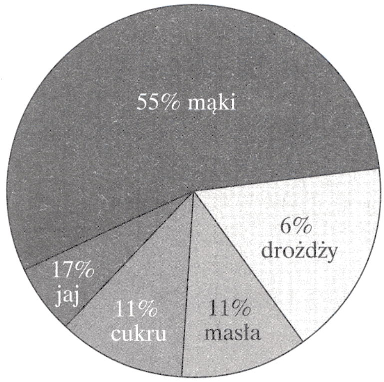
2.14. Oblicz sumę liczby, której 7,5% wynosi $13\frac{1}{3}$, oraz liczby, której $7\frac{21}{77}$ % wynosi 2,8.

2.15. Oblicz iloczyn liczby, której 19,8% wynosi 49,5, i liczby, której 12,5% wynosi 7,5.

2.16. Na diagramie przedstawiony jest procentowy udział poszczególnych produktów niezbędnych do upieczenia ciasta drożdżowego.

a) Ile gramów poszczególnych produktów zawiera drożdżówka o wadze 2 kg?

b) Ile kilogramów drożdżówki trzeba zjeść, by zawarte w niej drożdże ważyły 5 dkg?



2.17. Cenę towaru najpierw obniżono o 20%, a następnie podwyższono o 20%. Jak ostatecznie zmieniła się cena? A jak zmieni się cena tego towaru, gdy ją najpierw podwyższymy o 20%, a następnie obniżymy o 20%?

2.18. Która zmiana ceny jest mniejsza: podwyżka o 45% czy dwie kolejne obniżki o 25% i 20%?

2.19. Cenę obniżono o p%. O ile procent należy podwyższyć nową cenę, aby cena końcowa była równa początkowej?

2.20. Wymiary prostokątnej działki zostały zmniejszone: długość o 30%, szerokość o 20%. O ile procent zmieniło się pole tej działki?

2.21. Jaka jest cena brutto kalkulatora, którego cena netto wynosi 55,5 zł, a stawka VAT 22%.

2.22. Razem z podatkiem VAT liczącym 7% podręcznik kosztuje 17,12 zł. Jaka jest cena netto tego podręcznika?

2.23. Około 90% uczniów czwartej klasy pewnego liceum ogólnokształcącego po ukończeniu szkoły średniej zamierza kontynuować naukę na studiach. 40% spośród nich planuje studiować socjologię, 20% medycynę, 15% prawo, 15% matematykę, a 10% informatykę. Wiedząc, że 72 uczniów wybiera się na socjologię, oblicz, ilu uczniów czwartych klas liczy ta szkoła i ilu spośród nich będzie zdawało na medycynę, prawo, matematykę i informatykę. Jaki procent liczby uczniów zdających na socjologię stanowią uczniowie zdający na informatykę?

2.24. Konkurs skoków narciarskich na skoczni mamuciej w Planicy oglądało na trybunach 10000 kibiców. Spośród nich 3500 liczyli kibice Adama Małysza, 2400 – kibice Svena Hannawalda, 90% kibiców Adama Małysza stanowili kibice Janne Ahonena, a 9,5% wszystkich kibiców to kibice Simona Ammanna.

a) Jaki procent kibiców Adama Małysza stanowią kibice Simona Ammanna?
b) Jaki procent fanów Janne Ahonena stanowią fani Svena Hannavalda?
c) Kto ma więcej kibiców: Adam Małysz i Simon Ammann czy Sven Hannawald i Janne Ahonen razem?

2.25. Na grzyby chodzi 65% Polaków, podczas gdy ryby łowi 45% Polaków. O ile procent mniej jest Polaków niechodzących na grzyby od tych, którzy nie łowią ryb?

2.26. W referendum w sprawie przystąpienia Polski do Unii Europejskiej wzięło udział 58,8% Polaków spośród 29580000 uprawnionych do głosowania. Spośród tych, którzy oddali głos, 78% było za przystąpieniem Polski do UE. Oblicz, ilu Polaków brało udział w referendum i ilu było euroentuzjastów.

2.27. Sejm Rzeczypospolitej Polskiej liczy 460 posłów. Większość bezwzględna stanowi 50% + 1 głos spośród liczby posłów biorących udział w głosowaniu, przy wymaganej frekwencji minimum 50%. W głosowaniu nad nowelizacją ustawy o szkolnictwie w sprawie wydłużenia ferii letnich w szkołach średnich do 3 miesięcy wzięło udział 229 posłów. 228 było za wydłużeniem i 1 przeciw. Czy wakacje zostaną wydłużone w szkołach średnich?

2.28. Bartek kupił 2520 akcji spółki „Netka" w cenie po 3,20 zł za akcję. Prowizja, którą musiał zapłacić maklerowi, wynosi 2% wartości transakcji. Po tygodniu akcje tej spółki wzrosły o 12%, by po upływie kolejnych dwóch tygodni spaść o 8%. Po trzech tygodniach Bartek postanowił sprzedać akcje tej spółki, płacąc kolejną prowizję w wysokości 2% wartości sprzedaży. Czy Bartek zarobił na tej transakcji?

2.29. W sondażu OBOP wzięła udział reprezentatywna grupa 1081 osób. Sondaż dotyczył popularności znanych polityków. Prezydenta obdarzyło zaufaniem 381 osób, premiera 30% spośród pozostałych, marszałek sejmu otrzymał 90% głosów premiera. Reszta głosów przypadła marszałkowi senatu. Oblicz liczbę głosów oddanych na poszczególnych polityków.

2.30. Patrol policji zatrzymał podejrzanego kierowcę, który jechał zygzakiem. Kierowca ważył 150 kg i przed godziną wypił 500 g wina o zawartości 12% czystego alkoholu. Wiedząc, że norma dopuszcza 0,2 promila alkoholu we krwi, sprawdź, czy kierowca ma się czego obawiać.

2.31. Nieuczciwa przekupka dolała 2 l mleka o zawartości 4% tłuszczu do 10 l śmietany o zawartości 18% tłuszczu. Mając do dyspozycji przyrząd pomiarowy do określania zawartości tłuszczu, który pokazuje wynik z dokładnością $\pm 2\%$, sprawdź, czy możesz udowodnić nieuczciwość przekupki.

2.32. Tomek zainwestował 5000 zł w akcje spółki „Wektrim". Po upływie 6 miesięcy akcje te wzrosły o 5%. Oblicz, czy Tomek zarobiłby więcej, wpłacając pieniądze na roczną lokatę terminową oprocentowaną 4,5% w stosunku rocznym, czy sprzedając akcje spółki „Wektrim" po 6 miesiącach. Uwzględnij w obliczeniach prowizję maklera, wynoszącą 1%.

2.33. Szkodnik lasów – brudnica mniszka – zniszczył część 9-hektarowego obszaru leśnego o zagęszczeniu 10 drzew na 1 ar lasu. Za 2 lata można byłoby sprzedać drzewa z lasu w cenie 200 zł za 1 sztukę drzewa. Tymczasem uschnięte drzewa stanowiły tylko 75% tej wartości. Oblicz straty spowodowane przez brudnicę mniszkę.

2.34. Do jeziora Okoń wpuszczono 200 kg narybku karpia, z którego, jak się szacuje, około 60% osiągnie wagę dorosłych ryb. Wiedząc, że waga narybku to 0,01% wagi dorosłych ryb, oblicz, ile ton ryb mogą za rok odłowić wędkarze, zakładając, że na jeziorze Okoń nikt nie kłusuje.

2.35. Droga z Torunia do Warszawy ma długość 220 km. 60% tej trasy kierowca jechał z dozwoloną prędkością, 20% z prędkością powyżej 100 km/h. Resztę trasy przejechał z prędkością powyżej 130 km/h. Oblicz, ile wyniosłaby wysokość mandatów karnych, gdyby co 5 km trasy była mierzona prędkość samochodu. Za przekroczenie prędkości 100 km/h mandat wynosi 50 zł, a mandat za przekroczenie prędkości 130 km/h stanowi 300% mandatu poprzedniego.

2.36. Tomek założył roczną lokatę, wpłacając 1000 zł. Bank oferuje oprocentowanie:
a) 18% z kapitalizacją odsetek po upływie okresu umowy,
b) 16% z kapitalizacją odsetek co kwartał.
Którą z tych lokat Tomek powinien wybrać?
Uwaga. W przypadku b) posłuż się procentem składanym. Oznaczamy przez: K – kapitał początkowy, p – roczny procent, n – liczbę okresów kapitalizacji w ciągu roku, k – liczbę okresów kapitalizacji w czasie trwania lokaty. Uzyskany kapitał D obliczamy ze wzoru: $D = K\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^k$.
(Kapitalizacja odsetek – częstotliwość ich naliczania i dopisywania do lokaty lub przekazywania na wskazany rachunek).

2.37. Maciek wziął z banku kredyt w wysokości 10000 zł na okres dwóch lat, przy kapitalizacji co pół roku i rocznym oprocentowaniu 16%. Ile złotych kosztował Maćka ten kredyt?

2.38. Bank oferuje oprocentowanie roczne 16% z kapitalizacją odsetek co 3 miesiące. Jaką sumę dopisze ci bank do wpłaconej kwoty 1000 zł po upływie:
a) 3 miesięcy, b) pół roku, c) jednego roku?

2.39. Tabelka przedstawia skalę podatkową obowiązującą w 2002 roku.

Podstawa obliczenia podatku		Podatek wynosi
ponad	do	
0 zł	37024 zł	19% minus 518,16 zł*
37024 zł	74048 zł	6541,24 zł + 30% nadwyżki ponad 37024 zł
74048 zł		17648,44 zł + 40% nadwyżki ponad 74048 zł

* 518,16 zł stanowi 19% kwoty 2727,16 zł (tzw. kwoty wolnej od podatku).

Oblicz, jaki podatek zapłacimy od kwoty:

a) 20000 zł; b) 50000 zł; c) 100000 zł.

2.40. W dwóch sadach było początkowo 1500 drzewek owocowych razem. W ciągu dwóch lat w pierwszym z tych sadów zasadzono jeszcze 32% początkowej liczby drzewek, z czego uschły 33 drzewka. W drugim z sadów zasadzono w ciągu tych dwóch lat jeszcze 30% początkowej liczby drzewek, z czego uschło 10 drzewek. Pod koniec dwóch lat okazało się, że w pierwszym sadzie jest $1\frac{1}{2}$ razy więcej drzewek owocowych niż w drugim. Ile drzewek było w każdym sadzie?

2.41. W dwóch gospodarstwach rolnych było początkowo 150 owiec. W pierwszym z gospodarstw w ciągu roku liczba owiec wzrosła o 20%, lecz potem ubyło 6 owiec. W drugim z gospodarstw w ciągu tego samego roku liczba owiec wzrosła o 30%, a potem ubyła jedna owca. Pod koniec tego roku okazało się, że w obu gospodarstwach jest jednakowa liczba owiec. Ile owiec było w każdym z tych gospodarstw na początku?

2.42. W IV klasie $\frac{2}{9}$ ogólnej liczby uczniów otrzymało oceny dobre z pracy klasowej z matematyki, a 75% pozostałej liczby uczniów oceny dostateczne. Ilu uczniów było w tej klasie, jeśli wiadomo, że ocen dostatecznych z tej klasówki było o 13 więcej niż ocen dobrych?

2.43. Sklepik szkolny zakupił w hurtowni w drugim półroczu roku szkolnego długopis za kwotę o 800 zł większą niż w pierwszym półroczu. Hurtownia udziela sklepikom szkolnym 3% rabatu od zakupionego towaru. Dochód sklepiku w drugim półroczu wynosił 72 zł. Za jaką kwotę zakupił ten sklepik długopisy w pierwszym półroczu?

2.44. Ruda pierwszego gatunku zawiera 72% żelaza, a drugiego gatunku 58% żelaza. Po zmieszaniu tych rud w pewnym stosunku otrzymano rudę zawierająca 62% żelaza. Gdyby wziąć do mieszaniny z każdej rudy o 3 tony mniej niż faktycznie, wówczas otrzymana ruda zawierałaby 60,8% żelaza. Ile ton każdej z tych rud wzięto faktycznie do tej mieszaniny?

2.45. W dżungli były lwy i pelikany. Wszystkie one miały razem 760 nóg. Gdyby liczba lwów wzrosła o 2%, a liczba pelikanów zmniejszyła się o 1,25%, wówczas liczba nóg wszystkich tych stworzeń razem zwiększyłaby się o 10. Ile było w dżungli lwów, a ile pelikanów?

3. Potęgowanie liczb. Ćwiczenia w działaniach na potęgach

3.1. Podaj wartości następujących wyrażeń:

a) $(-4)^3, -4^3, (-8)^2, -8^2, (-10)^1, -10^1$;

b) b^3 dla $b=-\frac{2}{5}$, dla $b=\frac{2}{5}$;

c) $-b^3$ dla $b=-\frac{2}{5}$, dla $b=\frac{2}{7}$;

d) $3y^4$ dla $y = -0{,}3$, dla $y = 0{,}3$;

e) $-3y^4$ dla $y = -0{,}3$, dla $y = 0{,}3$.

3.2. Dla jakich wartości zmiennej t wartości następujących wyrażeń są równe:

a) $-t^2$ i $(-t)^2$; b) $-t^3$ i $(-t)^3$;

c) $-(2t)^4$ i $(-2t)^4$; d) $-(2t)^5$ i $-(2t)^5$?

3.3. Podane iloczyny zapisz w postaci potęg i oblicz je:

a) $1^2 \cdot 1^3$; b) $2^2 \cdot 2^3$; c) $3^2 \cdot 3^3$;

d) $2 \cdot 2^2$; e) $3 \cdot 3^2$; f) $(-1) \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3$;

g) $(-5) \cdot (-5)^2 \cdot (-5)^3$; h) $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$; i) $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3$;

j) $(-10)^2 \cdot (-10)^3 \cdot (-10)^4$; k) $(-0{,}1)^2 \cdot (-0{,}1)^3 \cdot (-0{,}1)^4$.

3.4. Oblicz:

a) $8^5 : 8^4$; b) $(-7)^7 : (-7)^5$; c) $(0{,}5)^8 : (0{,}5)^5$;

d) $(-0{,}5)^6 : (-0{,}5)^2$; e) $\frac{8^7}{8^5}$; f) $\frac{(-2)^7}{(-2)^2}$;

g) $\frac{(-0{,}3)^6}{(-0{,}3)^4}$; h) $\frac{(-0{,}13)^4}{(-0{,}13)^3}$; i) $-\left(\frac{1}{8}\right)^8 : (-0{,}125)^4$;

j) $(-0{,}25)^5 : \left(-\frac{1}{4}\right)^3$; k) $\frac{0{,}5^4}{0{,}5^6}$; l) $\frac{0{,}125^9}{0{,}125^{10}}$.

3.5. Wykonaj działania:

a) $b^5 : b^3$; b) $p^8 : p^4$; c) $\frac{n^9}{n^7}$;

d) $(-a)^8 : (-a)^7$; e) $\frac{(-x)^6}{(-x)^4}$; f) $\frac{(-z)^7}{(-z)^5}$;

g) $(-m)^9 : (-m)^2$; h) $(-y)^6 : y^2$; i) $(-x)^5 : x$.

3.6. Oblicz:

a) $(5^7 : 5^3) \cdot 5^4$; b) $(7^2 \cdot 7) : 7^2$; c) $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3\right] : \left(\frac{1}{5}\right)^9$;

d) $\left[(-8)^6 \cdot (-8)^2\right] : (-8)^4$; e) $(4^5 : 4^2) : (4^6 : 4^5)$;

f) $\left\{\left[(-6)^4 \cdot (-6)^3\right] : \left[(-6)^2 \cdot (-6)^3\right] : (-6)\right\}$.

3.7. Oblicz:

a) $(2 \cdot 5)^2$; b) $[(-1) \cdot (-3)]^2$; c) $[(-2) \cdot (-3)]^2$;

d) $[1 \cdot (-3)]^3$; e) $\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}\right)^2$; f) $\left[\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2$;

g) $(3 \cdot 4 \cdot 5)^2$; h) $[1 \cdot (-8)]^2$; i) $[(-1) \cdot (-2) \cdot 3]^2$;

j) $[(-1) \cdot (-2) \cdot (-3)]^2$; k) $\left[\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 5 \cdot (-2)\right]^3$; l) $\left[(-0{,}1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)\right]^3$.

3.8. Podnieś do potęgi iloczyny:

a) $(3a)^2$; b) $(-z)^3$; c) $[(-2) \cdot t]^3$;

d) $(-2x)^3$; e) $(3pq)^3$; f) $[(-3)ab]^3$;

g) $(-3ab)^3$; h) $\left(\frac{1}{3}xy\right)^4$; i) $\left(-\frac{1}{3}xy\right)^4$;

j) $\left(-\frac{2}{5}mn\right)^3$; k) $(-2xyz)^3$; l) $\left(-\frac{1}{2}abc\right)^4$.

3.9. Podane iloczyny potęg wyraź w postaci potęgi iloczynu i oblicz je:

a) $2^4 \cdot 3^4$; b) $(-1)^3 \cdot 2^3$; c) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2$;

d) $0{,}2^2 \cdot 10^2$; e) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot (-9)^2$; f) $(-3)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 2^3$;

g) $0{,}04^5 \cdot 25^5$; h) $0{,}6^4 \cdot 0{,}5^4$; i) $0{,}002^6 \cdot 50$.

3.10. Zapisz wyrażenia w postaci potęg:

a) $\frac{2^2 \cdot 4 \cdot (2^2)^4}{2^5 \cdot 2^2}$; b) $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 3^{-2} \cdot 27}{(-3^3)^2 \cdot 81} \cdot (3^2)^3$; c) $4^{-6} \cdot 4^4 \cdot (2^3 \cdot 2^{-4})^{-1}$;

d) $3^2 \cdot \frac{1}{243} \cdot (81)^2 \cdot 3^{-3}$; e) $\left(\left(\frac{1}{9} : \frac{8}{27}\right) : \frac{16}{48}\right) : \frac{81}{128}$.

3.11. Podane potęgi podnieś do potęgi i oblicz je:

a) $(2^3)^2$; b) $(3^3)^2$; c) $\left[(-2)^2\right]^3$;

d) $\left[(-3)^3\right]^2$; e) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^2$; f) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]^2$;

g) $(10^3)^2$; h) $\left[(0{,}2)^2\right]^3$; i) $\left[(-0{,}1)^4\right]^2$;

j) $\left[(-1)^5\right]^3$.

3.12. Przedstaw w najprostszej postaci:

a) $(4 \cdot b^2)^3$; b) $(-2y^3)^2$; c) $(-y^2)^3$;

d) $(-4c^2)^3$; e) $(3cd^2)^3$; f) $(-2a^2b)^3$;

g) $(-1 \cdot x^2y^2a)^3$; h) $(-x^2t^2z)^3$; i) $\left(-\frac{1}{2}a^2bc^2d\right)^2$.

3.13. Przedstaw w postaci potęg potęgi:

Przykład: $3^8=(3^2)^4=(3^4)^2=(3^1)^8=(3^8)^1$.

a) 3^4; b) 4^6; c) $(-2)^8$;

d) $(-1)^6$; e) $\left(-\frac{1}{6}\right)^4$; f) 4^3;

g) y^5.

3.14. Podnieś do potęgi ułamki:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$; b) $\left(\frac{3}{2}\right)^3$; c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$;

d) $\left(-\frac{3}{2}\right)^3$; e) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^3$; f) $\left(-1\frac{1}{4}\right)^2$;

g) $\left(-\frac{3x^2}{y}\right)^4$; h) $\left(-\frac{2a^2y}{3z}\right)^3$; i) $\left(-\frac{5a^2bc^2}{2d^2}\right)^2$.

3.15. Wykonaj działania:

a) $\frac{(2y^2)^{-2}\cdot y^5}{y^3\cdot y^{-2}}$; b) $(8x^4y^{-1}):((2x^3y^2)\cdot x)$;

c) $\left(\frac{xy^2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{x^2y}{3}\right)^2$; d) $(x^{-1}y^3)^{-2}\cdot\left(\frac{x^2}{2y}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{-2x^2}{y^3}\right)^{-4}$.

3.16. Oblicz:

a) $\frac{(4^3)^4\cdot 4^2}{(4^2)^5\cdot 4^4}$; b) $\frac{4^{12}\cdot 4^{13}}{4^{24}}+\frac{64+32}{(2^5)^2}$; c) $\frac{6^{15}\cdot 6^{11}}{6^{24}}+\frac{243\cdot 27}{(3^4)^2}$;

d) $\frac{18^{-4}\cdot 36^5}{6^{-2}\cdot 32^2}$; e) $\frac{4^6\cdot 9^5+6^9\cdot 120}{8^4\cdot 3^{12}-6^{11}}$; f) $\left(-\frac{10}{17}\right)^5\cdot\left(-\frac{51}{2}\right)^5\cdot\left(-\frac{1}{15}\right)^5$.

3.17. Podane ilorazy potęg przedstaw w postaci potęgi ilorazu:

Przykład: $\frac{a^6}{b^6}=\left(\frac{a}{b}\right)^6$.

a) $\frac{3^2}{2^2}$; b) $\frac{(-2)^3}{3^3}$; c) $\frac{(-3)^3}{7^3}$;

d) $\frac{a^4}{b^4}$; e) $\frac{(-a)^4}{y^4}$; f) $\frac{(-x)^3}{(-y)^3}$;

g) $\frac{(3a^2)^3}{(6b)^3}$; h) $-\frac{m^2}{n^2}$; i) $\frac{(-p)^3}{q^3}$.

3.18. Każde z podanych wyrażeń zapisz w postaci potęgi:

a) $a^6:[(a^5:a^3)\cdot a^2]$; b) $[x^6:(x^2\cdot x^3)]\cdot x^2$;

c) $[y^7:(y^6:y^2)]:y^2$; d) $[(b^{10}:b^7):b^2]:[b^8:(b^3\cdot b^2)]$;

e) $[b^4\cdot(b^7:b^5)]:[b\cdot(b^5:b^3)]$; f) $\{[n^5\cdot(n^3:n^2)]\cdot[n^6:(n^2\cdot n)]\}:n^5$.

3.19. Przedstaw w prostszej postaci:

a) $\left[a^3\cdot\left(a^2\right)^3\right]:\left[\left(a^4\right)^3:\left(a^3\right)^2\right]$;

b) $\left[\left(b^2\cdot b^3\right)^2:\left(b^5:b^2\right)^3\right]\cdot\left[\left(b^4\cdot b^2\right)^2:\left(b^3\cdot b^2\right)^2\right]$;

c) $\left[\left(c\cdot b^3\right)^4:\left(c\cdot b^2\right)^3\right]:\left[\left(c^2\cdot b^2\right)^3:\left(c^4\cdot b^2\right)^2\right]$;

d) $\left[\left(5xy^3\right)^3:\left(5x^4y^2\right)^2\right]\cdot\left[\left(25x^2y^2\right)^2:\left(5xy\right)^3\right]$;

e) $\left\{2ab^2\left[\left(4a^2b^3\right)^3:\left(2ab^4\right)^2\right]\right\}:\left(-2a^2b\right)^2$.

3.20. Oblicz:

a) $\dfrac{2ab}{(a+b)^2}$, jeśli $a=-0{,}3$, $b=1{,}7$;

b) $\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$, jeśli $a=15$, $b=-7$;

c) $\dfrac{1+a+a^2}{1+a-a^2}+\dfrac{b^2+b+1}{b^2-b+1}$, jeśli $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{5}$;

d) $\left(\dfrac{p^2+pq+q^2}{p^2-pq+q^2}\right)^3$, jeśli $p=1{,}5$, $q=1{,}2$;

e) $\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4xy}$, jeśli $x=1{,}7$, $y=-0{,}7$.

3.21. Oblicz:

a) $\left(9a^2b^2\right)^2:(3ab)^3$, jeśli $a=\frac{1}{3}$ i $b=3$;

b) $\left[(5pq)^3\cdot\left(5p^2q^2\right)^2\right]:\left(25p^3q^3\right)^2$, jeśli $p=-\frac{1}{5}$ i $q=\frac{2}{5}$;

c) $\left[\left(-x^2y^2\right)^3:\left(-xy\right)^2\right]:\left[\left(x^3y^3\right)^2:\left(xy\right)^3\right]$, jeśli $x=-5$ i $y=0{,}1$.

3.22. Wykonaj działania i oblicz wartość wyrażenia $\left\{\left[\left(\frac{1}{8}x^5\right):\left(\frac{1}{2}x\right)^2\right]\cdot\left(\frac{1}{4}x^3\right)\right\}:\left(\frac{1}{2}x\right)^4$ dla $x=0{,}2$.

3.23. a) Porównaj: $3{,}4$ i $3{,}4^2$ oraz $0{,}7$ i $0{,}7^2$.

b) Wykaż, że gdy a jest liczbą dodatnią, to:

1. jeśli $a>1$, to $a^2>a$;
2. jeśli $a<1$, to $a^2<a$.

☆ **3.24.** Co jest większe:

a) $0{,}5^{10}$ czy $0{,}5^{20}$?
b) 26^2-24^2 czy 27^2-25^2?
c) 345^2 czy $342\cdot 348$?
d) 4^{20} czy 2^{40}?
e) 10^{20} czy 90^{10}?
f) 9^{20} czy 27^{13}?

☆ **3.25.** Uporządkuj rosnąco liczby:

a) $32^9, 16^{12}, 63^7, 27^{11}$;

b) $2^{140}, 3^{100}, 4^{80}, 6^{60}, 11^{40}$.

☆ **3.26.** Które z wyrażeń jest większe i o ile:

a) $16\cdot 0{,}25^{3n-2} : (-0{,}5\cdot 0{,}25^{3n-4})$ czy $81\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{12-4n}\cdot 3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{4n-7}$?

b) $-4\cdot 0{,}5^{2n-7}\cdot(12\cdot 0{,}5^{10-2n})$ czy $27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5n-1} : \left[0{,}5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5n-3}\right]$?

☆ **3.27.** Co jest większe:

a) $2^{30}+3^{30}+4^{30}$ czy $3\cdot 24^{10}$?

b) $2^{18}+3^{20}$ czy 6^{10}?

c) $\frac{2^{23}+1}{2^{25}+1}$ czy $\frac{2^{25}+1}{2^{27}+1}$?

d) 19^4 czy $16\cdot 18\cdot 20\cdot 22$?

☆ **3.28.** Wykaż nierówności:

a) $297\cdot 299 < 298^2$;

b) $45^2-31^2 > 44^2-30^2$;

c) $26^3-24^3 > (26-24)^3$;

d) $(17+13)^3 > 13^3+17^3$.

★ **3.29.** Która z liczb jest większa: $3^{100}-2^{150}$ czy $3^{50}+2^{75}$?

4. Pierwiastkowanie liczb. Ćwiczenia w działaniach na pierwiastkach

4.1. Oblicz:

a) $\sqrt{4}\cdot\sqrt{16}$;

b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$;

c) $\sqrt[3]{0{,}09}\cdot\sqrt[3]{2{,}4}$;

d) $\sqrt[3]{0{,}01}\cdot\sqrt[3]{2{,}7}$;

e) $(8\cdot\sqrt[4]{5})^4$;

f) $(2{,}1\cdot\sqrt[3]{2})^3$;

g) $\sqrt[5]{32} : \sqrt[4]{81}$;

h) $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{54}$;

i) $\sqrt[6]{3^{12}}$;

j) $\sqrt[5]{7^{15}}$.

4.2. Podane liczby zapisz w postaci potęgi liczby 2:

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt[3]{2}}{8}, \frac{16}{\sqrt[6]{8}}$;

b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}, \frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$;

c) $(\sqrt[5]{4})^2, (\sqrt[4]{2})^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{8}\right)^4$;

d) $\sqrt{\sqrt{2}}, \sqrt[3]{\sqrt[3]{4}}, \sqrt[3]{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}, \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}}$.

4.3. Podane liczby zapisz w postaci potęgi liczby 3:

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt[3]{9}}{27}, \sqrt[4]{81}$;

b) $(\sqrt[3]{9})^2, (\sqrt[4]{3})^2, \left(\frac{1}{3}\cdot\sqrt{27}\right)^4$;

c) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{3}, \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}}, \frac{3^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{3}}$;

d) $\sqrt{\sqrt{3}}, \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}, \sqrt{\sqrt[3]{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}}, \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}$.

4.4. Włącz czynnik pod pierwiastek:

a) $5\sqrt{2}, 6\sqrt{3}, 7\sqrt{5}, 10\sqrt{7}$;

b) $2{,}1\sqrt{3}$; $2{,}9\sqrt{5}$; $10{,}1\sqrt{2}$;

c) $\sqrt[3]{48}$; $2\cdot\sqrt[4]{5}$; $3\cdot\sqrt[4]{7}$; $0{,}2\cdot\sqrt[3]{0{,}1}$;

d) $0{,}9\cdot\sqrt[3]{9}$; $2\cdot\sqrt[3]{0{,}2}$, $3\cdot\sqrt[3]{0{,}5}$, $0{,}2\cdot\sqrt[3]{0{,}1}$;

e) $3\cdot\sqrt[4]{0{,}1}$; $0{,}2\cdot\sqrt[3]{10}$; $0{,}3\cdot\sqrt[3]{5}$; $0{,}1\cdot\sqrt[4]{10}$.

4.5. Wyłącz największy możliwy czynnik przed pierwiastek:

a) $\sqrt{150}, \sqrt{108}, \sqrt{405}, \sqrt{250}$;

b) $\sqrt{0{,}04}, \sqrt{0{,}054}, \sqrt{0{,}06}, \sqrt{0{,}28}$;

c) $\sqrt[3]{48}, \sqrt[3]{243}, \sqrt[3]{500}, \sqrt[3]{320}$;

d) $\sqrt[3]{0{,}072}, \sqrt[3]{0{,}005}, \sqrt[3]{0{,}875}, \sqrt[3]{0{,}686}$;

e) $\sqrt[4]{1875}, \sqrt[4]{486}, \sqrt[5]{96}, \sqrt[5]{486}$.

4.6. Uprość:

a) $\sqrt{27}+6\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{320}$;

c) $\sqrt{48}-\sqrt{147}+\sqrt{108}$;

d) $\sqrt{448}+\sqrt{63}-\sqrt{252}$;

e) $\dfrac{\sqrt{80}-2\sqrt{5}}{\sqrt{245}}$;

f) $\dfrac{\sqrt{108}-\sqrt{48}+\sqrt{243}}{\sqrt{1200}}$;

g) $\dfrac{\sqrt[3]{432}+\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{128}}$;

h) $\dfrac{2\sqrt[4]{162}-3\sqrt[4]{32}}{2\cdot\sqrt[4]{1250}}$.

4.7. Oblicz:

a) $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{0{,}125}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt{\dfrac{36}{25}}$, $\sqrt[3]{2\dfrac{10}{27}}$, $\left(\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\right)^2$;

b) $\sqrt[3]{8\cdot 27}$, $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{6^5\cdot 3^5}$, $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{72\cdot 18}$, $\sqrt{27}\cdot\sqrt{12}$;

c) $\sqrt[5]{7^3\cdot 2^2}\cdot\sqrt[5]{7^2\cdot 2^3}$, $\sqrt{8\sqrt{4}\cdot\sqrt[3]{64}}$, $\sqrt{\sqrt{16}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$, $\sqrt[7]{64\sqrt[3]{8}}$.

4.8. Znajdź liczby $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l$ takie, że:

a) $\sqrt{a}=\dfrac{3}{4}$;

b) $\sqrt{b}=\dfrac{4}{5}$;

c) $\sqrt[3]{c}=\dfrac{2}{7}$;

d) $\sqrt[3]{d}=\dfrac{6}{5}$;

e) $\sqrt[3]{e}=0{,}2$;

f) $\sqrt[4]{f}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$;

g) $\sqrt[4]{g}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

h) $5^h=625$;

i) $6^i=216$;

j) $\sqrt[5]{j}=\dfrac{1}{10}$;

k) $\sqrt[k]{27}=3$;

l) $\sqrt[l]{49}=7$.

4.9. Porównaj podane liczby:

a) $\sqrt{73}$ i $4\sqrt{6}$;

b) $2\sqrt{8}$ i $\sqrt{33}$;

c) $5\sqrt{3}$ i $6\sqrt{2}$;

d) $3\sqrt{18}$ i $10\sqrt{2}$;

e) $2\sqrt{72}$ i $3\sqrt{18}$;

f) $4\sqrt[3]{54}$ i $2\sqrt[3]{250}$;

g) $3\sqrt[3]{7}$ i $\sqrt[3]{190}$;

h) $2\sqrt[3]{5}$ i $\sqrt[3]{39}$.

4.10. Oblicz:

a) $\sqrt[4]{9\sqrt{81}}$; b) $\dfrac{\sqrt[7]{128}\cdot\sqrt[5]{32}}{\sqrt{81}\cdot\sqrt[3]{64}}$; c) $\sqrt[7]{64\sqrt[3]{8}}$; d) $\sqrt[5]{\dfrac{49^2\cdot 7^3\cdot 343^2}{128^4\cdot 32}}$.

4.11. Uprość:

a) $\sqrt{12}+\sqrt{48}-\sqrt{108}$; b) $5\sqrt{\dfrac{1}{5}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{20}-\dfrac{5}{4}\sqrt{20}$;

c) $\sqrt[3]{48}+\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{384}-\sqrt[3]{40}$; d) $2\sqrt{18}+3\sqrt{8}+3\sqrt{32}-\sqrt{50}$;

e) $\left(12\sqrt{50}-8\sqrt{200}+7\sqrt{450}\right):\sqrt{10}$; f) $\left(2\sqrt{8}-4\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\dfrac{1}{3}\sqrt{12}\right)\cdot\sqrt{6}$.

4.12. Oblicz:

a) $\sqrt{27}-\sqrt{12}+\sqrt{48}$; b) $2\sqrt{32}+3\sqrt{18}-\sqrt{72}$;

c) $4\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{128}$; d) $2\sqrt[3]{24}+4\sqrt[3]{81}-14\sqrt[3]{3}$;

e) $\sqrt{2}\left(4\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}\right)$; f) $\sqrt{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{24}+3\sqrt{54}\right)$;

g) $\sqrt{3}\left(3\sqrt{24}-4\sqrt{6}+5\sqrt{54}\right)$; h) $\sqrt{10}\left(2\sqrt{20}-7\sqrt{8}-4\sqrt{5}-2\sqrt{18}\right)$;

i) $\left(3\sqrt{50}+2\sqrt{8}-\sqrt{32}\right):\sqrt{2}$; j) $\left(6\sqrt{24}-2\sqrt{54}+\sqrt{96}\right):\sqrt{3}$;

k) $\left(8\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{128}\right):\sqrt[3]{2}$; l) $\left(4\sqrt[3]{625}-3\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{320}\right):\sqrt[3]{5}$;

m) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}:\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$.

4.13. Doprowadź do najprostszej postaci:

a) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-2\right)^2}+\sqrt[6]{4}$;

b) $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt[6]{27}$;

c) $\dfrac{1}{3}\sqrt{108}-\sqrt{1\dfrac{1}{4}}-\sqrt{75}-5\cdot\sqrt{0,2}+\dfrac{9}{\sqrt{3}}+\sqrt{11,25}$;

d) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{4,5}-\sqrt{12,5}-\dfrac{3}{4}\sqrt{200}+6\sqrt{1\dfrac{1}{8}}+\sqrt{24,5}$;

e) $\left(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{1,6}+3\sqrt{0,4}\right)$;

f) $\left(4\cdot\sqrt{\dfrac{1}{3}}+\sqrt{2}+\sqrt{3\dfrac{1}{3}}\right)\left(\sqrt{1\dfrac{1}{5}}+\sqrt{2}-4\sqrt{\dfrac{1}{5}}\right)$.

4.14. Uprość wyrażenia, wiedząc, że $a>0$ i $b>0$:

a) $\sqrt[4]{a^8}$; b) $\sqrt[10]{a^{50}}$;

c) $\sqrt[6]{a^2b^3}$; d) $\sqrt[12]{a^4b^6}$;

e) $\sqrt[5]{a^8\cdot b^{13}}\cdot\sqrt[5]{a^2\cdot b^2}$; f) $\sqrt[3]{a^2b^5}\cdot\sqrt[3]{a^4b^4}$;

g) $\dfrac{\sqrt[4]{a^5\cdot b^{13}}}{\sqrt[4]{ab}}$; h) $\dfrac{\sqrt{ab^3}\cdot\sqrt[4]{a^2b^8}}{a\cdot\sqrt{65}}$;

i) $\left(\sqrt[4]{a^2}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt[4]{a^2}+\sqrt{b}\right)$; j) $\sqrt[3]{4b^4}\cdot\sqrt[3]{16\cdot 6^5}$;

k) $\sqrt[3]{a^3+a^3+a^3+a^3+a^3+a^3+a^3+a^3}$.

4.15. Włącz czynnik pod pierwiastek $(x, y > 0)$:

a) $x\sqrt{2x}, 3x\sqrt{2}, 5x\cdot\sqrt{\frac{2}{25}}$; b) $3xy\cdot\frac{2}{xy}, \frac{5x}{3y}\cdot\sqrt{\frac{3y}{5x}}, \frac{2}{5}x^2y\cdot\sqrt{7y^3}$;

c) $\frac{1}{2}x\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{y}}, 3xy\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{y}}, \frac{3}{4}y^2\sqrt[3]{101}$; d) $0{,}5x^2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}, \frac{x^3}{y^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{y^7}{x^{26}}}, \frac{2x^2}{3y}\cdot\sqrt[3]{\frac{xy^2}{2}}$.

4.16. Wyłącz czynnik przed pierwiastek $(a, b, c > 0)$:

a) $\sqrt{a^3b^5}, \sqrt{a^3\cdot b\cdot c^5}, \sqrt{a^5(b+c)}, \sqrt{a^7b^3(a+c)}$;

b) $\sqrt{a^4b^6c^8}, \sqrt{\frac{16a^4}{b^2c^3}}, \sqrt{\frac{a^5b^3}{9c^2}}, \sqrt{\frac{\pi^2a^3}{b^5}}$;

c) $\sqrt[3]{a^6b^4}, \sqrt[3]{\frac{b^8c^3}{8}}, \sqrt[3]{a^3b^7(a+b)}, \sqrt[3]{\frac{bc^3}{27b^3}}$;

d) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}a^7c^4}, \sqrt[4]{a^{15}b^{17}c^{19}}, \sqrt[4]{\frac{a^8b^7}{625c^6}}, \sqrt[5]{a^{26}b^{36}c^{42}}$.

4.17. Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

a) $\frac{3}{\sqrt{7}}$; b) $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$; c) $\frac{3-2\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$;

d) $\frac{2}{\sqrt{5}-3}$; e) $\frac{2+3\sqrt{5}}{-2-\sqrt{5}}$; f) $\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$;

g) $\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; h) $\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; i) $\frac{3-2\sqrt{6}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{5}}$;

j) $\frac{7-2\sqrt{8}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$; k) $\frac{2\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; l) $\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

4.18. Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

a) $\frac{6}{4+\sqrt{7}}$; b) $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$; c) $\frac{15}{7-\sqrt{6}}$;

d) $\frac{\sqrt{3}}{8-2\sqrt{5}}$; e) $\frac{12}{6+\sqrt{3}}$; f) $\frac{\sqrt{8}}{6+2\sqrt{7}}$;

g) $\frac{3}{\sqrt{11}-4\sqrt{2}}$; h) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; i) $\frac{\sqrt{7}}{11-3\sqrt{7}}$;

j) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; k) $\frac{4+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$; l) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{3}}$;

m) $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$; n) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$; o) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$;

p) $\dfrac{4}{2-\sqrt{2}}$; r) $\dfrac{1}{2\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{32}}$; s) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}-\sqrt{2}}$;

t) $\dfrac{-\sqrt{5}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt{8}}$; u) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{18}-\sqrt{8}}$.

☆ **4.19.** Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$; c) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{49}}$; d) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; e) $\dfrac{2}{2\sqrt{2}-1}$;

f) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$; g) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; h) $\dfrac{4\sqrt{30}}{\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7}}$; i) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$.

☆ **4.20.** Co jest większe:

a) $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ czy $\sqrt{3}+\sqrt{19}$? b) $\sqrt{11}-\sqrt{10}$ czy $\sqrt{6}-\sqrt{5}$?

c) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ czy $\dfrac{2}{1-\sqrt{2}}$? d) $\dfrac{\sqrt[4]{27\cdot\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[6]{9\cdot 3^3\cdot\sqrt{3}}}$ czy 1?

☆ **4.21.** Oblicz bez użycia tablic:

a) $\sqrt{820964657041}-\left(\sqrt{5558702161}+\sqrt{350419009444}\right)$;

b) $\sqrt{54756}\cdot\sqrt{89908324}-\sqrt{56169}\cdot\sqrt{37319881}$;

c) $\sqrt{49126081}+\dfrac{2+\sqrt{4048144}}{\sqrt{1014049}}+\sqrt{259081}$;

d) $\sqrt{9960336}-\sqrt{4562496}-2\cdot\dfrac{\sqrt{831744}+\sqrt{4624}}{\sqrt{9604}}$;

e) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{32}}{2\sqrt{2}-2}\right)^3-\left[\dfrac{6+5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}-\dfrac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)^2\right]$.

4.22. Oblicz:

a) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4+2\sqrt{3}}$; b) $\sqrt{2\sqrt{5}+\sqrt{8}}\cdot\sqrt{2\sqrt{5}-\sqrt{8}}$;

c) $\sqrt{6-3\sqrt{3}}\cdot\sqrt{6+3\sqrt{3}}$; d) $\sqrt{\left(2\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(2\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}$;

e) $\sqrt[3]{16-2\sqrt{10}}\cdot\sqrt[3]{16+2\sqrt{10}}$; f) $\sqrt[3]{10-3\sqrt{7}}\cdot\sqrt[3]{10+3\sqrt{7}}$;

g) $\sqrt[4]{7\sqrt{3}-\sqrt{66}}\cdot\sqrt[4]{7\sqrt{3}+\sqrt{66}}$.

4.23. Oblicz:

a) $\dfrac{1}{7\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{7\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{2}{2\sqrt{3}+3}-\dfrac{2}{2\sqrt{3}-3}$;

c) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; d) $\dfrac{\sqrt{7}}{2-3\sqrt{7}}+\dfrac{2}{3\sqrt{7}+2}$;

e) $\dfrac{3\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}-\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$; f) $\dfrac{2\sqrt{7}-3\sqrt{6}}{2\sqrt{7}+3\sqrt{6}}-\dfrac{2\sqrt{7}+3\sqrt{6}}{2\sqrt{7}-3\sqrt{6}}$.

5. Przekształcanie wyrażeń algebraicznych

5.1. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

a) $(2x-5y)(3x+4y)-6(x+2y)^2$;

b) $0{,}1\left[2(3a-b)^2-3(a-2b)^2-10b^2\right]-1{,}5a^2$;

c) $2\left[2(2x-1)(2x+1)-(1-2x)^2\right]-(2x+3)^2$;

d) $\frac{1}{4}\left[4\left(\frac{1}{2}p-q\right)^2-(p+2q)(p-2q)\right]-2(q-p)^2+1$;

e) $-\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{6}\left[(3x-1)^2-(3x+1)^2\right]-3(x+2)(x-2)\right\}-8(x-1)$.

5.2. Sprowadź do najprostszej postaci sumy algebraiczne:

a) $(x+4y)(x-5y)+(x+y)^2$;

b) $(x-2y)(x+3y)-(x-2y)^2$;

c) $(3p-5q)(3p+5q)-2(p+8q)^2$;

d) $0{,}1\cdot\left[2\cdot(3r-s)^2-3(3r-2s)^2+10s^2\right]-1{,}5r^2$;

5.3. Każdy z podanych iloczynów zapisz w postaci potęgi:

a) $(b+4)(b+4)$;
b) $(x+y-z)(x+y-z)$;
c) $(q-7)\cdot(q-7)\cdot(q-7)\cdot(q-7)$;
d) $(3a+2b+1)(3a+2b+1)(3a+2b+1)$.

5.4. Każdą z podanych potęg zapisz w postaci iloczynu:

a) $(a-7)^2$;
b) $(4+y)^3$;
c) $(a-b)^4$;
d) $(a+b+c)^2$.

5.5. Przekształć potęgi na sumy algebraiczne:

a) $(a+4)^2$;
b) $(c+7)^2$;
c) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$;
d) $(d+0{,}2)^2$;
e) $\left(p+\frac{4}{3}\right)^2$;
f) $(2q+1)^2$;
g) $(3m+2)^2$;
h) $(p+q^2)^2$;
i) $(m^2+n^2)^2$;
j) $\left(\frac{1}{3}x+2y\right)^2$;
k) $\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{3}n\right)^2$;
l) $(0{,}2x+0{,}1y)^2$.

5.6. Przekształć potęgi na sumy algebraiczne:

a) $(x+y)^3$, $(2x+y)^3$, $\left(3a+\frac{1}{3}b\right)^3$, $(a^2b+c^3)^3$;

b) $(x-y)^3$, $(x-2y)^3$, $\left(\frac{1}{3}a-3b\right)^3$, $(ab^2-c^2)^3$.

5.7. Przekształć iloczyny na sumy algebraiczne:

a) $(a+b)(a-b)$;
b) $(x+3)(x-3)$;
c) $(5p+3q)(5p-3q)$;
d) $(2m+5n)(2m-5n)$;

e) $\left(-\frac{1}{2}x+2y\right)\left(\frac{1}{2}x+2y\right)$; f) $(0{,}1a+6b)(0{,}1a-6b)$;

g) $\left(\frac{2}{5}d-\frac{3}{4}c\right)\left(\frac{2}{5}d+\frac{3}{4}c\right)$; h) $(xy-3z)(xy+32)$.

5.8. Przekształć iloczyny na sumy algebraiczne:

a) $(m+n)(m-n)$, $(a+3)(a-3)$, $(2x+5y)(2x-5y)$,

$(0{,}1a+6b)(0{,}1a-6b)$, $\left(-\frac{1}{2}x+2y\right)\left(\frac{1}{2}x+2y\right)$, $\left(\frac{2}{5}a-\frac{3}{4}b\right)\left(\frac{2}{5}a+\frac{3}{4}b\right)$;

b) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$, $(3x+1)(9x^2-3x+1)$;

c) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$, $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$, $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}xy+\frac{1}{9}y^2\right)$.

5.9. Oblicz w pamięci:

a) 14^2; b) 22^2; c) 31^2;
d) 41^2; e) 52^2; f) 53^2;
g) 102^2; h) $10{,}1^2$.

5.10. Przekształć sumy algebraiczne na iloczyny:

a) $a^2+2ab+b^2$; b) p^2+6p+9; c) $q^2+12q+36$;

d) $x^2+4xy+4y^2$; e) $m^2+6mn+9n^2$; f) $9a^2+12ab+4b^2$;

g) $16x^2+8xy+y^2$; h) $4p^2+8pq+4q^2$; i) $\frac{1}{4}x^2+xy+y^2$;

j) $m^2+\frac{2}{3}mn+\frac{1}{g}n^2$; k) $\frac{1}{8}r^2+\frac{1}{3}rs+\frac{1}{4}s^2$; l) $k^4+2k^2l^2+l^4$.

5.11. Przekształć sumy algebraiczne na iloczyny:

a) $2x^2+4xy+2y^2$; b) $3x^2+6xy+3y^2$; c) $8a^2+16ab+8b^2$;

d) $2a^2+12ab+18b^2$; e) $12m^2+60mn+75n^2$; f) $18r^2+48rs+32s^2$;

g) $20p^2+60pq+45q^2$; h) $8z^4+24z^2t^2+18t^4$.

5.12. Przekształć sumy algebraiczne na iloczyny:

a) $m^2-2mn+n^2$; b) b^2-4b+4; c) c^2-6c+9;

d) $x^2-10xy+25y$; e) $25p^2-60pq+36q^2$; f) $p^2-\frac{2}{3}pq+\frac{1}{9}q^2$;

g) $0{,}01m^2-mn+25n^2$; h) $a^4-4a^2b^2+4b^4$; i) $9x^4-24x^2y^2+16y^4$;

j) $49a^2-14a+1$.

5.13. Przekształć sumy algebraiczne na iloczyny:

a) $x^2+12x+36$, $a^2+4ab+4b^2$, $16x^2+8xy+y^2$, $4x^2+12xy+9y^2$;

b) $8x^2+16xy+8y^2$, $2x^2+12xy+18y^2$, $8a^4+24a^2b^2+18b^4$;

c) $x^2-10xy+25y^2$, $9x^2-12xy+4y^2$, $a^2-\frac{2}{3}ab+\frac{1}{9}b^2$, $0{,}01x^2-xy+25y^2$;

d) $5x^2-10xy+5y^2$, $3a^2-12ab+12b^2$, $18x^4-48x^2y^2+32y^4$.

5.14. Przekształć potęgi na sumy algebraiczne:

a) $(y-4)^2$; b) $(7-x)^2$; c) $(3-a)^2$;

d) $(p-q)^2$; e) $(4b-3)^2$; f) $(7-3a)^2$;

g) $(2k-5l)^2$; h) $(kl-2)^2$; i) $(3mn-4s)^2$;

j) $(b^2-3)^2$; k) $(2c^2-d^2)^2$; l) $\left(\frac{1}{2}ab-4c^2\right)^2$.

5.15. Przekształć potęgi na sumy algebraiczne:

a) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$, $(3x+2)^2$, $(x^2+y)^2$, $(a^2+b^2)^2$, $(0{,}1a+10b)^2$;

b) $(x-3)^2$, $(2x-5y)^2$, $(ab-2)^2$, $\left(\frac{1}{2}ab-4\right)^2$, $(2x^2-y^2)^2$.

5.16. Oblicz w pamięci:

a) 18^2; b) 27^2; c) 39^2;

d) 58^2; e) 89^2; f) 98^2;

g) $0{,}99^2$; h) 999^2.

5.17. Oblicz w pamięci:

a) $17 \cdot 23$; b) $28 \cdot 32$; c) $38 \cdot 42$;

d) $63 \cdot 57$; e) $72 \cdot 68$; f) $78 \cdot 82$;

g) $98 \cdot 102$; h) $10{,}1 \cdot 9{,}99$.

5.18. Oblicz, nie podnosząc do kwadratu:

a) 35^2-36^2; b) $10{,}5^2-0{,}5^2$; c) 322^2-320^2;

d) $99{,}8^2-0{,}2^2$; e) $\left(4\frac{1}{6}\right)^2-\left(1\frac{1}{6}\right)^2$.

5.19. Przekształć sumy algebraiczne na iloczyny:

a) z^2-t^2; b) m^2-25; c) $16-t^2$;

d) $16m^2-1$; e) c^2-4m^2; f) $25a^2-16b^2$;

g) $x^2y^2-9c^2$; h) $-25x^2y^2+4$; i) $-36a^2b^2+25c^2$;

j) t^4-1; k) k^4-l^4; l) $16b^4-1$.

5.20. Przekształć sumy algebraiczne na iloczyny:

a) $6x^2-2b^2$; b) $14t^2-3y^2$; c) $20m^2-45n^2$;

d) $\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}q^2$; e) $\frac{1}{4}x^2-\frac{9}{4}t^2$; f) $\frac{4}{3}r^2-\frac{2}{27}s^2$;

g) ax^2-ay^2; h) $3px^2-12py^2$; i) x^3-4x;

j) $2a^3-8a$.

5.21. Przekształć sumy na iloczyny:

a) $ac+2a^2+3bc+6ab$; b) $15+20a+6c+8ac$;

c) $x^2y^2+3x^3+2y^3+6xy$; d) $2m^2+3m+2mn^3+3n^3$;

e) $7p^3+2q^3+7pq^2+2qp^2$; f) $q^2+3p^2q+15p^3+5pq$;

g) $2mn^2-mn+2m^2-n^3$; h) $6x-3xy+2y-y^2$.

5.22. Przedstaw sumy w postaci iloczynu:

a) $6a+3a^2-2b-ab$;
b) $21x+7x^2-xy-3y$;
c) $q^2-qp^2-3pq+3p^3$;
d) $yx^2+y^3+2xy^2+2x^3$;
e) $14r^2+21r-2rs-3s$;
f) $-t^4+2zt-8zt^3+16z^2$;
g) $-3pq^2+2rp^2+3p^3-2rq^2$;
h) $12-8x-15z+10xz$.

5.23. Rozłóż wyrażenia na czynniki:

a) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$;
b) $x^3+y^3+z^3-3xyz$;
c) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$;
d) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$;
e) $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$;
f) x^4+4;
g) x^8+x^4+1.

5.24. Przekształć sumy algebraiczne na iloczyny:

a) x^2-4y^2, $9x^2-y^2$, $-36a^2b^2+25c^2$, x^4-y^4, $16a^4-1$;

b) $20x^2-45y^2$, $\frac{1}{2}a^2-\frac{9}{2}b^2$, $2x^4-32$, x^3-4x, a^3-8a.

★ **5.25.** Wykaż, że jeżeli n jest całkowitą liczbą dodatnią oraz $x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ i $y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, to $x^y=y^x$.

★ **5.26.** Udowodnij, że jeżeli $x+y+z=xyz$, to
$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz$.

★ **5.27.** Udowodnij, że jeżeli $x+y+z=0$, to $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

★ **5.28.** Wykaż, że jeżeli $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=0$, to $(x+y+z)^3=27xyz$.

★ **5.29.** Wykaż, że jeżeli liczby x, y, z są parami różne i spełniają warunek:
$(x-y)\cdot\sqrt[3]{1-z^3}+(y-z)\cdot\sqrt[3]{1-x^3}+(z-x)\cdot\sqrt[3]{1-y^3}=0$, to:
$(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)=(1-xyz)^3$.

★ **5.30.** Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, p, q są różne od zera oraz $p+q=1$, to:
$\frac{p}{a}+\frac{q}{b}=\frac{1}{pa+qb}$.

★ **5.31.** Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c, p, q, r są dodatnie oraz:
$p+q+r=1$ i $\frac{p}{a}+\frac{q}{b}+\frac{r}{c}=\frac{1}{pa+qb+rc}$, to $a=b=c$.

★ **5.32.** Wykaż, że jeżeli równość $a^n+b^n+c^n=0$ zachodzi dla $n=1$ i dla $n=3$, to zachodzi dla każdej naturalnej liczby nieparzystej n.

★ **5.33.** Udowodnij, że jeżeli $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=(a+b+c)^{-1}$, to $(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)=0$.

★ **5.34.** Udowodnij, że jeżeli $b=a-1$, to dla każdej liczby dodatniej naturalnej n zachodzi równość $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\dots\left(a^{2^{n-1}}+b^{2^{n-1}}\right)=a^{2^n}-b^{2^n}$.

☆ **5.35.** Przedstaw w najprostszej postaci wyrażenie $\dfrac{a^2+1}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2-1}{2a}\right)^2+1}}$.

☆ **5.36.** Wykonaj działania $\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\dfrac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}$.

☆ **5.37.** Wyznacz wartość ułamka $\dfrac{a+b}{a-b}$, jeśli $2a^2+2b^2=5ab$ i $b>a>0$.

☆ **5.38.** Przedstaw w najprostszej postaci wyrażenia:
$A=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}$; $B=2\sqrt{160\sqrt{12}}+3\sqrt{20\sqrt{48}}-4\cdot\sqrt[4]{75}-4\sqrt{60\sqrt{27}}$.

☆ **5.39.** Uprość wyrażenie $A=\dfrac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}}$, jeśli $x=\dfrac{2mn}{1+n^2}$, $m>0$, $n>0$.

☆ **5.40.** Oblicz:
a) $12345678^2-12345677\cdot 12345679$;
b) $876543^3-876542\cdot 876543\cdot 876544$;
c) $\dfrac{423134\cdot 846267-423133}{423133\cdot 846267+423134}$;
d) $\dfrac{5932\cdot 6001-69}{5932+6001\cdot 5931}$.

★ **5.41.** Udowodnij, że jeżeli $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$, to $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$.

★ **5.42.** Wykaż, że $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1$.

★ **5.43.** Udowodnij, że jeżeli $ax^3=by^3=cz^3$ i $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$, to:
$\sqrt[3]{ax^3+by^3+cz^3}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$.

6. Zasada indukcji matematycznej. Dowodzenie przez indukcję matematyczną

6.1. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od 1 zachodzą równości:
a) $1+5+9+\ldots+(4n-3)=n(2n-1)$;
b) $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$;
c) $1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n=-n$;
d) $1+3+6+\ldots+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$;
e) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$;
f) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$;
g) $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$;
h) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}-\dfrac{4}{2^4}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{1}{9}\left(2+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{3n+2}{2^n}\right)$;

i) $\frac{1\cdot d!}{d}+\frac{2\cdot(d+1)!}{d^2}+\frac{3\cdot(d+2)!}{d^3}+\ldots+\frac{n\cdot(d+n-1)!}{d^n}=\frac{(n+d)!}{d^n}-d!$, gdzie $d\in \mathbf{N}$;

j) $1+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^{n-1}}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$;

k) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}$.

★ 6.2. Udowodnij, że:

a) $\bigwedge_{n\geqslant 1} 2^n>n$;

b) $\bigwedge_{n\geqslant 3} 2^{n(n-1)}>(n!)^2$;

c) $\bigwedge_{n\geqslant 4} 2^n<n!$;

d) $\bigwedge_{n\geqslant 1} n!\leqslant\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$;

e) $\bigwedge_{n\geqslant 1} (n!)^2\geqslant n^n$;

f) $\bigwedge_{n\geqslant 2} \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$;

g) $\bigwedge_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$;

h) $\bigwedge_{n\geqslant 7} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<\sqrt{n}$;

i) $\bigwedge_{n\geqslant 1} 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}$;

j) $\bigwedge_{n\geqslant 1} \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$;

k) $\bigwedge_{n\geqslant 3} 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}>n!$;

l) $\bigwedge_{n\geqslant 1} \frac{4^n}{2\sqrt{n}}\leqslant\binom{2n}{n}$;

m) $\bigwedge_{n\geqslant 2} 2!4!6!\ldots(2n)!>((n+1)!)^n$.

★ 6.3. Udowodnij, że:

a) $\bigwedge_{n\geqslant 1} 10\,|\,3^{4n-2}+1$;

b) $\bigwedge_{n\geqslant 1} 8\,|\,5^{2n-1}+3$;

c) $\bigwedge_{n\geqslant 0} 7\,|\,2^{n+2}+3^{2n+1}$;

d) $\bigwedge_{n\geqslant 1} 14\,|\,3^{4n-2}+5^{2n-1}$;

e) $\bigwedge_{n\geqslant 0} 11\,|\,2^{6n+1}+9^{n+1}$;

f) $\bigwedge_{n\geqslant 1} 11\,|\,6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1}$;

g) $\bigwedge_{n\geqslant 1} 19\,|\,3^{3n-1}+5\cdot 2^{3n-2}$;

h) $\bigwedge_{n\geqslant 0} 7\,|\,10^{3n+1}-3(-1)^n$;

i) $\bigwedge_{n\geqslant 0} 64\,|\,3^{2n+1}+40n-67$;

j) $\bigwedge_{n\geqslant 0} 25\,|\,2^{n+2}\cdot 3^n+5n-4$;

k) $\bigwedge_{n\geqslant 0} 8\,|\,5^{n+1}+2\cdot 3^n+1$;

l) $\bigwedge_{n\geqslant 1} 38\,|\,5^{2n-1}\cdot 2^{n+1}+3^{n+1}\cdot 2^{2n-1}$;

m) $\bigwedge_{n\geqslant 1} 17\,|\,3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$;

n) $\bigwedge_{n\geqslant 0} 169\,|\,3^{3n+3}-26n-27$.

★ 6.4. Udowodnij, że:

a) $\bigwedge_{n\in N}\left(3^{n+1}\,|\,2^{3^n}+1 \text{ i } 3^{n+2}\nmid 2^{3^n}+1\right)$; b) $\bigwedge_{n\geqslant 1} 21\,|\,2^{4^n}+5$.

★ 6.5. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od 1 i dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość:

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=$$
$$=(-1)^n\cdot\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}.$$

★ **6.6.** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od 2 zachodzi równość:
$h(1)+h(2)+h(3)+\ldots+h(n-1)=n(h(n)-1)$, gdzie $h(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$.

★ **6.7.** Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od 1 zachodzi równość:
$$\left(x^2-x+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+1\right)=\frac{x^{2^{n+1}}+x^{2^n}+1}{x^2+x+1}.$$

★ **6.8.** Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą ($p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7$, $p_5=11$ itd.). Udowodnij, że $\bigwedge_{n\geqslant 12} p_n>3n$.

★ **6.9.** Udowodnij, że jeżeli p jest dowolną liczbą pierwszą, zaś n dowolną liczbą całkowitą, to liczba n^p-n jest podzielna przez p.

★ **6.10.** Udowodnij, że jeżeli n jest dowolną liczbą całkowitą niepodzielną przez liczbę pierwszą p, to liczba $n^{p-1}-1$ jest podzielna przez p (jest to tzw. małe twierdzenie Fermata).

★ **6.11.** Udowodnij, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, to liczba
$1^{p-1}+2^{p-1}+3^{p-1}+\ldots+(p-1)^{p-1}+1$ jest podzielna przez p.

★ **6.12.** Wykaż, że jeżeli liczby p i q są pierwsze, to liczba $p^{q-1}+q^{p-1}-1$ jest podzielna przez $p\cdot q$.

★ **6.13.** Udowodnij, że $83\left|\left(2\cdot5^7-5\cdot2^7\right)^{83}-\left(2\cdot5^7\right)^{83}+\left(5\cdot2^7\right)^{83}\right.$.

★ **6.14.** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby całkowitej k takiej, że $0\leqslant k\leqslant n$, liczba $\binom{n}{k}$ jest całkowita.

★ **6.15.** Wykaż, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, zaś k dowolną liczbą całkowitą taką, że $1\leqslant k\leqslant p-1$, to liczba $\binom{p}{k}$ jest podzielna przez p.

★ **6.16.** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od 4 liczby W_n, S_n i K_n oznaczające odpowiednio liczbę wierzchołków, ścian i krawędzi n-ścianu wypukłego spełniają równość $W_n+S_n-K_n=2$ (wzór Eulera).

7. Trójkąt Pascala i wzór dwumianowy Newtona

7.1. Rozwiń potęgi dwumianów:

a) $(2x+1)^4$; b) $(3x+2y)^5$; c) $\left(\frac{1}{2}-2x\right)^6$; d) $\left(a^5-b^3\right)^5$;

e) $\left(2x^3-1\right)^5$; f) $\left(1+\frac{2}{3}x^5\right)^3$; g) $\left(x^{-1}+y^{-2}\right)^4$; h) $\left(2x^{-2}+3x^{-3}\right)^5$;

i) $\left(\frac{1}{2}a^{-3}b^2+\frac{2}{3}ab^{-3}\right)^6$; j) $\left(\frac{2a}{3b}-\frac{3b}{2a}\right)^6$; k) $\left(\sqrt{2x}-\sqrt{3y}\right)^4$.

7.2. Napisz wzór na ogólny wyraz rozwinięcia dwumianu:

a) $\left(2a^2+3a\right)^7$; b) $(3x-2y)^9$; c) $\left(\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[4]{ab^3}\right)^8$;

d) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a+\sqrt{\frac{3}{4}}x\right)^6$; e) $\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)^6$; f) $\left(x^2-2x^{-1}\right)^{30}$.

7.3. Znajdź sumę lub różnicę potęg:

a) $(1+x)^7+(1-x)^7$; b) $(1+x)^7-(1-x)^7$;

c) $(2a+3b)^6+(2a-3b)^6$; d) $(2a+3b)^6-(2a-3b)^6$.

7.4. Znajdź w rozwinięciu dwumianu:

a) $(a+b)^{20}$ wyraz piąty; b) $(a+b)^{21}$ wyraz jedenasty;

c) $\left(3+2x^2\right)^9$ wyraz szósty; d) $\left(a^2-3x^5\right)^{20}$ wyraz dwunasty.

7.5. Jakie są współczynniki wyrazów w rozwinięciach:

a) $(a+b)^9$ przy a^5b^4; b) $(x+y)^{14}$ przy $x^{10}y^4$;

c) $(2a+3b)^8$ przy a^5b^3; d) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{11}$ przy x^4 ?

7.6. Wyznacz wyrazy zawierające:

a) x i x^{16} w rozwinięciu $\left(\frac{a}{2x^2}-\frac{2x^3}{a}\right)^{12}$; b) x w rozwinięciu $\left(\frac{x}{2a}-\frac{2b}{x}\right)^{13}$;

c) x^{-2} w rozwinięciu $\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x^2}\right)^7$; d) x^{-4} w rozwinięciu $\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x^2}\right)^{11}$.

7.7. Ile wyrazów wymiernych zawiera rozwinięcie dwumianu $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{100}$?

7.8. W rozwinięciu dwumianu $\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^9$ znajdź wyraz zawierający x^4.

7.9. W rozwinięciu dwumianu $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x\sqrt{x}}\right)^{12}$ znajdź wyraz niezawierający x.

★ **7.10.** Znajdź wyrazy wymierne rozwinięcia dwumianów:

a) $\left(\sqrt[3]{a^2}+\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\right)^{60}$; b) $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[7]{x}\right)^{13}$; c) $\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[9]{x}\right)^{21}$; d) $\left(\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$.

★ **7.11.** W rozwinięciu dwumianu $\left(3x+\frac{1}{3x^2}\right)^6$ znajdź wyraz, który ma stałą wartość przy wszystkich dopuszczalnych wartościach x.

★ **7.12.** Wyznacz największy współczynnik rozwinięcia dwumianu $\left(2x+\frac{1}{4}y\right)^{50}$.

IV. Liczby rzeczywiste

Podzielność

Dzielnik	Cecha podzielności
2	ostatnią cyfrą liczby naturalnej jest 0, 2, 4, 6 albo 8
3	suma cyfr liczby naturalnej dzieli się przez 3
4	liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby naturalnej dzieli się przez 4
5	ostatnią cyfrą liczby naturalnej jest 0 albo 5
6	liczba naturalna jest podzielna przez 2 i 3
8	liczba utworzona przez trzy ostatnie cyfry liczby naturalnej dzieli się przez 8
9	suma cyfr liczby naturalnej dzieli się przez 9

Największym wspólnym dzielnikiem liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ jest największa liczba naturalna, która dzieli każdą z liczb $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.
Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ jest najmniejsza liczba naturalna, która dzieli się przez każdą z liczb $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Dwie liczby naturalne są względnie pierwsze, gdy ich największy wspólny dzielnik jest równy 1.

Nierówności

Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ zachodzą nierówności:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \ldots \cdot a_n^2}{n}}$$

przy czym równość w każdej z tych nierówności ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x oznaczamy symbolem $|x|$.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$$

Podstawowe własności wartości bezwzględnej:

$|x| \geqslant 0$, $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $|x-y| \leqslant |x|+|y|$,

$|x| = |-x|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$, $||x|-|y|| \leqslant |x+y|$,

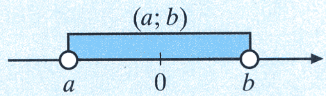
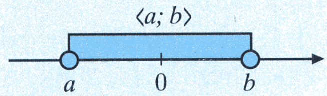
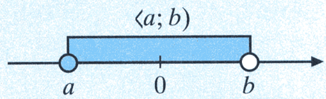
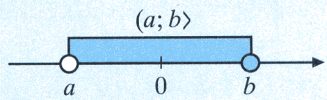
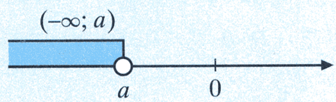
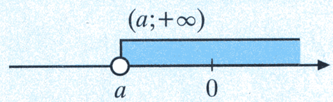
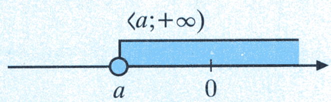
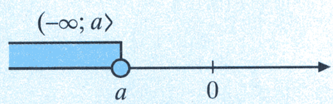
$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$, $|x+y| \leqslant |x|+|y|$, $||x|-|y|| \leqslant |x-y|$.

Błąd przybliżenia

Jeżeli a jest przybliżeniem liczby a_0, to różnicę $a - a_0$ nazywamy **błędem** tego przybliżenia. **Błędem bezwzględnym** przybliżenia a liczby a_0 nazywamy liczbę $|b| = |a - a_0|$, zaś **błędem względnym** nazywamy liczbę $\frac{|a - a_0|}{a}$.

Przedziały liczbowe

Niech $a, b \in \boldsymbol{R}$ i $a < b$.

	Przedział	Definicja	Ilustracja graficzna
Przedziały ograniczone	otwarty $(a;b)$	$(a;b) = \{x\colon x \in \boldsymbol{R} \text{ i } a < x < b\}$	
	domknięty $\langle a;b\rangle$	$\langle a;b\rangle = \{x\colon x \in \boldsymbol{R} \text{ i } a \leqslant x \leqslant b\}$	
	lewostronnie domknięty $\langle a;b)$	$\langle a;b) = \{x\colon x \in \boldsymbol{R} \text{ i } a \leqslant x < b\}$	
	prawostronnie domknięty $(a;b\rangle$	$(a;b\rangle = \{x\colon x \in \boldsymbol{R} \text{ i } a < x \leqslant b\}$	
Przedziały nieograniczone	otwarty $(-\infty;a)$	$(-\infty;a) = \{x\colon x \in \boldsymbol{R} \text{ i } x < a\}$	
	otwarty $(a;+\infty)$	$(a;+\infty) = \{x\colon x \in \boldsymbol{R} \text{ i } x > a\}$	
	lewostronnie domknięty $\langle a;+\infty)$	$\langle a;+\infty) = \{x\colon x \in \boldsymbol{R} \text{ i } x \geqslant a\}$	
	prawostronnie domknięty $(-\infty;a\rangle$	$(-\infty;a\rangle = \{x\colon x \in \boldsymbol{R} \text{ i } x \leqslant a\}$	

IV. Zbiór liczb rzeczywistych

1. Liczby naturalne i całkowite

1.1. Oblicz:

a) $(-2)+(-3):(-1)-(-7)$;

b) $[3\cdot(-2)-(-8)]\cdot(-7)-(-2)(-5)+3:(-1)$;

c) $(-2)\cdot 3+(-4)-7\cdot 0+1$;

d) $(-6):(-2)+(-8):4-(-2)$;

e) $(5-3)(4-((-3)-7))$;

f) $\dfrac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)}{(-3)-(-5)}$;

g) $\dfrac{(-2)+(-3)\cdot(-1)\cdot 0+(-4)}{(-1)\cdot(-1)+3}$;

h) $\dfrac{(-1)\cdot(-2)+(-3)\cdot(-4)-(-2)\cdot(-3)}{(-2)\cdot(-3):(-1)-(-3)\cdot(-2):(-6)+(-2)}$.

1.2. Oblicz:

a) $(-4)+(-14)+(-11)+19$;

b) $(-122)-29-229$;

c) $128+375+(-58)$;

d) $726+(-227)-(-8)$;

e) $(-327)-(-459)+24+459$;

f) $(-56)+6-36+83-54$;

g) $(-16)-57+127+(-61)$;

h) $129+300-(-59)$;

i) $720+(-458)+24+(-400)$;

j) $(-534)+323-(443-12)$;

k) $(-18)+23-71-(22+51)$.

1.3. Oblicz:

a) $(-2)\cdot(-4)\cdot(-6)\cdot 8$;

b) $(-16)\cdot(-1)\cdot(-5)$;

c) $(-7)\cdot 3\cdot(-8)$;

d) $(-3)\cdot(-1)\cdot(-4)$;

e) $(-2)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot(-2)$;

f) $(-3)\cdot[8-(-2)]$;

g) $((-6)+(-2))\cdot(8+(-4))$;

h) $((-13)+(-9))\cdot((-3)\cdot(-25)+6\cdot(-13))$;

i) $((-8)\cdot 6+7\cdot(-4))\cdot(13\cdot(-7)+(-16)\cdot 7-(-16)\cdot(-9))$;

j) $((-17)\cdot 8-17\cdot(-6))(13\cdot(-5)-9\cdot(-5))$;

k) $(15+(-3)\cdot(-2))\cdot(14-(2+5)\cdot 2)$.

1.4. Z czterech liczb całkowitych utworzono wszystkie możliwe sumy po dwie liczby i otrzymano 1, 2, 5, 7, 10 i 11. Znajdź te liczby.

1.5. Jeżeli pewną liczbę dwucyfrową podzielimy przez sumę jej cyfr, to otrzymamy 7. Jeżeli zaś odejmiemy od niej 27, to otrzymamy liczbę o przestawionych cyfrach. Co to za liczba?

1.6. Jest taka ciekawa liczba pięciocyfrowa a, że jeżeli dopiszemy do niej 1 z lewej strony, to otrzymamy liczbę sześciocyfrową, która jest 3 razy mniejsza od liczby sześciocyfrowej otrzymanej w wyniku dopisania 1 do liczby a z prawej strony. Jaką liczbą jest a?

1.7. Jeżeli liczbę dwucyfrową podzielimy przez sumę jej cyfr, to otrzymamy 6 i resztę 3. Jeżeli zaś podzielimy tę liczbę przez sumę cyfr powiększoną o 2, to otrzymamy 5 i resztę 5. Znajdź tę liczbę.

1.8. Znajdź wszystkie liczby pięciocyfrowe postaci $34x5y$, gdzie x oznacza cyfrę setek, a y cyfrę jedności, które dzielą się przez 36.

1.9. Cyfra dziesiątek pewnej liczby naturalnej mniejszej od 63 jest o 3 większa od cyfry jedności. Jaka to liczba?

1.10. Znajdź liczbę trzycyfrową, w której cyfra setek, cyfra dziesiątek i cyfra jedności oznaczają trzy kolejne liczby naturalne. Ponadto wiadomo, że kwadrat liczby wyrażonej cyfrą jedności jest o 13 większy od iloczynu pozostałych dwóch liczb naturalnych.

1.11. Suma cyfr liczby dwucyfrowej jest równa 11. Jeżeli napiszemy cyfry w odwrotnej kolejności, to otrzymamy liczbę mniejszą od połowy szukanej liczby. Jaka to liczba?

1.12. Suma czterech liczb jest równa 42. Jeżeli pierwszą z nich powiększymy o 2, drugą zmniejszymy o 2, trzecią powiększymy o 50%, a czwartą zmniejszymy o 50%, to wszystkie cztery będą równe. Co to za liczby?

1.13. Suma dwóch liczb wynosi 10, a różnica odwrotności liczby mniejszej i większej jest równa iloczynowi odwrotności tych liczb. Co to za liczby?

1.14. Znajdź liczby całkowite, które różnią się o 2, a różnica między kwadratem większej i mniejszej z nich jest o 1 większa od trzykrotności jednej z nich.

2. O podzielności liczb

2.1. Wyznacz wszystkie dzielniki następujących liczb:

a) 8; b) 16; c) 17;
d) 21; e) 28; f) 32.

2.2. Wyznacz po trzy wielokrotności każdej z liczb:

a) 6; b) 15; c) 31;
d) 35; e) 40.

2.3. Wyznacz:

a) $\text{NWD}(36, 45)$; b) $\text{NWD}(24, 100)$; c) $\text{NWD}(144, 168)$;
d) $\text{NWD}(18, 99)$; e) $\text{NWD}(96, 132)$; f) $\text{NWD}(45, 105)$.

2.4. Wyznacz:

a) $\text{NWW}(42, 63)$; b) $\text{NWW}(36, 27)$; c) $\text{NWW}(72, 180)$;
d) $\text{NWW}(54, 45)$; e) $\text{NWW}(10, 65)$; f) $\text{NWW}(21, 77)$.

2.5. Rozwiąż równania:

a) $\text{NWD}(64, 96) \cdot \frac{x}{8} = 15$;

b) $\text{NWW}(20, 80) + 2x = \text{NWD}(48, 80)$;

c) $\text{NWW}(15, 40) \cdot \text{NWD}(35, 77) - x = \text{NWW}(2, 25)$;

d) $\frac{\text{NWD}(55, 121)}{\text{NWW}(6, 11)} + x = \frac{1}{2}$;

e) $\text{NWD}(210, 55)^{\text{NWD}(213, 369)} + \text{NWW}(12, 18) - 2x = 162$;

f) $\sqrt[\text{NWD}(42, 38)]{\text{NWW}(4, 9)} - 2x = \text{NWD}(21, 1230)$.

2.6. Jaką cyfrą należy zastąpić x w zapisie liczby $1234567x8$, by liczba ta była podzielna przez:

a) 3; b) 4; c) 9?

2.7. Sformułuj cechy podzielności przez:

a) 12; b) 15; c) 18;
d) 36; e) 45; f) 20.

2.8. Sprawdź, czy liczba:

a) 10224 jest podzielna przez 12 i 18;
b) 9810 jest podzielna przez 15 i 18;
c) 118488 jest podzielna przez 12 i 15;
d) 5938830 jest podzielna przez 15 i 18;
e) 235692 jest podzielna przez 36 i 45;
f) 1186020 jest podzielna przez 12, 15, 18 i 36.

2.9. Znajdź za pomocą algorytmu Euklidesa:

a) $\text{NWD}(347, 816)$; b) $\text{NWD}(901, 502)$; c) $\text{NWD}(1128, 1815)$;
d) $\text{NWD}(2261, 2565)$; e) $\text{NWD}(4327, 5025)$; f) $\text{NWD}(4509, 5323)$.

2.10. Zapisz ogólną postać liczby całkowitej, która:

a) z dzielenia przez 3 daje resztę 1;
b) z dzielenia przez 4 daje resztę 3;
c) jest podzielna przez 5;
d) z dzielenia przez 2002 daje resztę 1999.

2.11. Znajdź dwie liczby, których suma wynosi 168, zaś wspólny dzielnik 24.

2.12. Podziel liczby 4373 i 826 przez taką liczbę, aby otrzymać w pierwszym dzieleniu resztę 8, a w drugim 7.

☆ **2.13.** Wykaż, że liczby:

a) $17^5 + 24^4 - 13^{21}$; b) $2^{16} + 3^{40} + 5^{39} + 2 \cdot 4^7$

są podzielne przez 10.

☆ **2.14.** Wykaż, że:

a) $57 \mid 7^{15} - 1$; b) $7 \mid 11^6 + 5^3$; c) $53 \mid 23^{10} + 1$;
d) $11 \mid 3^{15} - 1$; e) $31 \mid 5^9 - 1$; f) $31 \mid 5^{12} - 1$;
g) $19 \mid 3^{18} - 2^{18}$; h) $79 \mid 7^{15} - 3^{15}$; i) $137 \mid 13^6 - 2^{15}$;
j) $40 \mid 11^{14} - 3^{28}$.

☆ **2.15.** Udowodnij, że:

a) $55 | 8^{10} - 8^9 - 8^8$; b) $45 | 81^7 - 27^9 - 9^{13}$; c) $555 | 10^9 + 10^8 + 10^7$;
d) $72^{63} | 24^{54} \cdot 54^{24} \cdot 2^{10}$; e) $6^{16} | 12^8 \cdot 9^{12}$; f) $11 | 7^6 + 7^5 - 7^4$;
g) $25 | 51^7 - 51^6$; h) $75^{30} | 45^{45} \cdot 15^{15}$; i) $25^{20} | 45^{10} \cdot 5^{40}$;
j) $24 | 5^{23} - 5^{21}$; k) $7 | 5^5 - 5^4 + 5^3$; l) $33 | 16^5 + 2^{15}$;
m) $30 | 25^7 + 5^{13}$; n) $6 | 3^{n+3} + 2^{n+3} + 3^{n+1} + 2^{n+2}$, gdzie $n \in N$.

2.16. Udowodnij, że suma każdych trzech kolejnych potęg liczby 2 jest podzielna przez 7.

2.17. Wypisz liczby trzycyfrowe podzielne przez 3, 4, 5. Ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych jednocześnie przez wyżej wymienione liczby?

2.18. Udowodnij, że jeśli liczba naturalna jest podzielna przez 8, to suma cyfry jedności, podwojonej liczby dziesiątek i czterokrotności cyfry setek jest też podzielna przez 8.

2.19. Nie obliczając wartości iloczynu $14 \cdot 15 \cdot 16$, podaj takie liczby jednocyfrowe, przez które ten iloczyn jest podzielny.

2.20. Udowodnij, że jeżeli suma trzech liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą, to przynajmniej jeden składnik jest liczbą nieparzystą.

2.21. Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych jest liczbą nieparzystą.

2.22. Udowodnij, że jeżeli suma dwóch liczb naturalnych jest liczbą parzystą, to ich różnica jest także liczbą parzystą.

2.23. Udowodnij, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest liczbą podzielną przez 3.

2.24. Udowodnij, że kwadrat liczby pierwszej różnej od 3 daje resztę 1 z dzielenia przez 3 .

2.25. Udowodnij, że liczba parzysta niepodzielna przez 4 nie może być sumą dwóch kolejnych liczb nieparzystych.

2.26. Wykaż, że różnica kwadratów dwóch dowolnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

2.27. Udowodnij, że jeżeli suma dwóch liczb całkowitych jest liczbą nieparzystą, to ich iloczyn jest liczbą parzystą.

2.28. Udowodnij, że jeżeli iloczyn trzech liczb całkowitych jest liczbą nieparzystą, to ich suma jest także liczbą nieparzystą.

2.29. Wykaż, że suma czterech kolejnych liczb naturalnych nie może być liczbą pierwszą.

2.30. Dane są trzy kolejne liczby naturalne, z których pierwsza jest parzysta. Wykaż, że iloczyn tych liczb jest wielokrotnością 24.

2.31. Udowodnij, że suma iloczynu trzech kolejnych liczb całkowitych i drugiej z nich równa się sześcianowi tej liczby.

2.32. Udowodnij, że różnica kwadratu liczby całkowitej nieparzystej i liczby 1 dzieli się przez 8.

2.33. Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

2.34. Udowodnij, że jeżeli przy dzieleniu przez 3 jedna liczba daje resztę 1, a druga resztę 2, to ich iloczyn przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

2.35. Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych z dzielenia przez 3 daje resztę 2.

2.36. Udowodnij, że jeżeli jedna z liczb przy dzieleniu przez 9 daje resztę 5, a druga resztę 4, to ich iloczyn przy dzieleniu przez 9 daje resztę taką, jaką daje iloczyn reszt przy dzieleniu przez 9.

2.37. Udowodnij, że jeżeli dwie liczby przy dzieleniu przez trzecią dają tę samą resztę, to ich różnica jest podzielna przez tę trzecią liczbę.

2.38. Wykaż, że różnica czwartych potęg dwóch liczb całkowitych różniących się o 2 jest podzielna przez 8.

2.39. Udowodnij, że suma liczby dwucyfrowej i liczby utworzonej z tych samych cyfr zapisanych w odwrotnej kolejności jest podzielna przez 11.

2.40. Udowodnij, że różnica trzycyfrowych liczb, z których jedna zapisana jest tymi samymi cyframi, co druga, lecz w odwrotnym porządku, dzieli się przez 99.

2.41. Udowodnij, że różnica między sześcianem dowolnej liczby całkowitej i tą liczbą jest podzielna przez 6.

2.42. Udowodnij, że różnica kwadratów liczb niedzielących się przez 3 jest podzielna przez 3.

2.43. Udowodnij, że różnica czwartych potęg dwóch liczb, z których pierwsza przy dzieleniu przez 5 daje resztę 1, a druga 2, jest wielokrotnością 5.

2.44. Mając cztery kolejne liczby naturalne, udowodnij, że iloczyn pierwszej liczby przez czwartą jest zawsze o 2 mniejszy od iloczynu drugiej liczby przez trzecią.

2.45. Wykaż, że różnica kwadratów dowolnej liczby pierwszej większej od 3 i liczby pierwszej parzystej jest podzielna przez 3.

2.46. Suma dwóch liczb naturalnych dodatnich wynosi 168, a ich największy wspólny dzielnik równa się 24. Znajdź te liczby.

2.47. Znajdź liczby, których NWW = 630, a NWD= 18, wiedząc, że liczby te nie dzielą się przez siebie.

2.48. Znajdź dwie liczby naturalne, których suma wynosi 750, zaś iloraz z dzielenia ich najmniejszej wspólnej wielokrotności przez ich największy wspólny dzielnik jest równy 1196.

2.49. Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych a i b liczba $ab(a+b)$ jest parzysta.

2.50. Udowodnij, że reszta z dzielenia przez 30 dowolnej liczby pierwszej wynosi albo 1, albo jest liczbą pierwszą.

★ **2.51.** Udowodnij, że iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych powiększony o 1 jest kwadratem liczby całkowitej.

★ **2.52.** Udowodnij, że iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych parzystych powiększony o 16 jest kwadratem liczby całkowitej.

★ **2.53.** Udowodnij, że dla każdej pary liczb a i b jedna spośród czterech liczb: a; b; $a+b$; $a-b$ jest podzielna przez 3.

2.54. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n(n+1)(2n+1)$ jest podzielna przez 6.

2.55. Wykaż, że jeżeli żadna z liczb $n-1$, n, $n+1$, gdzie n oznacza dowolną liczbę naturalną, nie jest podzielna przez 5, to liczba n^2+1 dzieli się przez 5.

2.56. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba n^5-n jest podzielna przez 30.

2.57. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczby: n^3+5n, n^3+11n, n^3-19n są liczbami podzielnymi przez 6.

2.58. Udowodnij, że liczba postaci $n^4-4n^3-4n^2+16n$, gdzie n jest liczbą parzystą dodatnią większą od 4, jest podzielna przez 384.

2.59. Wykaż, że jeżeli m jest dowolną liczbą całkowitą, to $m^6-2m^4+m^2$ jest liczbą podzielną przez 36.

2.60. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n wyrażenie n^3+2n^2+n jest liczbą parzystą.

2.61. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n wyrażenie postaci $(n^3-n)(n^2-4)$ jest wielokrotnością liczby 60.

2.62. Udowodnij, że jeżeli n jest liczbą naturalną, to $16n^3-4n$ jest liczbą całkowitą podzielną przez 12.

☆ **2.63.** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $3^{n+2}+2\cdot 3^{n+1}+3^n$ jest podzielna przez 16.

☆ **2.64** Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ jest podzielna przez 10.

☆ **2.65.** Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n liczba $n^3 + 3n^2 - n - 3$ jest podzielna przez 48.

☆ **2.66.** Niech x w zapisie dziesiętnym liczby $28692x$ oznacza cyfrę jedności. Znajdź tę cyfrę, wiedząc, że liczba ta jest jednocześnie podzielna przez 3 i przez 4.

☆ **2.67.** Suma dwóch liczb naturalnych jest równa 96, a ich największy wspólny dzielnik wynosi 12. Znajdź te liczby.

☆ **2.68.** Przy dzieleniu przez 5 liczb a, b, c otrzymujmy odpowiednio reszty: 1, 2, 3. Znajdź resztę z dzielenia sumy kwadratów liczb: a, b, c przez liczbę 5.

☆ **2.69.** Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ jest całkowita.

☆ **2.70.** Udowodnij, że jeżeli liczby x i y są sumami kwadratów dwóch liczb całkowitych, to także liczby x^2, $2x$ i $x \cdot y$ są sumami kwadratów dwóch liczb całkowitych.

★ **2.71.** Dla jakich $n \in N$ ułamek $\frac{n^3 - n^2 + 2}{n - 1}$ jest liczbą całkowitą?

★ **2.72.** Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n liczby:

a) $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$; b) $\frac{n^5}{120} - \frac{n^3}{24} + \frac{n}{30}$; c) $\frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{4} + \frac{11n^2}{24} + \frac{n}{4}$

są całkowite.

★ **2.73.** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej nieparzystej n:

a) $48 \mid n^3 + 3n^2 - n - 3$; b) $512 \mid n^{12} - n^8 - n^4 + 1$; c) $4 \mid n^3 + 2n^2 + n$.

★ **2.74.** Udowodnij, że jeżeli n jest liczbą względnie pierwszą z liczbą 6, to $n^2 - 1$ dzieli się przez 24.

★ **2.75.** Wykaż, że jeżeli liczba x jest różnicą kwadratów dwóch liczb całkowitych, to także $3x$ jest różnicą kwadratów dwóch liczb całkowitych.

★ **2.76.** Dla jakich liczb pierwszych p liczby $p + 10$ i $p + 14$ też są pierwsze?

★ **2.77.** Dla jakich liczb pierwszych p liczby $p + 4$ i $p + 14$ są pierwsze?

★ **2.78.** Udowodnij, że jeżeli liczby p i $5p^2 - 2$ są pierwsze, to liczby $5p^2 - 4$ i $5p^2 + 2$ też są pierwsze.

★ **2.79.** Wykaż, że jeżeli liczby p i $2p^2 + 13$ są pierwsze, to liczby $2p^2 + 1$ i $2p^2 + 11$ też są pierwsze.

★ **2.80.** Udowodnij, że jeżeli liczby p i $8p^2+1$ są pierwsze, to liczba $8p^2-1$ też jest pierwsza.

★ **2.81.** Udowodnij, że jeżeli p jest liczbą pierwszą różną od 5, to liczba p^4 z dzielenia przez 5 daje resztę 1.

★ **2.82.** Znajdź wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczby p^2-6 i p^2+6 też są pierwsze.

★ **2.83.** Znajdź wszystkie pary (p,q) liczb pierwszych, dla których liczby $7p+q$ i $pq+11$ są pierwsze.

★ **2.84.** Wiadomo, że dla pewnych liczb całkowitych a i b liczba:
$A=(19a+98b)(20a+97b)\ldots(25a+92b)$
dzieli się przez 13. Rozstrzygnij, czy liczba A dzieli się przez 13^7.

★ **2.85.** Liczba $\overline{xy}$ nie dzieli się przez 3. Uzasadnij, że liczba x^2+y^2-xy+2 jest podzielna przez 3.

3. Rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych

3.1. Znajdź rozwinięcia dziesiętne liczb:

a) $\frac{2}{11}, \frac{4}{15}, -\frac{19}{12}, -9\frac{15}{37}$; b) $\frac{5}{22}, 5\frac{7}{24}, -\frac{8}{27}, 3\frac{11}{45}$;

c) $\frac{5}{101}, \frac{203}{202}, -\frac{53}{220}, \frac{59}{330}$.

3.2. Znajdź rozwinięcia dziesiętne liczb:

a) $\frac{31}{11}, \frac{43}{15}, \frac{36}{25}$; b) $2\frac{12}{37}, 3\frac{4}{27}, 6\frac{7}{33}$;

c) $-4\frac{5}{37}, \frac{203}{44}, \frac{61}{45}$; d) $\frac{103}{54}, \frac{17}{55}, -6\frac{17}{60}$.

3.3. Wskaż pary liczb równych:

$a=8{,}939393\ldots$; $b=8{,}9(93)$;
$c=8{,}9939393\ldots$; $d=8{,}(993)$;
$e=8{,}3993993\ldots$; $f=8{,}993993993\ldots$;
$g=8{,}(93)$; $h=8{,}(399)$.

3.4. Spośród poniższych liczb wybierz pary liczb równych:

$a=16{,}(54)$; $b=16{,}5(54)$;
$c=16{,}(554)$; $d=16{,}545454\ldots$;
$e=16{,}5545454\ldots$; $f=16{,}554554554\ldots$;
$g=16{,}544544544\ldots$; $h=16{,}(45)$;
$i=16{,}454545\ldots$; $j=16{,}(544)$.

3.5. Zaokrąglij poniższe liczby do części setnych:

a) $8{,}245$; b) $5{,}83(246)$; c) $13{,}(6)$;
d) $15{,}9(98)$; e) $0{,}3\cdot\sqrt{5}$; f) $\frac{\pi}{4}+1$;
g) $2\pi+\sqrt{3}$; h) $\sqrt{3}-\pi$.

3.6. Zaokrąglij poniższe liczby do części tysięcznych:

a) $8{,}4(77)$; $7{,}6$; $-17{,}(245)$; b) $15{,}(009)$; $-0{,}(3004)$; $-15{,}32(25)$;

c) 2π; $\pi-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; d) $0{,}2\cdot\sqrt{5}$; $0{,}7\cdot\pi$; $\sqrt{5}\cdot\pi$;

e) $2\pi-1{,}5$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{\sqrt{3}}$.

3.7. Ustal:

a) które z liczb: $2{,}39$; $2{,}45$; $2{,}4(01)$; $2\frac{7}{15}$; $\sqrt{5}$ są mniejsze od $2\frac{2}{5}$;

b) które z liczb: $5{,}(6)$; $5\frac{13}{20}$; $10\sqrt{7}$; 8π; $5{,}67$ są mniejsze od $5{,}(67)$;

c) które z liczb: $-6{,}77$; $-6{,}(7)$; $-6\sqrt{2}$; -2π; $-6\frac{15}{19}$ są większe od $-6\frac{7}{9}$;

d) które z liczb: $0{,}(15)$; $\sqrt{2}-1$; $\frac{\sqrt[3]{2}-1}{2}$; $0{,}14(16)$; $\frac{4}{25}$ są większe od $\pi-3$.

3.8. Spośród liczb:

a) $\frac{21}{4}$; 2π; $5{,}75$; $5{,}73$; $5{,}7(54)$ wybierz te, które są mniejsze od $5\frac{3}{4}$;

b) $1{,}72$; $-1{,}74(75)$; $\frac{\pi}{2}$; $1{,}73(2)$; $2\pi-4{,}55$ wybierz te, które są mniejsze od $\sqrt{3}$;

c) $5{,}(4)$; $5{,}(45)$; $\sqrt{2{,}9}\cdot\pi$; $5{,}56$; $\frac{\pi}{3}$ wybierz te, które są większe od $\pi\sqrt{3}$;

d) $1{,}54$; $1{,}53(4)$; $\sqrt{2}$; $1{,}1\cdot\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{2}$ wybierz te, które są większe od $1{,}5(3)$.

3.9. Uporządkuj podane liczby w kolejności malejącej:

a) $0{,}7$; $0{,}(7)$; $0{,}(07)$; $0{,}(707)$; $0{,}(70)$; b) $2{,}8$; $2{,}18$; $2{,}081$; $2\frac{3}{5}$; $\frac{12}{5}$;

c) $-0{,}77$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{7}{10}$; $-0{,}77(8)$; $-\frac{\pi}{4}$; d) $3{,}43$; $\sqrt{11}$; $3{,}4(3)$; $1{,}1\pi$; $2\pi-3$;

e) $-\sqrt{5}$; $-2{,}(23)$; $-2\frac{3}{10}$; $-\sqrt{6}$; $-2{,}4$; f) $\frac{6}{7}$; $0{,}9$; $2\pi-0{,}6$; $0{,}8(5)$; $0{,}7$.

3.10. Uporządkuj podane liczby w kolejności rosnącej:

a) $\frac{28}{23}$, $\frac{41}{52}$, $\frac{4}{5}$; b) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$, $\frac{1}{2}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^2$, $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$;

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $\frac{2}{3}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$, $\frac{5}{9}$; d) $-2{,}(2)$, $-2\frac{4}{17}$, $-1-\sqrt{2}$, $-\frac{\sqrt{17}}{2}$.

3.11. Porównaj liczby:

a) $\frac{7}{18}$ i $0{,}3(9)$; b) $-\frac{7}{80}$ i $-0{,}087$; c) $7\frac{1}{11}$ i $0{,}(08)$;

d) $-3\frac{5}{6}$ i $-3{,}8333\ldots$; e) $-4\frac{5}{22}$ i $-4{,}227$; f) $0{,}875$ i $0{,}8(875)$;

g) $3\sqrt{3}$ i $5\frac{1}{5}$; h) -2π i $-6\frac{3}{10}$; i) $3\sqrt{3}+\sqrt{2}$ i $2\cdot\pi$.

3.12. Porównaj liczby:

a) $0,(3)$ i $\frac{1}{3}$; b) $-0,3333$ i $-\frac{1}{3}$;

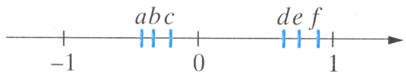
c) $0,(26)$ i $0,261$; d) $-3,776$ i $-3,(776)$;

e) $0,22(23)$ i $0,2223$; f) $-2\frac{2}{3}$ i $-2,67$;

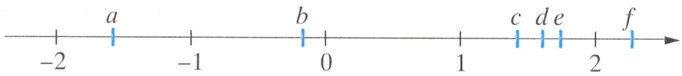
g) $\frac{1}{7}$ i $0,1428(57)$; h) $-\frac{7}{6}$ i $-1,16667$.

3.13. Podane liczby dopasuj do odpowiednich liter na osi liczbowej:

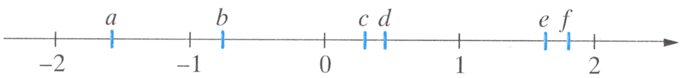
a) $\frac{4}{5}$; $\frac{9}{10}$; $0,95$; $-0,36$; $\frac{-7}{20}$; $\frac{-3}{10}$



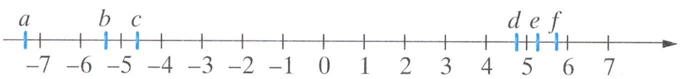
b) $1,(5)$; $1,6$; $\sqrt{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-0,1$; $\frac{7}{3}$



c) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; $-\frac{3}{4}$; $1,(6)$; $-1,66$; $\pi-\sqrt{2}$; $3\pi-9$



d) $5,3$; $5\frac{3}{4}$; $2\pi-\sqrt{2}$; $-4,5$; $-\frac{36}{7}$; $-5\cdot\sqrt{2}$



3.14. Ułamki dziesiętne zamień na ułamki zwykłe:

a) $2,(7)$; b) $2,(21)$; c) $5,(002)$; d) $0,5(45)$;

e) $-2,(412)$; f) $0,412(5)$; g) $-3,2(345)$; h) $0,5(342)$;

i) $3,1(45)$; j) $-2,37(1)$; k) $-3,24(41)$; l) $-0,41(356)$.

3.15. Ułamki dziesiętne zamień na ułamki zwykłe:

a) $0,(27)$; b) $0,(4)$; c) $0,3(18)$;

d) $0,208(3)$; e) $0,(296)$; f) $0,19(4)$;

g) $1,1041(6)$; h) $1,2(037)$.

4. Liczby wymierne

4.1. Wiedząc, że liczby a i b są dodatnie i wymierne, ustal, które z poniższych liczb są wymierne:

a) $a+b$; b) a^6; c) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$;

d) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; e) $\sqrt{a}\cdot b$; f) $\frac{a\cdot b}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$.

4.2. Podaj przykład trzech liczb wymiernych znajdujących się między liczbami 1 i $\sqrt{2}$.

4.3. Podaj przykład liczby wymiernej spełniającej warunek:

a) $\frac{3}{11} < x < \frac{5}{11}$; b) $0{,}3 < y < 0{,}5$; c) $-0{,}4 < x < -0{,}1$;

d) $\sqrt{7} < y < \sqrt{11}$; e) $\frac{\sqrt{3}}{3} < x < 0{,}5(7)$; f) $-0{,}9 < y < -0{,}(2)$;

g) $500\pi < x < 1571$; h) $-\frac{\pi}{3} < y < -0{,}8$; i) $2\sqrt{2}+\sqrt{3} < x < 3\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

j) $-0{,}(2) < y < -0{,}2$.

4.4. Oblicz 137 miejsce rozwinięcia dziesiętnego ułamka $\frac{2}{7}$.

4.5. Liczby p i q są liczbami pierwszymi. Podaj, dla jakich wartości p i q liczba $\frac{1}{p}+\frac{2}{q}$ jest ułamkiem o mianowniku mniejszym niż $p \cdot q$.

4.6. Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 10. Jeżeli tę liczbę pomnożymy przez liczbę złożoną z tych samych cyfr, tylko odwrotnie zapisanych, to otrzymamy 2701. Znajdź tę liczbę.

☆ **4.7.** Wiedząc, że liczby $a-b$ i $a+b$ są wymierne, udowodnij, że liczby a i b są wymierne.

☆ **4.8.** Udowodnij, że jeżeli liczby rzeczywiste x i y są różne od zera oraz liczby $x-y$ i $\frac{x}{y}$ są wymierne, to liczby x i y też są wymierne.

☆ **4.9.** Wiadomo, że $\frac{x+y}{x-2y}=\frac{2}{3}$. Wyznacz wartość wyrażenia $\frac{xy-y^2}{2x^2+2xy+3y^2}$.

★ **4.10.** Wykaż, że każda z poniższych liczb jest wymierna:

a) $\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}-\sqrt{3}$; b) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$;

c) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$; d) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$;

e) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$; f) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

★ **4.11.** Udowodnij, że jeżeli liczby x, y i $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ są wymierne, to liczby $\sqrt{x}$ i $\sqrt{y}$ także są wymierne.

★ **4.12.** Liczby rzeczywiste a i b spełniają równość $\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4}=1$. Wyznacz wszystkie możliwe wartości wyrażenia $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

★ **4.13.** Dane są takie liczby rzeczywiste x, y, z, różne od zera, że liczby xy, yz, zx są wymierne.

a) Wykaż, że liczba $x^2+y^2+z^2$ jest wymierna.

b) Udowodnij, że jeżeli liczba $x^3+y^3+z^3$ jest wymierna, to liczby x, y, z też są wymierne.

★ **4.14.** W zbiorze liczb wymiernych dodatnich określamy działanie ⊛ o własnościach: (1) $(x \circledast y)(z \circledast t) = (xz) \circledast (yt)$; (2) $x \circledast x = 1$; (3) $x \circledast 1 = x$ dla wszystkich liczb wymiernych dodatnich x, y, z, t. Wyznacz $4004 \circledast 2$.

5. Liczby niewymierne

5.1. Podaj przykład dwóch liczb niewymiernych, których:
a) różnica jest liczbą wymierną;
b) różnica jest liczbą niewymierną;
c) iloraz jest liczbą wymierną;
d) iloraz jest liczbą niewymierną.

5.2. Ustal, czy liczbą niewymierną jest:
a) suma liczby wymiernej i niewymiernej;
b) suma dwóch liczb niewymiernych;
c) iloczyn liczby wymiernej i niewymiernej;
d) iloraz liczby wymiernej i niewymiernej;
e) różnica liczby wymiernej i niewymiernej;
f) suma trzech liczb postaci $x + y\sqrt{7}$, gdy $x, y \in \boldsymbol{W}$;
g) różnica liczb postaci $a\sqrt{5} - b$ i $b - a\sqrt{5}$, gdy $a, b \in \boldsymbol{W}$;
h) suma liczb postaci $m + n\sqrt{11}$ i $m - n\sqrt{11}$, gdy $m, n \in \boldsymbol{W}$.

5.3. Podaj przykład dwóch liczb niewymiernych, znajdujących się między liczbami:
a) $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$;   b) 1 i 1,1.

5.4. Wskaż liczby niewymierne:

$a = \sqrt{169}$; $b = 1{,}666\ldots$; $c = 7\sqrt{5}$;

$d = -8\frac{7}{11}$; $e = \frac{1}{3}\pi - 4$; $f = \sqrt[4]{18} - 5{,}6$;

$g = -4{,}(015)$; $h = -5{,}8$; $i = 6{,}(84)$;

$j = 8{,}3248248\ldots$; $k = 0{,}12345678910\ldots$

5.5. Spośród poniższych liczb wybierz liczby niewymierne:

$a = \sqrt{\pi}$; $b = 0{,}21$; $c = 17\sqrt{3}$;

$d = -6\frac{4}{15}$; $e = 0{,}(296)$; $f = \pi\sqrt{2}$;

$g = \sqrt{18}$; $h = \sqrt[4]{17}$; $i = -3{,}141592$;

$j = 0{,}3(22)$; $k = \sqrt{\pi^2} - \pi$; $l = -\sqrt{3{,}5}$.

5.6. Oblicz:
a) $\sqrt{36 + 28}$, $\sqrt{169 - 144}$, $\sqrt{64 : 25}$, $\sqrt{81 \cdot 121}$;
b) $\sqrt{1 + \frac{13}{144}}$; $\sqrt{\frac{45}{9} - 1}$; $\sqrt{12^2 + 16^2}$; $\sqrt{15^2 - 9^2}$;

c) $\sqrt{\sqrt{625}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$; $\sqrt{\pi\cdot\sqrt[3]{\pi^2}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{729}}}$;

d) $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{64}{125^2}}}$; $\sqrt[4]{5\cdot\sqrt{15625}}$; $\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{3^4}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{4096}}}$.

5.7. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

a) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-2\right)^2}+\sqrt[6]{4}$;

b) $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt[6]{27}$;

c) $\frac{1}{3}\sqrt{108}-\sqrt{1\frac{1}{4}}-\sqrt{75}-5\cdot\sqrt{0{,}2}+\frac{9}{\sqrt{3}}+\sqrt{11{,}25}$;

d) $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{4{,}5}-\sqrt{12{,}5}-\frac{3}{4}\sqrt{200}+6\sqrt{1\frac{1}{8}}+\sqrt{24{,}5}$;

e) $\left(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{1{,}6}+3\sqrt{0{,}4}\right)$;

f) $\left(4\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{2}+\sqrt{3\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt{1\frac{1}{5}}+\sqrt{2}-4\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$.

5.8. Znajdź liczbę niewymierną spełniającą warunek:

a) $-7<x<-5$; b) $0<y<1$; c) $\sqrt{5}<x<\sqrt{6}$;

d) $-3\sqrt{7}<x<-4\sqrt{2}$; e) $-\sqrt{10}<x<3\frac{1}{5}$; f) $-2\sqrt{6}<y<-4{,}5$;

g) $0{,}(89)<y<0{,}899$; h) $-6{,}4(5)<y<-6{,}2$; i) $3\pi-\sqrt{2}<x<3\pi+\sqrt{2}$;

j) $-5\pi<y<-15$.

5.9. Oblicz:

a) $\sqrt{27}-\sqrt{12}+\sqrt{48}$;

b) $2\sqrt{32}+3\sqrt{18}-\sqrt{72}$;

c) $4\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{128}$;

d) $2\sqrt[3]{24}+4\sqrt[3]{81}-14\sqrt[3]{3}$;

e) $\sqrt{2}\left(4\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}\right)$;

f) $\sqrt{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{24}+3\sqrt{54}\right)$;

g) $\sqrt{3}\left(3\sqrt{24}-4\sqrt{6}+5\sqrt{54}\right)$;

h) $\sqrt{10}\left(2\sqrt{20}-7\sqrt{8}-4\sqrt{5}-2\sqrt{18}\right)$;

i) $\left(3\sqrt{50}+2\sqrt{8}-\sqrt{32}\right):\sqrt{2}$;

j) $\left(6\sqrt{24}-2\sqrt{54}+\sqrt{96}\right):\sqrt{3}$;

k) $\left(8\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{128}\right):\sqrt[3]{2}$;

l) $\left(4\sqrt[3]{625}-3\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{320}\right):\sqrt[3]{5}$;

m) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}:\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$.

5.10. Oblicz:

a) $\left(\sqrt{15}-\sqrt{10}+\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{30}$;

b) $\left(4\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(3\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}\right)$;

c) $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2}\right)\cdot\sqrt[6]{0{,}5}$;

d) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{5}}\right)\left(2-\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$;

e) $\left(\sqrt[5]{6-3\sqrt{2}}-2\sqrt[5]{3\sqrt{2}-6}\right)\cdot 2\cdot\sqrt[5]{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$;

f) $\left(4\sqrt{8}-3\sqrt{54}+3\sqrt{32}-2\sqrt{50}\right)\cdot\sqrt{2}$;

g) $(7\sqrt{35}+5\sqrt{21})(7\sqrt{5}-5\sqrt{3})\sqrt{7}$;

h) $(2\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{2})(4\sqrt[3]{25}+9\sqrt[3]{4}+6\sqrt[3]{10})$;

i) $(2\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})(2+\sqrt[3]{9})$;

j) $\sqrt{1-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{2}}$.

5.11. Oblicz:

a) $(12\sqrt{42}+3\sqrt{18}):6\sqrt{14}$;

b) $\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{8}+2\frac{1}{4}\cdot\sqrt[4]{\frac{2}{3}}-0{,}6\cdot\sqrt[4]{2{,}5}\right):\frac{3}{4}\cdot\sqrt[4]{\frac{5}{6}}$;

c) $\left(12{,}8\cdot\sqrt[3]{6}-\frac{1}{6}\cdot\sqrt[3]{180}+\frac{3{,}2}{\sqrt[3]{150}}\right):0{,}4\cdot\sqrt[3]{6}$;

d) $(3\cdot\sqrt[3]{15}+2\sqrt[6]{60}-\sqrt[6]{75}):\sqrt[6]{3}$;

e) $(\sqrt[3]{45}+\sqrt[3]{126}):\sqrt[3]{9}$;

f) $(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{9}):(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3})$;

g) $(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{4}):(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})$;

h) $(\sqrt[3]{343}-\sqrt[3]{64}):(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4})$;

i) $(\sqrt{2025}-\sqrt{720}):(\sqrt{45}-12)$.

5.12. Oblicz:

a) $(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2$;

b) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$;

c) $(3\sqrt{7}-2\sqrt{5})^2$;

d) $(3\sqrt{5}+5\sqrt{2})^2$;

e) $(4\sqrt{3}-2\sqrt{7})(4\sqrt{3}+2\sqrt{7})$;

f) $(3\sqrt{7}-\sqrt{8})(3\sqrt{7}+\sqrt{8})$;

g) $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$;

h) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$;

i) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$;

j) $(\sqrt{3}-2)^2-(\sqrt{3}+2)^2$;

k) $(2+\sqrt{7})^2-(2-\sqrt{7})^2$.

5.13. Oblicz:

a) $(0{,}4\sqrt{5}-0{,}6\sqrt[3]{25})^2$;

b) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$;

c) $(\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{2})^2$;

d) $(3\sqrt{2}+4\sqrt{3})^3$;

e) $\left(\frac{7+\sqrt{3}}{2}\right)^3-\left(\frac{7-\sqrt{3}}{2}\right)^3$;

f) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{6}}$;

g) $\left(\sqrt{3+\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{2}}\right)^2$;

h) $\left(\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}\right)^2$;

i) $\left(\sqrt{12+\sqrt{6}}+\sqrt{12-\sqrt{6}}\right)^2$;

j) $\left(\sqrt{\sqrt{40}+6}+\sqrt{\sqrt{40}-6}\right)^2$;

k) $(\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{3})^2$;

l) $(\sqrt{3}-2\sqrt[3]{2})^3$;

m) $\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2$;

n) $\left(\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}}-\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right)^2$.

5.14. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{6}{4+\sqrt{7}}$; b) $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$; c) $\frac{15}{7-\sqrt{6}}$;

d) $\frac{\sqrt{3}}{8-2\sqrt{5}}$; e) $\frac{12}{6+\sqrt{3}}$; f) $\frac{\sqrt{8}}{6+2\sqrt{7}}$;

g) $\frac{3}{\sqrt{11}-4\sqrt{2}}$; h) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; i) $\frac{\sqrt{7}}{11-3\sqrt{7}}$;

j) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; k) $\frac{4+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$; l) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{3}}$;

m) $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$; n) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$; o) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$;

p) $\frac{4}{2-\sqrt{2}}$; r) $\frac{1}{2\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{32}}$; s) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}-\sqrt{2}}$;

t) $\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt{8}}$; u) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{18}-\sqrt{8}}$.

5.15. Oblicz:

a) $\frac{9}{5-\sqrt{7}}+\frac{22}{7+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$; b) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\frac{7}{3+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

c) $\frac{54}{11-\sqrt{13}}+\frac{79}{13+\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}$; d) $\frac{78}{7-\sqrt{10}}+\frac{186}{10+\sqrt{7}}-\frac{6}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$;

e) $\left(\frac{12}{\sqrt{15}-3}-\frac{28}{\sqrt{15}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)\cdot(6-\sqrt{3})$;

f) $\left(\frac{20}{\sqrt{14}-2}-\frac{26}{\sqrt{14}-1}+\frac{1}{3-\sqrt{2}}\right)\cdot(17-\sqrt{2})$;

g) $\frac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24})}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}$; h) $\frac{(4\sqrt{5}+\sqrt{48})}{\sqrt{80}-4\sqrt{3}}$.

☆ **5.16.** Usuń niewymierność z mianownika w wyrażeniach:

a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; b) $\frac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}}$;

c) $\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$;

e) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}+2}$; f) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$;

g) $\frac{7}{9-3\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36}}$; h) $\frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}$, $a \geqslant b > 0$.

5.17. Oblicz:

a) $\dfrac{2\cdot(5\sqrt{2})^2}{3}:\dfrac{1}{\sqrt{75}}$;

b) $\dfrac{(\sqrt{21}-1)\cdot\sqrt{11+\sqrt{21}}}{2\sqrt{2}}$;

c) $\dfrac{(\sqrt{63}-\sqrt{18})(\sqrt{28}+\sqrt{8})(\sqrt{45}+\sqrt{20})(\sqrt[3]{24}-\sqrt{8})}{(\sqrt[3]{81}-\sqrt{18})\sqrt{4-\sqrt{11}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{11}}}$;

d) $\dfrac{\sqrt{5}\left[(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2\right]}{2\cdot\sqrt{0{,}2}}$;

e) $\dfrac{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3\sqrt{2}}}}{\sqrt[3]{50}}:\dfrac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{4}}}$;

f) $\dfrac{7(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}{20(2-\sqrt[4]{15})(2+\sqrt[4]{15})}$;

g) $\left[\left(6+\sqrt[3]{24}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{784}\right)-\left(3-\frac{1}{8}\cdot\sqrt{28}\right)+\right.$

$\left.+\left(\sqrt[3]{1\frac{67}{125}}+\frac{1}{4}\right)-\left(3\sqrt[6]{576}-\frac{1}{2}\sqrt{15\frac{3}{4}}\right)-\frac{4}{5}\sqrt[3]{3}\right]^2$;

h) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{5}\cdot\left(\dfrac{\sqrt[3]{9}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{2}}+\dfrac{\sqrt{2}-9\sqrt[3]{9}}{\sqrt{2}-3\sqrt[3]{3}}\right)$.

5.18. Oblicz:

a) $\left(\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}}$;

b) $\left[\dfrac{\sqrt[12]{675}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[10]{2^3}}{\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\cdot\sqrt[5]{4}}}\right]^2$;

c) $\left[\dfrac{16\cdot\sqrt{8+\sqrt{15}}\cdot(\sqrt{15}-1)\cdot\sqrt{2}}{7\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}\right]^3$;

d) $6\sqrt{4+2\sqrt{4+2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}\cdot(\sqrt{5}-1)$;

e) $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot(\sqrt{5}-1)\cdot(7+3\sqrt{5})\left(\sqrt{\sqrt{5}}-3\right)^2}{2\sqrt{2}}$;

f) $\left(\dfrac{5}{4-\sqrt{11}}+\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}-\dfrac{6}{\sqrt{7}-2}\right)(\sqrt{7}-5)$;

g) $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2$.

☆ **5.19.** Udowodnij równości:

a) $\sqrt{57+40\sqrt{2}}-\sqrt{57-40\sqrt{2}}=10$;

b) $\sqrt{53+20\sqrt{7}}-\sqrt{53-20\sqrt{7}}=10$.

☆ **5.20.** Udowodnij, że:

a) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$;

b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$;

c) $\dfrac{\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$;

d) $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$.

★ **5.21.** Oblicz:

a) $\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}-2\sqrt{3-\sqrt{5}}$;

b) $\dfrac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$;

c) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$;

d) $\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}+\dfrac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{8}}+\dfrac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$;

e) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10}}$.

★ **5.22.** Udowodnij równości:

a) $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}=\sqrt[4]{2}(\sqrt{3}+1)$;

b) $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})=8$;

c) $\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)=4\sqrt{3}$;

d) $\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}\right)\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}\right)=7$;

e) $\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[4]{4}-\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{4}-1\right)=3$.

★ **5.23.** Udowodnij, że jeżeli n jest dowolną liczbą naturalną większą od 1, to liczba $\sqrt[n]{n}$ jest niewymierna.

★ **5.24.** Udowodnij, że jeżeli n jest dowolną liczbą naturalną większą od 1, to liczby $\sqrt{n^2+n+1}$ i $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ są niewymierne.

★ **5.25.** Udowodnij, że jeżeli n jest dowolną liczbą naturalną większą od 1, to liczby:

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}} \text{ i } \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\cdots+\sqrt[n-1]{n-1+\sqrt[n]{n}}}}}}$$

są niewymierne.

★ **5.26.** Udowodnij, że jeżeli $x \geqslant \sqrt{y}$ i $y \geqslant 0$, to $\sqrt{x \pm \sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}} \pm \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}}$, a następnie oblicz:

a) $\frac{1}{1+\sqrt{7-\sqrt{24}}} - \frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1}$; b) $2 \cdot \sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

6. Uporządkowanie zbioru liczb rzeczywistych

6.1. Wykaż, że przy podanych założeniach prawdziwe są nierówności:

a) $a+\frac{1}{a} < 1$ dla $a < 0$; b) $|a| - \frac{1}{a} > 1$ dla $a < -1$;

c) $1 + \frac{1}{x} < 2$ dla $x > 1$; d) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} > \frac{1}{2}$ dla $x > 2$.

6.2. Wyznacz przedział do jakiego należy suma, różnica, iloczyn i iloraz liczb a i b, jeśli:

a) $1 < a < 2$, $2 < b < 3$; b) $-2 < a < -1$, $-3 < b < -2{,}5$;

c) $0 < a < 1$, $-2 < b < -1$; d) $1{,}1 < a < 2{,}1$, $-3 < b < -2{,}5$;

e) $2 < a < 3$, $4 < b < 5$; f) $1 < a < 2$, $-5 < b < -4$.

6.3. Wiadomo, że $1 < a < 2$ i $2 < b < 3$. Oszacuj wartości wyrażenia:

a) $a+b$; b) ab; c) $a-b$; d) $\frac{a}{b}$; e) $\frac{a}{3}$;

f) $-3b$; g) $a-3$; h) $2a-b$; i) $b-2a$; j) $3a+b-2$.

☆ **6.4.** Wiadomo, że $-3 < a < -2$ i $5 < b < 6$. Oszacuj wartości wyrażenia:

a) $a+b$; b) ab; c) $a-b$; d) $\frac{a}{b}$;

e) $\frac{2a}{3}$; f) $-\frac{2b}{5}$; g) $2a-3$; h) $3a-2b$.

☆ **6.5.** Wiadomo, że $-1{,}5 < a < -1$ i $-3 < b < 2{,}5$. Oszacuj wartości wyrażenia:

a) $a+b$; b) $a-b$; c) ab; d) $\frac{a}{5+b}$;

e) $-2b$; f) $a-3b$; g) $2a+3b$; h) $\frac{a}{2}-b$.

★ **6.6.** Wykaż, że przy podanych założeniach prawdziwe są nierówności (dla $a, b, c \in \boldsymbol{R}_+$):

a) $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$; b) $a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$;

c) $a^2+b^2+2 \geqslant 2(a+b)$; d) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$;

e) $a+b+c \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.

7. Dowodzenie nierówności

★ **7.1.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzą nierówności:

a) $a^2+b^2 \geqslant 2(a+b-1)$; b) $a^2+ab+b^2 \geqslant 3(a+b-1)$;

c) $a^2+b^2+1 \geqslant ab+a+b$.

★ **7.2.** Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $\frac{x^2}{1+x^4} \leqslant \frac{1}{2}$.

★ **7.3.** Dodatnie liczby a i b oraz liczba c większa od 1 spełniają warunek: $(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2$. Udowodnij, że $ab > a+b$.

★ **7.4.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność: $a^2+b^2+c^2+3 \geqslant 2(a+b+c)$.

★ **7.5.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność:

$$a^3+b^3+c^3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant 2(a+b+c).$$

★ **7.6.** Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i c zachodzi nierówność: $a^2+4b^2+3c^2+13 \geqslant 2a+12b+6c$.

★ **7.7.** Udowodnij, że jeżeli liczby rzeczywiste a i b spełniają równość $a+b=1$, to:

a) $a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}$; b) $a^3+b^3 \geqslant \frac{1}{4}$; c) $a^4+b^4 \geqslant \frac{1}{8}$.

★ **7.8.** Udowodnij, że jeżeli a, b, c są takimi liczbami rzeczywistymi, że $a^2+b^2+c^2=1$, to: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \leqslant 3$.

★ **7.9.** Wykaż, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie i $ab+bc+ca > a+b+c$, to $a+b+c > 3$.

★ **7.10.** Wykaż, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie i $abc \geqslant ab+bc+ca$, to $abc \geqslant 3(a+b+c)$.

★ **7.11.** Udowodnij, że jeżeli $m > -1$ i $m \neq 0$, to $m+\frac{4}{m^2} \geqslant 3$.

★ **7.12.** Udowodnij, że jeżeli $a > b > 0$, to $a+\frac{1}{(a-b)b} \geqslant 3$.

★ **7.13.** Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie i $a+b+c \geqslant abc$, to: $a^2+b^2+c^2 \geqslant \sqrt{3}\,abc$.

★ **7.14.** Udowodnij, że jeżeli a, b, i c są takimi liczbami dodatnimi, że $abc=1$, to:

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c} \geqslant 3.$$

★ **7.15.** Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:
$(5-a^2-b^2-c^2)\,abc \leqslant 2.$

★ **7.16.** Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c, d są dodatnie oraz $\frac{a+b}{c+d}<2$, to $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}<8.$

★ **7.17.** Udowodnij, że jeżeli a i b są liczbami naturalnymi większymi od zera, to:

a) $\sqrt[a+b]{a^b b^a} \leqslant \frac{a+b}{2}$; b) $2\sqrt[a+b]{a^{2b} b^{2a}} \leqslant a^2+b^2$; c) $a^a b^b \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}.$

★ **7.18.** Udowodnij, że jeżeli a, b, c są liczbami naturalnymi większymi od zera, to:

a) $a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$;

b) $\left(1+\frac{a+b}{c}\right)^c\left(1+\frac{b+c}{a}\right)^a\left(1+\frac{c+a}{b}\right)^b \leqslant 3^{a+b+c}$;

c) $a^a b^b c^c \geqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} \geqslant \frac{(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c}{2^{a+b+c}}$;

d) $\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c} \geqslant a^a b^b c^c.$

★ **7.19.** Wykaż, że jeżeli liczby naturalne a, b, c są długościami boków dowolnego trójkąta,
to $\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^a\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^b\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^c \leqslant 1.$

★ **7.20.** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n większej od zera zachodzi nierówność:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}\right)<\frac{1}{8}.$$

★ **7.21.** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 1 zachodzi nierówność:
$\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^3}\right)>\frac{1}{2}.$

★ **7.22.** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n większej od zera zachodzą nierówności:

a) $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$; b) $(n+1)^n \geqslant (2n)!!$;

c) $n^n \geqslant (2n-1)!!$; d) $(n!)^2 \leqslant \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right)^n$; e) $(n!)^3 \leqslant \left(\frac{\sqrt{n}(n+1)}{2}\right)^{2n}$;

f) $2!!+4!!+6!!+\ldots+(2n)!!<(2n+1)!!-1$;

g) $1!!+3!!+5!!+\ldots+(2n-1)!!<(2n)!!-1$;

gdzie $(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot2n$, $(2n+1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n+1)$.

8. Oś liczbowa i przedziały liczbowe

8.1. Zaznacz na osi liczbowej przedziały:

a) $\langle 2; 5)$; b) $(-3; 4\rangle$; c) $(0; 6)$;
d) $\langle -3; 3)$; e) $\langle -2; 2\rangle$; f) $\langle -3; -1\rangle$;
g) $(-\infty; -2\rangle$; h) $(-\infty; 4)$; i) $(3; +\infty)$;
j) $\langle -5; +\infty)$.

8.2. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B, a następnie wyznacz zbiór $A \cap B$, jeśli:

a) $A = (-3; 5)$, $B = (6; 8\rangle$; b) $A = (-\infty; 2)$, $\langle 4; +\infty)$;
c) $A = \langle -2; 3)$, $B = (-1; 5\rangle$; d) $A = \langle -6; 3)$, $B = (0; 4\rangle$;
e) $A = (-\infty; -2\rangle$, $B = \langle -3; 5)$; f) $A = (-\infty; -1)$, $B = \langle 1; 7)$;
g) $\langle -2; 0)$, $B = (-1; +\infty)$; h) $A = (-\infty; 3)$, $B = \langle 3; 6)$;
i) $A = (-5; 2\rangle$, $B = \langle 2; 4)$; j) $A = (-\infty; 1)$, $B = (1; 4)$;
k) $A = (-3; 0)$, $B = (0; +\infty)$; l) $A = (-\infty; 7)$, $B = (7; +\infty)$.

8.3. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B, a następnie wyznacz zbiór $A \cap B$, jeśli:

a) $A = \langle -2; 3\rangle$, $B = \langle 0; 4\rangle$; b) $A = \left(\frac{3}{2}; 2{,}5\right)$, $B = \langle 2; 8\rangle$;
c) $A = (-1; 3)$, $B = (0; 5\rangle$; d) $A = (-\infty; 3)$, $B = (2; +\infty)$;
e) $A = (-6; 2\rangle$, $B = \langle 2; 3)$; f) $A = (-\infty; 2)$, $B = (2; 6)$;
g) $A = (-3; 4\rangle$, $B = \langle 5; 6\rangle$; h) $\langle -6; -3\rangle$, $B = \langle -4; -3\rangle$;
i) $A = (-\infty; 4\rangle$, $B = \langle 2; 3)$; j) $A = (-\infty; -2\rangle$, $B = \langle -3; +\infty)$;
k) $A = (3; 4\rangle$, $B = \langle 3{,}5; 3{,}75)$; l) $A = \langle -3; 4\rangle$, $B = (3; 7)$.

☆ **8.4.** Dane są przedziały $A = \langle -6; 6\rangle$, $B = (-8, 3\rangle$. Wyznacz:

a) $A \cap B$; b) $A' \cap B'$; c) $A \cup B$;
d) $A' \cup B'$; e) $A \setminus B$; f) $B \setminus A$;
g) $A' \setminus B$; h) $A \setminus B'$; i) $B' \setminus A$;
j) $B' \setminus A'$.

8.5. Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$ oraz $B \setminus A$, jeśli:

a) $A = (-1; 4\rangle$, $B = \langle 3; 6\rangle$; b) $A = \langle -6; 2)$, $B = (0; 6\rangle$;
c) $A = (-\infty; 6\rangle$, $B = (-3; 8\rangle$; d) $A = (-\infty; 4\rangle$, $B = \langle -3; +\infty)$;
e) $A = (-1; 2\rangle \cup \langle 4; 7\rangle$, $B = \langle 1; 3)$; f) $A = \langle -1; 2)$, $B = (-3; 0\rangle \cup \langle 1; 4)$;
g) $A = \langle -2; 1\rangle \cup (6; 8)$, $B = \langle -3; -1\rangle \cup (4; 7)$;
h) $A = (0; 2) \cup (3; 5\rangle$, $B = \langle -1; 1) \cup (4; 6\rangle$;
i) $A = (-\infty; -2\rangle \cup (6; +\infty)$, $B = (-3; 7)$.

☆ **8.6.** Wyznacz $A' \cap B'$, $A' \cup B'$, $A' \setminus B'$, $B' \setminus A'$, jeśli:

a) $A = (-\infty; -6\rangle$, $B = (5; +\infty)$;
b) $A = (0; 3\rangle$, $B = \langle 5; 6)$;

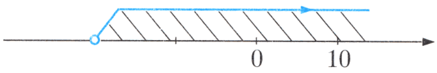
c) $A = \langle -2; 2 \rangle$, $B = (1; 4\rangle$;

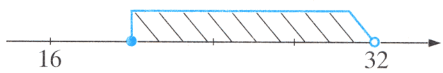
d) $A = (-\infty; -2\rangle \cup (5; +\infty)$, $B = \langle -1; 2\rangle$;

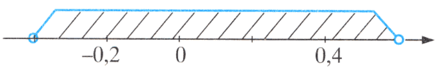
e) $A = (-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$, $B = (-4; 6)$;

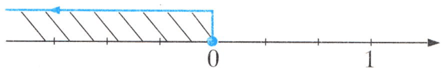
f) $A = (-\infty; -3) \cup (5; 7) \cup (7; +\infty)$, $B = (1; 5)$.

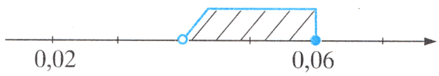
8.7. Jaki przedział zaznaczony jest na osi liczbowej:

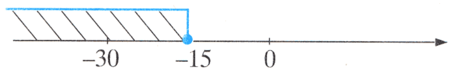
a) 

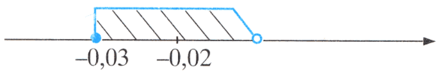
b) 

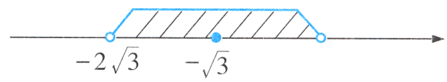
c) 

d) 

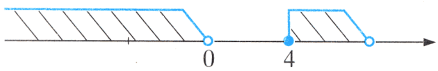
e) 

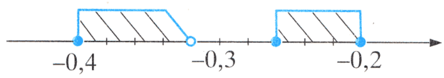
f) 

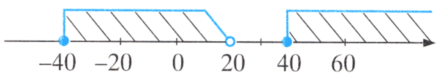
g) 

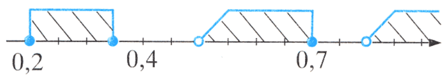
h) 

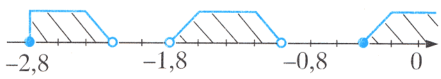
8.8. Zbiór zaznaczony na osi liczbowej zapisz w postaci sumy przedziałów:

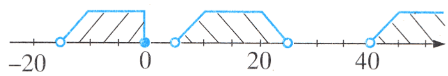
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

8.9. Zapisz w postaci przedziału:

a) $\langle 3; 6) \cap (4; 8\rangle$;

b) $(-\infty; 6) \cap \langle 0; 7)$;

c) $(-15; -3\rangle \cap \langle -3; 6)$;

d) $(-5; 4\rangle \cup \langle 1; +\infty)$;

e) $(7; 15) \cup (8; 11\rangle$;

f) $\left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cap \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{10}\right)$.

8.10. Zapisz w postaci przedziału lub sumy przedziałów:

a) $\boldsymbol{R} \setminus (6; +\infty)$;

b) $\boldsymbol{R} \setminus (-9; 16\rangle$;

c) $\boldsymbol{R} \setminus \langle 4, 15\rangle$;

d) $\boldsymbol{R} \setminus (6; 14\rangle$;

e) $\boldsymbol{R} \setminus (-4; 7\rangle$;

f) $(9; 17) \setminus \langle 15; 16\rangle$;

g) $(-4; 22\rangle \setminus (-3; 3\rangle$;

h) $(-7; -2) \setminus (-4; -2\rangle$;

i) $(-\infty; -8) \setminus \langle -9; +\infty)$;

j) $(-11; +\infty) \setminus \langle -8; -4)$.

☆ **8.11.** Wyznacz $A \cap B, A' \cap B', A \cup B, A' \cup B', A \setminus B, B \setminus A, A' \setminus B', B' \setminus A'$, jeśli:

a) $A = (-1, 2), B = \langle 4, 5 \rangle$; b) $A = (-\infty; 3\rangle, B = \langle 1; +\infty)$;

c) $A = (-\infty; 2\rangle, B = \langle 1; 4 \rangle$; d) $A = \langle -1; 1), B = \langle 0; +\infty)$.

9. Wartość bezwzględna liczby

9.1. Oblicz:

a) $|5 + 3\sqrt{7}|$; b) $|2 - 4\sqrt{3}|$;

c) $|3 - 2\sqrt{5}| + |2\sqrt{5} - 4|$; d) $|5 - \sqrt{8}| - |2 - 4\sqrt{8}|$;

e) $|3 - 4\sqrt{3}| \cdot |\sqrt{3} - 2|$; f) $|\sqrt{6} - \sqrt{7}| \cdot |7\sqrt{6} - 6\sqrt{7}|$;

g) $\left|\dfrac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}\right|$; h) $\left|\dfrac{2 - \sqrt{7}}{5 - 4\sqrt{7}}\right|$;

i) $\left|\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}\right|$; j) $\left|\dfrac{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}\right|$;

k) $|6 - \sqrt{2}|$; l) $|\sqrt{7} - 5|$;

m) $|3 - 2\sqrt{2}|$; n) $|\sqrt{7} - \sqrt{15}|$;

o) $|-4 - \pi|$; p) $\left|\dfrac{\pi}{2} - \sqrt{2} - \sqrt{3}\right|$.

9.2. Uprość wyrażenia:

a) $\sqrt{(2-a)^2}$; b) $\sqrt{x^4(1-x)^2}$; c) $\dfrac{\sqrt{a^2}}{a}$;

d) $\sqrt{(a-1)^2} - \sqrt{a^2}$; e) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$;

f) $\dfrac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{|x| - 1}$; g) $\dfrac{a - 2}{\sqrt{a^2 - 4a + 4}}$; h) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

☆ **9.3.** Oblicz:

a) $\sqrt{(5 - \sqrt{6})^2}$; b) $\sqrt{(\sqrt{3} - 3)^2}$;

c) $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$; d) $\sqrt{21 + 8\sqrt{5}}$;

e) $\sqrt{13 - 2\sqrt{42}}$; f) $\sqrt{7 + 2\sqrt{6}}$;

g) $\sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$; h) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$;

i) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{12 + 6\sqrt{3}}$; j) $\sqrt{54 - 14\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$;

k) $\sqrt{11 - 4\sqrt{7}} - \sqrt{23 - 8\sqrt{7}}$; l) $\sqrt{46 + 12\sqrt{10}} + \sqrt{35 - 10\sqrt{10}}$.

☆ **9.4.** Uprość wyrażenia:

a) $|x-1|-|x-3|$; b) $|1+x|+|x-3|$; c) $\left|\frac{1}{x-1}\right|\cdot|1-x|$;

d) $3|x-2|-|6+3x|$; e) $\left|\frac{3x+9}{4}\right|\cdot\left|\frac{4}{3+x}\right|$; f) $\frac{||x|-1||x|+1|}{|x^2-1|}$;

g) $\frac{x^2-1}{|x+1|}-|x-1|$; h) $\frac{x^2-4}{|x|-2}+|x-2|$; i) $\frac{|x^4-1|}{|x^2+1|}\cdot\left|\frac{1}{(|x|-1)(|x|+1)}\right|$.

☆ **9.5.** Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

a) $|x-2|-|2-x|$; b) $\left|\frac{1}{x-3}\right|\cdot|3-x|$, gdy $x\neq 3$;

c) $2|x+2|-|2x+4|$; d) $\left|\frac{5x-25}{6}\right|\cdot\left|\frac{6}{5-x}\right|$, gdy $x\neq 5$;

e) $||x|-1|\cdot||x|+1|\cdot\frac{1}{|x^2-1|}$, gdy $x\neq -1 \land x\neq 1$.

☆ **9.6.** Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

a) $|x-3|+3|x-1|$, gdy $x\in(3;+\infty)$; b) $|x-7|+5|x+2|$, gdy $x\in\langle -2;7)$;

c) $|4-x|+|x-2|$, gdy $x\in(2;4)$; d) $|x-4|-2|x+6|$, gdy $x\in(-6;4)$;

e) $3|x+3|-2|x-5|$, gdy $x\in(-\infty;-3)$; f) $|x+7|-4|3x+2|$, gdy $x\in\left(-7;-\frac{2}{3}\right)$;

g) $|3x-6|-|x-2|$, gdy $x\in\langle 2;+\infty)$; h) $5|x-4|-|8-4x|$, gdy $x<2$;

i) $|x-5|-|x+6|$, gdy $x\in(-6;5)$; j) $|2-x|+|3x+1|-2x$, gdy $x\in\left(-\frac{1}{3};2\right)$;

k) $6x-|5x+1|-|x+2|$, gdy $x\in\left(-\frac{1}{5};+\infty\right)$; l) $\frac{x^2-1}{|x|-1}\cdot|1-x|$, gdy $x\in(1;+\infty)$;

m) $\frac{x^2-1}{|x-1|}\cdot|x-3|$, gdy $x>3$.

10. Równania i nierówności z wartością bezwzględną

10.1. Rozwiąż równania:

a) $|x|=6$; b) $|x|=-5$; c) $|x-2|=6$;
d) $|x+4|=7$; e) $|6-x|=6$; f) $|5x-10|=10$;
g) $|7x+14|=28$; h) $|6-7x|=1$.

10.2. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x, dla których:

a) $x-|-x|=0$; b) $|x|\cdot x=-1$; c) $\frac{|x|}{x}=1$;

d) $|x|=-x$; e) $|x|=\frac{1}{x}$; f) $\left|x-\frac{1}{x}\right|=|x-1|$.

10.3. Rozwiąż równania:

a) $\sqrt{(x-3)^2}=3-x$; b) $\sqrt{(5-x)^2}=x-5$;

c) $|x-2|=x-4$; d) $|3-x|+x=5$;

e) $|x-2|+|2-x|=6$;
f) $\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(3-x)^2}=8$;
g) $|1-x|+\sqrt{(3-x)^2}=4$;
h) $\sqrt{(x-2)^2}+|5-x|=7$;
i) $|x-2|+|x-7|=7$;
j) $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(3-x)^2}=3$;
k) $|3-x|+|5-x|=4$;
l) $\sqrt{(1-x)^2}+|3-x|=5$;
m) $|x-3|-6=\sqrt{(x-5)^2}$;
n) $\sqrt{(x-6)^2}-8=|x-4|$;
o) $2|x|-|x+1|=2$;
p) $|x+1|+|x-1|=x^2$;
r) $|3x-1|+x=7$.

10.4. Rozwiąż równania:

a) $|x+1|=|x-2|$;
b) $|x|-|x+1|=1$;
c) $|x-1|+|x+1|=2$.

10.5. Rozwiąż równania:

a) $|x+2|=3$;
b) $|x|-x=2$;
c) $||x|-2|=2$;
d) $||x|+2|=2$;
e) $|x(x-1)|=x$;
f) $||x|-x|=1$;
g) $|x|+|x-1|=x$;
h) $|x|+|x-1|=0$.

10.6. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x, dla których:

a) $|x|\geqslant 1$;
b) $|x|\leqslant 2$;
c) $|x|\leqslant 0$;
d) $|x-2|>1$;
e) $1<|x|<2$;
f) $0<|x|<1$;
g) $0<|x-1|<1$;
h) $|x^2-x|<x$.

10.7. Rozwiąż nierówności:

a) $|x-1|<3$;
b) $2<|x-1|\leqslant 3$;
c) $|x^2-1|\leqslant 1$;
d) $|x|>x+2$.

10.8. Rozwiąż nierówności:

a) $|2x-3|<7$;
b) $|3x+2|<11$;
c) $|3x-5|>-2$;
d) $|5x-2|<-3$;
e) $|3x-2|>x+2$;
f) $|4x-3|<x+3$;
g) $|x-2|-2x>8$;
h) $|x-3|+1>2x$;
i) $|x+2|\geqslant 6$;
j) $|x-4|<9$;
k) $|4x-3|>3$;
l) $|5x-1|<4$;
m) $|3-6x|\leqslant 1$;
n) $\sqrt{(7x+1)^2}\leqslant 13$;
o) $\sqrt{(6x+4)^2}\geqslant 11$.

☆ **10.9.** Rozwiąż nierówności:

a) $|2x+3|-|4x-3|\geqslant 0$;
b) $|2x+7|-|3x+5|\geqslant 0$;
c) $|1-x|+|3-x|>4$;
d) $|x-2|+|x-3|>3$;
e) $|x-2|+|2-x|<6$;
f) $|3-x|+|x-3|>6$;
g) $|x-2|+|x-7|>7$;
h) $|x-1|+|x-3|>4$;
i) $|x-3|-|x-5|>4$;
j) $|6-x|-|7-x|>-6$;
k) $\sqrt{(x-3)^2}+|x-5|<4$;
l) $|x-1|+\sqrt{(x-3)^2}<5$.

☆ **10.10.** Rozwiąż nierówności:

a) $||x|-1| \leqslant 2$; b) $||x-1|-3| \geqslant 4$;
c) $||x+2|-5| > 1$; d) $||x-2|-4| < 2$.

☆ **10.11.** Rozwiąż równania:

a) $||x-3|+2| = 3$; b) $||3-2x|+1| = 4$;
c) $|4-3|x+2|| = 5$; d) $|1-2|x+3|| = 1$;
e) $|x|+|2-x| = 2x$; f) $2|x| = 3-x$;
g) $|3-x| = -x+5$; h) $|\sqrt{3}-x| = 2+\sqrt{3}+x$;
i) $|2x+3|-|x-1| = 4$; j) $|x+6|+|x+4| = 2$.

☆ **10.12.** Rozwiąż równania:

a) $|2x-8|+|x-5| = 4$; b) $|5-x|+|3x-9|+|x+2| = 8$;
c) $|7-x|+|x-3|+|4x+8| = -5$; d) $||3-2x|-1| = 2|x|$;
e) $|x|-2|x+1|+3|x+2| = 0$; f) $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2| = |x+2|$.

☆ **10.13.** Rozwiąż równania i nierówności:

a) $||x|-7| = 9$; b) $||x|-3| = 2$; c) $||x+2|-5| = 4$;
d) $||x|-2| \leqslant 3$; e) $||x-2|-4| \geqslant 5$; f) $||x+2|-6| > 2$;
g) $||x-3|-5| < 3$; h) $|x-2| < 3 < x+2$; i) $3-x \leqslant 2 < |x+2|$;
j) $|7-|x-1|| = 2$.

☆ **10.14.** Rozwiąż nierówności:

a) $|x|+|x-1| < 5$; b) $|2x+1|-|5x-2| \geqslant 1$;
c) $|3x-1|+|2x-3|-|x+5| < 2$; d) $|x-1|+|2-x| > 3+x$;
e) $||2x+1|-5| > 2$; f) $||x-3|+1| \geqslant 2$;
g) $||x-2|-x+3| < 5$; h) $|2x-|3-x|-2| \leqslant 4$.

☆ **10.15.** Rozwiąż równania:

a) $|x+1|+x = 6-|x-3|$; b) $|4x-1| = -|6x+5|$;
c) $|x+3|+|2x-3|-10 = -|x+2|$; d) $|x+3|-4 = |x-5|+|x-1|$;
e) $|x+1|+3|x-1| = x+2+|x|+2|x-2|$; f) $|x-1|+|x-2|-2|2x+3| = 1$.

★ **10.16.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność: $|x|+|y|+|z| \leqslant |x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|$.

★ **10.17.** Udowodnij, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $|a+b| \leqslant |c|$, $|b+c| \leqslant |a|$, $|c+a| \leqslant |b|$, to $a+b+c = 0$.

★ **10.18.** Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $|a-b| \geqslant |c|$, $|b-c| \geqslant |a|$, $|c-a| \geqslant |b|$, to $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = 0$.

V. Funkcje

Funkcją f odwzorowującą zbiór X w zbiór Y nazywamy takie przyporządkowanie, które każdemu elementowi x ze zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element y ze zbioru Y. Zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji f, a jego elementy – **argumentami**. **Zbiorem wartości** funkcji $f{:}X \to Y$ nazywamy zbiór tych elementów zbioru Y, które są wartościami tej funkcji. Wykresem funkcji liczbowej $f{:}X \to Y$ nazywamy zbiór $W_f = \{(x, f(x)\colon x \in X)\}$.

Funkcję można określić za pomocą: przepisu słownego, tabelki, grafu, wzoru lub przedstawić graficznie jako wykres.

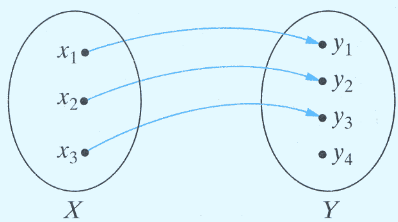
Miejscem zerowym funkcji f nazywamy taki jej argument x_0, dla którego $f(x_0) = 0$.

Punktem stałym funkcji f nazywamy taki jej argument x_0, dla którego $f(x_0) = x_0$.

Mówimy, że funkcja $f{:}X \to Y$ przyjmuje w punkcie x_0 ze zbioru X wartość najmniejszą m ze zbioru Y wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_0) = m$ oraz dla każdego x zbioru X zachodzi nierówność $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Mówimy, że funkcja $f{:}X \to Y$ przyjmuje w punkcje x_0 ze zbioru X wartość największą M ze zbioru Y wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_0) = M$ oraz dla każdego x ze zbioru X zachodzi nierówność $f(x) \leqslant f(x_0)$.

O funkcji $f{:}X \to Y$ mówimy, że jest **różnowartościowa** w zbiorze X, jeśli dla dowolnych elementów x_1, x_2 zbioru X prawdziwa jest implikacja $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.



Funkcję $f{:}X \to Y$ nazywamy **malejącą** w zbiorze X, jeśli dla dowolnych dwóch argumentów x_1, x_2 ze zbioru X większemu z nich odpowiada mniejsza wartość funkcji, to znaczy:

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\right)$$

Funkcję $f{:}X \to Y$ nazywamy **rosnącą** w zbiorze X, jeśli dla dowolnych dwóch argumentów x_1, x_2 ze zbioru X większemu z nich odpowiada większa wartość funkcji, to znaczy:

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\right)$$

Funkcję $f{:}X \to Y$ nazywamy **stałą** w zbiorze X, jeśli dla dowolnych x_1, x_2 ze zbioru X zachodzi równość $f(x_1) = f(x_2)$.

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy **okresową** w zbiorze X, jeśli istnieje liczba t różna od zera, taka że dla każdego x ze zbioru X: $x-t, x+t \in x$ i $f(x+t)=f(x)$.

O funkcji $f: X \to Y$ mówimy, że jest **parzysta** w zbiorze X, jeśli dla każdego x ze zbioru X: $-x \in X$ i $f(-x)=f(x)$.

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy **nieparzystą** w zbiorze X, jeśli dla każdego x ze zbioru X: $-x \in X$ i $f(-x)=-f(x)$.

Złożeniem albo **superpozycją** funkcji $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$ nazywamy funkcję $h: X \to Z$ określoną dla każdego x ze zbioru X wzorem $h(x)=g(f(x))$.

O funkcji $g: Y \to X$ mówimy, że jest **odwrotna** do funkcji $f: X \to Y$, jeśli funkcje $g \circ f$ i $f \circ g$ są **tożsamościowe** odpowiednio w zbiorach X i Y, to znaczy $(g \circ f)(x)=x$, gdy $x \in X$, zaś $(f \circ g)(y)=y$, gdy $y \in Y$.

Przekształcanie wykresów funkcji

Jeśli wzorcowym wykresem jest $y=f(x)$, to wykres funkcji:

$y=f(x-p)$ sporządzamy, przesuwając wykres funkcji f o p jednostek w prawo (jeśli p jest dodatnie) albo w lewo (jeśli p jest ujemne).

$y=f(x)+q$ sporządzamy, przesuwając wykres funkcji f o q jednostek w górę (jeśli q jest dodatnie) albo w dół (jeśli q jest ujemne).

$y=-f(x)$ sporządzamy, odbijając symetrycznie wykres funkcji f względem osi OX.

$y=f(-x)$ sporządzamy, odbijając symetrycznie wykres funkcji f względem osi OY.

$y=|f(x)|$ sporządzamy, odbijając symetrycznie względem osi OX część wykresu znajdującą się pod osią OX. Wartości nieujemne (większe lub równe 0) pozostawiamy bez zmian.

$y=f(|x|)$ sporządzamy, odbijając symetrycznie względem osi OY część wykresu znajdującą się na prawo od osi OY. Wykres funkcji dla argumentów nieujemnych pozostawiamy bez zmian.

$y=a \cdot f(x)$ sporządzamy, rozciągając centralnie względem osi OX wykres funkcji f, gdy $|a|>1$, i spłaszczając, gdy $|a|<1$. Miejsca zerowe pozostają bez zmian, następuje zmiana skali względem OX.

$y=f(b \cdot x)$ sporządzamy, rozciągając centralnie względem osi OY wykres funkcji f, gdy $|b|<1$, i spłaszczając, gdy $|b|>1$. Miejsca przecięcia wykresu z osią OY pozostają bez zmian, następuje zmiana skali względem OY.

V. Funkcje liczbowe

1. Pojęcie funkcji, funkcja liczbowa i jej wykres

1.1. Rozstrzygnij, czy następujący warunek określa pewną funkcję. Jeśli tak, to określ jej dziedzinę.
a) Każdemu państwu przyporządkowujemy jego stolicę.
b) Każdemu morzu przyporządkowujemy rzekę, która do niego wpada.
c) Każdemu trójkątowi przyporządkowujemy opisany na nim okrąg.
d) Każdemu odcinkowi przyporządkowujemy jego symetralną.
e) Każdemu czworokątowi przyporządkowujemy jego środek symetrii.
f) Każdej liczbie naturalnej przyporządkowujemy jej dzielnik.
g) Każdemu wielokątowi przyporządkowujemy jego pole.

1.2. Zbadaj, czy następujący warunek określa pewną funkcję odwzorowującą zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Jeśli tak, to oblicz $f(0)$ i $f\left(-3\frac{1}{2}\right)$.

a) $f(x)=\begin{cases} 2x, \text{ gdy } x<2 \\ x+5, \text{ gdy } x\leqslant 7; \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ gdy } x\leqslant 0 \\ 1, \text{ gdy } 0<x\leqslant 1 \\ \frac{2x}{x+1}, \text{ gdy } x>2. \end{cases}$

1.3. W tym samym układzie współrzędnych wykonaj wykresy następujących funkcji: $f(x)=2x$, $g(x)=x$, $h(x)=3x$.

1.4. W tym samym układzie współrzędnych wykonaj wykresy następujących funkcji: $f(x)=2x$, $g(x)=2x+1$, $h(x)=2x-2$.

1.5. Taryfa kolejowa dla małych odległości w II klasie pociągu osobowego jest następująca:

Odległość (w km)	Cena biletu (w zł)
1–5	2
6–10	3,2
11–15	4,8
16–20	6,4
21–25	8

Wiedząc, że cena biletu do I klasy jest o 50% wyższa od ceny biletu II klasy, ułóż analogiczną tabelę dla I klasy:
a) normalnych, b) ze zniżką 33%.

1.6. Zaznacz w układzie współrzędnych punkty:
$A=(3;0)$, $B=(3;1)$, $C=(3;-2)$, $D=(3;-4{,}5)$.
Czym jest zbiór wszystkich punktów płaszczyzny mających odciętą równą 3, a rzędną dowolną? Co jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny mających odciętą równą a, rzędną zaś dowolną?

1.7. W układzie współrzędnych zacieniuj część płaszczyzny, w której leżą punkty mające:
a) odciętą dodatnią;
b) rzędną dodatnią;
c) odciętą ujemną i rzędną ujemną;
d) odciętą mniejszą od 3;
e) rzędną większą od 5;
f) odciętą spełniającą warunek: $2 < x < 6$;
g) rzędną spełniającą warunek: $-2 < y < 0$;
h) odciętą spełniającą warunek: $x < -4$ lub $x > -2$;
i) rzędną spełniającą warunek: $y \geqslant 3$ lub $y < -1$;
j) odciętą spełniającą warunek: $x > 1$ i rzędną spełniającą warunek: $y < 1$;
k) odciętą spełniającą warunek: $x > 1$ lub rzędną spełniającą warunek: $y < 1$.

1.8. W układzie współrzędnych zacieniuj zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, jeśli:
a) $A = \{(x,y) : x \in \boldsymbol{R} \text{ i } y \in \boldsymbol{R} \text{ i } x > 3 \text{ i } y < 4\}$,
$B = \{(x,y) : x \in \boldsymbol{R} \text{ i } y \in \boldsymbol{R} \text{ i } x \leqslant 5 \text{ i } y > -2\}$;
b) $A = \{(x,y) : x \in \boldsymbol{R} \text{ i } y \in \boldsymbol{R} \text{ i } x = 3 \text{ i } y < 5\}$,
$B = \{(x,y) : x \in \boldsymbol{R} \text{ i } y \in \boldsymbol{R} \text{ i } x > -4 \text{ i } y = -3\}$;
c) $A = \{(x,y) : x \in \boldsymbol{R} \text{ i } y \in \boldsymbol{R} \text{ i } x = 5 \text{ i } y \geqslant 2\}$,
$B = \{(x,y) : x \in \boldsymbol{R} \text{ i } y \in \boldsymbol{R} \text{ i } x \geqslant 5 \text{ i } y = 2\}$.

1.9. Sporządź wykresy funkcji:
a) $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$, gdy $x \in \boldsymbol{R}$;
b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$, gdy $x \in \langle 5; 8)$;
c) $f(x) = -x^2 + 5$, gdy $x \in (-8; -2) \cup (3; +\infty)$;
d) $f(x) = -\sqrt[3]{x}$, gdy $x \in \{0, 8, 27, 64\}$;
e) $f(x) = \frac{3}{x}$, gdy $x \in \boldsymbol{R}_+$.

1.10. Sporządź wykresy funkcji:
a) $y =$ reszta z dzielenia liczby x przez 3, gdy $x \in \{3, 5, 7, 8, 11, 13\}$;
b) $y =$ reszta z dzielenia liczby x przez 4, gdy $x \in \{-8, -7, -3, 0, 1, 3, 5\}$;
c) $y =$ reszta z dzielenia liczby x przez 7, gdy $x \in \{x\colon x \in \boldsymbol{C} \text{ i } -7 \leqslant x \leqslant 14\}$.

1.11. Sporządź wykresy funkcji określonych za pomocą wzorów:

a) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geqslant 1 \\ 1, & \text{gdy } x < 1; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{gdy } x < 0 \\ x^2, & \text{gdy } x \geqslant 0; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in \boldsymbol{C}, \\ -1, & \text{gdy } x \in (0; 1); \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}1, \text{ gdy, } x^2<x,\\ 2, \text{ gdy, } x^2=x,\\ 3, \text{ gdy, } x^2>x;\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}1, \text{ gdy } x \text{ jest liczbą całkowitą podzielną przez 3;}\\ 2, \text{ gdy } x \text{ jest liczbą całkowitą niepodzielną przez 3;}\end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases}x+1, \text{ gdy } x\geqslant 0\\ -x+1, \text{ gdy } x<0;\end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases}3x+1, \text{ gdy } x>2\\ 4, \text{ gdy } x\leqslant 2.\end{cases}$

2. Dziedzina funkcji, zbiór wartości funkcji

2.1. Określ dziedzinę funkcji:

a) $y=5x-1;$

b) $y=-4x^2+\sqrt{7};$

c) $y=\dfrac{2x+7}{x^2+15};$

d) $y=\dfrac{x^3+3}{x^4+7};$

e) $y=\sqrt{x^2+18};$

f) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2+3}};$

g) $y=\dfrac{x^3-3}{\sqrt{5x^2+2}}.$

2.2. Określ dziedzinę funkcji:

a) $y=\dfrac{3x+3}{4x};$

b) $y=\dfrac{4x}{\left(\frac{5}{2}x+1\right)\left(2x-\sqrt{2}\right)};$

c) $y=\dfrac{3x^2-1}{x^4\cdot(x+1)};$

d) $y=\dfrac{x+3}{x^2-9};$

e) $y=\dfrac{5x^2-12}{\frac{1}{9}x^2-1};$

f) $y=\dfrac{8-x^2}{x^2+6x+9}.$

2.3. Określ dziedzinę funkcji:

a) $f(x)=2x-1;$

b) $f(x)=\dfrac{x}{2x+1};$

c) $f(x)=\dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2+1}};$

d) $f(x)=\sqrt{1-x}+\dfrac{2}{x};$

e) $f(x)=\sqrt{-x}-\sqrt{2+x};$

f) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-x}}{4-x^2};$

g) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}};$

h) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x-1};$

i) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}.$

2.4. Określ dziedzinę funkcji:

a) $f(x)=\dfrac{3x+1}{(x+2)(x-3)};$

b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x^2+2x+1}};$

c) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+10x+25}$;　　d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{3}}x-\sqrt{3}}$;

e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+2}}$;　　f) $f(x)=\dfrac{2x-\sqrt{3}}{\left(\frac{1}{2}x^2-2\right)\left(x^2+1\right)}$.

2.5. Określ dziedzinę funkcji:

a) $y=\dfrac{x^7+\sqrt{3{,}5}\,x}{2x^2+2\sqrt{10}\,x+5}$;　　b) $y=\dfrac{\sqrt{15}}{x^2-10x+25}$;

c) $y=\dfrac{17}{(x+3)(x-2)}$;　　d) $y=\dfrac{25x^3+2x^2+x}{(x-2)(x+3)}$;

e) $y=\dfrac{\frac{5}{3}x}{(x-4)(x-7)}$;　　f) $y=\dfrac{\frac{1}{2}x^4+2}{(x+2)(x-11)}$;

g) $y=\dfrac{2x^2+3x+1}{\left(x^2-3\right)\left(x^2-4x+4\right)}$;　　h) $y=\dfrac{3x+\sqrt{5}}{\left(x^2-6x\right)\left(x^2+2x+1\right)}$.

2.6. Określ dziedzinę funkcji:

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{5}{2}x-4}$;　　b) $g(x)=\dfrac{1}{7}\sqrt{5-6\sqrt{3}\,x}+5x^2-3$;

c) $h(x)=\sqrt{5\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{7}x+12}$;　　d) $i(x)=\dfrac{2x^2}{3\sqrt{4-\frac{5}{6}x}}$;

e) $j(x)=\dfrac{x^3-14}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}x-\sqrt{3}}}$;　　f) $k(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3x-5}}+\dfrac{3}{x^2-25}$;

g) $l(x)=\dfrac{3}{x^2\cdot\sqrt{x+\frac{1}{2}}}+\dfrac{3}{x^2-6x+9}$.

2.7. Określ dziedzinę funkcji:

a) $f(x)=\dfrac{x}{|x|-1}$;　　b) $f(x)=\dfrac{x+1}{|x-1|+1}$;　　c) $f(x)=\dfrac{|x|}{1-|x+2|}$;

d) $f(x)=\sqrt{|x|-2}$;　　e) $f(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-|x-1|}}$;　　f) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3|x-1|-6}}{\sqrt{5-|x|}}$;

g) $f(x)=\dfrac{\sqrt{-2x+8}}{|x+3|-1}+\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{|x-2|-1}}$;　　h) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-|x+2|}}{x^2-1}$.

2.8. Wyznacz zbiór wartości funkcji:

a) $f(x)=3x-5,\ x\in\langle -7;-2)$;

b) $f(x)=\frac{1}{2}x+3,\ x\in\{-7,-5,-1,0,4,5\}$;

c) $f(x)=\frac{5}{3}x-4,\ x\in\langle -7,4\rangle$;

d) $f(x)=x^2+1,\ x\in\{0,1,4,6\}$;

e) $f(x)=21\sqrt{x},\ x\in\{0,1,4,9,16\}$;

f) $f(x)=x^2+2,\ x\in\langle -3;3\rangle$;

g) $f(x)=\frac{1}{x^2},\ x\in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

2.9. Wyznacz zbiór wartości funkcji:

a) $f(x)=-2x+1$, gdy $x\in\langle -2;1\rangle$;

b) $f(x)=3x-6$, gdy $x\in \boldsymbol{R}_+$;

c) $f(x)=|x|-1$, gdy $x\in\langle -2;-1\rangle\cup\langle 0;1\rangle$;

d) $f(x)=\sqrt{x}$, gdy $x\in\langle 1;16\rangle$;

e) $f(x)=x^2+2$, gdy $x\in(-1;1)\cup\langle 2;4\rangle$;

f) $f(x)=\frac{1}{x}$, gdy $x\in\langle -3;-1)\cup\langle 1;3)$.

2.10. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji:

a) $y=\frac{3}{2x}$;

b) $y=-|x+3|$;

c) $y=3\sqrt{2x-1}$;

d) $y=\frac{-|x|}{2x}$;

e) $y=\sqrt{\frac{3}{4}x+3}+\sqrt{7x-2}$;

f) $y=6+|x-4|$.

2.11. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji:

a) $f(x)=\frac{x}{|x|}$;

b) $f(x)=\sqrt{-x}-\sqrt{x}$;

c) $f(x)=\frac{1}{2}x-1$;

d) $f(x)=\frac{x^2}{|x|}$;

e) $f(x)=\sqrt{|x|+4}$;

f) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x}+3}$.

3. Wartość funkcji w punkcie

3.1. Oblicz:

a) $f(1), f(-3), f(0{,}5), f(-0{,}5), f(a), f(a+1)$, jeśli $f(x)=5$, gdy $x\in \boldsymbol{R}$;

b) $g(0), g(-0{,}7), g(3{,}2), g\left(\frac{11}{3}\right), g(a)$, jeśli $g(x)=-3x+1$, gdy $x\in \boldsymbol{R}$;

c) $F(-2), F(2), F(5), F(10), F\left(-\frac{1}{3}\right), F(m)$, jeśli $F(x)=x^2+x$, gdy $x\in \boldsymbol{R}$;

d) $h(1), h\left(\frac{1}{3}\right), h(3), h(-3), h(0{,}01), h(100)$, jeśli $h(x)=\frac{3}{4x}$, gdy $x\neq 0$.

3.2. Dana jest funkcja $f(x)=x+\frac{1}{x}$. Oblicz: $f(-1), f(1), f(\sqrt{2}-1), f(\sqrt{2}+1), f\left(\frac{1}{x}\right)$.

3.3. Dla danej funkcji określonej wzorem:

a) $f(x)=4x+1$, oblicz $f(1), f\left(-\frac{1}{4}\right), f\left(\frac{1}{4}\right), f\left(\frac{3}{4}\right), f(5), f(\sqrt{7})$;

b) $g(x)=x^2+2x+1$, oblicz $g(-2), g(4), g(-4), g(\sqrt{5}), g\left(\frac{3}{5}\right), g\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

c) $h(x)=\frac{2x-1}{3x+1}$, oblicz $h(3), h(8), h\left(\frac{1}{3}\right), h(a-1), h(a+1), h(2a)$;

d) $i(x)=\frac{x^2-5}{x-2}$, oblicz $i(-2), i(\sqrt{5}), i(-\sqrt{5}), i\left(\frac{1}{2}\right), i(7{,}5), i(0)$.

3.4. Dana jest funkcja $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$. Oblicz: $f(0), f(1), f(-x), f(x+1), f(x)+1, f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$.

3.5. Niech $f(x)=ax^2+bx+c$. Oblicz: $f(2003)-3f(2002)+3f(2001)-f(2000)$.

☆ **3.6.** Znajdź $f(x)$, jeśli $f(x+1)=x^2-3x+2$.

☆ **3.7.** Znajdź $f(x)$, jeśli $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$, gdy $x\neq 0$.

3.8. Dana jest funkcja $f(x)=2x^3+x$. Wyznacz: $f(x-1)$, $f(2x)$, $f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)$.

☆ **3.9.** Znajdź $f(x)$, jeśli $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^2$.

★ **3.10.** Znajdź $f(x)$, jeśli $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$, gdy $|x|\geqslant 2$.

3.11. Znajdź, jeśli istnieją, miejsca zerowe funkcji:

a) $y=-3x$;
b) $y=5x-2$;
c) $y=-2x+1$;
d) $y=3-x$;
e) $y=2x^2$;
f) $y=9-x^2$;
g) $y=\frac{-6}{x}$;
h) $y=-2x^3$;
i) $y=-\sqrt{x}$;
j) $y=x^2+2$;
k) $y=\sqrt{x-2}$.

3.12. Znajdź, jeśli istnieją, miejsca zerowe funkcji:

a) $f(x)=3x-12$;
b) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$;
c) $f(x)=x^3-x$;
d) $f(x)=x^4-9x^2$;
e) $f(x)=\frac{(x+1)(x-2)}{x^2-4}$;
f) $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}$;
g) $f(x)=\begin{cases} x-3, & \text{gdy } x<0 \\ -x+2, & \text{gdy } x\geqslant 0; \end{cases}$
h) $f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{1-|x|}}$;
i) $f(x)=\frac{|x|-2}{(x+2)(x-1)}$;
j) $f(x)=\sqrt{4-|x|}\cdot(x^2-9)$;
k) $f(x)=\begin{cases} x^2-3, & \text{gdy } x\in W \\ x^2-4, & \text{gdy } x\notin W. \end{cases}$

3.13. Znajdź, jeśli istnieją, miejsca zerowe funkcji:

a) $y=\dfrac{\frac{5}{2}x-7}{2x^2-3}$;
b) $y=\dfrac{\left(3x-\frac{4}{7}\right)(9x^2-6x+1)}{\left(3x+\frac{3}{4}(x-5)\right)}$;

c) $y=\dfrac{(x-3)(x-2)}{3x^2(x+2)}$;
d) $y=\dfrac{2x^2-6\sqrt{2}\,x+9}{\sqrt{x^2+2x+1}}$;

e) $y=\dfrac{4x-12}{\sqrt{4-\frac{1}{2}x}}$;
f) $y=\dfrac{(x+3)(x^2-7)}{(x-\sqrt{7})\cdot\sqrt{\frac{1}{3}x-1}}$;

g) $y=\dfrac{3(x+3)(x+4)}{\sqrt{|x-4|-2}}$;
h) $y=\dfrac{(x-2)(x+5)\left(x+7\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{6-|x-2|}}$;

i) $y=\dfrac{(x-3)(3x-4)^2}{\sqrt{3-|x|}}$;
j) $y=\dfrac{x^2+6x+9}{\sqrt{4-|x+5|}}$.

3.14. Wyznacz, jeśli istnieją, punkty stałe funkcji:

a) $f(x)=6x-10$;
b) $f(x)=x^2$;
c) $f(x)=x^3-3x$;

d) $f(x)=\dfrac{4}{x}$;
e) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+1, & \text{gdy } x\geqslant 0\\ -2x-6, & \text{gdy } x<0;\end{cases}$
f) $f(x)=|x|$.

3.15. Znajdź, jeśli istnieją, punkty stałe funkcji:

a) $f(x)=-\dfrac{3}{4}x+4$;
b) $f(x)=2x^2-x$;

c) $f(x)=x^2-x+1$;
d) $f(x)=x^2+7x+9$;

e) $f(x)=\sqrt{3}\,x+2$.

★ **3.16.** Udowodnij, że jeżeli funkcja $f(x)=x^3+ax+b$ ma trzy miejsca zerowe, to $a\leqslant 0$.

3.17. Zbadaj, czy funkcje f i g są równe, jeśli:

a) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x}$, $g(x)=2x$;
b) $f(x)=-|x|$, $g(x)=\begin{cases}x, & \text{gdy } x\leqslant 0,\\ -x, & \text{gdy } x>0;\end{cases}$

c) $f(x)=|x+5|$, $g(x)=x+5$;
d) $f(x)=\sqrt{3x^2}$, $g(x)=x\sqrt{3}$;

e) $f(x)=\frac{x^2-25}{x+5}$, $g(x)=x-5$; f) $f(x)=\frac{(x^2+6x+9)(x-3)}{(x+3)(x-3)}$, $g(x)=x+3$;

g) $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$, $g(x)=\begin{cases} 1, \text{ gdy } x \geqslant 2 \\ -1, \text{ gdy } x<2. \end{cases}$

3.18. Znajdź sumę funkcji $f(x)=x+1$ i $g(x)=x+3$. W tym samym układzie współrzędnych sporządź wykresy funkcji f, g i $f+g$.

3.19. Znajdź sumę funkcji $f(x)=x^2$ i $g(x)=-1$. W tym samym układzie współrzędnych sporządź wykresy funkcji f, g i $f+g$.

3.20. Znajdź iloczyn funkcji $f(x)=x$ i $g(x)=-x$. W tym samym układzie współrzędnych sporządź wykresy funkcji f, g i $f \cdot g$.

3.21. Znajdź iloraz funkcji $f(x)=x+1$ i $g(x)=3+\frac{1}{x}$.

3.22. Znajdź różnicę funkcji $f(x)=-\frac{x}{x+1}$ i $g(x)=\frac{x+1}{x+2}$.

3.23. Oblicz:

a) $f+g$, gdzie $f(x)=\frac{x}{2}$, $g(x)=\frac{2}{x}$;

b) $f:g$, gdzie $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$, $g(x)=\frac{x^3}{x-1}$;

c) $f \cdot g$, gdzie $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=(x+1)^2$;

d) $\frac{f}{g}-\frac{g}{f}$, gdzie $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, $g(x)=\frac{x+2}{x-2}$.

3.24. Niech $f(x)=\frac{1}{x}$ i $g(x)=\frac{1}{x-1}$. Oblicz:

a) $f(3x)-g(2x)$; b) $3f(x)-f(3x)$; c) $\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{g(x)}{f(x)}$;

d) $g(x+1)-g(x)$; e) $f(x^2)-g(x^2)$.

4. Najmniejsza i największa wartość funkcji

4.1. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji:

a) $f(x)=-2x+4$, gdy $x \in \langle -7; 5 \rangle$;

b) $f(x)=3x+\frac{3}{4}$, gdy $x \in \langle -2; 5 \rangle$;

c) $f(x)=\frac{2}{x}$, gdy $x \in \langle -8; 1 \rangle$;

d) $f(x)=[x]$, gdy $x \in \left\langle -7{,}5; 3\frac{3}{4} \right\rangle$.

4.2. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x-1$, gdy $x\in\langle-1;2\rangle$;

b) $f(x)=2-x^2$, gdy $x\in\langle0,3\rangle$;

c) $f(x)=2-|x-1|$, gdy $x\in\langle-1;1\rangle\cup\langle2;4\rangle$;

d) $f(x)=x^3+1$, gdy $x\in\langle-2;2\rangle$;

e) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, gdy $x\in\langle-3;-1\rangle\cup(2;4\rangle$.

★ **4.3.** Wyznacz największą wartość funkcji:

a) $f(x)=x^{16}-x^{18}$, gdy $x\in(0;1)$;

b) $f(x)=(7+x)\cdot\sqrt[3]{11-3x}$, gdy $x\in\left\langle-7;\frac{11}{3}\right\rangle$;

c) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{100+x}$, gdy $x\geqslant0$;

d) $f(x)=(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2$, gdy $x\in\left(-\frac{1}{2};1\right)$;

e) $f(x)=x^2\sqrt{1-x^2}$, gdy $x\in\langle-1;1\rangle$.

★ **4.4.** Wyznacz najmniejszą wartość funkcji:

a) $f(x)=\frac{x^3+16}{x}$, gdy $x>0$;

b) $f(x)=\sqrt{x+2\left(1+\sqrt{x+1}\right)}+\sqrt{x+2\left(1-\sqrt{x+1}\right)}$;

c) $f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\sqrt{x^2+1}+x}+\sqrt{\sqrt{x^2+1}-x}\right)$;

d) $f(x)=x^{1000}+x^{900}+x^{90}+x^8+\frac{1998}{x}$, gdy $x>0$.

5. Ogólne własności funkcji liczbowych

5.1. Udowodnij, że funkcja:

a) $f(x)=\frac{4}{3x}$ jest malejąca w zbiorze $\boldsymbol{R}_+$;

b) $f(x)=-\frac{7}{x}$ jest rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}_+$;

c) $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ jest malejąca w przedziale $(1;+\infty)$;

d) $f(x)=\frac{-4x-5}{x+3}$ jest malejąca w przedziale $(-\infty;-3)$;

e) $f(x)=\frac{x-6}{x-4}$ jest rosnąca w przedziale $(4;+\infty)$;

f) $f(x)=\sqrt{\frac{3}{4}x}$ jest rosnąca w swojej dziedzinie;

g) $f(x)=\sqrt{5-x}$ jest malejąca w swojej dziedzinie;

h) $f(x)=\frac{3}{4}\cdot\sqrt{x-4}+5$ jest rosnąca w swojej dziedzinie;

i) $f(x)=-6\sqrt{3-x}+2\sqrt{7}$ jest rosnąca w swojej dziedzinie.

5.2. Zbadaj monotoniczność funkcji w zbiorze $\boldsymbol{R}$:

a) $f(x)=\frac{3}{4}x$;
b) $f(x)=-6x+\sqrt{2003}$;
c) $f(x)=\sqrt{3}x-6\sqrt{7}$;
d) $f(x)=-4\sqrt{7}x+2{,}5$;
e) $f(x)=-\frac{|x|}{4}+7$, gdy $x\in(-\infty;0)$;
f) $f(x)=-6|x|-7$, gdy $x\in(-\infty;0)$;
g) $f(x)=3x^2$, gdy $x\in\langle 0;+\infty)$;
h) $f(x)=\sqrt{7}x^2-3\sqrt{5}$, gdy $x\in\langle 0;+\infty)$;
i) $f(x)=-6x^2+\sqrt{1984}$, gdy $x\in\langle 0;+\infty)$;
j) $f(x)=-5\sqrt{3}x^2+\frac{3}{4}$, gdy $x\in(-\infty;0)$.

☆ **5.3.** Udowodnij, że suma dwóch funkcji rosnących w danym zbiorze jest funkcją rosnącą w tym zbiorze.

☆ **5.4.** Udowodnij, że jeżeli a jest dowolną liczbą dodatnią, to funkcja $f(x)=x^3+ax+1$ jest rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

☆ **5.5.** Niech $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ będzie funkcją parzystą. Udowodnij, że funkcja ta jest rosnąca w zbiorze liczb dodatnich wtedy i tylko wtedy, gdy jest malejąca w zbiorze liczb ujemnych.

☆ **5.6.** Niech $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ będzie funkcją nieparzystą. Udowodnij, że funkcja ta jest rosnąca w zbiorze liczb dodatnich wtedy i tylko wtedy, gdy jest rosnąca w zbiorze liczb ujemnych.

5.7. Wskaż, które z poniższych funkcji są różnowartościowe:

a) $f(x)=-3x+\frac{4}{3}$;
b) $f(x)=7$;
c) $f(x)=-3x^2-3$;
d) $f(x)=\frac{4}{x}$;
e) $f(x)=-\frac{3}{5}\sqrt{x-2}$;
f) $f(x)=$ reszta z dzielenia x przez 7, gdy $x\in\boldsymbol{C}$;
g) $f(x)=\{x\}$;
h) $f(x)=\max(3x,x-2)$;
i) $f(x)=\min(4|x|,8)$.

5.8. Wykaż, że poniższe funkcje są różnowartościowe w swojej dziedzinie:

a) $f(x)=-3\sqrt{3}x+\sqrt{5}$;
b) $f(x)=7x-3\sqrt{7}$;
c) $f(x)=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\sqrt{8}$;
d) $f(x)=\frac{-\sqrt{3}}{x}$;
e) $f(x)=\frac{3+x}{x+1}$;
f) $f(x)=\frac{x-5}{x+4}$;
g) $f(x)=\frac{3x+1}{x-3}$;
h) $f(x)=\sqrt{5x}$;
i) $f(x)=-5\sqrt{x-3}$;
j) $f(x)=4\cdot\sqrt{7-\sqrt{3}x}$.

5.9. Zbadaj parzystość i nieparzystość funkcji:

a) $f(x) = 3x - 4$;

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 5$;

c) $f(x) = \sqrt{3x - 4}$;

d) $f(x) = \frac{2x^6 + x^4}{x^4 - 6}$;

e) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 5} + \sqrt{7 - 2x^4}$;

f) $f(x) = x \cdot |x|$;

g) $f(x) = \frac{2}{|x|}$;

h) $f(x) = \frac{|x|}{x}$;

i) $f(x) = \frac{x^5 - x^2}{2x}$;

j) $f(x) = x^2 \cdot (x + 5)$;

k) $f(x) = \frac{3x^2 - 5}{|2x - 3|}$;

l) $f(x) = \frac{x^5}{x^6 - 36}$;

m) $f(x) = \frac{x^7 - x^5}{|2x - 1|}$;

n) $f(x) = [x]$.

5.10. Które z podanych funkcji są parzyste, które nieparzyste, a które nie są ani parzyste, ani nieparzyste:

a) $f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$;

b) $f(x) = x \cdot \sqrt{1 - x^2}$;

c) $f(x) = \sqrt{-x}$;

d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x, & \text{gdy } x < 0 \\ x^2 - x, & \text{gdy } x \geqslant 0; \end{cases}$

e) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3}$;

f) $f(x) = \begin{cases} 3 - x: & x \geqslant 0 \\ 3 + x: & x < 0; \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x^2: & x \geqslant 0 \\ -x^2: & x < 0. \end{cases}$

5.11. Wiedząc, że funkcja f jest:
I. parzysta, II. nieparzysta, zbadaj parzystość i nieparzystość funkcji:

a) $-f(x)$;

b) $f(-x)$;

c) $f(x) + a$, gdy $a \neq 0$;

d) $k \cdot f(x)$, gdy $k \neq 0$;

e) $f(kx)$, gdy $k \neq 0$;

f) $f^2(x)$;

g) $|f(x)|$;

h) $\frac{1}{f(x)}$.

5.12. Przedstaw funkcję f jako sumę funkcji parzystej i nieparzystej:

a) $f(x) = x^6 - 5x^5 + 2x^2 + 1$;

b) $f(x) = \frac{3x^5 - 1}{3 + x^4}$;

c) $f(x) = \frac{1 - 2x^2}{x + 5}$.

5.13. Funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są określone w zbiorze A, symetrycznym na osi względem punktu 0. Rozstrzygnij, czy jest funkcją parzystą funkcja:

a) $f(x) + g(x)$, gdy $f(x)$ i $g(x)$ są funkcjami parzystymi;

b) $f(x) - g(x)$, gdy $f(x)$ i $g(x)$ są funkcjami parzystymi;

c) $f(x)\cdot g(x)$, gdy $f(x)$ i $g(x)$ są funkcjami parzystymi;

d) $f(x)\cdot g(x)$, gdy $f(x)$ jest funkcją parzystą (stałą), zaś $g(x)$ jest funkcją nieparzystą.

5.14. Funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są określone w zbiorze A, symetrycznym na osi względem punktu 0. Rozstrzygnij, czy jest funkcją nieparzystą funkcja:

a) $f(x)+g(x)$, gdy $f(x)$ i $g(x)$ są funkcjami nieparzystymi;

b) $f(x)-g(x)$, gdy $f(x)$ i $g(x)$ są funkcjami nieparzystymi;

c) $f(x)\cdot g(x)$, gdy $f(x)$ i $g(x)$ są funkcjami nieparzystymi.

5.15. Funkcje f_1 i f_2 są parzyste, zaś funkcje g_1 i g_2 są nieparzyste. Wszystkie one są określone w tej samej dziedzinie D, a zbiór wartości każdej z nich jest podzbiorem D. Określ parzystość i nieparzystość funkcji:

a) f_1+f_2; b) g_1+g_2; c) f_1+g_1;
d) $f_1\cdot f_2$; e) $g_1\cdot g_2$; f) $f_1\cdot g_1$;
g) złożenie g_2 z g_1; h) złożenie f_2 z f_1; i) złożenie g_1 z f_1.

5.16. Niech a oznacza zasadniczy okres funkcji. Sporządź wykresy funkcji okresowych:

a) $f(x)=\frac{1}{3}x^2$, gdy $x\in\langle -\pi;\pi)$, $a=2\pi$;

b) $f(x)=-\frac{1}{3}x^2$, gdy $x\in(0,1\rangle$, $a=1$;

c) $f(x)=3x$, gdy $x\in(0;1\rangle$, $a=1$;

d) $f(x)=|x|$, gdy $x\in\langle -1;1\rangle$, $a=2$.

★ **5.17.** Udowodnij, że jeżeli funkcja $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej warunek $f(x+a)=\dfrac{f(x)}{3f(x)-1}$, gdzie $a\neq 0$, to jest okresowa.

★ **5.18.** Funkcja $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ spełnia dla każdego $x\in\boldsymbol{R}$ warunek $f(x+2)=$ $=f(x-1)\cdot f(x+5)$. Udowodnij, że f jest funkcją okresową.

★ **5.19.** Wykaż, że jeżeli funkcja $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x warunek $f(x-a)+f(x)+f(x+a)=0$, gdzie $a\neq 0$, to jest okresowa.

★ **5.20.** Funkcja $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(x+a)=$ $=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}$, gdzie $a>0$. Udowodnij, że f jest funkcją okresową.

★ **5.21.** Udowodnij, że jeżeli funkcja $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(x+a)=\frac{1}{\sqrt{2}}(f(x+2a)+f(x))$, gdzie $a\neq 0$, to f jest funkcją okresową.

★ **5.22.** Udowodnij, że jeżeli funkcja $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(x) = f(x-a) \cdot f(x+a)$, gdzie $a \neq 0$, to jest okresowa.

★ **5.23.** Udowodnij, że jeżeli funkcja $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x nierówności $f(x+3) \leqslant f(x) + 3$ i $f(x+2) \geqslant f(x) + 2$, to funkcja $g(x) = f(x) - x$ jest okresowa.

★ **5.24.** Udowodnij, że jeżeli funkcje $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ i $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ są okresowe o okresach $T_1 \neq 0$ i $T_2 \neq 0$ współmiernych, to znaczy takich, że $\frac{T_1}{T_2} \in \boldsymbol{W}$, to funkcje $f + g$ i $f \cdot g$ też są okresowe.

★ **5.25.** Rozstrzygnij, czy funkcja $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, spełniająca dla każdej liczby rzeczywistej x nierówność $f(x^2) - (f(x))^2 \geqslant \frac{1}{4}$, jest różnowartościowa.

6. Składanie funkcji

6.1. Dane są funkcje $f(x)$ i $g(x)$. Zbuduj funkcje złożone $F(x) = f(g(x))$ i $G(x) = g(f(x))$. Podaj dziedzinę każdej z tych funkcji:

a) $f(x) = 4x,\ x \in \boldsymbol{R},\ g(x) = 2x - 3,\ x \in \boldsymbol{R}$;

b) $f(x) = \frac{x}{5},\ x \in \boldsymbol{R},\ g(x) = x + 3,\ x \in \boldsymbol{R}$;

c) $f(x) = x^3,\ x \in \boldsymbol{R};\ g(x) = x - 1,\ x \in \boldsymbol{R}$;

d) $f(x) = 2x^2,\ x \in \boldsymbol{R};\ g(x) = |x|,\ x \in \boldsymbol{R}$;

e) $f(x) = 2 - x^2,\ x \in \boldsymbol{R};\ g(x) = \sqrt{x},\ x \in \langle 0; \infty)$;

f) $f(x) = x^2 - 1,\ x \in \boldsymbol{R};\ g(x) = |x|,\ x \in \boldsymbol{R}$;

g) $f(x) = \frac{1}{x+2},\ x \in \boldsymbol{R};\ g(x) = 3x - 3,\ x \in \boldsymbol{R}$;

h) $f(x) = |x-2|,\ x \in \boldsymbol{R};\ g(x) = \frac{3}{x},\ x \in \boldsymbol{R}_+$;

i) $f(x) = |x+1|,\ x \in \boldsymbol{R};\ g(x) = \frac{x}{x-2},\ x \neq 2$.

☆ **6.2.** Wyznacz $f(g(x))$, $f(f(x))$, $g(f(x))$, $g(g(x))$, jeśli:

a) $f(x) = 1 - 2x,\ \ g(x) = \frac{1}{2}x + 1$;

b) $f(x) = \frac{1}{x^2},\ \ g(x) = \operatorname{sgn} x$;

c) $f(x) = \begin{cases} 0: & x \leqslant 0 \\ x: & x > 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0: & x \leqslant 0 \\ -x^2: & x > 0. \end{cases}$

☆ **6.3.** Dane są funkcje: $f(x) = x^4 - x^3,\ x \in \boldsymbol{R}$ oraz $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \text{ jest wymierne} \\ -1, & \text{gdy } x \text{ jest niewymierne.} \end{cases}$
Znajdź:

a) $f(g(x))$;
b) $g(g(x))$;
c) $f(f(x))$.

6.4. Dana jest funkcja: $f(x) = \frac{1}{x-1}$ dla $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{1\}$. Podaj dziedzinę i wzór funkcji:

a) $f(f(x))$;
b) $f(f(f(x)))$.

7. Funkcje odwrotne

7.1. Wyznacz $f^{-1}(x)$, jeśli:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x$; b) $f(x)=x^2-1$, gdy $x\geqslant 0$; c) $f(x)=8x^3$;

d) $f(x)=(x+1)^3$; e) $f(x)=\begin{cases}-x: & |x|\leqslant 1\\ x^3: & |x|>1\end{cases}$; f) $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$;

g) $f(x)=\frac{2x}{1+x}$.

7.2. Wyznacz $f^{-1}(x)$, jeśli:

a) $f(x)=\frac{3}{4}x+5$, gdy $x\in \boldsymbol{R}$; b) $f(x)=-5x+7$, gdy $x\in \boldsymbol{R}$;

c) $f(x)=\sqrt{3x+4}$, gdy $x\in\left\langle -\frac{4}{3};+\infty\right)$; d) $f(x)=\sqrt{7-2x}$, gdy $x\in\left(-\infty;-\frac{7}{2}\right\rangle$;

e) $f(x)=\sqrt{x-2}$, gdy $x\in\langle 2;+\infty)$; f) $f(x)=\frac{1}{x-3}$, gdy $x\in \boldsymbol{R}\setminus\{3\}$;

g) $f(x)=[x]$, gdy $x\in \boldsymbol{R}$; h) $f(x)=x^3$, gdy $x\in \boldsymbol{R}$.

8. Przekształcenia wykresu funkcji. Sporządzanie wykresów funkcji

8.1. Dana jest funkcja $f(x)=x^2$. Sporządź wykres tej funkcji, a następnie wykresy funkcji:

a) $g(x)=f(x-1)$; b) $g(x)=-f(x+2)$;

c) $g(x)=f(x)-1$; d) $g(x)=-f(x+1)+2$.

8.2. Posługując się wykresem funkcji $y=x^2$, sporządź wykresy funkcji:

a) $y=3x^2-4$; b) $y=2(x-1)^2+6$;

c) $y=|x^2-3|$; d) $y=x^2-2|x|-3$.

8.3. Sporządź wykres funkcji $y=f(-x)$, jeśli:

a) $f(x)=4x+5$; b) $f(x)=x+\frac{1}{2}$;

c) $f(x)=|x|-3$; d) $f(x)=2|-x|-x$;

e) $f(x)=3|x-2|$.

8.4. Dana jest funkcja $f(x)=x+|x|$. Sporządź wykres tej funkcji, a następnie wykresy funkcji:

a) $g(x)=f(x-1)-1$; b) $g(x)=-f(x)$; c) $g(x)=f(-x)$;

d) $g(x)=f(x+1)+1$; e) $g(x)=2f(x)$; f) $g(x)=f(2x)$;

g) $g(x)=\frac{f(x)}{2}$; h) $g(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$.

8.5. Korzystając z wykresu funkcji f, sporządź wykres funkcji g, jeśli:

a) $f(x)=x^2$, $g(x)=(x-2)^2$;
b) $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2-2$;
c) $f(x)=x^2$, $g(x)=(x-1)^2+3$;
d) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{x+2}$;
e) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{x}+1$;
f) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{x-3}+2$;
g) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x+2}$;
h) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x}-3$;
i) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x-1}+4$;
j) $f(x)=|x|$, $g(x)=|x-2|$;
k) $f(x)=|x|$, $g(x)=|x+2|$;
l) $f(x)=|x|$, $g(x)=|x|-2$;
m) $f(x)=|x|$, $g(x)=|x-1|+3$;
n) $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$, $g(x)=\operatorname{sgn}(x+1)$;
o) $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$, $g(x)=\operatorname{sgn}(x)-3$;
p) $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$, $g(x)=\operatorname{sgn}(x+3)-2$.

8.6. Sporządź wykres funkcji $g(x)=|f(x)|$, jeśli:

a) $f(x)=\frac{3}{4}x-1$;
b) $f(x)=\frac{3}{x}$;
c) $f(x)=\sqrt{x}-4$;
d) $f(x)=x-6|x|$;
e) $f(x)=|x+1|-|x-1|$.

8.7. Sporządź wykresy funkcji:

a) $f(x)=-\frac{2}{x-1}$;
b) $f(x)=\sqrt{|x-4|}$;
c) $f(x)=\frac{1}{|x-5|}$;
d) $f(x)=\left|\frac{1}{4-x}+2\right|$;
e) $f(x)=|\sqrt{x+3}-2|$;
f) $f(x)=||x^2-4|-4|$;
g) $f(x)=|-\sqrt{-x}+2|$;
h) $f(x)=|2|x|-6|$;
i) $f(x)=\sqrt{|x|-4}$.

8.8. Sporządź wykresy funkcji:

a) $y=\operatorname{sgn}(x+3)$;
b) $y=-[x]+2$;
c) $y=-[x-3]$;
d) $y=\min(x,3)$;
e) $y=\max(|x|,4)$;
f) $y=\min\left(\frac{2}{|x|},2\right)$;
g) $y=\frac{|x-4|}{x-4}$.

★ **8.9.** Znajdź wszystkie funkcje $f(x)$ spełniające równanie:

a) $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$, gdy $x\neq 0$;
b) $(x-1)f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x-1}$, gdy $x\in(0;1)$;
c) $2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$, gdy $x\neq 0$;
d) $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x$, gdy $x\in(-1;1)$.

★ **8.10.** Znajdź wszystkie funkcje $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ spełniające dla wszystkich liczb rzeczywistych x równanie $f(x-|x|)+f(x+|x|)=x$.

★ **8.11.** Sporządź wykresy funkcji:

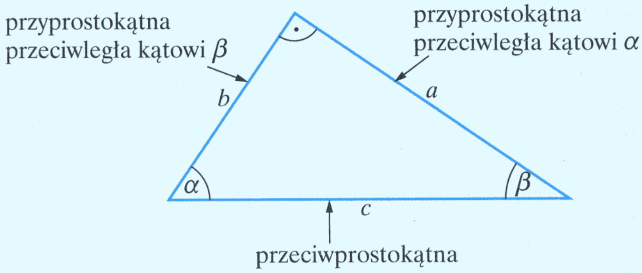
a) $f(x) = [x]^2$; b) $f(x) = [x^2]$; c) $f(x) = x^2 - [x^2]$;

d) $f(x) = (x - [x])^2$; e) $f(x) = \frac{1}{[x]}$; f) $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$.

★ **8.12.** Dla jakich liczb a, b, c, d równość $||x| - 1| = a|x| + b|x-1| + c|x+1| + d$ zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x?

★ **8.13.** Wykaż, że wykres funkcji $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 3$ ma środek symetrii.

VI. Funkcje trygonometryczne



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

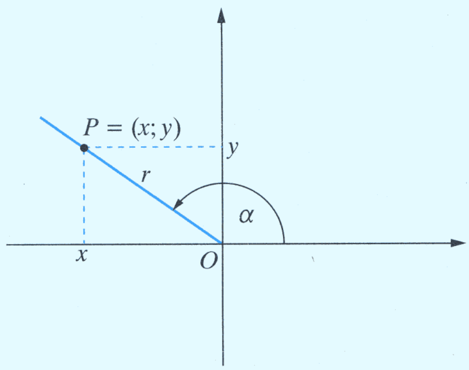
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (jedynka trygonometryczna)

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, gdy $\cos\alpha \neq 0$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, gdy $\sin\alpha \neq 0$

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, gdy $\sin\alpha \neq 0$ i $\cos\alpha \neq 0$

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta



$\sin\alpha = \frac{y}{r}$

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$

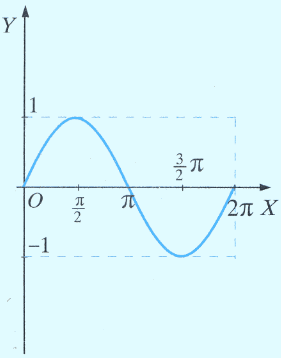
$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}\ (y \neq 0)$

Parzystość i nieparzystość funkcji trygonometrycznych kąta α	**Okresowość funkcji trygonometrycznych** kąta $\alpha \in \langle 0°; 360°\rangle$, $k \in C$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(k \cdot 360° + \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\cos(k \cdot 360° + \alpha) = \cos\alpha$
$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}(k \cdot 360° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, jeśli istnieje $\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(k \cdot 360° + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, jeśli istnieje $\operatorname{ctg}\alpha$

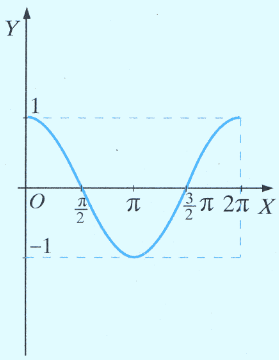
Wzory redukcyjne $\alpha = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

	I ćwiartka	II ćwiartka		III ćwiartka		IV ćwiartka	
Funkcja trygonometryczna kąta α	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3}{2}\pi - \alpha$	$\frac{3}{2}\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$
	$90° - \alpha$	$90° + \alpha$	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$270° - \alpha$	$270° + \alpha$	$360° - \alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

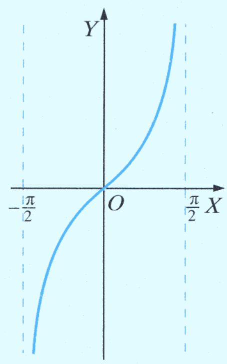
Wykresy funkcji trygonometrycznych



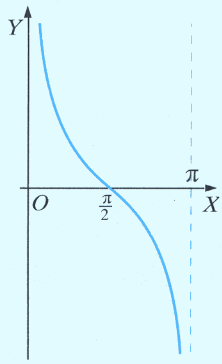
$y = \sin x,\ x \in \boldsymbol{R}$



$y = \cos x,\ x \in \boldsymbol{R}$



$y = \operatorname{tg} x,$
$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

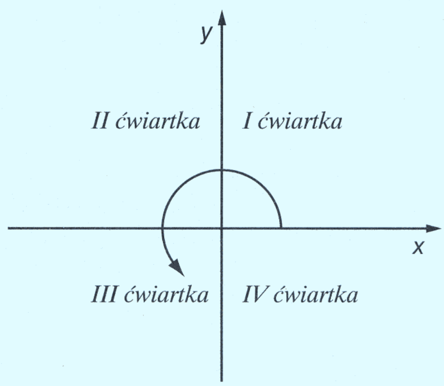


$y = \operatorname{ctg} x,$
$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Znaki funkcji trygonometrycznych

Znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych.

Funkcja	Ćwiartka			
	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	–	+	–
$\operatorname{ctg}\alpha$	+	–	+	–



Znaki: w pierwszej ćwiartce – wszystkie są dodatnie, w drugiej – tylko sinus, w trzeciej – tangens i cotangens, a w czwartej – cosinus.

VI. Funkcje trygonometryczne

1. Pojęcie miary kąta i jego uogólnienie

1.1. Przedstaw kąty: $50°$, $420°$, $785°$, $838°$, $953°$, $1399°$, $2158°$, $1555°$, $2161°$, $-1119°$, $-1625°$, $-2222°$, $-1079°$, $-833°$, $-1600°$, $-739°$ w postaci:
a) $n \cdot 360° + \alpha, 0° < \alpha < 360°$; b) $k \cdot 180° + \alpha, 0° < \alpha < 180°$;
c) $m \cdot 90° + \alpha, 0° < \alpha < 90°$;
gdzie $n, k, m \in \boldsymbol{C}$.

1.2. Wskaż w której ćwiartce układu współrzędnych leży końcowe ramię kąta:
a) $95°$; b) $178°$; c) $181°$;
d) $-87°$; e) $2°30'$; f) $225°$;
g) $-285°$; h) $266°$; i) $-169°$;
j) $45°$; k) $303°$; l) $-355°$.

1.3. Zbuduj kąt β taki, że $90° < \beta < 180°$ oraz:
a) $\cos\beta = -0{,}3$; b) $\sin\beta = 0{,}7$; c) $\operatorname{tg}\beta = -5$.

1.4. Zbuduj kąt γ taki, że $270° < \gamma < 360°$ oraz:
a) $\operatorname{tg}\gamma = -0{,}1$; b) $\sin\gamma = -0{,}8$; c) $\cos\gamma = 0{,}9$.

1.5. Zbuduj kąt γ taki, że $180° < \gamma < 270°$ oraz:
a) $\operatorname{ctg}\gamma = 10$; b) $\sin\gamma = -\frac{3}{4}$; c) $\cos\gamma = -\frac{1}{3}$.

1.6. Wyznacz kąty, jakie tworzą z dodatnią półosią osi OX proste o równaniach:
a) $2(x+3) = y + x$; b) $x + \sqrt{3}\,y = -5$; c) $\sqrt{3}\,x - y = 7\sqrt{3}$;
d) $x - \sqrt{3}\,y = 20$; e) $x + y = 2x + 4$; f) $x^2 - y^2 = 0$.

1.7. Wyznacz tangensy kątów, jakie tworzy z dodatnią półosią osi OX prosta o równaniu:
a) $2x - 3y + 5 = 0$; b) $x - 5y + 7 = 0$; c) $-3x + 7y = 2(x-3)$;
d) $y = 3x + 2$; e) $5x + y - 3 = 0$; f) $3x - 5y = 2$;
g) $y - x - 7 = 0$.

2. Miara łukowa kąta

2.1. Jaką miarę łukową ma kąt o mierze stopniowej:
a) $15°$; b) $22°30'$; c) $135°$; d) $150°$; e) $75°$; f) $36°$; g) $108°$;
h) $50°$; i) $85°$; j) $32{,}5°$; k) $120°$; l) $270°$; m) $115°$;
n) $225°$; o) $315°$; p) $405°$; r) $540°$; s) $555°$; t) $615°$?

2.2. Jaką miarę łukową ma kąt o mierze stopniowej:
a) $80°$; b) $235°$; c) $359°$;
d) $512°$; e) $100°$; f) $181°$?

2.3. Jaką miarę stopniową ma kąt o mierze łukowej:

a) 2 rad; b) 3,5 rad; c) $\frac{\pi}{4}$ rad; d) $\frac{3\pi}{2}$ rad; e) $\frac{3}{4}\pi$ rad;

f) 0,6 rad; g) $\frac{3}{8}\pi$ rad; h) $\frac{\pi}{9}$ rad; i) $\frac{2}{5}\pi$ rad; j) $\frac{5}{4}\pi$ rad?

2.4. Jaką miarę stopniową ma kąt o mierze łukowej:

a) $\sqrt{2}$ rad; b) $1{,}2\pi$ rad; c) π rad;

d) 2,7 rad; e) $\frac{\pi}{3}$ rad; f) 2π rad;

g) $\frac{\pi}{12}$ rad; h) $\frac{\pi}{10}$ rad; i) $\frac{11\pi}{5}$ rad;

j) 2,1 rad; k) 1,5 rad; l) $\frac{2}{9}\pi$ rad.

2.5. W okręgu o promieniu $r = 4$ cm dany jest kąt środkowej o mierze $\frac{\pi}{20}$ rad. Oblicz długości łuku odpowiadającego temu kątowi.

2.6. Promień okręgu równa się 25 cm. Oblicz długość łuku odpowiadającego kątowi:

a) 2,5 rad; b) 225°.

2.7. W okręgu o promieniu 3 cm dany jest kąt środkowy o mierze 28°. Oblicz długość łuku odpowiadającego temu kątowi.

2.8. Koło wykonuje 240 obrotów w ciągu 5 min. Wyraź prędkość obrotu w radianach na sekundę.

2.9. Koło obraca się z prędkością 3,5 rad/s. Ile obrotów wykonuje w ciągu minuty?

2.10. Promień okręgu ma długość 3,6 cm. Kąt środkowy tego okręgu oparty jest na łuku o długości 9 cm. Wyznacz miarę tego kąta: a) łukową; b) stopniową.

★ **2.11.** Wyznacz miarę łukową i stopniową mniejszego z dwóch kątów, jakie tworzą wskazówki zegara: godzinowa i minutowa, o godzinie:

a) 15^{30}; b) 17^{40}; c) 10^{20}; d) 14^{10}; e) 12^{15}; f) 23^{00}.

3. Funkcje trygonometryczne dowolnego argumentu

3.1. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych podanych kątów:

a) 135°; b) 150°; c) 225°; d) 240°; e) $\frac{5}{3}\pi$; f) $\frac{11}{6}\pi$; g) $\frac{5}{4}\pi$.

3.2. Oblicz wartości funkcji sinus i cosinus podanych kątów:

a) $\frac{13}{3}\pi$; b) $\frac{25}{3}\pi$; c) $\frac{17}{4}\pi$;

d) $-\frac{3}{2}\pi$; e) $\frac{7}{2}\pi$; f) $\frac{14}{3}\pi$;

g) -7π; h) 35π; i) $-\frac{15}{2}\pi$.

3.3. Oblicz wartości funkcji tangens i cotangens podanych kątów:

a) 0; b) $\frac{\pi}{3}$; c) $\frac{7\pi}{3}$;

d) $\frac{15}{4}\pi$; e) $\frac{17}{4}\pi$; f) $-\frac{\pi}{6}$;

g) $-\frac{7\pi}{3}$; h) -2π; i) $\frac{9\pi}{2}$.

3.4. Oblicz:

a) $\sin\frac{13\pi}{4}$; b) $\cos\frac{37\pi}{6}$; c) $\operatorname{tg}\frac{25\pi}{4}$;

d) $\operatorname{ctg} 420^\circ$; e) $\sin(-330^\circ)$; f) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

g) $\operatorname{ctg}(-315^\circ)$; h) $\operatorname{tg}(-7\pi)$; i) $\sin\left(\frac{49\pi}{6}\right)$.

3.5. Oblicz:

a) $\frac{1}{4}\sin\frac{5\pi}{6}\cdot(0,1)^{-1}\cos\pi+\left(-\frac{8}{27}\right)\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$;

b) $\cos\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}-\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

c) $\dfrac{\sin^2\frac{8\pi}{3}\cos(-3\pi)}{\operatorname{tg}\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{9\pi}{4}\right)}$;

d) $\cos 60^\circ+2\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 60^\circ-\operatorname{ctg} 45^\circ$;

e) $3\cos 180^\circ+5\operatorname{ctg} 270^\circ-2\sin 360^\circ-\operatorname{tg} 60^\circ$;

f) $\sin 150^\circ\cdot\sin 240^\circ-\operatorname{tg} 360^\circ\cdot\cos 315^\circ-\operatorname{ctg}(-30^\circ)\cdot\sin^2 330^\circ+3\operatorname{tg}^2 30^\circ$;

g) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}+\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)^{\sin\pi}$.

3.6. Określ znak następujących wyrażeń:

a) $\sin 110^\circ\cdot\cos 110^\circ\cdot\operatorname{tg} 230^\circ\cdot\operatorname{ctg} 320^\circ$;

b) $-\sin 50^\circ\cdot\operatorname{tg} 170^\circ\cdot(-\cos(-91^\circ))\operatorname{ctg}(-640^\circ)\cdot\sin 530^\circ$;

c) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{9\pi}{8}\cdot\operatorname{ctg}\frac{8}{\pi}$; d) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{15}\right)\cdot\cos\sqrt{2}\,\pi$;

e) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}-\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{12}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$; f) $(\operatorname{ctg} 2,6-\operatorname{ctg} 2,5)\cdot(\operatorname{tg} 2,6-\operatorname{tg} 2,5)$;

g) $\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{11}{10}\pi\cdot\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{6\pi}{5}$; h) $\left(\sin\frac{\pi}{20}-\sin\frac{\pi}{15}\right)\cdot\sin\frac{15\pi}{4}$;

i) $\cos(\pi-\alpha)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$, jeśli $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

3.7. Dane są cztery przedziały: $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. Wymień te przedziały, w których:

a) funkcja sinus przyjmuje wartości dodatnie;
b) funkcja sinus przyjmuje wartości ujemne;
c) funkcja cosinus przyjmuje wartości dodatnie;
d) funkcja cosinus przyjmuje wartości ujemne.

3.8. Dla jakich $\alpha \in (0; 2\pi)$ spełnione są warunki:

a) $\sin\alpha > 0$ i $\operatorname{tg}\alpha > 0$;
b) $\cos\alpha > 0$ i $\operatorname{tg}\alpha < 0$;
c) $\sin\alpha < 0$ i $\operatorname{tg}\alpha > 0$;
d) $\cos\alpha > 0$ i $\operatorname{ctg}\alpha > 0$;
e) $\sin\alpha < 0$ i $\operatorname{ctg}\alpha < 0$;
f) $\cos\alpha < 0$ i $\operatorname{ctg}\alpha < 0$.

4. Własności funkcji trygonometrycznych dowolnego argumentu

4.1. Uporządkuj rosnąco liczby:

a) $\sin 45^\circ, \sin 0^\circ, \sin 30^\circ, \sin 90^\circ, \sin 60^\circ$;
b) $\sin 1,\ \sin 2{,}5,\ \sin 1{,}7,\ \sin 3,\ \sin\pi$;
c) $\cos 20^\circ,\ \cos 100^\circ,\ \cos 73^\circ,\ \cos 4^\circ,\ \cos 0^\circ,\ \cos 180^\circ$;
d) $\cos 0,\ \cos\pi,\ \cos 3{,}14,\ \cos 2,\ \cos 1,\ \cos 3,\ \cos\frac{\pi}{2}$;
e) $\cos\frac{\pi}{2},\ \cos\pi,\ \cos\frac{2}{3}\pi,\ \cos\frac{3}{2}\pi,\ \cos\frac{3}{4}\pi,\ \cos\frac{5}{4}\pi$.

4.2. Oblicz:

a) $\sin\frac{13\pi}{4}$;
b) $\cos\frac{37\pi}{6}$;
c) $\operatorname{tg}\frac{25\pi}{4}$;
d) $\operatorname{ctg} 420^\circ$;
e) $\sin(-330^\circ)$;
f) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;
g) $\operatorname{ctg}(-315^\circ)$;
h) $\operatorname{tg}(-7\pi)$;
i) $\sin\left(\frac{49\pi}{6}\right)$.

4.3. Wskaż, które z podanych zdań są prawdziwe, a które fałszywe:

a) $\sin 0^\circ = 0$;
b) $\sin 40^\circ < 0$;
c) $\sin 37^\circ > 0$;
d) $\sin 200^\circ < 0$;
e) $\sin 3 = 0$;
f) $\sin 5 > 0$;
g) $\sin 2 < 0$;
h) $\sin 3{,}14 > 0$.

4.4. Wskaż, które z podanych zdań są prawdziwe, a które fałszywe:

a) $\cos 5^\circ < 0$;
b) $\cos 27^\circ > 0$;
c) $\cos 302^\circ < 0$;
d) $\cos 270^\circ < 0$;
e) $\cos 2{,}3 > 0$;
f) $\cos 3{,}7 > 0$;
g) $\cos 3 < 0$;
h) $\cos 5 > 0$.

4.5. Czy $\sin\alpha$ może się równać:

a) $\frac{4}{5}$;
b) $\frac{8}{7}$;
c) $\frac{\sqrt{7}}{3}$;
d) $\frac{2-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$;
e) $a + \frac{1}{a}$;
f) $\frac{1}{\cos\alpha}$?

4.6. Czy $\cos\alpha$ może się równać:

a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{-2}{\sqrt{5}}$;

c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; d) $\frac{1}{\sin\alpha}$?

4.7. Dany zbiór A podziel na podzbiory, w których funkcja sinus przyjmuje tę samą wartość:

$A=\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, 2\pi, \frac{7\pi}{3}, 3\pi, \pi, \sqrt{2}\,\pi, 17, \frac{\pi}{5}, 7\pi, \frac{21\pi}{5}\right\}$.

4.8. Dany zbiór B podziel na podzbiory, w których funkcja cosinus przyjmuje tę samą wartość:

$B=\left\{\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{5}, -\frac{11\pi}{4}, \frac{21\pi}{5}, \frac{31\pi}{3}, \frac{53\pi}{4}, \pi, \sqrt{2}\,\pi\right\}$.

4.9. Jaki znak ma iloczyn $\sin x \cdot \operatorname{tg}^3 x \cdot \cos x \cdot \operatorname{ctg} x \cdot \frac{1}{\cos^5 x}$, jeśli:

a) $0° < x < 90°$; b) $90° < x < 180°$;

c) $180° < x < 270°$; d) $270° < x < 360°$?

4.10. Dla jakich $\alpha \in (0; 2\pi)$ spełnione są warunki:

a) $\sin\alpha > 0$ i $\operatorname{tg}\alpha > 0$; b) $\cos\alpha > 0$ i $\operatorname{tg}\alpha < 0$;

c) $\sin\alpha < 0$ i $\operatorname{tg}\alpha > 0$; d) $\cos\alpha > 0$ i $\operatorname{ctg}\alpha > 0$;

e) $\sin\alpha < 0$ i $\operatorname{ctg}\alpha < 0$; f) $\cos\alpha < 0$ i $\operatorname{ctg}\alpha < 0$?

☆ **4.11.** Jaką liczbą (dodatnią czy ujemną) jest:

a) $\sin(\cos 1)$; b) $\cos(\sin 1)$; c) $\operatorname{tg}(\sin 2)$;

d) $\sin\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)$; e) $\operatorname{ctg}(\cos 3)$; f) $\cos\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\right)$?

☆ **4.12.** Która z liczb jest większa:

a) $\sin 1$ czy $\operatorname{tg} 1$; b) $\cos 1$ czy $\operatorname{ctg} 1$; c) $\sin 2$ czy $\cos 2$; d) $\operatorname{tg} 1$ czy $\operatorname{ctg} 1$?

5. Przekształcanie wyrażeń trygonometrycznych

5.1. Uprość wyrażenia:

a) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$; b) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$;

c) $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$; d) $\frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha$;

e) $\operatorname{tg}\alpha + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$; f) $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

g) $(\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha$; h) $(1+\sin x)\left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x\right)$.

5.2. Uprość ułamki:

a) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$; b) $\frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}$; c) $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$; d) $\frac{\sin\alpha - \sin^3\alpha}{\cos\alpha - \cos^3\alpha}$.

5.3. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

a) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha$; b) $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha$; c) $(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)$;

d) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; e) $\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}\right)$;

f) $\cos^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$; g) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$;

h) $\sin\alpha-\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$; i) $\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^3\alpha$;

j) $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha$; k) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$;

l) $\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$; m) $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)}$;

n) $\cos\alpha\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; o) $\sin\alpha\cdot\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

5.4. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

a) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha$; b) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$;

c) $\sin^4\alpha+\cos^2\alpha-\cos^4\alpha$; d) $\sin\alpha-\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha}$, jeśli $\pi<\alpha<2\pi$;

e) $\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, jeśli $3\pi<\alpha<4\pi$;

f) $\frac{\sin^2\alpha+\cos\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^3\alpha}$; g) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha$;

h) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+1}{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}$; i) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha$;

j) $\left(\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}\right):(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)$, jeśli $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;

k) $\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}+\frac{\sin\alpha}{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\right):\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;

l) $\sin\alpha-\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha}$, jeśli $180°<\alpha<360°$;

m) $\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha\right)\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)$.

☆ **5.5.** Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

a) $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$, jeśli $\alpha\in\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$;

b) $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$, jeśli $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$;

c) $\cos\alpha\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$;

d) $\frac{\cos^2\alpha-2\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha+(1+\sin\alpha)\cos\alpha}\cdot\frac{2(1+\sin\alpha)}{1-\sin\alpha}$;

e) $\frac{2(1+\operatorname{tg}\alpha)\sin\alpha\cos\alpha+1}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2}-\frac{2(1+\operatorname{ctg}\alpha)\sin\alpha\cos\alpha+1}{(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2}$;

f) $\left(\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\dfrac{1}{\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2-\dfrac{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

5.6. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

a) $\sin\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(-\alpha)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

b) $\sin(\pi-\alpha)\cdot\sin(180^\circ-\alpha)-\sin(-\alpha)\cdot\cos(180^\circ+\alpha)$;

c) $\sin(90^\circ-\alpha)^\circ\cdot\sin(90^\circ+\alpha)+\sin(180^\circ+\alpha)\cdot\cos(90^\circ+\alpha)$;

d) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\cdot\cos(\alpha-3\pi)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)$;

e) $\sin(\alpha-17\pi)\cdot\cos(\pi+\alpha)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

5.7. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

a) $\sin(90^\circ-\alpha)-\cos(180^\circ-\alpha)+\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)-\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)$;

b) $\dfrac{\cos(\alpha-90^\circ)}{\sin(180^\circ-\alpha)}+\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-180^\circ)\cdot\cos(180^\circ+\alpha)\cdot\sin(270^\circ+\alpha)}{\operatorname{tg}(270^\circ+\alpha)}$;

c) $\sin^2(180^\circ-\alpha)+\operatorname{tg}^2(180^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}^2(270^\circ+\alpha)+\sin(90^\circ+\alpha)\cdot\cos(\alpha-360^\circ)$;

d) $\dfrac{(a\sin 90^\circ)^3+\operatorname{ctg}270^\circ+(b\cos 180^\circ)^3}{(a\cos 0^\circ)^2-ab\sin 270^\circ+b^2+\operatorname{tg}^2 180^\circ}$.

5.8. Uprość wyrażenie:

$\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1-\sin(-\alpha)}}$ i $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

6. Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego argumentu

6.1. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, jeżeli:

a) $\sin\alpha=-0{,}6$ i $\alpha\in(180^\circ;270^\circ)$;

b) $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ i $\alpha\in(90^\circ;180^\circ)$;

c) $\operatorname{tg}\alpha=-0{,}75$ i $\alpha\in(270^\circ;360^\circ)$;

d) $\operatorname{ctg}\alpha=2$ i $\alpha\in(180^\circ;270^\circ)$.

6.2. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, jeżeli:

a) $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;

b) $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, $\alpha\in(90^\circ;180^\circ)$;

c) $\sin\alpha=\frac{-20}{29}$, $\alpha\in(180^\circ;270^\circ)$;

d) $\sin\alpha=-\frac{15}{17}$, $\alpha\in(270^\circ;360^\circ)$;

e) $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $\alpha\in(0^\circ;90^\circ)$;

f) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\alpha\in(90^\circ;180^\circ)$;

g) $\cos\alpha=-\frac{21}{29}$, $\alpha\in(180^\circ;270^\circ)$;

h) $\sin\alpha=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$, $\alpha\in(0^\circ;90^\circ)$;

i) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, $\alpha\in(270^\circ;360^\circ)$;

j) $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ i $a>0$ i $b>0$.

6.3. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, jeżeli:

a) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{21}{20}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;
b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{4}, \alpha \in (\pi; 2\pi)$;

c) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{9}, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;
d) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}, \alpha \in (0°; 90°)$;

e) $\operatorname{ctg}\alpha = -2, \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$;
f) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}, \alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$;

g) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{m}, \alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$;
h) $\operatorname{ctg}\alpha = m, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

6.4. Wiedząc, że $\sin(180° + \alpha) = -\frac{1}{2}$, oblicz:

a) $\sin(270° + \alpha)$;
b) $\cos(90° + \alpha)$;
c) $\operatorname{tg}(-270° + \alpha)$;
d) $\operatorname{ctg}(180° - \alpha)$.

6.5. Wiedząc, że $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ i $90° < \alpha < 180°$, oblicz:

a) $\cos(270° - \alpha)$;
b) $\sin(90° + \alpha)$;
c) $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$;
d) $\operatorname{ctg}(360° - \alpha)$.

6.6. Wiedząc, że $\alpha \in \left(0°; \frac{\pi}{2}\right)$ i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$, oblicz:

a) $\sin(\pi - \alpha)$;
b) $\cos(\pi + \alpha)$;
c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;
d) $\sin(2\pi - \alpha)$.
e) $\sin(-\alpha)$;
f) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$.

6.7. Wiedząc, że $\sin x = \frac{1}{3}$ i $\operatorname{ctg} x < 0$, oblicz:
a) $\operatorname{tg} x$;
b) $\sin x - \operatorname{ctg} x$;
c) $\sin^3 x + \cos^3 x$.

6.8. Wiedząc, że $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, oblicz:

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;
b) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$;
c) $\frac{\sin^2\alpha}{1 + \cos\alpha}$;
d) $\operatorname{tg}\alpha$;
e) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;
f) $\operatorname{ctg}\alpha$.

☆ **6.9.** Wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2$, oblicz:
a) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$;
b) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$;
c) $\operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha$.

☆ **6.10.** Oblicz $\operatorname{tg}\alpha$, wiedząc, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$ i:

a) $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$;
b) $\alpha \in \left(2\pi; \frac{5}{2}\pi\right)$.

☆ **6.11.** Oblicz $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$, jeśli $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = m$.

☆ **6.12.** Wiedząc, że $\sin\alpha + \cos\alpha = m$, oblicz $\sin^4\alpha + \sin^4\alpha$.

☆ **6.13.** Wiedząc, że $\sin\alpha - \cos\alpha = m$, oblicz:

a) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$; b) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.

☆ **6.14.** Oblicz $a = \sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta$, wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = -1$ i $\operatorname{tg}\beta = -\sqrt{3}$.

☆ **6.15.** Udowodnij, że jeśli $a = x\cos\alpha$ i $b = y\sin\alpha$, to $y^2 \cdot a^2 + x^2 \cdot b^2 = x^2 y^2$.

7. Dowodzenie tożsamości trygonometrycznych

7.1. Udowodnij tożsamości:

a) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$;

b) $\frac{1}{\cos x} - \cos x = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$;

c) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

d) $1 + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$;

e) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$;

f) $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$;

g) $\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right)(\sin x + \cos x) = 2 + \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$;

h) $\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}\right)(\sin x + \cos x) = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$;

i) $1 - 2\sin^2 x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

☆ **7.2.** Udowodnij tożsamości:

a) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

b) $(1 - \cos^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \operatorname{tg}^2\alpha$;

c) $\frac{1 + \operatorname{tg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$;

d) $(1 + 2\operatorname{tg}\alpha)(2 + \operatorname{tg}\alpha) = 5\operatorname{tg}\alpha + \frac{2}{\cos^2\alpha}$;

e) $\frac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = 1 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha$;

f) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha = \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$;

g) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$;

h) $\frac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}^2\alpha} = \sin^2\alpha$;

i) $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) + 1 = 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$;

j) $(1 + \operatorname{ctg}\alpha) \cdot \sin^3\alpha + (1 + \operatorname{tg}\alpha)\cos^3\alpha = \sin\alpha + \cos\alpha$;

k) $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}$;

l) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$;

m) $(x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2+(y\sin\alpha-x\cos\alpha)^2=x^2+y^2$;

n) $\operatorname{tg}18^\circ\cdot\operatorname{tg}288^\circ+\sin32^\circ\cdot\sin148^\circ-\sin302^\circ\cdot\sin122^\circ=0$;

o) $\operatorname{tg}41^\circ\cdot\operatorname{tg}42^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}49^\circ=1$.

☆ **7.3.** Udowodnij tożsamości:

a) $\dfrac{1-\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}{1-\sin^6\alpha-\cos^6(2\pi-\alpha)}=\dfrac{2}{3\cos^2\alpha}$;

b) $\left[1+\dfrac{1}{\cos(2\pi-\alpha)}+\operatorname{tg}(7\pi+\alpha)\right]\left(1-\dfrac{1}{\cos\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\right)(1-\sin^2\alpha)=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$;

c) $\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}-1\right)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha)^2+2\cos\alpha=1+\cos^2\alpha$;

d) $\dfrac{(1-\cos\alpha\cdot\cos\beta)^2\cdot\sqrt{1-\dfrac{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}{(1-\cos\alpha\cdot\cos\beta)^2}}}{(1-\cos\alpha\cdot\cos\beta)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin^2\beta}=\dfrac{1}{\sin\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha\cdot\cos\beta$,

jeśli $0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

8. Wykresy funkcji trygonometrycznych

8.1. Posługując się wykresami funkcji trygonometrycznych, sporządź wykresy funkcji:

a) $y=1-\sin x$; b) $y=1+\sin x$;

c) $y=-1+\sin x$; d) $y=1+\cos x$;

e) $y=\sin\dfrac{x}{2}$; f) $y=\sin 3x$;

g) $y=\sin(-2x)$; h) $y=2\sin x$;

i) $y=-2\sin x$; j) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$;

k) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$; l) $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$.

8.2. Sporządź wykresy funkcji:

a) $f(x)=\sin 2x$; b) $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$; c) $f(x)=2-\sin x$;

d) $f(x)=\cos x-1$; e) $f(x)=2\sin\dfrac{x}{2}-1$; f) $f(x)=\sin|x|$;

g) $f(x)=\sin x+|\sin x|$; h) $f(x)=\frac{|\cos x|}{\cos x}$; i) $f(x)=1-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$;

j) $f(x)=\frac{x}{|x|}+\cos\frac{x-|x|}{2}$.

8.3. Wyznacz okres podstawowy funkcji:

a) $y=\sin\frac{1}{3}x$; b) $y=\sin 3x$;

c) $y=\cos\frac{x}{2}$; d) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{9}\right)$;

e) $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$; f) $y=\sin\frac{4}{3}x$;

g) $y=\cos(4\pi x+2)$; h) $y=\cos^2 x$;

i) $y=\operatorname{tg}2x$; j) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$;

k) $y=\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3}$; l) $y=\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{5}$.

8.4. Wyznacz okres podstawowy funkcji:

a) $f(x)=\sin\frac{3}{2}x$; b) $f(x)=\cos 4x$; c) $f(x)=\operatorname{tg}2\pi x$;

d) $f(x)=\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}$; e) $f(x)=\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; f) $f(x)=\operatorname{ctg}2x-\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$;

g) $f(x)=\sin 2x+\sin\frac{x}{2}$; h) $f(x)=\cos 2x-\cos\frac{x}{3}$; i) $f(x)=\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{5}+\operatorname{ctg}\frac{2\pi x}{5}$.

8.5. Określ dziedzinę funkcji:

a) $y=\frac{\sin x}{x}$; b) $y=x\cdot\cos x$;

c) $y=\sin x+\frac{1}{\cos x}$; d) $y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$;

e) $y=\frac{1}{2+\cos x}$; f) $y=\frac{\cos x}{\sin x-3}$.

8.6. Określ zbiór wartości funkcji:

a) $y=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$; b) $y=|3-\cos\alpha|$.

☆ **8.7.** Znajdź zbiór wartości funkcji:

a) $f(x)=1+\sin\alpha$; b) $f(x)=1-\sin^2\alpha$; c) $f(x)=2-\cos^2\alpha$;

d) $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos^2\alpha$; e) $f(x)=\operatorname{ctg}^2\alpha-1$; f) $f(x)=1+\operatorname{tg}^2\alpha$.

☆ **8.8.** Znajdź zbiór wartości funkcji:

a) $f(x)=|2-\cos x|$; b) $f(x)=\sin|x|$; c) $f(x)=2\cos x+1$.

8.9. Wskaż, która z podanych funkcji jest parzysta, a która nieparzysta:

a) $y=\sin 2x$; b) $y=\sin^3 x$;

c) $y=\sin x+\cos x$; d) $y=x\cos x$;

e) $y = \frac{\sin x}{x}$; f) $y = \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x}$;

g) $y = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$; h) $y = |1 + \cos x|$;

i) $y = x^2 \operatorname{tg} x$; j) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

8.10. Wskaż, która z podanych funkcji jest parzysta, a która nieparzysta:

a) $f(x) = x \sin x$; b) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$; c) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$;

d) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; e) $f(x) = \frac{x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$; f) $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x}$;

g) $f(x) = |\operatorname{tg} x|$; h) $f(x) = \sin x \cos x$; i) $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$.

☆ **8.11.** Dla jakich wartości parametrów A i B funkcja $f(x) = A \sin x + B \cos x$ jest

a) parzysta; b) nieparzysta?

☆ **8.12.** Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji:

a) $y = \sin^2 \alpha + 2$; b) $y = 2 - 4 \sin \alpha$;

c) $y = 3 - 2 \cos \alpha$; d) $y = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

☆ **8.13.** Wyznacz największą wartość wyrażeń:

a) $1 + \cos \alpha$; b) $5 - 2 \cos \alpha$;

c) $1 - \cos \alpha$; d) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha + 1$.

☆ **8.14.** Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji:

a) $y = \frac{1}{2 \sin^2 x - 3 \cos^2 x - 3}$; b) $y = \frac{1}{5 \cos^2 x - 3 \sin^2 x - 6}$.

★ **8.15.** Udowodnij, że funkcja $f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}$ przyjmuje tylko wartości dodatnie.

★ **8.16.** Udowodnij, że jeżeli a jest liczbą niewymierną, to funkcja $f(x) = \cos x + \cos ax$ nie jest okresowa.

★ **8.17.** Udowodnij, że funkcja $f(x) = \sin x + \sin\left(\sqrt{2}\, x\right)$ nie jest okresowa.

★ **8.18.** Udowodnij, że funkcja $f(x) = \sin \sqrt{x}$ nie jest okresowa.

9. Równanie i nierówności trygonometryczne

9.1. Rozwiąż równania:

a) $\sin 2x = 1$; b) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$;

c) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1$; d) $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = 0$;

e) $\sin(2x - 1) = 1$; f) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$;

g) $\frac{1}{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{1}{6}$; h) $5 \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4} x - \frac{\pi}{5}\right) = -5$.

9.2. Wyznacz liczbę rozwiązań równania $|\sin x| = 2a + 1$, $x \in \langle 0; 4\pi \rangle$ w zależności od parametru a.

9.3. Wyznacz liczbę rozwiązań równania $|\cos x| = 3a - 1$, $x \in \langle 0; 5\pi \rangle$ w zależności od parametru a.

9.4. Rozwiąż nierówności w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$:

a) $|\sin x| < 1$; b) $\operatorname{tg}^2 x > 1$; c) $\operatorname{ctg}^2 x > 3$;

d) $|\sin x| > |\cos x|$; e) $\cos^2 x < 1$.

9.5. Rozwiąż nierówności:

a) $\sin 2x > 0$ i $0^\circ < x < 180^\circ$; b) $\cos 2x < 0$ i $0^\circ < x < 90^\circ$;

c) $\sin 2x > 0$ i $\cos 2x < 0$; d) $\sin 2x > 0$ i $\sin x < 0$.

☆ **9.6.** Udowodnij, że jeżeli $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in C$, to $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x \geqslant 2$.

☆ **9.7.** Udowodnij, że jeżeli $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in C$, to $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x \geqslant 2$.

★ **9.8.** Wykaż, że dla każdego $x \in R$ spełniona jest nierówność: $\sin^6 x + \cos^6 x \geqslant \frac{1}{4}$.

☆ **9.9.** Rozwiąż równania:

a) $16 \sin 2\pi x = 16x^2 - 8x + 17$; b) $x^2 - x - \sin \pi x + \frac{5}{4} = 0$;

c) $\sin^{2003} x + \cos^{2003} x = 1$; d) $\sin^{2003} x - \cos^{2003} x = 1$.

★ **9.10.** Rozwiąż równania:

a) $\operatorname{tg}^2(x+y) + \operatorname{ctg}^2(x+y) = 1 - 2x - x^2$; b) $x^2 + 2x \sin(xy) + 1 = 0$.

★ **9.11.** Rozwiąż nierówność $2x^4 \leqslant \sin^4 x + \cos^6 x - 1$.

★ **9.12.** Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x z przedziału $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right)$ zachodzą nierówności:

a) $\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$; b) $\operatorname{tg} x + \sin x \geqslant 2x$.

★ **9.13.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi nierówność: $x^2 + 4x \cos(xy) + 4 \geqslant 0$. Dla jakich x, y zachodzi równość?

★ **9.14.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi nierówność: $x^2(1 + \sin^2 y) + 2x(\sin y + \cos y) + 1 + \cos^2 y \geqslant 0$. Dla jakich x, y zachodzi równość?

★ **9.15.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych α, β, γ z przedziału $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ prawdziwa jest nierówność:

$\operatorname{tg} \alpha (\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) + \operatorname{tg} \beta (\operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \alpha) + \operatorname{tg} \gamma (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) \geqslant 6$.

★ **9.16.** Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $\frac{1 - |\cos x|}{1 + |\cos x|} \leqslant \sin^2 x$.

Znajdź te wartości x, dla których zachodzi równość $\frac{1 - |\cos x|}{1 + |\cos x|} = \sin^2 x$.

★ **9.17.** Udowodnij, że jeżeli $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in C$, to $|\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x| > |\sin x + \cos x|$.

★ **9.18.** Przedstaw ilustrację geometryczną każdego z równań:
a) $\sin^2 \pi (x^2 + y^2) = 1$; b) $\sin^2 \pi x + \cos^2 \pi y = 1$;
c) $\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = 0$; d) $\sin x + |\sin x| = \sin y + |\sin y|$.

★ **9.19.** Przedstaw ilustrację geometryczną nierówności $\sin \pi (x^2 + y^2) \leqslant 0$.

★ **9.20.** Wykaż, że równanie $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin 2002x = 2002$ nie ma rozwiązania.

★ **9.21.** Rozwiąż nierówność:
$(\operatorname{tg}^2 x_1 + \operatorname{tg}^2 x_2 + \ldots + \operatorname{tg}^2 x_{1001}) + (\operatorname{ctg}^2 x_1 + \operatorname{ctg}^2 x_2 + \ldots + \operatorname{ctg}^2 x_{1001}) \leqslant 2002$.

★ **9.22.** Udowodnij, że jeżeli $\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$, to $\frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3} = \frac{1}{a+b}$.

★ **9.23.** Wykaż, że jeżeli $\operatorname{tg}^2 x$ jest liczbą wymierną, to $\cos^2 x$ jest też liczbą wymierną.

★ **9.24.** Rozwiąż równanie $[\operatorname{tg} x] = 2\cos^2 x$, gdzie $[t]$ oznacza największą liczbę całkowitą, nie większą od liczby rzeczywistej t.

★ **9.25.** Rozwiąż równanie $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \left[\frac{\pi}{6x}\right]\right) = \frac{1}{2}$.

★ **9.26.** Rozwiąż równanie $\operatorname{tg} x - 2[\operatorname{tg} x] + 1 = 0$, gdzie $[t]$ oznacza największą liczbę całkowitą, nie większą od liczby rzeczywistej t.

★ **9.27.** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n i dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $\sin^{2n} x + \cos^{2n} \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

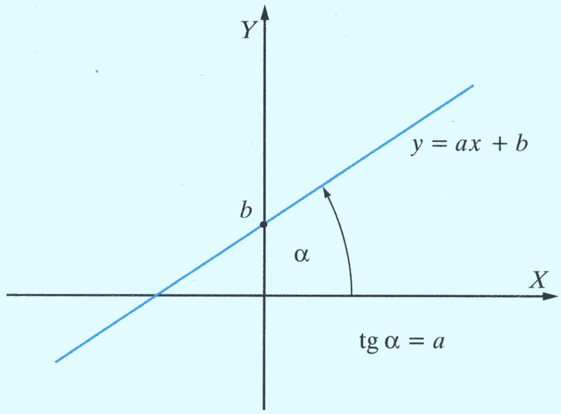
★ **9.28.** Wykaż, że jeżeli $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$, to:
$$\operatorname{tg}^2 \alpha_1 < \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2 + \ldots + \operatorname{tg} \alpha_n}{\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2 + \ldots + \operatorname{ctg} \alpha_n} < \operatorname{tg}^2 \alpha_n.$$

★ **9.29.** Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej α i dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność: $\sin^{2n} \alpha + \cos^{2n} \alpha \leqslant 2(\sin^{2n+2} \alpha + \cos^{2n+2} \alpha)$.

★ **9.30.** Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n i dla każdej liczby rzeczywistej x z przedziału $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ zachodzi nierówność: $\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} \geqslant 1$.

VII. Funkcja liniowa

Funkcją liniową nazywamy funkcję postaci $y = ax + b$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi.



Literą $\boldsymbol{a}$ oznaczamy tak zwany współczynnik kierunkowy, który decyduje o kącie nachylenia wykresu do osi OX:

$$a = \operatorname{tg} \alpha.$$

Literą $\boldsymbol{b}$ oznaczamy tak zwany wyraz wolny, czyli drugą współrzędną miejsca przecięcia wykresu funkcji f z osią OY:

$$b = f(0).$$

Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest:

a) **rosnąca**, gdy $a > 0$;

b) **malejąca**, gdy $a < 0$;

c) **stała**, gdy $a = 0$.

Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$:

a) ma jedno miejsce zerowe, równe $-\frac{b}{a}$, gdy $a \neq 0$;

b) ma nieskończenie wiele miejsc zerowych, gdy $a = b = 0$;

c) nie ma miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$.

Wykresem funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = ax + b$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, jest **prosta**. Prosta ta jest nachylona od osi x pod takim kątem α, że $\operatorname{tg} \alpha = a$ i przecina ona oś y w punkcie $B = (0; b)$.

Parametrami w równaniach nazywamy litery oznaczające wielkości dane.

Równaniem liniowym z jedną niewiadomą x nazywamy równanie postaci $ax + b = 0$, gdzie $a, b \in \boldsymbol{R}$.

Nierównością liniową z jedną niewiadomą x nazywamy każdą z nierówności postaci: $ax + b > 0$, $ax + b \geqslant 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leqslant 0$, gdzie $a, b \in \boldsymbol{R}$.

Równaniem liniowym z dwiema niewiadomymi x, y nazywamy każde równanie postaci $ax + by + c = 0$, a **nierównością liniową** z dwiema niewiadomymi x, y nazywamy każdą nierówność postaci $ax + by + c > 0$, $ax + by + c \geqslant 0$, $ax + by < 0$, $ax + by + c \leqslant 0$, gdzie a, b, c są danymi liczbami rzeczywistymi i co najmniej jedna z liczb a i b jest różna od zera.

Wykresem każdej z nierówności liczbowych postaci $ax + by + c > 0$ albo $ax + by + c < 0$ jest jedna z półpłaszczyzn ograniczonych prostą o równaniu $ax + by + c = 0$, ale bez tej prostej.

Graficznym rozwiązaniem równania (nierówności) jest zbiór tych punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają to równanie (tę nierówność).

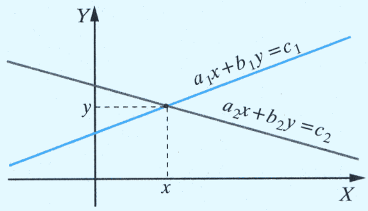
Układ co najmniej dwóch równań liniowych nazywamy **układem równań liniowych**.

Rozwiązaniem układu równań liniowych jest taki punkt (lub punkty), którego współrzędne spełniają podane równania liniowe. Reguła ta dotyczy również rozwiązania nierówności liniowej.

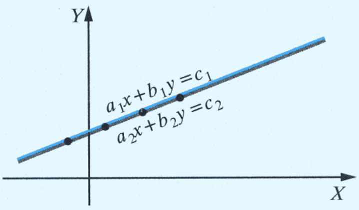
Metoda wyznaczników rozwiązywania układu równań liniowych $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ z dwiema niewiadomymi:

$$W=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1;\quad W_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1;\quad W_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1.$$

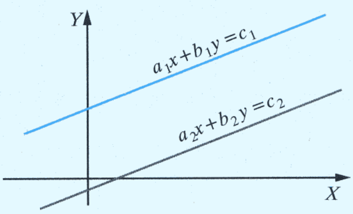
Jeśli $W\neq 0$, to układ ma jedno rozwiązanie (jest oznaczony): $\begin{cases} x=\dfrac{W_x}{W} \\ y=\dfrac{W_y}{W} \end{cases}$



Jeśli $W=W_x=W_y=0$, układ ma nieskończenie wiele rozwiązań (jest nieoznaczony albo inaczej: tożsamościowy).



Jeśli $W=0$ i ($W_x\neq 0$ lub $W_y\neq 0$), układ nie ma rozwiązania (jest sprzeczny).



Warunki równoległości i prostopadłości prostych

Postać kierunkowa:	$\parallel$	$\perp$
$l_1: y=a_1x+b_1$ $l_2: y=a_2x+b_2$	$a_1=a_2$	$a_1\cdot a_2=-1$
Postać ogólna:		
$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$	$A_1B_2-A_2B_1=0$	$A_1A_2+B_1B_2=0$

VII. Funkcje liniowe

1. Własności funkcji liniowej i jej wykres

1.1. Znajdź punkty przecięcia się wykresów podanych funkcji z osiami układu współrzędnych:

a) $y=-x+3$; b) $y=2x+7$;

c) $y=-0{,}5x+8$; d) $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$;

e) $y=5+\frac{1}{5}x$; f) $y=\frac{3}{2}$.

1.2. Które z podanych niżej trójek punktów należą do jednej prostej:

a) $A=(0;0)$, $B=(1;1)$, $C=(3;4)$;

b) $A=\left(1;5\frac{1}{2}\right)$, $B=(2;6)$, $C=(-10;0)$;

c) $A=(1;2)$, $B=(3;-3)$, $C=\left(-\frac{1}{2};5\right)$;

d) $A=(2;-11)$, $B=(-1;-2)$, $C=\left(\frac{1}{3};-6\right)$.

1.3. Napisz wzór funkcji liniowej przechodzącej przez dany punkt B i nachylonej do osi OX pod kątem β, jeżeli:

a) $B=(-1,-1)$, $\beta=0°$; b) $B=(-3,4)$, $\beta=30°$;

c) $B=(2,2)$, $\beta=120°$; d) $B=(3,-1)$, $\beta=60°$.

1.4. Dla jakich x wartości funkcji $y=3x-8$ są:

a) dodatnie, b) ujemne,

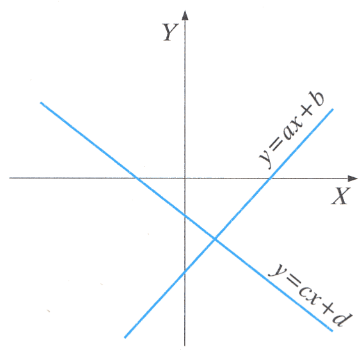
c) większe od 3, d) mniejsze od 6.

1.5. Dla jakich wartości parametru n funkcja $y=(4n-3)x+2$ jest:

a) rosnąca, b) malejąca, c) stała.

★ **1.6.** Wykaż, że jeżeli wykresy funkcji $y=ax+b$, $y=bx+c$, $y=cx+a$ mają punkt wspólny, to $a=b=c$.

★ **1.7.** Na rycinie obok przedstawiono wykresy funkcji $y=ax+b$ i $y=cx+d$. Określ znak iloczynu $a\cdot b\cdot c\cdot d$.



☆ **1.8.** Podaj wzory funkcji odwrotnych do funkcji:

a) $f(x)=\frac{1}{3}x$; b) $f(x)=-x+2$;

c) $f(x)=-2x+\frac{1}{4}$; d) $f(x)=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}$;

e) $f(x)=-4+3x$; f) $f(x)=-\frac{1}{2}x+0{,}75$.

☆ **1.9.** Wyznacz funkcję f^{-1} odwrotną do funkcji $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ określonej wzorem:

a) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & \text{gdy } x\leqslant 2\\ x+1, & \text{gdy } x>2;\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x-3, & \text{gdy } x\leqslant 4\\ 2x-7, & \text{gdy } x>4.\end{cases}$

1.10. Znajdź wartość funkcji określonej wzorem: $f(x)=\left(2x+3\frac{1}{2}\right)^2-\left(2x-5\frac{1}{2}\right)^2$ w punkcie $x=-2\frac{1}{3}$.

1.11. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty $A=(1;7)$ i $B=(-2,-2)$, a następnie:

a) sporządź jej wykres;
b) wyznacz jej miejsca zerowe;
c) wyznacz przedział, w którym funkcja ta przyjmuje wartości nieujemne;
d) oblicz pole trójkąta ograniczonego wykresem tej funkcji i osiami układu współrzędnych.

1.12. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A=(6;4)$, $B=(-3;-8)$ i znajdź odległość punktów przecięcia tej prostej z osiami układu współrzędnych.

1.13. Wykresy funkcji $y=-x+3$ i $y=-2x+4$ przecinają się w punkcie A, zaś oś OX odpowiednio w punktach B i C. Oblicz pole trójkąta ABC oraz długość jego najdłuższego boku.

1.14. Wykresy funkcji określonych wzorami $y=x+1$ i $y=-x+5$ przecinają się w punkcie O.

a) Oblicz współrzędne punktu O.
b) Oblicz miejsca zerowe tych funkcji i podaj współrzędne punktów przecięcia się wykresów funkcji z osiami układu współrzędnych.
c) Sporządź wykresy tych funkcji.
d) Oblicz pole ΔABO, gdzie A i B są punktami, w których proste przecinają oś odciętych.
e) Zaznacz punkty wykresów, których odcięte są większe od 3.

1.15. Dane są punkty $A=(2;0)$ i $B=(0;-4)$ wyznaczające prostą AB oraz punkty $C=(3;0)$ i $D=(0;-3)$ wyznaczające prostą CD.

a) Napisz wzory funkcji, których wykresami są te proste.
b) Sporządź wykresy tych funkcji.
c) Oblicz pole czworokąta wyznaczonego przez obie osie układu współrzędnych oraz wykresy tych funkcji.

1.16. Oblicz pole obszaru ograniczonego prostymi o równaniach $y = 3x - 9$, $y = 2x + 6$ i dodatnimi półosiami układu współrzędnych.

1.17. Oblicz pole obszaru ograniczonego prostymi o równaniach $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, $y = 2x - 6$ oraz osią OX.

1.18. Punkty A i B przecięcia wykresu funkcji $y = -\frac{3}{4}x + 6$ z osiami OX i OY oraz punkt $C = (3; 10)$ są wierzchołkami trójkąta. Oblicz jego pole, obwód i wysokość opuszczoną z wierzchołka C na bok AB.

1.19. Oblicz pole trójkąta wyznaczonego przez osie układu współrzędnych i wykres funkcji $y = ax + b$, wiedząc, że:

$$a = 1\frac{3}{20} + \frac{(-3)^2}{12} : 0{,}6 + 0{,}2 \cdot (-3)^2, \quad b = \sqrt{1\frac{7}{9} - \frac{\frac{1}{25}}{(0{,}2)^2}} + 1\frac{2}{3}.$$

1.20. Oblicz pole trójkąta ograniczonego prostymi o równaniach:

$$\frac{8y - x}{5} - \frac{3y - x - 4}{2} = 1\frac{3}{5} \quad \text{i} \quad \frac{2x + 5y}{3} - \frac{2x + 3y}{2} = 1\frac{5}{6} \quad \text{oraz:}$$

a) osią odciętych, b) osią rzędnych.

1.21. Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji $y = |4x| - 5$, $y = -2x + 10$.

1.22. Punkty $K = (-5a; -3b)$ i $L = (-b; -7a)$ należą do wykresu funkcji $y = 2x + 1$. Wyznacz punkty K i L.

1.23. Punkty $A = (3a - 2b; -4a - 2b)$ i $B = (a - b; 3a + 2b)$ należą do wykresu funkcji $y = -2x + 10$.

a) Oblicz a i b.

b) Dla tak obliczonych a i b wyznacz obwód trójkąta ABO, gdzie O jest środkiem układu współrzędnych.

1.24. Punkty $K = (2a; -2b)$ i $L = (-b; 8a)$ należą do wykresu funkcji $y = 2x - 2$.

a) Oblicz a i b.

b) Narysuj wykres tej funkcji i zaznacz na nim punkty K i L.

c) Dla jakich argumentów dana funkcja przyjmuje wartości ujemne?

1.25. Dana jest funkcja $y = -\frac{3}{4}x + 6$. Jej wykres przecina osie OX i OY w punktach odpowiednio A i B. Wyznacz na osi OY taki punkt C, aby pole trójkąta ABC było równe 28.

1.26. Wykresy funkcji $f(x) = 3x + 2a$ i $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}a - 1$ przecinają się na osi OX w punkcie P oraz przecinają oś OY odpowiednio w punktach Q i R. Wyznacz a oraz punkty P, Q, R i pole trójkąta PQR.

1.27. Dla jakich wartości parametru a wykresy funkcji $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 7x - 5$ i $h(x) = 2x + a$, gdy $x \in \boldsymbol{R}$, przecinają się w jednym punkcie?

1.28. Dla jakich liczb całkowitych a i b funkcje $y = 2x + b$ i $y = ax + 3$ mają to samo miejsce zerowe?

1.29. Wykresy funkcji $f(x) = ax + b$ i $g(x) = bx + a + 2$ przecinają się w punkcie $P = (3; 5)$. Wyznacz a i b.

1.30. Wykresy funkcji $f(x) = ax + 3b$ i $g(x) = 3ax + 5b$ przecinają się w punkcie $A = (-1; 2)$. Wyznacz a i b.

1.31. Funkcje $f(x) = (a + 1)x + 5$ i $g(x) = 5x + (a + 1)$ mają wspólne miejsce zerowe. Wyznacz a.

1.32. Wykresy funkcji $f(x) = 2$ i $g(x) = a - 2x$ przecinają się w punkcie P o odciętej 2. Oblicz pole czworokąta ograniczonego wykresami tych funkcji i osiami układu współrzędnych.

1.33. Wykresy funkcji $f(x) = ax + b$ i $g(x) = bx + a + 1$ przecinają się w punkcie $P = (2, 3)$. Znajdź miejsca zerowe tych funkcji.

1.34. Znajdź wzór funkcji liniowej, której wykres:

a) jest równoległy do wykresu funkcji $y = 3x + 1$ i przechodzi przez punkt $A = (2; 4)$;

b) jest równoległy do wykresu funkcji $y = -2x + 1$ i przechodzi przez punkt $B = (1; 3)$;

c) jest równoległy do wykresu funkcji $y = -\frac{1}{3}x + 2$ i przechodzi przez punkt $C = (6; 0)$.

1.35. Wyznacz te wartości parametru n, dla których prosta o równaniu $y = nx - 4$ jest:

a) równoległa do prostej o równaniu $y = 3x - 1$;

b) prostopadła do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$.

1.36. Wyznacz takie wartości a i b, aby wykres funkcji $y = ax + b$ przechodził przez punkt $P = (5; 2)$ i był równoległy do wykresu funkcji $y = -2x + 1$.

1.37. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkt $A = (1; 3)$ i jest równoległy do wykresu funkcji $y = -3x + 3$, a następnie:

a) podaj miejsca zerowe obu funkcji;

b) sporządź wykresy obu funkcji;

c) wyznacz przedział, w którym otrzymana funkcja przyjmuje wartości ujemne,

d) oblicz pole figury ograniczonej wykresami obu funkcji i osiami układu współrzędnych.

1.38. Rozważmy trójkąt ABO, gdzie A i B są punktami przecięcia prostej o równaniu $y=2x-8$ odpowiednio z osiami x i y. Dla jakiej wartości współczynnika a prosta $y=ax$ dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty takie, że:

a) ich pola są równe,

b) stosunek ich pól wynosi 3:2.

1.39. Znajdź równania prostych zawierających boki i przekątne równoległoboku o wierzchołkach w punktach $A=(-1;-1)$, $B=(3;-1)$, $C=(5;1)$, $D=(1;1)$.

1.40. Dla jakich wartości b prosta o równaniu $y=-x+b$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z wielokątem wyznaczonym przez układ nierówności:
$-1\leqslant x\leqslant 3$ i $0\leqslant y\leqslant 2$?

☆ **1.41.** W kwadracie o wierzchołkach w punktach: $A=(3;3)$, $B=(3;-3)$, $C=(-3;-3)$, $D=(-3,3)$ wycięto część płaszczyzny ograniczonej wykresami funkcji $y=-|x|+2$ i $y=|x|-2$. Oblicz pole pozostałej części tego kwadratu.

☆ **1.42.** Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji $y=|x|-2$ i $y=|x+2|$ oraz osiami współrzędnych. Napisz wzór funkcji, której wykres jest osią symetrii tej figury.

☆ **1.43.** Znajdź wzór funkcji i określ jej dziedzinę, wiedząc, że wykresem tej funkcji jest najkrótszy odcinek, do którego należy punkt $A=(2;5)$, a środkiem tego odcinka jest punkt $S=(0;1)$.

☆ **1.44.** Dana jest funkcja:

$$f(x)=\begin{cases} x+5, & \text{gdy } x\leqslant -5 \\ 0, & \text{gdy } -5<x\leqslant 0 \\ -x+5, & \text{gdy } x>0. \end{cases}$$

Sporządź wykres tej funkcji i podaj jej miejsca zerowe.

☆ **1.45.** Sporządź wykresy funkcji:

a) $y=\begin{cases} -4; & \text{gdy } x<-2 \\ 2x & \text{gdy } -2\leqslant x<1 \\ 2 & \text{gdy } x\geqslant 1; \end{cases}$ b) $y=\begin{cases} \dfrac{x+9}{3} & \text{gdy } x<-2 \\ 3-4x & \text{gdy } x\geqslant -2. \end{cases}$

☆ **1.46.** Znajdź wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkt $A=(-2;3)$ i która jest dodatnia w przedziale $(-\infty;2)$, zaś ujemna w przedziale $(2;+\infty)$.

☆ **1.47.** W jednym układzie współrzędnych sporządź wykresy funkcji $f(x)=-|x-2|+2$ i $g(x)=\frac{1}{2}x+1$. Na ich podstawie podaj, dla jakich wartości x wartości funkcji g są większe od wartości funkcji f.

★ **1.48.** W punkcie $C=(-3;2)$ znajduje się czarna kula bilardowa, a w punkcie $B=(2;3)$ – biała kula bilardowa.

a) Pod jakim kątem do osi OX należy skierować kulę czarną, aby po odbiciu się od osi OX uderzyła w kulę białą?

b) Jakim wzorem określona jest funkcja, której wykresem jest tor kuli czarnej od punktu C do punktu B?

1.49. Sporządź wykres funkcji $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{|x+2|}-2$.

a) Dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie?

b) Jakie wartości funkcja ta przyjmuje dwa razy, a jakie tylko raz?

☆ **1.50.** Dana jest funkcja:

$$f(x)=\begin{cases} 3-x, & \text{gdy} \quad x \geqslant 0 \\ 3+x, & \text{gdy} \quad x<0. \end{cases}$$

Sporządź wykres funkcji $y=|f(f(x))|$.

☆ **1.51.** Sporządź wykres funkcji $f: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ określonej wzorem:

a) $f(x)=\max(2x-1, x+1)$, gdy $x \in \boldsymbol{R}$;

b) $f(x)=\min(3x-1, x+1)$, gdy $x \in \boldsymbol{R}$.

★ **1.52.** Znajdź wszystkie funkcje $f: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ spełniające równanie $2f(x)+3f(1-x)=4x-1$.

1.53. Wyznacz $f \circ g$ i $g \circ f$, jeśli:

a) $f(x)=|x-1|+2$, $g(x)=|x-2|+1$;

b) $f(x)=\begin{cases} 2x+3, & \text{gdy} \quad x<0 \\ -x+1, & \text{gdy} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$, $g(x)=x+1$;

c) $f(x)=\begin{cases} 3x+1, & \text{gdy} \quad x \leqslant -1 \\ -2, & \text{gdy} \quad x>-1 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} -3, & \text{gdy} \quad x \leqslant -2 \\ x-1, & \text{gdy} \quad x>-2. \end{cases}$

1.54. Funkcje $f: \boldsymbol{N} \rightarrow \boldsymbol{N}$ i $g: \boldsymbol{N} \rightarrow \boldsymbol{N}$ są określone następująco:

$$f(n)=2n, \; g(n)=\begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{gdy} \quad 2 \mid n \\ 0, & \text{gdy} \quad 2 \nmid n. \end{cases}$$

Wyznacz $f \circ g$ i $g \circ f$.

1.55. Niech A i B oznaczają punkty przecięcia prostej o równaniu $y=-3x+b$ $(b \neq 0)$ odpowiednio z osiami OX i OY. Dla jakiej wartości współczynnika b pole ΔABC wynosi 10?

1.56. Dla jakich wartości parametru b jedna z figur ograniczonych osią OX, wykresem funkcji $f(x) = |x-2| + b$ oraz prostą o równaniu $x = 1$, jest czworokątem o polu 7?

2. Równanie i nierówność liniowa z jedną niewiadomą

☆ **2.1.** Rozwiąż równania z niewiadomą x:

a) $\frac{a-x}{b-a} - \frac{x+a}{a+b} = \frac{2ax}{a^2-b^2}$;

b) $\frac{x}{b-a} = \frac{2bx}{b^2-a^2} - \frac{5a}{a+b}$;

c) $\frac{6b+7a}{6b} - \frac{3ax}{2b^2} = 1 - \frac{ax}{b^2-ab}$;

d) $\frac{x-a-b}{c} + \frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} = 3$;

e) $\frac{a}{2b+ax} = \frac{b}{2a-bx} + \frac{2ab}{2+abx}$;

f) $\frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{x} = \frac{1}{a-b} + \frac{a-b}{x}$;

g) $\frac{a}{c-x} + \frac{c}{a-x} = \frac{a+c}{b-x}$;

h) $\frac{x}{b(a-x)} + \frac{c}{d(x-a)} = \frac{ad-bc}{3abd}$.

2.2. Rozwiąż nierówności:

a) $4x - [7 - (6-5x)] - (2x-9) \geqslant 0$;

b) $(2x-9)^2(8-2x)^2 - 17$;

c) $(5x+2)^2 - (3x+3)^2 < (4x+1)^2$;

d) $6x - (5x-9) + 3 \leqslant 5x - [6 - (x+6)]$;

e) $4x - \frac{4x+2}{3} - 2 < \frac{6-5x}{3}$;

f) $6x + (2x-3)^2 - (2x+3)^2 < 15$.

2.3. Rozwiąż układy nierówności i zaznacz zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

a) $\begin{cases} 3x-5 > 23-4x \\ 7x+3 < 9x-1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+1 > 3x+4 \\ 5x+3 \geqslant 8x+21; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x-2 \geqslant 2x+1 \\ 2x+3 < 18-3x; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-1 > 2x-3 \\ 4x+5 > x+17; \end{cases}$

e) $\begin{cases} 10(x-1)+11 > 4x+5(x+1) \\ 3x-5 < 2(x-1); \end{cases}$

f) $\begin{cases} (x-3)^2 < x^2+3 \\ \frac{3-4x}{6} < 6 - \frac{5x-2}{3}. \end{cases}$

2.4. Jakie liczby całkowite spełniają układy nierówności:

a) $\begin{cases} 2(3x-4) < 3(4x-3)+16 \\ 4(1+x) < 3x+5; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x > 2 - \frac{2x-13}{11} \\ \frac{x}{6} + \frac{2}{3}(x-7) < \frac{3x-20}{9}; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \geqslant \frac{x-3}{4} - x \\ 1 - 0{,}5x > x-4; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - \frac{x-1}{2} - \frac{x+2}{3} \leqslant \frac{x-3}{4} \\ 1{,}5x - 5{,}05 < x. \end{cases}$

☆ **2.5.** Rozwiąż równania z niewiadomą x:

a) $m^2(x-1) = 5(5x+m)$;

b) $|x|(x+a) = 2(x+2)$;

c) $ax + 9 = 3x + a^2$;

d) $x^2 + m(mx+1) = (x+3)^2 + 3(x-2)$.

★ **2.6.** Rozwiąż równania z niewiadomą x:

a) $\dfrac{x-ab}{a+b}+\dfrac{x-bc}{b+c}+\dfrac{x-ca}{c+a}=a+b+c$;

b) $\dfrac{x-a}{bc}+\dfrac{x-b}{ca}+\dfrac{x-c}{ab}=2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$;

c) $\dfrac{a+b-x}{c}+\dfrac{b+c-x}{a}+\dfrac{c+a-x}{b}+\dfrac{4x}{a+b+c}=1$.

2.7. Sporządź wykres funkcji, która liczbie m przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania $2|x+1|-2|x|+|x-1|=m$.

2.8. Dla jakich m równanie $(|x|+m)(x^2+1)=0$:
a) ma jeden pierwiastek,
b) ma dwa pierwiastki,
c) nie ma pierwiastków?

3. Zadania prowadzące do równań i nierówności liniowych

3.1. Średnia wieku drużyny piłkarskiej liczącej 11 osób jest równa 22 lata. Jeden z piłkarzy po otrzymaniu czerwonej kartki opuścił boisko i wówczas średnia wieku pozostałych zawodników wyniosła 21 lat. Ile lat miał piłkarz, który zszedł z boiska?

3.2. Cena biletu na mecz piłki nożnej wynosiła 150 zł. Gdy cenę obniżono, okazało się, że na mecze przychodzi o 50% widzów więcej, a dochód ze sprzedaży biletów na jeden mecz wzrósł o 25%. O ile obniżono cenę biletu?

3.3. Bartek i Tomek porównali swoje oszczędności i okazało się, że razem mają 500 zł. Bartek stwierdził wówczas, że gdyby jego oszczędności wzrosły o 20%, a Tomka zmalały o 20%, to mieliby po tyle samo. Jaką część oszczędności Tomka stanowi kwota, którą uzbierał Bartek? Ile procent oszczędności Bartka stanowi kwota, którą ma Tomek?

3.4. Trzech braci Bartek, Maciek i Tomek, wybrało się na ryby i złowiło ich 14. Bartek złowił 2 razy mniej niż Tomek, Maciek złowił więcej ryb niż Bartek, ale mniej niż Tomek. Ile ryb złowił każdy z chłopców?

3.5. Bartek i Tomek chodzą do klasy, w której chłopcy stanowią nie mniej niż 93% i nie więcej niż 94% liczby wszystkich uczniów klasy. Ile osób liczy klasa, jeżeli wiadomo, że chłopców jest mniej niż 38, a różnica między liczbą chłopców i dziewcząt jest liczbą pierwszą.

3.6. Bartek, Maciek i Tomek złożyli się na kupno roweru, przy czym wkład każdego z nich nie przekraczał średniej arytmetycznej wkładów dwóch pozostałych. Ile pieniędzy dał Bartek, jeśli rower ten kosztował 330 zł?

3.7. Pies dostrzegł w odległości 60 m lisa i rozpoczął pościg. Skok psa ma długość 2 m, a skok lisa 1 m. Pies daje dwa skoki w tym samym czasie, w którym lis daje trzy skoki. Ile metrów drogi musi przebyć pies, aby dogonić lisa?

3.8. „Ale nazbierałem grzybów! – chwali się Bartek. Ledwie zdołałem donieść je do domu. A przecież niosłem prawie samą wodę – 90% masy świeżych grzybów stanowi przecież woda. Gdy grzyby wysuszyłem, stały się o 15 kg lżejsze. Pozostało w nich 60% wody”. Ile grzybów przyniósł do domu Bartek?

4. Równania i nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi

★ **4.1.** Rozwiąż równania:

a) $(x-y)^2+(x+y-1)^2=0$;

b) $|x+2y-3|+|2x-y-1|=0$;

c) $2y^2+x^2+2y-2xy+1=0$;

d) $2x^2+y^2-2x-2xy+1=0$;

e) $x^2+y^2-6x+2y+10=0$;

f) $x^2+y^2+12x-8y+52=0$.

☆ **4.2.** Dane są zbiory:

$A=\{(x;y)\colon x\in \mathbf{R}\wedge y\in \mathbf{R}\wedge |y|+|2x-4|\leqslant 4\}$,

$B=\{(x;y)\colon x\in \mathbf{R}\wedge y\in \mathbf{R}\wedge |x|+x=2|y|+y\}$.

Zilustruj graficznie te zbiory oraz ich iloczyn.

☆ **4.3.** Zaznacz na płaszczyźnie XOY zbiór:

$A=\{(x;y);\, x\in \mathbf{R}\wedge y\in \mathbf{R}\wedge ||x|-1|+||y|-1|\leqslant 1\}$.

5. Układy dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi

5.1. Rozwiąż układ równania i nierówności:

$$\begin{cases} x-2y=4 \\ 3x>6. \end{cases}$$

5.2. Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{y}{5}=-2 \\ \dfrac{2x-y}{3}-\dfrac{3x}{4}=\dfrac{3}{2}; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{3y-2}=1 \\ x(2y-5)-2(x+3)y=2x+1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y+2}=5 \\ 3(2x-5)-4(3y+4)=5; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3}-\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{2(x-y)}{5} \\ \dfrac{x-3}{4}-\dfrac{y-3}{3}=2y-x; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{5}+\dfrac{5x-3y}{3}=x+1 \\ \dfrac{2x-3y}{3}+\dfrac{4x-3y}{2}=y+1; \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{2x-y+3}{3}-\dfrac{x-2y+3}{4}=4 \\ \dfrac{3x-4y+3}{4}+\dfrac{4x-2y-9}{3}=4; \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3\left[1-\dfrac{2-3(x-y)}{5}\right]+6{,}94=2(3x-1) \\ \dfrac{1}{2}-y=\frac{1}{3}[x-5(y-0{,}3)]+0{,}2; \end{cases}$

h) $(3x+y-3):(4x-2y+1):(5x-3y+8)=6:3:5;$

i) $\begin{cases} \dfrac{11}{2x-3y}+\dfrac{18}{3x-2y}=13 \\ \dfrac{27}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=1; \end{cases}$ j) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{1-x-y}=\dfrac{1}{10} \\ \dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{x+y-1}=\dfrac{3}{10}. \end{cases}$

5.3. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układy równań:

a) $\begin{cases} (x+2)^2-(x-3)^2-(y+2)^2=3-y^2 \\ x-5y-\dfrac{1{,}5+3y}{3}=3\cdot\dfrac{2x+3}{2}; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x+1)^2+y^2-8=(y-2)^2+(x-3)(x+3) \\ \dfrac{2x-y+3}{3}-\dfrac{x-2y+3}{4}=4; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{7x-3y}{5}=\dfrac{5x-y}{3}-\dfrac{x+y}{2} \\ 3(x-1)=5(y+1); \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{2x+4}{2}+\dfrac{y+1}{3}=4 \\ 3(x+2)-2(y-2)=3x+12; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{2y-5x}{6}+\dfrac{7-8y}{3}=0 \\ 3x-2y=-2; \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{2}-\dfrac{y+4}{3}=1 \\ x=3y. \end{cases}$

☆ **5.4.** Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} x^4-2x^2y^2+y^4=0 \\ 2x-y=3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x-3|=5-y \\ |y-5|=4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+|x|=y \\ |x|+y=6; \end{cases}$

d) $\begin{cases} y+|x|=2 \\ y-|x-1|=1; \end{cases}$ e) $\begin{cases} |x|+|y|=3 \\ 2|x|+y=3. \end{cases}$

☆ **5.5.** Rozwiąż układy równań z niewiadomymi x i y:

a) $\begin{cases} \dfrac{x-m}{2}+\dfrac{y-n}{3}=m \\ \dfrac{x-n}{3}+\dfrac{y-m}{2}=n; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-2p}{3}-\dfrac{y-3p}{2}=0 \\ \dfrac{2x-q}{2}+\dfrac{3y+4q}{3}=5\left(p-\dfrac{5q}{6}\right); \end{cases}$

5.6. Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań w zależności od parametru m:

a) $\begin{cases} y=x+m \\ |x|+y=x-1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x-y|=1-y \\ \dfrac{mx+1}{y}=1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} m^2x+y=1 \\ x+y=m; \end{cases}$

d) $\begin{cases} |x|+|y|=2 \\ y=x+m; \end{cases}$ e) $\begin{cases} |x-y|=1 \\ |y|=x+m; \end{cases}$ f) $\begin{cases} |x+y|+|x-y|=4 \\ |x-1|+|y|=a. \end{cases}$

★ **5.7.** Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} (x+y)(x+y+z)=72 \\ (y+z)(x+y+z)=120 \\ (z+x)(x+y+z)=96; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2-(y-z)^2=1 \\ y^2-(z-x)^2=4 \\ z^2-(x-y)^2=9; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x(y+z)=5 \\ y(z+x)=10 \\ z(x+y)=13; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z+u=5 \\ y+z+u+v=1 \\ z+u+v+x=2 \\ u+v+x+y=0 \\ v+x+y+z=4; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+7y+3v+5u=16 \\ 8x+4y+6v+2u=-16 \\ 2x+6y+4v+8u=16 \\ 5x+3y+7v+u=-16. \end{cases}$

★ **5.8.** Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} 0{,}4x+0{,}3y-0{,}2z=4 \\ 0{,}6x-0{,}5y+0{,}3z=5 \\ 0{,}3x+0{,}2y+0{,}5z=22; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=36\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}+27 \\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{y}{7}=18; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{4}y+\dfrac{5}{3}z=45 \\ 5{,}1x+\dfrac{6}{5}y-4z=15 \\ 0{,}1x-0{,}4y+\dfrac{4}{5}z=5; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{7}{2x-3y}-\dfrac{2}{10z-3y}+\dfrac{3}{3y-8z}=8 \\ \dfrac{2}{2x-3y}-\dfrac{3}{10z-3y}+\dfrac{1}{3y-8z}=0 \\ \dfrac{5}{2x-3y}-\dfrac{4}{10z-3y}+\dfrac{7}{3y-8z}=8; \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x-y+u=2 \\ x+3y-z=1 \\ y+3z-u=4 \\ x-z-3u=-11; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 6x-2y-32=25 \\ 3y+2-2v=20 \\ 4x-3y-2t=13 \\ x-2v+t=4 \\ 2y+v=17. \end{cases}$

★ **5.9.** Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} |x-y| - \dfrac{|x|}{x} = -1 \\ |2x-y| + |x+y-1| + |x-y| + y - 1 = 0. \end{cases}$$

★ **5.10.** Rozwiąż układy równań:

a) $$\begin{cases} \quad\;\; x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1 \\ x_1 \quad\;\; + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 2 \\ x_1 + x_2 \quad\;\; + \ldots + x_{n-1} + x_n = 3 \\ \qquad \ldots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + \quad\;\; x_n = n-1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} \quad\;\; = n, \end{cases}$$ gdzie $n \geqslant 2$;

b) $$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_{n-1} - x_n = 2 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - \ldots - x_{n-1} - x_n = 4 \\ -x_1 - x_2 + 7x_3 - \ldots - x_{n-1} - x_n = 8 \\ \qquad \ldots \\ -x_1 - x_2 - x_3 - \ldots + \left(2^{n-1} - 1\right) x_{n-1} - x_n = 2^{n-1} \\ -x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_{n-1} + \left(2^n - 1\right) x_n = 2^n, \end{cases}$$ gdzie $n \geqslant 2$.

VIII. Elementy geometrii płaszczyzny

Okrąg i koło

Równanie $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ przedstawia okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2+b^2-c>0$, promień tego okręgu ma długość $\sqrt{a^2+b^2-c}$, a środek znajduje się w punkcie $(a;b)$.

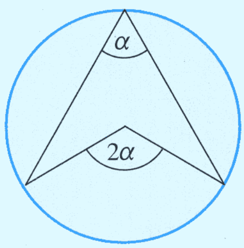
Odległość punktu od prostej

Odległość d punktu $P=(x_0;y_0)$ od prostej l o równaniu $Ax+By+C=0$, gdzie $A^2+B^2\neq 0$, wyraża się wzorem:

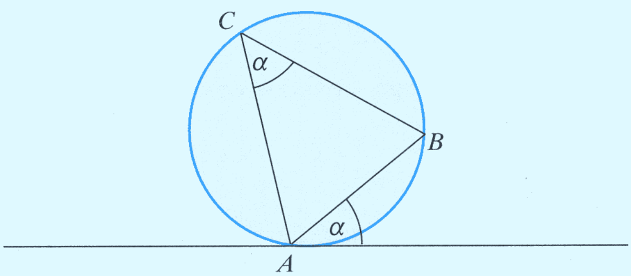
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Kąty w kole

Kąt, którego wierzchołek leży na okręgu koła, a ramionami są półproste zawierające dwie cięciwy, nazywamy **kątem wpisanym**, kąt zaś, którego wierzchołkiem jest środek koła, a ramionami są półproste zawierające promienie tego koła, nazywamy **kątem środkowym**. Kąt wpisany równy jest połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku.



Prostą, która ma dwa wspólne punkty z okręgiem, nazywamy **sieczną** tego okręgu, zaś prostą, która ma tylko jeden punkt wspólny z okręgiem, nazywamy **styczną** do okręgu. Kąt między styczną do okręgu i sieczną przechodzącą przez punkt styczności jest równy kątowi wpisanemu opartemu na tym samym łuku, co sieczna i znajduje się po drugiej stronie siecznej niż ten łuk.



Punkty szczególne trójkąta

Symetralna odcinka jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny równo odległych od końców tego odcinka. W każdym trójkącie symetralne boków przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

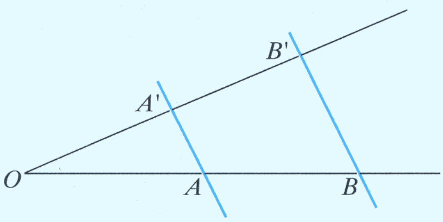
Dwusieczna kąta jest zbiorem wszystkich punktów wewnętrznych tego kąta równo odległych od jego ramion. W każdym trójkącie dwusieczne kątów przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

W każdym trójkącie wysokości przecinają się w jednym punkcie – **ortocentrum trójkąta**.

Odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku nazywamy **środkową trójkąta**.

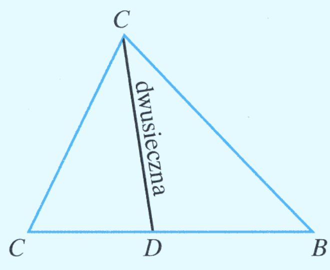
W każdym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie zwanym **środkiem ciężkości**, który dzieli każdą z nich w stosunku **2:1**.

Twierdzenie Talesa i doń odwrotne



$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \iff AA' \parallel BB'$$

Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie



$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$$

Czworokąt wpisany w okrąg

Czworokąt można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów są równe.

Czworokąt opisany na okręgu

Czworokąt można opisać na okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

VIII. Elementy geometrii płaszczyzny

1. Odległość dwóch punktów

1.1. A, B, C są trzema punktami takimi, że:

a) $AB = 8$, $BC = 16$, $AC = 9$;

b) $AB = \frac{\sqrt{2}}{12}$, $BC = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $AC = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Zbadaj, czy punkty A, B, C są współliniowe.

1.2. Czy punkty A, B, C są współliniowe, gdy:

a) $AB = 3{,}5$, $AC = 1{,}5$, $BC = 4$;

b) $AB = 2$, $BC = 2$, $AC = \frac{1}{2}$;

c) $AB = 1 + 2\sqrt{2}$, $BC = 2 + \sqrt{2}$, $AC = 3\sqrt{2}$;

d) $AB = 2 - \sqrt{3}$, $BC = 2 + \sqrt{3}$, $AC = 4$;

e) $AB = \sqrt{2} + 1$, $BC = \sqrt{2} + 2$, $AC = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$?

1.3. Czy istnieją takie punkty A, B, C, że:

a) $AB = 10$, $AC = 6$, $BC = 5$;

b) $AB = 12$, $AC = 8$, $BC = 3{,}9$;

c) $AB = 2\frac{1}{2}$, $BC = \frac{1}{4}$, $AC = 33\frac{1}{5}$;

d) $AB = \sqrt{5} - \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{5} + \sqrt{2}$;

e) $AB = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{3}$, $BC = \sqrt{5}$?

1.4. Dane są punkty A, B, C takie, że $AB = 9$, $AC = 5$, $BC = 4$. Zbadaj, czy punkt C należy do odcinka AB.

1.5. Czy w czworokącie $ABCD$ odległości wierzchołków mogą wynosić: $AB = 10$, $AC = 14$, $BC = 8$, $AD = 9$, $CD = 6$?

1.6. Zbadaj, czy istnieje taka liczba rzeczywista x, aby punkt Y leżał między punktami x i z, gdy:

a) $XY = 1 + 5x$, $YZ = 3 - 2x$, $XZ = 4 + 3x$;

b) $XY = 3x - 4$, $YZ = 7$, $XZ = 3x + 1$.

1.7. Wiedząc, że trójki liczb:

a) 13, 17, 25; b) $15\frac{3}{10}$, 32, $8\frac{7}{10}$; c) $12\frac{2}{5}$, $5\frac{3}{5}$, 18

są długościami trzech odcinków, zbadaj, z której z nich można zbudować trójkąt.

1.8. Dla jakich $x \in \boldsymbol{R}$ liczby: $10 - 2x$, $3x + 6$, $4x - 2$ są długościami boków trójkąta?

1.9. Wyznacz współrzędne środka odcinka AB, wiedząc, że $A = (1; 4)$, $B = (-5; 2)$.

1.10. Oblicz obwód trójkąta o wierzchołkach $A = (-4; 2)$, $B = (0; 1)$, $C = (3; 3)$.

1.11. Znając współrzędne dwóch przeciwległych wierzchołków kwadratu $ABCD$: $A = (4; -1)$ i $C = (-3; 0)$, wyznacz współrzędne dwóch pozostałych wierzchołków tego kwadratu.

1.12. Oblicz pole kwadratu, mając dwa jego przeciwległe wierzchołki: $A = (-3; -5)$ i $C = (-1; 3)$.

1.13. Oblicz pole kwadratu, mając dwa jego przeciwległe wierzchołki: $A = (3; -2)$ i $B = (-1; -6)$.

1.14. Dane są dwa sąsiednie wierzchołki równoległoboku $ABCD$: $A = (4; 7)$ i $VB = (-2; -6)$ oraz punkt $P = (-3; -1)$ przecięcia przekątnych. Znajdź wierzchołki C i D tego równoległoboku.

1.15. Dane są trzy wierzchołki równoległoboku $ABCD$: $A = (3; -5)$, $B = (5; -3)$ i $C = (-1; 3)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka D przeciwległego do B.

1.16. W trójkącie ABC o wierzchołkach $A = (3; 0)$, $B = (2; 3)$ i $C = (-2; 5)$ poprowadzono środkową AD. Oblicz jej długość.

1.17. Dane są wierzchołki $A = (-3; 7)$, $B = (-5; 7)$ i $C = (2; -5)$ równoległoboku $ABCD$. Oblicz długości przekątnych AC i BD.

1.18. Dane są środki boków trójkąta: $P = (-2; -1)$, $Q = (-2; -4)$ i $R = (3; 0)$. Znajdź wierzchołki tego trójkąta.

1.19. Dane są dwa punkty: $A = (4; -2)$ i $B = (-8; 7)$. Znajdź punkty C i D dzielące odcinek AB na trzy równe części.

1.20. Wyznacz współrzędne końców odcinka AB, jeżeli punkty $C = (2; 2)$ i $D = (1; 5)$ dzielą ten odcinek na trzy równe części.

1.21. Wyznacz punkty A i B, wiedząc, że punkt $(-5; 4)$ dzieli odcinek w stosunku 3:4, a punkt $D = (6; -5)$ w stosunku 2:3.

1.22. Wiedząc, że punkt A będący końcem odcinka AB ma współrzędne (2, 3), a środek tego odcinka to punkt $M = (-1; 3)$, znajdź współrzędne punktu B.

1.23. Na prostej obrano kolejno punkty: A, B, C, D, E, F. Jakie są odległości między kolejnymi punktami, jeśli wiadomo, że $AF = 53$ cm, $AB = 2\ EF$ i $AB > BC > CD > DE > EF$ oraz że są to liczby całkowite?

1.24. O czterech punktach A, B, C, D wiemy, że: $AB = 3$ cm, $BC = 2$ cm, $AC = 5$ cm, $AD = 1$ cm i D leży na odcinku AB. Wyznacz długość odcinka CD.

1.25. Na płaszczyźnie dane są punkty A, B, C, D. Udowodnij, że zachodzi co najmniej jedna z nierówności: $AC + AD \geqslant AB$, $BC + BD \geqslant AB$.

1.26. W czworokącie $ABCD$ przekątne AC i BD są do siebie prostopadłe. Udowodnij, że $AB + CD > AC$, $AB + CD > BD$.

1.27. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Udowodnij, że $CD > \frac{1}{2}(CA + CB - AB)$.

1.28. Na boku AB prostokąta $ABCD$ obrano punkt M. Następnie uczeń podał następujące informacje:

1. $AM = 5{,}1$ cm, $AM > MB$;
2. obwód prostokąta $ABCD$ jest równy 47,6 cm;
3. suma obwodów czworokąta $AMCD$ i trójkąta MBC jest równa 74,79 cm.

Rozstrzygnij, czy wszystkie te informacje mogą być prawdziwe.

☆ **1.29.** Udowodnij, że jeżeli punkt M należy do wnętrza trójkąta ABC, to: $AM + MC < AB + BC$.

☆ **1.30.** Wykaż, że punkt dzielący odcinek AB, gdzie $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2; y_2)$ w stosunku $k \neq -1$, ma współrzędne $\left(\frac{x_1 + kx_2}{1+k}; \frac{y_1 + ky_2}{1+k}\right)$.

☆ **1.31.** Wykaż, że suma odległości punktu wewnętrznego trójkąta od wierzchołków trójkąta jest większa od połowy obwodu.

☆ **1.32.** Udowodnij, że suma odległości dowolnego punktu od wierzchołków wielokąta jest większa od połowy jego obwodu.

☆ **1.33.** Na płaszczyźnie danych jest sześć punktów. Przez każde dwa z nich prowadzimy prostą. Jaką największą liczbę prostych można w ten sposób otrzymać?

☆ **1.34.** Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu płaszczyzny od wierzchołków danego czworokąta jest większa od połowy obwodu tego czworokąta.

☆ **1.35.** Udowodnij, że w każdym czworokącie wypukłym suma długości przeciwległych boków jest mniejsza od sumy długości przekątnych.

☆ **1.36.** Wykaż, że suma długości przekątnych każdego pięciokąta wypukłego jest większa od obwodu pięciokąta i mniejsza od podwojonego obwodu tego pięciokąta.

★ **1.37.** Wykaż, że połowa sumy długości dwóch boków trójkąta jest większa od długości środkowej trzeciego boku.

★ **1.38.** Wykaż, że suma długości środkowych trójkąta jest większa od połowy obwodu i mniejsza od obwodu tego trójkąta.

★ **1.39.** Rozpiętością figury F na płaszczyźnie nazywamy najmniejszą z odległości między prostymi równoległymi wycinającymi pas zawierający figurę F. Na przykład: rozpiętością okręgu (koła) jest długość średnicy, półokręgu (półkola) – długość promienia, rozpiętością prostokąta jest długość krótszego boku. Oblicz rozpiętość trójkąta ABC, jeśli $A=(1;4)$, $B=(5;1)$ i $C=(1;1)$.

2. Okrąg i koło

2.1. Wyznacz środek s i długość r promienia o równaniu:
a) $x^2+y^2+6x=0$;
b) $x^2+y^2-10x+24y-56=0$;
c) $x^2+y^2-x=0$.

2.2. Znajdź współrzędne środka i promień okręgu o równaniu:
a) $x^2+y^2=2x$; b) $8x^2+8y^2+120x+84y-450$.

2.3. Naszkicuj okręgi o równaniach:
a) $(x-1)^2+(y+2)^2=9$; b) $(x+2)^2+(y+1)^2=1$;
c) $(x-3)^2+(y-3)^2=5$; d) $x^2+y^2+4x-2y-20=0$;
e) $x^2+y^2-2x=6y+5=0$; f) $x^2+y^2=2x$.

2.4. Zbadaj, który z punktów: $(1;1)$, $(-1;2)$, $(1;4)$, $(-3;0)$, $(2;2)$ leży na okręgu $x^2+y^2=4x$, który wewnątrz okręgu, a który na zewnątrz okręgu.

2.5. Jakie jest położenie punktów $(2;1)$, $(10;2)$, $(11;1)$ względem okręgu o równaniu: $(x-6)^2+(y-4)^2=25$?

2.6. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty: $A=(2;2)$, $B=(-5;-5)$, $C=(1;-5)$.

2.7. Znajdź środek i promień okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A=(-1;6)$, $B=(3;-2)$, $C=(-4;-3)$.

2.8. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty: $A=(2;2)$, $B=(-5;-5)$, $C=(1;-5)$.

2.9. Napisz równanie okręgu współśrodkowego z okręgiem $x^2+y^2+3x-4y-1=0$ i przechodzącego przez punkt $A=(-3;4)$.

2.10. Na płaszczyźnie współrzędnych zilustruj zbiory:
$A=\{(x;y): x^2-y^2>0 \quad \text{i} \quad x^2+y^2<4 \quad \text{i} \quad x,y\in \boldsymbol{R}\}$,
$B=\{(x;y): 9x^2-4y^2\leqslant 36 \quad \text{i} \quad x^2-y^2<0 \quad \text{i} \quad x,y\in \boldsymbol{R}\}$.

2.11. Dane są zbiory:

$A = \{(x;y) : x,y \in \mathbf{R} \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 \leqslant 1\}$,

$A = \{(x;y) : x^2 - y^2 > 0, \quad x^2 + y^2 < 4 \quad \text{i} \quad x,y \in \mathbf{R}\}$.

Na płaszczyźnie współrzędnych zilustruj zbiory $A \cap B$, $A \cup B$.

2.12. Niech $5x - 2$ oznacza odległość punktu A od prostej a oraz $3x + 1$ długość promienia okręgu $o(A;r)$. Dla jakich $x \in \mathbf{R}$ prosta a będzie:

a) styczna do okręgu $o(A;r)$;
b) sieczną okręgu $o(A;r)$;
c) rozłączna z okręgiem $o(A;r)$?

2.13. Jeśli cięciwa dzieli obwód okręgu w stosunku 3:5, to w jakim stosunku dzieli pole koła?

☆ **2.14.** Okrąg podzielono na trzy części, których długości są w stosunku odpowiednio 2:3:4. Przez punkty podziału poprowadzono styczne do okręgu. Oblicz miary kątów otrzymanego trójkąta.

☆ **2.15.** Punkty A, B, C należące do okręgu dzielą go na łuki $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, których długości pozostają w stosunku odpowiednio 4:5:3. Wyznacz kąty wewnętrzne tego trójkąta.

☆ **2.16.** Punkty A, B, C, D należące do okręgu dzielą go na łuki $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$, których długości pozostają w stosunku odpowiednio 3:6:5:4. Wyznacz kąty wewnętrzne czworokąta $ABCD$.

☆ **2.17.** Oblicz promień r okręgu wpisanego w wycinek kołowy o promieniu R i kącie środkowym $60°$. Oblicz stosunek tego wycinka do pola koła wpisanego.

☆ **2.18.** W wycinek koła K_1 o promieniu 6 wpisano koło K_2 o promieniu 2. Oblicz pole wycinka koła K_1.

☆ **2.19.** Długość brzegu pierścienia kołowego jest równa 8, a jego pole jest równe 4. Oblicz długość promieni tego pierścienia.

★ **2.20.** Na płaszczyźnie obrano dowolnie 2002 punkty. Udowodnij, że na dowolnym okręgu o promieniu długości 1, leżącym na tej płaszczyźnie, istnieje taki punkt B, że $A_1B + A_2B + \ldots + A_{2002}B \geqslant 2002$.

3. Odległości punktu od prostej

3.1. Oblicz odległość początku układu współrzędnych od prostej o równaniu $y = 2x + 4$.

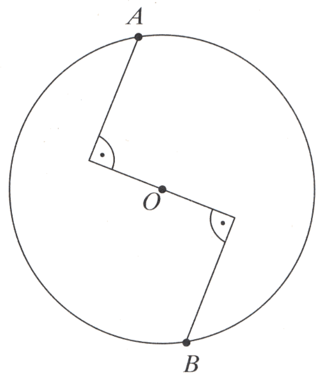
3.2. Znajdź na osi rzędnych taki punkt P, aby jego odległość od prostej $l: 3x - 4y + 12 = 0$ była równa odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

3.3. Wykaż, że prosta $5x - 2y - 1 = 0$ jest jednakowo oddalona od prostych: $5x - 2y + 7 = 0$ i $5x - 2y - 9 = 0$.

3.4. Proste o równaniach $2x+y+2=0$ i $3x+4y+24=0$ przecinają osie układu współrzędnych w punktach odpowiednio A, B, C i D. Wyznacz odległości danych prostych od początku układu współrzędnych oraz oblicz pole czworokąta $ABCD$.

☆ **3.5.** Udowodnij, że odległość między prostymi równoległymi o równaniach $Ax+By+C_1=0$ i $Ax+By+C_2=0$ jest równa $\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

★ **3.6.** Na brzegu jeziora w kształcie koła znajdują się przystanie A i B, rozmieszczone symetrycznie względem środka O tego koła. Rozstrzygnij, która z dróg od przystani A do przystani B jest krótsza: wzdłuż brzegu tego koła czy wzdłuż łamanej złożonej z trzech odcinków równej długości, z których każde dwa kolejne są do siebie prostopadłe.



4. Wzajemne położenie okręgu i prostej

4.1. Określ wzajemne położenie prostej l i okręgu S, gdy:

a) $l: x-2y+5=0$, $S: x^2+y^2=36$;

b) $l: x+y+2=0$, $S: x^2+y^2-2x-2y-2=0$;

c) $l: x-y-2+\sqrt{2}=0$, $s: x^2+y^2-2x+2y+1=0$.

4.2. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A=(3;0)$ i $B=(-1;2)$, wiedząc, że środek tego okręgu należy do prostej o równaniu $x-y+2=0$.

4.3. Wyznacz równanie okręgu o środku $A=(3;0)$ i $B=(-1;2)$, odcinającego na prostej $x-y+2=0$ cięciwę o długości 16.

4.4. Napisz równanie okręgu o środku leżącym na prostej o równaniu $-3x+y-2=0$ i przechodzącego przez punkty $A=(-3;-1)$ i $B=(1;-3)$.

4.5. Napisz równanie stycznej do okręgu o równaniu $x^2+y^2=10$ w punkcie $A=(1;3)$.

4.6. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A=(4;4)$ i stycznego do osi rzędnych w początku układu współrzędnych.

4.7. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $P=(9;9)$ i stycznego do osi OX w punkcie $A=(6;0)$.

4.8. Wykaż, że prosta o równaniu $5x - 12y + 9 = 0$ jest styczna do okręgu o równaniu $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$.

4.9. Znajdź równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A = (-4; 2)$ i stycznego do osi OX w punkcie $B = (2; 0)$.

4.10. Znajdź równanie okręgu o promieniu długości 8, wiedząc, że okrąg ten jest styczny do prostych o równaniach $3x - 4y + 10 = 0$ i $3x + 4y = 0$.

4.11. Znajdź równanie okręgu wpisanego w trójkąt, którego boki zawierają się w prostych o równaniach $x + y + 12 = 0$, $7x + y = 0$ i $7x - y + 28 = 0$.

4.12. Wyznacz równanie stycznej do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ w punkcie $A = (3; 1)$ należącym do tego okręgu.

4.13. Napisz równanie okręgu o środku w początku układu współrzędnych i stycznych do prostej o równaniu $6x - 8y + 10 = 0$.

4.14. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A = (7; 9)$ i stycznego do osi OX w punkcie $B = (4; 0)$.

4.15. Dla jakich c prosta o równaniu $4x - 3y + c = 0$ jest styczna do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 25$?

4.16. Napisz równanie okręgu stycznego do osi OX, wiedząc, że jego środek należy do osi OY.

4.17. Napisz równanie okręgu o promieniu $r = 3$, stycznego do obu osi układu XOY.

4.18. Napisz równanie okręgu o środku $s = (2; -3)$, stycznego do osi OX.

4.19. Napisz równanie okręgu o promieniu $r = \sqrt{5}$, stycznego do prostej o równaniu $x - 2y - 1 = 0$ w punkcie $A = (3; 1)$.

4.20. Napisz równanie okręgu o promieniu równym $\sqrt{5}$ i stycznego do prostej o równaniu $x + 2y - 1 = 0$, wiedząc, że jego środek leży na osi OY.

4.21. Oblicz odległość środka okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ od prostej o równaniu $x - 2y - 4 = 0$.

4.22. W trójkącie równobocznym ABC punkt A_1 jest środkiem boku BC. B_1 jest środkiem boku AC, C_1 – środkiem boku AB. Udowodnij, że A_1C_1 jest styczną do okręgu przechodzącego przez punkty A_1B_1C.

4.23. Dany jest okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.

a) Napisz równania stycznych do tego okręgu, poprowadzonych z początku układu współrzędnych.

b) Oblicz pole figury ograniczonej stycznymi okręgu i jego krótszym łukiem, wyznaczonym przez punkty styczności.

☆ **4.24.** Na okręgu obrano trzy różne punkty A, B, C tak, że odcinek AB jest średnicą okręgu. Styczna do okręgu w punkcie B i sieczna AC przecinają się w punkcie M. Wykaż, że styczna do okręgu w punkcie C dzieli odcinek BM na równe części.

☆ **4.25.** W trójkącie ABC wpisano okrąg styczny do boków trójkąta w punktach DEF. Przyjmując, że dane są kąty wewnętrzne α, β, γ trójkąta ABC, wyznacz kąty wewnętrzne trójkąta DEF.

☆ **4.26.** Z punktu D leżącego poza okręgiem o środku O poprowadzono styczne do tego okręgu w punktach B i C. Przez punkt B prowadzimy prostą równoległą do prostej DC, przecinającą okrąg w punkcie A. Kąt ostry między prostymi AB i BD ma miarę 60°, a ponadto $BD = 10$.
a) Wyznacz miary kątów wewnętrznych czworokąta $OCDB$.
b) Oblicz pole trójkąta BCD.

★ **4.27.** Dany jest okrąg o środku O i promieniu R. W okręgu tym poprowadzono średnicę i równoległą do niej cięciwę. Na średnicy tej obrano w odległości r od środka O punkt M. Oblicz sumę kwadratów odległości punktu M od końców poprowadzonej cięciwy.

5. Wzajemne położenie dwóch okręgów

5.1. Określ wzajemne położenie okręgów, gdy:
$x^2+y^2-2x-4y-6+2\sqrt{10}=0$ i $x^2+y^2-4x+2y+4=0$.

5.2. Znajdź odległość środków okręgów danych równaniami:
a) $x^2+y^2=5$ i $(x-1)^2+(y+1)^2=25$;
b) $x^2+y^2-2y=0$ i $x^2+y^2-2x=0$.

5.3. Określ wzajemne położenie okręgów $o(A;a)$ i $o(B;b)$, wiedząc, że:
a) $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $Ab=\sqrt{5}+\sqrt{2}$;
b) $a=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$, $b=\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}$, $AB=1$.

5.4. Określ wzajemne położenie okręgów $O(A;a)$ i $O(B;b)$, wiedząc, że $AB=15$, $a=9$ i $b=32$.

5.5. Niech $AB=6-3y$, $a=2y+3$, $b=7-y$. Dla jakich $y\in \boldsymbol{R}$ okręgi $o(A;a)$ i $o(B;b)$:
a) są styczne wewnętrznie;
b) $o(A;a)$ zawiera się we wnętrzu koła $k(B;b)$?

5.6. Wiadomo, że $p,q\in \boldsymbol{R}_+$ i $p>q$. Określ wzajemne położenie okręgów $o(A;a)$ i $o(B;b)$, jeżeli:
$a=\dfrac{(p+q)^2}{2}$, $b=\dfrac{(p-q)^2}{2}$, $AB=p^2+q^2$.

5.7. Dane są dwa okręgi: $o(A;r)$ i $o(B;r)$, przy czym $AB > 2r$. Jaką figurą jest zbiór punktów płaszczyzny, których odległości od okręgów danych są równe?

5.8. Dany jest okrąg $o(O;R)$. Ile okręgów o promieniu r można umieścić na zewnątrz tego okręgu tak, aby każdy z nich był styczny do danego okręgu i do dwóch sąsiednich.

5.9. W trójkąt równoboczny wpisano trzy jednakowe okręgi w ten sposób, że każdy z nich jest styczny do dwóch pozostałych okręgów oraz do dwóch boków trójkąta. Oblicz promień tych okręgów, wiedząc, że bok trójkąta jest równy a.

5.10. W półkole o średnicy $AB = 2R$ wpisano okrąg styczny do średnicy AB w jej środku. Znajdź promień okręgu stycznego równocześnie do półokręgu AB, do wpisanego okręgu oraz do średnicy AB.

5.11. Na danym odcinku a oraz na jego połowach, jako na średnicach, zakreślono trzy okręgi. Znajdź promień okręgu stycznego do tych trzech okręgów.

5.12. Na danym odcinku i jego nierównych częściach a i b, jako na średnicach, zakreślono trzy okręgi. Znajdź promień okręgu stycznego do tych trzech okręgów.

5.13. Z wierzchołków kwadratu o boku a, jako ze środków, zakreślono cztery okręgi o promieniu $\frac{a}{2}$. Znajdź promienie okręgów stycznych do tych czterech okręgów.

5.14. W okrąg o promieniu R wpisano trzy jednakowe okręgi wzajemnie stycznie oraz styczne do danego okręgu. Wyznacz ich promień.

5.15. Dane są dwa okręgi: $o(O_1;r)$ i $o(O_2;R)$, gdzie $O_1O_2 = d\ (d > r + R)$. Oblicz długość wspólnej stycznej zewnętrznej x oraz wspólnej stycznej wewnętrznej y.

5.16. Dwa okręgi są styczne wewnętrznie w punkcie A oraz $\overline{AB}$ jest średnicą większego okręgu. Cięciwa BD większego okręgu jest styczna do mniejszego okręgu w punkcie C. Wykaż, że półprosta AC jest dwusieczną kąta BAD.

5.17. Dany jest okrąg $o(O;r)$ i punkt P należący do tego okręgu. Skonstruuj styczną do okręgu $o(O;r)$ przechodzącą przez punkt P.

5.18. Dany jest okrąg $o(O;r)$ i prosta a. Skonstruuj styczną do okręgu $o(O;r)$ równoległą do prostej a.

5.19. Skonstruuj okrąg o promieniu długości r styczny do dwóch danych przecinających się prostych a, b.

5.20. Narysuj okrąg o promieniu długości 1 styczny wewnętrznie do każdego z okręgów $o(A;3)$ i $o(B;5)$, wiedząc, że $AB = 3$.

5.21. Oblicz długość okręgu będącego brzegiem koła o polu S.

5.22. Oblicz długości dwóch okręgów stycznych wewnętrznie, wiedząc, że odległość środków tych okręgów jest równa 4, zaś stosunek długości ich promieni wynosi $\frac{5}{3}$.

5.23. Odległość środków okręgów o promieniach 15 i 10 jest równa 20. Wyznacz odległość środków tych okręgów od punktu przecięcia się prostej przechodzącej przez środki tych okręgów.

5.24. Dwa okręgi o promieniach 5 i 12 są styczne wewnętrznie. Prosta przechodząca przez punkt styczności wyznacza w każdym z tych okręgów cięciwę. Jedna z tych cięciw ma długość 8. Jaką długość ma druga cięciwa?

5.25. Dwa okręgi, każdy o promieniu długości 10 cm, są styczne zewnętrznie. Ze środka jednego okręgu poprowadzono styczne do drugiego okręgu. Oblicz pole obszaru ograniczonego stycznymi i łukami okręgów.

5.26. Oblicz pole pierścienia kołowego o szerokości a, wiedząc, że długość jego brzegu wynosi d.

☆ **5.27.** Różnica długości dwóch okręgów, których suma jest brzegiem pierścienia kołowego, wynosi m. Oblicz szerokość tego pierścienia.

☆ **5.28.** Wykaż, że pole pierścienia o promieniu r i R, gdzie $r < R$, jest równe polu koła, którego średnicą jest cięciwa okręgu większego, styczna do okręgu mniejszego.

☆ **5.29.** Dwa okręgi są styczne zewnętrznie w punkcie A. Poprowadzono prostą, styczną do obu okręgów odpowiednio w punktach B i C. Udowodnij, że kąt BAC jest prosty.

☆ **5.30.** Dane są dwa współśrodkowe okręgi. Cięciwa większego okręgu, styczna do mniejszego okręgu, ma 10 cm długości. Oblicz pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez te okręgi.

★ **5.31.** Na odcinku o długości 16 cm oraz na jego połówkach, jako na średnicach, zakreślono trzy okręgi. Wyznacz długość promienia okręgu stycznego do tych trzech okręgów.

★ **5.32.** Na płaszczyźnie danych jest sześć równych okręgów o promieniu r i jeszcze jeden okrąg o danym promieniu R. Każdy z tych sześciu równych okręgów jest styczny zewnętrznie do dwóch innych spośród nich i styczny wewnętrznie do okręgu o promieniu R. Wyznacz długość promienia r.

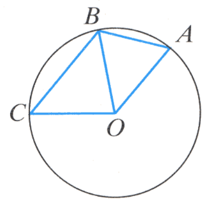
★ **5.33.** Okręgi o promieniach długości 3, 4 i 5 są parami styczne zewnętrznie. Przez punkt styczności okręgów o promieniach 3 i 4 poprowadzono wspólną styczną do tych okręgów. Oblicz długość odcinka tej stycznej zawartego w okręgu o promieniu 5.

★ **5.34.** W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną CD. Wiadomo, że środek okręgu wpisanego w trójkąt BCD pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

★ **5.35.** Na płaszczyźnie dane są okręgi S_1 i S_2 przecinające się w punktach A i B. Przez punkt A poprowadzono prostą, przecinającą okręgi S_1 i S_2 odpowiednio w punktach C i D. Przez punkty C i D poprowadzono proste równoległe, z których jedna przecina okrąg S_1 w punkcie E, a druga przecina okrąg S_2 w punkcie F. Udowodnij, że punkty E, B i F leżą na jednej prostej.

★ **5.36.** Dany jest okrąg o środku O i promieniu R. Poprowadzono dwie prostopadłe średnice AB i CD tego okręgu i cięciwę AM przecinającą średnicę CD w punkcie N. Wiedząc, że w czworokąt $OBMN$ można wpisać okrąg, wyznacz miarę kąta między cięciwą AM i średnicą AB.

6. Kąty w kole



6.1. Oblicz miary kątów ACB, CAB, ACO i CAO, wiedząc, że $\sphericalangle BOC = 80°$, a $\sphericalangle AOB = 50°$.

6.2. Z wierzchołka rombu $ABCD$ zakreślono okrąg przechodzący przez trzy pozostałe wierzchołki. Znajdź miary kątów tego rombu.

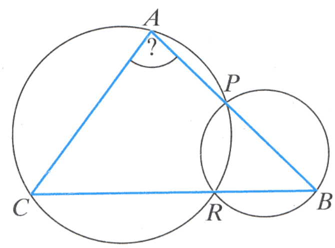
6.3. Z punktu A leżącego na okręgu poprowadzono średnicę AB i cięciwę AC. Kąt zawarty między AB i AC ma miarę $30°$. Przez punkt C poprowadzono styczną do okręgu przecinającą przedłużenie średnicy w punkcie D. Znajdź miarę kąta CDA. Jakim trójkątem jest ADC?

6.4. Dwa kolejne kąty środkowe AOB i BOC okręgu o środku O są odpowiednio równe $58°$ i $42°$. Wyznacz kąty wewnętrzne trójkąta ABC.

6.5. Na trójkącie ostrokątnym ABC, w którym kąt wewnętrzny przy wierzchołku C jest równy $72°$, opisano okrąg o środku O. Wyznacz kąty wewnętrzne trójkąta AOB.

6.6. W koło wpisano trójkąt ABC. Miary kątów CAB i CBA wynoszą odpowiednio $40°$ i $80°$. Styczna w punkcie C przecina przedłużenia boków AB w punkcie D. Oblicz miary kątów trójkąta BCD.

6.7. Punkty A, P, B leżą na tej samej prostej. Również na jednej prostej leżą punkty O, R, B. Odcinek PB jest średnicą okręgu. Znajdź miarę kąta PAC.



6.8. W dany kąt BAC wpisano okrąg. Punkty styczności okręgu z ramionami kąta dzielą ten okrąg na dwa łuki, z których jeden jest $1\frac{2}{3}$ razy dłuższy od drugiego. Znajdź wielkość kąta $\sphericalangle BAC$.

6.9. Cięciwy AB i CD danego okręgu są prostopadłe. Oblicz miarę kąta ACD wiedząc, że kąt $\sphericalangle CDB = 36°$.

6.10. Punkty A, B, C, D należą do okręgu o środku O. Oblicz miarę kąta ABC, wiedząc, że kąt $\sphericalangle AOB = 120°$ i kąt $\sphericalangle BDC = 10°$.

6.11. W trójkącie równoramiennym kąt między dwusiecznymi kątów przy wierzchołku i przy podstawie jest równy 130°. Znajdź miary kątów trójkąta.

6.12. Na trójkącie o bokach długości 6,8 i 10 opisano koło, w które następnie wpisano koło. Oblicz sumę długości promieni obu tych kół.

6.13. W trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$, wpisano okrąg o środku O. Wyznacz miary kątów tego trójkąta, wiedząc, że $\sphericalangle AOB = 110^\circ$.

6.14. W trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$, wpisano okrąg o środku O i na trójkącie tym opisano okrąg o środku S. Wiedząc, że $\sphericalangle ACB = 40^\circ$, wyznacz miarę kąta SAO.

6.15. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg. Styczne do tego okręgu w punktach A, B, C wyznaczają nowy trójkąt. Znajdź miary kątów tego trójkąta w zależności od miar kątów trójkąta ABC.

6.16. W trójkącie ABC wpisanym w okrąg $\sphericalangle A = 48^\circ$ i $\sphericalangle B = 68^\circ$. Wyznacz miarę kąta między prostą AB i styczną do tego okręgu w punkcie C.

6.17. Średnica AB i cięciwa MN okręgu przecinają się w punkcie K. Kąt MKB ma miarę 78°, a kąt środkowy oparty na łuku BM ma miarę 48°. Wyznacz miarę kąta AMN.

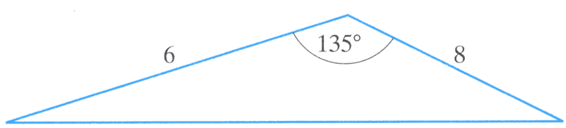
☆ **6.18.** Prosta łącząca wierzchołek C trójkąta ABC ze środkiem S okręgu wpisanego w ten trójkąt przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie M różnym od C. Udowodnij, że $MS = MA$.

☆ **6.19.** W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną CD. Wiadomo, że środek okręgu wpisanego w trójkąt BCD pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

☆ **6.20.** W trójkąt równoboczny ABC wpisano okrąg o środku O. Styczna do tego okręgu przecina boki CA i AB odpowiednio w punktach M i N. Na bokach tych obrano jeszcze takie punkty M_1 i N_1, że $AM_1 = CM$ i $BN_1 = CN$. Wykaż, że punkty M_1, O, N_1 leżą na jednej prostej.

7. Trójkąt i jego punkty szczególne

7.1. Oblicz obwód i pole trójkąta przedstawionego na rycinie.

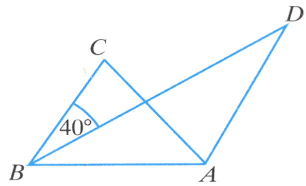


7.2. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Wiadomo, że bok $AB = 5$, wysokość $CC' = 2{,}4$, a długości boków AC i BC są liczbami naturalnymi i $AC < BC$. Wyznacz obwód trójkąta równoramiennego, którego dwa boki mają długości $\frac{1}{2}AC$ i BC.

7.3. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość 15. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość 3. Oblicz pole tego trójkąta.

7.4. Dwusieczna kąta prostego ACB w trójkącie ABC tworzy z wysokością opuszczoną na przeciwprostokątną kąt $12°$. Wyznacz kąty ostre trójkąta ABC.

7.5. Wyznacz kąt DAC, wiedząc, że $AB = AC = AD$ oraz kąt CBD ma miarę $40°$ (patrz rycina).



7.6. W trójkącie ABC kąt wewnętrzny przy wierzchołku C jest równy $68°$, a dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A i B przecinają się w punkcie D. Wyznacz kąt ADB.

7.7. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC, jeśli wiadomo, że dwusieczna kąta C tego trójkąta ma długość równą długości boku AC lub BC i nachylona jest do boku AB pod kątem $80°$.

7.8. Wykaż, że jeżeli w trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta wewnętrznego przy podstawie jest prostopadła do ramienia trójkąta, to trójkąt jest równoboczny.

7.9. Wykaż, że jeśli długość środkowej CD trójkąta ABC jest równa połowie długości boku AB, to trójkąt ten jest prostokątny.

7.10. Wykaż, że środek okręgu wpisanego w trójkąt leży najbliżej wierzchołka największego kąta w tym trójkącie.

7.11. Wykaż, że jeśli punkt P jest punktem wewnętrznym trójkąta ABC, to kąt $\sphericalangle BPC > \sphericalangle BAC$.

7.12. Prosta MN jest równoległa do boku AB trójkąta ABC i przecina bok AC w punkcie M oraz BC w punkcie N. Oblicz:

BC, jeżeli $AC + BC = 9$, $CM = 4$ i $CN = 1$.

7.13. Przyjmując za dane długości boków trójkąta, znajdź długości odcinków, na jakie dzielą boki punkty styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt.

7.14. W trójkąt ABC o kątach $40°$, $60°$, $80°$ wpisano okrąg. Punkty styczności połączono odcinkami, otrzymując trójkąt KLM ($K \in AB$, $L \in BC$, $M \in AC$).

a) Uzasadnij, że trójkąty: AKM, BKL, CLM są równoramienne.

b) Oblicz miary kątów trójkątów AKM, BKL, CLM.
c) Oblicz miary kątów trójkąta MKL.

☆ **7.15.** Dwusieczne kątów trójkąta ABC przecinają się w punkcie O. Przez punkt O poprowadzono proste równoległe do boków AB i AC, przecinające bok BC w punktach D i E. Udowodnij, że obwód trójkąta OED jest równy odcinkowi BC.

☆ **7.16.** W trójkącie ABC dwusieczne kątów B i C przecinają się w punkcie X. Przez punkt X poprowadzono równoległą do AB, przecinającą bok AC w punkcie K i bok BC w punkcie L. Wykaż, że $KL = AK + BL$.

☆ **7.17.** Udowodnij, że w każdym trójkącie nierównoramiennym: ortocentrum H, środek O okręgu opisanego na tym trójkącie, rzuty punktu O na wysokości tego trójkąta, rzuty ortocentrum H na symetralne boków oraz rzuty ortocentrum H na proste łączące O z wierzchołkami tego trójkąta leżą na jednym okręgu.

☆ **7.18.** Udowodnij, że w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a, b przeciwprostokątnej c i wysokości h_c opuszczonej z wierzchołka kąta prostego spełniona jest nierówność $c + h_c > a + b$.

☆ **7.19.** Na płaszczyźnie dane są proste a i b, do siebie równoległe. Na prostej a obrano kolejno punkty A, B, C. Przez punkt B poprowadzono prostą c, przecinającą prostą b w punkcie D. Ponadto narysowano dwusieczne kątów ABD i DBC, przecinające prostą b w punktach E i F. Udowodnij, że $ED = DF$.

★ **7.20.** Wysokości trójkąta ostrokątnego ABC przecinają się w punkcie H. Wiadomo, że $AB = CH$. Znajdź miarę kąta ACB.

★ **7.21.** W czworokącie wypukłym $ABCD$: $\sphericalangle BAC = 20^\circ$, $\sphericalangle BCA = 35^\circ$, $\sphericalangle BDC = 40^\circ$, $\sphericalangle BDA = 70^\circ$. Znajdź miarę kąta między przekątnymi tego czworokąta.

★ **7.22.** Na bokach AB i AC trójkąta ABC obrano odpowiednio takie punkty L i M, że $5AL = 2AB$ i $4AM = 3AC$. Odcinki BM i CL przecinają się w punkcie P, a odcinki AP i BC w punkcie N. Wyznacz $\frac{BN}{BC}$.

★ **7.23.** Odcinki AD, BE i CF są wysokościami trójkąta ABC i jednocześnie dwusiecznymi kątów wewnętrznych trójkąta DEF. Wyznacz miary kątów trójkąta DEF, wiedząc, że kąty trójkąta ABC mają miary 45°, 60° i 75°.

★ **7.24.** Wykaż, że pole S trójkąta o bokach długości a, b, c można wyrazić wzorem $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie $2p = a + b + c$ (jest to tzw. wzór Herona).

★ **7.25.** W trapezie $ABCD$ boki nierównoległe AD i BC są wzajemnie prostopadłe. Ponadto $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ABC = 30^\circ$, $AD = 8$. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

★ **7.26.** Wyraź pole trójkąta w zależności od długości jego wysokości h_a, h_b, h_c.

8. Twierdzenie Talesa i doń odwrotne

8.1. Odcinek o danej długości podziel na odcinki w stosunku $\frac{5}{6}$.

8.2. Dane są odcinki p, q i r. Skonstruuj odcinek o długości x taki, że:

a) $p:q=r:x$; b) $p\cdot x=q^2$; c) $x\cdot p^2=q^3$;

d) $px=q\cdot r$; e) $x=\frac{(p+q)\cdot r}{p}$.

8.3. Dane są punkty P i Q oraz odcinki o długościach p i q. Skonstruuj na prostej taki punkt R, że $\frac{PR}{QR}=\frac{p}{q}$.

8.4. Dane są odcinki o długościach a, b, c, d, e. Skonstruuj odcinek y taki, że $y=\frac{a\cdot b\cdot c}{d\cdot e}$.

8.5. Boki trójkąta mają długości a, b, x. Dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku przeciwległym bokowi o długości x odcina na przedłużeniu tego boku odcinek o długości c. Oblicz x.

8.6. Boki trójkąta mają długości 7, 4, x. Dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku przeciwległym bokowi o długości x odcina na przedłużeniu tego boku odcinek długości 5. Oblicz x.

8.7. Dany jest trapez $ABCD$ o bokach równoległych AB i CD. Oblicz pole trójkąta BCM, wiedząc, że M jest środkiem boku AD oraz $AB=a$ i $CD=b$, wysokość trapezu jest równa h.

8.8. W trójkącie ABC prosta równoległa do boku BC wyznacza na boku AC punkt O, a na boku AB punkt E w taki sposób, że $AD=9$, $AE=6$ i $EB=4$. Oblicz AC.

8.9. W trapezie o podstawach a, b i ramionach p, q przedłużenia ramion przecinają się, tworząc trójkąt wraz z krótszą podstawą b trapezu. Oblicz obwód tego trójkąta.

8.10. W równoległoboku $ABCD$ na przekątnej AC wybieramy punkt M. Przez ten punkt prowadzimy proste równoległe do boków AB i AC. Prosta równoległa do AB przecina boki AD i BC tego równoległoboku odpowiednio w punktach M_1 i M_2, zaś prosta równoległa do prostej AD przecina boki AB i CD odpowiednio w punktach M_3 i M_4.

a) Udowodnij, że $MM_1\circ MM_4=MM_2\circ MM_3$.

b) Dla jakich punktów M jest $M_2M_3 \parallel M_1M_4$?

8.11. AA', BB', CC' są wysokościami trójkąta ABC, zaś H jest ich wspólnym punktem. M i N są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktu A' na proste AB i AC. Wymień wszystkie pary odcinków, których końcami są punkty A, B, C, A', B', C', H, M, N i których stosunki są równe $\frac{AH}{AA'}$.

8.12. W trójkącie ABC przez środek środkowej CC_1 poprowadzono prostą równoległą do prostej BC. Prosta ta przecina bok AC trójkąta w punkcie D. Znajdź wartość liczbową stosunku $\frac{DC}{DA}$.

8.13. Punkt O jest punktem przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$.
  a) Wypisz wszystkie pary odcinków, których końcami są punkty A, B, C, D, O i których stosunki są równe $\frac{OC}{OA}$.
  b) Udowodnij, że punkt O jest środkiem odcinka wyciętego przez brzeg trapezu z prostej przechodzącej przez O i równoległej do AB.

8.14. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = 12$, $BC = 8$, $AC = 10$. Poprowadzono prostą równoległą do AC, dzielącą obwód trójkąta na połowy. Oblicz długości odcinków wyznaczonych na bokach AB i BC przez tę równoległą.

8.15. Podstawy trapezu mają długości a i b $(a > b)$. Oblicz długość odcinka łączącego środki jego przekątnych.

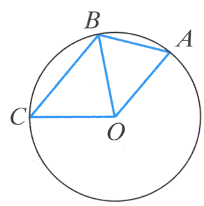
☆ **8.16.** W równoległoboku $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, punkt M jest środkiem boku AB, a punkt K jest środkiem boku CD. Udowodnij, że odcinki AK i MC dzielą przekątną BD na trzy równe części.

☆ **8.17.** W równoległoboku $ABCD$ obrano na boku BC punkt F. Prosta AF przecina przekątną BD w punkcie E, a prostą DC w punkcie G. Udowodnij, że $AE = \sqrt{EF \cdot EG}$.

☆ **8.18.** Przez punkt przecięcia przekątnych trapezu o podstawach długości a i b przeprowadzono odcinek równoległy do podstaw, aż do przecięcia się z ramionami. Wyznacz długość tego odcinka.

9. Czworokąt wpisany w okrąg

9.1. Oblicz miary kątów ACB, CAB, ACO i CAO, wiedząc, że $\sphericalangle BOC = 80°$, a $\sphericalangle AOB = 50°$.



9.2. Z wierzchołka rombu $ABCD$ zakreślono okrąg przechodzący przez trzy pozostałe wierzchołki. Znajdź miary kątów tego rombu.

9.3. Znajdź długość wysokości trapezu równoramiennego o podstawach długości 12 i 3, wiedząc, że w ten trapez można wpisać okrąg.

9.4. Oblicz długość ramienia i przekątnej trapezu równoramiennego o podstawach długości 20 i 12, wiedząc, że środek okręgu opisanego leży na większej podstawie trapezu.

9.5. Dane są miary α i β kątów utworzonych przez przedłużenia przeciwległych boków czworokąta wpisanego w okrąg. Oblicz miary kątów czworokąta.

9.6. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trapezie równoramiennym, którego ramię ma długość $\sqrt{10}$, a podstawy odpowiednio 6 i 4.

10. Czworokąt opisany na okręgu

10.1. Na okręgu o promieniu długości 4 opisano trapez równoramienny, w którym miary kątów przy podstawie AB mają po $30°$. Oblicz pole i obwód trapezu.

10.2. Pole powierzchni trapezu równoramiennego opisanego na okręgu równe jest S. Miara kąta ostrego trapezu wynosi $30°$. Oblicz długość ramienia trapezu.

10.3. Trapez ma dwa kąty proste i jest opisany na okręgu. Wyznacz długości jego boków nierównoległych, jeżeli długości jego podstaw są równe a i b.

10.4. Oblicz obwód trapezu opisanego na okręgu, wiedząc, że odcinek łączący środki boków nierównoległych tego trapezu ma długość 8.

10.5. Oblicz pole trapezu równoramiennego, wiedząc, że punkt styczności okręgu wpisanego w ten trapez z ramieniem trapezu dzieli to ramię na odcinki o długości 2 i 5.

10.6. W trapez równoramienny o mniejszej podstawie równej 1 wpisano okrąg o promieniu równym 1. Oblicz pole powierzchni trapezu.

10.7. Na okręgu o promieniu długości r opisano trapez prostokątny. Długość najkrótszego z boków trapezu wynosi $\frac{5}{4}r$. Oblicz pole trapezu.

10.8. Trapez ma dwa kąty proste i jest opisany na okręgu. Wyznacz długości nierównoległych boków trapezu, jeżeli długości jego podstaw są równe a i b.

☆ **10.9.** Odcinek łączący wierzchołki A i C czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg przechodzi przez środek okręgu. Udowodnij, że $\frac{AB+AD}{CD+CB}=1$ lub $\frac{AB+AD}{CD+CB}=\frac{CD-CB}{AB-AD}$.

☆ **10.10.** W trapezie opisanym na okręgu długości boków nierównoległych wynoszą 3 i 5, a odcinek łączący środki tych boków dzieli trapez na czworokąty, których pola pozostają w stosunku $5:11$. Wyznacz długości podstaw tego trapezu.

☆ **10.11.** Udowodnij, że jeżeli w trapez równoramienny można wpisać okrąg, to średnica tego okręgu jest średnią geometryczną długości podstaw tego trapezu.

11. Rodzaje czworokątów

11.1. W trapezie $ABCD$, którego podstawy AB i CD mają długości odpowiednio 12 i 8, zaś wysokość ma długość 5, przedłużenia boków nierównoległych przecinają się w punkcie E. Oblicz pole trójkąta ABE.

11.2. Oblicz długość wysokości rombu, którego przekątne mają długości 14 i 16.

11.3. Oblicz długość boku rombu wpisanego w równoległobok, wiedząc, że przekątne równoległoboku mają długości 15 i 20, zaś boki rombu są równoległe do tych przekątnych.

11.4. Dowolny punkt M leżący wewnątrz równoległoboku $ABCD$ połączono z jego wierzchołkami. Wykaż, że suma pól trójkątów ABM i CMB jest równa sumie pól trójkątów AMD i BMC.

11.5. W trapezie równoramiennym wysokość wynosi 14, a przekątne przecinają się pod kątem prostym i dzielą się w stosunku 2:5. Oblicz pole tego trapezu.

11.6. W trapezie $ABCD$ mamy dane kąty przy podstawie $\alpha = 45^\circ$ (przy wierzchołku A) i $\beta = 60^\circ$ (przy wierzchołku B). Wiedząc, że przekątna BD ma długość $6\sqrt{2}$ i jest prostopadła do ramienia AD, oblicz długości boków tego trapezu oraz jego pole.

11.7. W równoległoboku $ABCD$ zachodzi równość $AB = 2 \cdot BC$. Punkt M, który dzieli bok AB na połowy, połączono odcinkami z punktami C i D. Znajdź miarę kąta CMD.

11.8. Podstawy trapezu równe są odpowiednio 3 i 2, a jego przekątne są równe 4 i 3. Oblicz pole powierzchni trapezu.

11.9. Obwód trapezu jest równy 68. Jedna z przekątnych dzieli go na dwa trójkąty o obwodach 48 i 60. Oblicz długość tej przekątnej.

11.10. W trapezie $ABCD$ podstawy mają długości $AB = 20$, $CD = 12$, a ramię $AD = 6$. O ile należy przedłużyć ramię AD, aby przecięło się z przedłużeniem ramienia BC?

11.11. W trapezie $ABCD$ suma długości obu podstaw wynosi 16. Przekątna AC dzieli ten trapez na dwa trójkąty, których pola są w stosunku 3:5. Przedłużenia ramion trapezu przecinają się w punkcie P. Oblicz pole trójkąta DCP, jeżeli wiadomo, że trapez ma wysokość 8.

11.12. W prostokącie jeden z boków wydłużono, drugi zaś skrócono o $x\%$. W wyniku tych zmian pole prostokąta zmniejszyło się o 4%. Oblicz x.

11.13. Oblicz obwód czworokąta, wiedząc, że jego przekątna, której długość wynosi 7, dzieli go na dwa trójkąty o obwodach 25, 35.

11.14. Oblicz długość przekątnej czworokąta o obwodzie 60, wiedząc, że przekątna ta dzieli czworokąt na dwa trójkąty o obwodach 34 i 36.

11.15. Prosta przechodząca przez wierzchołek A rombu $ABCD$ i niemająca z rombem innych punktów wspólnych przecina prostą BC w punkcie E, zaś prosta CD w punkcie F. Oblicz długość boku rombu, wiedząc, że $BE = 4$ i $DF = 9$.

11.16. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD proste zawierające boki nierównoległe przecinają się w punkcie S. Oblicz obwód trójkąta CDS, wiedząc, że $AB = 9$, $BC = 4\frac{1}{5}$, $CD = 7$ i $AD = 5\frac{1}{3}$.

11.17. Obwód równoległoboku jest równy 24, zaś stosunek jego wysokości wynosi 2:3. Oblicz długości boków tego równoległoboku.

11.18. Odcinek łączący środki przeciwległych boków czworokąta wypukłego dzieli ten czworokąt na dwie figury o równych polach. Udowodnij, że czworokąt ten jest trapezem.

☆ **11.19.** Udowodnij, że jeżeli długość wysokości trapezu równoramiennego jest średnią geometryczną długości podstaw, to w trapez ten można wpisać okrąg.

☆ **11.20.** Oblicz pole trapezu o podstawach długości a i $4a$, wiedząc, że można na nim opisać okrąg i można w niego wpisać okrąg.

☆ **11.21.** Udowodnij, że punkty przecięcia się czterech dwusiecznych kątów równoległoboku niebędącego rombem są wierzchołkami prostokąta.

☆ **11.22.** Suma długości ramion trapezu równoramiennego stanowi $\frac{1}{3}$ sumy długości jego podstawy, a stosunek długości podstaw jest równy 7:5. Wyznacz miary kątów tego trapezu.

☆ **11.23.** W czworokącie $ABCD$ odcinki łączące środki przeciwległych boków są równej długości. Ponadto $AC = 2$, $BD = 1$. Oblicz pole tego czworokąta.

☆ **11.24.** Na bokach n-kąta foremnego zbudowano na zewnątrz kwadraty. Wiadomo, że drugi $2n$-kąt, którego wierzchołkami są wierzchołki tych kwadratów niebędące wierzchołkami danego n-kąta, jest foremny. Udowodnij, że $n = 6$.

★ **11.25.** Udowodnij, że trapez o podstawach AB i CD ($AB > CD$) można pociąć wzdłuż prostej równoległej do któregokolwiek boku niebędącego podstawą na dwa czworokąty o równych polach wtedy i tylko wtedy, gdy $AB < 3CD$.

★ **11.26.** W rombie $ABCD$ kąt przy wierzchołku A ma miarę 60°. Okrąg przechodzący przez środek rombu i styczny do prostej AD w punkcie A przecina bok BC w punkcie E. Wyznacz stosunek $\frac{EC}{BE}$.

★ **11.27.** W romb o boku długości 4 i kącie ostrym równym 60° wpisano okrąg. Oblicz pole prostokąta, którego wierzchołkami są punkty styczności okręgu z bokami rombu.

★ **11.28.** Wykaż, że pole S trapezu o podstawach długości a i b $(a > b)$ i bokach nierównoległych długości c i d można wyrazić wzorem:

$$S = \frac{a+b}{a-b}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-b-c)(p-b-d)}, \text{ gdzie } 2p = a+b+c+d.$$

Odpowiedzi

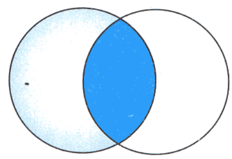
I. Elementy logiki matematycznej

1.2. Zdania logiczne: g); h). **1.3.** Zdanie logiczne: c). **1.6.** a) fałsz; b) fałsz; c) prawda. **1.9.** Prawdziwe są zdania: a), b), d), fałszywe: c). **1.10.** b) 4; c) 1; f) –2. **1.11.** d) $d = \frac{9}{25}$; e) $e = -64$; f) $f = 4$. **2.7.** Prawdziwe są zdania: b); c), a fałszywe: d); j). **2.8.** e) $(-8)^2 \neq 64 \vee \sqrt{(-15)^2} \neq 15$ – fałsz. **2.9.** Prawdziwe są zdania: b); c); d), a fałszywe: e) **2.10.** a) 3; b) 1; c) 52; d) 7); e) 10; f) 1; 2; g) 2; h) nie istnieje; i) –5; j) 1; k) 10; l) 6; m) nie istnieje. **3.5.** Prawdziwe są zdania: c); e); f) g). **3.6.** Prawdziwe są implikacje: f); g); h), a fałszywe: d). **3.7.** a) –1; b) 4; c) 1; d) 8; e) –2); f) –2; g) 6; h) 5; i) 0. **3.12.** a) Prawda; b) prawda; c) fałsz. **3.13.** a) $x = 1$; b) $m = 72$; c) $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$.
4.1. d) Przekątne pewnego równoległoboku są równej długości. e) Koło jest figurą wypukłą. (albo: Koło nie jest figurą wklęsłą.) f) Kąt rozwarty ma miarę większą niż 90°. **4.2.** c) Zbiór liczb naturalnych jest nieskończony lub kwadrat jest figurą płaską. d) Rombu nie można wpisać w okrąg i rombu nie można opisać na okręgu. e) $-4 \leqslant 0$ i 7 jest liczbą nieparzystą. f) Liczby 2 i $\frac{1}{2}$ nie są liczbami odwrotnymi i liczby 1 i –1 nie są liczbami przeciwnymi.
4.3. b) $15{,}2 > 15{,}3 \wedge -4 \notin \boldsymbol{N}$; c) $\sqrt{5} \in \boldsymbol{W} \wedge 2 \notin \boldsymbol{C}$; d) $\sqrt{121} = -11 \wedge 7 \nmid 15$; e) $5 \cdot 6 = 30 \wedge (5 \nmid 35 \vee 8 \nmid 25)$.
4.4. c) $2x - 4 \geqslant 3x + 2$; h) $12d = 18 - 3d$; j) $17 \nmid 24m$. **5.9.** Tautologiami są wyrażenia: e), f) zaś wyrażenia a), b), c), d) i g) nie są tautologiami. **5.10.** a) $\wedge$; b) $\vee$; c) $\wedge$, $\vee$; d) $\vee$; e) $\Rightarrow$; f) $\Leftrightarrow$. **6.1.** a) $\bigwedge_{n \in N} \left(n > \frac{1}{n}\right)$; b) $\bigvee_{k \in C} \left(\sqrt{k} \in C\right)$; c) $\bigwedge_{x \in C} (3 | x)$; d) $\bigwedge_{x \in R} \left((x-1)^2 = x^2 - 2x + 1\right)$; e) $\bigvee_{n \in C} \left(\sqrt[3]{n} = \sqrt[5]{n}\right)$; f) $\bigwedge_{k \in C} \left(\frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} \in C\right)$; g) $\bigwedge_{k \in C} \left(3 \,\middle|\, (k^3 - k)\right)$.
6.2. Prawdziwe są zdania: b), d), e), f) i g), fałszywe: a) i c).
6.3. a) $\bigvee_{x \in R} (x^2 \geqslant x)$; b) $\bigvee_{x \in R} (|x| = x)$; c) $\bigwedge_{x \in R} (x^2 \geqslant 0)$; d) $\bigwedge_{x \in R} (4x + 4 = 4(x+1))$; e) $\bigvee_{x \in R} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 3\right)$; f) $\bigvee_{x \in R} \left(\sqrt{x^2} = x\right)$; g) $\bigvee_{x \in R} (x^2 = 4)$; h) $\bigvee_{n \in C} (2 | n)$; i) $\bigvee_{k \in C}$ (k jest liczbą złożoną); j) $\bigwedge_{n \in C} \left(6 \,|\, n(n+1)(n+2)\right)$.
6.4. a) $\bigwedge_{n \in N} (n^3 > n^2)$; b) $\bigwedge_{a \in W} (a \in C)$; c) $\bigvee_{x \in R} (x^3 = 2)$; d) $\bigvee_{n \in C} (n^3 = n^2)$; e) $\bigwedge_{n \in C} \bigvee_{k \in C} (n = k \cdot 1)$; f) $\bigvee_{M \in R} \bigwedge_{x \in R} (x \leqslant M)$; g) $\bigwedge_{x \in R} \bigvee_{y \in R} (x + y = 0)$. **6.5.** Prawdziwe są zdania: c), d), e) i g), fałszywe: a), b) i f).
6.7. a) Wartość bezwzględna każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną. b) Istnieje liczba rzeczywista, której kwadrat jest równy 2. c) Istnieje liczba rzeczywista, która jest mniejsza od swojej wartości bezwzględnej. d) Istnieje liczba rzeczywista, która jest przeciwna do samej siebie. e) Dla każdej liczby rzeczywistej istnieje liczba rzeczywista od niej większa (albo: Zbiór liczb rzeczywistych jest nieograniczony z góry.). f) Istnieje liczba rzeczywista mniejsza od każdej liczby rzeczywistej (albo: Zbiór liczb rzeczywistych jest ograniczony z dołu.).
6.8. Zdaniami prawdziwymi są: a), b), c), d) i e); fałszywe: f). **6.9.** a) $\bigvee_{x \in R} (|x| < 0)$; b) $\bigwedge_{x \in R} (x^2 \neq 2)$; c) $\bigwedge_{x \in R} (x \geqslant |x|)$; d) $\bigwedge_{x \in R} (-x \neq x)$; e) $\bigvee_{x \in R} \bigwedge_{y \in R} (x \geqslant y)$; f) $\bigwedge_{x \in R} \bigvee_{y \in R} (x \geqslant y)$. **6.10.** Podane rozumowanie jest poprawne; wynika to stąd, że dla dowolnych zdań logicznych p i q wyrażenie $\left[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)\right] \Rightarrow (\sim p)$, jest tautologią (sprawdź to!). **6.11.** Kładziemy na każdą z szalek wagi po trzy monety, a dwie pozostawiamy na uboczu. Jeśli waga jest w równowadze, to fałszywą monetę mamy wśród odłożonych dwóch monet. W drugim ważeniu tych monet wykrywamy fałszywą. Jeśli w pierwszym ważeniu waga nie jest w równowadze, to w drugim ważeniu kładziemy na każdą z szalek po jednej monecie z trójki monet, która okazała się w pierwszym ważeniu lżejsza. Wtedy albo w drugim ważeniu waga jest w równowadze (i fałszywą monetą jest ta odłożona moneta z rozpatrywanej trójki), albo nie jest – i fałszywą monetą jest lżejsza. **6.12.** Kładziemy na każdą z szalek po pięć monet. Jeżeli żadna z szalek nie opadnie, to fałszywą monetę mamy wśród pozostawionych pięciu monet. W drugim ważeniu albo szalka z tymi właśnie monetami opadnie (i wówczas fałszywa moneta jest cięższa), albo nie – i wtedy fałszywa moneta jest lżejsza. Jeśli natomiast w pierwszym ważeniu jedna z szalek opadnie, to zdejmujemy z niej monety i kładziemy na ich miejsce pozostałe monety. Teraz albo szalki są w równowadze (i fałszywa moneta wśród odłożonych monet jest cięższa), albo jedna z szalek opadnie, co oznacza, że fałszywą monetę mamy na szalce, która nie opadła. Fałszywa moneta jest więc lżejsza.

II. Rachunek zbiorów

1.1. e) E zbiór liczb pierwszych nieparzystych; f) $F = \{1, 2, 7, 14\}$; g) $G = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\right\}$.
1.2. a) $A = \{x: x = 2^n$, gdzie n jest liczbą naturalną nie większą od $10\}$; b) $B = \{p: p$ jest liczbą pierwszą i $2 < p < 50\}$; c) $C = \{x: x = n^3$, gdzie n jest liczbą naturalną nie większą od $9\}$; d) $D = \{x: x$ jest parzystym dniem

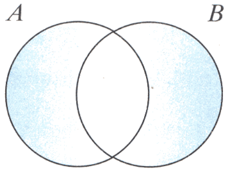
tygodnia}; e) $E = \{x: x$ jest jednostką masy i ciężaru$\}$; f) $F = \{x: x$ jest znakiem rzymskim$\}$; g) $G = \{x: x$ jest wielościanem foremnym (bryłą Platońską)$\}$. **1.4.** a) $A = \{0, 1, 4, 9\}$; d) $A = \{(1; 0), (0; 1), (1; 1), (2; 0)\}$.
1.8. a) $A \cup B = B$; b) $A \cap B = A$; c) $A \setminus C = A$; d) $A \cap C = \varnothing$; e) $A \setminus B = \varnothing$; f) $C \setminus A = C$. **1.9.** a) $A \cup B = A$; b) $A \cap B = B$; c) $A \setminus B =$ zbiór równoległoboków, które nie są kwadratami; d) $BA = \varnothing$. **1.10.** Zbiór kwadratów.
1.11. a) 90°, 45°, 45°. **1.13.** b) $B_8 \cap B_9 = \{1\} = B_1$; c) $A_{16} B_4 = \varnothing$; e) $A_{18} \cup A_9 = A_9$. **1.15.** $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$; $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$; $C = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}$. Zatem: $A \cap B = \{2, 3\}$,
$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 17, 18\}$, $A \setminus B = \{1, 6, 9, 18\}$, $B \setminus A = \{5, 7, 11, 13, 17\}$, $A \setminus C = \{1, 2, 3, 18\}$, $C \setminus A = \{4, 8, 10, 12, 14\}$, $B \setminus C = B$, $C \setminus B = C$, $B \cap C = \varnothing$, $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17\}$, $A \cap C = \{6, 9\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 18\}$, $A \cap B \cap C = \varnothing$, $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18\}$. **1.16.** a) zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 6, b) zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 9, c) zbiór pusty, d) $\{2\}$. **1.17.** a) $1 < x < 5$. **1.18.** a) $\{1, 2, 3, 4\}$.
1.19. c) $x \in (-\infty; 2) \cup (5; 6)(6; +\infty)$, $x \in (-\infty; 2) \cup (5; 6) \cup (6; +\infty)$; d) $\varnothing$, $\varnothing$. **1.23.** $B \setminus A = \{-1\}$.
1.27. a) $A \subset B$; d) $A \not\subset B$; e) $A \not\subset B$; f) $A \subset B$. **1.28.** a) $A = B$; b) $A = B$, c) $A = B$. **1.29.** $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 1$.
1.31. $X = \{1, 3, 4, 6\}$. **1.32.** a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $E = \{3, 4\}$. **1.33.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. **1.34.** $X = \{3, 5, 7, 9\}$. **1.35.** a) skończony; c) skończony; e) nieskończony; f) nieskończony **1.36.** Zbiorem punktów całej płaszczyzny. **1.37.** Nie. **1.38.** Tak.
2.8. a) Wykażemy, że $A \cup (A \cap B) \subset A$ i $A \subset A \cup (A \cap B)$. Oczywiście $A \subset A$ i $A \cap B \subset A$, więc $A \cup (A \cap B) \subset A$ oraz $A \subset A \cup (A \cap B)$. Tak więc $A \cup (A \cap B) = A$. Uwaga: Równość tę możemy wykazać na diagramie obok.



A $\quad A \cap B \quad$ B

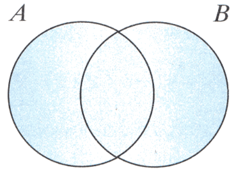
c) Nietrudno pokazać, że $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$ oraz $(B \setminus A) \cup A = A \cup B$. Zatem rzeczywiście $(A \setminus B) \cup B = (B \setminus A) \cup A$. d) Zauważ, że $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ oraz $B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$. **2.10.** a), c) $A = B$; b), e) $A \cap B = \varnothing$; d) $B \subset A$. **2.12.** c) Dla dowolnego elementu x mamy: $x \in A \cup (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \setminus C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin C) \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin C \setminus A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$. **2.13.** d) Tak; e) Nie. **2.15.** Porównaj poniższe diagramy:

A $\quad$ B

$A \setminus B$  $B \setminus A$

$A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

A $\quad$ B



$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \dot{-} B$

2.18. Tak, gdyż $A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \dot{-} A$, co wynika z przemienności sumy zbiorów.
2.19. Ponieważ $(A \cup B) \dot{-} B = ((A \cup B) \setminus B) \cup (B \setminus (A \cup B)) = ((A \cup B) \setminus B) \cup \varnothing = (A \cup B) \setminus B = A \setminus B$ oraz $A \dot{-} (A \cap B) = (A \setminus (A \cap B)) \cup ((A \cap B) \setminus A) = (A \setminus (A \cap B)) \cup \varnothing = A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$, gdyż $B \subset A \cup B$ i $A \cap B \subset A$, więc rzeczywiście $(A \cup B) \dot{-} B = A \dot{-} (A \cap B)$. **2.27.** Dowód równości tej wynika z określenia sumy i iloczynu zbiorów A i B. **2.28.** Korzystając z równości oraz z praw działań na zbiorach, otrzymujemy:

$$|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| =$$
$$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| =$$
$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap C \cap B \cap C|) =$$
$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

III. Rachunek algebraiczny

1.6. $5\frac{17}{24}$. **1.7.** $3\frac{1}{4}$. **1.9.** $53\frac{19}{60}$. **1.11.** m) $0,8$; n) $2\frac{1}{3}$; o) $0,55$; p) 3. **1.12.** c) 1; d) 20; e) 50; f) 30; g) 72. **1.13.** a) $0,615$; c) $1\frac{19}{24}$. **1.15.** $A > B$, 180 razy. **2.7.** 1000. **2.15.** 15000. **2.16.** a) 1100 g mąki, 340 g jaj, 220 g cukru, 220 g masła, 120 g drożdży; b) 0,83 kg. **2.17.** $80\% \cdot 120\% = 0,8 \cdot 1,2 = 0,96 = 96\%$. W obu przypadkach cena towaru obniżyła się o $100\% - 96\% = 4\%$. **2.18.** Ta druga, to znaczy obniżka o 25% i jeszcze o 20%. **2.19.** O $\frac{100p}{100-p}\%$. **2.20.** Pole działki po zmniejszeniu jej wymiarów wynosi $70\% \cdot 80\% = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56 = 56\%$ pola przed zmniejszeniem. Zatem pole zmniejszyło się o 44%. **2.21.** 67,71 zł. **2.22.** 16 zł. **2.23.** Szkoła liczy 200 uczniów klas czwartych, w tym 180 uczniów zamierzających studiować. 72 uczniów zdaje na socjologię, 36 na medycynę, 27 na prawo, 27 na matematykę i 18 na informatykę. 25% liczby uczniów zdających na socjologię stanowią uczniowie zdający na informatykę. **2.24.** a) $27\frac{1}{7}\%$; b) $76\frac{4}{21}\%$; c) Jane Ahonen i Sven Hannawald mają razem o 1100 kibiców więcej niż Adam Małysz i Simon Amman. **2.25.** O 20% **2.26.** W referendum wzięło udział 17393040 Polaków, w tym 13566571 to euroentuzjaści. **2.27.** Nie, zabrakło wymaganej 50% frekwencji. **2.28.** Bartek zarobił na tej transakcji od 79 zł. **2.29.** Prezydent otrzymał 381 głosów, premier 210, marszałek sejmu 189, a marszałek senatu 301. **2.30.** Kierowca ma we krwi 0,4 promila alkoholu. **2.31.** Po zmieszaniu śmietany z mlekiem zawartość tłuszczu w roztworze wynosiła $15\frac{2}{3}\%$, można więc udowodnić oszustwo, dysponując odpowiednim przyrządem. **2.32.** Tomek zarobiłby więcej, wpłacając pieniądze na lokatę. **2.33.** Straty wynoszą 4500 zł. **2.34.** Wędkarze mogą za rok odłowić 12 ton ryb. **2.35.** Kierowca zapłaciłby mandat w wysokości 1750 zł.

3.4. c) $0,125$; e) 64; j) $\frac{1}{16}$; **3.5.** f) z^2; g) $(-m)^7$; h) y^4; **3.6.** c) $\frac{1}{5}$; d) 8^4; f) -6. **3.7.** f) $-\frac{1}{36}$; k) 8; l) $-0,001$.

3.8. f) $-27a^3b^3$; j) $-\frac{8}{125}m^3n^3$; k) $-8x^3y^3z^3$; l) $\frac{1}{64}a^4b^4c^4$. **3.9.** f) $\left(-3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\right)^3 = -8$; g) $(0,04 \cdot 25)^5 = 1$;

i) $(0,002 \cdot 50)^6 = 0,000001$. **3.10.** b) 3^{-6}; d) 3^2; e) $\left(\frac{4}{3}\right)^2$. **3.11.** f) $\left(-\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$; h) $(0,2)^6 = 0,000064$;

i) $(-0,1)^8 = 0,00000001$. **3.12.** g) $-x^6y^6a^3$; h) $-x^6t^6z^3$; i) $\frac{1}{4}a^4b^2c^4d^2$.

3.13. c) $(-2)^8 = (-2^2)^4 = (-2^4)^2 = (-2^8)^1 = (-2^1)^8$; e) $\left(-\frac{1}{6}\right)^4 = \left[\left(\frac{1}{6}\right)^2\right]^2 = \left[\left(\frac{1}{6}\right)^1\right]^4 = \left[\left(\frac{1}{6}\right)^4\right]^1$. **3.14.** g) $\frac{81x^8}{y^4}$;

h) $-\frac{8a^6y^3}{27z^3}$; i) $\frac{25a^4b^2c^4}{4d^4}$. **3.15.** b) $4y^{-3}$; d) $2^{-2}x^{-10}y^8$. **3.16.** b) $4\frac{3}{32}$; c) 37; e) $\frac{4}{5}$. **3.17.** e) $\left(\frac{-a}{y}\right)^4$; g) $\left(\frac{a^2}{2b}\right)^3$; h) $-\left(\frac{m}{n}\right)^2$;

i) $\left(\frac{-p}{q}\right)^3$. **3.18.** a) d) b^{-2}; e) b^3; f) n^4. **3.19.** b) b^3; d) $25x^{-4}y^6$; e) $8ab$. **3.24.** b) $26^2 - 24^2 < 27^2 - 25^2$, bo

$26^2 - 24^2 = 2 \cdot 50 < 2 \cdot 52 = (27-25)(27+25) = 27^2 - 25^2$; c) $345^2 > 342 \cdot 348$, bo

$345^2 > 345^2 - 3^2 = (345-3)(345+3) = 342 \cdot 348$; f) $9^{20} > 27^{13}$, bo $9^{20} = 3^{40} > 3^{39} = 27^{13}$.

3.25. b) $11^{40} < 2^{140} < 6^{60} < 3^{100} < 4^{80}$. **3.26.** b) Drugie wyrażenie jest większe od pierwszego o 12.

3.27. a) $2^{30} + 3^{30} + 4^{30} > 3 \cdot 24^{10}$, gdyż $4^{30} = 2^{30} \cdot 2^{30} = 2^{30} \cdot 4^{15} = 8^{10} \cdot 4^{15} > 8^{10} \cdot 3^{15} > 8^{10} \cdot 3^{11} = 3 \cdot 8^{10} \cdot 3^{10} = 3 \cdot 24^{10}$;

c) $\frac{2^{23}+1}{2^{25}+1} > \frac{2^{25}+1}{2^{27}+1}$, bo $(2^{23}+1)(2^{27}+1) = 2^{50} + 2^{23} + 2^{27} + 1 > 2^{50} + 2 \cdot 2^{25} + 1 = (2^{25}+1)^2$;

d) $19^4 > 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22$, gdyż $19^4 > 19^4 - 1 = (19^2 - 1^2)(19^2 + 1^2) > (19^2 - 1^2)(19^2 - 3^2) =$

$= (19-1)(19+1)(19-3)(19+3) = 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22$. **3.28.** a) $297 \cdot 299 = (298-1)(298+1) = 298^2 - 1^2 < 298^2$;

b) $45^2 - 31^2 > 44^2 - 30^2 \Leftrightarrow 45^2 - 44^2 > 31^2 - 30^2 \Leftrightarrow (45-44)(45+44) >$

$> (31-30) \cdot (31+30) \Leftrightarrow 1 \cdot 89 > 1 \cdot 61 \Leftrightarrow 89 > 61$;

c) $26^3 - 24^3 = (26-24)(26^2 + 26 \cdot 24 + 24^2) = 2 \cdot (26^2 + 26 \cdot 24 + 24^2) > 8 = 2^3 = (26-24)^3$;

d) $(17+13)^3 = 17^3 + 3 \cdot 17^2 \cdot 13 + 3 \cdot 17 \cdot 13^2 + 13^3 > 17^3 + 13^3$.

3.29. $3^{100} - 2^{150} = (3^{50})^2 - (2^{75})^2 = (3^{50} + 2^{75})(3^{50} - 2^{75}) > 3^{50} + 2^{75}$, gdyż $3^{50} - 2^{75} = (3^2)^{25} - (2^3)^{25} = 9^{25} - 8^{25} > 1$.

4.1. c) $0,6$; f) $18,522$; g) $\frac{2}{3}$; **4.2.** b) $2^{\frac{5}{6}}, 2^{\frac{1}{6}}, 2^{\frac{2}{3}}$; c) $2^{\frac{4}{5}}, 2^{\frac{1}{8}}, 2^{-1}$; d) $2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{2}{9}}, 2^{\frac{1}{6}}, 2^{-\frac{7}{8}}, 2^{\frac{13}{27}}$. **4.3.** b) $3^{\frac{4}{3}}, 3^{\frac{1}{2}}, 3^2$; c) $3^{\frac{5}{6}}, 3^{-\frac{1}{6}}, 3^{\frac{1}{2}}$;

d) $3^{\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{9}}, 3^{\frac{1}{6}}, 3^{-\frac{7}{8}}, 3^{\frac{13}{27}}$. **4.6.** f) $\frac{11}{20}$; g) $\frac{9}{4}$; h) $-\frac{3}{10}$. **4.7.** c) 14; 8; 2; 2; 2. **4.8.** c) $c = \frac{8}{343}$; f) $f = \frac{16}{49}$; g) $g = \frac{1}{9}$;

4.9. e) $2\sqrt{72} > 3\sqrt{18}$; f) $4\sqrt[3]{54} > 2\sqrt[3]{250}$; g) $3\sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{190}$; **4.10.** b) $\frac{1}{9}$; d) $\frac{49}{64} \cdot \sqrt[5]{\frac{343}{8}}$. **4.11.** c) $\sqrt[3]{5} - 2 \cdot \sqrt[3]{6}$; e) $17\sqrt{5}$;

f) $18\sqrt{3} - 14\sqrt{2}$. **4.14.** f) $a^2 \cdot b^3$; g) $a \cdot b^3$; h) b; j) $4 \cdot b^3$. **4.15.** b) $\sqrt{18xy}, \sqrt{\frac{5x}{3y}}, \sqrt{\frac{28x^4y^5}{25}}$; d) $\sqrt{0,125 \cdot x^4}, \sqrt[3]{xy}, \sqrt[3]{\frac{4x^7}{y \cdot 27}}$.

4.16. c) $a^2\cdot b\sqrt[3]{b}$; $\frac{b^2\cdot c}{2}\cdot\sqrt[3]{b^2}$; $ab^2\cdot\sqrt[3]{b(a+b)}$, $\frac{c}{3b}\cdot\sqrt[3]{6}$; d) $a^2c\sqrt[3]{\frac{3}{4}ac}$, $a^3\cdot b^4\cdot c^4\sqrt[4]{a^3\cdot b\cdot c^3}$, $\frac{a^2\cdot b}{5c}\cdot\sqrt[4]{\frac{b^3}{c^2}}$, $a^5\cdot b^7\cdot c^8\cdot\sqrt[5]{abc^2}$. **4.17.** e) $-11+4\sqrt{5}$; f) $8-3\sqrt{7}$; i) $\frac{\left(3-2\sqrt{6}\right)\left(3\sqrt{6}+2\sqrt{5}\right)}{34}$; k) $\frac{-1-\sqrt{35}}{2}$; l) $\frac{\left(3\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{18}$. **4.19.** f) $\frac{1}{19}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)$; g) $\frac{3}{4}\left(2+\sqrt{6}-\sqrt{10}\right)$; h) $\frac{2}{13}\left(\sqrt{210}+10\sqrt{6}-9\sqrt{5}+15\sqrt{7}\right)$.

4.21. c) 7520; d) 1000; e) 0. **4.22.** d) $\sqrt{23}$; f) $\sqrt{37}$; g) 3. **4.23.** d) $\frac{4\sqrt{7}-25}{59}$; e) $\frac{24\sqrt{15}}{33}$; f) $\frac{12\sqrt{28}}{13}$.

5.1. d) $-2p^2+3pq+1$; e) $2x^2-6\frac{2}{3}x$. **5.5.** i) $m^4+2m^2n^2+n^4$; j) $\frac{1}{9}x^2+\frac{4}{3}xy+4y^2$; k) $\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{3}mn+\frac{1}{9}n^2$; l) $0{,}04x^2+0{,}04xy+0{,}01y^2$. **5.6.** b) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$, $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$, $\frac{1}{27}a^3-a^2b+9ab^2-27b^3$, $a^3b^6-3a^2b^4c^2+3ab^2c^4-c^6$. **5.7.** f) $0{,}01a^2-36b^2$; g) $\frac{4}{25}d^2-\frac{9}{16}c^2$; h) $x^2y^2-9z^2$. 5.8. a) m^2-n^2, a^2-9, $4x^2-25y^2$, $0{,}01a^2-36b^2$, $-\frac{1}{4}x^2+4y^2$, $\frac{4}{25}a^2-\frac{9}{16}b^2$; c) x^3-y^3, x^3-27y^3, $\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{27}y^3$. **5.10.** h) $(2p+2q)^2$; j) $\left(m+\frac{1}{3}n\right)^2$; k) $\left(\frac{1}{3}r+\frac{1}{2}s\right)^2$. **5.13.** b) $8(x+y)^2$, $2(x+3y)^2$, $2\left(2a^2+3b^2\right)^2$; c) $(x-5y)^2$, $(3x-2y)^2$, $\left(a-\frac{1}{3}b\right)^2$, $(0{,}1x-5y)^2$. **5.14.** i) $9m^2n^2-24mns+16s^2$; k) $4c^4-4c^2d^2+d^4$; l) $\frac{1}{4}a^2b^2-4abc^2+16c^4$.

5.23. a) $3(a-b)(b-c)(c-a)$; b) $(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$; c) $3(a+b)(b+c)(c+a)$; d) $(a-b)(b-c)(c-a)$; e) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$; f) $\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)$; g) $\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$. **5.24.** b) $5(2x-3y)(2x+3y)$, $\frac{1}{2}(a-3b)(a+3b)$, $2(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)$, $x(x+2)(x-2)$, $a\left(a+2\sqrt{2}\right)\left(a-2\sqrt{2}\right)$.

5.31. $\frac{p}{a}+\frac{q}{b}+\frac{r}{c}=\frac{1}{pa+qb+rc}\Leftrightarrow\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}+\frac{r}{c}\right)(pa+qb+rc)=abc\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left(p^2+q^2+r^2\right)abc+pqc\left(a^2+b^2\right)+qra\left(b^2+c^2\right)+rpb\left(c^2+a^2\right)=abc\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left(p^2+q^2+r^2\right)abc+pqc\left((a-b)^2+2ab\right)+qra\left((b-c)^2+2bc\right)+$
$+rpb\left((c-a)^2+2ca\right)=abc\Leftrightarrow\left(p^2+q^2+r^2+2pq+2qr+2rp\right)abc+$
$+pqc(a-b)^2+qra(b-c)^2+rpb(c-a)^2=abc\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(p+q+r)^2abc+pqc(a-b)^2+qra(b-c)^2+rpb(c-a)^2=abc\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow pqc(a-b)^2+qra(b-c)^2+rpb(c-a)^2=0\Leftrightarrow$. Stąd $(a-b)^2=(b-c)^2=(c-a)^2=0$, (bo liczby p, q, r, a, b, c są dodatnie) i ostatecznie $a=b=c$. **5.32.** Wiemy już, że jeżeli $a+b+c=0$, to $a^3+b^3+c^3=3abc$. Ale z założenia mamy także równość $a^3+b^3+c^3=0$. Stąd $a=0$ lub $b=0$ lub $c=0$. Jeśli $a=0$, to $c=-b$ i wówczas dla każdej liczby naturalnej nieparzystej n jest $a^n+b^n+c^n=0^n+b^n+\left(-b^n\right)==b^n-b^n=0$. Gdy $b=0$ lub $c=0$, to rozumujemy analogicznie. **5.33.** $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=(a+b+c)^{-1}\Rightarrow(a+b+c)(ab+bc+ca)=abc\Rightarrow$
$\Rightarrow a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc=0\Rightarrow\Rightarrow ab(a+b)+c^2(a+b)+bc(a+b)+ca(a+b)=0\Rightarrow$
$\Rightarrow(a+b)\left(ab+c^2+bc+ca\right)=0\Rightarrow(a+b)\left(c(b+c)+a(b+c)\right)=0\Rightarrow$
$\Rightarrow(a+b)(b+c)(c+a)=0\Rightarrow a=-b\vee b=-c\vee c=-a$. Stąd $a^3=-b^3\vee b^3=-c^3\vee c^3=-a^3$, czyli $a^3+b^3=0\vee b^3+c^3=0\vee c^3+a^3=0$ i ostatecznie $\left(a^3+b^3\right)\left(b^3+c^3\right)\left(c^3+a^3\right)=0$. **5.34.** Wskazówka: Zauważ, że z warunku $b=a-1$ wynika, że $a-b=1$ i zastosuj wzór na różnicę kwadratów. **6.1.** f) 1° Sprawdzenie równości dla $n=1$. $1\cdot1!=(1+1)!-1$. 2° Udowodnimy, że

$$\bigwedge_{n\geqslant1}\left(1\cdot1!+2\cdot2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1\Rightarrow1\cdot1!+2\cdot2!+\ldots++n\cdot n!+(n+1)(n+1)!=(n+2)!-1\right).$$

Rzeczywiście, $1\cdot1!+2\cdot2!+\ldots+n\cdot n!+(n+1)(n+1)!=(n+1)!-1+(n+1)(n+1)!=$
$=(n+2)(n+1)!-1=(n+2)!-1$. g) 1° Sprawdzenie równości dla $n=1$. $(-1)^{1-1}\cdot1^2=(-1)^{1-1}\cdot\frac{1(1+1)}{2}$.

2° Wykażemy, że

$$\bigwedge_{n\geqslant1}\left[1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\Rightarrow\right.$$

$$\left.\Rightarrow1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2+(-1)^n(n+1)^2=(-1)^n\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right].$$

Istotnie, $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2+(-1)^n(n+1)^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+$ $+(-1)^n(n+1)^2=(-1)^n\cdot\frac{n+1}{2}(2(n+1)-n)=(-1)^n\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}$; h) 1° Sprawdzenie równości dla $n=1$. $(-1)^{1-1}\cdot\frac{1}{2^1}=\frac{1}{9}\left(2+(-1)^{1-1}\cdot\frac{3\cdot 1+2}{2^1}\right)$. 2° Udowodnimy, że

$$\bigwedge_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}-\frac{4}{2^4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{9}\left(2+(-1)^{n-1}\frac{3n+2}{2^n}\right)\Rightarrow\right.$$

$$\left.\Rightarrow\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}-\frac{4}{2^4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}+(-1)^n\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{9}\left(2+(-1)^n\frac{3n+5}{2^{n+1}}\right)\right).$$ Istotnie,

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}-\frac{4}{2^4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}+(-1)^n\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{9}\left(2+(-1)^{n-1}\frac{3n+2}{2^n}\right)+$$

$$+(-1)^n\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{9}\left[2+(-1)^{n-1}\cdot\frac{3n+2}{2^n}+(-1)^n\cdot\frac{9(n+1)}{2^{n+1}}\right]=$$

$=\frac{1}{9}\left(2+(-1)^n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}(9n+9-6n-4)\right)=\frac{1}{9}\left(2+(-1)^n\cdot\frac{3n+5}{2^{n+1}}\right)$; i) 1° Sprawdzenie równości dla $n=1$.

$\frac{1\cdot d!}{d}=\frac{(1+d)!}{d}-d!\Leftrightarrow d!=(d+1)!-d!\cdot d\Leftrightarrow d!=d!(d+1-d)$. 2° Wykażemy, że

$$\bigwedge_{n\geqslant 1}\left[\frac{1\cdot d!}{d}+\frac{2\cdot(d+1)!}{d^2}+\frac{3\cdot(d+2)!}{d^3}+\ldots+\frac{n(d+n-1)!}{d^n}=\frac{(n+d)!}{d^n}-d!\Rightarrow\right.$$

$$\left.\Rightarrow\frac{1\cdot d!}{d}+\frac{2\cdot(d+1)!}{d^2}+\ldots+\frac{n(d+n-1)!}{d^n}+\frac{(n+1)(d+n)!}{d^{n+1}}=\frac{(n+1+d)!}{d^{n+1}}-d!\right].$$ Rzeczywiście,

$$\frac{1\cdot d!}{d}+\frac{2\cdot(d+1)!}{d^2}+\ldots+\frac{n(d+n-1)!}{d^n}+\frac{(n+1)(d+n)!}{d^{n+1}}=$$

$=\frac{(n+d)!}{d^n}-d!+\frac{(n+1)(d+n)!}{d^{n+1}}=\frac{(n+d)!}{d^{n+1}}(n+1+d)-d!=\frac{((n+1)+d)!}{d^{n+1}}-d!$ **6.2.** b) 1° Sprawdzenie nierówności dla $n=3$. $2^{3\cdot 2}>(3!)^2\Leftrightarrow 2^6>6^2\Leftrightarrow 64>36$. 2° Udowodnimy, że $\bigwedge_{n\geqslant 3}\left(2^{n(n-1)}>(n!)^2\Rightarrow 2^{(n+1)n}>((n+1)!)^2\right)$. Rzeczywiście,

$2^{(n+1)n}=2^{n^2+n}=2^{n^2-n}\cdot 2^{2n}=2^{n(n-1)}\cdot 2^{2n}>(n!)^2\cdot 2^{2n}\geqslant(n!)^2\cdot(n+1)^2=$ (co wynika z łatwej do udowodnienia nierówności $2^n\geqslant n+1$) $==(n!(n+1))^2=((n+1)!)^2\Rightarrow 2^{(n+1)n}>((n+1)!)^2$, jeżeli $2^{n(n-1)}>(n!)^2$. Zatem na mocy indukcji matematycznej wnioskujemy, że $\bigwedge_{n\geqslant 3}2^{n(n-1)}>(n!)^2$; i) 1° Sprawdzenie dla $n=1$. $1\leqslant 2-\frac{1}{1}$. 2° Wykażemy, że $\bigwedge_{n\geqslant 1}\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}\Rightarrow 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n+1}\right]$.

Istotnie, $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n+1}$, gdyż

$2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n+1}\Leftrightarrow\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{n}\Leftrightarrow\frac{n+2}{(n+1)^2}\leqslant\frac{1}{n}\Leftrightarrow n(n+2)\leqslant(n+1)^2\Leftrightarrow 0\leqslant 1$.

k) 1° Sprawdzenie dla $n=3$. $2^{\frac{1}{2}\cdot 3(3-1)}>3!\Leftrightarrow 2^3>6$. 2° Wykażemy, że $\bigwedge_{n\geqslant 3}\left(2^{\frac{1}{2}n(n-1)}>n!\Rightarrow 2^{\frac{1}{2}(n+1)n}>(n+1)!\right)$. Rzeczywiście,

$2^{\frac{1}{2}(n+1)n}=2^{\frac{1}{2}n(n-1)+n}=2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\cdot 2^n>n!\cdot 2^n\geqslant n!(n+1)=(n+1)!$. l) 1° Sprawdzenie dla $n=1$.

$\frac{4^1}{2\sqrt{1}}\leqslant\binom{2\cdot 1}{1}\Leftrightarrow\frac{4}{2}\leqslant 2$. 2° Udowodnimy, że $\bigwedge_{n\geqslant 1}\left[\frac{4^n}{2\sqrt{n}}\leqslant\binom{2n}{n}\Rightarrow\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}\leqslant\binom{2(n+1)}{n+1}\right]$. Rzeczywiście,

$$\binom{2(n+1)}{n+1}=\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}=\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2\cdot(n!)^2}=\frac{2(2n+1)}{n+1}\cdot\binom{2n}{n}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{2(2n+1)}{n+1}\cdot\frac{4^n}{2\sqrt{n}}=\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}>\frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}},$$

gdyż $2n+1=\sqrt{4n^2+4n+1} > \sqrt{4n^2+4n} = 2\sqrt{n(n+1)}$, m) 1° Sprawdzenie dla $n=2$.
$2!4! > \left((2+1)!\right)^2 \Leftrightarrow 48 > 36$. 2° Wykażemy, że
$\bigwedge_{n\geqslant 2}\left(2!4!6!\ldots(2n)! > ((n+1)!)^n \Rightarrow 2!4!6!\ldots(2n)!(2n+2)! > ((n+2)!)^{n+1}\right)$. Istotnie,
$2!4!6!\ldots(2n)!(2n+2)! > ((n+1)!)^n(2n+2)!$. Wystarczy teraz dowieść, że
$((n+1)!)^n(2n+2)! > ((n+2)!)^{n+1}$. Ale $((n+1)!)^n(2n+2)! > ((n+2)!)^{n+1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ((n+1)!)^n\cdot 2^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot(2n+1)!! > ((n+2)!)^{n+1} \Leftrightarrow\Leftrightarrow (2n+1)!! > \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}$, gdzie
$(2n+1)!! = 1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)$. Zatem, jeśli udowodnimy, że (*) $\bigwedge_{n\geqslant2}(2n+1)!! > \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}$, to dowód kroku indukcyjnego będzie ostatecznie zakończony. Oto dowód indukcyjny (*). 1) Sprawdzenie dla $n=2$.
$5!! > \left(\frac{2+2}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 1\cdot3\cdot5 > 2^3$. 2) Wykażemy, że $\bigwedge_{n\geqslant2}\left[(2n+1)!! > \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1} \Rightarrow (2n+3)!! > \left(\frac{n+3}{2}\right)^{n+2}\right]$.
Otóż $(2n+3)!! = (2n+1)!!(2n+3) > \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}\cdot(2n+3) > \left(\frac{n+3}{2}\right)^{n+2}$, gdyż
$\left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}\cdot(2n+3) > \left(\frac{n+3}{2}\right)^{n+2} \Leftrightarrow \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2} < \frac{2(2n+3)}{n+2} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2} < \frac{2(2n+3)}{n+2}$. Ale
$\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2} < 3$ (bo $\bigwedge_{n\in N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ (wykaż to!). Zatem $\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2} < 3 = \frac{3(n+2)}{n+2} = \frac{3n+6}{n+2} <$
$< \frac{4n+6}{n+2} = \frac{2(2n+3)}{n+2}$. **6.3.** h) Wskazówka: $10^{3(n+1)+1} - 3(-1)^{n+1} = -\left(10^{3n+1}-3(-1)^n\right) + 1001\cdot10^{3n+1}$;
j) Wskazówka: $2^{n+3}\cdot3^{n+1}+5(n+1)-4 = 6\cdot2^{n+2}\cdot3^n+5n+5-4=$
$=(2^{n+2}\cdot3^n+5n-4)+5(2^{n+2}\cdot3^n+1) = (2^{n+2}\cdot3^n+5n-4)+$
$+5(4\cdot6^n-4+5) = (2^{n+2}\cdot3^n+5n-4)+20(6^n-1)+25$. l) Wskazówka:
$5^{2(n+1)-1}\cdot2^{n+2}+3^{n+2}\cdot2^{2(n+1)-1} = 5^{2n-1}\cdot5^2\cdot2^{n+1}\cdot2+$
$+3^{n+1}\cdot3\cdot2^{2n-1}\cdot2^2 = 50\cdot5^{2n-1}\cdot2^{n+1}+12\cdot3^{n+1}\cdot2^{2n-1} = 38\cdot5^{2n-1}\cdot2^{n+1}+12\left(5^{2n-1}\cdot2^{n+1}+3^{n+1}\cdot2^{2n-1}\right)$;
n) Wskazówka: $3^{3(n+1)+3}-26(n+1)-27 = 3^{3n+3}\cdot3^3-26n-27-26=$
$=(3^{3n+3}-26n-27)+26(3^{3n+3}-1) = (3^{3n+3}-26n-27)+26\cdot(27^{n+1}-1)$. **6.4.** a) 1° Sprawdzenie dla $n=0$.
$3^{0+1}\mid 2^{3^0}+1$ i $3^{0+2}\nmid 2^{3^0}+1$. 2° Wykażemy, że
$\bigwedge_{n\in N}\left[\left(3^{n+1}\mid 2^{3^n}+1 \text{ i } 3^{n+2}\nmid 2^{3^n}+1\right) \Rightarrow \left(3^{n+2}\mid 2^{3^{n+1}}+1 \text{ i } 3^{n+3}\nmid 2^{3^{n+1}}+1\right)\right]$. Istotnie, jeśli
$3^{n+1}\mid 2^{3^n}+1$ i $3^{n+2}\nmid 2^{3^n}+1$, to istnieje taka liczba naturalna k niepodzielna przez 3, że $2^{3^n}+1 = 3^{n+1}\cdot k$, czyli
$2^{3^n} = 3^{n+1}\cdot k-1$. Stąd: $2^{3^{n+1}} = 2^{3^n\cdot3} = \left(2^{3^n}\right)^3 = \left(3^{n+1}\cdot k-1\right)^3 = \left(3^{n+1}\cdot k\right)^3 - 3\left(3^{n+1}\cdot k\right)^2+3\left(3^{n+1}\cdot k\right)-1=$
$=3^{3(n+1)}\cdot k^3 - 3^{2n+3}\cdot k^2+3^{n+2}\cdot k-1 = 3^{n+2}\left(3^{2n+1}\cdot k^3-3^{n+1}\cdot k^2+k\right)-1$. I widzimy, że liczba
$2^{3^{n+1}}+1 = \left(3^{2n+1}\cdot k^2-3^{n+1}\cdot k+1\right)\cdot3^{n+2}\cdot k$ dzieli się przez 3^{n+2}, ale nie przez 3^{n+3}. **6.6.** 1° Sprawdzenie równości dla $n=2$. $h(1)=1=2(h(2)-1)=2\left(1+\frac{1}{2}-1\right)$. 2° Wykażemy, że
$\bigwedge_{n\geqslant2}\left(h(1)+h(2)+\ldots+h(n-1)=n(h(n)-1) \Rightarrow h(1)+h(2)+\ldots+\right.$
$\left.+h(n-1)+h(n)=(n+1)(h(n+1)-1)\right)$. Rzeczywiście,
$h(1)+h(2)+h(3)+\ldots+h(n-1)+h(n) = n(h(n)-1)+h(n)=$
$=(n+1)h(n)-n = (n+1)\left(h(n+1)-\frac{1}{n+1}\right)-n = (n+1)h(n+1)-1-n=$
$=(n+1)h(n+1)-(n+1) = (n+1)(h(n+1)-1)$. **6.10.** Wystarczy zauważyć, że $n^p-n=n\cdot(n^{p-1}-1)$.
A ponieważ $p\mid n\cdot(n^{p-1}-1)$ i $p\nmid n$ (a więc p i n są względnie pierwsze, bo p jest liczbą pierwszą), zatem
$p\mid n^{p-1}-1$. **6.12.** Ponieważ $p\mid q^{p-1}-1$ i $q\mid p^{q-1}-1$, więc $p\mid p^{q-1}+(q^{p-1}-1)$ i $q\mid (p^{q-1}-1)+q^{p-1}$. Zatem
$p\cdot q\mid p^{q-1}+q^{p-1}-1$, bo p i q są względnie pierwsze (bo są pierwsze!).

6.13. Ponieważ $\left(2\cdot 5^7-5\cdot 2^7\right)^{83}-\left(2\cdot 5^7\right)^{83}-\left(5\cdot 2^7\right)^{83}=$
$=\left[\left(2\cdot 5^7-5\cdot 2^7\right)^{83}-\left(2\cdot 5^7-5\cdot 2^7\right)\right]-\left[\left(2\cdot 5^7\right)^{83}-2\cdot 5^7\right]-\left[\left(5\cdot 2^7\right)^{83}-5\cdot 2^7\right]$ i liczba 83 jest pierwsza, więc każda z liczb w nawiasie kwadratowym jest podzielna przez 83. Wobec tego dana liczba jest podzielna prze 83.
6.17. I sposób: Mnożąc dwa pierwsze równania danego układu stronami, otrzymujemy równanie $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1$, które jest równoważne równaniu $(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz$, (bo $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$), a to – równaniu $3xy(x+y)+3yz(y+z)+3zx(z+x)+6xyz=0$. Po dodaniu stronami tego równania i trzeciego równania układu dostajemy równanie
$x^3+y^3+z^3+3xy(x+y)+3yz(y+z)+3zx(z+x)+6xyz=1001^3$, czyli równanie $(x+y+z)^3=1001^3$, skąd $x+y+z=1001$. Wobec tego $t=x+y+z=1001$. Zatem $x+y+z+t=1001+1001=2002$. II sposób.
Zauważ, że $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1 \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=0$. Stąd $x+y=0$ lub $y+z=0$ lub $z+x=0$.
Jeśli $x+y=0$, to $z=t=1001$ i oczywiście $x+y+z+t=2002$. Gdy $y+z=0$, to $x=t=1001$; gdy wreszcie $z+x=0$, to $y=t=1001$. W obu przypadkach $x+y+z+t=2002$.
7.1. h) $32x^{-10}+240x^{-11}+720x^{-12}+1080x^{-13}+810x^{-14}+243x^{-15}$;
i) $\frac{1}{64}a^{-18}b^{12}+\frac{1}{8}a^{-14}b^7+\frac{5}{12}a^{-10}b^2+\frac{20}{27}a^{-6}b^{-3}+\frac{20}{27}a^{-2}b^{-8}+\frac{32}{81}a^2b^{-13}+\frac{64}{729}a^6b^{-18}$;
j) $\frac{64a^6}{729b^6}-\frac{32a^4}{27b^4}+\frac{20a^2}{3b^2}-20+\frac{135b^2}{4a^2}-\frac{243b}{8a}+\frac{729b^6}{64a^6}$; k) $4x^2-8x\sqrt{6xy}+36xy-12y\sqrt{6xy}+9y^2$.
7.2. c) $(-1)^k\cdot\binom{8}{k}\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^{8-k}\cdot\left(\sqrt[4]{ab^3}\right)^k=(-1)^k\cdot\binom{8}{k}\left(\sqrt[12]{a}\right)^{64-5k}\cdot\left(\sqrt[12]{b}\right)^{32+5k}$; d) $\binom{6}{k}\left(\sqrt{\frac{2}{3}a}\right)^{6-k}\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{4}x}\right)^k$,
f) $(-1)^k\cdot 2^k\cdot\binom{30}{k}x^{60-3k}$. **7.3.** a) $2+42x^2+70x^4+14x^6$; d) $1152a^5b+8640a^3b^3+5832ab^5$.
7.4. c) $\binom{9}{5}3^4\cdot\left(2\cdot x^2\right)^5=326592x^{10}$; d) $\binom{20}{11}(-1)^{11}\left(a^2\right)^9\cdot\left(3x^5\right)^{11}=-29753610120\ a^{18}x^{55}$. **7.5.** b) $\binom{14}{4}=1001$;
c) $\binom{8}{3}=48384$. **7.6.** a) $\binom{12}{5}(-1)^5\frac{a^2x}{2^2}=-198a^2x$, $\binom{12}{8}(-1)^8\cdot 2^4a^{-4}x^{16}=7920a^{-4}x^{16}$;
c) $\binom{7}{3}(-1)^3a^{-1}x^{-2}=-35a^{-1}x^{-2}$. **7.10.** a) Stosujemy wzór ogólny $\binom{60}{k}a^{\frac{2}{3}(60-k)}a^{-\frac{3}{4}k}=\binom{60}{k}a^{40-\frac{17}{12}k}$. W wyrazach wymiernych k musi być wielokrotnością 12, czyli $k\in\{0,12,24,36,48,60\}$. Wyrazami wymiernymi tego rozwinięcia są zatem $\binom{60}{0}a^{40}$, $\binom{60}{12}a^{23}$, $\binom{60}{24}a^6$, $\binom{60}{36}a^{-11}$, $\binom{60}{48}a^{-28}$, $\binom{60}{60}a^{-45}$; c) $-293930x^3$. **7.11.** 135.
7.12. Rozważmy współczynniki kolejnych wyrazów rozwinięcia tego dwumianu, to jest liczby
$\binom{50}{k-1}2^{50-(k-1)}\cdot 2^{-2(k-1)}=\binom{50}{k-1}2^{53-3k}$; $\binom{50}{k}2^{50-k}\cdot 2^{-2k}=\binom{50}{k}\cdot 2^{50-3k}$;
$\binom{50}{k+1}2^{50-(k+1)}\cdot 2^{-2(k+1)}=\binom{50}{k-1}\cdot 2^{47-3k}$. W myśl warunków zadania $\binom{50}{k}2^{50-3k}>\binom{50}{k-1}2^{53-3k}$
i $\binom{50}{k}2^{50-3k}>\binom{50}{k-1}2^{47-3k}$, stąd $k<5\frac{5}{9}$ i $k>4\frac{2}{3}$, a więc $k=5$. Szukany współczynnik to $\binom{50}{5}2^{35}$.

IV. Zbiór liczb rzeczywistych

1.6. 42857. **1.8.** 34452, 34056, 34956. **1.14.** -3 i -1 lub 3 i 5. **2.3.** c) 24; d) 9. **2.4.** c) 360; f) 231. **2.5.** d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{3}{2}$.
2.6. a) 9; **2.10.** d) $2002m+1999$, gdzie $m\in C$. **2.11.** Ponieważ każda z tych liczb jest podzielna przez 24, więc można je przedstawić w postaci $24a$ i $24b$. Suma tych liczb wynosi (z założenia) 168, zatem $24a+24b=168$, czyli $a+b=7$. Stąd $a=1$, $b=6$, $a=2$, $b=5$, $a=3$, $b=4$. Oznacza to, że szukanymi liczbami są: 24 i 144, 48 i 120, 96 i 72. **2.12.** Załóżmy, że liczby te dzielimy przez d. Z treści zadania wynika, że d jest wspólnym dzielnikiem liczb $4373-8=4365$ i $826-7=819$. Zatem, jeśli znajdziemy NWD (4365, 819), to zadanie będzie rozwiązane. Ten zaś wynosi 9, co nietrudno stwierdzić, stosując algorytm Euklidesa. **2.14.** Zauważ, że:
i) $13^6-2^{15}=\left(13^2\right)^3-\left(2^5\right)^3=\left(13^2-2^5\right)\left(13^4+13^2\cdot 2^5+2^{10}\right)=137\cdot\left(13^4+13^2\cdot 2^5+2^{10}\right)$;
j) $11^{14}-3^{28}=\left(11^2\right)^7-\left(3^4\right)^7=\left(11^2-3^4\right)\left(11^{12}+11^{10}\cdot 3^4+11^8\cdot 3^8+11^6\cdot 3^{12}+11^4\cdot 3^{16}+11^2\cdot 3^{20}+3^{24}\right)=$
$=40\cdot\left(11^{12}+11^{10}\cdot 3^4+11^8\cdot 3^8+11^6\cdot 3^{12}+11^4\cdot 3^{16}+11^2\cdot 3^{20}+3^{24}\right)$.

2.21. Dla dowolnej liczby całkowitej n mamy $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$. **2.24.** Wskazówka: Jeżeli $p \neq 3$ jest liczbą pierwszą, to któraś z liczb $p-1$ i $p+1$ jest podzielna przez 3, a zatem podzielna przez 3 jest liczba $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$. Uwaga: Podzielność liczby $p^2 - 1$ przez 3, gdy $p \neq 3$ jest liczbą pierwszą wynika z małego twierdzenia Fermata. **2.29.** Jeżeli n jest dowolną liczbą naturalną, to suma $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6 = 2(2n+3)$ jest liczbą parzystą, większą od 2.

2.33. Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą. Wówczas $(2n+1)^2 - (2n-1)^2 = 4n \cdot 2 = 8n$ jest liczbą podzielną przez 8. **2.46.** Zauważ, że: $(5a+1)^2 - (5b+2)^2 = \left[(5a+1)^2 - (5b+2)^2\right] \cdot \left[(5a+1)^2 + (5b+2)^2\right] =$
$= \left[(5a+1)^2 - (5b+2)^2\right] \cdot \left(25a^2 + 10a + 1 + 25b^2 + 20b + 4\right) =$
$= 5\left(5a^2 + 2a + 4b + 5b^2 + 1\right) \cdot \left[(5a+1)^2 - (5b+2)^2\right]$. Jeden z czynników jest równy 5, zatem iloczyn dzieli się przez 5. **2.50.** Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą. Jeżeli $p < 30$, to oczywiście p jest resztą z dzielenia p przez 30. Wtedy bowiem $p = 0 \cdot 30 + p$. Gdy zaś $p > 30$, to dzieląc p przez 30, otrzymamy pewien iloraz k oraz resztę r, która jest jedną z liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29\}$. Ponieważ możemy wtedy zapisać: $p = 30k + r$, to widzimy, że r nie może być żadną z liczb: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, bo żadna z nich nie jest względnie pierwsza z 30 (każda z nich ma z 30 wspólny dzielnik większy od 1). W takim razie r musi być jedną z liczb: 1, 7, 13, 17, 19, 23, 29. To zaś dowodzi już tezy zadania. **2.52.** $2n \cdot (2n+2)(2n+4)(2n+6) + 16 = 16\left(n(n+1)(n+2)(n+3) + 1\right) =$
$= 16\left(n^2 + 3n + 1\right)^2 = \left(4\left(n^2 + 3n + 1\right)\right)^2$. **2.55.** Ponieważ żadna z liczb $n-1, n, n+1$ nie jest podzielna przez 5, więc jedna z liczb $n-2, n+2$ jest podzielna przez 5. Zatem $5 \mid (n-2)(n+2)$, czyli $5 \mid n^2 - 4$. Zatem także liczba $n^2 - 4 + 5$ jest podzielna przez 5. Istotnie więc $5 \mid n^2 + 1$. **2.57.** Zauważ, że:
a) $n^3 + 5n = n\left(n^2 + 5\right) = n\left(n^2 - 1 + 6\right) = n\left(n^2 - 1\right) + 6n = n(n-1)(n+1) + 6$. Oba składniki $n(n-1)(n+1)$ i $6n$ są podzielne przez 6, więc istotnie liczba $n^3 + 5n$ jest podzielna przez 6;
b) $n^3 + 11n = n\left(n^2 + 11\right) = n\left(n^2 + 5 + 6\right) = n\left(n^2 + 5\right) + 6n = n(n-1)(n+1) + 6n + 6n = n(n-1)(n+1) + 12n$. Oba składniki $n(n-1)(n+1)$ i $12n$ są podzielne przez 6. Istotnie więc $6 \mid n^3 + 11n$;
c) $n^3 - 19n = n\left(n^2 - 19\right) = n\left(n^2 + 5 - 24\right) = n^3 + 5n - 24n$. Wcześniej pokazaliśmy, że $6 \mid n^3 + 5n$, a $24n$ jest również liczbą podzielną przez 6. Suma tych liczb równa $n^3 - 19n$ jest więc również podzielna przez 6. **2.58.** Zauważ, że $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n = n\left(n^3 - 4n^2 - 4n + 16\right) = n\left(n^2(n-4) - 4(n-4)\right)$
$= n(n-4)\left(n^2 - 4\right) = (n-4)(n-2)\,n\,(n+2) =$. Niech $n = 2k$, gdzie $k \in \boldsymbol{N}$ i $k \geqslant 3$. Wśród czterech kolejnych liczb naturalnych na pewno jedna dzieli się przez 4, jedna przez 3, dwie przez 2, więc iloczyn dzieli się przez $16 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 384$. **2.61.** Zauważ, że
$\left(n^3 - n\right)\left(n^2 - 4\right) = n\left(n^2 - 1\right) \cdot (n-2)(n+2) = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$. 3.7. b) $5,(6), 5\frac{13}{20}$; d) $0{,}15$; $\sqrt{2} - 1$; $0{,}14(16), \frac{4}{25}$. **2.65.** Rozłóżmy wyrażenie $n^3 + 3n^2 - n - 3$ na czynniki. Mamy $n^3 + 3n^2 - n - 3$
$= n^2(n+3) - (n+3) = \left(n^2 - 1\right)(n+3) = (n-1)(n+1)(n+3)$. Podstawmy teraz w nim $n = 2k+1$. Otrzymamy: $2k \cdot (2k+2)(2k+4) = 8 \cdot k(k+1)(k+2)$. Ponieważ liczba $k(k+1)(k+2)$ jest dla każdej liczby całkowitej k podzielna przez 6, więc rozważana liczba jest podzielna przez 48. **2.73.** b)
$n^{12} - n^8 - n^4 + 1 = n^8\left(n^4 - 1\right) - \left(n^4 - 1\right) = \left(n^4 - 1\right)\left(n^8 - 1\right) = \left(n^2 + 1\right)\left(n^2 - 1\right)\left(n^4 + 1\right)\left(n^4 - 1\right) =$
$\left(n^4 + 1\right)\left(n^2 + 1\right)^2 (n-1)^2 (n+1)^2$; **2.74.** n jest liczbą względnie pierwszą z 6, wobec tego jest liczbą nieparzystą, dlatego $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ jest iloczynem dwóch kolejnych liczb parzystych, których iloczyn dzieli się przez 8. Również jedna z tych liczb dzieli się przez, gdyż n nie dzieli się przez 3. Zatem $n^2 - 1$ dzieli się przez 3 i przez 8, czyli dzieli się przez 24. **3.9.** c) $-\frac{7}{10}; -0{,}77; -0{,}77(8); -\frac{\pi}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) $-2,(23); -\sqrt{5}; -2\frac{3}{10}; -2{,}4; -\sqrt{6}$;
3.14. f) $\frac{3713}{9000}$; g) $\frac{-10771}{3330}$; l) $-\frac{8263}{19980}$. **4.10.** a) Ponieważ $10 + 6\sqrt{3} = \left(1 + \sqrt{3}\right)^3$, zatem

$$\frac{4 + 2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}} - \sqrt{3} = \frac{2\left(2 + \sqrt{3}\right)}{\sqrt{3} + 1} - \sqrt{3} = \frac{2\left(2 + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2} - \sqrt{3} = \left(2 + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} - 1\right) - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 1;$$

f) $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{40\sqrt{2} + 56} - \sqrt[3]{40\sqrt{2} - 56}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\left(2\sqrt{2} + 2\right)^3} - \sqrt[3]{\left(2\sqrt{2} - 2\right)^3}\right) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2} + 2 - \left(2\sqrt{2} - 2\right)\right) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} + 2\right) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

4.13. a) Jeżeli liczby xy i yz są wymierne, to także liczba $\frac{x}{z}=\frac{xy}{yz}$ jest wymierna, a zatem również liczba $x^2=\frac{x}{z}\cdot zx$ jest wymierna (bo zx jest liczbą wymierną). Podobnie wykazujemy, że liczby y^2 i z^2 są wymierne. Wobec tego $x^2+y^2+z^2$ jest liczbą wymierną. b) Ponieważ liczby $x^3+y^3+z^3$, x^2, y^2, z^2, xy i zx są wymierne oraz zachodzi równość $x\left(x^3+y^3+z^3\right)=\left(x^2\right)^2+(xy)\,y^2+(zx)\,z^2$, więc x jest także liczbą wymierną. Analogicznie otrzymujemy wymierność liczb y i z. **5.2.** d) liczba niewymierna; g) liczba niewymierna; h) liczba wymierna.
5.7. d) $5\sqrt{2}$; f) 4. **5.9.** h) $-40\sqrt{5}$; l) 18;m) 2. **5.10.** e) $9\cdot\sqrt[5]{9\left(2-\sqrt{2}\right)}$; g) 1190; h) -14; j) $\sqrt{7}$; k) 60.
5.11. b) $\frac{1}{15}\cdot\left(4\cdot\sqrt[4]{375}+9\sqrt[4]{500}-12\sqrt[4]{3}\right)$; c) $32-1{,}5\cdot\sqrt[3]{0{,}03}$; d) $3\sqrt[6]{75}+2\sqrt[6]{20}-\sqrt[3]{5}$; h) $\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16}$;
5.12. e) 20; h) 6; k) $8\sqrt{7}$. **5.13.** e) $37{,}5\sqrt{3}$; k) $2\left(2\sqrt{3}+3\right)$; l) $3\sqrt{3}-18\sqrt[3]{2}+12\sqrt[6]{432}-16$; m) 8.
5.14. j) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$; r) $\frac{\sqrt{2}}{50}$; t) $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$, u) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. **5.15.** f) 41; g) 1; h) 1. **5.16.** b) $\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$; g) $\frac{3+\sqrt[3]{6}}{3}$; h) $\frac{\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}}{b}$. **5.17.** c) 100; e) 0,6; g) $\frac{256\sqrt[3]{9}-416\sqrt[3]{3}+169}{16}$; h) 2,9. **5.18.** b) $6\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[5]{2}$; d) 24; g) 2.

5.19. c) $$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)}\right)=$$
$$=\sqrt{2}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+1}+\frac{2-\sqrt{3}}{2-\left(\sqrt{3}-1\right)}\right)=$$
$$=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right)=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{2};$$
e) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}+$
$+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-\sqrt{5}=1.$ **5.19.** Obie nierówności podnieś stronami do kwadratu. **5.20.** a) Podnieś obie strony do sześcianu;
c) $\frac{\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{6+4\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\sqrt{2}+1.$ **5.26.** Ponieważ obie strony dowodzonej równości przy przyjętych założeniach są nieujemne, więc podnosząc ją obustronnie do kwadratu, przechodzimy do równości równoważnej wyjściowej, to znaczy $x\pm\sqrt{y}=\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}\pm2\cdot\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}}\cdot\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}}+\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}$, czyli do równości $x\pm\sqrt{y}=x\pm\sqrt{y}$. A ta, jak widzimy, jest prawdziwa. a) Ponieważ zgodnie z udowodnioną równością $\sqrt{7\pm\sqrt{24}}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{7^2-24}}{2}}\pm\sqrt{\frac{7-\sqrt{7^2-24}}{2}}=\sqrt{6}\pm1$, zatem
$$\frac{1}{1+\sqrt{7-\sqrt{24}}}-\frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1}=\frac{1}{1+\sqrt{6}-1}-\frac{1}{\sqrt{6}+1-1}=\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}}=0.$$
6.2. d) $-1{,}9<a+b<-0{,}4$; $3{,}6<a-b<5{,}1$; $-6{,}3<ab<-2{,}75$; $-0{,}84<\frac{a}{b}<-0{,}3(6)$;
f) $-4<a+b<-2$, $5<a-b<7$, $-10<ab<-4$, $-\frac{1}{2}<\frac{a}{b}<-\frac{1}{5}$. **6.3.** i) $-2<b-2a<1$;
j) $3<3a+b-2<7$. **6.4.** f) $-\frac{12}{5}<-\frac{2b}{5}<-2$; h) $-21<3a-2b<-16$ **6.5.** d) $-\frac{1}{2}<\frac{a}{b+5}<-\frac{1}{15}$;
h) $-3<\frac{a}{2}-b<-3{,}25$. **7.1.** b) Wykażemy, że $a^2+ab+b^2-3(a+b-1)\geqslant0$. Mamy
$$a^2+ab+b^2-3(a+b-1)=a^2+ab+b^2-3a-3b+3=$$
$$=\left(a^2-2a+1\right)+\left(b^2-2b+1\right)+(ab-a-b+1)=(a-1)^2+(b-1)^2+(a-1)(b-1)=$$
$$=\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{2}(b-1)^2+\frac{1}{2}\left((a-1)^2+2(a-1)(b-1)+(b-1)^2\right)=$$
$$=\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{2}(b-1)^2+\frac{1}{2}(a+b-2)^2\geqslant0.$$

7.5. Mamy: $a^3+b^3+c^3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\left(a^3+\frac{1}{a}\right)+\left(b^3+\frac{1}{b}\right)+\left(c^3+\frac{1}{c}\right)\geqslant$ $\geqslant 2\cdot\sqrt{a^3\cdot\frac{1}{a}}+2\cdot\sqrt{b^3\cdot\frac{1}{b}}+2\cdot\sqrt{c^3\cdot\frac{1}{c}}=2a+2b+2c=2(a+b+c)$. **7.7.** Skoro $a+b=1$, to $a=\frac{1}{2}+\alpha$, $b=\frac{1}{2}-\alpha$, gdzie α jest pewną liczbą rzeczywistą. I wówczas korzystając ze wzorów skróconego mnożenia, otrzymujemy: c) $a^4+b^4=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)^4+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^4=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{2}\alpha^2+2\alpha^3+\alpha^4+\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{2}\alpha^2-$ $-2\alpha^3+\alpha^4=\frac{1}{8}+3\alpha^2+2\alpha^4\geqslant\frac{1}{8}$. **7.17.** b) Nierówność ta wynika z poprzedniej; podstaw w tamtej a^2 w miejsce a, zaś b^2 – w miejsce b. **7.18.** c) Skorzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną $a+b+c$ liczb dodatnich, wśród których jest a liczb równych $b+c$, b liczb równych $c+a$ i c liczb równych $a+b$, oraz z nierówności $3(ab+bc+ca)\leqslant(a+b+c)^2$, którą z łatwością otrzymujemy z nierówności $ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2$:

$$\frac{(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c}{2^{a+b+c}}\leqslant\left(\frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{a+b+c}\right)^{a+b+c}\cdot\frac{1}{2^{a+b+c}}=$$

$$=\left(\frac{2(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)}\right)^{a+b+c}=\left(\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right)^{a+b+c}=\left(\frac{3(ab+bc+ca)}{3(a+b+c)}\right)^{a+b+c}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)}\right)^{a+b+c}=\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}=\left(\frac{a+b+c}{a\cdot\frac{1}{a}+b\cdot\frac{1}{b}+c\cdot\frac{1}{c}}\right)\leqslant a^a\cdot b^b\cdot c^c.$$

7.22. e) $(n!)^3=1^3\cdot2^3\cdot3^3\cdot\ldots\cdot n^3\leqslant\left(\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{n}\right)^n=\left(\frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{n}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{n}(n+1)}{2}\right)^{2n}$; f) Ponieważ dla każdego $k=1,2,3,\ldots(2k+2)!!=(2k)!!(2k+2)<(2k+1)!!(2k+2)=(2k+1)!!(2k+3-1)=$ $=(2k+1)!!(2k+3)-(2k+1)!!=(2k+3)!!-(2k+1)!!$ to: $4!!<5!!-3!!, 6!!<7!!-5!!$, ..., $(2n)!!<(2n+1)!!-(2n-1)!!$. Po dodaniu tych nierówności stronami dostajemy $4!!+6!!+\ldots+(2n)!!<(2n+1)!!-3$, czyli nierówność $2!!+4!!+6!!+\ldots+(2n)!!<(2n+1)!!-1$.

8.6. a) $(-6;5\rangle$; $\boldsymbol{R}$; $(5;+\infty)$; $(-\infty;-6\rangle$; f) $\langle-3;1\rangle\cup\{5,7\}$, $\boldsymbol{R}$, $(1;5)$, $(-\infty;-3)\cup(5;7)\cup(7;+\infty)$. **8.9.** d) $(-5;+\infty)$; f) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$. **8.10.** e) $(-\infty;-4\rangle\cup(7;+\infty)$; j) $(-11;-8)\cup\langle-4;+\infty)$. **9.1.** f) $13\sqrt{42}-84$; j) $\frac{3\sqrt{15}-11}{2}$; p) $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$. **9.2.** f) $\frac{|x+1|}{|x|-1}=\begin{cases}1, & \text{gdy } x<-1\\ -1, & \text{gdy } -1\leqslant x<0\\ \frac{x+1}{x-1}, & \text{gdy } x\geqslant 0 \text{ i } x\neq 1;\end{cases}$

h) $\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\begin{cases}2, & \text{gdy } 1\leqslant x<2\\ 2\sqrt{x-1}, & \text{gdy } x\geqslant 2.\end{cases}$ **9.4.** f) 1, gdy $|x|\neq 1$; h) $-2x+4$, gdy $x<0$; 4, gdy $0\leqslant x<2$; $2x$, gdy $x\geqslant 2$; i) 1, gdy $|x|\neq 1$. **9.5.** d) 5, e) 1. **9.6.** k) -3; l) $1-x^2$; m) $(x+1)(x-3)$. **10.3.** j) $x=1 \vee x=4$; m) brak rozwiązań; p) $x=-2\vee x=2$. **10.5.** f) $x=-\frac{1}{2}$; g) $x=1$; **10.6.** h) $0<x<2$. **10.8.** f) $0<x<2$; h) $x<\frac{4}{3}$; n) $-2\leqslant x\leqslant 1\frac{5}{7}$. **10.9.** b) $-2\frac{2}{5}\leqslant x\leqslant 2$; c) $x\leqslant 0\vee x>4$; l) $-\frac{1}{2}<x\leqslant 4\frac{1}{2}$. **10.12.** d) $x=\frac{1}{2}$; f) $x\leqslant-2$ lub $x\geqslant 2$. **10.13.** e) $x\leqslant-7\vee x\geqslant 11$; i) $x\geqslant 1$; j) $x=-8\vee x=-4\vee x=6\vee x=10$. **10.14.** c) $-\frac{1}{2}<x<\frac{11}{4}$; h) $\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 3$. **10.15.** c) $x=-3\vee x=2$; e) $x\in\langle 2;+\infty)\cup\{-2\}$. **10.18.** Dostajemy nierówności $(a-b)^2\geqslant c^2, (b-c)^2\geqslant a^2, (c-a)^2\geqslant b^2$, czyli nierówności: $(a-b)^2-c^2\geqslant 0, (b-c)^2-a^2\geqslant 0, (c-a)^2-b^2\geqslant 0$ i wreszcie nierówności: $(a-b+c)(a-b-c)\geqslant 0$, $(b-c+a)(b-c-a)\geqslant 0, (c-a+b)(c-a-b)\geqslant 0$. Po pomnożeniu nierówności tych stronami dochodzimy do nierówności $(a-b+c)(a-b-c)(b-c+a)(b-c-a)(c-a+b)(c-a-b) \geqslant 0$, czyli nierówności $((a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c))^2 \leqslant 0$. Stąd wynika, że $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)=0$.

V. Funkcje liczbowe

1.1. c) tak; zbiór trójkątów; d) tak; zbiór odcinków; e) nie; f) nie; g) tak; zbiór wielokątów. **2.1.** f) $\boldsymbol{R}$; g) $\boldsymbol{R}$. **2.2.** b) $\boldsymbol{R}\setminus\left\{-\frac{2}{5}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$; c) $\boldsymbol{R}\setminus\{0,-1\}$. **2.3.** e) $\langle -2;0\rangle$; f) $(-\infty;3\rangle\setminus\{-2,2\}$; g) $(0;1)$; h) $\{1\}$. **2.4.** b) $\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}$; d) $\langle 3;+\infty)$; f) $\boldsymbol{R}\setminus\{-2,2\}$. **2.5.** a) $\boldsymbol{R}\setminus\left\{-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right\}$; g) $\boldsymbol{R}\setminus\{\sqrt{3},-\sqrt{3},2\}$; h) $\boldsymbol{R}\setminus\{0{,}6,-1\}$. **2.6.** e) $(3;+\infty)$; f) $\left(\frac{5}{3};4\right\rangle$; g) $\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(0;3)\cup(3;+\infty)$. **2.7.** f) $(-5;-1\rangle\cup\langle 3;5)$; g) $\langle -3;-1)\cup(-2;1)\cup(3;4\rangle$; h) $\langle -5;1\rangle\setminus\{-1,1\}$. **2.8.** e) $\{0,21,42,63,84\}$; f) $\langle 2;11\rangle$; g) $\boldsymbol{R}_+$. **2.9.** c) $\langle -1;1\rangle$; f) $\left(-1;-\frac{1}{3}\right\rangle\cup\left(\frac{1}{3};1\right\rangle$. **3.12.** d) –3, 0 i 3; g) 2; h) brak; j) –4, –3, 3 i 4; k) brak. **3.13.** f) brak; h) 2; j) – 3. **3.17.** f) nie; g) tak. **4.1.** d) $\min\left\{f(x): x\in\left\langle -7{,}5;3\frac{3}{4}\right\rangle\right\}=-8$; $\max\left\{f(x): x\in\left\langle -7{,}5;3\frac{3}{4}\right\rangle\right\}=3$. **4.3.** b) Jeśli $x\in\left\langle -7;\frac{11}{3}\right\rangle$, to $7+x\geqslant 0$ i $11-3x\geqslant 0$. Na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną liczb $7+x, 7+x, 7+x$ i $11-3x$ otrzymujemy

$$f(x)=(7+x)\cdot\sqrt[3]{11-3x}=\sqrt[3]{(7+x)^3(11-3x)}\leqslant\sqrt[3]{\left(\frac{3\cdot(7+x)+11-3x}{4}\right)^4}=\sqrt[3]{8^4}=16,$$ przy czym

$f(x)=16 \Leftrightarrow 7+x=11-3x \Leftrightarrow x=1$. Stąd: $\max\left\{f(x):\ x\in\left\langle -7;\frac{11}{3}\right\rangle\right\}=16=f(1)$.

d) $$f(x)=(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2\leqslant\left(\frac{5(1-x)+(1+x)+2(1+2x)}{8}\right)^8=1,$$ zaś

$f(x)=1 \Leftrightarrow 1-x=1+x=1+2x \Leftrightarrow x=0$. Zatem $\max\left\{f(x);\ x\in\left(-\frac{1}{2};1\right)\right\}=1=f(0)$. **4.4.** c) Zauważmy najpierw, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności $x^2+1>0$ (a nawet $x^2+1\geqslant 1$) oraz $\sqrt{x^2+1}\pm x>\sqrt{x^2}\pm x=|x|\pm x\geqslant 0$, co dowodzi, że dziedziną rozważanej funkcji jest zbiór $\boldsymbol{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych. Stosując nierówność $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$, otrzymujemy

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\sqrt{x^2+1}+x}+\sqrt{\sqrt{x^2-1}-x}\right)\geqslant\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\sqrt{\sqrt{x^2+1}-x}}=$$
$$=\sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}}=\sqrt[4]{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}=\sqrt[4]{x^2+1-x^2}=1,$$ przy czym $f(x)=1\Leftrightarrow x=0$. Zatem $\min\{f(x):\ x\in R\}=1=f(0)$; d) Na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną liczb $x^{1000}, x^{900}, x^{90}, x^8, \underbrace{\frac{1}{x}, \frac{1}{x}, \ldots, \frac{1}{x}}_{1998}$ (które są dodatnie, gdy $x>0$), otrzymujemy

$$f(x)=x^{1000}+x^{900}+x^{90}+x^8+\frac{1998}{x}=x^{1000}+x^{900}+x^{90}+x^8+\underbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x}}_{1998}\geqslant$$
$$\geqslant 2002\cdot\sqrt[2002]{x^{1000}\cdot x^{900}\cdot x^{90}\cdot x^8\cdot\frac{1}{x^{1998}}}=2002\cdot 1=2002,$$ przy czym

$f(x)=2002\Leftrightarrow x^{1000}=x^{900}=x^{90}=x^8=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=1$. Zatem $\min\{f(x):\ x>0\}=2002=f(1)$. **5.2.** f) rosnąca; h) rosnąca; j) rosnąca. **5.7.** Różnowartościowe są funkcje z podpunktów a), d), e), h). **5.9.** d) parzysta; e) parzysta; l) nieparzysta; m) ani parzysta, ani nieparzysta; n) ani parzysta, ani nieparzysta. **5.10.** d) nieparzysta; e) ani parzysta, ani nieparzysta. **5.20.** Podstawiając do podanej równości $x+a$ w miejsce x, otrzymujemy

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-(f(x+a))^2}==\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}\right)^2}=$$
$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}-\frac{1}{4}-\sqrt{f(x)-(f(x))^2}-f(x)+(f(x))^2}=$$

$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + (f(x))^2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - f(x)\right)^2} = \frac{1}{2} + \left|\frac{1}{2} - f(x)\right| = \frac{1}{2} + f(x) - \frac{1}{2} = f(x)$, skąd $f(x+2a) = f(x)$. **5.21.** Podstawiamy do podanej równości $x + a$ w miejsce x; otrzymujemy równość (1) $f(x+2a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f(x+3a) + f(x+a)\right)$, z której wynika równość (2) $f(x+3a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f(x+4a) + f(x+2a)\right)$. Podstawiając $f(x+3a)$ z równości (2) do równości (1), dostajemy równość $f(x+2a) = \frac{1}{2} f(x+4a) + \frac{1}{2} f(x+2a) + \frac{1}{\sqrt{2}} f(x+a)$, czyli równość $f(x+2a) = f(x+4a) + \sqrt{2}\, f(x+a)$, która po uwzględnieniu równości podanej w założeniu prowadzi do równości $f(x+2a) = f(x+4a) + f(x+2a) + f(x)$. Stąd $f(x+4a) = -f(x)$ i ostatecznie $f(x+8a) = -f(x+4a) = -(-f(x)) = f(x)$. Otrzymana równość $f(x+8a) = f(x)$ dowodzi okresowości funkcji f o okresie $8a$. **5.25.** Nie jest. Podstawiając do podanej nierówności za x kolejno 0 i 1, otrzymujemy nierówności $f(0) - (f(0))^2 \geqslant \frac{1}{4}$ i $f(1) - (f(1))^2 \geqslant \frac{1}{4}$, czyli nierówności $\left(f(0) - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0$ i $\left(f(1) - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0$, z których wynika, że $f(0) = \frac{1}{2}$ i $f(1) = \frac{1}{2}$, a więc, że $f(0) = f(1)$. **6.1.** e) $F(x) = 2 - x$, $D_F = \boldsymbol{R}$; $G(x) = \sqrt{2 - x^2}$, $x \in \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$; g) $F(x) = \frac{1}{3x-1}$, $D_F = \boldsymbol{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$; $G(x) = \frac{3}{x+2} - 3$, $D_G = \boldsymbol{R} \setminus \{-2\}$; i) $F(x) = \left|\frac{2x-2}{x-2}\right|$, $D_F = \boldsymbol{R} \setminus \{2\}$; $G(x) = \frac{x}{|x+1| - 2}$, $D_G = \boldsymbol{R} \setminus \{-3, 1\}$. **6.2.** c) $f(f(x)) = f(x)$, $f(g(x)) = g(g(x)) = 0$, $g(f(x)) = g(x)$.

7.1. e) $f^{-1}(x) = \begin{cases} -x: & |x| \leqslant 1 \\ \sqrt[3]{x}: & |x| > 1. \end{cases}$ **7.2.** d) $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}$; f) $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x}$, $x \neq 0$; g) $f^{-1}(x)$, nie istnieje.

8.9. b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$; d) $f(x) = \frac{4x+5}{3-3x}$. Wskazówka. Podstaw zamiast x najpierw $\frac{2x+1}{x-1}$, a następnie w otrzymanym równaniu $\frac{1}{x}$. **8.10.** Zauważmy, że zarówno dla $x \geqslant 0$, jak i dla $x < 0$ zachodzi równość $f(0) + f(2x) = x$. Wobec tego $2f(0) = 0$, czyli $f(0) = 0$ i dalej $f(2x) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Tym samym $f(x) = f\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}x$. Łatwo sprawdzić, że funkcja $f(x) = \frac{1}{2}x$ spełnia podane w zadaniu równanie funkcyjne.

VI. Funkcje trygonometryczne

1.6. c) 60°; f) 45° lub 135°. **1.7.** c) $\frac{5}{7}$; g) 1. **2.4.** i) 396°; k) $\left(\frac{270}{\pi}\right)^\circ$; **2.6.** b) $31{,}25\pi$ cm $\approx 98{,}1$cm. **2.10.** a) 2,5 rad; b) $\left(\frac{450}{\pi}\right)^\circ \approx 143{,}2^\circ$. **2.11.** b) $\frac{7}{18}\pi = 70^\circ$ e) $\frac{11}{24}\pi = 82{,}5^\circ$; **3.5.** c) $-\frac{3}{4}$; f) 1; g) $1 + \sqrt{3}$. **3.6.** d) dodatnie; e) dodatnie; i) dodatnie. **4.8.** $\left\{\frac{\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}, \frac{31\pi}{3}\right\}$, $\left\{\frac{3\pi}{5}\right\}$, $\left\{-\frac{11\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{53\pi}{4}\right\}$, $\{\pi\}$, $\left\{\sqrt{2}\,\pi\right\}$. **4.11.** c) jest liczbą dodatnią; e) i f) jest liczbą ujemną. **4.12.** b) ctg 1 > cos 1; c) cos 2 < sin 2, bo cos 2 < 0, zaś sin 2 > 0. **5.1.** f) $\frac{2}{\sin\alpha}$; g) $\sin^2\alpha$. **5.2.** c) $\operatorname{tg}\alpha$, o ile $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \neq 0$; d) $\operatorname{ctg}\alpha$, o ile $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \neq 0$. **5.3.** k) 1; l) 1; m) $|\sin\alpha + \cos\alpha|$. **5.4.** d) $\frac{1}{\sin\alpha}$; e) $\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}$; f) $\operatorname{ctg}\alpha$; k) $\frac{2}{\cos\alpha}$; m) 1. **5.5.** b) $-\frac{2}{\cos\alpha}$; d) $\frac{\cos^2\alpha - 2\sin\alpha(1 - \sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha + (1+\sin\alpha)\cos\alpha} \cdot \frac{2(1+\sin\alpha)}{1-\sin\alpha} =$

$$= \frac{(1-\sin^2\alpha) - 2\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha+1+\sin\alpha)} \cdot \frac{2(1+\sin\alpha)}{1-\sin\alpha} = = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot (1+\sin\alpha) = \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha;$$

e) $$\frac{2(1+\operatorname{tg}\alpha)\sin\alpha\cos\alpha + 1}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2} - \frac{2(1+\operatorname{ctg}\alpha)\sin\alpha\cos\alpha + 1}{(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2} =$$

$$= \frac{2\left(1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\sin\alpha\cos\alpha + 1}{\left(1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2} - \frac{2\left(1 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\sin\alpha\cos\alpha + 1}{\left(1 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2} =$$

$$= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha + 1}{\left(\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha}\right)^2} - \frac{2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha + 1}{\left(\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha + 1\right)\cos^2\alpha - \left(2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha + 1\right)\sin^2\alpha}{\left(\sin\alpha + \cos\alpha\right)^2} =$$

$$= \frac{2\sin\alpha\cos^3\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin^3\alpha\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\left(\sin\alpha + \cos\alpha\right)^2} =$$

$$= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)}{\left(\sin\alpha + \cos\alpha\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\left(2\sin\alpha\cos\alpha + 1\right)}{\left(\sin\alpha + \cos\alpha\right)^2} = \frac{\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\left(\sin\alpha + \cos\alpha\right)^2}{\left(\sin\alpha + \cos\alpha\right)^2} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

5.6. b) $\sin^2\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha$; d) $-\sin\alpha\cdot\cos\alpha$. **5.7.** b) $\cos^2\alpha$; d) $a - b$. **6.9.** Zauważ, że skoro $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2$, a ponadto $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$, więc $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha = 1$. Wobec tego $\operatorname{tg}^n\alpha + \operatorname{ctg}^n\alpha = 2$ dla każdej liczby naturalnej n.

6.10. b) $\frac{3}{4}$ lub $\frac{4}{3}$. **6.11.** $1 - 3m^2$. **6.13.** a) $\frac{m^3 + m}{2}$; **6.15.** Wskazówka: wyznacz a^2, b^2 oraz $y^2a^2 + x^2b^2$, a następnie wyłącz wspólny czynnik przed nawias. **7.2.** Zauważ, że:

f) $A = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + \cos^4\alpha\right) = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin^2\alpha$;

g) $A = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha\left(1 - \sin^2\alpha\right)} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\cos^2\alpha} = \ldots$;

j) $A = \left(1 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\sin^3\alpha + \left(1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot\cos^3\alpha = \left(\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\sin^3\alpha + \left(\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot\cos^3\alpha =$

$= \left(\sin\alpha + \cos\alpha\right)\cdot\sin^2\alpha + \left(\sin\alpha + \cos\alpha\right)\cdot\cos^2\alpha = \ldots$; l) $A = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + 1} = \frac{\operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

7.3. a) $\frac{1 + \sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{1 - \left(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha\right)} = \frac{1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{1 - \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + \cos^4\alpha\right)} =$

$$= \frac{2\sin^2\alpha}{1 - \left(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\right)} = \frac{2\sin^2\alpha}{1 - \left(\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\right)} =$$

$= \frac{2\sin^2\alpha}{1 - \left(1 - 3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\right)} = \frac{2}{3\cos^2\alpha}$; b) $\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right)\left(1 - \frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right)\cdot\cos^2\alpha =$

$= \left(1 + \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot\left(1 - \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot\cos^2\alpha = \left(\cos\alpha + \sin\alpha + 1\right)\left(\cos\alpha + \sin\alpha - 1\right) =$

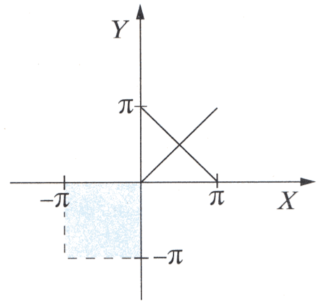
$= \left(\cos\alpha + \sin\alpha\right)^2 - 1 = 2\cos\alpha\cdot\sin\alpha$. **8.3.** e) 4π; g) $\frac{1}{2}$; l) $\frac{5}{2}$. **8.4.** g) 4π; i) $\frac{5}{2}$. **8.5.** d) $\boldsymbol{R}\setminus D$, gdzie $D = \left\{x \in \boldsymbol{R}: x = \frac{\pi}{2}\left(2k + 1\right) \text{ i } k \in \boldsymbol{C}\right\}$; f) $\boldsymbol{R}$. **8.7.** d) $\left\langle\frac{1}{2}; 2\right\rangle$; e) $\left(-1; +\infty\right)$. **8.8.** b) $\left\langle -1; 1\right\rangle$. **8.9.** f) nieparzysta; g) ani parzysta, ani nieparzysta; h) parzysta; i) nieparzysta; **8.10.** Parzyste jest funkcja: c), nieparzyste są funkcje: e), f). **8.12.** d) wartość największa nie istnieje, 1. **8.13.** d) 2. **8.14.** b) $y_{max} = -\frac{1}{9}$, $y_{min} = -1$. **8.17.** Ponieważ liczby 1 i $\sqrt{2}$ nie są współmierne, czyli nie istnieje najmniejsza wspólna wielokrotność okresów 2π i $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ odpowiednio funkcji $y = \sin x$ i $y = \sin\left(\sqrt{2}\,x\right)$, zatem funkcja $f\left(x\right)$ nie jest okresowa . **9.3.** 5 rozwiązań, gdy $a = \frac{1}{3}$; 6 rozwiązań – gdy $a = \frac{2}{3}$; 10 rozwiązań, gdy $a \in \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$; brak rozwiązań, gdy $a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

9.9. b) $x^2 - x - \sin\pi x + \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \sin\pi x\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \sin\pi x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (dlaczego?). d) Równanie to jest równoważne równaniu $\sin^2 x\left(1 - \sin^{2001}x\right) + \cos^2 x\left(1 + \cos^{2001}x\right) = 0$, a ono z kolei – alternatywie dwóch układów $\begin{cases}\sin x = 1\\ \cos x = 0\end{cases}$, $\begin{cases}\sin x = 0\\ \cos x = -1\end{cases}$, których rozwiązaniami są odpowiednio liczby: $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $x = \left(2n + 1\right)\pi$, gdzie $n \in C$. **9.10.** a) Rozwiązaniami danego równania są pary $\left(x; y\right)$, gdzie $x = -1$, $y = \pm\frac{\pi}{4} + 1 + k\pi$ i $k \in C$. Wystarczy zauważyć, że $\operatorname{tg}^2\left(x + y\right) + \operatorname{ctg}^2\left(x + y\right) \geqslant 2$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y takich, że $x + y \neq k\cdot\frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in \boldsymbol{C}$, zaś $1 - 2x - x^2 = 2 - \left(x + 1\right)^2 \leqslant 2$, dla każdej liczby rzeczywistej x. Zatem $\operatorname{tg}^2\left(x + y\right) + \operatorname{ctg}^2\left(x + y\right) = 1 - 2x - x^2 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\left(x + y\right) = 1$ i $x = -1 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(x + y\right) = \pm 1$ i $x = -1 \Leftrightarrow x + y = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$ i $x = -1$.

9.14. Zauważmy, że nierówność $x^2(1+\sin^2 y)+2x(\sin y+\cos y)+1+\cos^2 y \geqslant 0$ jest równoważna nierówności $(x+\cos y)^2+(x\sin y+1)^2 \geqslant 0$, która, jak widzimy, jest prawdziwa. Równość w nierówności zadania zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x+\cos y=0$ i $x\sin y+1=0$, czyli gdy $x=-\cos y$ i $x=-\frac{1}{\sin y}$, a więc gdy: $\cos y=\frac{1}{\sin y}$, $\cos y\sin y=1$, co wobec tożsamości $\sin^2 y+\cos^2 y=1$ jest niemożliwe. Wykazaliśmy zatem, że dla każdych liczb rzeczywistych x i y zachodzi nierówność $x^2(1+\sin^2 y)+2x(\sin y+\cos y)+1+\cos^2 y>0$.

9.18. b) Zauważmy, że $\sin^2\pi x+\cos^2\pi y=1 \Leftrightarrow \sin^2\pi x=1-\cos^2\pi y \Leftrightarrow \sin^2\pi x=\sin^2\pi y \Leftrightarrow \sin\pi x=\sin\pi y$ lub $\sin\pi x=-\sin\pi y \Leftrightarrow \pi y=\pi x+2k\pi$ lub $\pi y=(\pi-\pi x)+2k\pi$ lub $\pi y=-\pi x+2k\pi$ lub $\pi y=\pi x+(2k+1)\pi \Leftrightarrow y=x+2k$ lub $y=-x+(2k+1)$ lub $y=-x+2k$ lub $y=x+(2k+1) \Leftrightarrow y=x+n$ lub $y=-x+2m$, gdzie $n, m\in C$. I widzimy teraz, że ilustracją geometryczną danego równania jest suma mnogościowa prostych o równaniach: $y=x+n$ i $y=-x+m$, gdzie $n, m\in \mathbf{C}$.

d) Funkcja sinus jest funkcją okresową o okresie podstawowym 2π. Dlatego wystarczy znaleźć punkty, których współrzędne spełniają dane równanie w kwadracie opisanym nierównościami: $-\pi\leqslant x<\pi$, $-\pi\leqslant y<\pi$. Zauważmy teraz, że osie układu współrzędnych rozbijają ten kwadrat na cztery mniejsze kwadraty, w których $\sin x$ i $\sin y$ są tego samego znaku, a ponadto, że: w kwadracie $-\pi\leqslant x\leqslant 0, -\pi\leqslant y\leqslant 0$ dane równanie staje się tożsamością $0\equiv 0$, zaś w kwadracie $0<x<\pi$, $0<y<\pi$ jest ono równoważne równaniu $\sin x=\sin y$, skąd $y=x$ lub $y=\pi-x$, natomiast w kwadratach $0<x<\pi, -\pi\leqslant y\leqslant 0$ i $-\pi\leqslant x\leqslant 0, 0<y<\pi$ dane równanie nie ma rozwiązań. Rycina obok stanowi ilustrację geometryczną danego równania w kwadracie $-\pi\leqslant x<\pi, -\pi\leqslant y<\pi$.



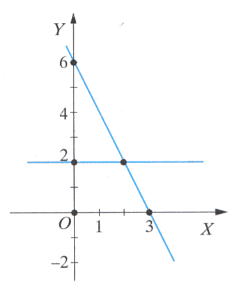
9.24. Ponieważ $0\leqslant 2\cos^2 x\leqslant 2$, więc $[\operatorname{tg} x]\in\{0,1,2\}$. 1° Jeśli $[\operatorname{tg} x]=0$, wtedy $2\cos^2 x=0$, czyli $\cos x=0$, co oczywiście zachodzić nie może. 2° Gdy $[\operatorname{tg} x]=1$, wtedy $\cos^2 x=\frac{1}{2}$, czyli $\cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Zatem $x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$, gdzie $k\in \mathbf{C}$. Jednak $\left[\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]=[-1]=-1\neq 1$. Wobec tego musi być $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, gdzie $k\in\mathbf{C}$. 3° Jeśli wreszcie $[\operatorname{tg} x]=2$, wówczas $\cos^2 x=1$, skąd $\cos x=\pm 1$, czyli $x=k\pi$, gdzie $k\in\mathbf{C}$. Ale wtedy $[\operatorname{tg} x]=[\operatorname{tg} k\pi]=[0]=0\neq 2$. Ostatecznie więc rozwiązaniami danego równania są liczby $\frac{\pi}{4}+2k\pi$, gdzie $k\in\mathbf{C}$.

9.25. Zauważmy, że $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\left[\frac{\pi}{6x}\right]\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}+\left[\frac{\pi}{6x}\right]=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee \frac{\pi}{6}+\left[\frac{\pi}{6x}\right]=\frac{5}{6}\pi+2k\pi \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\frac{\pi}{6x}\right]=2k\pi \vee \left[\frac{\pi}{6x}\right]=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in\mathbf{C}$. Stąd $k=0$ (w przeciwnym razie liczby $2k\pi$ i $\frac{2}{3}\pi+2k\pi$ musiałyby być całkowite, a są przecież niewymierne). Wobec tego $\left[\frac{\pi}{6x}\right]=0$, czyli $0\leqslant\frac{\pi}{6x}<1$. Ostatecznie więc $x>\frac{\pi}{6}$.

VII. Funkcje liniowe

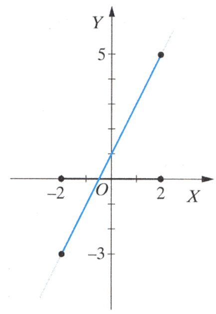
1.23. a) $a=2, b=-1$; b) 25. **1.26.** Odcięta punktu P jest wspólnym miejscem zerowym tych funkcji liniowych, stąd równanie $-\frac{2}{3}a=-\frac{4}{9}a+\frac{2}{3}$, którego rozwiązaniem jest liczba $a=-3$. Zatem: $P=(2;0)$, $Q=(0;-6)$, $R=(0,-3)$; zaś pole trójkąta PQR jest równe 3. **1.30.** $a=1, b=1$.

1.32. Z treści zadania wynika, że liczba 2 jest rozwiązaniem równania $a-2x=2$, stąd $a=6$. Mamy więc funkcje $f(x)=2$ i $g(x)=6-2x$, których wykresy przedstawia rycina obok. Czworokąt, którego pole mamy obliczyć, jest trapezem prostokątnym o podstawach długości 3 i 2 i wysokości 2. Zatem pole to jest równe $\frac{1}{2}\cdot(3+2)\cdot 2=5$.



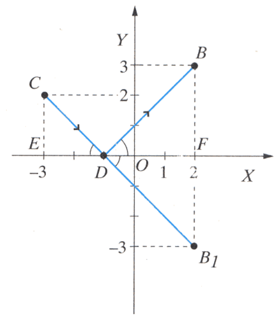
1.41. 26.

1.43. Najkrótszym odcinkiem, o którym mowa w zadaniu, jest ten, którego jednym końcem jest punkt $A = (2; 5)$, a drugim – jego odbicie względem środka S tego odcinka, a więc punkt $B = (-2; -3)$. Funkcja, której wzór mamy znaleźć, jest liniowa, a więc postaci $y = ax + b$. Podstawiając do tego wzoru współrzędne punktów A i B, otrzymujemy układ równań $\begin{cases} 2a + b = 5 \\ -2a + b = -3, \end{cases}$ którego rozwiązaniem jest para: $(a; b) = (2; 1)$. Zatem wzór funkcji liniowej to: $y = 2x + 1$. Chcemy, aby jej wykresem był odcinek $\overline{AB}$. Wobec tego x musi być dowolną liczbą z przedziału $\langle -2; 2\rangle$. Oto wykres tej funkcji dla $x \in \langle -2; 2\rangle$.



1.48. Zacznijmy rozwiązywanie tego zadania od jego analizy na rycinie obok. Odbijając względem osi OX punkt B, otrzymamy punkt $B_1 = (2; -3)$; punkt D przecięcia się odcinka B_1C z osią OX jest tym, w którym skierowana z punktu C czarna kula odbija się od osi OX, aby trafić w kulę białą, znajdującą się w punkcie B. Wynika to z równości kątów BDF, FDB_1 i CDE, a kąty CDE i BDF są tutaj kątami odpowiednio padania i odbicia. Nietrudno stwierdzić też, że $D = (-1; 0)$. a) Ponieważ $\sphericalangle BDF = 45^\circ$, więc $\sphericalangle CDF = 135^\circ$. Jest to kąt, pod którym należy kulę czarną skierować do osi OX. b) Tor kuli czarnej od punktu C do punktu B jest wykresem funkcji f określonej następująco:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & \text{gdy} \quad x \in \langle -3; -1\rangle \\ x + 1, & \text{gdy} \quad x \in (-1; -2\rangle. \end{cases}$$



1.53. c) $(g \circ f)(x) = -3, x \in \mathbf{R}$, $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 8 & \text{dla} \quad x \leqslant -2 \\ 3x - 2 & \text{dla} \quad -2 < x \leqslant 0. \\ -2 & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$ **2.1.** c) $x = \dfrac{7b(b-a)}{3(b-3a)}$; e) $x = \dfrac{2(a^2 - b^2 - 2a^2b^2)}{ab(a^2 - b^2 + 2)}$; h) $x = \dfrac{a(ad + 2bc)}{4ad - bc}$. **2.2.** c) $x > -1$; f) $x > -\frac{5}{6}$. **2.3.** e) nie ma rozwiązania; f) $1 < x < 6\frac{1}{6}$. **2.4.** b) 2, 3, 4; d) 7, 8, 9, 10. **2.5.** b) $|a|(x + a) = 2(x + 2) \Leftrightarrow (|a| - 2)x = a \cdot |a| + 4$. Zatem, gdy: 1° $a \geqslant 0$ i $a \neq 2$, to dane równanie ma jedno rozwiązanie; jest nim liczba $\frac{a^2 + 4}{a - 2}$; 2° $a = 2$, to równanie jest sprzeczne; 3° $a < 0$ i $a \neq -2$, to dane równanie ma jedno rozwiązanie, jest nim liczba $a - 2$; 4° $a = -2$, to równanie to jest tożsamościowe. Reasumując, otrzymujemy, że równanie to: – ma jedno rozwiązanie, gdy $(a < 0 \text{ i } a \neq -2)$ lub $(a > 0 \text{ i } a \neq 2)$; – nie ma rozwiązań (jest sprzeczne), gdy $a = 2$; – ma nieskończenie wiele rozwiązań (jest tożsamościowe), gdy $a = -2$. d) Równanie to: ma jedno rozwiązanie, gdy $|m| \neq 3$; jest nim liczba $-\frac{1}{m+3}$, nie ma rozwiązań (jest sprzeczne), gdy $m = -3$; ma nieskończenie wiele rozwiązań (jest tożsamościowe), gdy $m = 3$.

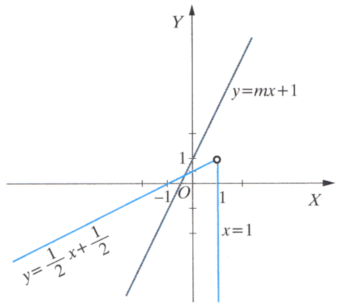
2.6. c) Dodajemy do obu stron danego równania 3 i przepisujemy je następująco:

$$\left(\frac{a + b - x}{c} + 1\right) + \left(\frac{b + c - x}{a} + 1\right) + \left(\frac{c + a - x}{b} + 1\right) = 4 - \frac{4x}{a + b + c},$$

$((a + b + c) - x)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 4 \cdot \frac{(a + b + c) - x}{a + b + c}$, $((a + b + c) - x)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{4}{a + b + c}\right) = 0$. Oczywiście musi być $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, a + b + c \neq 0$. Wtedy: 1° jeśli $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \neq \frac{4}{a + b + c}$, to rozwiązaniem równania jest $x = a + b + c$; 2° jeśli $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{a + b + c}$, to rozwiązaniem równania jest każda liczba rzeczywista x.

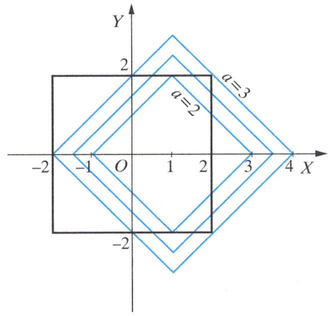
4.1. b) $|x + 2y - 3| + |2x - y - 1| = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3 = 2x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$; f) $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 52 = 0 \Leftrightarrow (x + 6)^2 + (y - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -6, y = 4$. **5.2.** f) $x = 7, y = 5$; g) $x = 2, y = 1{,}3$; h) $x = 5, y = 6$; i) $x = 5, y = 3$;. **5.4.** a) $(3; 3), (1; -1)$; e) $(0; 3), (2; -1), (-2; -1)$. **5.5.** b) $x = 2p - 3q, y = 3p - 2q$;

5.6. b) Z pierwszego równania układu wnosimy, że musi być $y \leqslant 1$. Wtedy $|x-y| = 1-y \Leftrightarrow x-y = 1-y$ lub $x-y = y-1 \Leftrightarrow x = 1$ lub $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Ponadto $\frac{mx+1}{y} = 1 \Leftrightarrow y = mx+1$ i $y \neq 0$. Analizując układ równań geometrycznie, wnioskujemy, że: – ma on dwa rozwiązania, gdy $m < 0$; – ma on jedno rozwiązanie, gdy $\frac{1}{2} < m < 1$ lub $m > 1$; – nie ma rozwiązań, gdy $0 \leqslant m \leqslant \frac{1}{2}$ lub $m = 1$.



f) Przyglądając się ilustracji graficznej danego układu , widzimy, że liczba $R(a)$ jego rozwiązań wynosi:

$$R(a) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } a < 1 \text{ lub } a > 5 \\ 1, & \text{gdy } a = 1 \\ 2, & \text{gdy } 1 < a < 2 \text{ lub } a = 5 \\ 4, & \text{gdy } a = 2 \text{ lub } 3 < a < 5 \\ 5, & \text{gdy } a = 3 \\ 6, & \text{gdy } 2 < a < 3. \end{cases}$$

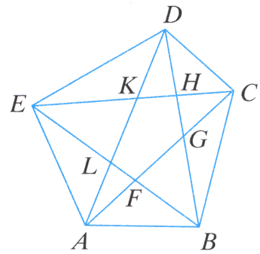


5.7. d) Po dodaniu równań układu stronami otrzymujemy równanie $4(x+y+z+u+v) = 12$, czyli równanie $x+y+z+u+v = 3$, z którego na mocy równań układu wynika, że $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$, $u = -1$, $v = -2$. Rozwiązaniem danego układu jest więc piątka liczb: $(2, 1, 3, -1, -2)$. e) Zauważmy, że jeżeli w pierwszym równaniu naszego układu zamienimy miejscami x i u oraz y i v, to otrzymamy czwarte równanie z liczbą przeciwną po prawej stronie. Jeśli zaś to samo uczynimy w drugim równaniu, to otrzymamy trzecie równanie z liczbą przeciwną po jego prawej stronie. Zatem $u = -x$ i $v = -y$. Podstawiając to do pierwszego i drugiego równania naszego układu, otrzymujemy układ $\begin{cases} -4x + 4y = 16 \\ 6x - 2y = -16. \end{cases}$ Stąd $x = -2$, $y = 2$ i wobec tego dalej: $u = 2$, $v = -2$. Łatwo sprawdzić, że otrzymana czwórka $(-2, 2, 2, -2)$ spełnia dany układ i stanowi jego jedyne rozwiązanie. **5.8.** b) $x = 30$, $y = 12$, $z = 70$; f) $x = 9$, $y = 7$, $z = 5$, $v = 3$, $t = 1$. **5.9.** Załóżmy, że para (x, y) jest rozwiązaniem danego układu równań. Z pierwszego równania wynosimy, że $x \neq 0$ oraz, że $\frac{|x|}{x} = 1$. To oznacza z kolei, że x jest liczbą dodatnią. Wobec tego $|x-y| = 0$, czyli że $x = y$. Podstawiając $y = x$ do drugiego równania i uwzględniając to, że $x > 0$, otrzymujemy równanie $2x - 1 + |2x-1| = 0$. Stąd $2x - 1 \leqslant 0$, czyli $x \leqslant \frac{1}{2}$. Tak więc każda para $(x; y)$ spełniająca podany układ równań jest taka, że $0 < x = y \leqslant \frac{1}{2}$. I odwrotnie, każda para $(x; y)$, taka że $0 < x = y \leqslant \frac{1}{2}$, spełnia dany układ równań, co łatwo stwierdzić, podstawiając ją do obu równań układu.

VIII. Elementy geometrii płaszczyzny

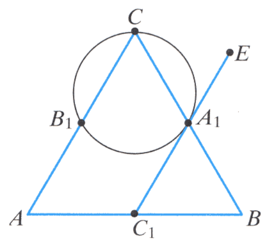
1.1. a) Niewspółliniowe; b) współliniowe. **1.2.** c) Nie są współliniowe; d) współliniowe; e) współliniowe.
1.3. a) Tak; b) nie; c) nie; d) tak; e) tak. **1.6.** a) $x \in \left(-\frac{1}{5}; \frac{3}{2}\right)$; b) nie ma takiego x. **1.7.** a) Można zbudować trójkąt; b), c) nie można zbudować trójkąta. **1.13.** $S = 8\sqrt{3}$. **1.16.** $AD = 5$. **1.17.** Punkty A i B mają te same rzędne oraz C i D mają te same rzędne, więc rzędna punktu D jest równa -5. Odcięte punktów A i B różnią się o 2 (tak jak odcięte punktów C i D), więc odcięta punktu D równa 4. Stąd otrzymujemy, że $AC = 13$ i $BD = 15$. **1.18.** $(3; -3)$; $(-7; -5)$; $(3; 3)$. **1.19.** $C = (0; 1)$; $D = (-4; 4)$. **1.21.** $A = (160; -131)$; $B = (-225; 184)$. **1.25.** Załóżmy przeciwnie, że żadna z tych nierówności nie zachodzi, wówczas mamy $AC + AD < AB$ i $BC + BD < AB$. Po dodaniu tych nierówności stronami dostajemy nierówność (*) $(AC + BC) + (AD + BD) < AB + AB$. Jednak z drugiej strony na mocy nierówności trójkąta $AC + BC \geqslant AB$ i $AD + BD \geqslant AB$, skąd po dodaniu stronami otrzymujemy nierówność $(AC + BC) + (AD + BD) \geqslant AB + AB$, sprzeczną z nierównością (*). Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania.

1.36. Z nierówności trójkąta mamy: $AC < AB + BC$, $BD < BC + CD$, $EC < CD + DE$, $DA < DE + EA$ i $EB < EA + AB$. Po dodaniu tych nierówności stronami otrzymujemy sumę długości przekątnych mniejszą od podwojonego obwodu tego pięciokąta. I dalej: $AF + BF > AB$, $BG + CG > BC$, $CH + DH > CD$, $DK + EK > DE$ i $EL + AL > EA$. Nierówności te, dodane do siebie stronami, prowadzą do nierówności:

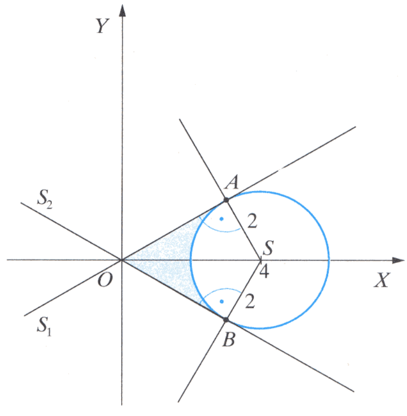


$(AF + GC) + (BG + HD) + (CH + KE) + (DK + LA) + (EL + FB) >$
$> AB + BC + CD + DE + EA$. A ponieważ $AC > AF + GC$, $BD > BG + HD$, $CE > CH + KE$, $DA > DK + LA$, $EB > EL + FB$, więc $AC + BD + CE + DA + EB >$
$>(AF + GC) + (BG + HD) + (CH + KE) + (DK + LA) + (EL + FB) >$
$> AB + BC + CD + DE + EA$, skąd wynika, że
$AC + BD + CE + DA + EB > AB + BC + CD + DE + EA$. **1.39.** Zauważmy, że trójkąt ABC jest prostokątny; jego bok AC jest równoległy do osi OY, zaś bok BC – do osi OX. Rozpiętością tego trójkąta jest oczywiście długość wysokości h_c opuszczonej z wierzchołka kąta prostego. Obliczamy: $AB = \sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, $BC = 4$, $CA = 3$. Ze wzoru na pole trójkąta $\frac{1}{2} AB \cdot h_c = \frac{1}{2} AC \cdot BC$ otrzymujemy $h_c = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2{,}4$. **2.7.** $M = (1; -1)$; $R = 5$. **2.16.** 110°; 90°; 70°; 90°. **2.18.** $S = 6\pi$. **2.20.** Wybierzmy dowolną średnicę B_1B_2 tego okręgu. Ponieważ dla każdego $i = 1, 2, 3, 4, \ldots, 2002$ zachodzą nierówności $2 = B_1B_2 \leqslant A_iB_1 + A_iB_2$, więc dodając je stronami, otrzymamy nierówność . Wobec tego co najmniej jedna z sum w nawiasach jest nie mniejsza od 2002. Wystarczy zatem za B przyjąć którykolwiek z końców średnicy B_1B_2.
3.5. Niech $P = (x_0; y_0)$ należy do prostej $Ax + By + C_1 = 0$. Wtedy $Ax_0 + By_0 + C_1 = 0$. Stąd $Ax_0 + By_0 = -C_1$. Szukana odległość d jest odległością punktu P od prostej $Ax + By + C_2 = 0$. Zatem $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Istotnie więc $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. **4.1.** a) Prosta l przecina okrag s; b) Prosta l jest prostą zewnętrzną okręgu s; c) Prosta l jest styczną do okręgu s. **4.3.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 100$. **4.10.** Okręgami spełniającymi warunki zadania są okręgi o równaniach: $\left(x - \frac{35}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 64$; $\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{35}{4}\right)^2 = 64$; $\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{45}{4}\right)^2 = 64$;
$(x + 15)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 64$. **4.15.** $c = 25$ lub $c = -25$.

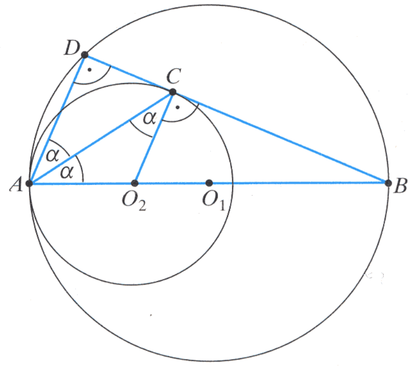
4.22. $\sphericalangle OA_1C = \frac{1}{2} \sphericalangle B_1CA_1 = 30°C$, $\sphericalangle CA_1E = \sphericalangle C_1A_1B = 60°$,
$\sphericalangle OA_1E = \sphericalangle OA_1C + \sphericalangle CA_1E = 90°$, c. n. d.



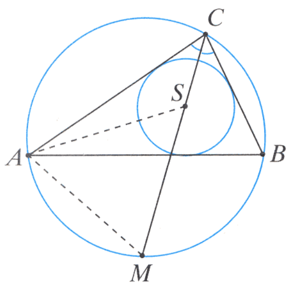
4.23. Równanie to jest równoważne równaniu $(x-4)^2 + y^2 = 2^2$, które opisuje okrąg o środku $(4; 0)$ i promieniu 2. Oznaczmy środek tego okręgu przez S, a punkty styczności przez A i B. Ponieważ $\frac{AS}{OS} = \frac{1}{2}$, więc $\sphericalangle AOS = 30^\circ$ i $\operatorname{tg}|\sphericalangle AOS| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. a) Styczne S_1 i S_2 mają więc równania: $y = \frac{1}{\sqrt{3}} x$ i $y = -\frac{1}{\sqrt{3}} x$. b) Pole zakreskowanej części jest równe różnicy pola czworokąta $AOBS$ i pola wycinka ABS. Pole tego czworokąta równe jest polu trójkąta równobocznego o boku 4, czyli $4\sqrt{3}$, zaś pole wycinka równe jest $\frac{1}{3}$ pola tego koła (dlaczego?), a więc $\frac{1}{3}\pi \cdot 4 = \frac{3}{4}\pi$, zatem pole rozważanej figury jest równe $4\sqrt{3} - \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{4}(16\sqrt{3} - 3\pi)$.

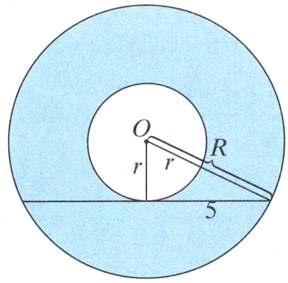


5.8. 6. **5.10.** $r = \frac{R}{4}$. **5.11.** $r = \frac{a}{6}$.
5.16. Zauważ, że $\sphericalangle ADB = 90°$; $\sphericalangle O_2CB = 90°$; $\sphericalangle O_2AC = \sphericalangle O_2CA$; gdyż trójkąt O_2AC jest równomierny. Ponieważ $AD \parallel O_2C$, więc $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACO_2$. Skoro jednak $\sphericalangle ACO_2 = \sphericalangle O_2AC$ więc $\sphericalangle O_2AC = \sphericalangle CAD$. Istotnie więc prosta AC jest dwusieczną $\sphericalangle BAD$.

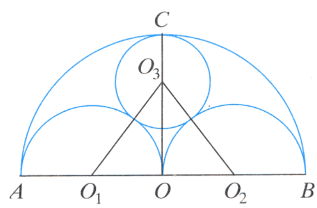


5.23. 40. **5.24.** 19,2 lub $3\frac{1}{3}$. **5.26.** $\frac{a \cdot d}{2}$. **5.27.** $\frac{m}{2\pi}$.
5.30. Oznaczmy przez r i R promienie tych okręgów. Wówczas otrzymany pierścień kołowy ma pole równe $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$ (na mocy twierdzenia Pitagorasa).

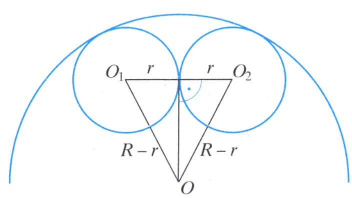




5.31. Przyjmijmy oznaczenia jak na rycinie obok. Wówczas z treści zadania wynika, że $AB = 16$ cm, $AO = OB = OC = 8$ cm, $O_1O = OO_2 = 4$ cm. Niech r będzie promieniem okręgu stycznego do trzech zakreślonych okręgów, zaś O_3 – jego środkiem. Ponieważ trójkąt $O_1O_2O_3$ jest równoramienny, więc odcinki O_3O i O_1O_2 są do siebie prostopadłe. W trójkącie prostokątnym O_1OO_3 zachodzi związek $O_1O_3^2 = O_1O^2 + OO_3^2$, czyli równanie $(4+r)^2 = 16 + (8-r)^2$, którego rozwiązaniem jest $r = \frac{8}{3}$. A zatem promień okręgu stycznego do trzech zakreślonych okręgów ma długość $\frac{8}{3}$.

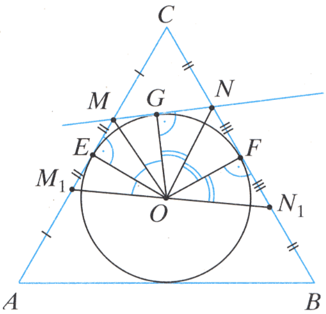


5.32. Oznaczmy środki okręgów o promieniu r przez $O_1, O_2, \ldots, O_6$, a okręgu o promieniu R – przez O i rozważmy dwa okręgi spośród nich. Ponieważ środki $O_1, O_2, \ldots, O_6$ są wierzchołkami sześciokąta foremnego o boku długości $2r$, więc trójkąt OO_1O_2 jest równoboczny. Stąd wypływa równanie $2r = R - r$, którego rozwiązaniem jest $r = \frac{R}{3}$.

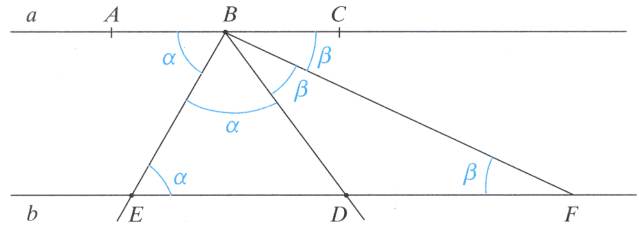


6.2. Kąty rombu wynoszą 60° i 120°. **6.3.** $\sphericalangle CDA = 30°$; trójkąt ΔADC – równoramienny. **6.5.** 144°; 18°; 18°.
6.6. $\sphericalangle CBD = 100°$; $\sphericalangle CDB = 40°$; $\sphericalangle BCD = 40°$. **6.7.** 90° **6.8.** $\sphericalangle BAC = 45°$. **6.17.** 54°. **6.18.** Punkt S jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta ABC. Wobec tego $\sphericalangle CAS = \sphericalangle BAS$ oraz $\sphericalangle ACM = \sphericalangle BCM = \sphericalangle BAM$ (z twierdzenia o kątach wpisanych i opartych na tym samym łuku). Zatem $\sphericalangle ASM = \sphericalangle CAS + \sphericalangle ACS = \sphericalangle BAS + \sphericalangle BAM = \sphericalangle SAM$, stąd wynika równoramienność trójkąta ASM, w którym $MS = MA$.

6.20. Oznaczmy punkty styczności tego okręgu z bokami CA i CB odpowiednio przez E i F (są to oczywiście środki tych boków, bo trójkąt ABC jest równoboczny). Punkt styczności prostej MN z okręgiem oznaczamy przez G. Ponieważ punkty C, E, O i F leżą na jednym okręgu (dwa przeciwległe kąty czworokąta $CEOF$ są proste), więc $\sphericalangle\, EOF = 120^\circ$. Stąd $\sphericalangle\, MON = 60^\circ$. Ponadto $\sphericalangle\, M_1OE + \sphericalangle\, N_1OF = 60^\circ$, wobec tego $\sphericalangle\, M_1ON_1 = 180^\circ$. Zatem punkty M_1, O, N_1 leżą na jednej prostej.



7.19. Spójrzmy na rycinę obok. Widzimy, że $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BED$ oraz $\sphericalangle CBF = \sphericalangle BFD$ (kąty naprzemianległe). Wobec tego i faktu, że BE i BF są dwusiecznymi odpowiednio kątów ABD i CBD, trójkąty BDE i BDF są równoramienne, w których $ED = BD$ i $BD = DF$. Stąd wynika równość odcinków ED i DF.



7.26. Jeżeli przez a, b i c oznaczamy długość boków, na które opuszczono wysokości h_a, h_b, h_c, tego trójkąta, to jego pole S wyrażają równości: $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, z których otrzymujemy $a = \frac{2S}{h_a}$, $b = \frac{2S}{h_b}$, $c = \frac{2S}{h_c}$. Podstawiając to do wzoru Herona na pole $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie $2p = a+b+c$, otrzymujemy

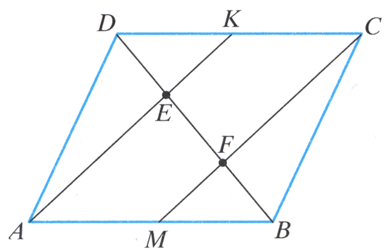
$$S = \sqrt{S\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\cdot S\cdot\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\cdot S\cdot\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\cdot S\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)} =$$

$$= S^2\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\cdot\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)},$$ skąd natychmiast wynika,

że $S = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\cdot\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}}$. **8.5.** $\frac{c(a-b)}{b}$. **8.6.** $3\frac{3}{4}$.

8.7. $\frac{1}{4}(a+b)\cdot h$. **8.9.** $\frac{bq+bp+ba-b^2}{a-b}$. **8.11.** AC' i AM; AB' i AN; HC' i $A'M$; HB' i $A'N$. **8.12.** $\frac{1}{3}$.

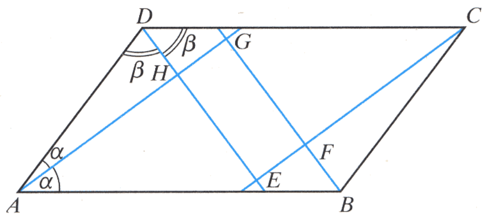
8.16. Ponieważ $AM = KC$ i $AM \parallel KC$, więc czworokąt $AMCK$ jest równoległobokiem. Stąd $AK \parallel MC$. Stosując twierdzenie Talesa do ramion kąta ABD, otrzymujemy, że $EF = FB$; bo $AM = MB$ i $MC \parallel AK$. Analogicznie stosując twierdzenie Talesa do ramion kata CDB, otrzymujemy, że $DE = EF$. Z tych równości wynika, że $DE = EF = FB$.



9.4. $4\sqrt{5}$; $8\sqrt{5}$. **9.5.** $90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}$; $90^\circ - \frac{\alpha-\beta}{2}$; $90^\circ + \frac{\alpha-\beta}{2}$; $90^\circ + \frac{\alpha+\beta}{2}$. **10.3.** $c = \frac{2ab}{a+b}$, $d = \frac{a^2+b^2}{a+b}$.

11.2. $\frac{112\cdot\sqrt{113}}{113}$. **11.7.** 90°. **11.12.** 20. **11.16.** $\frac{1333}{27}$.

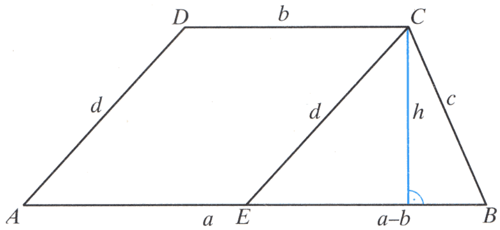
11.21. Ponieważ $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, więc $\alpha + \beta = 90^\circ$. Stąd $\sphericalangle EHG = \sphericalangle AHD = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$. Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle EFG = \sphericalangle FGH = \sphericalangle HEF = 90^\circ$.



11.28. Skorzystamy ze wzoru Herona na pole trójkąta. Wiadomo, że (*) $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Ponadto $2S_{EBC} = (a-b) \cdot h$, więc $h = \frac{2S_{EBC}}{a-b} = \frac{2}{a-b} \cdot S_{EBC} =$

$$= \frac{2}{a-b} \cdot \sqrt{\left(\frac{a-b+c+d}{2} - (a-b)\right)\left(\frac{a-b+c+d}{2} - c\right)\left(\frac{a-b+c+d}{2} - d\right) \cdot \frac{a-b+c+d}{2}} =$$

$= \frac{2}{a-b}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-b-c)(p-b-d)}$. Wracając z obliczonym h do wzoru (*), otrzymujemy żądany wzór.



Literatura pomocnicza

Przy opracowywaniu zbioru zadań skorzystano z następujących pozycji:

M. I. Abramowicz, M. T. Starodubcew, *Matiematika (Gieomietria i trigonomietriczeskije funkcji)*, Moskwa 1976.

B. Gdowski, E. Pluciński, *Zadania i testy z matematyki dla uczniów szkół średnich. Klasa I i II*, Warszawa 1995.

M. Hornowski, M. Pęczalski, *Zbiór zadań algebraicznych, klasy VIII–IX*, Warszawa 1962.

S. Kartasiński, M. Okołowicz, *Zbiór zadań maturalnych i egzaminacyjnych*, cz. I–II, Warszawa 1962–1967.

S. Kartasiński, M. Okołowicz, T. Stanisz, *Zbiór zadań maturalnych*, cz. IV–VI, Warszawa 1972–1979.

J. Kozicki, *Zbiór zadań algebraicznych, klasy X–XI*, Warszawa 1960.

P. S. Modenow, *Zbiór zadań z matematyki elementarnej*, Warszawa 1955.

W. W. Prasołow, *Zadaczi po płanimietrii*, Moskwa 1986.

S. Serafin, G. Treliński, *Geometria. Zbiór zadań z matematyki elementarnej*, Warszawa 1976.

W ramach serii „Szkoła XXI”
Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON proponuje zintegrowany zestaw dydaktyczny do nauki matematyki dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum.

na nowej maturze
GWARANCJA SUKCESU

Pozycje z zestawu do tomu 1:

- Program nauczania
zakresy podstawowy i rozszerzony

- Podręcznik
zakres podstawowy

- Podręcznik
zakres rozszerzony

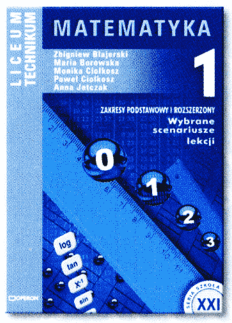
- Zeszyt ćwiczeń dla ucznia
zakres podstawowy

- Zbiór zadań linia 1
zakresy podstawowy i rozszerzony

- Zbiór zadań linia 2
zakresy podstawowy i rozszerzony

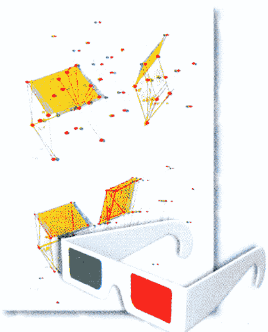
- Przewodnik dla nauczyciela
zakresy podstawowy i rozszerzony

- Wybrane scenariusze lekcji
zakresy podstawowy i rozszerzony

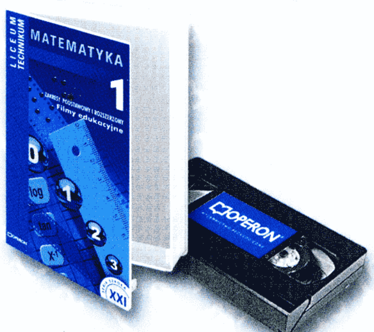


- Testy sprawdzające
zakresy podstawowy i rozszerzony

- Stereogramy część I
zakresy podstawowy i rozszerzony



- Filmy edukacyjne
zakresy podstawowy i rozszerzony



KONSULTOWANE w 5000 SZKÓŁ

ISBN 978-83-7461-604-1
9 788374 616041

OPERON
WYDAWNICTWO PEDAGOGICZNE

Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON
www.operon.pl
e-mail: info@operon.pl
tel. centrali 058 679 00 00