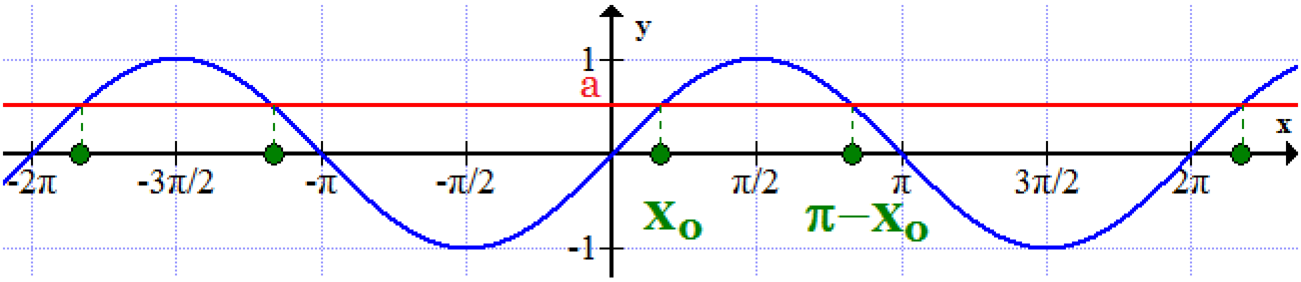
Proste równania trygonometryczne

1.**Równanie sinx=a**

Rozwiązaniami takiego równania są: $x = x_0 + 2k\pi \quad lub \quad x = \pi - x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in C$.

Spójrz na poniższy rysunek:

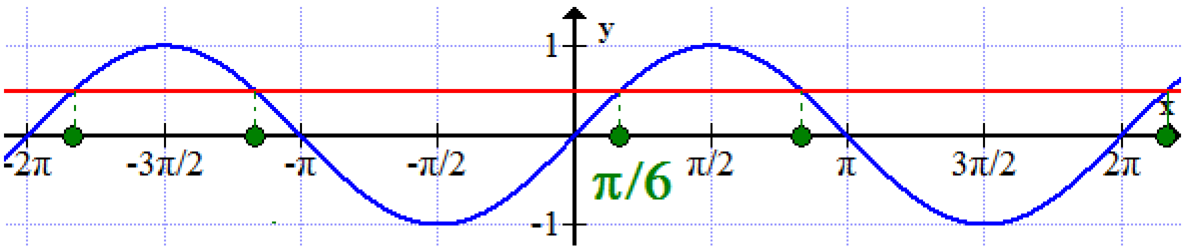


Zaznaczamy te argumenty dla których wykresy funkcji$y = a\ oraz\ y = \sin x$ się przecinają. Wystarczy, że odczytamy jeden z takich argumentów, czyli x_0 . Wówczas wszystkie rozwiązania tego równania, zapisujemy zgodnie ze wzorem rozwiązań podanym powyżej.

Przykład 1

Znajdź wszystkie rozwiązania równania:

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$



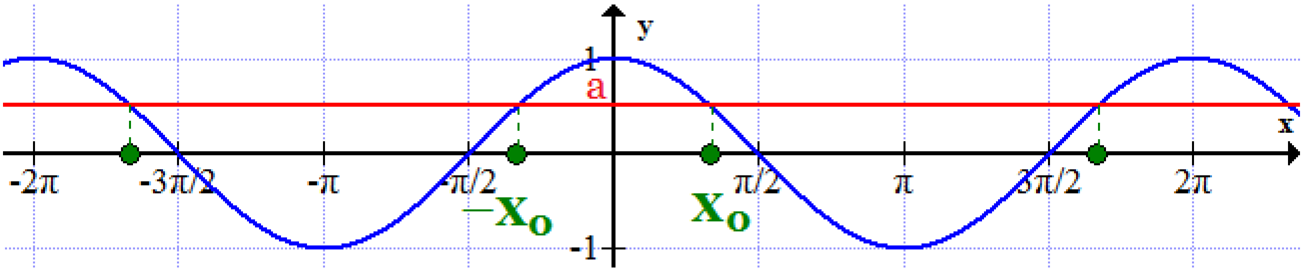
Z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych odczytujemy, że jednym z rozwiązań równania jest $x_0 = \frac{\pi}{6}$. Zapisujemy zatem wszystkie rozwiązania tego równania zgodnie z wzorami:

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad lub \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$,gdzie $k \epsilon C$.

2. **Równanie cosx = a**

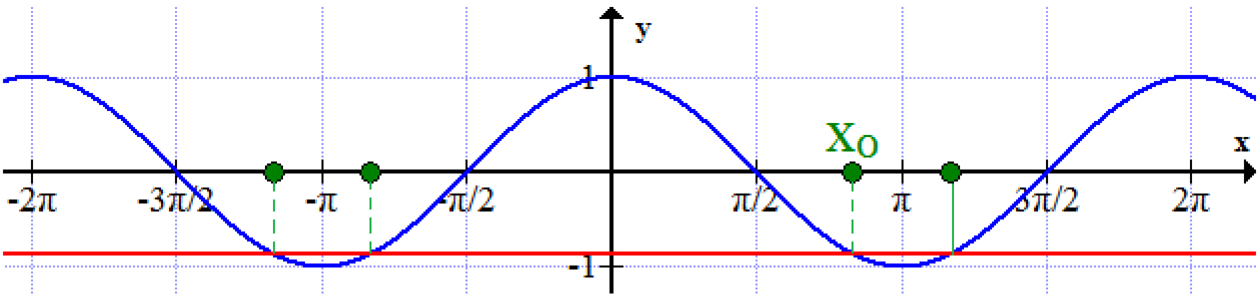
Rozwiązaniami takiego równania są: $x = x_0 + 2k\pi \quad lub \quad x = -x_0 + 2k\pi$,gdzie $k\epsilon C$.

Spójrz na poniższy rysunek:



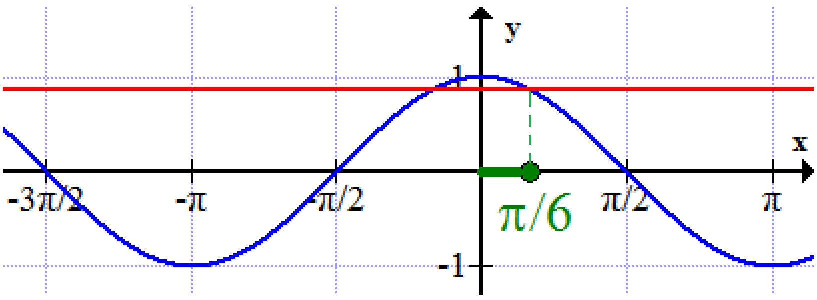
Zaznaczamy te argumenty dla których wykresy funkcji $y = a$ $oraz$ $y = \cos x$ się przecinają. Wystarczy, że odczytamy jeden z takich argumentów, czyli x_0 . Wówczas wszystkie rozwiązania tego równania, zapisujemy zgodnie ze wzorem rozwiązań podanym powyżej.

Przykład 1. Znajdź wszystkie rozwiązania równania: $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



Aby zapisać wszystkie rozwiązania tego równania, musimy znać przynajmniej jeden taki argument, dla którego wykresy obu funkcji się przecinają. W tabeli wartości funkcji trygonometrycznych możemy odczytać takie wartości tylko dla $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, gdzie wartości funkcji cosinus są dodatnie. Tutaj natomiast mamy odczytać argument, gdy wartości funkcji cosinus są ujemne. Co w takiej sytuacji? Jednym ze sposobów odczytania takiej wartości jest:

Z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych odczytujemy, że jednym z rozwiązań równania jest (patrz kolor zielony)

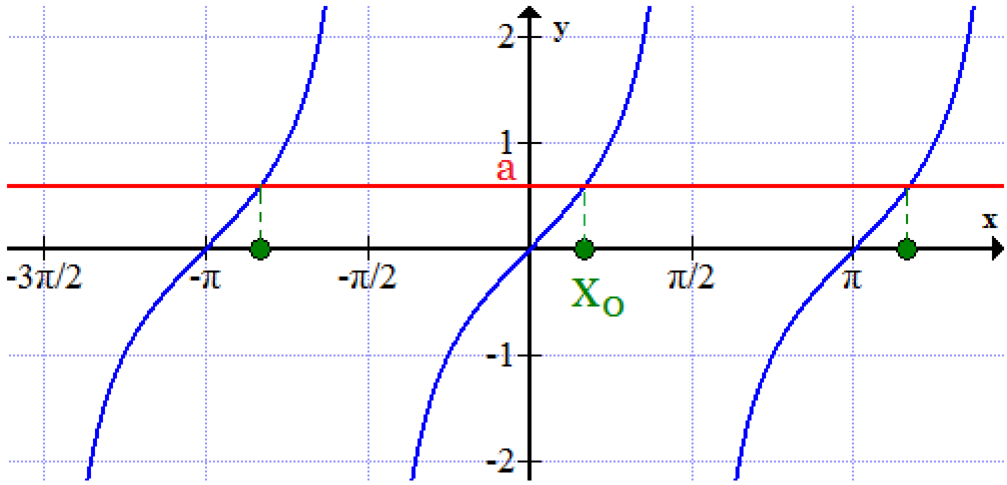


Oznacza, to że zawsze wykres $y = cosx$ przecina się z prostą o równaniu $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, w punkcie, który jest oddalony od wierzchołka cosinusoidy, gdzie wartość funkcji cosinus jest równa 1, o $\frac{\pi}{6}$. Na powyższym rysunku ten odcinek został zaznaczony na zielono. Teraz jak to się ma do rozwiązań równania ? Rozwiązania tego równania będziemy wyznaczać podobnie. Tyle, że będziemy teraz wyznaczać punkty, których odległość od wierzchołków cosinusoidy gdzie wartość funkcji cosinus jest równa -1, wynosi również $\frac{\pi}{6}$.

3. **Równanie tgx=a**

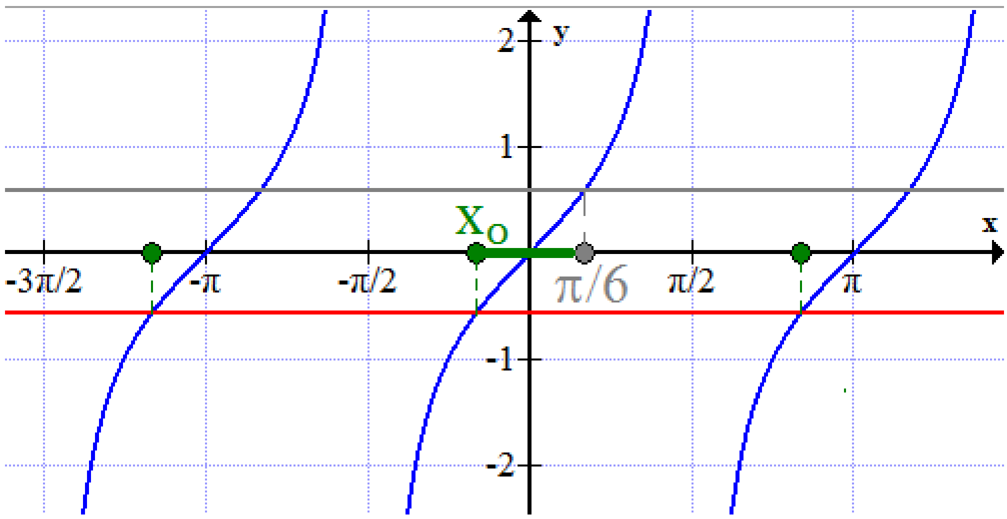
Rozwiązaniami takiego równania jest $x = x_0 + k\pi$, gdzie $k \in C$. .

Spójrz na poniższy rysunek:



Przykład 1.

Rozwiąż równanie: $tg\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Spójrz na rysunek:



Z tabeli wartości funkcji trygonometrycznych odczytujemy, że $tg\ \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

.

Musimy odczytać wartość argumentu . Ale odległość punktu x_0 od 0 jest równa$\frac{\pi}{6}$, czyli:

$$x_0 = -\frac{\pi}{6}$$

Zatem zbiór wszystkich rozwiązań to: $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$,gdzie $k \in C$.

4.Podsumowując::rozwiązania elementarnych równań trygonometrycznych zawiera tabela:

Równanie	**Dziedzina równania**	Rozwiązanie równania	**Przedział podstawowy**
$\sin x = a$ $a \in \langle -1,1 \rangle$	R	$x_1 = x_o + 2k\pi$ $x_2 = \pi - x_o + 2k\pi$	$x_o \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$
$\cos x = a$ $a \in \langle -1,1 \rangle$	R	$x_1 = x_o + 2k\pi$ $x_2 = -x_o + 2k\pi$	$x_o \in \langle 0, \pi \rangle$
$tg\, x = a$ $a \in R$	$R \setminus \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge k \in C\}$	$x = x_o + k\pi$	$x_o \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$
$ctg\, x = a$ $a \in R$	$R \setminus \{x = k\pi \wedge k \in C\}$	$x = x_o + k\pi$	$x_o \in (0, \pi)$

Uwaga. **Na stronach 5 – 10 są przykłady z dokładnym opisem rozwiązań.**

Proszę zrobić w zeszycie odpowiednią notatkę. Przeanalizować przykłady. Wykonać zadania **ze strony 271 zad.8.46**

Rozwiąż równanie: $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Rozwiązanie:

Jest to równanie elementarne, więc nie wymaga przekształceń. Po prawej stronie (w odróżnieniu od innych zadań) znajduje się liczba ujemna.

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_0 = -\frac{\pi}{3}$$

Najpierw znajdujemy taką wartość kąta x_0, dla której sinus ma wartość $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ nie znajdziemy w tabelce, ale jest tam $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Sprawdzamy, dla jakiego kąta x_0 sinus ma wartość $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Jest nim $\frac{\pi}{3}$. Szukany przez nas kąt ma wartość $-\frac{\pi}{3}$, a to dlatego, że sinus jest funkcją nieparzystą i $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Znalezioną wartość kąta wstawiamy do wzoru na serie rozwiązań dla sinusa.

$$x = x_0 + 2k\pi$$

lub

$$x = \pi - x_0 + 2k\pi,\ k \in C$$

Czyli

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

lub

$$x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi,\ k \in C$$

Ostatecznie:

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in C,$$

czyli

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi,\ k \in C$$

Odpowiedź

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi,\ k \in C$$

Rozwiąż równanie: $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Jest to równanie elementarne (podstawowe), które nie wymaga przekształceń.

Najpierw znajdujemy w tabelce taką wartość kąta x_0 dla której sinus ma wartość $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Kątem tym jest $\frac{\pi}{4}$

Korzystamy ze wzorów, $\sin x = \sin x_0$, czyli:

$x = x_0 + 2k\pi$

lub

$x = \pi - x_0 + 2k\pi,\ k \in C$

Rozwiązanie:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$x = x_0 + 2k\pi$$

lub

$$x = \pi - x_0 + 2k\pi,\ k \in C$$

czyli

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in C$$

ostatecznie:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in C$$

Odpowiedź

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in C$$

Rozwiązanie:

$$2\sin x = -1 \quad /:2$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$x_0 = -\frac{\pi}{6}$$

$$x = x_0 + 2k\pi \text{ lub } x = \pi - x_0 + 2k\pi,\ k \in C.$$

Równanie to trzeba przekształcić, dzieląc stronami przez 2.

Dopiero równanie $\sin x = -\frac{1}{2}$ jest elementarne.

Czyli

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi,$$

$k \in C.$

Najpierw szukamy takiego kąta x_0, dla którego sinus ma wartość $\frac{1}{2}$. Jest nim $\frac{\pi}{6}$

Nasz kąt ma wartość $-\frac{\pi}{6}$, ponieważ sinus jest funkcją nieparzystą, zatem

$\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

Znalezioną wartość kąta wstawiamy do wzoru rozwiązań sinusa.

Ostatecznie:

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in C,$$

czyli

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in C$$

Odpowiedź

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in C$$

Rozwiąż równanie: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Rozwiązanie:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$x = -x_0 + 2k\pi$$

lub

$$x = x_0 + 2k\pi,\ k \in C$$

Czyli

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{lub } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in C$$

Jest to równanie elementarne, nie wymaga przekształceń. Szukamy takiej wartości kąta x_0, dla której cosinus ma wartość $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Kątem tym jest $\frac{\pi}{4}$

Teraz znalezione x_0 wstawiamy do wzorów rozwiązań dla równania cosi $x = \cos x_0$:

$x = -x_0 + 2k\pi$, lub

$x = x_0 + 2k\pi$, $k \in C$

Odpowiedź

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in C$$

Rozwiąż równanie: $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Rozwiązanie:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_0 = \frac{5}{6}\pi$$

$$x = -x_0 + 2k\pi$$

lub

$$x = x_0 + 2k\pi,\ k \in C$$

Czyli

$$x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

lub

$$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in C$$

Odpowiedź

$$x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \text{ lub}$$

$$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in C$$

Jest to równanie elementarne, nie wymaga przekształceń. Po prawej jest liczba ujemna, zatem należy postąpić w następujący sposób. Najpierw szukamy takiego kąta, dla którego cosinus przyjmuje wartość $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Takim kątem jest $\frac{\pi}{6}$

Ponieważ po prawej stronie równania mamy liczbę ujemną, należy znalezione $\frac{\pi}{6}$ **odjąć od** π, czyli $\pi - \frac{\pi}{6}$.

Wynika to ze wzorów redukcyjnych (tak postępujemy w przypadku cosinusa, bo cosinus jest funkcją parzystą i nie możemy postąpić tak, jak przy sinusie).

Zgodnie ze wzorami redukcyjnymi mamy

$$\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

ale $2\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

zatem

$$x_0 = \frac{5}{6}\pi$$

Teraz znalezioną wartość $x_0 = \frac{5}{6}\pi$ wstawiamy do wzorów rozwiązań cosinusa

$$x = -x_0 + 2k\pi,\ x = x_0 + 2k\pi,\ k \in C$$

Rozwiąż równanie: ctg $\frac{3}{4}x = \sqrt{3}$

Rozwiązanie:

$$\operatorname{ctg}\frac{3}{4}x = \sqrt{3} \qquad \text{Zał.: } \frac{3}{4}x \neq k\pi \ / \cdot \frac{4}{3}$$

$$x_0 = \frac{\pi}{6} \qquad x \neq \frac{4}{3}k\pi,\ k \in C$$

$$\frac{3}{4}x = x_0 + k\pi,\ k \in C$$

$$\frac{3}{4}x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad / \cdot \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{\cancel{6}_3} \cdot \frac{\cancel{4}^2}{3} + \frac{4}{3} \cdot k\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{9} + \frac{4}{3}k\pi,\ k \in C$$

Jest to równanie elementarne.
Szukamy takiego kąta, dla którego cotangens ma wartość $\sqrt{3}$. Jest to kąt $\frac{\pi}{6}$.

Wstawiamy tę wartość do wzoru rozwiązań dla cotangensa.
Następnie rozwiązujemy równanie, liniowe mnożąc obie strony przez $\frac{4}{3}$.

Odpowiedź

$$x = \frac{2\pi}{9} + \frac{4}{3}k\pi,\ k \in C$$