This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Jest to cyfrowa wersja książki, która przez pokolenia przechowywana byla na bibliotecznych pólkach, zanim zostala troskliwie zeskanowana przez Google w ramach projektu światowej biblioteki sieciowej.

Prawa autorskie do niej zdążyly już wygasnąć i książka stala się częścią powszechnego dziedzictwa. Książka należąca do powszechnego dziedzictwa to książka nigdy nie objęta prawami autorskimi lub do której prawa te wygasly. Zaliczenie książki do powszechnego dziedzictwa zależy od kraju. Książki należące do powszechnego dziedzictwa to nasze wrota do przeszlości. Stanowią nieoceniony dorobek historyczny i kulturowy oraz źródlo cennej wiedzy.

Uwagi, notatki i inne zapisy na marginesach, obecne w oryginalnym wolumenie, znajdują się również w tym pliku – przypominając dlugą podróż tej książki od wydawcy do biblioteki, a wreszcie do Ciebie.

Zasady użytkowania

Google szczyci się wspólpracą z bibliotekami w ramach projektu digitalizacji materialów będących powszechnym dziedzictwem oraz ich upubliczniania. Książki będące takim dziedzictwem stanowią wlasność publiczną, a my po prostu staramy się je zachować dla przyszlych pokoleń. Niemniej jednak, prace takie są kosztowne. W związku z tym, aby nadal móc dostarczać te materialy, podjęliśmy środki, takie jak np. ograniczenia techniczne zapobiegające automatyzacji zapytań po to, aby zapobiegać nadużyciom ze strony podmiotów komercyjnych.

Prosimy również o:

- Wykorzystywanie tych plików jedynie w celach niekomercyjnych
  Google Book Search to usluga przeznaczona dla osób prywatnych, prosimy o korzystanie z tych plików jedynie w niekomercyjnych celach prywatnych.
- Nieautomatyzowanie zapytań
  Prosimy o niewysylanie zautomatyzowanych zapytań jakiegokolwiek rodzaju do systemu Google. W przypadku prowadzenia badań nad tlumaczeniami maszynowymi, optycznym rozpoznawaniem znaków lub innymi dziedzinami, w których przydatny jest dostęp do dużych ilości tekstu, prosimy o kontakt z nami. Zachęcamy do korzystania z materialów będących powszechnym dziedzictwem do takich celów. Możemy być w tym pomocni.
- Zachowywanie przypisań
  Źnak wodny"Google w każdym pliku jest niezbędny do informowania o tym projekcie i ulatwiania znajdowania dodatkowych materialów za pośrednictwem Google Book Search. Prosimy go nie usuwać.
- Przestrzeganie prawa
  W każdym przypadku użytkownik ponosi odpowiedzialność za zgodność swoich dzialań z prawem. Nie wolno przyjmować, że skoro dana książka zostala uznana za część powszechnego dziedzictwa w Stanach Zjednoczonych, to dzielo to jest w ten sam sposób traktowane w innych krajach. Ochrona praw autorskich do danej książki zależy od przepisów poszczególnych krajów, a my nie możemy ręczyć, czy dany sposób użytkowania którejkolwiek książki jest dozwolony. Prosimy nie przyjmować, że dostępność jakiejkolwiek książki w Google Book Search oznacza, że można jej używać w dowolny sposób, w każdym miejscu świata. Kary za naruszenie praw autorskich mogą być bardzo dotkliwe.

Informacje o usłudze Google Book Search

Misją Google jest uporządkowanie światowych zasobów informacji, aby staly się powszechnie dostępne i użyteczne. Google Book Search ulatwia czytelnikom znajdowanie książek z calego świata, a autorom i wydawcom dotarcie do nowych czytelników. Caly tekst tej książki można przeszukiwać w internecie pod adresem http://books.google.com/

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: ____________________

AAN9465
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/15/88 R/DT 07/15/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG84-B51514
035/2: : |a (CaOTULAS)160099833
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Dickstein, Samuel, |d 1851-
245:00: |a Pojecia i metody matematyki. |c Napisa S. Dickstein. |n Tom I. |p Czesc I. Teorya dzia an.
260: : |a Warszawa, |b Wydawnictwo redakcyi, "Prac matematyczno-fizycznych," |c 1891.
300/1: : |a vi, 268 p. |b incl. tables. |c 25 cm.
500/1: : |a No more published.
650/1: 0: |a Mathematics |x Philosophy
998: : |c KLB |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: ____________
Camera Operator: ____________

Hosted by Google

Hosted by Google

Hosted by Google

POJĘCIA I METODY MATEMATYKI.

Hosted by Google

Hosted by Google

Alexander Ziwet

POJĘCIA I METODY MATEMATYKI.

NAPISAŁ

S. DICKSTEIN.

Matematyka jest to królowa wszystkich nauk: jéj oblubieńcem jest prawda, a prostość i oczywistość jéj strojem.

Jan Śniadecki.

TOM PIERWSZY.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

TEORYA DZIAŁAŃ.

WARSZAWA.
WYDAWNICTWO REDAKCYI
„*PRAC MATEMATYCZNO - FIZYCZNYCH*“.
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA.
1891.

Hosted by Google

Дозволено Цензурою. Варшава, 24 Апрѣля 1891 г.

Papier z papierni w Jeziornie.

Druk J. Sikorskiego pod zarządem A. Saładyckiego, w Warszawie, Warecka 14.
Składał W. Skrzycki.

Hosted by Google

SPIS RZECZY.

WSTĘP.

Hosted by Google

ROZDZIAŁ IV.

LICZBY UJEMNE.

ROZDZIAŁ V.

LICZBY ZESPOLONE ZWYCZAJNE.

ROZDZIAŁ VI.

LICZBY ZESPOLONE WYŻSZE.

ROZDZIAŁ VII.

FUNKCYE CAŁKOWITE.

Hosted by Google

WSTĘP.

> Die Mathematik ist in ihrer Entwickelung völlig frei und nur an die selbstredende Rücksicht gebunden, dass ihre Begriffe sowohl an sich wiederspruchlos sind als auch in festen durch Definitionen geordneten Beziehungen zu den vorher gebildeten bereits vorhandenen und bewährten Begriffen stehen.
>
> *G. Cantor.*

1. PRZEDMIOT MATEMATYKI.

Bogactwo treści najściślejszéj wiedzy ludzkiéj, jaką jest Matematyka, stanowiąca świat odrębny pojęć, odźwierciadlających w sobie wiekową pracę ducha ludzkiego nad trudnemi zagadnieniami bytu, nie da się zawrzeć w kilku słowach wstępnego określenia; przytaczając więc niżéj niektóre z częściej napotykanych określeń Matematyki, musimy zastrzedz z góry, że żadne z nich nie jest wystarczającém, bo właściwe zadanie nauki dopiero przy wykładzie jéj pojęć i metod najlepiéj uwydatnić się daje.

Matematyka jest nauką o wielkościach — oto najpospolitsza z napotykanych definicyj. Jest ona wszakże niezupełną, bo nie wszystkie twory Matematyki są wielkościami i nie we wszystkich jéj badaniach idzie o związki pomiędzy wielkościami. [O wielkości mówimy obszerniéj w następnym artykule]. Nauka kombinacyi np. nie ma nic do czynienia bezpośrednio z wielkościami, a do takich np. tworów, jak liczby urojone i nadurojone, nie można wprost stosować pojęcia wielkości. I Geometrya w wielu badaniach swych obywa się zupełnie bez pojęcia miary wielkościowéj [1].

Hosted by Google

Do następujących typów głównych sprowadzają się wszystkie twory lub *formy* badań matematycznych[2]. Do pierwszego typu należą *liczby*, a więc przedewszystkiém liczby całkowite, stanowiące zasadniczy materyał Arytmetyki, następnie wszystkie inne rodzaje liczb, które drogą uogólnienia działań powstają, a więc liczby ułamkowe, ujemne, urojone, nadurojone, liczby idealne Kummera, "ideały" Dedekinda; liczby nieskończenie wielkie i nieskończenie małe, nadskończone (transfinite) G. Cantora, wymierne i niewymierne, algebraiczne i przestępne. Daléj należą tu funkcye matematyczne, wyobrażające w jedném pojęciu szeregi stanów, przez jakie przechodzą liczby, zmieniające swą wartość w zależności od innych liczb.

Do typu drugiego należą *formy geometryczne*, t. j. ciała geometryczne trójwymiarowe, formy dwu i jednowymiarowe, punkt geometryczny, oraz ogólniejsze formy rozmaitościowe czyli przestrzenie wielowymiarowe; daléj układy czyli kombinacye rozmaitych form, i formy, wyobrażające w jedném pojęciu szeregi stanów, przez jakie przechodzi pewna forma geometryczna lub układy podobnych form.

Do trzeciego wreszcie typu należą rozmaite formy matematyczne, utworzone przy badaniu zjawisk, jak formy foronomiczne, mechaniczne, fizyczne i t. p.

Na pierwszy rzut oka zdaje się, że objęcie tych różnorodnych przedmiotów jedną nauką odbiera téjże charakter jednolitości: liczby bowiem zdają się być czémś zupełnie różném od form geometrycznych, te zaś różnią się zasadniczo od tworów, cechujących zjawiska. Rozwój nauki, jak to zobaczymy, zbliża wszakże do siebie te różnorodne początkowo dziedziny.

I tak pojęcie liczby przez uogólnianie prowadzi kolejno od liczb całkowitych dodatnych z jednéj strony do urojonych i nadurojonych, z drugiéj zaś strony do niewymiernych i przestępnych. Tworzenie liczb urojonych i nadurojonych odpowiada wprowadzeniu do nauki o liczbach wymiarowości, stanowiącéj cechę tworów geometrycznych. Tworzenie zaś liczb niewymiernych i przestępnych i w ogóle uważanie całego *continuum* liczb odpowiada *ciągłości*, uważanéj za cechę pierwotną form geometrycznych. Tak więc przy pomocy liczb dają się przedstawić formy geometryczne i obie różne napozór dziedziny jednoczą metody badania form analitycznych. Na odwrót, formy geometryczne służyć mogą do przedstawienia wła-

Hosted by Google

ściwości form liczbowych. Daléj znów badanie zjawisk prowadzi do konstrukcyj analitycznych i geometrycznych.

Prócz tego, jedność i jednolitość Matematyki jest ugruntowaną na jednolitości genezy psychologicznéj jéj form. Formy matematyczne powstają przedewszystkiém za·pomocą abstrakcyi z przedmiotów doświadczenia, po usunięciu wszelkiéj ich treści specyficznéj, z zachowaniem wszakże syntezy tych aktów świadomości, które współdziałały przy abstrakcyi. Tak np. wielość przedmiotów doprowadza przez abstrakcyą do liczb całkowitych, gdy odwracając uwagę od wszelkich właściwości przedmiotów, jedynie przy pomocy syntezy aktów, które przy abstrakcyi współdziałały, tworzymy formy, będące odbiciem umysłowém wielości spostrzeżonéj. Od ciał fizycznych o różnéj postaci abstrakcya doprowadza do form geometrycznych, które są właśnie ową postacią, od treści oderwaną.

Taki sam proces doprowadza do pojęcia przestrzeni, obejmującéj w sobie wyobrażalne utwory geometryczne, a także do pojęcia czasu, będącego formą następstwa zjawisk.

Opisany wyżéj proces nie wystarcza wszakże do tworzenia form wszystkich; albowiem umysł z jednéj strony kombinuje i łączy formy; z drugiéj zaś strony uogólnia formy raz utworzone i dochodzi tym sposobem do form nowych, nie będących bezpośrednio odwzorowaniem przedmiotów lub zjawisk. Tak np. od układu liczb rzeczywistych o jednéj jednostce zasadniczéj przechodzi do liczb urojonych lub zespolonych o dwu lub więcéj takich jednostkach; przestrzeń trójwymiarową uogólnia, tworząc rozmaitość wielowymiarową. Postępowanie w tym razie jest tak samo uzasadnioném jak i abstrakcya, która z przestrzeni trójwymiarowéj prowadzi do dwu lub jednowymiarowéj. Wprowadza ono wprawdzie twory niewyobrażalne wprost, ale wyobrażalność, w zwykłém znaczeniu tego wyrazu, nie stanowi zasadniczéj cechy pojęć matematycznych. Pojęcia bez poglądu są puste, powiedział Kant, ale w tym, jak i w innych przypadkach, poglądowość czyli wyobrażalność dostatecznie wynagradza ogół tych cech, któremi dane pojęcie określamy. Tworzenie form podobnych, ogólniejszych od form pierwotnych, przez abstrakcyą utworzonych, stanowi właśnie cechę właściwą Matematyce i jest jednym z najważniejszych czynników jéj rozwoju.

Winniśmy wprawdzie na samym wstępie zaznaczyć, co dokładniéj przedstawioném będzie w dalszym wykładzie, że uogólnianie pojęć

Hosted by Google

matematycznych może być podjęte dwojako. Można bowiem z jednéj strony uważać pojęcia uogólnione, jako odpowiadające formom istotnie nowym, mającym w dziedzinie badania takie same prawa bytu, jakie mają pojęcia form pierwotnie wprowadzonych; albo też można widzieć w formach uogólnionych tylko nowe związki, w jakie wprowadzamy formy pierwotne, czyli nowe a raczéj uogólnione działania. Tak np. można uważać liczby ujemne, urojone, niewymierne i t. p. za nowe rodzaje liczb, mające taką samą samodzielność, jaką mają liczby całkowite; przestrzenie czyli rozmaitości wielowymiarowe można uważać za uprawnione z przestrzenią zwykłą, euklidesową; albo téż widzieć w nowych liczbach formy, pod jakiemi liczby całkowite dodatnie wchodzą do związków i do rozumowania, a w nowych przestrzeniach —przestrzeń zwykłą, przy przyjęciu za element nie punktu, lecz innego tworu geometrycznego. Lecz przy jednym zarówno jak i przy drugim sposobie uważania, Matematyka wznosi się po nad dziedzinę pierwotną, uogólniając raz pojęcie tworów, drugi raz pojęcie działań. Wybór pomiędzy jednym a drugim sposobem uważania zależy od poglądu teoretyczno-poznawczego na podstawy Matematyki. W saméj Matematyce oba sposoby uważania są równouprawnione i każdy z nich w sposób sobie właściwy prowadzi do wyników prawdziwych.

Ta dowolność tworzenia form w Matematyce nasuwa nawet pogląd, że w téj nauce umysł sam sobie stwarza przedmioty badania, bez żadnego udziału doświadczenia, że, jak powiada H. Grassmann:[3] "Matematyka jest nauką o bycie szczególnym, który stał się przez myślenie", i że tém różni się od nauk realnych, których przedmiotem jest byt zewnętrzny, przeciwstawiający się myśleniu. Winniśmy wprawdzie nadmienić, że to określenie stosuje Grassmann do Matematyki czystéj, z któréj wyłącza Geometryą, zaliczając ją wraz z Foronomią i Mechaniką do nauk stosowanych (porównaj art. 4.).

Kant[4] uważa formy matematyczne za konstrukcye „wewnątrz czasu", gdy są liczbami, lub "wewnątrz przestrzeni", gdy są formami geometrycznemi. Przestrzeń i czas są według niego "formami poglądu a priori", od wszelkiego doświadczenia niezależnemi; stąd twierdzenia Matematyki zasadnicze są prawami koniecznemi i powszechnemi. Z tego wszakże, że wszystkie zjawiska uważamy, jako zachodzące w przestrzeni i w czasie, nie wynika jeszcze, aby formy

Hosted by Google

matematyczne były tylko konstrukcyami wewnątrz przestrzeni i czasu; przeciwnie pojęcia matematyczne są ogólniejsze od pojęcia przestrzeni i czasu: czas jest jednym z przykładów formy jednowymiarowéj, przestrzeń przykładem formy trójwymiarowéj. Liczenie odbywa się w czasie, ale liczba — wytwór liczenia — nie ma w sobie nic z pojęcia czasu; formy geometryczne wyobrażamy sobie w przestrzeni, ale pojęcie rozmaitości wielowymiarowéj nie koniecznie mieć winno cechy przestrzenne.

Wroński, którego poglądy na całość badań matematycznych postaramy się w książce naszéj przedstawić, w podstawowém swém dziele o filozofii Matematyki [5] w tworzeniu jéj zasad idzie za Kantem. Matematyką nazywa on naukę o wielkości, uważanéj intuicyjnie [poglądowo]; wielkością jest u niego, jak i u Kanta, "stan przedmiotu uważanego z punktu widzenia syntezy tego, co zawiera w sobie jednorodnego". Inaczéj mówiąc, przedmiotem Matematyki jest forma t. j. sposób bytu natury czyli świata zewnętrznego, gdy przeciwnie treść tego bytu jest przedmiotem Fizyki. Formą świata zewnętrznego, powstającą ze stosowania praw transcendentalnych zmysłowości do zjawisk, danych a posteriori, jest czas dla wszystkich, a przestrzeń dla przedmiotów zewnętrznych. Prawa czasu i przestrzeni są prawdziwym przedmiotem Matematyki. Prawa te mogą być uważane in concreto lub in abstracto; w pierwszym razie stanowią przedmiot Matematyki czystéj, w drugim — stosowanéj. Stosując do czasu, uważanego objektywnie za należący do zjawisk fizycznych, danych a posteriori, prawa transcendentalne poznania, a mianowicie prawo *ilości*, wzięte ogólnie, dojdziemy do pojęcia następstwa momentów, a w najwyższéj tegoż abstrakcyi do liczby. Stosując znowu to samo prawo do poglądu przestrzeni, jako należącéj do zjawisk fizycznych, danych a posteriori, dojdziemy do pojęcia "łączności" (obokleżności, conjonction) punktów, a w najwyższéj tegoż abstrakcyi do pojęcia rozciągłości. Liczba i rozciągłość są więc ostatecznie przedmiotem Matematyki. To określenie Wrońskiego mogłoby być wystarczające i w dzisiejszym stanie wiedzy, jeżeli w niém liczbę uważać będziemy nie za związaną z następstwem momentów czasu, lecz jako formę zupełnie od czasu niezależną; pod nazwą zaś rozciągłości rozumieć będziemy nietylko formy przestrzenne ale i ogólnie rozmaitości wielowymiarowe.

Twórca filozofii pozytywnéj, Comte, współczesny Wrońskiemu, zbyt jednostronnie pojmował zadanie Matematyki. I Comte'a wprawdzie nie zadawalniało określenie Matematyki, jako nauki o wielkościach; niedostateczność wszakże określenia widział on nie w tém, że pojęcie wielkości nie obejmuje wszystkich pojęć matematycznych, lecz w tém, że nie wskazuje, o co w Matematyce idzie przy badaniu wielkości. Comte widzi cel Matematyki w *mierzeniu* wielkości, nie w mierzeniu wszakże zwykłém i bezpośredniém, które nie może stanowić jeszcze nauki, lecz w mierzeniu pośredniém, „w oznaczaniu jednych wielkości przez drugie, według związków ścisłych, jakie między niemi istnieją„ [6]. Dla Comte'a Matematyka nie ma właściwie odmiennego zadania od nauk fizycznych, które również szukają związku pomiędzy wielkościami, zachodzącemi w zjawiskach; tylko że zjawiska, badane przez Matematykę, są bardziéj proste, a przedmioty jéj oderwane.

Ograniczenie Matematyki do roli nauki niejako pomocniczéj dla badań fizykalnych odejmuje jéj charakter wiedzy niezależnéj, powstającéj i rozwijającéj się o siłach własnych przez samodzielne tworzenie pojęć, nie zawsze bezpośrednio związanych z przedmiotem doświadczenia. Matematyka w rzeczy saméj zajmuje w systemie wiedzy ludzkiéj stanowisko odrębne. Badając przedmioty tylko ze względu na ich własności formalne, albo, jak mówi Wundt [7], ze względu na *porządek*, a nie treść rozmaitości, danych w doświadczeniu, albo też, co na jedno wychodzi, ze względu na *funkcye intelektualne* przy spostrzeganiu przedmiotów, nie zaś ze względu na treść wrażeń zmysłowych, Matematyka jest *nauką formalną* i tém różni się od nauk doświadczalnych czyli realnych, w których do właściwości czysto formalnych przybywa szczególna *jakość* (qualitas) elementów, t. j. najprostszych części składowych rozmaitości. Stosunek Matematyki i nauk doświadczalnych określić można w ten sposób, że "pierwsza ma za przedmiot to, co w doświadczeniu jest według warunków formalnych *możliwém*, drugie to, co według formy i treści jest *rzeczywistém*„ [8]. Wyjaśnienie tego stosunku wskażą niejednokrotnie dalsze artykuły.

2. WIELKOŚĆ.

Nazwę wielkość spotykamy już u Euklidesa, według którego do wielkości zaliczą się formy geometryczne: linie, kąty, powierzch-

Hosted by Google

nie, ciała, oraz liczby całkowite, które mają następujące cechy wspólne: wielkości jednorodne można porównywać, dodawać, odejmować i dzielić na części. Według Hankela[9], pojęcie "wielkość„ nie potrzebuje wcale definicyi metafizycznéj, ale tylko wyjaśnienia. Wielkością nazywa on każdy przedmiot, który jest większy, mniejszy lub równy innemu przedmiotowi, który może być uwielokrotniony lub dzielony na części, albo, wyrażając się słowami Bolzano[10], "który należy do gatunku rzeczy, z których dwie którekolwiek M i N nie mogą mieć nigdy innego stosunku, jak ten, że są albo równe, albo jedna jest sumą zawierającą jednę z nich jako część". Szeroko rozwodzi się nad pojęciem wielkości P. Dubois-Reymond[11], którego wywody postaramy się tu streścić.

Nie wszystkie szeregi wyobrażeń, z jakiemi można wykonywać działania matematyczne, podpadają pod zwykłe określenie wielkości, t. j. nie wszystkie dają się porównywać liczebnie, jak np. długości lub ciężary. Wielkością matematyczną jest ogół (Inbegriff) następstwa takich tylko wyobrażeń, o którym powiedzieć można, że 1. każde pojedyńcze wyobrażenie ma w tém następstwie miejsce dostatecznie określone; 2. pomiędzy wielkościami danego następstwa lub też pomiędzy wyobrażeniami, należącemi do innych ustalonych następstw, istnieją związki, które mogą być kombinowane w nowe związki. Trzeba przyznać, że to określenie, będące abstrakcyjném przedstawieniem znanych cech każdéj wielkości, podlegającéj porównaniu z innemi, nie jest wcale jasném; zresztą nie zadawalnia ono i samego autora, który widzi w niém "produkt dyplomatycznéj sztuki definicyi, nie dający wcale poznać ani zakresu ani treści tak delikatnego i bogato rozwiniętego pojęcia wielkości„. Jak nie możemy poznać, powiada trafnie Dubois-Reymond, nowéj formy zwierzęcéj, oznaczając liczbę płaszczyzn, która ją w sobie zamyka, tak samo powyższa definicya nie daje nam poznać, czém jest wielkość matematyczna i czém różni się od wielkości niematematycznéj. Szuka przeto Dubois-Reymond tego pojęcia we wszystkich dziedzinach, w których je przypuszczalnie znaleźć może, i bada następnie, co wszystkie przypadki mają w sobie wspólnego.

W przeglądzie tym znajduje najprzód wielkość matematyczną w *liczbie*, jako w wielkości *przerywanéj*, która się wprawdzie różni zasadniczo od wielkości *ciągłéj*, jaką naprzykład widzimy w linii geometrycznéj, [o formach ciągłych i przerywanych mówić będziemy

Hosted by Google

w art 3.], ale różnicę tę usuwa powoli rozwój Matematyki, gdyż wielkość ciągła, aby mogła być mierzoną, poddaną być musi pod pojęcie liczbowe. Przykładem wielkości matematycznych ciągłych są długości, powierzchnie, objętości, ciężary, czas, prędkość, siła, ilość ciepła, natężenie światła, napięcie elektryczne, siła prądu elektrycznego itd. Typem wszystkich tych wielkości może być odcinek linii prostéj. Jak odcinki mogą być dodawane i dzielone na części, jak różnice odcinków, wielokrotności i części tychże nie zmieniają swéj natury, dają się porównywać, powiększać i zmniejszać, podobnie i każda z wymienionych wielkości te same własności posiada. Z tego powodu nazywa je wszystkie *wielkościami matematycznemi linearnemi*. Do tych wielkości należą, według niego, nie tylko wielkości, wzięte ze świata zewnętrznego, ale i takie, do których prowadzi badanie życia psychicznego, a więc np. wrażenia, jako stopniujące się w zależności od podrażnienia zewnętrznego. Cała dziedzina Psychofizyki opiera się właśnie na téj możliwości zaliczenia wielkości badanych do szeregu wielkości linearnych.

Do wielkości nielinearnych, należących do dziedziny badania matematycznego, zalicza Dubois-Reymond przedewszystkiém wielkości, "powstające ze stosowania działań matematycznych po za granicami naturalnéj ich stosowalności„, albo przy pomocy analogij, "którym nie przypada w udziale żadne liczbowe znaczenie„, jak np. wielkości urojone, lub pojęcie "nieskończoności funkcyj„. Do pierwszych nie przypada bezpośrednio pojęcie większości lub mniejszości, które przenosimy do ich modułu[12], przy drugich o większości lub mniejszości rozstrzyga nie różnica lecz iloraz. Jeżeli mimo to te formy matematyczne nazywamy wielkościami, to tylko dlatego, że możemy wykonywać nad niemi *rachunki* tak samo jak nad wielkościami linearnemi, rozumie się, przy pewném ograniczeniu lub modyfikacyi zasadniczych praw działań. Takie wielkości nielinearne nazywa Dubois-Reymond *analitycznemi*.

Jest wreszcie trzecia kategorya wielkości, różna zupełnie od poprzednich i nie nadająca się, według Dubois-Reymonda, do traktowania matematycznego. Nazywa je on *wielkościami giernemi* [Spielgrössen]; w tych do elementu, który poddaje się rachunkowi, przybywa element niematematyczny "błędów myślenia„.

Istotne własności wielkości linearnych zamyka Dubois-Reymond w następujących określeniach:

Hosted by Google

I. Wielkości matematyczne linearne są albo równe albo nierówne. Równemi są wtedy, gdy ich objawy zmysłowe sprawiają zawsze to samo wrażenie przy tych samych warunkach. Jedna wielkość jest większa od drugiéj, gdy obraz zmysłowy jednéj może być zmieniony za pomocą "wyczerpania„ [t. j. przez kolejne zmniejszanie] w taki sposób, że zawrze w sobie całkowicie obraz drugiéj; ale nie odwrotnie.

II. Żadna szczególna z wielkości linearnych danego gatunku [t.j. żaden odcinek z pomiędzy możliwych odcinków], nie posiada sam przez się pierwszeństwa przed innemi, i dlatego nie posiadamy wyobrażenia kresu [granicy], koniecznego tak dla małości jak i wielkości [Grossheit] któréjkolwiek z nich.

III. Dwie lub więcéj wielkości tego samego gatunku, dodane do siebie, dają wielkość tego samego gatunku, większą od każdéj z części składowych. Każda wielkość może być dzielona na dowolną liczbę części, z których każda jest mniejsza od wielkości danéj.

IV. Jeżeli jedna wielkość jest większa od drugiéj, to istnieje zawsze trzecia wielkość tego samego gatunku, która, dodana do drugiéj, daje pierwszą.

V. Wielkości równe lub nierówne, z których najmniejsza nie ma być mniejszą od wielkości dowolnie małéj, można zawsze w dostatecznéj liczbie połączyć tak, aby otrzymać wielkość, nie mniejszą od jakiéjkolwiek wielkości dowolnéj tego samego gatunku.

VI. Wielkości dają się niezliczonemi sposobami dzielić na mniejsze; między temi sposobami wyróżnia się ten, w którym wielkość rozpada się na dwie, trzy i więcéj części równych. Dzielenie wielkości daje się prowadzić tak długo, dopóki wszystkie części nie staną się mniejszemi od wielkości dowolnie małéj. Lecz jakkolwiek daleko prowadzić będziemy w myśli ten podział, części otrzymywane będą zawsze tego samego gatunku, co dana wielkość.

Wyłożona w tych twierdzeniach teorya jest urobiona na podstawie doświadczenia i stosuje się przedewszystkiém do wielkości geometrycznych. Gdy idzie o formy matematyczne, ogólnie uważane, pojęcie ich równości lub nierówności nie może oczywiście opierać się na porównywaniu wrażeń zmysłowych, jak chce Dubois-Reymond, lecz musi być dane za pomocą określenia formalnego, takiego np., jakie znajdujemy u H. Grassmanna [13]. *Pojęciem wielkościowem,* według Grassmanna, nazywamy takie pojęcie, że dwa

Hosted by Google

podpadające pod nie przedmioty mogą być uważane za równe lub nierówne. Równemi nazywa on takie przedmioty, gdy w każdym sądzie [Aussage] jeden można zastąpić drugim. Należy to rozumieć w ten sposób, że gdy $A = B$, $B = C$, to stąd wynika $A = C$, i że tym sposobem A, B, C mogą się wzajem zastępować we wszelkich połączeniach czyli działaniach. Bez takiej podstawy żadna teorya działań nie byłaby wcale możliwą. Co się zaś tyczy określenia nierówności np. większości, to musi ona czynić zadość warunkowi: „Jeżeli $A > B$, $B \geqq C$, to $A > C$. Ale warunków tych dla równości i nierówności *bezpośrednio* do wszelkich form matematycznych stosować nie można, i dlatego przy każdém nowo wprowadzaném pojęciu przedmiot ten wymaga oddzielnego roztrząsania.

Podział wielkości na linearne i nielinearne jest zbyteczny, jeżeli dla przedmiotów badania matematycznego zachowamy ogólną nazwę formy, a wielkościami nazywać będziemy takie formy, do których potrafiliśmy zastosować pojęcia równości, większości i mniejszości.

Pytanie o możności stosowania działań i metod Matematyki do form, otrzymywanych z abstrakcyi przy badaniu przedmiotów i zjawisk świata zewnętrznego, a mianowicie określenie ich równości i nierówności, oraz sposób wprowadzania ich we wzajemne związki nie są tak proste, jak to z przykładów życia codziennego wydawać się może. Pytanie to wymaga gruntownego oświetlenia, opartego na wynikach teoryi ogólnéj działań matematycznych. Podjął je niedawno Helmholtz w rozprawie o liczeniu i mierzeniu [14].

Helmholtz uważa Arytmetykę czyli naukę o liczbach za metodę, zbudowaną na faktach czysto-psychologicznych, która uczy należytego używania układu "znaków„ [liczb] o nieograniczonéj rozciągłości i zdatnych do nieograniczonéj subtelności [Verfeinerung]. Liczby są zatém, według niego, symbolami, "dającemi nam opis przedmiotów rzeczywistych; opis, któremu możemy nadać żądany stopień dokładności i za pomocą którego dla wielkiéj liczby przypadków działania ciał, pozostających pod władzą znanych praw przyrody, można znaleźć rachunkowo wartości liczbowe, mierzące skutek działania„. Zapytuje daléj Helmholtz, jakie jest objektywne znaczenie tego faktu, iż stosunki rzeczywiste pomiędzy przedmiotami wyrażamy, jako wielkości w liczbach mianowanych, i przy jakich warunkach uczynić to można? Pytanie to, według niego, rozpada się na dwa następujące:

I. Jakie jest znaczenie objektywne faktu, że dwa przedmioty uważamy za *równe* w pewnym względzie?

II. Jaki charakter musi mieć fizyczne łączenie dwóch przedmiotów, aby ich atrybuty porównalne można było uważać za *dodajne* [additiv], t. j. mogące być dodanemi, i za wielkości, dające się wyrazić liczbami mianowanemi?

Przy stosowaniu Arytmetyki do wielkości fizycznych, przybywa do pojęć równości i nierówności, które wymagają wyjaśnienia, jeszcze pojęcie *jednostki*. Uważa Helmholtz, że bez potrzeby ograniczamy dziedzinę stosowalności twierdzeń Arytmetyki, gdy wielkości fizyczne z góry przyjmujemy, jako złożone z jednostek.

Wyłożywszy najprzód teoryą dodawania i odejmowania liczb "czystych„, w czém głównie opiera się na teoryi Grassmanna[15], przechodzi Helmholtz do określenia wielkości fizycznych, ich równości i działań nad niemi. Wielkościami nazywa, jak zwykle, przedmioty lub atrybuty przedmiotów, do których stosować można pojęcia równości, większości i mniejszości. Postępowanie, za pomocą którego do każdéj uważanéj wielkości przystosowujemy liczbę tak, aby różnym wielkościom odpowiadały liczby różne, i aby liczba, odpowiadająca danéj wielkości, mogła zastępować ją w ciągu rozumowania, jakie przeprowadzamy nad wielkościami, nazywa *mierzeniem*. Stosunek, zachodzący między atrybutami dwóch przedmiotów, nazywający się *równością*, charakteryzuje pewnik:

"Dwie wielkości, z których każda jest równa trzeciéj, są sobie równe„.

Nie jest to, jak mówi Helmholtz, pewnik o znaczeniu objektywném; zadaniem jego jest wskazanie tylko, jakie związki fizyczne winniśmy określić nazwą równości.

Jeżeli $A=C$, i $B=C$, to stąd wynika $A=B$, jak również $B=A$. Stosunek równości jest wzajemny.

Równość porównywanych atrybutów jest wogóle przypadkiem wyjątkowym i przy spostrzeganiu faktycznem może być wskazaną jedynie w ten sposób, że dwa przedmioty równe, spotykając się lub działając wspólnie pod odpowiedniemi warunkami, dają spostrzedz szczególny skutek, nie zachodzący pomiędzy innemi parami podobnych przedmiotów. Postępowanie, za pomocą którego wprowadza-

Hosted by Google

my przedmioty badane w takie właśnie warunki, aby zachodzenie tego skutku można było stwierdzić, nazywa Helmholtz *metodą porównania.*

Z powyższego pewnika wynika najprzód, że skutek porównania nie zmienia się, jeżeli oba przedmioty przestawimy, stosując metodę porównania. Daléj, jeżeli okazało się, że dwa przedmioty A i B są równe, i jeżeli za pomocą téj saméj metody porównania znaleziono, że przedmiot A równa się trzeciemu przedmiotowi C, to wnioskujemy stąd i za pomocą téj metody sprawdzić możemy, iż przedmioty B i C są równe.

To są warunki, jakie stawia Helmholtz metodzie porównania. Tylko takie metody są w stanie wykazać równość, które warunkom tym czynią zadość.

Wielkości, o których równości lub nierówności przekonywamy się za pomocą téj saméj metody porównania, nazywają się *jednorodnemi.* Jeżeli atrybut, którego równość lub nierówność z atrybutem innego przedmiotu znaleźliśmy, oderwiemy za pomocą abstrakcyi od wszystkiego, co w tych przedmiotach jest wogóle różném, pozostanie nam dla odpowiednich przedmiotów tylko różnica wielkości.

Na przykładach pokazuje Helmholtz, jakie metody porównania obmyślono dla rozmaitych gatunków wielkości: dla ciężarów, odległości punktów, przedziałów czasu, jasności światła, wysokości tonów.

Następnie bada warunki, przy jakich połączenie fizyczne dwóch wielkości może być nazwane *dodawaniem.* Są one: 1°) jednorodność sumy i składników; 2°) prawo przemienności, według którego wynik dodawania jest niezależny od porządku, w jakim dodajemy składniki; 3°) prawo łączności, według którego połączenie wielkości jednorodnych może być uskutecznione w ten sposób, że dwie lub więcéj z nich zastąpimy jedną, która jest ich sumą. [O prawach dodawania mówić będziemy szczegółowo w następnych rozdziałach].

Ponieważ wynik dodawania uważamy za większy od każdego ze składników, posiadamy przeto możność poznania, która z dwóch wielkości jest większa, a która mniejsza. Przy takich wielkościach, jak przedziały czasu, długości, ciężary, które znamy od wczesnego dzieciństwa, nie mamy nigdy żadnéj wątpliwości co do tego, co jest większe lub mniejsze, bo znamy metody dodawania tych wielkości.

Hosted by Google

Gdy takie dwie wielkości są równe, to i wielkości od nich zależne, utworzone dla obu w sposób zupełnie jednaki, są równe; ale co należy uważać za dodawanie takich wielkości, o tém rozstrzyga tylko doświadczenie. Są np. przypadki, gdzie możliwe są dwa gatunki dodawania. Tak np. za pomocą téj saméj metody porównania oznaczamy w Fizyce, czy dwa druty mają równy opór galwaniczny w, albo też czy mają równą zdolność przewodnictwa λ, gdyż $w = 1/\lambda$. Lecz opory dodajemy, umieszczając druty tak, aby prąd przebiegał po kolei jeden drut za drugim; zdolności zaś przewodnictwa, dodajemy, umieszczając druty tak, aby końce ich odpowiednio były złączone. Pytanie, co jest większe a co mniejsze, znajduje dla oporu odpowiedź przeciwną niż dla przewodnictwa. Podobnież i kondensatory elektryczne [butelki lejdejskie] umieszczamy obok siebie lub jeden za drugim; w pierwszym przypadku dodajemy pojemności, w drugim potencyały [napięcia] dla równego naładowania.

Wielkiego uproszczenia doznaje przedstawienie wielkości dopiero wtedy, gdy je rozłożymy na jednostki i przedstawimy za pomocą liczb mianowanych. Wielkości, które można dodawać, dają się w ogólności i dzielić. Jeżeli bowiem każdą z uważanych wielkości możemy uważać, jako powstałą z dodania pewnéj liczby składników według praw dodawania, to, jeżeli idzie o jéj wartość, możemy ją zastąpić przez sumę tych składników. Te składniki równe są wtedy jednostkami. Jeżeli wielkość nie jest podzielną bez reszty przez dobraną jednostkę, dobieramy wtedy jednostek mniejszych, a to przez podział jednostki poprzedniéj na części równe. Tylko w przypadkach wymierności mogą być wielkości wyrażone przy pomocy jednostek z zupełną dokładnością.

Oprócz wielkości, dla których zawsze określić można dodawanie, istnieją szeregi stosunków, wyrażalnych za pomocą liczb mianowanych lub niemianowanych, dla których to stosunków nie znamy dotąd połączenia, które można by nazwać dodawaniem. Stosunki te zachodzą wtedy, gdy związek pomiędzy wielkościami dodajnemi ulega wpływowi pewnéj specyficznéj substancyi, pewnego ciała i t. p. Tak np. prawo załamania światła wyraża, że pomiędzy wstawą kąta podania i wstawą kąta załamania promienia oznaczonéj długości fali, przechodzącego z próżni do substancyi przezroczystéj, istnieje stosunek oznaczony. Dla różnych ciał stosunek ten wszakże jest różny, stanowi zatém własność specyficzną danego ciała, wyraża jego zdolność załamania. Podobne znaczenie mają: ciężar właściwy, zdolność przewodnictwa elektrycznego, pojemność cieplna. Podobnéj natury są pewne stałe, które nazywamy stałemi całkowania w Dynamice. Możemy wprawdzie dodawać liczby oderwane, odpowiadające tym wielkościom, ale jakie znaczenie przypisać by można dodawaniu samych wartości? Helmholtz utrzymuje, że różnica tych stosunków, które nazywa "współczynnikami„, od prawdziwych wielkości nie jest istotną, że z czasem nowe odkrycia moga doprowadzić do znalezienia połączeń dodajnych tych "współczynników„, przez co staną się one wielkościami w zwykłém znaczeniu tego wyrazu.

Teorya Helmholtza ma tę zasługę, że kładzie nacisk na konieczność badania warunków stosowalności działań matematycznych do wielkości, przejmowanych z badań fizykalnych, a przedewszystkiém na warunki równości i dodawania. W saméj rzeczy, gdy idzie o przeniesienie działań liczbowych na połączenia wielkości, potrzebną jest wielka ostrożność, aby, jak się wyraża Kronecker, przez rozszerzenie znaczenia wyrażeń technicznych nie ucierpiała dokładność przedstawienia. Uwaga o "współczynnikach„ jest ważną i wskazuje na zagadnienia, które nauka ma rozwiązać w przyszłości. Sprowadzenie wszystkich "współczynników„ do trzech jednostek zasadniczych długości, czasu i masy—jak to czyni Fizyka nowoczesna,—jest zdobyczą ważną, ale zdobycz ta dotąd ogranicza się, jak wiadomo, przeważnie na wyrażaniu wymiarów współczynników za pomocą odpowiednich symbolów[15]. Niektórym tylko "współczynnikom„, jak prędkości, przyspieszeniu, sile, momentowi, i t.p. nauka nadała postać wielkości zwykłych [ekstensywnych] i bada je wyczerpująco, analitycznie i geometrycznie. Helmholtz przewiduje, że toż samo stanie się z innemi "współczynnikami„, to jest, że np. dodawaniu ich będzie można nadać znaczenie fizykalne w ten sam sposób, w jaki mają je dodawanie prędkości, sił, momentów i t. p.

A priori wydaje się możliwą i inna droga, a mianowicie, odszukanie warunków działań bezpośrednich nad "współczynnikami„, bez sprowadzania ich do wielkości zwykłych. Metoda taka byłaby w takim stosunku do metody poprzedniéj, w jakiém jest naprzykład badanie bezpośrednie form geometrycznych za pomocą metod

Hosted by Google

geometryi syntetycznéj do badania ich pośredniego za pomocą form liczbowych w geometryi analitycznéj. Byłaby to "Matematyka wielkości intensywnych„ w przeciwstawieniu do dzisiejszéj Matematyki wielkości ekstensywnych. W takiéj Matematyce teorya jednostek fizycznych mogłaby rozwinąć się w samodzielną umiejętność. Nie wchodzimy tu w rozstrzygnięcie tego pytania, powiemy tylko, że wszystkie dotychczasowe próby utworzenia podobnéj Matematyki nie dały zadawalających rezultatów. Nietylko Fizyka ale i Psychofizyka, mająca do czynienia z wielkościami intensywnemi, stara się dla badań swych znaleźć odpowiednie formy liczbowe lub geometryczne [16].

3. FORMY PRZERYWANE I CIĄGLE.

Formy matematyczne dzielą się na *przerywane* i *ciągłe*. Przykładem pierwszych jest układ liczb całkowitych, szereg punktów, pomyślanych dowolnie na prostéj, płaszczyznie lub w przestrzeni; jako przykład drugich służyć mogą: continuum liczb, linie, powierzchnia, przestrzeń geometryczna, czas.

Pragnąc określić ciągłość, natrafiamy na wielkie trudności. Kant[17] nazywa ciągłością tę własność wielkości, mocą któréj żadna jéj część nie jest najmniejszą możliwą. "Czas i przestrzeń są ciągłemi, bo nie może być dana żadna ich część, któraby nie dała się zamknąć pomiędzy dwiema granicami [punktami lub chwilami], tak że częścią przestrzeni jest znowu przestrzeń, częścią czasu—czas„.

Właściwie mówiąc, ciągłość np. linii sprowadza się do tego, że między każdemi, dowolnie pomyślanemi, punktami na niéj można pomyśleć sobie punkt trzeci. Czy przestrzeń, objektywnie uważana jako podścielisko zjawisk fizycznych, jest w istocie rzeczy ciągłą w tém znaczeniu, tego doświadczeniem rozstrzygnąć nie można. Można najwyżéj uważać to za postulat, który nam umożliwia wszelkie pomyślane konstrukcye. G. Cantor[18] utrzymuje, że ciągłość przestrzeni polega na tém, iż każdy punkt, którego współrzędne x, y, z względem pewnego układu dane są w liczbach rzeczywistych, wymiernych lub niewymiernych, uważa się jako *istotnie* do przestrzeni należący. "Do podobnego uważania nie ma wszakże wewnętrznego musu, stanowi ono akt wolny działalności konstrukcyjnéj naszego umysłu„. Hypoteza ciągłości przestrzeni jest, według Cantora, jedynie dowolném założeniem o zupełnéj jednoznacznéj odpowiedniości między czysto arytmetyczném continuum (x, y, z) a przestrzenią, będącą podstawą świata zjawisk. Ta swoboda umysłu sięga nawet tak daleko, że można utworzyć pojęcie przestrzeni nieciągłéj, w któréj ruch odbywa się sposobem ciągłym.

Toż samo utrzymuje Dedekind[19], według którego ciągłość przestrzeni nie jest wcale konieczną podstawą geometryi, bo w niéj nigdzie nie bywa należycie wyjaśnianą. Jeżeli obierzemy sobie, twierdzi Dedekind, trzy punkty dowolne A, B, C, nie leżące na jednéj prostéj, z tém tylko ograniczeniem, aby stosunki ich odległości AB, AC, BC były liczbami algebraicznemi, i będziemy uważali za istniejące w przestrzeni tylko te punkty M, dla których stosunki AM, BM, CM do AB wyrażają się również liczbami algebraicznemi; wtedy przestrzeń, złożona z punktów M, będzie oczywiście nieciągłą, i pomimo téj nieciągłości, konstrukcye, które uskutecznia w niéj geometrya elementarna, dadzą się zupełnie wykonać tak samo, jak w przestrzeni ciągłéj.

Tak jest bezwątpienia. Zachodzi tylko pytanie, czy porównywanie stosunków odległości nie wymaga w istocie rzeczy ukrytego przyjęcia pewnych form ciągłych i czy wogóle ta nieciągłość przestrzeni da się pojąć czy wyobrazić bez pewnéj rozmaitości ciągłéj? W każdym razie, usuwając tę ciągłość z przestrzeni, Cantor i Dedekind wprowadzają ją do układu liczb. Podobny pogląd wygłaszają i niektórzy filozofowie. "Ciągłość, powiada Cohen[20], jest ogólną podstawą samowiedzy, walnym warunkiem myślenia, którego działalność okazuje się w ciągłości [nieskończonéj podzielności] przestrzeni, lecz przedewszystkiém w téj dziedzinie matematycznéj, która jest najbliższą ogólnego myślenia, a więc nauce o liczbie„.

Inni uczeni są przeciwnego zdania. Twierdzą oni, że ciągłość spoczywa przedewszystkiém w formach geometrycznych, w przestrzeni. W błędzie jest Dedekind, powiada A. Fick[21], jeżeli nie w Geometryi, lecz w dziedzinie liczb szuka ciągłości. "Ciągłość nie może nigdy leżeć w akcie liczenia, ani z liczenia powstać; szukać jéj należy tylko w wyobrażeniu przedmiotów liczonych„.

Przeciwieństwo tych poglądów polega na różnicy zasad teoretyczno-poznawczych wiedzy ludzkiéj w ogólności; w Matematyce sa-

Hosted by Google

méj nie stanowi ono przeszkody w rozwoju jéj pojęć. W Geometryi trudność, tkwiąca w pojęciu ciągłości, nie występuje wyraźnie; rozpoczyna się ona właściwie dopiero wtedy, gdy idzie o stosowanie analizy do badań geometrycznych, oraz Matematyki wogóle do badań fizykalnych. Uniknąć tego pojęcia niepodobna; usunięte z przestrzeni zjawia się ono w układzie liczb i odwrotnie. Układ liczb całkowitych okazuje się niewystarczającym do opisu form wszystkich; "sieć Arytmetyki„ jak się dosadnie wyraża Wernicke[22], ma początkowo za wielkie oka„, aby mogła pochwycić twory świata zewnętrznego. Umysł ludzki rozpoczyna przeto pracę twórczą nad zagęszczeniem téj sieci: wprowadza kolejno ułamki, liczby niewymierne i przestępne i wznosi się do pojęcia continuum. Te to właśnie zagadnienia czynią konieczném wprowadzenie pojęcia ciągłości form na zasadzie ścisłego określenia, którego należy pilnować się na wszystkich stopniach rozumowania. Przedmiot ten we właściwém miejscu będzie należycie wyjaśniony; tu powiemy tylko, że jest niezmiernie ważném staranne oddzielenie tych prawd, dla uzasadnienia których nie jest konieczném wyraźnie pojęcie ciągłości, od twierdzeń, które jedynie przy pomocy ciągłości uzasadnić się dadzą. Na punkt ten w wywodach naszych szczególną zwracać będziemy uwagę.

Powiemy jeszcze, w jaki sposób wprowadza Grassmann pojęcie ciągłości do swojego wykładu Matematyki. Formy matematyczne, stanowiące przedmiot nauki Grassmannowskiej, którą nazwał *nauką rozciągłości* [Ausdehnungslehre], są to formy rozciągłe, wielowymiarowe i ciągłe, które wszakże nie mają być poglądowemi, jak formy przestrzenne, lecz "czysto myślowemi„. To też usiłuje Grassmann nadać swym formom ciągłość na podstawie określenia, które brzmi w ten sposób[23]: "Każda forma myślowa *staje się* w sposób dwojaki: albo przez prosty akt jéj tworzenia [Erzeugen], albo przez akt podwójny postawienia [Setzen] i połączenia [Verknüpfen]; forma, powstała pierwszym sposobem, nazywa się ciągłą, powstała drugim— przerywaną„. Przeciwieństwo wszakże tych dwóch rodzajów form nie jest, według niego, stanowcze: forma bowiem przerywana może być uważaną za ciągłą i odwrotnie. I tak, jeżeli to, co łączymy w formę, uważamy w myśli, jako stawające się, a sam akt łączenia za moment stawania się, forma przerywana może być poczytana za ciągłą.

Hosted by Google

Jeżeli, przeciwnie, pojedyńcze momenty stawania się uważać będziemy za akty łączenia, to forma ciągłą może być poczytana za przerywaną.

Nie wiem, czy czytelnika zadowolni to kunsztowne określenie ciągłości. Bezwątpienia dostrzeże on w niém pozorne ominięcie tylko tych samych trudności, które napotykamy, chcąc określić bezpośrednio utwory przestrzenne ciągłe. Pokazuje to wyraźnie, że zagadnienie o ciągłości, obok swéj trudności czysto-matematycznéj, którą tylko, jak to zobaczymy, za pomocą analizy zwalczyć można, posiada ważne znaczenie dla Teoryi poznania w ogólności.

4. SYSTEM MATEMATYKI.

System wiedzy matematycznéj dzieli się na Matematykę czystą i stosowaną.

Przedmiotem Matematyki *czystéj* jest badanie form, należących do pierwszych dwóch typów, o których mówiliśmy w art. 1., a więc form liczbowych i geometrycznych; przedmiotem Matematyki *stosowanéj* są formy trzeciego typu, t. j. formy matematyczne, utworzone przy badaniu zjawisk. Nazwa Matematyki stosowanéj pochodzi stąd, że badanie form do niéj należących sprowadza się, jak to już powiedzieliśmy, do badania form liczbowych i geometrycznych.

Do Matematyki czystéj należałoby tym sposobem zaliczyć Arytmetykę, Algebrę, Rachunek wyższy czyli Analizę i Geometryą ze wszystkiemi ich rozgałęzieniami; do Matematyki stosowanéj — Mechanikę i Fizykę matematyczną [24].

Podział Matematyki na czystą i stosowaną nie daje się wszakże przeprowadzić z całą ścisłością, zależy bowiem od poglądu na podstawy Matematyki i nauk realnych oraz od danego rozwoju wiedzy.

W saméj rzeczy można z Mechaniki wyłączyć Foronomią lub Cynematykę, t. j. naukę o ruchu samym w sobie, bez względu na siły działające, i zaliczyć ją do Matematyki czystéj; z drugiéj zaś strony można Mechanikę wraz z Fizyką matematyczną, jak to czynią niektórzy, zaliczyć do nauk realnych, czyli doświadczalnych, na téj zasadzie, że nauki te mają z naukami fizycznemi, oprócz głównego

Hosted by Google

celu, jakim jest badanie zjawisk, to wspólnego, że opierają się na pewnikach, uważanych za podstawy nauk doświadczalnych. I Geometrya też, ponieważ ma do czynienia z formami, urobionemi przy pomocy abstrakcyi z przedmiotów świata zewnętrznego i opiera się także na pewnikach, zaliczaną bywa niekiedy do Matematyki stosowanéj, a nawet do nauk doświadczalnych, na równi z Mechaniką.

Pogląd podobny znaleźć można u Newtona, w którego wiekopomném dziele [25] czytamy, że Geometrya ma swoją podstawę w Mechanice praktycznéj i jest częścią Mechaniki ogólnéj, która podaje i uzasadnia sztukę dokładnego mierzenia. Gauss [26] jest zdania, że nauka o przestrzeni zajmuje zupełnie inne stanowisko względem wiedzy naszéj o prawdach, rozumiejących się same przez się, aniżeli czysta Matematyka; brak w niéj bowiem tego zupełnego przekonania o konieczności tych prawd, a zatém o ich bezwzględnéj prawdziwości, która jest właściwością drugiéj; "z pokorą wyznać musimy, powiada Gauss, że jeżeli liczba jest czystym produktem naszego ducha, to przestrzeń zewnątrz nas posiada swą rzeczywistość, któréj my praw a priori przypisywać nie możemy„.

Wiemy już, że i Grassmann podziela ten pogląd. "Pojęcie przestrzeni, twierdzi on, nie może być wytworzone przez samo myślenie; przeciwnie, przeciwstawia się ono myśleniu, jako coś danego. Ktoby chciał twierdzić przeciwnie, musiałby przedewszystkiém uzasadnić konieczność trzech wymiarów przestrzeni przy pomocy czystych praw myślenia„. Stanowisko Geometryi względem nauki o formach czyli Matematyki czystéj zależy, według Grassmanna, od stosunku, w jakim poglądowość przestrzeni jest do czystego myślenia; toż samo odnosi się do czasu i do ruchu w przestrzeni i dlatego to Geometryą, Forometryą [Foronomią] i Mechanikę uważa on za zastosowania czystéj nauki o formach do zasadniczych "poglądowości„ [Anschauungen] świata zewnętrznego [27].

Powiedzieliśmy już, że główna różnica, jaką upatrują wymienieni uczeni pomiędzy Matematyką czystą a stosowaną, polega na tém, iż pierwsza nie potrzebuje żadnych pewników i rozwija się zupełnie samodzielnie przy pomocy czystego myślenia; druga zaś przeciwnie opiera się na pewnikach, które umysł przy pomocy indukcyi ze zjawisk świata zewnętrznego wnosi do jéj dziedziny. Rozstrzygnięcie pytania, która z nauk jest czystą, która zaś stosowaną, sprowa-

Hosted by Google

dza się zatém do pytania z Teoryi poznania o podstawach wiedzy ścisłéj w ogólności. Rozbiór tego pytania nie może wchodzić w zakres naszéj pracy; dla naszego celu wystarczy jasne wskazanie stanowiska, z jakiego zapatrujemy się na zadania Matematyki. Wyraziliśmy to już na końcu artykułu 1., tu dodamy jeszcze, że wszelka wiedza teoretyczna opierać się musi na pewnych faktach zasadniczych, bez względu na to, czy fakty te są rezultatem indukcyi, czy też są założeniami umówionemi, na wzór wyników indukcyi urobionemi lub uogólnionemi, i na mocy pewnych definicyj formalnych do nauki wprowadzonemi. Rozumie się samo przez się, że założenia, stanowiące podstawę nauki, nie powinny pozostawać z sobą w sprzeczności. Jeżeli te założenia wraz z definicyami form, do dziedziny nauki należących, wystarczają, aby, przy pomocy działań i konstrukcyj czysto matematycznych i wnioskowań logicznych, zbudować umiejętność, bez potrzeby jakiegokolwiek zasiłku z zewnątrz; jeżeli formy i działania zdolne są do uogólnień, nauka jest czystą, w razie przeciwnym jest stosowaną. Wynika stąd, że nauka ze stosowanéj może się stać czystą, jeżeli w rozwoju swym to, co do formy i treści jest rzeczywistém, zastępuje warunkami formalnemi.

Możemy przeto Geometryą zaliczyć do nauki czystéj, bo przyjąwszy raz pewien układ pewników, budujemy tę naukę przy pomocy konstrukcyj matematycznych na formach, wprowadzonych za pomocą definicyj. Tak pewniki jak i formy geometryczne zdolne są do uogólnień, które doprowadzają do innych gatunków Geometryi, opierających się na układzie pewników, różnym od układu euklidesowego, wreszcie do ogólnéj nauki o rozmaitościach, która jest właściwie tém, w czém Grassmann widzi Matematykę czystą. Główna różnica między tym poglądem a Grassmanowskim polega na tém, że to, co według naszego rozumienia stanowi jeden z przypadków szczególnych nauki czystéj, u niego stanowi naukę stosowaną.

Toż samo powiedzieć można o Mechanice, jako nauce o ruchu ciał przyrody, opierającéj się również na pewnikach. Można Mechachanikę uważać za naukę ruchu form geometrycznych, a układ jéj pewników za układ założeń, w takim razie Mechanikę zaliczyć wolno do Matematyki czystéj. Stosuje się to przedewszystkiém do części Mechaniki, zwanéj Foronomią lub Cynematyką, któréj przedmiotem, jak to powiedzieliśmy wyżéj, jest ruch ciał pomyślanych w prze-

Hosted by Google

strzeni, bez uwagi na siły. Można i tę gałąź Mechaniki uogólnić, zastępując formę przestrzeni, w któréj ruch się odbywa ogólniejszą formą rozmaitościową. Jeżeli zaś w Mechanice opieramy się na pewnikach, uważanych za wynik indukcyi z doświadczenia albo za *prawa natury*, i w dalszém budowaniu umiejętności odwołujemy się do do faktów doświadczalnych, Mechanika będzie nauką stosowaną.

Tym sposobem Matematykę czystą składają następujące nauki:

1. Arytmetyka, Algebra i Rachunek wyższy, które Wroński obejmuje jedną nazwą ogólną Algorytmii [28].
2. Geometrya,
3. Foronomia czyli Cynematyka.

Można z innego punktu widzenia ustanowić klasyfikacyą Matematyki czystéj. Wiemy, że formy matematyczne [art. 3.] są przerywane i ciągłe, mamy więc Matematykę form przerywanych, nieciągłych lub uważanych bez względu na ciągłość, oraz Matematykę form ciągłych. Do pierwszéj z nich należałoby zaliczyć Arytmetykę, Algebrę i tę część Geometryi, którą można rozwinąć bez potrzeby uważania ciągłości; do drugiéj Rachunek wyższy i Geometryą układów ciągłych wraz z Foronomią [29].

Podział ten przyjmujemy w niniejszéj książce, przyczém w pierwszym tomie zajmiemy się pojęciami i metodami Arytmetyki i Algebry, drugi poświęcimy Analizie, Geometryą zaś, jako mającą swoje odrębne metody, oraz Cynematyką zajmiemy się w tomie trzecim.

5. MATEMATYKA I LOGIKA.

Logika formalna, jako metoda szukania związków pomiędzy przedmiotami, oderwanemi od wszelkiéj treści, jest nauką zbliżoną do Matematyki czystéj. Mając do czynienia z ogólnemi prawami myślenia, t. j. z prawami łączenia pojęć, sądów i wniosków, obejmuje ona prawa łączenia pojęć form matematycznych oraz sądów i wniosków, które z tego łączenia wynikają; jest zatém nauką ogólniejszą od Matematyki i zaliczaną bywa do Teoryi poznania. Wszystkie gałęzie Matematyki można uważać za zastosowania Logiki formalnéj do pojęć poszczególnych form matematycznych [30].

Organem Logiki formalnéj do ostatnich czasów był język wyrazów, jako główny środek przedstawiania i rozwijania myśli. Gdy wszakże wyrazy nie mają ścisłego i niezmiennego znaczenia, jakie

Hosted by Google

mają np. symbole matematyczne, gdy daléj na téj drodze kombinacye złożone pojęć i wogóle operacye logiczne w szacie słownéj nie są ani dość przejrzyste, ani też nie zawsze pozwalają na wyprowadzanie wszystkich wniosków z danych rozumowań, przeto jeszcze Leibnitz powziął pomysł zastosowania do przedmiotów i operacyj logicznych takich samych symbolów, jakich używa Matematyka, a mianowicie Algebra, t. j. liter. Pomysł ten dopiero w dziele Boole'a o prawach myśli został po raz pierwszy urzeczywistniony i systematycznie wykonany [31]. Dziś Logika formalna w szacie matematycznéj, albo, jak ją nazywają, *Algebra Logiki* posiada wielu pracowników i bogatą literaturę, któréj wykaz znaleźć można w świeżo wydanym pierwszym tomie obszernego traktatu E. Schrödera [32].

Ze stosunku Matematyki do Logiki wynika, że Algebra Logiki nie jest bynajmniéj zastosowaniem metod Matematyki do działań logicznych; owszem, mimo tożsamości symbolistyki i wyrażeń technicznych, działania logiczne mają znaczenie wogóle odmienne od działań matematycznych, jakkolwiek istnieją téż godne uwagi analogie. Zauważyć przytém należy, że przejąwszy symbolistykę od Matematyki, Logika formalna przejęła zarazem zasadniczą właściwość Matematyki, którą jest uogólnianie pojęć, i na téj drodze dochodzi do wyników, jakich nie znała Logika, traktowana sposobem zwykłym.

Zastąpienie mowy słownéj symbolami matematycznemi jest nietylko rodzajem pisma stenograficznego, ale jest zarazem metodą ścisłego wyrażania związków logicznych, nie dopuszczającego żadnéj dwuznaczności i pozwalającego na łatwe i prędkie wyrażanie zachodzących w nauce twierdzeń i wniosków. Jest zasługą matematyka włoskiego G. Peano obmyślenie systemu prostych znaków, za pomocą których wyrażają się prawdy logiczne i zastosowanie tego nowego języka do przedstawiania zasad i twierdzeń rozmaitych gałęzi Matematyki. Najprzód zastosował on tę metodę do Arytmetyki i Geometryi, a obecnie pracuje nad wprowadzeniem tego nowego języka do Matematyki wyższéj. Owocem jego pracy jest najnowsza rozprawa, w któréj się zawiera dowód twierdzenia o całkowalności równań różniczkowych zwyczajnych. W przypisach dajemy zwięzły wykład metody Peano, mającéj, jak się zdaje, piękną przyszłość w nauce [33].

Hosted by Google

Od Algebry Logiki należy odróżnić Logikę Matematyki, któréj przedmiotem jest badanie związków *logicznych* między pojęciami i metodami, gdy samo stosowanie i rozwinięcie tych pojęć i metod jest przedmiotem Matematyki właściwéj.

Logika Matematyki może wychodzić z dwóch punktów widzenia. Po pierwsze może pytać, jaką postać przyjmują metody badania naukowego w zastosowaniu do dziedziny Matematyki?; są to. analiza, synteza, abstrakcya, indukcya i dedukcya. Po drugie może pytać o charakter logiczny metod w poszczególnych dziedzinach Matematyki; są to metody matematyczne właściwe, o jakich mówimy w niniejszéj książce.[34]

6. ANALIZA I SYNTEZA.

Euklides w następujący sposób określa obie metody: W *analizie* rzecz szukana uzasadnia się za pomocą kolejnych wniosków, prowadzących do prawdy uznanéj; w *syntezie* rzecz uzasadnia się za pomocą wniosków, które do niéj prowadzą od prawd uznanych.

Te niezupełne jasne określenia utrwaliły się, jak powiada Hankel[35], w tradycyi szkolnéj i późniejsze komentarze licznych pisarzy nie uczyniły ich jaśniejszemi. Aby pokazać, na czém istotnie polega różnica obu metod, weźmy dla przykładu jedno z twierdzeń geometrycznych i dowiedźmy go metodą analityczną, a następnie syntetyczną[36].

"Niechaj będzie prosta AB, podzielona w stosunku skrajnym i średnim w punkcie C, i niechaj AC będzie część większa. [Czytelnik zechce sam nakreślić potrzebny do tego rysunek; punkt D znajduje się po przeciwległéj stronie punktu C względem punktu A]. Jeżeli linia AD równa się połowie linii AB, mówię, że kwadrat odcinka CD jest pięć razy większy od kwadratu odcinka AD„.

1°. *Sposób analityczny*. Ponieważ kwadrat odcinka CD jest pięć razy większy od kwadratu odcinka AD, kwadrat zaś odcinka CD równa się kwadratowi odcinka AC wraz z kwadratem odcinka AD i podwójnym prostokątem, zbudowanym na odcinkach AC i AD, przeto suma kwadratów odcinków AC i AD i podwójnego prostokąta, wystawionego na tych odcinkach, równa się pięciokrotnemu kwadratowi odcinka AD. Odejmując od wielkości równych po kwadracie z odcinka AD, otrzymujemy, że suma kwadratu odcinka AC i podwójnego prostokąta, wystawionego na odcinkach AC i AD, równa się poczwórnemu kwadratowi z odcinka AD. Lecz podwójny prostokąt, wystawiony na odcinkach AC i AD, równa się prostokątowi, wystawionemu na liniach AC i AB, gdyż linia AB jest dwa razy większą od odcinka AD. Prostokąt, wystawiony na odcinkach AC i BC, równa się kwadratowi, wystawionemu na odcinku AC, gdyż ten ostatni odcinek jest częścią większą linii AB, podzielonéj w stosunku skrajnym i średnim; otrzymujemy tedy, że suma dwóch prostokątów—jednego, wystawionego na liniach AC i AB, drugiego, wystawionego na liniach BC i AB—równa się poczwórnemu kwadratowi, wystawionemu na odcinku AD. Lecz ostatnie dwa prostokąty stanowią razem kwadrat, wystawiony na linii AB; a więc kwadrat, wystawiony na linii AB, jest cztery razy większy od kwadratu, wystawionego na odcinku AD, co jest oczywiście prawdą, gdyż linia AB jest równa podwojonemu odcinkowi AD. Twierdzenie tym sposobem jest dowiedzione.

2⁰. *Sposób syntetyczny*. Ponieważ kwadrat linii AB równa się poczwórnemu kwadratowi odcinka AD, kwadrat zaś, wystawiony na linii AB, równa się sumie prostokątów— jednego, wystawionego na liniach AB i AC, drugiego na liniach AB i CB,—przeto suma tych dwóch prostokątów równa się poczwórnemu kwadratowi, wystawionemu na odcinku AD. Lecz pierwszy z tych prostokątów równa się podwójnemu prostokątowi na liniach AD i AC, drugi zaś kwadratowi odcinka AC, a więc suma kwadratu odcinka AC i podwójnego prostokąta, wystawionego na odcinkach AC i AD, równa się poczwórnemu kwadratowi odcinka AD. Dodając do wielkości równych po kwadracie z odcinka AD i zważywszy, że kwadrat z odcinka AC, kwadrat z odcinka AC i podwójny prostokąt, wystawiony na odcinkach AD i AC, stanowią razem kwadrat odcinka CD, otrzymamy, że ten kwadrat równa się pięciokrotnemu kwadratowi odcinka AD, co należało dowieść.

Jeżeli wprowadzimy następujące oznaczenia

$$AB=a, \quad AC=b, \quad CB=c, \quad AD=d, \quad CD=f,$$

to obie metody dadzą się w skróceniu przedstawić w sposób następujący:

1⁰. *Sposób analityczny.*

$$f^2=5\,d^2,$$

$$f^2 = b^2 + d^2 + 2bd,$$
$$b^2 + d^2 + 2\,b\,d = 5\,d^2,$$
$$b^2 = a\,c,\ 2\,b\,d = b\,a,$$
$$a\,c + b\,a = 4\,d^2,$$
$$a\,(c+b) = 4\,d^2,$$
$$a\,.\,a = 4\,d^2,$$
$$a^2 = 4\,d^2,$$

co jest prawdą, gdyż $a = 2\,d$.

2⁰. *Sposób syntetyczny.*

$$a^2 = 4\,d^2,$$
$$a\,(b + c) = 4\,d^2,$$
$$a\,b + a\,c = 4\,d^2,$$
$$b^2 = a\,c, \quad 2\,b\,d = b\,a,$$
$$2\,b\,d + b^2 = 4\,d^2,$$
$$d^2 + 2\,b\,d + b^2 = 5\,d^2,$$
$$(b + d)^2 = 5\,d^2,$$
$$f^2 = 5\,d^2,$$

co należało dowieść.

Porównywając obie metody dowodzenia, spostrzegamy z łatwością, że metoda syntetyczna jest najzupełniej wystarczającą, gdyż wychodząc z prawdy znanéj i kombinując ją z innemi prawdami pewnemi i znanemi, dochodzimy w niéj do twierdzenia, którego należało dowieść; gdy tymczasem w metodzie analitycznéj, przyjmując twierdzenie nasze za dowiedzione, przychodzimy wprawdzie do prawdy uznanéj, nie mamy wszelako zupełnéj pewności, czy wychodząc i z innych założeń, różnych od przyjętego, nie doszlibysmy do tego samego wyniku. Aby więc upewnić się, czy metoda analityczna w naszym przypadku prowadzi do twierdzenia szukanego, należy jeszcze dowieść, że gdy kwadrat odcinka CD nie jest równy pięciokrotnemu kwadratowi odcinka AD, to stąd wyniknie że poczwórny kwadrat odcinka AD nie jest równy kwadratowi odcinka AB.

W jednym przypadku można dowodzenie analityczne uważać za wystarczające, mianowicie, jeżeli wychodząc z pewnego założenia

Hosted by Google

i kombinując je z prawdami poprzednio dowiedzionemi, dochodzimy do wniosku niezgodnego z prawdą: wtedy bowiem założenie musiało być oczywiście fałszywe, gdyż jest rzeczą niemożliwą, aby z prawdy, uznanéj za pewną, można było przez kombinacyą z prawdami dowiedzionemi dojść do wniosku niezgodnego z prawdą. W tym przypadku sposób dowodzenia znany jest pod nazwą *sprowadzenia do niedorzeczności* (reductio ad absurdum) i jest najzupełniéj wystarczający, jakkolwiek może nie posiada téj siły przekonywającéj, jaką ma sposób dowodzenia bezpośredni. Mimo to sposób ten często był używany przez starożytnych i dopiero metody Rachunku wyższego Matematyki nowożytnéj dały nam środek zastąpienia go sposobem bezpośrednim dowodzenia.

Hankel[37] scharakteryzował metody syntetyczną i analityczną w Geometryi starożytnych i określił warunki, pod któremi są one zawsze stosowalne, w sposób następujący.

Każde twierdzenie geometryczne wyraża, że gdy pewna figura posiada pewną własność A, wtedy koniecznie i ogólnie posiada inną własność B, czyli mówiąc krótko: *jeżeli jest A, to musi być i B.*

Jeżeli obok tego twierdzenia zachodzi i drugie twierdzenie, mianowicie: *jeżeli niema A, to niema i B,* to oba twierdzenia można zawrzeć w jedném: A jest *warunkiem koniecznym i dostatecznym* dla B. Ponieważ wynika stąd, że gdy jest B, to jest i A, a więc w tym przypadku twierdzenie jest bezwarunkowo i ogólnie *odwracalne*: obie własności A i B warunkują się wzajemnie.

W przypadku gdy A nie jest koniecznym warunkiem zachodzenia B, twierdzenie "A jest B" nie jest odwracalne i wynika z niego jedno z dwóch; "B jest A" albo "B jest nie-A". W tym właśnie przypadku znajdują się wszystkie twierdzenia, w których B jest własnością podrzędną, w A zawartą, jakiéj się używa często w twierdzeniach pomocniczych. Twierdzenie zaś, wyrażające związek pewnéj własności A z inną, nie zawartą z nią logicznie, musi być odwracalne. Twierdzenie: "Jeżeli jest A, to jest i B" gdy nie jest odwracalne, wskazuje, że istnieje inne twierdzenie odwracalne: "Jeżeli jest A' to jest i B'", gdzie A' oznacza własność ogólniejszą od własności A, lub B' wyraża własność specyalniejszą od własności B.

Synteza przy dowodzeniu twierdzenia "A jest B" polega na kombinowaniu twierdzeń, poprzednio dowiedzionych: "A jest D",

Hosted by Google

“D jest E„ . . . , dopóki nie dojdziemy do wyniku “F jest B„, skąd bezpośrednio wnosimy: “A jest B„.

Analiza przy dowodzeniu twierdzenia “A jest B„ polega na kombinowaniu twierdzeń: “B jest C„, “C jest D„ . . . , skąd wynika “A jest C„, “A jest D„ . . . póki nie dojdziemy do wyniku “A jest E„, który jest albo fałszywy, albo wyraża pewną własność figury. W pierwszym przypadku, jak to już powiedzieliśmy, twierdzenie “A jest B„ jest stanowczo fałszywém, w drugim zaś jest prawdziwém, ale tylko przy warunku, *aby wszystkie twierdzenia użyte, poprzednio stosowane, były odwracalne.*

O ile synteza przeważała u starożytnych przy dowodzeniu twierdzeń, o tyle analiza znowu miała ważniejsze znaczenie, jako droga rozwiązywania zagadnień; czytelnika, interesującego się tą kwestyą stosowania analizy do zagadnień, odsyłamy po bliższe szczegóły do dzieł Hankela i Duhamela[38], z których ostatni znaczną część pierwszego tomu swojéj książki o metodach rozumowania w naukach ścisłych poświęca analizie i syntezie starożytnych.

W Matematyce dzisiejszéj analiza i synteza utraciły znaczenie dawne i przybrały znaczenie zupełnie odmienne. Przez analizę rozumiemy dziś zbiór metod rachunkowych, a w ściślejszém znaczeniu Rachunek wyższy czyli nieskończonościowy; synteza zaś oznacza badanie bezpośrednie form geometrycznych i foronomicznych. Geometrya zowie się *analityczną*, jeżeli formy geometryczne badamy w niéj pod postacią form liczbowych, im odpowiadających; *syntetyczną* zaś, jeżeli nie posiłkujemy się narzędziem rachunkowém i używamy jedynie konstrukcyj geometrycznych. Gdy idzie o dowodzenie twierdzeń w którejkolwiek gałęzi nauk matematycznych, używamy bez żadnéj różnicy jednéj lub drugiéj drogi rozumowania, którą starożytni starannie odróżniali, jako analizę i syntezę; dziś jednak nie przywiązujemy znaczenia do tych nazw specyalnych, gdyż analiza i synteza są obie w usługach dedukcyi, stanowiącéj przeważną metodę rozumowań matematycznych [39].

7. ZASADA ZACHOWANIA I WARUNKI STOSOWALNOŚCI DZIAŁAŃ FORMALNYCH.

Wiemy już z powyższego, że Matematyka rozwija się, dzięki uogólnianiu pojęć i związków pomiędzy przedmiotami swojego ba-

Hosted by Google

dania. Jak z postępem techniki człowiek z kombinacyi najprostszych machin, spożytkowując czynniki przyrody, zdobywa coraz doskonalsze narzędzia pracy, podobnież w Matematyce uogólnianie pojęć, będące wynikiem pracy umysłowéj pokoleń, daje nowe i doskonalsze narzędzia myślenia, które następnie z pożytkiem stosujemy do badania przyrody. Najbardziéj oderwane i wyidealizowane formy matematyczne, którym zdaje się nie odpowiadać nic rzeczywistego, okazują się następnie potężnemi narzędziami badania; za przykład służyć mogą nieskończenie małe, jedna z najważniejszych form Matematyki wyższéj, dzięki któréj udoskonaliły się tak znakomicie Mechanika, Astronomia i Fizyka. Ważność i płodność tego kierunku twórczości ludzkiéj wykazują dostatecznie dzieje nauki, a prawa tego postępu myśli w nauce tak ścisłéj, jak Matematyka, stanowią zadanie wielce ciekawe dla filozofa [40].

Przed 23 laty Hankel [41] sformułował dla dziedziny liczb zasadę, którą kierujemy się zwykle przy uogólnianiu prawd i związków matematycznych, i nazwał ją *zasadą zachowania praw formalnych* [Prinzip der Permanenz formaler Gesetze]. W postaci nadanéj przez Hankela, zasada ta jest właściwie tylko szczególnym przypadkiem zasady ogólniejszéj, którą niżéj podajemy.

Oto jak uzasadnia rzecz tę Hankel:

Niechaj a,b,c... będą pewne formy lub związki pomiędzy formami Wyobraźmy sobie, że formy a i b skombinowaliśmy czysto pojęciowo i że na wypadek tego połączenia czyli działania otrzymaliśmy nową formę c. Forma ta we wszystkich działaniach, jakie nad formami wykonywać będziemy, zastępuje połączenie form a i b, jest równą temu połączeniu. Rzecz oczywista, że jeżeli formy łączyć będziemy ze sobą według pewnych stałych prawideł, to pomiędzy wynikami różnych połączeń otrzymamy pewne związki, wynikające z saméj natury połączeń, bez względu na istotę form łączonych ze sobą; związki, dające się wyprowadzić z samych założeń drogą dedukcyi. Ponieważ natura połączeń form jest zupełnie dowolną, więc i prawidła działań czysto formalnych są zupełnie dowolne, z tém tylko zastrzeżeniem, aby nie wyłączały się wzajemnie i nie zawierały się jedne w drugich: wybieramy przeto prawidła bezwzględnie dostateczne.

Można oczywiście utworzyć system takich form, w którym wszystkie formy i działania są określone dostatecznie [i nie bardziéj niż dostatecznie], który wszakże pozostanie bez wartości, jeżeli w tworzeniu systemu nie zwracaliśmy wcale uwagi na znaczenie działań. Aby więc nasze formalne działania miały istotne znaczenie dla nauki, trzeba, aby prawidła ich obejmowały w sobie prawidła działań nad formami znanemi, aby z jednéj dziedziny można było działania te przenieść do innéj, gdzie mają już znaczenie ustalone. Albo, objaśniając rzecz na przykładzie: jeżeli tworzymy nowe liczby np. urojone, trzeba działania nad temi liczbami poddać takim prawidłom, któreby jako szczególny przypadek zawierały w sobie działania nad liczbami rzeczywistemi; jeżeli wprowadzamy potęgi z wykładnikami ułamkowemi, trzeba, aby działania nad nowemi formami dawały nam wyniki pewne i ustalone, jeżeli ułamki staną się równe liczbom całkowitym.

Zasadę zachowania w zastosowaniu do liczb Hankel wypowiada w ten sposób: "*Jeżeli dwie formy, wyrażone w ogólnych znakach algebraicznych, są sobie równe, to mają takiemi pozostać, jeżeli znaki te nie oznaczają liczb rzeczywistych, gdy przeto działania nad niemi otrzymują nowe znaczenie*".

Dodaje przy tém Hankel, że nie należy zasady téj stosować wszędzie bez żadnych zastrzeżeń; że ma ona służyć przedewszystkiém do określenia prawideł koniecznych i dostatecznych, o ile te są od siebie niezależne, ale wymaga zarazem, by stosowanie zasady pozwalało na rozwinięcie należytéj ogólności w tworzeniu form.

Zasadę zachowania możemy wypowiedzieć w postaci ogólniejszéj, a mianowicie:

"*Jeżeli formy pewnéj określonéj dziedziny poddajemy określonym konstrukcyom i działaniom, które doprowadzają do pewnych związków między formami téj dziedziny, to związki te uważamy, za zachodzące i wtedy, gdy konstrukcye i działania prowadzą do wyników, których nie można uważać za formy, bezpośrednio do naszéj dziedziny należące*". Utrzymanie właśnie związków tych samych dla jednych i drugich form pozwala objąć te formy jedną dziedziną rozszerzoną.

Jeżeli teraz z góry pomyślimy sobie dwie dziedziny czyli *rozmaitości* takie, że każdéj formie czyli każdemu *elementowi* jednéj rozmaitości *odpowiada* pewna forma lub element drugiéj; jeżeli to przejście od jednéj rozmaitości do drugiéj, stanowiące pewien proces myślowy, mający swój wyraz w pewnéj konstrukcyi lub działaniu, na-

Hosted by Google

zwiemy wogóle *odwzorowaniem* lub *przekształceniem*, to z poprzedniego wynika zasada odwrotna:

„Można pomyśleć takie przekształcenia, iż związki, zachodzące między formami pierwszéj rozmaitości zachodzić będą pomiędzy formami drugiéj; pomyślane przekształcenia mają tę własność, że nie zmieniają związków zachodzących pomiędzy formami".

Przetłomaczona na język geometryczny zasada wypowiedziana w tém twierdzeniu prowadzi nietylko bezpośrednio do dwóch ogólnych zasad Geometryi: *dwoistości* i *odpowiedniości* [la dualité et homographie) Chasles'a [42], ale sięga jeszcze daléj i głębiéj; przez wprowadzenie bowiem pojęcia *grupy przekształcenia* t. j. szeregu przekształceń, mających tę własność, że każda zmiana, wynikająca z kombinowania tych przekształceń, znajduje się w tym szeregu, prowadzi do zagadnienia, obejmującego w sobie najwyższe uogólnienie Geometryi, które w przedstawieniu F. Kleina [43] wyraża się w ten sposób:

"Dana jest rozmaitość i w niej pewna grupa przekształcenia; zbadać formy należące do jéj rozmaitości co do takich własności, które nie zmieniają się przez przekształcenia téj grupy„.

Tak więc zasada zachowania panuje nad rozwojem Geometryi; z niéj to wypływają: ważna *zasada ciągłości* [principe de continuité] Ponceleta [44] i wspomniane dwie zasady Chasles'a; ona to kierowała twórczością Steinera [45], który "odkrył organizm, łączący najróżnorodniejsze zjawiska w świecie przestrzeni". Potężny jéj wpływ widocznym jest w Analizie, gdzie nietylko otworzyła dla umysłu dziedziny nowych liczb, ale i teoryą funkcyj doprowadziła do wysokich uogólnień. Ona to była kierowniczką wielkiego matematyka Wrońskiego w zdobywaniu dla nauki nowych poglądów; ona doprowadziła go do *prawa najwyższego* [46], które uważał za twierdzenie naczelne całéj wiedzy matematycznéj. Śmiało rzec można, że całkowity rozwój Matematyki odbywa się pod przewodnictwem zasady zachowania, pojętéj w całéj jéj ogólności. Ponieważ zaś rozwój nauk fizycznych ściśle jest związany z postępem nauk matematycznych, łatwo przeto rozumieć, że wpływ téj zasady musi się dać uwidocznić i w pierwszych. W saméj rzeczy, w naukach fizycznych zasada zachowania uwidocznia się w związkach stałych, zachodzących pomiędzy elementami zjawisk w rozmaitych dziedzinach; Fizyka związki te odkrywa, Matematyka zaś urabia je w formy sobie wła-

Hosted by Google

ściwe i odpowiedniemu poddaje badaniu. Zastosowanie Matematyki do nauk realnych polega właśnie na tém, że związki formalne, jakie Matematyka stwarza, znajdują swoje urzeczywistnienie w związkach, zachodzących pomiędzy elementami zjawisk.

Zasada zachowania jest wszakże tylko *kierującą*; oprócz niéj konieczną jest zasada *regulująca*, aby uogólnienia pojęć, działań i związków nie doprowadzały ani do sprzeczności logicznych, ani do niezgodności z prawdami, poprzednio dowiedzionemi. Zasadę tę możemy wyrazić w sposób następujący:

„*Wszelkie związki, konstrukcye i działania w dziedzinie form nowych nie powinny prowadzić do wyników logicznie sprzecznych lub niezgodnych z prawami, odnoszącemi się do dziedziny form dawnych*„.

W wielu razach, do usunięcia téj sprzeczności lub niezgodności wystarcza, jeżeli przy przenoszeniu związków z dziedziny pierwotnéj do dziedziny ogólniejszéj pomijamy pewne prawa, które w takim razie charakteryzować będą specyalnie dziedzinę pierwotną. Niekiedy jednak, gdy do form ogólniejszych dochodzimy inną drogą, wyjaśnienie i zbadanie niezgodności logicznéj, a zarazem określenie dziedziny form uogólnionych za pomocą warunków koniecznych i dostatecznych jest rzeczą niełatwą, i to stanowi powód, dla którego często uogólnienia nauki nie mają tak szerokiego zastosowania, jakie im przypisywano, dlaczego np. *prawo najwyższe* nie ziściło w całéj rozciągłości oczekiwań jego twórcy.

Stosowalność prawa zachowania w specyalnych dziedzinach badania powinno dać się w ogólności sformułować za pomocą warunków, wyrażających niezmienność pewnych form oznaczonych przy wszelkich zmianach i konstrukcyach, jakie w badanéj dziedzinie wykonywamy; co ostatecznie wyrażać powinno konieczność zgodności logicznéj wyników całego biegu rozumowań z prawdami, przyjętemi za podstawę badania. W naukach formalnych tę podstawę stanowią, jak wiadomo, poczynione założenia; w naukach realnych—*system faktów zasadniczych*, *hypotez* lub wreszcie *praw natury*.

Zbadanie istoty prawa zachowania i warunków jego stosowalności w Matematyce godném jest gruntowniejszych niż dotąd studyów ze strony filozofów wiedzy. Tymczasem to, co znajdujemy u Wundta[47] lub Brixa[48] i innych, którzy ze stanowiska Teoryi poznania badali podstawy wiedzy matematycznéj, jest mało wystarczające. Dubois-Reymond[49], który nie należy do zwolenników wybitnie formalnego kierunku dzisiejszéj Matematyki, zapatruje się też sceptycznie i na samą zasadę zachowania, opierając się na tém, że istnieje wiele przypadków, w których zasada ta prowadzi do wyników zupełnie fałszywych. Jako przykład podaje on twierdzenie

$$\frac{d}{dx}\sum_{1}^{\infty} u_p = \sum_{1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_p$$

które, jak wiadomo, wypowiada swoje usługi w wielu przypadkach. Uwaga Dubois-Reymonda jest słuszną, ale nie świadczy na niekorzyść saméj zasady, owszem powinna, zdaniem naszém, pobudzić matematyków do badania granic jéj stosowalności.

---

[1] O niedostateczności określenia Matematyki, jako nauki o wielkościach, mówią: K. Ch. Fr. Krause, Tagblatt des Menschcheitslebens, 1811, porówn. wydane w r. 1889 tegoż Philosophische Abhandlungen, str. 271, i następne; H. Grassmann, Ausdehnungslehre, wydanie 2-e, 1878, str. XXII, i inni.

[2] Nazwy *formy* dla utworów matematycznych używa H. Grassmann Ausdehnungslehre, str. XXII. Matematyka jest według niego nauką o formach [*Formenlehre*]. Według Roberta Grassmanna, Die Formenlehre oder Mathematik, 1872, nauka o formach czyli Matematyka jest nauką o prawach ścisłego naukowego myślenia i składa się z pięciu gałęzi, a mianowicie: z nauki o wielkościach, Logiki, nauki o kombinacyach, nauki o liczbach i z nauki o rozciągłości [*Ausenlehre*].

[3] Grassmann, Ausdehnungslehre, str. XXII.

[4] Kant, Kritik der reinen Vernunft, wydanie Erdmanna 1880. Pogląd ten wypowiedziany jest w wielu miejscach np. na str. 145, 488—494 i t. d.

[5] Wroński, Introduction à la philosophie des Mathématiques, 1811, str. 1 — 4. Porówn. także tegoż, Sept manuscrits inédits écrits de 1803 à 1806, oeuvres posthumes, 1879.

[6] Comte, Cours de philosophie positive, wydanie z r. 1863, I, str. 98.

[7] Wundt, System der Philosophie, 1889, str. 26.

[8] Wundt, tamże, str. 123.

[9] Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, 1867, str. 48.

[10] Bolzano, Paradoxien des Unendlichen. Wydanie 2-e, 1889, str 4—5.

[11] Paul Dubois-Reymond, Die allgemeine Functionentheorie, 1882, str. 14—57.

[12] Dziś wyraz *moduł*, w znaczeniu użytém w tekście, zastępujemy wprowadzoném przez Weierstrassa wyrażeniem *wartość bezwzględna*.

Hosted by Google

[13] H. Grassmann, Lehrbuch der Arithmetik, 1861, str. 1.

[14] Helmholtz. Zählen und Messen, erkenntnisstheoretisch betrachtet [*Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet, 1887*, str. 16—52]. W roku 1868 Riemann w rozprawie, napisanéj jeszcze w r. 1854., Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen [*Göttinger Abhandlungen*, XIII, 1 — 20, także B. Riemann's *Gesammelte mathematische Werke*, 1876, str. 254 — 269; przekład polski S. Dicksteina i Wł. Gosiewskiego w *Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, IX, 1877] i jednocześnie Helmholtz w pracy: Ueber die Thatsachen der Geometrie [*Göttinger Nachrichten*, 193—221, także *Wissenschaftliche Abhandlungen* von Hermann Helmholtz, II, 1883, str. 618 — 639], zajęli się zbadaniem podstaw, na których spoczywa nasza Geometrya. Te znakomite rozprawy wpłynęły na pogłębienie całéj wiedzy matematycznéj i zrodziły bogatą literaturę [porówn. Wiadomość o pracach z dziedziny Geometryi wielowymiarowéj, *Prace matematyczno-fizyczne*, I, 1888, str. 128—135]. Wyniki tych nowych badań przedstawimy we właściwém miejscu; tu powiemy tylko, że Helmholtz hołduje teoryi empirystycznéj, według któréj pewniki Geometryi nie są twierdzeniami a priori, jak utrzymuje Kant, lecz prawdami, które doświadczeniem zdobywamy i któremi jedynie doświadczenie zachwiać by mogło. Rozprawa o liczeniu i mierzeniu ma być odnośnie do Arytmetyki dopełnieniem tych poglądów wielkiego fizyka. Winniśmy dodać, że pod tym względem miał Helmholtz poprzedników w Grassmannie, Hankelu i Schröderze. Równocześnie z pracą podobnéj treści wystąpił Kronecker w rozprawie, Ueber den Zahlbegriff. [*Philosophische Aufsätze* i t. d., str. 263—274.]. Z krytyką poglądów Helmholtza i Kroneckera występują: G. Cantor, Zur Lehre von Transfiniten, 1890, str. 17, oraz Kerry, Ueber Anschauung und ihre psychische Verarbeitung [*Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, XIV, 1890, str. 317—353].

[15] Porówn. Everetta, Jednostki i stałe fizyczne, przekład polski J. J. Boguskiego, 1885., Wł. Natansona, Wstęp do Fizyki teoretycznéj, 1890, str. 8—11., oraz J. Bertranda, Leçons sur la théorie mathématique de l'électricité, 1890, str. 266—296.

N. Thiele, Til Afslutning af Regneundervisningen, 1883, dzieli przedmioty badań matematycznych na pięć klas następujących: Do pierwszéj należą *mnogości*, posiadające jedność bezwzględną [indywiduum] i dające się przedstawić za pomocą liczb całkowitych. Do drugiéj *wielkości* [długości, powierzchnie, objętości, ciężary, wartości]; te mają jedności względne, dowolnie przyjęte, a do opisu ich potrzebne są liczby ułamkowe i niewymierne dodatne. Przedmioty pierwszéj i drugiéj klasy mają zero bezwzględne. Trzecią klasę stanowią *punkty rzeczowe* — Tingpunkter — [temperatura, momenty czasu, punkty na prostéj nieograniczonéj], przy opisie których nie potrzeba ani zera bezwzględnego ani jedności bezwzględnéj; mają one tylko zero względne i jedności względne. Do klasy czwartéj należą "wyrazy„—Led—[np. wyrazy nieskończonego łańcucha], mają one jedności bezwzględne, lecz nie mają bezwzględnego zera. Wreszcie do klasy piątéj zalicza Thiele kąty i wogóle przedmioty, prowadzące do pojęć, nie dających się zawrzeć w jednéj z klas poprzednich.

[16] Niemożność utworzenia Matematyki wielkości intensywnych tkwi według Dühringa, [Logik und Wissenschaftstheorie, 1878, str. 254] w braku koncepcyj czysto myślowych i czysto konstrukcyjnych odnośnie do istoty materyi. "Gdyby, powiada on, o ogólnym ośrodku materyalnym można było powiedzieć coś podobnego do tego, co się mówi w pewnikach o przestrzeni, i gdyby nad tworami, zawartemi w tych orzeczeniach, można było wykonywać takie same działania, jakie wykonywa Arytmetyka na liczbach, albo téż Matematyka w ogóle w przestrzeni i czasie, to doszlibyśmy do nowéj Matematyki materyi. Przy braku takich pojęć, dochodzimy tylko jedynie do zastosowań Matematyki do materyi i do ciał fizycznych„.

[17] Kant, Kritik der reinen Vernunft. Wydanie Erdmanna, 1880, str. 163.

[18] G. Cantor, Ueber unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten. [*Mathematische Annalen*, XX, 1882, str. 113.].

[19] Dedekind. Was sind und sollen die Zahlen, 1888.; porów. też pracę tegoż autora: Stetigkeit und irrationale Zahlen, 1872, w któréj istotę ciągłości widzi w następującém twierdzeniu: "Jeżeli punkty na prostéj rozpadają się na dwie klasy w ten sposób, że każdy punkt pierwszéj klasy leży na lewo od każdego punktu drugiéj, to istnieje jeden i tylko jeden punkt, który daje ten podział punktów na dwie klasy, to rozcięcie prostéj na dwie części„. Za Dedekindem idzie Stolz w Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, 1885, I, str. 80—84.

[20] Cohen, Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte, 1883, str. 37.

[21] A. Fick, Das Grössengebiet der vier Rechnungsarten, 1880, str. 6.

[22] Wernicke, Die asymptotische Function des Bewusstseins. [*Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, XI, str. 485].

[23] H Grassmann, Ausdehnungslehre, str. XXIII, XXIV.

[24] Do systemu wiedzy matematycznéj należy Rachunek prawdopodobieństwa, nie wymieniony wyraźnie w tekscie. Nauka ta, będąca według wyrażenia Laplace'a „zdrowym rozsądkiem sprowadzonym do rachunku„, według Wrońskiego "teoryą prawa teleologicznego, jakie rządzi przypadkiem„ [loi téléologique du hasard], ze względu na metodę swoją należy do Algebry i Analizy, ze względu na pojęcie zasadnicze prawdopodobieństwa do Teoryi poznania i do Logiki, ze względu wreszcie na zastosowania do różnych gałęzi wiedzy może być zaliczoną do Matematyki stosowanéj. Teorya prawdopodobieństwa jest dotąd więcéj wyrobioną pod względem metod matematycznych, aniżeli pod względem teoretyczno-poznawczym.

Hosted by Google

[25] Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica. Przedmowa. Przekład niemiecki Wolfersa, 1872, str. 1.

[26] Gauss w liście do Bessela w r. 1829. Porówn.: Kronecker, Ueber den Zahlbegriff [*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, CI, str. 339].

[27] Grassmann, Ausdehnungslehre, str. XXIII.

[28] Wroński, Introduction i t. d. str. 464 i następne, dzieli tak Algorytmią jak i Geometryą na dwie gałęzie: Teoryą i Technią. *Teoryą* nazywa on ogół *twierdzeń*, czyli podań, mających za przedmiot *naturę* ilości, t. j form matematycznych, *Technią*—ogół *metod*, które on nazywa podaniami, odnoszącemi się do *mierzenia* tychże form. Mamy więc Teoryą i Technią Algorytmii oraz Teoryą i Technią Geometryi. Dalszy podział każdéj z tych części oparty jest na istocie działań matematycznych, a mianowicie: jeżeli Teorya i Technia używają tylko działań elementarnych, noszą nazwę Teoryi i Technii *elementarnéj;* jeżeli używają "systemów„ działań elementarnych, noszą nazwę Teoryi i Technii *systematycznéj*. Prócz tego tak Teorya i Technia mogą się odnosić już to do *powstawania* [génération] form matematycznych, już to do ich związków wzajemnych, do ich *porównania* [comparaison]; stąd wynika dalsze rozczłonkowanie systemu Matematyki. Cały swój system przedstawił Wroński na wielkiéj tablicy "architektonicznéj„, dołączonéj do swego dzieła, i uzasadnił go szczegółowo w tekscie. Wrońskiemu też wspólnie z Kantem i Carnotem przypada zasługa wprowadzenia Foronomii do systemu Matematyki czystéj; patrz jego dzieło Sept manuscrits i t. d. Porówn. S. Dickstein, Foronomia Wrońskiego [*Rocznik Towarzystwa Przyjaciół Nauk w Poznaniu*, XVII, 1890.].

[29] Arytmetyka i Algebra obie zajmują się liczbami; obu podstawą jest teorya działań, dziedziny ich wzajemnie się krzyżują. W znaczeniu ściślejszém pod nazwą Arytmetyki rozumiemy *Teoryą liczb*, to jest naukę o liczbach całkowitych, o funkcyach, za pomocą skończonéj liczby działań elementarnych utworzonych a takie liczby przedstawiających, i w ogóle o układach czyli *ciałach* liczbowych, za pomocą podobnych funkcyj określonych; przyczém pod nazwą liczb całkowitych rozumiemy nie tylko liczby całkowite rzeczywiste [Teorya liczb zwyczajna] ale i liczby całkowite urojone, idealne, ideały. Główném zadaniem Algebry jest ogólne badanie funkcyj, zbudowanych za pomocą skończonéj liczby działań zasadniczych, równań, z takich funkcyj utworzonych, i liczb oraz ogólniéj funkcyj, przez takie równania określonych. Lecz gdy badania arytmetyczne są przywiązane niejako do stałego układu liczb określonéj natury, badania algebraiczne, przeciwnie, są prowadzone bez względu na podobny układ; pierwsze są specyalne, drugie ogólne, skąd płynie różnica metod w obu naukach, którą Wroński charakteryzuje, nazywając metody Teoryi liczb *teleologicznemi* [celowemi]. Według pomysłów, które obecnie rozwija Kronecker, cała treść badań algebraicznych powinna dać się "zarytmetyzować„, t. j. Algebra zamienić na Arytme-

Hosted by Google

tykę czyli Teoryą liczb. Tym sposobem obie nauki, wyszedłszy z jednéj podstawy i rozwijając każda swe metody, złączyłyby się we wspólnych pojęciach i metodach. We właściwém miejscu rzecz tę szczegółowo przedstawimy. Ważne metody Algebry, które rozwinęły się nawet w samodzielne gałęzie, mianowicie: Teorya podstawień i grup, Teorya przekształceń i niezmienników, stanowią tak nazwaną Algebrę nową. Jeszcze ogólniejsze formy i za pomocą ogólniejszych metod bada Rachunek wyższy czyli Analiza. Funkcye, któremi się ta gałąź Matematyki zajmuje, nie są pod względem tworzenia swego ograniczone do skończonéj liczby działań elementarnych, a główném narzędziem badania są tu pojęcia graniczne czyli nieskończonościowe, do których zalicza się także pojęcie ciągłości, zbieżności i t. d. Można Rachunek wyższy nazwać Teoryą funkcyj matematycznych, najogólniej uważanych. Analiza ma oczywiście wiele punktów wspólnych z Algebrą, i wogóle wszystkie trzy nauki: Arytmetyka, Algebra i Analiza, stanowią właściwie jednę tylko umiejętność, w któréj formy matematyczne badamy z różnych stanowisk, i, co za tém idzie, przy pomocy różnych narzędzi. Słusznie przeto wszystkie je połączył W r o ń s k i jedną nazwą Algorytmii.

Przedmiot nauk, nazywanych w szkole Arytmetyką i Algebrą, stanowi zbiór wiadomości elementarnych z trzech dziedzin powyższych. Arytmetyka elementarna obejmuje naukę czterech działań nad liczbami całkowitemi i ułamkami, przedstawionemi w dziesiętnym układzie liczenia wraz z zastosowaniami do zadań praktycznych. Algebra elementarna obejmuje naukę o liczbach ujemnych, elementy teoryi funkcyj całkowitych i rozwiązywania równań algebraicznych oraz teoryą kombinacyi, z analizy zaś przejmuje elementarną teoryą postępów geometrycznych nieskończonych i teoryą logarytmów.

Aby dać wyobrażenie o bogatym rozwoju dzisiejszéj Matematyki, przedstawiamy tu tytuły działów i poddziałów, na jakie dzielą się sprawozdania o postępie Matematyki czystéj, podawane w specyalném czasopiśmie *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, według XIX-go rocznika tego pisma:

I. Historya i Filozofia Matematyki.

II. Algebra.
   1. Równania. Teorya ogólna. Równania algebraiczne szczególne.
   2. Teorya form.
   3. Eliminacya i podstawienia. Wyznaczniki i funkcye symetryczne.

III. Arytmetyka niższa i wyższa.
   1. Arytmetyka niższa.
   2. Teorya liczb.

Hosted by Google

a) Rzeczy ogólne.
b) Teorya form.
c) Teorya ułamków ciągłych.

IV. Rachunek prawdopodobieństwa. Nauka o kombinacyach.

V. Szeregi.
a) Rzeczy ogólne.
b) Szeregi szczególne.

VI. Rachunek różniczkowy i całkowy.
1. Rzeczy ogólne.
1. Rachunek różniczkowy [Różniczki, funkcye różniczek, maksyma i minima].
3. Rachunek całkowy.
4. Całki określone.
5. Równania różniczkowe zwyczajne.
6. Równania różniczkowe cząstkowe.
7. Rachunek waryacyjny.

VII. Teorya funkcyj.
1. Rzeczy ogólne.
2. Funkcye szczególne.
a) Funkcye elementarne.
b) Funkcye eliptyczne.
c) Funkcye hypereliptyczne, Abelowe i t. p.
d) Funkcye kuliste i t. p.

VIII. Geometrya czysta, elementarna i syntetyczna.
1. Zasady Geometryi.
2. Badania w dziedzinie ciągłości.
3. Geometrya elementarna. [Planimetrya, Trygonometrya, Stereometrya].
4. Geometrya wykreślna.
5. Geometrya nowa syntetyczna.
a) Rzeczy ogólne.
b) Utwory płaskie szczególne.
c) Utwory przestrzenne szczególne.
d) Geometrya licząca.

IX. Geometrya analityczna.
1. Współrzędne.
2. Geometrya płaska.
a) Ogólna teorya krzywych płaskich.
b) Teorya krzywych algebraicznych.
c) Proste i stożkowe.
d) Inne krzywe specyalne.
3. Geometrya analityczna przestrzeni.
a) Ogólna teorya powierzchni i krzywych w przestrzeni.

Hosted by Google

b) Teorya powierzchni i krzywych algebraicznych
c) Utwory przestrzenne 1-go, 2-go, 3-go stopnia.
d) Inne specyalne utwory przestrzenne.

4. Geometrya liniowa [kompleksy, układy promieni].
5. Pokrewieństwo, przekształcenia liniowe, odwzorowania.
    a) Pokrewieństwo, przekształcenie liniowe i odwzorowanie.
    b) Odwzorowanie podobne [conforme Abbildung].

Wundt, Ueber die Eintheilung der Wissenschaften, [*Philosophische Studien*, II, 1888, str. 1—55] przedstawia nauki matematyczne w następującym systemie:

I. Nauki matematyczne ogólne.

A) Nauka form ilościowych: Nauka o wielkościach.
1. Nauki o działaniach nad wielkościami: Algebra.
2. Teorya związków pomiędzy wielkościami: Teorya funkcyj.

B) Nauka form jakościowych: Teorya rozmaitości.

II. Nauki matematyczne specyalne.

A) Nauka o liczbach.
1. Arytmetyka: Nauka o działaniach nad liczbami.
2. Teorya liczb: Nauka o liczbach i związkach pomiędzy niemi.

B) Nauka o przestrzeni:
1. Geometrya syntetyczna: Nauka o powstawaniu form przestrzennych z elementów.
2. Geometrya analityczna; Teorya zastosowania pojęć wielkościowych do utworów przestrzennych.

C) Nauka o ruchu.
1. Cynematyka syntetyczna: Nauka o składaniu ruchów.
2. Cynematyka analityczna; Zastosowanie ogólnych pojęć wielkościowych do zagadnień ruchu.

Porówn. uwagi nad tym systemem w artykule S. Dicksteina, O najnowszych próbach klasyfikacyi nauk. [*Ateneum*, 1889, I, str. 266 i dalsze.].

[30] Wundt, Ueber die Eintheilung der Wissenschaften [*Philosophische Studien*, V, 1889, str. 35.].

[31] G. Boole, An investigation of the Laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities. 1854. Treściwie zebrane wiadomości o pracach uczonych angielskich nad Logiką formalną znaleźć można w książeczce Liarda, Les logiciens anglais contemporains, 2-e wyd. 1883, która wyszła i w niemieckim przekładzie p. t. Die neuere englische Logik, 2-e wyd. 1883. Inne próby Logiki, traktowa-

Hosted by Google

néj sposobem matematycznym, ogłosili J. Delboeuf, Logique algorithmique, Essai sur un système de signes appliqué à la Logique, 1877, i G. Frege, Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens; wszakże tylko metody logików angielskich wywalczyły sobie pierwszeństwo przed innemi.

Dzieło Jevonsa p. t. The Principles of science, a Treatise on logic and scientific method, 1887 [wydanie drugie] zawiera wykład Logiki formalnéj, zastosowanie téjże do nauki o liczbach, do teoryi kombinacyi, przemian, prawdopodobieństwa, do metod mierzenia, do badań indukcyjnych, do teoryi uogólnień, analogii i klasyfikacyi.

[32] E. Schröder, Vorlesungen über die Algebra der Logik [exacte Logik]. Tom I. 1890. Krótki wykład Algebry logicznéj znaleźć można w rozprawie St. Piątkiewicza, Algebra w Logice [*Sprawozdanie gimnazyum we Lwowie* za rok 1888].

[33] Peano wyłożył metodę swoją w następujących rozprawach: Arithmetices principia nova methodo exposita, 1889; Principii di Geometria logicamente esposti, 1889; Les propositions du cinquième livre d'Euclide, réduites en formules [*Mathesis*, X, 1890, str. 73 — 74]; Démonstration de l'integrabilité des équations différentielles ordinaires [*Mathematische Annalen*, XXVII, 1890]. O metodzie téj powziąć można wyobrażenie z następującego treściwego jéj przedstawienia:

Znaki, używane w téj metodzie, są następujące:

K oznacza *klasę* [rozmaitość, mnogość przedmiotów i t. p.], $\cup$ oznacza spójnik *i*, $\cap$ *albo*, ε znaczy *jest*, $=$ *równa się*, $\supset$ *jest zawarty* albo *wynika* Λ—*nic* albo *niedorzeczność*.

Jeżeli a, b, c są K [klasami], to

$a \cap b \cap c$	oznacza:	klasę wspólną klasom a, b, c.
abc	„	to samo co $a \cap b \cap c$.
$a \cup b \cup c$	„	najmniejszą klasę, zawierającą w sobie klasy a, b i c.
$-a$	„	klasę złożoną z elementów *nie-a*.
$x \varepsilon a$	„	x jest a [należy do klasy a].
$x, y \varepsilon a$	„	x i y należą do klasy a.
$a = b$	„	klasy a i b są tożsame.
$a \supset b$	„	klasa a jest zawarta w klasie b, albo każde a jest b
Λ	„	nic albo klasę "zero„. Tak np. $ab = \Lambda$ oznacza, że żadne a nie jest b.

Jeżeli a, b, c są zdaniami, to

$a \cap b \cap c$	oznacza:	jednoczesne potwierdzenie zdań a i b;
abc	„	to samo co $a \cap b \cap c$;
$a \cup b \cup c$	„	że przynajmniéj jedno ze zdań a, b, c jest prawdziwe
$-a$	„	zaprzeczenie zdania a. Jeżeli zdanie a zawiera jeden ze znaków $\supset$, $=$, ε, wtedy znak— dogodniéj jest pisać przed temi znakami. Tak np. $a -= b$ piszemy zamiast $-(a = b)$, $x - \varepsilon a$ zamiast $-(x \varepsilon a)$ lub $x \varepsilon -a$.

Jeżeli np. a, b są K, to $ab - = \Lambda$ oznacza, że jakieś a jest b.

$a = b$ oznacza: zdania a i b są teżsame.

$a \supset b$ „ ze zdania a wynika b, albo jeżeli jest a, to jest b.

Λ „ niedorzeczność. Tak np. $a - b = \Lambda$ oznacza $a \supset b$.

Jeżeli a i b są zdania, zawierające przedmioty nieoznaczone $x, y, \ldots$, wtedy

$a \supset_x b$ oznacza: jakiekolwiek jest x, z a wynika b.

$a \supset_{xy} b$ „ jeżeli x i y czynią zadość a, to czynią zadość i b.

$a =_x b$ „ dla wszystkich wartości x zdania a i b są teżsame.

$a - =_x \Lambda$ „ warunek a nie jest co do x niedorzeczny, albo istnieje x, czyniące zadość warunkowi a.

Rozmaite części jednego wzoru oddzielają się od siebie nawiasami, jak w Algebrze. Do oddzielenia części twierdzenia używamy punktów . : ∴ :: i t. d. Aby przeczytać wzór opatrzony takiemi punktami, łączymy najprzód znaki, nie rozdzielone punktami, następnie znaki, rozdzielone jednym punktem, rozdzielone dwoma, potém trzema i t.d. Tak np.

$$ab \,.\, cd : ef \,.\, g \therefore h \,.\, kl \quad \text{oznacza} \quad \{[(ab)(cd)][(ef)g]\}[h(kl)]$$

Przy pomocy tego znakowania twierdzenia Logiki wyrażają się nadzwyczaj zwięźle, jak to pokazują następujące przykłady:

$a \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\supset.\, a \,.\supset\, a$ $\{$quod est, est$\}$.

$a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, a \supset b \,.\, b \supset c :\supset .\, a \supset c$ wyraża sylogizm:

Jeżeli a, b, c są klasami, np. sądami, to: jeżeli z a wynika b, z b zaś wynika c, to z a wynika c.

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\supset : aa = a \,.\, a \cup a = a \,.\, -(-a) = a \,.\, a - = \Lambda$$
$$a\Lambda = \Lambda,\ a \cup \Lambda = a.$$

Jeżeli a, b są klasami, to stąd wynika, że klasa wspólna klasom a i a jest klasą a; najmniejsza klasa, obejmująca klasy a i a jest a; klasa, będąca negacyą klasy *nie-a*, jest klasą a; klasa wspólna klasie *nie-a* jest klasą zero; klasa wspólna klasie a i klasie zero jest zerem; najmniejsza klasa, obejmująca klasę a i klasę zero, jest klasą a.

Następujące trzy wzory czytelnik z łatwością sam odczyta.

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\supset : ab = ba \,.\, a \cup b = b \cup a \,.\, ab \supset a \,.\, a \supset a \cup b \,.\, -(a \cap b)$$
$$= (-a) \cup (-b) \,.\, -(a \cup b) = (-a) \cap (-b) ;$$

$$a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\supset : (ab)c = a(bc) = abc \,.\, (a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$$
$$= a \cup b \cup c ;$$

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\supset \therefore a \supset b \,.=: x \,\varepsilon\, a \supset_x x \,\varepsilon\, b.$$

Liczbę tych przykładów możnaby znacznie powiększyć; ale i podane wystarczają do pokazania, w jaki sposób symbolistyka P e a n o skraca wysłowienie twierdzeń. Równie zwięźle przedstawić można twierdzenia matematyczne, jak to pokazują następujące przykłady, które czytelnik łatwo odczyta. W nich klasą N są liczby całkowite dodatnie, inne znaki są zwykłe arytmetyczne.

$$a\, b \varepsilon N . \supset . a+(b+1)=a\,(b+1);$$
$$a\, b\, c \varepsilon N . \supset . a+(b+c)=a+b+c;$$
$$a \varepsilon N . \supset . 1+a=a+1;$$
$$a\, b \varepsilon N . \supset : a<b . = . b-a -= \Lambda;$$
$$a \varepsilon N . \supset . a\times 1=a;$$
$$a\, b \varepsilon N . \supset . a\, b \varepsilon N;$$
$$a, b, c \varepsilon N . \supset . a=b : \supset : ac=bc . ;$$
$$a, b, c, \varepsilon N . \supset \therefore a<b . = . ac<bc : a=b . = . ac=b\,c : \quad a>b . = . ac>bc . ;$$
$$a, b, c \varepsilon N . \supset . a\,(bc)=a\,b\,c;$$
$$a, b \varepsilon N . \supset : b/a = N[x\varepsilon]\,(x\,a=b) .$$

Ostatnie twierdzenie wyraża: jeżeli a i b są liczbami całkowitemi, to iloraz z podzielenia b przez a jest liczbą całkowitą, jeżeli istnieje takie x, dla którego $xa=b$. W następujących przykładach q niechaj oznacza klasę liczb rzeczywistych; możemy napisać następujące twierdzenia:

$$a, b \varepsilon q . \supset . ab=ba$$

[jeżeli liczby a i b są rzeczywiste, to iloczyn ab równa się iloczynowi ba]

$$a, b \varepsilon q . a^2+b^2=0 : \supset : a=0 . b=0$$
$$a, b \varepsilon q . ab=0 : \supset : a=0 . \cup . b=0$$

Wzór ostatni oznacza, że jeżeli iloczyn dwóch liczb rzeczywistych a i b jest zerem, to albo a albo b musi być zerem.

$$a, b, x, y \varepsilon q . \supset \therefore x+y=a . x-y=b : = : 2x=a+b . 2y=a-b.$$
$$a\, b \varepsilon q . \supset :: x \varepsilon q . x^2+a\,x+b=0 : -=_x \Lambda \therefore = . a^2-4\,b \geq 0.$$

Wzór drugi wyraża twierdzenie: "Jeżeli a i b są liczbami rzeczywistemi, to warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby pierwiastek równania $x^2+a\,x+b=0$ był liczbą rzeczywistą, jest: $a^2-4\,b \geq 0$".

Twierdzenia piątej księgi Euklidesa przedstawiają się pod postacią wzorów następujących, w których G oznacza klasę wielkości, N zaś, jak wyżej, klasę liczb całkowitych dodatnich:

1. $a, b \varepsilon G . m \varepsilon N : \supset . ma+m\,b=m\,(a+b)$
2. $a \varepsilon G, m, n \varepsilon N : \supset . m\,a+na=(m+n)\,a$
3. „ $: \supset . n(ma)=(nm)\,a$
4. $a, b, c, d, \varepsilon G, m, n \varepsilon N . a/b=c/d : \supset . (ma)/(nb)=(mc)/(n/d)$
5. $a, b \varepsilon G . m \varepsilon N : \supset . ma-mb=m(a-b)$

Hosted by Google

6. $a \varepsilon G, m, n \varepsilon N : \supset . ma - na = (m - n)a$

7. $a, b, c \varepsilon G . a = b : \supset : a/c = b/c . c/a = c/b$

8. „ $a > b : \supset : a/c > b/c . c/b > c/a$

9. „ $a/c = b/c : \supset . a = b$

10. „ $c/a = c/b : \supset . a = b$
„ $a/c > b/c : \supset . a > b$
„ $c/b > c/a : \supset . a > b$

11. $a, b, c, d, e, f \varepsilon G . a/b = c/d . c/d = e/f : \supset . a/b = e/f$

12. „ $. a/b = c/d = e/f : \supset . a/b = (a+c+e)/(b+d+f)$

13. „ $. a/b = c/d . c/d > e/f : \supset . a/b > e/f$

14. $a, b, c, d \varepsilon G . a/b = c/d : \supset \therefore a > c . \supset . b > d : a = c . \supset . b = d :$
$a < c . \supset . b < d.$

15. $a, b \varepsilon G . m \varepsilon N : \supset . (ma)/(mb) = a/b$

16. $a, b, c, d \varepsilon G . a/b = c/d : \supset . a/c = b/d.$

17. „ „ $: \supset . (a-b)/b = (c-d)/d$

18. „ „ $: \supset . (a+b)/b = (c+d)/d$

19. „ „ $: \supset . (a-c)/(b-d) = a/b$

20. $a, b, c, d, e, f \varepsilon G . a/b = d/e . b/c = e/f : \supset \therefore a > c . \supset . d > f :$
$a = c . \supset . d = f : a < c . \supset . d < f$

21. „ $a/b = e/f . b/c = d/e : \supset \therefore a > c . \supset . d > f :$
$a = c . \supset . d = f : a < c . \supset . d < f$

22. „ $a/b = d/e . b/c = e/f : \supset . a/c = d/f$

23. „ $a/b = e/f . b/c = d/e : \supset . a/c = d/f$

24. „ $a/b = c/d . e/b = f/d : \supset . (a+e)/b = (c+f)/d$

25. $a, b, c, d, \varepsilon G . a/b = c/d . a > b . a > c . \supset . a + d > b + c.$

Dla przykładu pokażemy jeszcze, w jaki sposób Peano wyraża niektóre twierdzenia geometryczne. W Geometryi K oznacza klasę lub kategoryą utworów geometrycznych, **1** wyraża punkt, $K1$ oznacza klasę punktów albo figurę geometryczną, znak $=$ między dwoma punktami oznacza ich tożsamość. Jeżeli a, b są punktami, to ab oznacza klasę, utworzoną z punktów wewnętrznych odcinka ab. Wzór $c \varepsilon ab$ oznacza, że c jest punktem wewnętrznym odcinka ab.

$$a, b \varepsilon 1 . \supset . ab \varepsilon K1$$
$$a, b, c, d, \varepsilon 1 . a = b . c = d : \supset . a\,c = b\,d.$$

Ostatni wzór wyraża aksiomat o prostéj.

$$a, b, c, d \varepsilon 1 . c \varepsilon ad . b \varepsilon ac : \supset . b \varepsilon ad.$$

Hosted by Google

Wzór ten wyraża: jeżeli a, b, c, d są punktami odcinka, punkt c leży wewnątrz odcinka $a\,d$, punkt b wewnątrz odcinka ac, to wynika stąd, że punkt b leży wewnątrz odcinka ad.

$$a, b \varepsilon 1 \,.\, c, d \varepsilon a'b : \supset .\therefore e \varepsilon 1 \,.\, c, d \varepsilon ae : -=_e \Lambda$$

Wzór ten wyraża, jeżeli a i b są punktami, c i d zaś są punktami prostéj $a'b$, to istnieje punkt e taki, że punkty c i d należą do odcinka ae.

Wzór $a, b, c, d \varepsilon 1 \,.\, p, q \varepsilon ab \,.\, p, q \varepsilon cd \,.\, p -= q : \supset \therefore x, y \varepsilon 1.$

$$a, b, c, d \varepsilon xy : -=_{xy} \Lambda$$

wyraża: Jeżeli a, b, c, d są punktami i jeżeli odcinki ab i cd mają wspólne dwa punkty różne, to te cztery punkty należą do jednego odcinka.

[34] Wykładowi ogólnych metod Matematyki poświęcony jest rozdział tomu 2-go Logiki W u n d t a, 1883, str. 76—114, w któréj czytelnik znajdzie następujące rzeczy: o zadaniach badania matematycznego, o analizie i syntezie matematycznéj, o indukcyi i abstrakcyi matematycznéj, o dedukcyi matematycznéj. Ten sam przedmiot opracował wcześniej W u n d t w rozprawie Ueber die mathematische Induction [*Philosophische Studien*, II 1883, str. 90—147].

[35] H a n k e l. Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, 1874, str. 137—150.

[36] Przykład wzięty z D a u g e'a Leçons de Methodologie mathématique 1881—1882.

[37] H a n k e l. Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, jak wyżéj.

[38] J. M. C. D u h a m e l. Des méthodes dans les sciences des raisonnement. Première partie. Des méthodes communes a toutes les sciences de raisonnement. Wydanie 3-e. 1885.

[39] O indukcyi i dedukcyi matematycznéj, patrz W u n d t, Logik II. 85—114.

[40] Potężnym bodźcem do uogólnienia badań matematycznych było wprowadzenie liter do oznaczania liczb w rachunkach algebraicznych. Przy przedstawianiu działań w takiéj postaci, musiały naturalnie powstawać pytania o ogólném znaczeniu działań, gdy się żadnych co do liczb, wyrażanych przez litery, nie czyni założeń specyalnych. Przez Geometryą D e s c a r t e s'a wpływ téj metody przeszedł na Geometryą i rozwinął się następnie w Geometryi syntetycznéj.

[41] H a n k e l, Theorie der complexen Zahlensysteme, 1867. str. 10—12.

[42] C h a s l e s. Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, suivi d'un mémoire sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie 1847, wyd. 3-e 1889, str. 586—695.

[43] K l e i n F., Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, 1872, str. 7.

Hosted by Google

[44] Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, 1822, Wydanie 2-gie, 1865. Dwa tomy. Porównaj nadzwyczaj interesujące uwagi zawarte we wstępie do tego znakomitego dzieła.

[45] Steiner. Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten, 1832; także w Jacob Steiner's Gesammelte Werke I., 1881. str. 233.

[46] Wroński podał w r. 1810 "prawo najwyższe" w rozprawie: Premier principe des méthodes algorithmiques comme base de la Technie mathématique, i rozwinął ją w dwóch wielkich tomach dzieła: Philosophie de la Technie algorithmique, 1815, 1816—1817. Porównaj O „prawie najwyższém" Hoene-Wrońskiego w Matematyce, przez S. Dicksteina, [*Prace matematyczno-fizyczne*, tom II, 1890. str. 145—168].

[48] Brix, Der mathematische Zahlenbegriff und seine Entwicklungsformen. [*Philosophische Studien*, VI, 1890 str. 290].

[49] Dubois-Reymond. Die allgemeine Functionentheorie, str. 38.

Hosted by Google

CZĘŚĆ PIERWSZA.

TEORYA DZIAŁAŃ.

La science arithmétique se développe à la façon d'un arbre dont chaque branche donne naissance à plusieurs branches qui à leur tour se divisent et se ramifient à l'infini.

J. Delboeuf.

ROZDZIAŁ I.

LICZBY CAŁKOWITE.

8. DZIAŁANIA PROSTE.

Wiemy już, że liczby całkowite stanowią fundament Arytmetyki i że prowadzi do nich abstrakcya z dostrzeganéj wielości przedmiotów.

Przedmioty, zjawiska dostrzegane, lub odpowiadające im akty myśli nazywamy: *pierwszym*, *drugim*, *trzecim*, i t. d. Każdemu z dostrzeżonych przedmiotów odpowiada pewien liczebnik porządkowy; inaczéj mówiąc, przedmioty, przez nas dostrzeżone i odróżnione, odpowiadają kolejno wyrazom szeregu:

pierwszy, drugi, trzeci, czwarty, ...

Szereg tych wyrazów zastąpić można szeregiem innych przedmiotów lub znaków w ten sposób, aby każdemu przedmiotowi z pierwszego szeregu odpowiadał jeden przedmiot lub znak z drugiego szeregu, i odwrotnie, aby każdemu przedmiotowi z drugiego szeregu odpowiadał jeden przedmiot z pierwszego. Podobne przystosowywanie czyli *odwzorowywanie* wzajemne dwóch szeregów przedmiotów sta-

Hosted by Google

nowi nie tylko podstawę *liczenia*, ale jest źródłem wielu ważnych metod matematycznych, o których w téj książce mówić będziemy.

Jeżeli z wyrazów szeregu

pierwszy, drugi, trzeci, czwarty, . . .

utworzymy szeregi:

pierwszy,
pierwszy, drugi,
pierwszy, drugi, trzeci,
pierwszy, drugi, trzeci, czwarty,
. . . .
pierwszy, drugi, trzeci, czwarty, . . . , $n-y$,

to do każdego takiego szeregu będziemy mogli przydzielić *liczbę*, a mianowicie, do pierwszego szeregu liczbę *jeden*, do drugiego liczbę *dwa*, . . . do ostatniego liczbę n. Przy tworzeniu liczby umysł wykonywa syntezę aktów myśli, odpowiadających każdemu z powyższych szeregów: do dziedziny nazw lub dziedziny przedmiotów dodaje coś nowego, a mianowicie szereg form matematycznych. Formy te odtąd służyć mają za szereg zasadniczy, z którym porównywać będziemy zawsze jakiekolwiek szeregi przedmiotów, podległych naszemu spostrzeganiu [1]. Liczba, otrzymana z syntezy aktów, o jakich mówimy, uważa się za liczbę przedmiotów badanego przez nas szeregu.

Licząc przedmioty, t. j. dając każdemu z nich nazwę, wziętą z szeregu liczebników porządkowych, przez to samo przedmioty te *porządkujemy*. Jeżeli zmienimy porządek przedmiotów, t. j. przestawimy je w sposób dowolny, i następnie porównamy z szeregiem liczebników porządkowych tak, aby kolejnym przedmiotom przypadły znowu nazwy pierwszy, drugi, trzeci . . . , to oczywiście ostatniemu przedmiotowi, bez względu na poczynione przestawienia, odpowie taż sama nazwa, która odpowiadała ostatniemu przedmiotowi w poprzedniém uporządkowaniu. Liczba przeto, odpowiadająca szeregowi po przestawieniu, będzie taka sama, jak liczba, odpowiadająca mu przed przestawieniem; liczba przedmiotów nie ulega zmianie, czyli, wyrażając się słowami K r o n e c k e r a, liczba jest *niezmiennikiem* danego szeregu przedmiotów [2].

Liczba w tém znaczeniu, to jest liczba *całkowita*, zastępuje przy liczeniu liczebniki porządkowe, zamiast więc nazywać przedmioty

Hosted by Google

pierwszym, drugim, trzecim, . . . , liczymy: jeden, dwa, trzy . , . Przy liczeniu w ten sposób nie tylko oznaczamy każdy przedmiot, ale jednocześnie wykonywamy syntezę aktów myśli, odpowiadających każdemu z przedmiotów, to jest określamy ów niezmiennik, ową formę matematyczną, która pozostaje niezmienną przy dowolném przestawianiu przedmiotów liczonych. [Na nazwę tego niezmiennika język niemiecki posiada wyraz "Anzahl„, gdy wyraz "Zahl„ używa się w znaczeniu ogólném, a więc nie tylko dla liczb całkowitych, ale i ułamkowych, ujemnych i t. d. I my w tém samém znaczeniu używamy wyrazu "liczba„, dla oznaczenia zaś pojęcia "Anzahl„ najwłaściwszym byłby wyraz "ilość„. Lecz upowszechniło się w naszym języku naukowym używanie wyrazu ilość, raz w znaczeniu logiczném, w przeciwstawieniu do wyrazu jakość, drugi raz do oznaczania wogóle liczb jakichkolwiek, a nawet do oznaczania wielkości. Dla niewywołania więc zamieszania w języku naukowym, dla wyrażenia pojęcia "Anzahl„ używać będziemy wyrażenia "liczba całkowita„ lub, gdy nie zachodzi obawa dwuznaczności, wyrazu liczba; mówić też będziemy o *wielości*, *mnogości* lub *rozmaitości* przedmiotów, nadającéj się do przedstawienia za pomocą liczby].

Szereg liczb:

jeden, dwa, trzy, cztery, . . .

lub w znakach:

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

wystarcza do liczenia jakiegokolwiek szeregu przedmiotów, ale posiada on jeszcze inne ważne zastosowania, które zaraz przedstawimy.

Niechaj będą dwa szeregi przedmiotów, nazwijmy je A i B. Każdy z tych szeregów możemy liczyć oddzielnie, nazywając przedmioty szeregu A kolejno: pierwszym, drugim, trzecim, . . . , n_1-ym, przedmioty szeregu B, nazywając także kolejno: pierwszym, drugim, trzecim, . . . , n_2-ym. Wyobraźmy sobie teraz szereg liczb całkowitych

1. $$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$$

i przystosujmy do niego liczebniki porządkowe z poprzednich dwóch szeregów w ten sposób, aby liczbom szeregu 1. odpowiadały po kolei i bez przerwy liczebniki pierwszy, drugi, trzeci, . . . , n_1-y, pierwszy, drugi, trzeci, . . . , n_2-y, wtedy ostatniemu przedmiotowi

Hosted by Google

szeregu B odpowie liczba szeregu 1., którą nazywamy *sumą* liczb n_1 i n_2 i oznaczamy przez $n_1 + n_2$. Liczba $n_1 + n_2$ w odniesieniu do dwóch danych szeregów A i B oznacza, że jeżeli przedmioty obu szeregów wyobrazimy sobie, jako stanowiące szereg jeden, w którym idą przedmioty najprzód szeregu A, a następnie szeregu B, to, bez względu na porządek przedmiotów w każdym z szeregów danych, liczba, odpowiadająca temu jednemu szeregowi złożonemu, będzie $n_1 + n_2$.

Jeżeli znowu do szeregu 1. przystosujemy w sposób wyżéj opisany najprzód liczebniki porządkowe pierwszy, drugi, trzeci, . . ., n_2-y, odpowiadające szeregowi A, następnie liczebniki porządkowe, pierwszy, drugi, trzeci, . . . , n_1—y, odpowiadające szeregowi B, to dojdziemy do pewnéj liczby, która będzie sumą liczb n_2 i n_1, a którą wedle przyjętego znakowania przedstawiamy za pomocą $n_2 + n_1$. Liczba ta wyraża oczywiście, że jeżeli wyobrazimy sobie przedmioty obu szeregów, jako stanowiące szereg jeden, w którym najprzód idą przedmioty szeregu B, a następnie przedmioty szeregu A, to, bez względu na porządek przedmiotów w każdym z szeregów danych, liczba, odpowiadająca temu jednemu szeregowi złożonemu, będzie $n_2 + n_1$.

Działanie, za pomocą którego otrzymaliśmy liczbę $n_1 + n_2$ lub $n_2 + n_1$, nazywa się *dodawaniem.*

Jest oczywistém—i oczywistość ta niezależnie od poglądu na źródła naszego poznania, musi być uważana za założenie zasadnicze teoryi działań,—że liczba $n_2 + n_1$, do któréj doszliśmy przy drugiém liczeniu, jest tą samą liczbą szeregu 1., jaką jest liczba $n_1 + n_2$, do któréj doszliśmy przy pierwszém liczeniu, co wyrażamy w ten sposób:

2. $$n_1 + n_2 = n_2 + n_1.$$

Prawo to nazywa się *prawem przemienności* dodawania [commutativ Law]. Wzór 2., wyrażający to prawo w przypadku dwóch składników, z łatwością może być rozszerzony do jakiéjkolwiek [skończonéj] liczby składników, jeżeli znaczenie dodawania trzech i więcéj liczb za pomocą określenia ustalimy. Prawo to wyrazić można ogólnie za pomocą wzoru

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n_\alpha + n_\beta + \ldots + n_\varrho,$$

gdzie $\alpha, \beta, \ldots, \varrho$ stanowi jakąkolwiek przemianę szeregu $1, 2, \ldots, r$.

Hosted by Google

Z poprzedzającego wnieść można, że dodawanie dwóch [i więcéj liczb] jest tylko uogólnieniem liczenia. W dodawaniu zestawiamy szeregi przedmiotów, z których każdemu odpowiada jedna z liczb szeregu 1., w liczeniu zaś te szeregi składają się każdy z jednego przedmiotu, któremu w szeregu 1. odpowiada pierwszy wyraz. Jeżeli liczbę, odpowiadającą takiemu pojedyńczemu przedmiotowi, nazwiemy *jednością*, to liczenie będzie można nazwać dodawaniem jedności. Widzimy zarazem: 1. że gdy idzie o dodawanie i wogóle o działania na liczbach całkowitych, wszystkie przedmioty liczone, bez względu na różnice, jakie pomiędzy niemi istnieć mogą, zamieniają się w procesie liczenia wszystkie na jedności, wszystkie zatém stają się równemi. 2. że każdą liczbę szeregu 1. wyrazić można jako sumę liczby, bezpośrednio przed nią się znajdującéj, i jedności, czyli, liczbą szeregu 1., bezpośrednio następującą po liczbie n, jest $n + 1$. Z prawa przemienności 2. wynika

3. $$n + 1 = 1 + n.$$

Jeżelibyśmy wzór 3. stanowiący przypadek szczególny wzoru 2., przyjęli za założenie zasadnicze, to z niego i przy pomocy określenia

4. $$n_1 + (n_2 + 1) = (n_1 + n_2) + 1\,,$$

moglibyśmy wyprowadzić tak wzór 2. jako też i wszystkie własności dodawania.

Wzór 4. stanowi przypadek szczególny ogólniejszego wzoru

5. $$n_1 + (n_2 + n_3) = (n_1 + n_2) + n_3,$$

wyrażającego prawo *łączności* [associative Law] dodawania. Prawo to określa właśnie sumę trzech składników: jedna i druga strona wzoru 5. oznacza sumę trzech liczb $n_1 + n_2 + n_3$. Prawo to rozciąga się na jakąkolwiek [skończoną] liczbę składników.

Łącząc prawo przemienności i łączności w jedno prawidło, możemy powiedzieć, że mając do dodania ilekolwiek liczb $n_1, n_2, \dots, n_r$, możemy otrzymać sumę ich, łącząc którekolwiek i ilekolwiek z nich w sumę cząstkową, z pozostałych liczb łącząc znów którekolwiek i ilekolwiek w drugą sumę cząstkową i t. d., póki nie wyczerpiemy wszystkich składników danych, i dodając następnie sumy cząstkowe w dowolnym porządku[3].

Hosted by Google

Jeżeli pojedyńcze składniki sumy $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ są wszystkie równe jednéj liczbie n, wtedy dodawanie przechodzi w *mnożenie*, suma zaś $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n + n + \ldots + n$ przyjmuje nazwę *iloczynu* liczb n i r i oznacza się przez nr. Liczba nr jest niezmiennikiem, odpowiadającym szeregowi utworzonemu ze złączenia r szeregów, z których każdy zawiera po n przedmiotów. Jeżeli w tym szeregu złożonym zmienimy ustawienie przedmiotów w ten sposób, aby najprzód stały obok siebie wszystkie przedmioty, które w szeregach danych były pierwszemi, następnie wszystkie, które były drugiemi i t. d., wreszcie wszystkie, które były ostatniemi, to dojdziemy tym sposobem do liczby rn. Ponieważ liczba przedmiotów nie uległa zmianie, a zatém

6. $$n\,r = r\,n.$$

Wzór ten wyraża prawo przemienności mnożenia dla przypadku dwóch *czynników*. Jeżeli określimy mnożenie trzech [i więcéj] czynników za pomocą wzoru

7. $$n_1\,(n_2\,n_3) = (n_1\,n_2)\,n_3,$$

wyrażającego prawo łączności, przyczém pierwsza i druga strona wzoru 7. wyrażają iloczyn $n_1\,n_2\,n_3$, to na zasadzie tego określenia będzie można wzór 6. rozszerzyć na dowolną [skończoną] liczbę czynników t. j. napisać ogólnie

$$n_\alpha\,n_\beta\ \ldots\ n_\varrho = n_1\,n_2\ \ldots\ n_r$$

gdzie $\alpha, \beta, \ldots, \varrho$ oznacza jakąkolwiek przemianę szeregu $1, 2, .., r$.

Łącząc prawo przemienności i łączności mnożenia w jedno prawidło, możemy powiedzieć, że mając do mnożenia ilekolwiek liczb $n_1, n_2 \ldots, n_r$, możemy otrzymać iloczyn ich, tworząc z którychkolwiek z nich iloczyn cząstkowy, z pozostałych ilukolwiek tworząc drugi iloczyn cząstkowy i t. d. póki nie wyczerpiemy wszystkich czynników, i mnożąc następnie przez siebie iloczyny cząstkowe w jakimkolwiek porządku.

Oprócz przemienności i łączności mnożenie liczb całkowitych posiada jeszcze jedną ważną własność, nazwaną prawem *rozdzielności* [distributive Law] [4], które wyraża się wzorami

8. $$\begin{aligned}(n_1 + n_2)\,n_3 &= n_1\,n_3 + n_2\,n_3\\ n_3\,(n_1 + n_2) &= n_3\,n_1 + n_3\,n_2\end{aligned}$$

Pierwszy z tych wzorów daje się dowieść przez rozkład iloczynu po

Hosted by Google

prawéj stronie na sumę n_3 równych składników, a następnie przez odpowiednie uporządkowanie tych składników, drugi zaś wynika z pierwszego przy zastosowaniu prawa przemienności.

Jeżeli czynniki iloczynu $n_1 n_2, \ldots, n_r$ są wszystkie równe jednéj liczbie n, wtedy mnożenie przechodzi w *potęgowanie* albo *podnoszenie do potęgi*, iloczyn zaś $n_1 n_2 \ldots n_r = nn \ldots n$ przyjmuje nazwę r-éj *potęgi* liczby n i oznacza się przez n^r. Liczba n nazywa się *podstawą* potęgi, liczba r jéj *wykładnikiem*.

Potęgowanie nie jest przemiennném ani łącznném, gdyż

$$n^r \text{ jest wogóle różne od } r^n$$

oraz

$$n^{(r^s)} \;\text{„}\quad\text{„}\quad\text{„}\quad\text{„}\; (n^r)^s,$$

posiada natomiast własności wyrażone wzorami

9.
$$\begin{aligned} n^{r+s} &= n^r n^s \\ n^{rs} &= (n^r)^s \\ (mn)^r &= m^r n^r, \end{aligned}$$

odpowiadające prawu rozdzielności mnożenia; właściwie tylko, ostatni z wzorów 9. wyraża ściśle tę własność, która łączy potęgowanie z mnożeniem w podobny sposób, w jaki wzory 8. łączą mnożenie z dodawaniem. Pierwsze dwa wzory 9., nie mające analogicznych sobie w dodawaniu i mnożeniu, wyrażają charakterystyczne własności potęgowania [5].

9. DZIAŁANIA ODWROTNE.

Opisane wyżéj działania: dodawanie, mnożenie i potęgowanie nazywają się działaniami *prostemi*; w przeciwstawieniu do nich cztery następujące nazywają się działaniami *odwrotnemi*. [Działania proste nazywa Hankel tetycznemi — thetische Operationen, odwrotne — litycznemi, lytische Operationen].

Odejmowanie jest to działanie odwrotne względem dodawania; jest to takie działanie, za pomocą którego wyznaczamy liczbę x, czyniącą zadość równaniu

1.
$$x - n_2 = n_1.$$

Liczba x nazywa się *różnicą* liczb n_1 i n_2 i oznacza się przez $n_1 - n_2$. Kładąc za x to wyrażenie w równaniu 1., otrzymujemy

2. $$(n_1 - n_2) + n_2 = n_1.$$

Wzór 2. może być uważany za określenie różnicy lub odejmowania.

Z istoty odejmowania wynika, że jeżeli n_1 i n_2 są liczbami szeregu 1., że wtedy tylko na x otrzymujemy odpowiedź, to jest otrzymujemy liczbę, znajdującą się w tym szeregu, jeżeli liczba n_1 znajduje się w szeregu na prawo od liczby n_2, jest od liczby n_2 większa. Jeżeli zaś co do n_1 i n_2 nie czynimy z góry żadnych zastrzeżeń, wynika potrzeba nadania znaczenia odejmowaniu i w tym przypadku, w którym warunek powyższy się nie spełnia. To prowadzi do rozszerzenia dziedziny liczb, to jest do utworzenia *zera* i liczb *ujemnych*, przyczém naturalnie równanie 2. służyć winno za określenie nowych liczb. Tak więc definicya formalna liczb ujemnych jest tożsama z definicyą odejmowania.

Dzielenie jest działaniem odwrotném względem mnożenia; jest to działanie, za pomocą którego wyznaczamy liczbę x, czyniącą zadość równaniu

3. $$x n_2 = n_1,$$

gdzie n_1 i n_2 są liczbami szeregu 1. Liczba x oznacza się przez

$$\frac{n_1}{n_2} \text{ lub } n_1/n_2$$

i nazywa się *ilorazem*. Kładąc za x to wyrażenie w równaniu 3., otrzymamy równość

4. $$\frac{n_1}{n_2} n_2 = n_1,$$

która może być uważana za określenie ilorazu lub dzielenia.

Z istoty dzielenia wynika, że jeżeli n_1 i n_2 są liczbami szeregu 1, to wtedy tylko otrzymujemy na x odpowiedź, to jest otrzymujemy liczbę zawartą w 1., jeżeli liczba n_1 jest *wielokrotnością* liczby n_2. Jeżeli zaś co do n_1 i n_2 nie czynimy żadnych zastrzeżeń, to wynika wtedy potrzeba nadania znaczenia dzieleniu i w tym przypadku, w którym warunek powyższy się nie spełnia. To prowadzi do nowego rozszerzenia dziedziny liczb, to jest do utworzenia *liczb ułamkowych*, przyczém naturalnie równość 4. winna służyć za ich określenie. Tak więc definicya formalna liczb ułamkowych zawartą jest w definicyi dzielenia.

Z przyczyny prawa przemienności, stosującego się do dodawania i mnożenia, każdemu z tych działań odpowiada jedno działanie odwrotne, tymczasem potęgowaniu, które przemienném nie jest

Hosted by Google

odpowiadają dwa działanie odwrotne, a mianowicie pierwiastkowanie [właściwie: wyciąganie pierwiastka] i logarytmowanie.

Pierwiastkowanie jest działaniem, za pomocą którego wyznaczamy liczbę x, czyniącą zadość równaniu

5. $$x^{n_2} = n_1$$

Liczba x czyli podstawa potęgi otrzymuje nazwę *pierwiastka* [pierwiastka n_2-ego lub pierwiastka n_2-éj potęgi] i oznacza się w ten sposób:

$$x = \sqrt[n_2]{n_1}.$$

Jeżeli to oznaczenie wprowadzimy do równania 5., otrzymamy wzór

6. $$\left(\sqrt[n_2]{n_1}\right)^{n_2} = n_1,$$

który można uważać za określenie pierwiastka i pierwiastkowania. Jeżeli n_1 i n_2 są liczbami całkowitemi, to na x wtedy tylko otrzymujemy odpowiedź w szeregu 1., gdy liczba n_1 jest *potęgą zupełną* t. j. iloczynem n_2 równych czynników; w przeciwnym razie odpowiedź nie może zawierać się w szeregu 1. Jeżeli więc co do n_1 i n_2 nie czynimy żadnych zastrzeżeń, to wynika stąd potrzeba nadania znaczenia pierwiastkowaniu i w tym przypadku, w którym warunek powyższy się nie spełnia. To prowadzi nas znowu do rozszerzenia dziedziny liczb, to jest do tworzenia liczb *niewymiernych*, przyczém równanie 6. może służyć za formalne ich określenie.

Równanie 5. stanowi przypadek szczególny równania algebraicznego ogólnego, to też liczby niewymierne, określone formalnie za pomocą takiego równania, zawierają się w pojęciu ogólniejszém liczb *algebraicznych*.

Logarytmowanie jest działaniem, za pomocą którego wyznaczamy liczbę x, czyniącą zadość równaniu wykładniczemu

7. $$n_2{}^x = n_1.$$

Liczba x nazywa się *logarytmem* liczby n_1 przy podstawie n_2 i oznacza się w ten sposób:

$$x = \log_{n_2} n_1$$

Wstawiając to oznaczenie w 7., otrzymujemy równość

8. $$n_2{}^{\log_{n_2} n_1} = n_1,$$

Hosted by Google

który może być uważany za określenie logarytmu i logarytmowania. Jeżeli n_1 i n_2 są liczbami szeregu 1., to na x otrzymujemy tylko wtedy liczbę szeregu 1., jeżeli n_1 równa się liczbie n_2 lub jakiéjkolwiek potędze [z wykładnikiem będącym liczbą szeregu 1.] liczby n_2. Jeżeli więc co do n_1 i n_2 nie czynimy żadnych zastrzeżeń, wynika potrzeba nadania logarytmowaniu znaczenia w przypadku, w którym warunek powyższy nie spełnia się. To prowadzi do nowego uogólnienia pojęcia liczby, do tworzenia liczb *przestępnych* [transcendentalnych].

Ponieważ równanie 7. stanowi tylko jedną z postaci, jaką przybierać mogą równania przestępne, więc definicya formalna, zawarta we wzorze 8., daje tylko specyalną klasę liczb przestępnych, klasę logarytmów.

Z dotychczasowego przedstawienia widać jasno, że proces liczenia, podnosząc się na coraz wyższe stopnie, prowadzi do trzech działań prostych: dodawania, mnożenia i potęgowania; odwrócenie zaś zagadnienia zawartego w działaniach prostych, prowadzi do czterech nowych działań: odejmowania, dzielenia, pierwiastkowania i logarytmowania, i zarazem wywołuje potrzebę rozszerzenia dziedziny pierwotnéj, zawartéj w szeregu 1. Odwrócenie zagadnień, zawartych w działaniach prostych, jest myślą twórczą, która stwarza nowe dziedziny badania. Przekonamy się niejednokrotnie, że ten sam pomysł w innych gałęziach Matematyki, a głównie w teoryi funkcyj eliptycznych i hypereliptycznych, stał się podstawą znakomitych odkryć i uogólnień.

W uważanym obecnie przypadku mamy do czynienia z zagadnieniami najprostszemi, bo z najprostszemi połączeniami liczb, wchodzącemi do uważanych działań. Przy połączeniach bardziéj złożonych, utworzonych z rozmaitych kombinacyj powyższych działań, dochodzimy naturalnie do zagadnień odwrotnych ogólniejszych, i dlatego podane przez nas wyżéj nowe dziedziny liczb nie wyczerpują całéj rozmaitości nowych form liczbowych, do jakich prowadzą działania matematyczne.

Z siedmiu opisanych działań, cztery, a mianowicie dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie, nazywamy działaniami *zasadniczemi* albo *arytmetycznemi* dla tego, że stanowią one przedmiot Arytmetyki elementarnéj, która obejmuje dziedziny liczb całkowitych i ułamkowych, z wyłączeniem [dla względów dydaktycznych] dzie-

Hosted by Google

dziny liczb ujemnych, uwzględnianéj dopiero w Algebrze elementarnéj. Dołączając do powyższych czterech działań jeszcze podnoszenie do potęg całkowitych i wyciąganie pierwiastków o wykładniku całkowitym, otrzymamy sześć działań elementarnych, stanowiących podstawę działań algebraicznych.

Zawarta w tym i w poprzedzającym artykule teorya działań zawiera tylko zarys ogólny, w którym, opierając się na szeregu podstawowym **1.**, podaliśmy zasadnicze własności działań, ich związki wzajemne i wskazaliśmy źródło, z którego pochodzi potrzeba rozszerzenia pierwotnéj dziedziny liczb całkowitych oraz znaczenia działań. Pozostają atoli do rozstrzygnięcia pytania ważne, a mianowicie, w jaki sposób wskazane uogólnienia urzeczywistnić, czyli innemi słowy, jakie własności nadać nowym formom; czy i w jaki sposób rozszerzenia, wskazane w różnych kiernnkach, to jest z różnych pochodzące działań, łączą się ze sobą w jednę organiczną całość, wreszcie jaką rozmaitość form wydają kombinacye działań? Czytelnik przewiduje, że w tych pytaniach mieszczą się doniosłe zagadnienia nauki o liczbach. Zanim wszakże do rozwiązania tych pytań przejdziemy, musimy jeszcze raz zastanowić się nad wyłożonemi wyżéj prawami, określającemi własności działań zasadniczych, i, wziąwszy je za punkt wyjścia, zbadać konsekwencye, do jakich prowadzą. Stanowić to będzie przedmiot następującego rozdziału o teoryi działań formalnych, w któréj formy, podległe działaniu, będziemy uważali w całéj ogólności, nie przywiązując do nich zgóry charakteru liczb całkowitych[6].

10. LICZBY NADSKOŃCZONE.

Rozważania nad naturą liczb, podane w art. poprzedzającym, można uogólnić, zakładając, że mnogość przedmiotów, z któréj za pomocą abstrakcyi dobywamy pojęcie liczby, jest nieskończoną. O nieskończonéj mnogości przedmiotów nie może nas przekonać doświadczenie: w nieskończoności widzimy przedewszystkiém tę własność zasadniczą, jaką posiada szereg liczb całkowitych.

1. $$1, 2, 3, 4 \ldots n, n+1, \ldots$$

w którym od każdego dowolnie wielkiego wyrazu n możemy przejść do następującego $n+1$ w taki sam sposób, w jaki przechodzimy np. od 1 do 2. W tém posuwaniu się coraz dalszém w szeregu na-

Hosted by Google

szym nie napotykamy żadnéj przeszkody, żadnéj sprzeczności z prawami logicznego myślenia. Podobnie rzecz się ma nietylko z szeregiem 1., ale i z wielu innemi szeregami np. z szeregiem liczb parzystych:

$$2,\ 4,\ 6\ \ldots\ ,$$

z szeregiem liczb nieparzystych :

$$1,\ 3,\ 5\ \ldots\ ,$$

z szeregiem ułamków :

$$\tfrac{1}{1},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4}\ \ldots$$

Takich przykładów w dziedzinie badań matematycznych napotkamy wiele w ciągu dalszego wykładu.

Ta własność szeregu 1. i innych podobnych "urzeczowiona„, że tak powiemy, lub przeniesiona do dziedziny przedmiotów, stanowi o *nieskończoności* rozmaitości lub mnogości. [Pojęciem nieskończoności i rozmaitemi jego odmianami, tak ważnemi w Matematyce, zajmiemy się szczegółowo w tomie drugim; tu idzie nam głównie o wyprowadzenie pojęcia liczb nadskończonych, mających charakter liczb całkowitych].

Jeżeli powiemy, że *liczba* wyrazów szeregu 1. lub *liczba* elementów pewnéj mnogości jest *nieskończoną*, to używamy wyrazu liczba w znaczeniu rozszerzonėm. Liczba każda, odpowiadająca skończonéj mnogości przedmiotów, jest zupełnie oznaczoną, i możemy od niéj za pomocą skończonéj liczby działań elementarnych *cofnąć się* do pierwszego wyrazu szeregu; tego samego nie możemy wszakże powiedzieć o liczbie nieskończonéj, bo odejmując od niéj kolejno po jedności, nie dojdziemy po skończonéj liczbie działań do żadnéj liczby określonéj. Wyrażenie przeto "liczba nieskończona„ jeżeli nazwę liczby chcemy tu zachować, oznacza liczbę, znajdującą się na kresie procesu myśli, wytwarzającego szereg 1.; pojęcie jéj jest pojęciem *granicznėm*, w którém proces ten, jakkolwiek wyobrażalny tylko w znaczeniu dowolnego przedłużenia, uważamy za wyczerpany; nieskończoność jest tu niejako gotową, urobioną w pewną formę, jest nieskończonością, jak ją nazywa Cantor, "bezwzględną„ lub właściwą, aktualną; jest liczbą po za wszelką liczbą skończoną, lub, inaczéj mówiąc, jest *pierwszą* liczbą *nadskończoną* (transfinite Zahl) całkowitą ω. Liczba ta stanowić może początek nowéj

Hosted by Google

rozmaitości liczb, w taki sam sposób, w jaki liczba 1 stanowi początek szeregu liczb całkowitych skończonych. Następujące po ω liczby nadskończone będą

$$\omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \omega+4,\ \ldots$$

Jeżeli do tego szeregu zastosujemy ten sam proces myśli, jaki stosowaliśmy do szeregu 1., dojdziemy do liczby 2ω, po któréj następują

$$2\omega+1,\ 2\omega+2,\ 2\omega+3,\ 2\omega+4\ \ldots$$

Proces, prowadzący od liczby, zawartéj w którymkolwiek z powyższych szeregów, do liczb innych w tymże szeregu, nazywa Cantor *pierwszą zasadą tworzenia* liczb; proces zaś, prowadzący od liczby ω do 2ω, nazywa *drugą zasadą.* Skombinowane zastosowanie obu zasad tworzenia prowadzi do kolejnych szeregów

$$3\omega,\ 3\omega+1,\ 3\omega+2,\ 3\omega+3,\ \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mu\omega,\ \mu\omega+1,\ \mu\omega+2,\ \mu\omega+3\ \ldots$$

po których znów dalszy proces daje nam liczby

$$\lambda\omega^2+\mu\omega+\nu$$

i ogólniéj liczby postaci

$$\nu_0\,\omega^\mu+\nu_1\,\omega^{\mu-1}+\ \ldots\ +\nu_{\mu-1}\,\omega+\nu_\mu.$$

Lecz i tu proces tworzenia liczb nie kończy się, bo prowadzi do liczb nadskończonych

$$\omega^\omega$$

i t. p.

Tworzeniu liczb nadskończonych w dalszym ciągu nic nie staje na przeszkodzie; zdaje się, wszakże, że proces ten gubi się w głębiach nieskończoności, nie prowadząc do ściśle określonych dziedzin badania. Tak jednak nie jest, jeżeli przy tworzeniu nowych liczb uwzględnimy warunek, nazwany przez Cantora *trzecią zasadą*, zasadą regulującą [Hemmungs oder Beschränkungsprincip], którą zaraz przedstawimy. Uczynimy tu uwagę, że teorya Cantora podlega ogólnéj zasadzie zachowania, którą przedstawiliśmy we wstępie [str. 27-32]. Zasadę regulującą stanowi właśnie zastosowanie poję-

Hosted by Google

cia niezmiennika danéj mnogości nieskończonéj, podobnego do pojęcia niezmiennika, stosującego się do mnogości skończonych. Niezmiennik ten, który Cantor nazwał najprzód *mocą* (potęgą, Mächtigkeit, puissance), a późniéj *liczbą kardynalną*, danéj mnogości odpowiadającą, powstaje przy pomocy téj saméj abstrakcyi, przez którą w mnogości skończonéj dochodzimy do pojęcia liczby skończonéj. Jeżeli mianowicie w danéj rozmaitości albo mnogości M, składającéj się z oznaczonych i dobrze wyróżnionych przedmiotów konkretnych lub z pojęć abstrakcyjnych, które nazwiemy *elementami* mnogości, odwrócimy uwagę tak od natury elementów jako też od ich porządku, to dojdziemy do określonego pojęcia ogólnego [universale], który można nazwać mocą mnogości M, albo odpowiadającą jéj liczbą kardynalną.

To ógólne określenie liczby kardynalnéj obejmuje w sobie pojęcie liczby skończonéj i nadskończonéj; dają się z niego wyprowadzić, jak to pokazujemy w przypisach, ogólne prawa działań, odnoszące się do jednych i drugich, jako też różnice, charakteryzujące oba rodzaje liczb.

Prócz pojęcia liczb kardynalnych utworzył jeszcze Cantor pojęcie *typów* lub liczb *porządkowych*, nazwanych tak dla tego, że w procesie abstrakcyjnym, o którym mowa wyżéj, nie odwracamy już uwagi od porządku elementów[7].

---

[1] O szeregu tym mówi Kerry, Ueber Anschauung i t. d. [l. c., str. 324], że jest *wielością miarową przyrodzoną* [natürliche Massvielheit] do mierzenia wszystkich innych wielości, podobnie jak nasze oko, nasze ucho, nasze organa dotyku, nasza pamięć są przyrodzonemi wzorcami do mierzenia długości.

O pojęciu liczby całkowitéj traktuje obszernie Frege w pracy, Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, 1884.

[2] Kronecker, Ueber den Zahlbegriff... l. c. str. 342.

[3] Suma złożona z dwóch liczb może być utworzona 2 sposobami, z trzech liczb—18-ma, z czterech—264-ma, z pięciu—5400-ma, z sześciu 141840-ma sposobami. Toż samo stosuje się i do mnożenia.

[4] Nazwy praw przemienności, łączności i rozdzielności podajemy w nawiasach po angielsku dlatego, że one rozpowszechniły się najwcześniéj w literaturze angielskiéj, jakkolwiek pierwszy i trzeci termin wprowa-

dził do nauki prawdopodobnie Servois w r. 1814. Porówn. Hankel, Ueber die complexen Zahlensysteme str. 3.

[5] Powtórzenie potęgowania prowadzi do działań

$$a^{a^{a}}, \quad a^{a^{a^{a}}}, \ldots \text{ i t. d.}$$

które uważają niektórzy za nowe działanie, za "czwarty stopień" działań. Wszakże działanie to jest małego użytku i mało zbadane. Porówn. artykuł E. Schultzego, Die vierte Rechenstufe [*Archiv der Mathematik und Physik*, 2 ser. IX, zeszyt 3, 1890, str. 320—326].

[6] Wroński [Introduction, str 6. i 7.] dzieli działania, opisane w art. 8 i 9., które [za wyłączeniem logarytmowania] nazywa *algorytmami pierwotnemi*, na trzy klasy, z których każda znowu dzieli się na dwie gałęzie prostą [progressive] i odwrotną [regressive]. Podział ten przedstawia następująca tabliczka:

Sumowanie [Sommation]	proste: Dodawanie,
	odwrotne: Odejmowanie.
Reprodukcya [Reproduction]	proste: Mnożenie,
	odwrotne: Dzielenie.
Stopniowanie [Graduation]	proste: Potęgowanie,
	odwrotne: Pierwiastkowanie.

Reprodukcyą uważa Wroński za algorytm *pośredni* między sumowaniem i stopniowaniem, algorytmy zaś pierwotne sumowania i stopniowania nazywa "biegunami intelektualnemi" poznania w zastosowaniu do form algorytmicznych. W sumowaniu części wielkości uważa za przerywane, mające charakter agregatów [per juxta positionem], w sumowaniu za ciągłe, w pewnéj mierze za intensywne i mające charakter wielkości wzrastających [per intus susceptionem]. Te dwie funkcye mają, według niego, każda swoje prawa specyalne; są one zupełnie różnorodne i niepodobna jednéj z nich wyprowadzić z drugiéj. Pierwsza jest opartą na prawach budujących rozsądku [lois constitutives de l'entendement], druga na prawach regulujących rozumu [lois régulatives de la raison]. Neutralizacya tych dwóch funkcyj intelektualnych daje funkcyą pośrednią, a mianowicie algorytm reprodukcyi, który z metafizycznego punktu widzenia odnosi do zdolności sądzenia [faculté du jugement].

[7] Dajemy tu krótki wykład teoryi liczb kardynalnych i porządkowych, opierając się głównie na dwóch pracach Cantora: Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre, 1883 i Zur Lehre vom Transfiniten Erste Abtheilung, 1890. Porówn. także artykuły tegoż w *Acta Mathematica*, II. 1883.

Hosted by Google

Dwie oznaczone mnogości M i M_1 nazywają się *równoważnemi*, co wyrażamy przez $M \sim M_1$, jeżeli można je przyporządkować wzajemnie tak, aby każdemu elementowi pierwszéj odpowiadał jeden oznaczony element drugiéj, i odwrotnie.

Jeżeli $M \sim M_1$ i $M_1 \sim M_2$, to wynika stąd, że $M \sim M_2$.

Przykłady. Mnogość barw tęczowych [czerwona, pomarańczowa, żółta, zielona, błękitna, niebieska, fioletowa] i mnogość tonów gamy [C, D, E, F, G, A, H] są mnogościami równoważnemi: obie podchodzą pod pojęcie ogólne *siedm*.

Mnogość palców obu rąk i mnogość punktów w tak nazwanym trójkącie arytmetycznym

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{array}$$

są równoważne. Liczbą kardynalną, im odpowiadającą, jest *dziesięć*.

Mnogość nieskończona (ν) wszystkich liczb całkowitych szeregu 1. [str. 55.] jest równoważna: mnogości wszystkich liczb parzystych, mnogości wszystkich liczb nieparzystych, mnogości ($\mu+\nu i$) wszystkich liczb zespolonych całkowitych $\mu+\nu i$, gdzie μ i ν przyjmują niezależnie od siebie wszystkie wartości całkowite. Wszystkie te mnogości są znów równoważne mnogości $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$ wszystkich liczb rzeczywistych $\frac{\mu}{\nu}$, gdzie μ i ν są liczbami względnie pierwszemi, nawet mnogość wszystkich liczb algebraicznych jest równoważna każdéj z powyższych mnogości. [Porówn. art. 14.]. Oznacza to, że wszystkie nieskończone mnogości, o których tu mowa, można przystosować do szeregu 1. w sposób, wyżéj podany.

Przeciwnie, mnogości *wszystkich* liczb rzeczywistych [t. j. liczb wymiernych, niewymiernych, algebraicznych i przestępnych], jak tego dowiódł Cantor, Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen [*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, LXXVII, 1874, str. 258], *nie* jest równoważną mnogości (ν).

[Możemy też wspomnieć tu o ważném twierdzeniu Cantora, że rozmaitość n-wymiarowa *ciągła*, uważana jako rozmaitość punktów jest równoważna continuum linearnemu. [Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre *Journ. f. die reine u. ang. Mathem.* LXXXIV. 1878, str. 242.]].

Z poprzedzającego wynika, że mnogości równoważne mają moc albo liczbę kardynalną równą i że naodwrót mnogości o równéj liczbie kardynalnéj są równe. Jeżeli więc $M \sim M_1$, to $\overline{\overline{M}} \sim \overline{\overline{M}}_1$ i odwrotnie. Tu przez $\overline{\overline{M}}$ i $\overline{\overline{M}}_1$ oznaczamy liczby kardynalne.

Jeżeli dwie dane mnogości *nie* są równoważne, to *musi* zachodzić jeden z dwóch następujących przypadków: 1-o można z N wydzielić część składową N', aby było $M \sim N'$; 2-o można z M wydzielić część składową M'

Hosted by Google

aby było $M' \sim N$. W pierwszym przypadku mówimy, że $\overline{\overline{M}}$ jest mniejsze od $\overline{\overline{N}}$, w drugim: $\overline{\overline{M}}$ jest większe od $\overline{\overline{N}}$.

Mnogość, powstałą z połączenia mnogości M i N,—na porządek połączenia nie zwracamy tu uwagi—oznaczamy przez $M+N$. Jeżeli mamy dwie inne mnogości M' i N' tak, że $M \sim M'$, $N \sim N'$, to

$$M+N \sim M'+N'.$$

Na tém twierdzeniu opiera się określenie sumy dwóch lub więcéj liczb kardynalnych. Jeżeli $a=\overline{\overline{M}}$, $b=\overline{\overline{N}}$, to przez $a+b$ rozumiemy taką liczbę kardynalną, która odpowiada mnogości $M+N$, to jest

$$a+b=\overline{\overline{M+N}}$$

Prawo przemienności $a+b=b+a$ i prawo łączności $a+(b+c)=(a+b)+c$ wynikają tu wprost z uwagi, że liczby kardynalne, już ze względu na sam akt abstrakcyi, przez który powstają, są od porządku elementów niezależne.

Jeżeli M i N są dwie mnogości, to przez $M.N$ rozumiemy trzecią mnogość, powstającą z mnogości N w ten sposób, że na miejsce każdego pojedyńczego jéj elementu kładziemy mnogość równoważną mnogości M—porządek elementów tu nie ma wpływu. — Wszystkie mnogości M i N, otrzymane według tego sposobu, są równoważne, a liczba, im odpowiadająca, jest

$$ab=\overline{\overline{MN}}.$$

Z tego określenia wynikają z łatwością: prawo przemienności $ab=ba$, prawo łączności $a.(b.c)=(ab)c$ oraz prawo rozdzielności $a(b+c)=ab+ac$.

Wszystko, co wyżéj powiedziano, odnosi się zarówno do mnogości i liczb skończonych, jako też do liczb i mnogości nieskończonych.

Dla mnogości skończonych można dowieść, że gdy z trzech liczb kardynalnych a, b, c jedna jest równa sumie dwóch drugich np. $a+b=c$, to liczba c nie może być równa żadnemu ze składników. Jeżeli wszakże pominiemy warunek skończoności, to twierdzenie to przestaje być prawdziwém, i w tém tkwi, jak twierdzi Cantor, głęboka i istotna różnica pomiędzy liczbami skończonemi i nadskończonemi. Dla liczb nadskończonych stosują się twierdzenia

$$a+\overline{\nu}=a, \qquad a.\overline{\nu}=a, \qquad a^{\overline{\nu}}.=a$$

gdzie $\overline{\nu}$ jest liczbą skończoną, a zaś liczbą nadskończoną.

Oprócz pojęcia liczby kardynalnéj wprowadza Cantor do swojéj teoryi pojęcie liczby *porządkowej* [Ordnungszahl], które rozwija w najnowszéj swojéj wyżéj cytowanéj pracy. Aby pojęcie to uzasadnić, trzeba najprzód poznać, co Cantor rozumie przez pojęcie mnogości *dobrze uporządkowanéj.*

Hosted by Google

Mnogością dobrze uporządkowaną nazywamy każdą określoną mnogość któréj elementy są związane z sobą pewném z góry określoném prawem następstwa, według którego pewien element mnogości jest *pierwszym*, po nim [o ile on nie jest ostatnim] następuje określony *drugi*, i wogóle po każdéj skończonéj lub nieskończonéj mnogości elementów następuje element rozmaitości zupełnie określony. O takich rozmaitościach czyli mnogościach mówić można, że są *odliczalnemi* [abzählbar] jedna na drugiéj. Takiemi rozmaitościami są np.

$$(a, a', a'') \quad \text{i} \quad (b, b', b'')$$
$$(a, a', a'') \ldots a^{(\nu)} \ldots) \quad \text{i} \quad (b, b', b'' \ldots b^{(\nu)} \ldots)$$
$$(a, a', a'' \ldots a^{(\nu)} \ldots c, c', c'') \quad \text{i} \quad (b, b', b'' \ldots b^{(\nu)} \ldots d, d', d'')$$

Pojęcie mnogości dobrze uporządkowanéj daje się uogólnić w sposób następujący:

Wyobrażamy sobie, że mnogość dobrze uporządkowana składa się z elementów $E, E', E'' \ldots$, które są uporządkowane w n różnych niezależnych kierunkach [bierzemy tu pojęcie kierunku w znaczeniu ogólniejszém od geometrycznego]. Nazwijmy te kierunki 1-ym, 2-gim,... ν-ym,... a samą mnogość nazwijmy *n-krotnie uporządkowaną*.

Wprowadźmy następujące oznaczenia: Jeżeli E i E' są jakiekolwiek dwa elementy mnogości M, to pomiędzy niemi w każdym z n kierunków istnieje określony stosunek położenia [ein bestimmtes Rangverhältniss], do oznaczenia którego użyjmy znaków $<, =, >$. Jeżeli ν jest jedna z liczb 1, 2, 3, ... n, to w kierunku ν-ym zachodzi jeden z trzech przypadków

$$E < E', \quad E = E', \quad E > E'.$$

Dla rozmaitych kierunków stosunek ten może być taki sam, jak dla kierunku ν, lub różny.

Jeżeli E, E', E'' są jakiekolwiek trzy elementy rozmaitości M i jeżeli w kierunku ν-ym zachodzą związki

$$E \leqq E' \quad \text{i} \quad E' \leqq E'',$$

to w tym samym ν-ym kierunku musi być

$$E \leqq E'',$$

przyczém równość zachodzi w ostatnim związku tylko wtedy, jeżeli zachodzi jednocześnie w *obu* związkach poprzednich.

Przy takiém założeniu, dana n-krotna rozmaitość albo mnogość nazywa się uporządkowaną w n kierunkach porządkowych 1, 2, 3, ... n-ym.

Jako przykłady podobnych rozmaitości służyć mogą: trójkrotnie uporządkowana mnogość punktów w przestrzeni odnośnie do układu trzech osi prostokątnych; dwukrotnie uporządkowana mnogość punktów płaszczyzny odnośnie do układu dwóch osi prostokątnych; utwór muzyczny [melodya, symfonia i t. p.], będący mnogością tonów czterokrotnie uporządkowaną ze względu na następstwo tonów w czasie, ich trwanie, wysokość i natężenie, i t. d.

Jeżeli w takiéj oznaczonéj n-krotnie uporządkowanéj mnogości M odwrócimy uwagę od istoty elementów, przy zachowaniu związków ich położenia w n różnych kierunkach, powstanie w nas obraz intelektualny, pojęcie ogólne, które Cantor nazywa *typem porządkowym* [Ordnungstypus] albo też liczbą *idealną*, odnoszącą się do danéj mnogości [tych liczb idealnych nie należy mieszać z liczbami idealnemi Kummera, o których mówić będziemy w części drugiéj niniejszego tomu] i oznacza ją przez $\overline{M}$.

Pojedyńczym elementom E, E', E'' mnogości M odpowiadają w jéj typie porządkowym $\overline{M}$ same jedności $e=1$, $e'=1$, $e''=1$ . . ., które różnią się tylko wzajemném położeniem w $\overline{M}$; ich związki są takie same, jak związki pomiędzy elementami mnogości M.

Tym sposobem n-krotny typ porządkowy jest niejako liczbą całkowitą n-wymiarową, jest organiczném skupieniem jedności, uporządkowanych w n różnych kierunkach.

Typ porządkowy nazywa Cantor *czystym*, jeżeli każde dwie jedności tego typu e i e' mają przynajmniéj w jednym z n kierunków położenie różne; w przeciwnym razie typ nazywa *mieszanym*. W typie mieszanym jedności łączą się w oznaczone grupy, tak, że jedności, należące do jednéj i téj saméj grupy, mają we *wszystkich kierunkach* położenie jednakowe i zlewaja się w jednę liczbę kardynalną, gdy jedności, należące do grup różnych, przynajmniéj w jednym z n-kierunków mają położenie różne. Typ mieszany powstaje z oznaczonego typu czystego, jeżeli w tym ostatnim zamiast jedności podstawimy pewne liczby kardynalne.

Dwie mnogości M i N, n-krotne uporządkowane, nazywają się *podobnemi*, jeżeli można je wzajemnie przyporządkować w ten sposób, aby, gdy E i E' są dwoma elementami pierwszéj mnogości, F i F' — odpowiedniemi elementami drugiéj, to dla $\nu=1, 2, 3 \ldots n$ położenie elementu E względem E' w kierunku ν-ym jest w rozmaitości M takie same, jak położenie F względem F' wewnątrz rozmaitości N. Podobieństwo takich dwóch mnogości oznaczać będziemy przez

$$M \cong N.$$

Dwie n-krotnie uporządkowane mnogości mają wtedy i tylko wtedy jeden typ porządkowy, jeżeli są podobne, i odwrotnie. Jest tedy

$$\overline{M} = \overline{N}, \text{ jeżeli } M \cong N$$

i odwrotnie

$$M \cong N, \text{ jeżeli } \overline{M} = \overline{N}.$$

Typem porządkowym danéj mnogości n-krotnéj M jest więc to pojęcie ogólne, pod które podpadają mnogość M i wszystkie jéj podobne.

Z podobieństwa mnogości M i N wynika ich równoważność; odwrotnie wszakże, z równoważności dwóch mnogości nie można wogóle wnosić o ich podobieństwie. Możemy przeto wypowiedzieć twierdzenie: Jeżeli

Hosted by Google

dwie mnogości dobrze uporządkowane mają ten sam typ porządkowy, to mają i jednę liczbę kardynalną; t. j. jeżeli $\overline{M} = \overline{N}$, to $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$.

Tak więc liczba kardynalna czyli moc mnogości M jest jednocześnie liczbą kardynalną jéj typu porządkowego M i powstaje z tego ostatniego, jeżeli oderwiemy uwagę od położenia jego jedności. Jeżeli α jest znakiem dla typu porządkowego $\overline{M}$, to $\overline{\alpha}$ jest znakiem dla liczby kardynalnéj $\overline{\overline{M}}$.

Stosownie do tego, czy liczba kardynalna mnogości jest skończoną lub nadskończoną, i samą mnogość oraz jéj typ porządkowy nazywamy skończonym lub nadskończonym.

Typ n-krotny α składa się z pewnych jedności $e, e', e'' \ldots$, mających oznaczone położenie w n kierunkach. Jeżeli weźmiemy pod uwagę tylko pewną część tych jedności, to określi ona pewien typ γ, który można uważać za część "przygotowaną" [możliwą, virtuell] typu α. Każdy typ α składa się z takich typów przygotowanych $\gamma, \gamma', \gamma'' \ldots$, które w części znajdują się jeden zewnątrz drugiego, w części zachodzą wzajem na siebie.

Rozpatrzmy działania elementarne, wykonalne na dwóch takich typach α i β.

Wyobraźmy sobie dwie mnogości M i N o typach $\overline{M} = \alpha$ i $\overline{N} = \beta$ i utwórzmy z nich nową uporządkowaną mnogość $M + N$ pod następującemi warunkami. Elementy M niechaj mają wewnątrz $M + N$ to samo położenie w n kierunkach, jakie miały w M, podobnież elementy mnogości N niechaj mają w $M + N$ względem siebie to samo położenie w n kierunkach, jakie miały w N, wreszcie niechaj w $M + N$ wszystkie elementy mnogości N mają w każdym z n kierunków położenie wyższe od wszystkich elementów mnogości N. Wszystkie mnogości $M + N$, czyniące zadość tym warunkom, są oczywiście mnogościami n-krotnie uporządkowanemi i podobnemi, i określają ten typ, który nazywamy $\alpha + \beta$. Mamy więc

$$\alpha + \beta = \overline{M + N},$$

gdzie α nazwijmy dla odróżnienia składnikiem pierwszym [augendus], β składnikiem drugim [addendus].

Stąd wynika łatwo stosowalność prawa łączności

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Prawo przemienności w ogólności się nie stosuje, gdyż $\alpha + \beta$ i $\beta + \alpha$ są różnemi typami.

Zauważmy jeszcze, że liczba kardynalna sumy $\alpha + \beta$ równa się sumie liczb kardynalnych odpowiadających typom α i β,

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}.$$

Dla otrzymania iloczynu $\alpha . \beta$, wyobraźmy sobie mnogość n o typie β, tak że $\overline{N} = \beta$, i oznaczmy elementy, z których składa się N, przez F_1, $F_2, \ldots F_\lambda \ldots$

Niechaj daléj $M_1, M_2, \ldots M_\lambda$ będą mnogości typu α, tak że

$$\overline{M_1} = \overline{M_2} \ldots = \overline{M_\lambda} = \ldots = \alpha.$$

Odwzorujmy wzajemnie te mnogości, tak że

$E_{1,1},\ E_{1,2} \ldots E_{1,\mu} \ldots\ldots$ będą elementami mnogości M_1,
$E_{2,1},\ E_{2,2} \ldots E_{2,\mu} \ldots\ldots$ „ „ „ M_2,
. . . .
$E_{\lambda,1},\ E_{\lambda,2} \ldots E_{\lambda,\mu} \ldots\ldots$ „ „ „ M_λ,
. . . .;

$E_{1,\mu}, E_{2,\mu} \ldots E_{\lambda,\mu}$ [$\mu = 1, 2 \ldots$] są odpowiadającemi sobie elementami mnogości $M_1, M_2, \ldots M_\lambda \ldots$

Utwórzmy nową mnogość MN z mnogości N w ten sposób, że w miejsce elementów $F_1, F_2, \ldots F_\lambda \ldots$ podstawiamy odpowiednio $M_1, M_2, \ldots M_\lambda \ldots$, przyczém wzajemność położenia podlegać ma następującym warunkom: Wszystkie elementy $E_{\lambda\mu}, E_{\lambda,\mu'}$ jednéj i téj saméj mnogości M_λ mają wewnątrz MN zachować względem siebie to samo położenie, jakie miały w M_λ; dla dwóch elementów $E_{\varkappa,\mu}$ i $E_{\lambda,\mu'}$ należących do różnych mnogości $M_\varkappa$ i M_λ należy przyjąć następujące rozróżnienie: 1.) Jeżeli $F_\varkappa$ i F_λ mają wewnątrz N w kierunku ν-ym położenie różne, to wzajemne położenie elementów $E_{\varkappa,\mu}$ i $E_{\lambda,\mu'}$ wewnątrz MN w kierunku ν-ym ma być to samo, jakiém jest położenie elementów $F_\varkappa$ i F_λ w rozmaitości N w kierunku ν-ym; 2.) Jeżeli $F_\varkappa$ i F_λ mają wewnątrz N w kierunku ν-ym położenie jednakowe, to położenie $E_{\varkappa,\mu}$ względem $E_{\varkappa,\mu'}$ wewnątrz MN w kierunku ν-ym ma być takie, jak położenie $E_{\varkappa,\mu}$ względem $E_{\varkappa,\mu'}$ wewnątrz $M_\varkappa$, albo, co na jedno wychodzi, jakiém jest położenie $E_{\lambda\mu}$ względem $E_{\lambda,\mu'}$ wewnątrz M_λ w kierunku ν-ym.

Wszystkie mnogości MN, utworzone według tego przepisu, są podobne, iloczyn zaś, im odpowiadający, $\alpha\beta$ określa się w ten sposób:

$$\alpha . \beta = \overline{MN}$$

gdzie α nazywamy czynnikiem pierwszym [mnożną], β — czynnikiem drugim [mnożnikiem].

Stosuje się tu prawo łączności

$$\alpha . (\beta . \gamma) = (\alpha . \beta)\, \gamma,$$

gdy tymczasem $\alpha . \beta$ jest w ogóle różne od $\beta . \alpha$.

Prawo rozdzielności

$$\alpha . (\beta + \gamma) = \alpha . \beta + \alpha . \gamma$$

ma tu miejsce.

Liczba kardynalna iloczynu dwóch typów równa się iloczynowi liczb kardynalnych czynników, t. j.

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} . \overline{\beta}.$$

Z danym typem n-krotnym α związane są ściśle inne typy, które nazywamy *sprzężonemi.*

Można wzajemność położenia właściwą typowi α przemienić w ten sposób, że położenia wzajemne jedności $e, e', e'' \ldots$ w kierunkach μ-ym i ν-ym przestawiają się, w innych zaś kierunkach pozostają bez zmiany. Takich przekształceń, które nazwać można *przestawieniami ze względu na kierunki* μ-y i ν-y, jest oczywiście $n(n-1)/2$, a wszystkie one, kolejno stosowane, dają wraz z typem danym wogóle $1.2 \ldots n$ typów sprzężonych.

Jeżeli odmienimy typ α przez to, że odwrócimy położenie jedności w jednym ν-ym kierunku, t. j. jeżeli położenie jedności e i e' w nowym typie będzie takiém, jakiém było położenie jedności e' i e w typie dawnym, to przekształcenie takie nazwać można *odwróceniem*. Takich odwróceń jest n, a kolejne ich stosowanie daje wraz z typem danym $2n$ typów różnych.

Wszystkich typów różnych sprzężonych z danym będzie zatém wogóle $2.n.1.2 \ldots n$.

Cantor zajmuje się jeszcze zagadnieniem o oznaczeniu liczby wszystkich typów porządkowych danéj liczby m, po rozwiązanie którego odsyłamy czytelnika do drugiéj z cytowanych prac lub do rozprawy H. C. Schwartza, Ein Beitrag zur Theorie der Ordnungstypen, 1888.

Teorya Cantora, któréj zarys przedstawiliśmy, zawiera w sobie cenne zadatki przyszłego rozwoju. Pomysły w niéj tkwiące, stosował Cantor już wcześniéj do badania rozmaitości punktowych [mówić o nich będziemy w tomie drugim], gdzie doszedł do wyników bardzo ważnych dla teoryi funkcyj. Nauka już teraz z tych pomysłów czerpie pożytek, przedewszystkiém zaś wpłynęły one na pogłębienie i udokładnienie badań analitycznych.

Hosted by Google

ROZDZIAŁ II.

TEORYA DZIAŁAŃ FORMALNYCH.

11. TEORYA GRASSMANNA I HANKELA.

Twórcą teoryi działań formalnych jest właściwie H. Grassmann[1], rozwinął zaś i uprzystępnił ją szerszym kołom Hankel. Jest ona urobiona na podstawie działań z liczbami całkowitemi, o których mówiliśmy w rozdziale poprzedzającym. Lecz teorya działań, przywiązanych do dziedziny specyalnéj, nie uwidocznia należycie związków ogólnych, jakie pomiędzy działaniami, niezależnie od istoty form im poddawanych, istnieją; nie pozwala przeto oddzielić wyraźnie tego, co charakteryzuje daną dziedzinę. Zadanie to spełnia teorya działań formalnych, którą stosować można do rozmaitych układów form.

O tém, jak rozumieć należy równość form, mówiliśmy już we wstępie [str. 10.]; co się zaś tyczy działań czyli połączeń, to uważać je należy za pewien proces myśli, za pomocą którego od dwóch lub więcéj form danych przechodzimy do formy nowéj, zwanéj wynikiem połączenia. W jaki sposób połączenia się odbywają, tego zgóry nie rozstrzygamy, badamy tylko prawa połączeń. W przedstawieniu téj rzeczy pójdziemy przeważnie za Hankelem, zmieniając nieco znakowanie i uzupełniając niektóre punkty teoryi[2].

Niechaj a, b, c . . . przedstawiają formy, które zamierzamy poddać rozmaitego rodzaju połączeniom czyli działaniom. Działania te

Hosted by Google

mają posiadać pewne własności formalne, stanowiące określenie każdego z nich i wyróżniające jedne od drugich.

Połączenie dwóch form oznaczać będziemy najczęściéj za pomocą symbolu $\Delta(a, b)$ lub też $\nabla(a, b)$. W przypadku, gdy działań różnych będzie więcéj, pisać będziemy

$$\Delta_1 (a, b), \Delta_2 (a, b) \ . \ . \ . \ \nabla_1 (a, b), \nabla_2 (a, b) \ldots ;$$

$\Delta (a, b, c)$ oznaczać będzie połączenie trzech form, $\nabla (a, b, c, d)$— połączenie czterech form i t. d. Znaczenie połączeń trzech i większéj [skończonéj] liczby form będzie dopiero ustanowione i wyjaśnione po ustanowieniu prawideł dla połączeń dwóch form.

Równanie

$$\Delta (a, b) = c$$

oznaczać ma, że wynik połączenia form a i b jest pewną formą c. Podobnież równanie

$$\nabla (a, b) = d$$

oznacza, że wynik innego połączenia tych samych form jest pewną formą d, równą formie c lub różną od niéj.

Niechaj będą dwa działania Δ i ∇. Zastosujemy pierwsze do dwóch form m i n, drugie do form a i b, i niechaj będzie

$$\Delta (m, n) = p$$
$$\nabla (a, b) = c \,.$$

Między temi dwoma działaniami ustanowimy związek następujący: jeżeli w pierwszém z równań zastąpimy m przez c, n przez b, to p równać się będzie a. *Założenie* to daje się wyrazić w ten sposób:

1. $$\Delta [\nabla (a, b), b] = a$$

i określa związek, zachodzący między formalnemi działaniami Δ i ∇, lub określa działanie ∇, gdy dane jest działanie Δ.

Obok tego związku przyjmijmy jeszcze, że działania Δ i ∇ są *jednowartościowe*, co ma oznaczać, że jeżeli działanie np. $\Delta(a, b)$ doprowadza raz do wyniku c, drugi raz do wyniku c', to formy c i c' są tożsamościowo równe. Toż samo rozumie się o działaniu $\nabla (a, b)$.

Z tych dwóch założeń daje się wyprowadzić nowa własność naszych działań, wyrażająca się następującém twierdzeniém:

Hosted by Google

"Jeżeli w działaniu $\Delta(a, b)$ lub $\nabla(a, b)$ pierwszą formę zmienimy, drugą zaś pozostawimy bez zmiany, to wynik działania zmienić się musi„.

W saméj rzeczy, niechaj będzie

$$\nabla(a, b) = c, \quad \nabla(a', b) = c'$$

gdzie a' różne od a; twierdzimy, że c' musi być różne od c. Gdyby bowiem c' równało się c, mielibyśmy

$$\nabla(a', b) = \nabla(a, b),$$

a łącząc obie strony z formą b za pomocą działania Δ:

$$\Delta[\nabla(a', b), b] = \Delta[\nabla(a, b), b];$$

Stosując wreszcie do obu stron wzór zasadniczy 1., otrzymalibyśmy

$$a' = a,$$

co się sprzeciwia założeniu.

Wynika stąd, że równanie

$$\nabla(x, b) = c$$

może mieć tylko *jedno* rozwiązanie, które możemy znaleźć, łącząc obie strony z formą b za pomocą działania Δ. Otrzymujemy wtedy na zasadzie wzoru 1.

$$x = \Delta(c, b),$$

a wstawiając znalezioną wartość do poprzedniego równania, związek

2. $$\nabla[\Delta(c, b), b] = c,$$

analogiczny ze związkiem 1. i określający działanie Δ, gdy daném jest działanie ∇. Na podstawie związku 2. możemy dowieść, że gdy a jest różne od a', to i $\Delta(a, b)$ jest różne od $\Delta(a', b)$.

Za określenie działań Δ i ∇ przyjęliśmy związek 1. i jednowartościowość obu tych działań; stąd wynikło powyższe twierdzenie i związek 2. Oczywista, że gdybyśmy zamiast równania 1. przyjęli za podstawę równania 2., to przyszlibyśmy do równania 1., jako do wyniku tego przyjęcia oraz jednowartościowości obu działań. Można zresztą uczynić i inne założenia, np. przyjąć za określenie działań związek 1. i założyć, że jedno z działań Δ i ∇ jest jednowartościowém i posiada własność, wyrażoną powyższém twierdzeniem; wyniknie stąd związek 2. oraz podobna własność drugiego z działań.

Hosted by Google

Dla rozszerzenia naszych działań na większą liczbę form, załóżmy, że do działania Δ stosuje się *prawo łączności*. Jeżeli mamy trzy formy, to prawo to wyraża, że otrzymamy jeden i ten sam wynik, łącząc pierwszą formę z wynikiem połączenia drugiéj i trzeciéj, czy też łącząc wynik połączenia pierwszéj i drugiéj formy z formą trzecią. Działania Δ, posiadające podobną własność—i tylko takie działania—nazywać będziemy *prostemi*. Działania ∇, związane z takiemi działaniami Δ na podstawie równań 1. lub 2., nazywać będziemy *odwrotnemi*. Własność łączności przedstawić możemy za pomocą wzoru

3. $$\Delta[a, \Delta(b, c)] = \Delta[\Delta(a, b), c].$$

Przez $\Delta(a, b, c)$ rozumieć będziemy którekolwiek z tych dwóch równych sobie wyrażeń 3.

Przy takiém założeniu, można już dowieść, że prawo łączności stosuje się do działania prostego nad czterema i więcéj formami. W saméj rzeczy, na zasadzie równania 3. mamy

$$\Delta[a, \Delta(b,c,d)] = \Delta\{a, \Delta[\Delta(b,c), d]\} = \Delta\{\Delta[a, \Delta(b,c)], d\} = \Delta[a, \Delta(b,c), d]$$

i także

$$\Delta[a, \Delta(b, c, d)] = \Delta\{a, \Delta[b, \Delta(c, d)]\} = \Delta[\Delta(a, b), \Delta(c, d)].$$

Każde z tych sześciu równych wyrażeń nazwiemy połączeniem $\Delta(a, b, c, d)$. W podobny sposób określić można połączenie jakiéjkolwiek [skończonéj] liczby form. Do wszystkich tych połączeń stosować się musi prawo łączności, jeżeli założymy, że ono stosuje się do trzech form, i jeżeli połączeniem n form nazwiemy połączenie jednéj formy z wynikiem połączenia $n-1$ pozostałych.

Określiwszy działania proste łącznościowe, podamy wynikające z określeń tych twierdzenia, wyrażające własności naszych działań. Własności te wyrazić się dają następującemi trzema wzorami:

4. $$\begin{aligned} \Delta[a, \nabla(b, c)] &= \nabla[\Delta(a, b), c] \\ \nabla[a, \Delta(c, b)] &= \nabla[\nabla(a, b), c] \\ \nabla[\Delta(a, c), b] &= \nabla[a, \nabla(b, c)] \end{aligned}$$

Pierwsza tych własności dowodzi się w sposób następujący. Niechaj będzie

$$x = \Delta[a, \nabla(b, c)]$$

Hosted by Google

Połączywszy obie strony z formą c zapomocą działania Δ, otrzymamy

$$\Delta(x, c) = \Delta\{\Delta[a, \nabla(b, c)], c,\}$$
$$= \Delta\{a, \Delta[\Delta(b, c), c]\}$$
$$= \Delta(a, b);$$

stąd

$$\nabla[\Delta(x, c), c] = \nabla[\Delta(a, b), c],$$
$$x = \nabla[\Delta(a, b), c],$$

czy li

$$\Delta[a, \nabla(b, c)] = \nabla[\Delta(a, b), c] \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Drugą własność okażemy, zakładając

$$x' = \nabla[\nabla(a, b)\, c].$$

Połączenie obu stron z formą c za pomocą działania Δ daje

$$\Delta(x', c) = \Delta\{\nabla[\nabla(a, b), c], c\}$$
$$= \nabla(a, b),$$

skąd

$$\Delta[\Delta(x', c), b] = \Delta[\nabla(a, b), b] = a,$$

a więc także

$$\Delta[x', \Delta(c, b)] = a,$$

Połączywszy obie strony z formą $\Delta(c, b)$ za pomocą działania ∇ otrzymamy

$$x' = \nabla[a, \Delta(c, b)]$$

czyli

$$\nabla[\nabla(a, b), c] = \nabla[a, \Delta(c, b)] \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Dla okazania trzeciéj własności połóżmy

$$x'' = \nabla[\Delta(a, c), b]$$

i połączmy obie strony z formą b za pomocą działania Δ:

$$\Delta(x'', b) = \Delta\{\nabla[\Delta(a, c,), b], b\}$$
$$= \Delta(a, c).$$

Łącząc obie strony z formą c przy pomocy działania ∇, otrzymujemy na podstawie pierwszéj dowiedzionéj już własności

$$\Delta\left[x'', \nabla(b, c)\right] = a;$$

wreszcie łącząc obie strony z formą $\nabla(b,c)$ za pomocą działania ∇, otrzymujemy

$$x'' = \nabla\left[a, \nabla(b, c)\right]$$

czyli

$$\nabla\left[\Delta(a, c), b\right] = \nabla\left[a, \nabla(b, c)\right]. \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Z jednowartościowości działań Δ i ∇ wyprowadziliśmy własność, że gdy w każdém z tych działań druga forma zostaje stałą, pierwszą zaś zmieniamy, to i wynik połączenia zmienia się. Teraz przyjmujemy, że działanie $\Delta(a, b)$ jest *zupełnie* jednowartościowém, t. j. że wynik jego zmienia się także, gdy pierwsza forma pozostaje stałą, druga zaś ulega zmianie. Przy takiém założeniu, z równania $\Delta(a, b') = \Delta(a, b)$ wnieść należy, że $b' = b$. Z zupełnéj jednowartościowości działania Δ wynika, jak o tém łatwo przekonać się można, zupełna jednowartościowość działania ∇.

Określmy formę m, któréj połączenie za pomocą działania prostego Δ z formą jakąkolwiek a, niechaj daje wynik równy formie a. Formę, mającą tę własność, nazywać będziemy *modułem* działania Δ. [Grassmann nazywa ją "formą obojętną"]. Określenie modułu zawiera się w równaniu

5. $$\Delta(a, m) = a.$$

Ponieważ na zasadzie prawa łączności:

$$\Delta\left[a, \Delta(m, b)\right] = \Delta\left[\Delta(a, m), b\right],$$

przeto na podstawie 5. będzie

$$\Delta\left[a, \Delta(m, b)\right] = \Delta(a, b),$$

a że działanie Δ jest jednowartościowém, otrzymujemy zatém

6. $$\Delta(m, b) = b.$$

Równania 5. i 6. wykazują, że porządek, w jakim przy pomocy działania prostego łączymy formę z modułem, nie ma wpływu na wynik działania.

Hosted by Google

Zbadajmy teraz wynik działania odwrotnego $\nabla(a,m)$; w tym celu połóżmy

$$x = \nabla(a,m)$$

i połączmy obie strony z modułem m za pomocą odpowiedniego działania prostego Δ; będzie tedy

$$\Delta(x,m) = \Delta[\nabla(a,m),m].$$

Stosując do strony pierwszéj równanie 5., do drugiéj zaś równanie 1., otrzymujemy

7. $$x = \nabla(a,m) = a,$$

Wzór ten wyraża, że łącząc jakąkolwiek formę z modułem, jako formą drugą, za pomocą działania odwrotnego, dochodzimy do wyniku równego formie danéj.

Z równania znów 2., gdy w niém formę c zastąpimy modułem m, otrzymujemy

$$\nabla[\Delta(m,b),b] = m,$$

a więc na zasadzie wzoru 7.

8. $$\nabla(b,b) = m.$$

Wzór ten wyraża, że moduł działania Δ uważać można za wynik działania odwrotnego ∇, wykonanego na dwóch jakichkolwiek formach równych.

Formę, określoną za pomocą działania $\nabla(m,b)$, nazywać będziemy *formą odwrotną* względem formy, $\Delta(m,b)$ równéj b; oznaczamy ją dla krótkości przez b_m, tak że

9. $$\nabla(m,b) = b_m$$

jest określeniem formy odwrotnéj.

Z tego określenia wynika, że formą odwrotną względem formy b_m jest forma b. W saméj rzeczy,

$$\begin{aligned}(b_m)_m = \nabla(m,b_m) &= \nabla[m,\nabla(m,b)]\\ &= \nabla[\Delta(m,b),m]\\ &= \nabla(b,m) = b.\end{aligned}$$

Wprowadzenie form odwrotnych daje nam możność zamiany działania prostego na odwrotne i odwrotnego na proste. Istotnie, pierwsze i trzecie z równań 4., gdy w nich położymy $b = m$, dają

10. $$\Delta(a, c_m) = \nabla(a, c); \quad \Delta(a, c) = \nabla(a, c_m).$$

Dotąd badaliśmy własności działań, oparte na prawie łączności; teraz zbadajmy wnioski, jakie wynikną z założenia, że działania proste ulegają prawu przemienności, które wyraża się wzorem

11. $$\Delta(a, b) = \Delta(b, a).$$

Przy takiém założeniu, wzory 1. 2. 4. przechodzą w następujące.

1′. $$\Delta[b, \nabla(a, b),] = a.$$

2′. $$\nabla[\Delta(b, c), b.] = c.$$

4′. $$\begin{aligned} \Delta[\nabla(b, c), a] &= \nabla[\Delta(b, a), c] \\ \nabla[a, \Delta(b, c)] &= \nabla[\nabla(a, b), c] \\ \nabla[\Delta(c, a), b] &= \nabla[a, \nabla(b, c)]. \end{aligned}$$

Do téj pory uważaliśmy jedno działanie proste Δ i odpowiadające mu działanie ∇. Przejdźmy teraz do ustanowienia związków między dwoma różnemi działaniami prostemi.

Niechaj będą dwa działania proste i łączne Δ_1 i Δ_2, połączone ze sobą następującemi równaniami:

12. $$\begin{aligned} \Delta_2[\Delta_1(a, b), c] &= \Delta_1[\Delta_2(a, c), \Delta_2(b, c)], \\ \Delta_2[a, \Delta_1(c, d)] &= \Delta_1[\Delta_2(a, c). \Delta_2(a, d)], \end{aligned}$$

wyrażającemi *prawo rozdzielności*. Dowiedziemy, że jedno z tych działań, a mianowicie działanie Δ_1, jest przemienne.

W tym celu, w pierwszém z równań 11. zastąpmy c przez $\Delta_1(c,d)$, w drugiém a przez $\Delta_1(a, b)$, otrzymamy wtedy

$$\begin{aligned} \Delta_2[\Delta_2(a, b), \Delta_1(c, d)] &= \Delta_1\{\Delta_2[a, \Delta_1(c,d)], \Delta_2[b, \Delta_1(c, d)]\} \\ \Delta_2[\Delta_1(a\ b), \Delta_1(c, d)] &= \Delta_1\{\Delta_2[\Delta_1(a, b), c], \Delta_2[\Delta_1(a, b), d]\} \end{aligned}$$

Z równości pierwszych stron tych wzorów wynika równość stron drugich:

$$\Delta_1\{\Delta_2[a, \Delta_1(c,d)], \Delta_2[b, \Delta_1(c,d)]\} = \Delta_1\{\Delta_2[\Delta_1(a,b), c], \Delta_2[\Delta_1(a,b), d]\}$$

Przekształcając stronę pierwszą tego równania przy pomocy pierwszego z równań 11., drugą zaś przy pomocy drugiego z tych równań, otrzymamy

$$\begin{aligned} &\Delta_1\{\Delta_1[\Delta_2(a,c), \Delta_2(a,d)], \Delta_1[\Delta_2(b,c), \Delta_2(b,d)]\} \\ &= \Delta_1\{\Delta_1[\Delta_2(a,c), \Delta_2(b,c)], \Delta_1[\Delta_2(a,d), \Delta_2(b,d)]\}. \end{aligned}$$

Hosted by Google

Ponieważ działanie Δ_1 jest łączne, przeto równanie to napisać można pod postacią

$$\Delta_1[\Delta_2(a,c),\Delta_2(a,d),\Delta_2(b,c),\Delta_2(b,d)]=\Delta_1[\Delta_2(a,c).\Delta_2(b,c),\Delta_2(a,d),\Delta_2(b,d)]$$

Obie strony różnią się tu tylko porządkiem wyrazów; kładąc więc dla skrócenia

$$\Delta_2(a,c)=p,\ \Delta_2(a,d)=q,\ \Delta_2(b,c)=r,\ \Delta_2(b,d)=s$$

i stosując do równania

$$\Delta_1(p,q,r,s)=\Delta_1(p,r,q,s)$$

prawo łączności, możemy napisać

$$\Delta_1[\Delta_1(p,q,r),s]=\Delta_1[\Delta_1(p,r,q),s],$$

skąd, z przyczyny jednowartościowości działania Δ_1, otrzymujemy

$$\Delta_1(p,q,r)=\Delta_1(p,r,q)$$

co można napisać pod postacią

$$\Delta_1[p,\Delta_1(q,r)]=\Delta_1[p,\Delta_1(r,q)].$$

Stąd też, z powodu jednowartościowości działania Δ_1, otrzymujemy

$$\Delta_1(q,r)=\Delta_1(r,q),$$

co dowodzi przemienności działania Δ_1. Ważne to twierdzenie w teoryi działań formalnych możemy wyrazić w sposób następujący:

"Jeżeli dwa różne działania jednowartościowe i łączne są związane z sobą prawem rozdzielności, to wtedy jedno z nich musi być przemienne„.

W podobny sposób możnaby dowieść, że działanie Δ_2 jest przemienne, jeżeli czyni zadość następującym dwóm związkom

$$\Delta_2[\Delta_2(a,b),c]=\Delta_2[\Delta_1(a,c),\Delta_1(b,c)],$$
$$\Delta_1[a,\Delta_2(c,d)]=\Delta_2[\Delta_1(a,c),\Delta_1(a,d)].$$

Związek, wyrażony ogólnie równaniem 12., obejmuje w sobie związek, zachodzący między dodawaniem i mnożeniem liczb; wynika z niego, że prawo rozdzielności, wiążące mnożenie i dodawanie, pociąga za sobą przemienność dodawania, jeżeli założymy, że oba działania są jednowartościowe i łączne. Przemienność zaś mnożenia nie jest koniecznym wynikiem tego założenia; istotnie, mnoże-

Hosted by Google

nie, jak to przekonamy się na przykładach w rozmaitych dziedzinach, może nie być przemienném [3].

Własności formalne działań Δ_1 i Δ_2 oraz związek 12. pomiędzy niemi nie wystarczają wszakże do *zupełnego* określenia dodawania i mnożenia w każdéj specyalnéj dziedzinie, wymagającéj jeszcze odpowiedniego ustanowienia w niéj znaczenia dodawania.

Możemy wyprowadzić wzór analogiczny do wzoru 12., a wyrażający związek między działaniem Δ_2 i działaniem odwrotnem ∇_1. W saméj rzeczy, według określenia tego działania, mamy

$$\Delta_1 [\nabla_1(a, b), b] = a;$$

łącząc obie strony z formą c za pomocą działania Δ_2, otrzymujemy

$$\Delta_2 \{ \Delta_1 [\nabla_1 (a, b), b] c, \} = \Delta_2 (a, c).$$

Do strony pierwszéj możemy zastosować pierwszy z wzorów 12., zastępując w nim a przez $\nabla_1 (a, b)$, otrzymamy wtedy

$$\Delta_1 \{ \Delta_2 [\nabla_1 (a, b), c], \Delta_2 (b, c) \} = \Delta_2 (a, c)$$

Łącząc obie strony z formą $\Delta_2 (b, c)$ za pomocą działania odwrotnego ∇_1, mieć będziemy po redukcyi

12'. $$\Delta_2 [\nabla_1 (a, b), c] = \nabla_1 [\Delta_2 (a, c), \Delta_2 (b, c)]$$

c. b. d, o.

Dziedzina form $a, b, c, \ldots$ nad któremi wykonywamy działania proste, zawiera według naszego założenia, wszystkie wyniki działań prostych $\Delta (a, b), \Delta (a, b c) \ldots$ Wykonywając w niéj i inne działania proste $\Delta_2 (a, b), \Delta_3 (a, b) \ldots$, przyjmowaliśmy, że wyniki tych działań do naszéj dziedziny należą, a równania takie jak 12., określają związki, zachodzące pomiędzy działaniami prostemi Δ_1 i Δ_2. Związek pomiędzy trzema działaniami prostemi jednowartościowemi Δ_2, Δ_2, Δ_3, może mieć np. postać następującą

$$\Delta_2 [\Delta_3 (a, b), \Delta_3 (a, c)] = \Delta_3 [a, \Delta_1 (b, c)],$$

przy założeniu, że wyniki działania Δ_3 prowadzą do form, należących do dziedziny pierwotnéj; już z tego związku wnieść można, że działanie Δ_3 względem form b i c jest przemiennem, jeżeli działania Δ_1 i Δ_2 są przemiennemi. Rozmaitości podobnych związków nie podobna z góry wyczerpać: każde badanie specyalne nasuwa je umysłowi. Najprostszym byłby taki system form, w którym wszelkie wyniki

Hosted by Google

działań prostych i ich kombinacyj dają się przedstawić, jako wyniki jednego działania prostego Δ, stosowanego do form pierwotnych. Taki system stanowią dodawanie, mnożenie i potęgowanie w układzie liczb całkowitych.

Co się tyczy działań odwrotnych, to związek ich z odpowiedniemi działaniami prostemi określamy za pomocą wzorów 1. i 2. Jeżeli wyniki tych działań należą wprost do form badanych, to wykonywanie działań prostych nad niemi podlega prawom, wyżéj przedstawionym; jeżeli zaś te wyniki nie znajdują się w dziedzinie pierwotnéj, to równania powyższe określają nowe formy, które do téj dziedziny wcielamy. Powstaje tedy pytanie, w jaki sposób wykonywać należy połączenia form dawnych z nowemi i nowych pomiędzy sobą. Zasada zachowania uczy nas, jak należy postąpić; według jéj wymagań, winniśmy połączenia nowych form z dawnemi i nowych pomiędzy sobą określić w ten sposób, aby one czyniły zadość tym samym własnościom formalnym, jakim czynią zadość działania na formach pierwotnych.

Niechaj $\nabla(a, b)$, $\nabla(c, d)$ oznaczają formy dawne; na podstawie równań 4. otrzymamy z łatwością wzór

$$13. \qquad \Delta[\nabla(a, b), \nabla(c, d)] = \nabla[\Delta(c, a), \Delta(d, b)],$$

który przyjmujemy za określenie działania prostego i w przypadku ogólnym, t. j. i wtedy, gdy jedna lub obie formy $\nabla(a,b)$, $\nabla(c,d)$ nie znajdują się w dziedzinie pierwotnéj.

Ze związku 13. wnieść można, że działanie proste nad nowemi formami: 1-o jest przemienne, 2-o jest łączne. Zbadajmy jeszcze działanie odwrotne, wykonane na dwóch formach nowych $\nabla(a, b)$ i $\nabla(c, d)$; w tym celu połóżmy

$$\nabla[\nabla(a, b), \nabla(c, d)] = x,$$

gdzie x niechaj będzie wynikiem działania $\nabla(y, z)$, w którem y i z są formami dziedziny pierwotnéj.

Łącząc obie strony z formą $\nabla(c,d)$ za pomocą działania Δ, otrzymujemy na zasadzie wzoru 13.

$$\nabla(a, b) = \nabla[\Delta(y, c), \Delta(z, d)].$$

Aby z tego równania wyprowadzić związek między formami szukanemi y i z a danemi, zauważmy, że z równania

$$\nabla[\Delta(a,u),\Delta(b,u),] = \Delta[\nabla(a,b),\nabla(u,u)],$$

w założeniu, że równania, określające moduł działania, odnoszą się do form jakichkolwiek, nowych czy dawnych, otrzymujemy

$$\nabla[\Delta(a,u),\Delta(b,u)] = \nabla(a,b).$$

Temu równaniu uczyni się zadość, gdy założymy

$$a = \Delta(a,u),\ b = \Delta(b,u).$$

Wogóle staje się zadość równaniu

$$\nabla(e,f) = \nabla(g,h),$$

gdy przyjmiemy

$$g = \Delta(e,u),\ h = \Delta(f,u).$$

Stosując to do równania

$$\nabla(a,b) = \nabla[\Delta(y,c),\Delta(z,d)],$$

otrzymujemy

$$\Delta(y,c) = \Delta(a,u),\ \Delta(z,d) = \Delta(b,u),$$

skąd dochodzimy do rozwiązań

$$y = \nabla[\Delta(a,u),c],\ z = \nabla[\Delta(b,u),d],$$

które można przedstawić pod postacią

$$y = \Delta[a,\nabla(u,c)],\ z = \Delta[b,\nabla(u,d,],$$

gdzie u jest formą dowolną. Jeżeli w szczególności weźmiemy taką formę u, aby było $\nabla(u,c) = d$, t. j.

$$u = \Delta[\nabla(u,c),c] = \Delta(d,c),$$

to otrzymamy

$$y = \Delta(a,d),\ z = \Delta(b,c)$$

co wskazuje, że formy y i z, przy powyższém założeniu o własności modułu; zawsze znaleźć można, że przeto forma

$$x = \nabla(y,z) = \nabla[\Delta(a,d)\,\Delta(b,c)]$$

zawsze znajdzie się w dziedzinie uzupełnionéj form dawnych i nowych.

Wykazaliśmy tym sposobem, ze uzupełniona dziedzina jest wystarczająca i po włączeniu w zakres badania działań odwrotnych

Hosted by Google

pomiędzy formami nowemi; czyli innemi słowy, że dziedzina form dawnych i nowych mieści w sobie wszystkie możliwe wyniki działań, jakie otrzymujemy przy łączeniu jéj form za pomocą działań Δ i ∇. Toż samo powiedzieć można o każdéj innéj parze działań.

Przy stosowaniu teoryi formalnéj do poszczególnych rozmaitości, trzeba przedewszystkiém określić, co w tych rozmaitościach przyjmujemy za dziedzinę form pierwotnych czyli elementów. Określenie to wyrażamy, wskazując proces, za pomocą którego przechodzimy od elementu do elementu w danéj dziedzinie, a następnie badamy, czy istnieje dla tych form działanie proste, mające cechy zasadnicze dodawania. Po znalezieniu dodawania, badamy, czy istnieje inne działanie proste, związane z poprzedniém za pomocą równań 12. Niekiedy przyjęcie podobnego równania dla przypadków szczególnych pozwala już na uogólnienie, gdy się uwzględni istotę badanéj dziedziny. Po określeniu własności działań prostych, przechodzimy do działań odwrotnych, które za pomocą znanych równań określamy i których wyniki sposobem wyżéj opisanym badamy.

Teorya powyższa stosuje się do działań elementarnych i do ich kombinacyj, przy założeniu, że tak liczba elementów jak i działań, kolejno stosowanych jest skończoną. Kolejne stosowanie działań do elementów danych prowadzi do pewnych form liczbowych, i dla tego teorya działań stanowi istotną podstawę rachunku elementarnego takich form liczbowych, jest podstawą Arytmetyki i Algebry. Przypadki, w których liczba elementów i liczba kolejnych działań, lub jedna i druga są nieskończone, należą w ogóle do dziedziny Analizy wyższéj. Wreszcie teorya działań może być rozwiniętą i w innym kierunku, wypływającym ze spostrzeżenia, że pojęcie dodawania i mnożenia można objąć w jedném pojęciu działania prostego, któremu, jeżeli z góry nie zakładamy przemienności, odpowiadają dwa działania odwrotne. Tą drogą poszedł Schröder, któremu zawdzięczamy pierwsze w tym kierunku badania [4].

Przedstawimy tu zastosowanie powyższéj teoryi do dziedziny liczb całkowitych, to jest do szeregu

$$1, 2, 3, 4 \ldots,$$

którego wyrazy otrzymujemy kolejno w następujący sposób

$$2 = 1 + 1,\ 3 = 2 + 1, \ldots$$

Hosted by Google

tak że w ogólności liczba, bezpośrednio następująca po liczbie n, jest równa $n+1$.

Proces ten, za pomocą którego przechodzimy od elementu do elementu, jest szczególnym przypadkiem działania zasadniczego dla naszego szeregu. Działanie to, dodawanie, określamy za pomocą równań

$$a+(b+1)=(a+b)+1$$
$$a+1=1+a$$

[porówn. art. 8.], które nazwijmy pewnikami dodawania [Helmholtz nazywa pierwsze z nich pewnikiem Grassmanna][5]. Działanie odwrotne, odejmowanie, określamy za pomocą równania , odpowiadającego równaniu 1.

1*a*. $$(a-b)+b=a$$

Dodawanie jest jednowartościowém, bo jeżeli $a+b$ doprowadza raz do sumy c, drugi raz do sumy c', to według pierwszego pewnika tego działania musi być

$$a+(b+1)=c+1=c'+1,$$

stąd oczywiście wynika $c=c'$. Stąd na zasadzie wyłożonéj teoryi wynika, że jeżeli w działaniu $a+b$ lub w działaniu $a-b$ zmienimy pierwszą liczbę a, to wynik działania zmienić się musi, a więc i równanie $x-b=c$ może mieć jedno tylko rozwiązanie.

Związkowi 2. odpowiada w naszym przypadku związek

2*a*. $$(a+b)-b=a.$$

Równaniu 3. odpowiada równanie

3*a*. $$a+(b+c)=(a+b)+c,$$

wyrażające prawo łączności. Wynika ono z pierwszego równania, określającego dodawanie. W saméj rzeczy, zakładając, że wzór 3*a* sprawdza się dla danéj liczby c, możemy stwierdzić, że sprawdza się i dla liczby $c+1$, gdyż na zasadzie pierwszego pewnika mamy

$$a+[(b+c)+1]=[a+(b+c)]+1;$$

kładąc po stronie drugiéj w miejsce pierwszego wyrazu jego wartość z równania 3*a*, a następnie stosując znowu pierwszy pewnik dodawania, otrzymujemy:

$$a+[b+(c+1)]=(a+b)+(c+1),$$

Hosted by Google

a ponieważ równanie $3a$ jest oczywiście prawdziwém dla $c = 1$, więc jest prawdziwém dla $c = 2, 3 \ldots$, t. j. ogólność jego jest stwierdzona.

Równaniom 4. odpowiadają następujące:

$$a + (b - c) = (a + b) - c$$

4 a. $$a - (c + b) = (a - b) - c$$

$$(a + c) - b = a - (b - c)$$

Modułem dodawania, określonym za pomocą równania 5., jest zero, czyniące zadość równaniu

5 a. $$a + 0 = a,$$

skąd wynika:

6 a. $$0 + b = b,$$

7 a. $$a - 0 = a,$$

8 a. $$b - b = 0.$$

Zero, równe $b - b$ lub $1 - 1$, wprowadźmy jako nową liczbę do naszego szeregu, który tym sposobem będzie:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots\ldots$$

Formy odwrotne określamy za pomocą równania, odpowiadającego równaniu 9., mianowicie za pomocą równania

9 a. $$0 - b = b_m.$$

Formy te nazywami liczbami *ujemnemi* i oznaczamy przez $-b$; szereg liczb ujemnych będzie:

$$-1,\ -2,\ -3,\ -4 \ldots$$

Równaniom 10. odpowiadają wzory

10 a. $$a + (-c) = a - c, \quad a + c = a - (-c).$$

[Liczbami ujemnemi zajmiemy się w rozdziale IV.].

Równaniu 11., wyrażającemu prawo przemienności, odpowiada równanie

11 a. $$a + b = b + a,$$

które w naszéj dziedzinie pierwotnéj wynika bezpośrednio z pewni-

Hosted by Google

ków dodawania. Z powodu przemienności dodawania, równania 1′, 2′ i 4′ przyjmują obecnie postać:

1′a. $$b + (a-b) = a.$$

2′a. $$b + a - b = a$$

4′a. $$\begin{aligned} (b-c) + a &= (b+a) - c, \\ a - (b+c) &= (a-b) - c, \\ (c+a) - b &= a - (b-c). \end{aligned}$$

Mnożenie jest drugiém działaniem prostém Δ_2, które możemy określić za pomocą związku jego z dodawaniem, wyrażonego równaniami 12. Jeżeli za znak działania Δ_2 przyjmiemy kropkę, to równaniom 12. odpowiadać będą związki

$$(a+b).c = a.c + b.c$$
$$a.(c+d) = a.c + a.d.$$

Wystarczy wszakże do określenia mnożenia w naszym układzie przyjąć prawo rozdzielności dla przypadku mniéj ogólnego

$$a.(c+1) = a.c + a$$

i następujące założenie, dotyczące modułu mnożenia, którym jest liczba 1., a mianowicie

$$a.1 = a.$$

Z tych założeń wynikają już wszystkie własności mnożenia.

Określiwszy jeszcze działanie odwrotne za pomocą wzoru,

1b. $$\frac{a}{b}.b = a,$$

możemy z łatwością napisać następujące wzory, odpowiadające wzorom, stosującym się do dodawania i odejmowania:

2b. $$\frac{a.b}{b} = a$$

3b. $$a.(b.c) = (a.b).c$$

Hosted by Google

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a.b}{c}$$

4b. $$\frac{a}{c.b} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}$$

$$\frac{a.c}{b} = \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}$$

5*b*. odpowiada założeniu $a \cdot 1 = a$

6*b*. „ „ $1 \cdot a = a$

7b. $$\frac{a}{1} = a$$

8b. $$\frac{b}{b} = 1$$

9b. $$\frac{1}{b} = b_m$$

Wzór ten jest określeniem liczby odwrotnéj, zwanéj tu *ułamkową*. Szereg liczb ułamkowych [prostych] jest następujący:

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots\ldots$$

Równaniom 10. odpowiadają następujące:

10b. $$a \cdot \left(\frac{1}{c}\right) = \frac{a}{c}, \qquad a.c = \frac{a}{\frac{1}{c}}.$$

[Liczbami ułamkowemi zajmiemy się w rozdziale III].

Wzory 5*b*. i 6*b*. wyrażają w przypadku szczególnym prawo przemienności, które łatwo uogólnić. Przemienność w przypadku dwóch czynników przedstawia wzór:

11b. $$a \cdot b = b \cdot a,$$

a stąd wynikają następujące własności:

1'b. $$b \cdot \frac{a}{b} = a$$

2'b. $$\frac{b \cdot a}{b} = a$$

Hosted by Google

$$\frac{b}{c}\,.\,a = \frac{b.a}{c}$$

4'b.
$$\frac{a}{b.c} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}$$

$$\frac{c.a}{b} = \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}$$

Równaniu 12'. odpowiada wzór

12'b. $$(a-b)\,.\,c = a\,.\,c - b\,.\,c,$$

który dopełniamy, przyjmując

$$0\,.\,c = 0,$$

a gdy zachowamy i dla tego przypadku prawo przemienności,

$$c\,.\,0 = 0.$$

Ostatnia dwa równania wyrażają, że jeżeli jeden z czynników jest zerem, to iloczyn jest zerem.

Naodwrót, iloczyn dwóch liczb może być zerem tylko wtedy, jeżeli przynajmniéj jeden z czynników jest zerem.

Z powyższych równań wynika

$$\frac{0}{c} = 0.$$

We wszystkich poprzednich wzorach dzielniki należy uważać za liczby różne od zera [dzielenie przez 0 na teraz z dziedziny działań wyłączamy].

Opierając się na powyższych wzorach, możemy jeszcze dowieść równości następujących:

$$\frac{a}{d} \pm \frac{b}{d} = \frac{a \pm b}{d}$$

14.
$$\frac{a}{b}\,.\,\frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$$

$$\frac{a}{b}\,.\,\frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.c}$$

Pierwsze dwa wzory można rozszerzyć do trzech i więcéj składników lub czynników.

Hosted by Google

12. TEORYA DEDEKINDA.

W przedstawionéj w poprzednim artykule teoryi działań, myśl podstawową stanowiło łączenie form, należących do pewnéj dziedziny, według praw, utworzonych na podobieństwo prawideł, jakim podlegają działania na liczbach całkowitych. Dedekind wystąpił niedawno [6] z nową teoryą, któréj podstawę stanowi zasada odwzorowania, stosowana już przez nas w art. 9. do szeregu liczb całkowitych. Według poglądu Dedekinda, liczby są swobodnemi tworami ducha ludzkiego, są środkiem łatwego i ścisłego przedstawiania rozmaitości rzeczy; cała umiejętność liczb polega na zdolności umysłu do wzajemnego przyporządkowania rzeczy, do ustanawiania pomiędzy niemi odpowiedniości.

Odwzorowaniem φ układu elementów nazywa Dedekind prawo, według którego do każdego elementu układu S należy przedmiot oznaczony s, nazwany *obrazem* elementu s, a który przedstawić można pod postacią $\varphi(s)$. Mówimy, że $\varphi(s)$ *odpowiada* elementowi s, że $\varphi(s)$ przez odwzorowanie φ *powstaje* z s, lub wreszcie, że s za pomocą odwzorowania φ *przechodzi* w $\varphi(s)$. Przykładem takiego odwzorowania jest już samo nadawanie nazw oznaczonych lub znaków elementom układu; najprostszém zaś odwzorowaniem jest to, przez które elementy układu przechodzą same w siebie. Takie odwzorowanie nazywamy *tożsamościowém.*

Odwzorowanie nazywa się *podobném* [wyraźném], jeżeli różnym elementom a i b układu S odpowiadają zawsze obrazy różne $a'=\varphi(a)$ i $b'=\varphi(b)$. Ponieważ w tym przypadku z równości $s'=t'$ wynika odwrotnie równość $s=t$, zatém każdy z elementów układu $S'=\varphi(S)$ jest obrazem s' pewnego zupełnie oznaczonego elementu układu S. Odwzorowanie tedy, za pomocą którego od układu S' przechodzimy do układu S, jest również podobném. Oznaczmy je przez $\overline{\varphi}$, będzie tedy $\overline{\varphi}(S')=S$. Odwzorowanie, *złożone* z odwzorowań φ i $\overline{\varphi}$, a które oznaczmy przez $\overline{\varphi}\varphi$, prowadzi do układu pierwotnego, jest więc odwzorowaniem tożsamościowém.

Dwa układy R i S nazywają się *podobnemi*, jeżeli istnieje takie odwzorowanie podobne φ, że $\varphi(S)=R$ lub $\overline{\varphi}(R)=S$.

Z tych określeń wynika, że każdy układ jest podobny do siebie samego; że jeżeli dwa układy R i S są podobne, to każdy układ, podobny do układu R, jest podobny do układu S.

Na téj zasadzie można wszystkie układy podzielić na *klasy*. Do jednéj klasy należą wszystkie—i tylko te wszystkie—układy $Q,R,S,\ldots$ które są podobne do jednego z nich R; ten układ R można uważać za przedstawiciela klasy. Jeżeli R i S są układy, należące do jednéj klasy, to każda część układu R jest podobna do pewnéj części układu R. [Częścią układu R nazywa się układ R', którego każdy element jest elementem układu R; częścią *właściwą* nazywa się układ R', jeżeli przytém nie jest identyczny z układem R, to jest jeżeli w R jest przynajmniéj jeden element, którego w R' niema].

Jeżeli stosując odwzorowanie [podobne lub niepodobne] φ do układu S, otrzymujemy układ $\varphi(S)$, który jest częścią pewnego układu Z, to $\varphi(S)$ nazywamy "odwzorowaniem układu S w układzie Z„. Odwzorowanie to możemy wyrazić w ten sposób

$$\varphi(S) \ni S$$

gdzie znak $\ni$ oznacza, że układ pierwszy jest częścią drugiego.

Każdy układ, którego obraz jest częścią samego układu, nazywa Dedekind *łańcuchem* [Kette]. Zwracamy uwagę na to, że nazwa łańcucha stosuje się do układu lub do części układu ze względu na odwzorowanie oznaczone φ; przy inném odwzorowaniu układ może nie być łańcuchem.

Łatwo dowieść, że obraz łańcucha jest także łańcuchem, i, jeżeli pewien układ A jest częścią łańcucha, to i obraz jego jest częścią tegoż łańcucha.

Niechaj układ A będzie częścią układu S; wyobraźmy sobie wewnątrz S wszystkie łańcuchy, których A jest częścią. Układ A_0, którego elementami są wszystkie elementy wspólne tym łańcuchom, jest oczywiście sam łańcuchem; Dedekind nazywa go *łańcuchem układu A* [7].

Układy bywają skończone i nieskończone. Układ nazywa się *nieskończonym*, gdy jest podobny do części właściwéj samego siebie; w przeciwnym razie jest *skończonym*. Wynika stąd, że każdy układ, składający się z pojedyńczego elementu, jest skończony, bo nie posiada wcale części właściwéj [inaczéj mówiąc, część właściwa tego układu nie zawiera wcale elementów].

Hosted by Google

Dedekind dowodzi istnienia układów nieskończonych w następujący sposób:

Świat moich myśli albo ogół S wszystkich rzeczy, które mogą być przedmiotem mojego myślenia, jest nieskończony. Gdy bowiem s jest elementem układu S, to myśl s', że s jest przedmiotem mojéj myśli, jest także elementem układu S. Jeżeli s' będziemy uważali za obraz elementu s, t. j. za $\varphi(s)$, to odwzorowanie $\varphi(S)$, jakie tym sposobem otrzymujemy, ma tę własność, że obraz S' jest częścią układu S i mianowicie częścią właściwą, bo w S zachodzą elementy [n. p. moje własne *ja*], które są różne od każdéj takiéj myśli s', a więc nie są w S' zawarte. Daléj widoczna, że jeżeli a i b są różnemi elementami układu S, to i ich obrazy a' i b' są różne, odwzorowanie φ jest podobne, układ S-nieskończony [8].

Z poprzedzającego wynika: że jeżeli R i S są układy podobne, to R jest układem skończonym lub nieskończonym, stosownie do tego, czy układ S jest skończony lub nieskończony; że każdy układ, podobny do części układu skończonego, jest sam skończony.

Układ N nazywa się *pojedyńczo-nieskończonym*, jeżeli istnieje takie odwzorowanie φ, w skutek którego układ N jest łańcuchem elementu, nie zawartego w obrazie $\varphi(N)$. Ten element nazywamy elementem *zasadniczym*, oznaczamy go przez 1, i mówimy, że układ pojedyńczo-nieskończony jest przez odwzorowanie φ *uporządkowanym*. Warunki, którym czyni zadość układ pojedyńczo-nieskończony, można w skróceniu przedstawić w sposób następujący:

α. $N' \ni N$,
β. $N = 1_0$,
γ. Element 1 nie zawiera się w N',
δ. Odwzorowanie φ jest podobne.

W każdym układzie nieskończonym S zawiera się jako część układ pojedyńczo-nieskończony. W saméj rzeczy, według określenia układu nieskończonego, istnieje takie odwzorowanie φ, że $\varphi(S)$ albo S' jest częścią właściwą S, istnieje przeto taki element 1 w S, który nie zawiera się w S'. Łańcuch $N = 1_0$, odpowiadający temu odwzorowaniu układu S w samym sobie, jest układem pojedyńczo-nieskończonym, uporządkowanym przez odwzorowanie φ.

Jeżeli w układzie pojedyńczo-nieskończonym, uporządkowanym przez odwzorowanie φ, odwrócimy uwagę od natury elementów i uwzględnimy tylko związki, wynikające z odwzorowania φ, to elementy nazywamy wtedy *liczbami naturalnemi* lub wprost *liczbami*, a element *1—podstawą* szeregu liczbowego N. Związki albo prawa, wynikające z powyższych warunków α, β, γ, δ, stanowią najbliższy przedmiot nauki o liczbach czyli Arytmetyki.

Wychodząc z tych określeń wyprowadza Dedekind własności, dotyczące następstwa liczb szeregu N [każda liczba, następująca bezpośrednio po liczbie n, jest jéj obrazem n'], znaczenie liczb większych i mniejszych, liczb niewiększych i niemniejszych od danéj, własności układu Z_n liczb niewiększych od liczby n i t. d., a następnie przechodzi do teoryi działań, która w streszczeniu daje się przedstawić w sposób następujący.

Niechaj będzie układ Ω zupełnie dowolny, którego elementy nie koniecznie mają być zawarte w N. Niechaj χ oznacza odwzorowanie tego układu w samym sobie, ω—zaś element oznaczony układu. Dedekind dowodzi za pomocą indukcyi zupełnéj, że każdej liczbie n układu N odpowiada jedno i tylko jedno odwzorowanie ψ_n układu Z_n [t. j. układu liczb niewiększych od liczby n], czyniące zadość warunkom:

$$\text{I.}\quad \psi_n(Z_n) \ni \Omega,$$
$$\text{II.}\quad \psi_n(1) = \omega,$$
$$\text{III.}\quad \psi_n(t') = \chi\psi_n(t), \text{ gdzie } t < n.$$

[$\chi\psi_n$ jest odwzorowaniem, złożoném z kolejnych odwzorowań ψ_n i χ].

W podobny sposób okazać można, że istnieje odwzorowanie φ układu N, czyniące zadość warunkom:

$$\text{I.}\quad \psi(N) \ni \Omega,$$
$$\text{II.}\quad \psi(1) = \omega,$$
$$\text{III.}\quad \psi(n') = \chi\psi(n).$$

gdzie n jest liczbą dowolną.

Dodawanie. Stosując te twierdzenia do przypadku, w którym Ω jest układem nieskończonym N, $\chi(n) = \varphi(n) = n'$, a więc

$$\text{I.}\quad \psi(N) \ni N,$$

możemy dla zupełnego oznaczenia ψ przyjąć $\omega = 1$; wtedy ψ ozna-

Hosted by Google

czać będzie oczywiście odwzorowanie tożsamościowe, gdyż warunkom

$$\psi(1) = 1, \quad \psi(n') = \chi\psi(n) = \varphi\psi(n) = [\psi(n)]'$$

staje się zadość, jeżeli przyjmiemy $\varphi(n) = n$.

Jeżeli chcemy mieć inne odwzorowanie układu N, przyjmujemy za ω liczbę różną od *1*, np. liczbę m' zawartą w N'. Oznaczmy obraz $\psi(n)$ liczby n przez $m+n$ i nazwijmy go *sumą* liczb m i n. Otrzymamy tedy według twierdzeń powyższych:

$$\text{II.} \quad m + 1 = m'$$

$$\text{III.} \quad m + n' = (m+n)'$$

Z równań tych wynikają następujące własności dodawania:

$$m' + n = m + n',$$

$$m' + n = (m + n)'$$

$$1 + n = n'$$

$$1 + n = n + 1,$$

$$m + n = n + m$$

$$(l + m) + n = l + (m + n)$$

$$m + n > m.$$

Mnożenie. Załóżmy $\Omega = N$, $\chi(n) = m + n = n + m$; będzie tedy

$$\text{I.} \quad \psi(N) \ni N.$$

Wybierzmy $\omega = m$, obraz $\psi(n)$ oznaczmy przez mn i nazwijmy go *iloczynem*. Według twierdzeń powyższych będzie

$$\text{II.} \quad m.1 = m$$

$$\text{III.} \quad mn' = mn + m,$$

skąd wynikają następujące własności mnożenia:

$$m' = mn + n$$

$$1.n = n$$

$$mn = nm$$

$$mn + m = nm + m$$

Hosted by Google

$$l(m+n) = lm + ln$$

$$(m+n)\,l = ml + nl$$

$$(lm)\,n' = l(mn + m) = l\,m\,n'.$$

Potęgowanie. $\Omega = N$, $\chi(n) = an = na$, a więc

$$\text{I.} \quad \psi(N) \ni N.$$

Odpowiednie odwzorowanie $\psi(n)$ oznaczmy przez a^n i nazwijmy tę liczbę *potęgą* liczby a,n — *wykładnikiem* potęgi. Działanie naszę czyni zadość warunkom:

$$\text{I.} \quad a^1 = a$$

$$\text{II.} \quad a^{n'} = a\,.\,a^n = a^n\,.\,a,$$

skąd wynikają następujące własności:

$$a^{m+n} = a^m\, a^n$$

$$a^{m+n}\,.\,a = (a^m\,.\,a^n)a$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n\, b^n.$$

W końcu podamy jeszcze twierdzenia D e d e k i n d a, w których uzasadnia pojęcie *liczby* [kardynalnéj] *elementów* danego układu.

1. Jeżeli układ Σ jest nieskończony, to każdy z układów Z_n daje się odwzorować w układzie Σ za pomocą obwzorowania podobnego.

2. Układ Σ jest skończony lub nieskończony, stosownie do tego, czy istnieje lub nie istnieje układ do niego podobny Z_n.

3. Jeżeli Σ jest układem skończonym, to istnieje jedna i tylko jedna liczba n, któréj odpowiada w układzie Σ układ Z_n; ta liczba stanowi liczbę [kardynalną] elementów układu. Wszystkie układy, podobne do danego skończonego układu, mają jednę i tęższamę liczbę kardynalną n.

4. Jeżeli układ A składa się z m elementów, układ B z n elementów, przyczém A i B nie mają elementów wspólnych, to układ $M(A, B)$, którego każdy element jest elementem albo układu A albo układu B, zawiera $m + n$ elementów.

5. Każdy układ, złożony z n układów skończonych, jest sam skończony.

Hosted by Google

Teorya, którą przedstawiliśmy w streszczeniu, nasuwa następujące uwagi: Odwzorowanie stanowi bezwątpienia działanie zasadnicze, będące podstawą tak liczenia jak i działań arytmetycznych; twierdzenia Dedekinda, oznaczone wyżéj przez I, II, III, ukazują wspólne źródło tych działań w postaci ścisłéj i wyraźnéj. Określenie szeregu liczb naturalnych, jako łańcucha elementu 1, charakteryzuje ten szereg wśród innych szeregów nieskończonych i określa zarazem jego znaczenie zasadnicze. Wreszcie twierdzenia o liczbie elementów układu wskazują wyraźnie, że liczenie jakiegokolwiek układu Σ jest oparte na odwzorowywaniu wzajemném tego układu i układu Z_n. Teorya Dedekinda jest odmienném rozwinięciem téj saméj myśli, która kierowała badaniami G. Cantora, która ujawnia się w rozważaniach Kroneckera. Układy podobne pierwszego z nich—to układy o równéj mocy drugiego lub układy równoważne trzeciego [porówn. niżéj str. 96.]. Ukazując nam liczby całkowite, jako formy szczególne, wynikające z pewnego rodzaju odwzorowania, teorya Dedekinda zadawalnia w wysokim stopniu upodobanie do ogólności w badaniach matematycznych. Uderzającém w teoryi téj jest to, że układy nieskończone zajmują w niéj niejako pierwsze miejsce, są w niéj pierwotnemi, bo po określeniu ich następuje dopiero określenie układów skończonych. Dowód wszakże istnienia układów nieskończonych niezupełnie nas zadawalnia. Punktem głównym tego dowodu jest to, że układ S' jest częścią układu S, ponieważ w S istnieją elementy jak np. moje własne ja, które są różne od każdéj myśli zawartéj w S'. Ale zapytać można, dlaczego by własnemu *ja* w układzie S nie miała odpowiadać myśl o własnem ja w układzie S'. Naszém zdaniem, "istnienie„ układów nieskończonych, jak to już powiedziano w art. 10., nie może wyrażać nic innego nad możność odwzorowywania kolejnego, bez żadnych przeszkód, albo możność liczenia tak daleko, jak chcemy. Ta to możność w formie matematycznéj przedstawia się jako nieskończoność i jest źródłem wszelkich innych form, jakie za pomocą odpowiednich konstrukcyj tworzyć możemy i tworzymy w Matematyce.

Hosted by Google

[1] G r a s s m a n n. Ausdehnungslehre... str. 1—14.

[2] H a n k e l, Ueber complexe Zahlensysteme str. 18—34.

[3] N. T h i e l e w pracy, Analytiske Studier de rene Mathematiks Principer [*Tidskrift for Mathematik*, 1880], którój treść znamy tylko ze sprawozdania [*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, XII, str. 46—48], poddał ogólnemu badaniu związek, zachodzący pomiędzy dodawaniem i mnożeniem, oparty na wzorach

$$a + b = c, \quad ab = c, \quad a' + c = b, \quad (a + b)c = a + (b + c),$$

$$a + b = b + a, \quad (a + b)\,c = a\,c + bc,$$

wyrażających jednowartościowość dodawania i mnożenia, odwracalność, łączność i przemienność dodawania oraz rozdzielność mnożenia. Najogólniejsze działania, czyniące zadość tym związkom, nazywa on "pseudodowaniem„ i "pseudomnożeniem„ i oznacza pierwsze przez $x \# y = z$, drugie przez $x \circ y = z$. Z badania, przeprowadzonego przez T h i e l e g o, wynika, że obie funkcye suma i iloczyn zawarte są w funkcyi

$$z = \frac{exy + fx + gy + h}{axy + bx + cy + d}$$

lub też, że pomiędzy x, y, z muszą zachodzić równania postaci

$$f(z) = g(x)\,h(y), \quad F(z) = G(x)\,H(y),$$

Z wzorów, wyrażających własności działań, tylko wzór, określający zasadę rozdzielności, stanowi jedyną różnicę pomiędzy mnożeniem a dodawaniem; do zupełnego wszakże określenia mnożenia wzory powyższe nie wystarczają i potrzebném jest jeszcze twierdzenie

α. $$a + a + a + \ldots \text{ (} n \text{ razy)} = n \,.\, a$$

które dla "pseudodziałań„ może być przedstawione pod postacią ogólniejszą

$$a \# a \# a \ldots \text{ (} n \text{ razy)} = e_n \circ a$$

gdzie

$$\frac{n\,\omega\,(e - o) + o(\omega - e)}{n\,(e - o) + (\omega - e)} = \frac{n \div 0}{n - \infty} \circ \frac{1 - \infty}{1 \div 0}\,.$$

Tu $\div$ i $\sim$ oznaczają "pseudoodejmowanie„ i "pseudodzielenie„. Dla $o = 0$, $e = 1$, $\omega = \infty$ jest $e_n = n$, i wtedy przechodzimy do Arytmetyki zwykłéj.

Bez uwagi na twierdzenie dodatkowe, "pseudodziałania„ czynią zadość warunkom

Hosted by Google

$$F(x \# y) = F(x) + F(y)$$

$$F(x \circ y) = Fx \, . \, Fy$$

$$\text{gdzie } F(x) = \frac{x - o}{x - \omega} \quad \frac{e - \omega}{e - o} \, .$$

Wzorów, wyrażających związki pomiędzy działaniami, nie uważa T h i e l e za pewniki, lecz pragnie dojść do twierdzeń jeszcze prostszych, opier-ając się na oryginalnym poglądzie na istotę liczb. Według tego poglądu liczba niemianowana nie jest abstrakcyą, lecz opisaniem liczby mianowawanéj [realnéj] za pomocą innéj takiéj liczby, liczby zaś mianowane są znowu opisaniem "objektów matematycznych„, jakiemi są np. punkty czasowe, przestrzenne i t. d. [porówn. str. 33]. Według téj teoryi liczba niemianowana może być określona jako stosunek anharmoniczny, wyznaczający dokładnie dany przedmiot przy pomocy związku α. przez trzy inne dowolne tego samego gatunku, po ustaleniu punktów 0, 1, ∞.

W rozprawie Om Definitionerne for Tallet, Talarterne og de tallignende Bestimmelser, 1886, T h i e l e rozwija w dalszym ciągu pogląd swój na istotę liczb i działań nad niemi. Punktem wyjścia są dla niego tak nazwane "numerale„ [Numeraler], t. j. "bezwarunkowe, pojedyńcze, względne i zupełne jednowartościowe oznaczenia„, których najprostszy przykład stanowią "punkty rzeczowe„ "wyrazy„, i t. d. Jeżeli B jest numeralem, to pojęcie **B** określa się za pomocą pojęcia **A** w ten sposób:

$$\mathbf{B} = B * \mathbf{A}.$$

"Numeral tożsamościowy„ O określa tożsamość

$$\mathbf{A} = O * \mathbf{A}, \text{ t. j. } \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Nad numeralami wykonywać można dwa działania: "przeciwstawienie„ [Modsaetning] i "przydawanie„ [Tilfjolse]. Pierwsze z nich oznacza, że z równości

$$\mathbf{B} = N * \mathbf{A}$$

wynika równość

$$\mathbf{A} = (\div N) * \mathbf{B},$$

gdzie numeral $(\div N)$ jest przeciwstawieniem numeralu N. Drugie wyraża, że z równań

$$\mathbf{B} = A * \mathbf{A},$$
$$\mathbf{C} = B * \mathbf{B}$$

wynika równanie

$$\mathbf{C} = C * \mathbf{A}.$$

Działanie to, jak łatwo się przekonać, czyni zadość prawu łączności.

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia

Hosted by Google

$$A * A = \underset{*}{2} A,$$
$$A * A * A = \underset{*}{3} A,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots$$
$$A * (A * (A \ldots * (A)) = \underset{*}{n} A.,$$

to stąd wypływają równości

$$(\underset{*}{n} A) * (\underset{*}{m} A) = (\underset{*}{m} A) * (\underset{*}{n} A),$$
$$\underset{*}{n} (\div A) = \div (\underset{*}{n} A)$$

i t. d.

Znak $\underset{*}{n}$ jest "numeralem numeralu„ czyli *liczbą.* Powyższe własności numeralów prowadzą do własności liczb i działań nad liczbami. Do liczb dochodzi się tu zatém od wielkości.

Na téj drodze, jakkolwiek w sposób odmienny, stara się uzasadnić teoryą działań A. Fick we wspomnianém wyżéj dziełku [Das Grössengebiet i t. d.].

Każda jednostka J i każda wielkość A jest, według Ficka, miarą pewnéj wzajemności [związku, stosunku, Beziehung] pomiędzy dwoma przedmiotami. Jeden z przedmiotów. do którego odnosimy wszystkie przedmioty badane, jest przedmiotem *zerowym*; jego wartość względna [Beziehungswerth] jest zerem. Wielkości, których przedmioty zerowe są różne [t. j. wielkości różnorodne], nie mogą wchodzić z sobą w połączenia.

Dodawanie określa Fick w sposób następujący: suma $A + B$ wyraża wzajemność względem przedmiotu zerowego takiego przedmiotu, którego wzajemność względem jednego ze składników [A lub B] jest równa wzajemności drugiego ze składników [B lub A] względem tegoż przedmiotu zerowego. Z tego określenia wynika bezpośrednio własność $A+B=B+A$ i zarazem twierdzenie, że każda suma, o ile ma być wielkością uważanéj dziedziny, może być przedstawioną jako wielokrotność pewnéj jednostki lub jéj części. Ta jednostka nie będzie wogóle tą samą jednostką, któréj wielokrotnością jest B. Jeżeli więc założymy, że $A = m J_\varphi$, $B = n J_\psi$ to otrzymamy $A + B = p J_\chi$, gdzie J_φ, J_ψ, J_χ są różnemi jednostkami.

Ogólna wykonalność odejmowania poddaje dziedzinę wielkości warunkowi, aby każdéj wzajemności odpowiadała wzajemność przeciwna [odwrotna], tak że do każdéj wielkości A można znaleźć drugą, która, dodana do niéj, daje na wynik zero. Warunek ten spełnia się, jeżeli do każdéj jednostki J_φ pomyślimy sobie inną φJ taką, aby było $J_\varphi + \varphi J = 0$; wtedy odejmowanie dwóch wielkości $A - B = mJ_\varphi - nJ_\psi$ sprowadza się do dodawania $mJ_\varphi + n\,\psi J$ i jest zawsze wykonalne.

Mnożenie wielkości opiera Fick na pojęciu stosunku, ktore uważa jako niezależne od pojęcia dzielenia i dające się określić za pomocą pewnych warunków. Tu, jak i wszędzie, najważniejszą rzeczą jest określenie równości; równość stosunków przedstawia Fick za pomocą wzoru

$$A :: B = C :: D,$$

który ma wyrażać, że wielkość D powstaje z wielkości C przy pomocy tych samych prawideł, przy pomocy których B powstaje z A. Prawidła te mają czynić zadość następującym warunkom:

I. Prawidło musi być odwracalne, to jest, z prawidła, według którego B powstaje z A, otrzymujemy wprost prawidło, według którego A powstaje z B: z proporcyi $A :: B = C :: D$ wynika proporcya $B :: A = D :: C$.

II. Z proporcyi $A :: B = C :: D$ wynikają proporcye $A :: C = B :: D$ i $D :: B = C :: A$.

III. Stosunek pozostaje bez zmiany, jeżeli do jego wyrazów dodajemy wielkości, będące w tym samym stosunku, t. j. z proporcyi $A :: B = C :: D$ wynika proporcya $A + C :: B + D = C :: D$.

Do definicyi mnożenia potrzebny jest jeszcze wybór jednostki *pierwotnéj* [Ureinheit] pomiędzy rozmaitemi jednostkami dziedziny. Jednostkę tę oznaczmy przez 1.

Definicya mnożenia jest następująca: "Pomnożyć wielkość A przez wielkość B, t. j. utworzyć iloczyn AB, jest to znaleźć wielkość, będącą w takim stosunku do wielkości A, w jakim wielkość B jest do jednostki pierwotnéj".

Ponieważ według warunku II, z proporcyi $1 :: B = A :: AB$ wynika proporcya $1 :: A = B :: AB$, ostatni zaś wyraz drugiéj proporcyi, według określenia, winien być BA, jest przeto $AB = BA$. Z trzeciego warunku wynika znowu prawo rozdzielności $(A + B) = AC + BC$ oraz $(A - B)C = AC - BC$.

Dzielenie w téj teoryi polega na znalezieniu ilorazu A/B lub $A : B$, który ma się tak do wielkości A, jak jednostka pierwotna do wielkości B. Na téj podstawie łatwo okazać można twierdzenia

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}, \qquad \frac{A \,.\, B}{C} = \frac{A}{C} \,.\, B$$

i t. d.

Potęgowanie i wyciąganie pierwiastka określają się sposobem zwykłym.

Dalsze rozwinięcie swojéj teoryi opiera Fick już na pojęciu ciągłości.

Próba Ficka zbudowania teoryi działań niezależnie od nauki o liczbach nie wydaje nam się dostatecznie ogólną, z tego względu, że autor odrazu przyjmuje wielkości, jako złożone z jednostek; że nie poddaje ogólnemu badaniu związków pomiędzy działaniami, lecz działania te odrazu specyalizuje; że wreszcie określenie mnożenia na podstawie pojęcia stosunku zbyt jest skomplikowaném.

Droga, wskazana w teoryi działań formalnych przez Grassmanna i Hankela, zdaje się być dotąd jedyną drogą, na któréj można zbudować teoryą wielkości. Najnowsze w tym względzie badania Kroneckera w rozprawie, Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modul-Systeme [*Mittheilungen der Berliner Akademie*, 1888., str. 379-396, 615—648], które wiążą się z przedstawioną wyżéj teoryą Helmholtza [art 2.] w gruncie rzeczy nie różnią się pod względem zasad od teoryi formalnéj.

Kronecker uważa układ elementów [wielkości, wartości, liczb]

$$z_1, z_2, z_3, \ldots z_n \ldots,$$

który dla krótkości oznacza przez (z). Wyobraźmy sobie proces, za pomocą którego układ (z) przechodzi w inny *równoważny* układ (z'), przy zachowaniu warunku, że z równoważności

$$(z) \sim (z'), \quad (z') \sim (z'')$$

wynika równoważność

$$(z) \sim (z'').$$

Jeżeli w szczególności układ (z'') jest identyczny z układem (z'), to stąd wyniknie, że każdy układ jest równoważny samemu sobie; jeżeli zaś układ (z'') jest identyczny z układem (z), to otrzymujemy

$$(z') \sim (z)$$

jako wynik dwóch równoważnosci

$$(z) \sim (z') \quad (z') \sim (z)$$

Niechaj $(z), (z'), (z'') \ldots$ będą układy różne i niechaj

1. $$\varphi((z), (z')) \sim z''$$

wyraża, że układ z'' za pomocą pewnego procesu powstaje z układów (z) i (z'). Założmy przytém, że zachodzi warunek

2. $$\varphi\,[(z), \varphi\,((z'), (z''))] \sim \varphi\,[(z'), \varphi\,((z), (z''))]$$

t. j. że dochodzimy do tego samego wyniku, łącząc uklad (z) z wynikiem połączenia układów (z') i (z''), czy też łącząc układ (z') z wynikiem połączenia układów (z) i (z'').

Niechaj będą dwa układy (z^0) i (z'), dla których

$$\varphi\,((z^0), (z')) \sim (z').$$

Jeżeli więc zachodzi związek

$$\varphi\,((z''), (z')) \sim (z),$$

to zachodzi także związek

$$\varphi\,[(z''), \varphi\,((z^0), (z'))] \sim (z).$$

Uwzględniając tu warunek 2., otrzymamy

$$\varphi\,((z^0), (z)) \sim (z).$$

Dodając teraz nowy warunek

3. $$\varphi\,((z), (z')) = \varphi\,((z'), (z)),$$

z łatwością dochodzimy do wniosku, że wynik połączenia ilukolwiek układów nie zależy wcale od porządku, w jakim je łączymy.

Jeżeli mamy układ $(z^{(1)})$ i oznaczymy wyniki połączeń: $\varphi((z^1),(z^1))$ przez $(z^{(2)})$, $\varphi\,((z^{(1)}), (z^{(2)}))$ przez $(z^{(3)}) \ldots$ i ogólnie

$$\varphi\left((z^{(1)}), (z^{(m)})\right) \text{ przez } (z^{(m+1)}),$$

to oczywiście dla jakichkolwiek liczb całkowitych m i n będzie

$$\varphi\left((z^{(m)}), (z^{(n)})\right) = (z^{(m+n)})$$

t. j. *skaźnik* układu, powstającego z połączenia układów $(z^{(m)})$ i $(z^{(n)})$ równa się sumie ich skaźników. Twierdzenie to utrzymuje się, jeżeli wprowadzimy układy $\left(z^{\left(\frac{m}{n}\right)}\right)$ ze skaźnikami ułamkowemi; $\left(z^{\left(\frac{m}{n}\right)}\right)$ oznaczać ma taki układ, że połączenie φ równoważnych mu n układów daje wynik równy układowi $(z^{(m)})$.

Jeżeli dane układy nie dają się wyczerpać za pomocą układów oznaczonych przez $\left(z^{\left(\frac{m}{n}\right)}\right)$ i jeżeli $(\bar{z})$ jest nowym jakimś układem, to można oznaczyć szereg układów nowych za pomocą $\left(\bar{z}^{\left(\frac{m}{n}\right)}\right)$ i każdy z układów, utworzonych z połączenia układów

$$\left(z^{\left(\frac{m}{n}\right)}\right) \quad \left(\bar{z}^{\left(\frac{m'}{n'}\right)}\right)$$

scharakteryzować za pomocą układu skaźników $\left(\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}\right)$. Postępując w ten sposób daléj, dojdziemy do oznaczenia wszystkich danych układów za pomocą układów skaźników

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \ldots$$

którego elementy $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \ldots$ są liczbami wymiernemi. W ten sposób połączenie układów, którym odpowiadają układy skaźników

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \ldots; \quad \zeta_1', \zeta_2', \zeta_3' \ldots;$$

charakteryzuje układ

$$\zeta_1 + \zeta_1', \quad \zeta_2 + \zeta_2', \quad \zeta_3 + \zeta_3' \ldots$$

Jeżeli np. układ (z) jest układem liczb całkowitych mniejszych od M, a połączenie φ mnożeniem, to każda liczba układu daje się przedstawić pod postacią

$$n = p_1^{\zeta_1} p_2^{\zeta_2} p_3^{\zeta_3} \ldots$$

gdzie p, p_1, p_2 są liczbami pierwszemi, $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \ldots$ przyjmują wartości $0, 1, 2 \ldots$ Układ skaźników będzie zatém

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \ldots$$

W zastosowaniu do wielkości teorya ta przedstawia się w ten sposób:

Układom $(z), (z'), (z'') \ldots$ odpowiadają wielkości fizyczne O, O', O'', które wchodzą w połączenia, podlegające warunkom 2. i 3., zastępują-

Hosted by Google

cym warunki łączności i przemienności w teoryi Helmholtza. Jeżeli wyjdziemy z pewnéj wielkości $O^{(1)}$, to można wszystkie inne scharakteryzować [w przypadku wymierności] za pomocą skaźników całkowitych lub ułamkowych. Wielkość $\overline{O}$ otrzymuje skaźnik $\left(\frac{m}{n}\right)$, jeżeli połączenie n wielkości równoważnych wielkości $\overline{O}$ daje wynik, równoważny połączeniu m wielkości równoważnych wielkości $O^{(1)}$.

Jeżeli uporządkujemy wielkości według skaźników w ten sposób, aby wielkość ze skaźnikiem $\left(\frac{m}{n}\right)$ poprzedzała wielkość ze skaźnikiem $\left(\frac{m'}{n'}\right)$, gdy $mn' < m'n$, to, jeżeli skaźniki odpowiadają np. masom lub ciężarom, skaźnik mniejszy należeć będzie do wielkości mniejszéj. Porównanie rozmaitych wielkości fizycznych daje się przeto sprowadzić *teoretycznie* do porównania ich skaźników, praktyczna wszakże strona tego oznaczenia wymaga metod, pozwalających na rozstrzygnięcie pytania, która z dwóch wielkości jest większa lub mniejsza.

Pięknie skreślony wykład teoryi wielkości znaleźć można w świeżo ogłoszonéj rozprawie Bettazzi'ego, Teoria della grandezze, uwieńczonéj przez Akademią dei Lincei, 1890. Opierając się na podstawach, danych przez Grassmanna, Hankela, Cantora i Dedekinda, autor przedstawia związek pojęcia wielkości [formy] matematycznéj z działaniem zasadniczém, za pomocą którego wytwarzamy "klasy„ wielkości i przedstawia następnie teoryą działań na liczbach.

[4] W dziele E. Schrödera, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, 1873, zwłaszcza w rozdziale IV-ym (str. 174—294) o związkach wzajemnych pomiędzy działaniami, znaleźć można obszerny wykład teoryi formalnéj działań z drobiazgowém rozwinięciem wszelkich konsekwencyj, jakie z określeń ich wynikają. Badania te proponuje autor objąć nazwą *Algebry formalnéj*, do któréj zadań należy przeto: 1. zbadanie wszystkich założeń, koniecznych do scharakteryzowania każdego działania rachunkowego w danéj dziedzinie liczb; 2. wyczerpanie wszelkich wniosków z każdéj przesłanki lub kombinacyj przesłanek; 3. znalezienie zamkniętych układów liczbowych, podległych prawom połączeń i dających się zbudować za pomocą znalezionych działań; wreszcie 4. zbadanie, jakie podścieliska realne można dać tym liczbom i działaniom, t. j. jakie nadać im znaczenie geometryczne, fizykalne i. t. d. Dwa ostatnie zadania stanowią już, zdaniem Schrödera, przejście od Algebry formalnéj do *bezwzględnéj* [absolute Algebra].

Pomysły swoje rozwinął autor w następnych pracach: Ueber die formalen Elemente der absoluten Algebra. 1873, Uber v. Staud's Rechnung mit Würfen und verwandte Processe [*Mathematische Annalen*, X, 1876. str. 289—317]. Ueber eine eigenthümliche Bestimmung einer Function durch formale Anforderungen [*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, XC, 1881, str. 189—220], Ueber Algorithmen und Calculn [*Archiv der Mathematik und Physik*, 1887, ctr. 225—278] i Tafeln der eindeutig

Hosted by Google

umkehrbaren Functionen [*Mathematische Annalen.* XXIX, 1887, str. 299—326]. Interesujące te badania, mające niejaką analogią do odmiennie przeprowadzonych badań Thielego, wkraczają już w części w dziedzinę Tèoryi funkcyj, i dlatego powiemy tylko krótko, że polegają one głównie: 1. na przyjęciu za podstawę działania jednowartościowego i nieprzemiennego ab, które Schröder nazywa mnożeniem „symbolicznêm„; mnożeniu temu odpowiadają zatém dwa działania odwrotne, t. j. dwa dzielenia "symboliczne„ 2. na ustanowieniu możliwych związków zasadniczych, jakie pomiędzy temi trzema działaniami zachodzić mogą, a więc np. w przypadku dwóch elementów a i b, następujących czterech układów czyli "algorytmów„,

$$a:b = ab = \frac{b}{a},$$

$$a:b = b\,a, \quad a:b = \frac{a}{b};$$

$$a:b = b:a, \quad \frac{b}{a} = ba;$$

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} \qquad ab = ba;$$

w których jest razem 9 równań—i badaniu wniosków, jakie stąd wynikają. W przypadku trzech elementów a, b, c, otrzymujemy takich wzorów wogóle 990; z nich zbiór 150 równań, ze wszelkiemi konsekwencyami stanowi to, co Schröder nazywa algorytmem *Algebry zwyczajnéj*, a któremu podlega nietylko mnożenie i dodawanie liczb rzeczywistych i urojonych, ale i dodawanie geometryczne punktów płaszczyzny oraz dodawanie logiczne pojęć i sądów. W ogóle te badania mają związek z dziedziną Logiki formalnéj; we wspomnianém zaś dziele Schrödera [art. 6.] znajdzie czytelnik najnowsze w tym przedmiocie poszukiwania, które nie wchodzą już w zakres niniejszéj książki.

[5] Helmholtz, Zählen und Messen, l. c. str. 24.

[6] Dedekind, Was sind und sollen die Zahlen, 1888.

[7] Na teoryi łańcucha opiera Dedekind używaną w Matematyce metodę indukcyi zupełnéj, która według niego ma swoję podstawę w następującém twierdzeniu:

"Aby dowieść, że łańcuch A_0 jest częścią pewnego układu Σ, który jest lub nie jest częścią układu S, wystarcza dowieść:

α. że $A \ni \Sigma$;

β. że obraz każdego elementu wspólnego układom A_0 i Σ jest także elementem układu Σ„.

Twierdzenie to można wypowiedzieć w ten sposób:

„Aby dowieść, że wszystkie elementy a łańcucha A_0 posiadają pewną własność η [lub że pewne twierdzenie τ, w którém jest mowa o nieoznaczonym elemencie n, stosuje się do wszystkich elementów łańcucha A_0], wystarcza dowieść:

Hosted by Google

α. że wszystkie elementy a układu A mają własność η [lub że twierdzenie τ stosuje się do wszystkich elementów a].

β. że obraz n' każdego elementu n łańcucha A_0 ma też samą własność η. [lub że twierdzenie τ, jeżeli stosuje się do elementu n łańcucha A_0 jest prawdziwém także i dla obrazu n' tegoż elementu.]

[8] Dowód "istnienia„ układów nieskończonych, podany przez Dedekinda, jest właściwie inną postacią dowodu, jaki znajdujemy u Bolzano, [Paradoxien des Unendlichen, str. 14] który twierdzi, że mnogość twierdzeń i prawd samych w sobie [Wahrheiten an sich] jest nieskończoną. Jeżeli bowiem uważamy jaką prawdę A, np twierdzenie, że prawdy istnieją, to twierdzenie: "A jest prawdą„ jest czémś różném od A, bo podmiotem jego jest samo twierdzenie A. Według tego samego prawa, za pomocą którego z twierdzenia A wyprowadzamy różne od niego twierdzenie B, można znów z B wyprowadzić twierdzenie C i tak daléj bez końca. Ogół tych wszystkich twierdzeń obejmuje mnogość części. [twierdzeń], która jest większą od każdéj mnogości skończonéj.

Kerferstein, Ueber den Begriff der Zahl, [*Festschrift, herausgegeben von der mathematischen Gesellschaft in Hamburg*, 1890, str. 119—124], uważa dowód Dedekinda za nieudany, gdyż przy określeniu układów podobnych, pojęcie równości jest przyjęte jedynie w tém znaczeniu, że $a = b$ tylko wtedy, gdy a i b są znakami jednéj i téj saméj rzeczy, a równość taka nie może oczywiście zachodzić pomiędzy układem i jego częścią właściwą.

Hosted by Google

ROZDZIAŁ III.

LICZBY UŁAMKOWE.

13. TEORYE DZIAŁAŃ NAD UŁAMKAMI.

Rachunek na ułamkach sięga czasów najstarożytniejszych. Przed czterdziestu wiekami rachmistrze egipscy znali już sposoby oznaczania ułamków i umieli rozkładać je na ułamki prostsze; babilończycy hindusowie, grecy i rzymianie posługiwali się ułamkami, lecz dopiero po wprowadzeniu Arytmetyki cyfrowéj ustanowiono ogólne prawidła rachunku tak z ułamkami zwyczajnemi jak i dziesiętnemi[1]. Tu, jak wszędzie, praktyka poprzedziła teoryą. Działania nad wielkościami wykazały potrzebę i ważność ułamków, wszakże dopiero teorya działań wyjaśniła właściwą istotę tych nowych form liczbowych i działań nad niemi.

Według teoryi, wyłożonéj w art. 9. i 10., ułamkiem nazywamy liczbę, zadość czyniącą równaniu

$$xb = a$$

gdy co do a i b nie czynimy żadnych zastrzeżeń [z wyjątkiem warunku, by b nie było równe zeru]; pojęcie zatém liczby ułamkowéj obejmuje w sobie i pojęcie liczby całkowitéj, mianowicie dla przypadku, gdy $a = b$ lub a jest wielokrotnością liczby b.

Zasada zachowania przepisuje nam stosowanie do działań nad nowemi liczbami tych samych praw, które mają miejsce dla dziedziny pierwotnéj liczb całkowitych.

Hosted by Google

Z równań 10 b. w art. 11. otrzymujemy

$$a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b},$$

co oznacza, że każdy ułamek a/b przedstawić można jako iloczyn liczby całkowitéj a przez ułamek $1/b$ o liczniku równym jedności.

Jeżeli założymy przemienność mnożenia, to możemy napisać

$$a \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b} a = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{b},$$

to jest ułamek a/b rozłożyć na sumę a składników, z których każdy równa się $1/b$.

Ponieważ z równania $x b = a$, wynika $x \cdot m b = m a$, a więc na zasadzie określenia dzielenia i liczb ułamkowych będzie

$$\frac{a}{b} = \frac{m a}{m b},$$

skąd wynika, że każdemu ułamkowi można nadać nieskończoną liczbę postaci.

Z równań $1'b$., $2'b$., 13 w art. 9., otrzymujemy

$$b \cdot \frac{a}{b} = a$$

$$\frac{b}{c} \cdot a = \frac{b . a}{c}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$$

$$a : \frac{b}{c} = \frac{ae}{b}$$

$$\frac{a}{d} \pm \frac{b}{d} = \frac{a \pm b}{d}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a c}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a d}{b c}.$$

Są to wzory, określające działania zasadnicze nad ułamkami i stwierdzające zarazem, że działania te posiadają też same wła-

Hosted by Google

sności formalne, jakie mają odpowiednie działania nad liczbami całkowitemi.

Można łatwo dowieść, że wszystkie powyższe wzory utrzymują się w zupełności i wtedy, gdy w nich a, b, c, d . . . są już nietylko liczbami całkowitemi, ale dowolnemi liczbami ułamkowemi. Tym sposobem przez wprowadzenie liczb ułamkowych działania arytmetyczne, otrzymują znaczenie ogólniejsze od tego, jakie miały w przypadku liczb całkowitych.

Ponieważ mnożenie przez ułamek $1/b$ daje ten sam wynik, co dzielenie przez liczbę b, mnożenie przez ułamek a/b zastępuje działanie, złożone z mnożenia przez a i dzielenia przez b, można przeto liczby ułamkowe, uważać jako znaki działań i na tém oprzeć teoryą działań nad ułamkami. Myśl ta, nienowa zresztą, stanowi podstawę nowéj teoryi elementarnéj Ch. Méray'a[2].

Teorya Weierstrassa[3] opiera się na wprowadzeniu nowych jednostek ε_n, określonych równaniem

$$\varepsilon_n \,.\, n = 1.$$

Za pomocą takich jednostek dają się przedstawić liczby całkowite. np. liczba całkowita $a = a \,.\, 1$ będzie miała postać $a\varepsilon_n n$, lub też $na\varepsilon_n$, jeżeli przyjmiemy prawo przemienności. Ogólnie liczba całkowita lub ułamkowa daje się przedstawić pod postacią

$$a_0 + a_1 \varepsilon_{n_1} + a_2 \varepsilon_{n_2} + \ . \ . \ . \ + a_m \varepsilon_{n_m}$$

gdzie a_0, a_1, a_2 . . . a_n są liczbami całkowitemi, ε_{n_1}, $\varepsilon_{n_2} \ldots \varepsilon_{n_m}$—jednostkami, określonemi jak wyżéj.

Ponieważ na zasadzie tegoż określenia jest

$$m \,.\, n \,.\, \varepsilon_{mn} = 1,$$

gdzie m i n są liczbami całkowitemi, wnosimy więc stąd, że

$$(m\,\varepsilon_{m\,n})\,n = 1, \ \text{a więc}\ m\,\varepsilon_{m\,n} = \varepsilon_n$$
$$(n\,\varepsilon_{m\,n})\,m = 1, \quad \text{„} \quad n\,\varepsilon_{m\,n} = \varepsilon_m$$

Na téj zasadzie można każdą liczbę

$$a = a_0 + a_1 \varepsilon_{n_1} + \ . \ . \ . \ + a_m \varepsilon_{n_m}$$

przekształcić w ten sposób, aby zawierała tylko jednostki ε_n jednego gatunku. W saméj rzeczy, jeżeli n jest najmniejszą wspólną wielokrotną liczb $n_1, n_2 \dots n_m$, to można napisać

$$n_1 \nu_1 = n_2 \nu_2 = \dots = n_m \nu_m = n$$

gdzie $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ są liczbami całkowitemi; będzie zatém

$$\varepsilon_{n_\mu} = \nu_\mu . \varepsilon_{n_\mu \nu_\mu} = \nu_\mu \varepsilon_n, \ (\mu = 1,2, \dots, m),$$

skutkiem czego a przyjmuje postać

$$a = (a_0 n + a_1 \nu_1 + \dots + a_m \nu_m) \varepsilon_n.$$

Na téj podstawie wykonywamy dodawanie i odejmowanie liczb ułamkowych o dowolnych mianownikach.

Mnożenie liczb ułamkowych winno czynić zadość prawidłom mnożenia liczb całkowitych i dla tego będzie

$$(\varepsilon_m + \varepsilon_m + \dots {\scriptstyle m \text{ razy}}) (\varepsilon_n + \varepsilon_n + \dots + {\scriptstyle n \text{ razy}}) = mn (\varepsilon_m \varepsilon_n);$$

ponieważ zaś

$$m \varepsilon_m = 1, \quad n \varepsilon_n = 1, \quad mn (\varepsilon_m \varepsilon_n) = 1,$$

przeto:

$$mn (\varepsilon_m \varepsilon_n) = (m \varepsilon_m) . (n \varepsilon_n) = mn \varepsilon_{mn},$$

$$\varepsilon_m \varepsilon_n = \varepsilon_{mn},$$

$$p \varepsilon_m . q \varepsilon_n = pq \varepsilon_{mn}.$$

Wzory te wystarczają do znalezienia iloczynu jakichkolwiek liczb ułamkowych.

Iloraz dwóch liczb ułamkowych otrzymujemy za pomocą prawidła

$$\frac{p \varepsilon_m}{q \varepsilon_n} = pn . \varepsilon_m q,$$

które stwierdzić możemy, mnożąc obie strony przez $q \varepsilon_n$, przez co otrzymujemy po jednéj i drugiéj stronie iloczyn $p \varepsilon_m$.

Jeżeli ε_n zastąpimy przez $1/n$, $m \varepsilon_n$ przez m/n, otrzymamy wszystkie wzory działań nad ułamkami w postaci zwykłéj.

Kronecker[4] dla ominięcia pojęcia liczb ułamkowych, zastępuje czynnik $1/m$ formą nieoznaczoną x_m a równość—kongruencyą. [O kongruencyach mówimy w części II]. Prawidła działań nad ułamkami, a mianowicie prawidło dodawania i odejmowania

Hosted by Google

$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{n} = \frac{an \pm bm}{mn},$$

mnożenia

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn}$$

i dzielenia

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}$$

zastępuje on trzema następującemi kongruencyami:

$$a x_m + b x_n \equiv (an + bm) x_{mn} \quad (\text{modd.}\, m x_{m-1}, n x_n - 1, mn x_{mn} - 1),$$
$$a x_m \,.\, b x_n \equiv ab x_{mn} \quad (\text{modd.}\, m x_m - 1,\ n x_n - 1,\ mn x_{mn} - 1),$$
$$a x_m \,.\, x_{b x_n} \equiv an x_{bm} \quad (\text{modd.}\, m x_n - 1, n x_n - 1, bm x_{bm} - 1, b x_n x_n - 1),$$

które wypływają odpowiednio z następujących trzech tożsamości:

$$a x_m + b x_n = (an + bm) x_{mn} + an x_{mn} (m x_m - 1) + bm x_{mn} (n x_n - 1)$$
$$- (a x_m + b x_n)(mn x_{mn} - 1),$$

$$a x_m \,.\, b x_n = ab x_{mn} + abn x_n x_{mn} (m x_m - 1) + ab x_{mn} (n x_n - 1)$$
$$- ab x_m x_n (mn x_{mn} - 1),$$

$$a x_m \,.\, x_{b x_n} = an x_{bm} + an x_{bm} (m x_m - 1) - abm x_m x_{bm}\, x_{b x_n} (n x_n - 1)$$
$$- a x_m x_{b x_n} (bm x_{bm} - 1) + amn x_m x_{bm} (b x_n x_{b x_n} - 1).$$

14. WIELKOŚĆ UŁAMKA. MNOGOŚĆ LICZB UŁAMKOWYCH.

W powyższym wykładzie teoryi ułamków nie mówiliśmy o tém, w jaki sposób rozumieć należy, co jest ułamek większy lub mniejszy od drugiego. Jeżeli pojęcie ułamka opieramy na pojęciu podziału jedności na części, to oczywiście z dwóch ułamków o równym liczniku ten jest większy, którego mianownik jest mniejszy; z dwóch ułamków o równym mianowniku — ten, którego licznik jest większy; gdy zaś dwa ułamki mają różne liczniki i mianowniki, to sprowadzenie ułamków do wspólnego mianownika pokaże z łatwością, który jest większy lub mniejszy. Jeżeli ułamkami danemi są a/m i b/n, to wniesiemy stąd, że $\frac{a}{m} \gtrless \frac{b}{n}$, stosownie do tego czy $an \gtrless bm$.

Hosted by Google

W teoryi formalnéj działań nad ułamkami można albo wprost wynik ten uważać za określenie, albo też przyjąć, że ułamek, będący sumą dwóch ułamków, uważa się za większy od każdego ze składników. Przyjmując to określenie, będziemy w zupełnéj zgodzie ze zwykłą teoryą i potrafimy każdemu ułamkowi, stosownie do wielkości jego, wyznaczyć miejsce właściwe w dziedzinie liczb całkowitych i ułamkowych.

Wszystkie ułamki *właściwe*, to jest mniejsze od jedności, których mnogość jest nieskończona, możemy uporządkować w sposób następujący.

Wyobraźmy sobie wszystkie te ułamki w postaci nieprzywiedlnéj, to jest w takiéj, aby ich liczniki i mianowniki były liczbami względnie pierwszemi. Niechaj suma licznika i mianownika równa się liczbie całkowitéj p. Otóż każdemu ułamkowi właściwemu odpowiada oznaczona wartość liczby p, i odwrotnie, do każdéj danéj liczby p należeć może tylko skończona mnogość ułamków. Jeżeli przeto pomyślimy sobie wszystkie ułamki właściwe, uporządkowane w ten sposób, aby te, które odpowiadają mniejszéj wartości liczby p, znajdowały się przed temi, które odpowiadają wartości większéj, i aby ułamki różne, odpowiadające jednéj i téj saméj wartości liczby p, następowały po sobie porządkiem wielkości, to wtedy oczywiście każdy z ułamków właściwych będzie miał miejsce zupełnie oznaczone; to znaczy, że jeden z nich będzie pierwszym, inny—drugim, inny znów—trzecim, i że licząc w ten sposób, nie pominiemy żadnego. Mnogość zatém nieskończona wszystkich ułamków właściwych, jest, wyrażając się słowami Dedekinda, podobna do mnogości

$$1, 2, 3, 4 \ldots,$$

albo, według terminologii Cantora, posiada tę samą moc, t. j. tę samą liczbę kardynalną, jaką ma szereg nieskończony liczb całkowitych, jest mnogością odliczalną.

Tym samym sposobem można dowieść, że mnogość wszystkich liczb ułamkowych, a więc mniejszych i większych od jedności, jest również odliczalną, czyli, innemi słowy, *mnogość wszystkich liczb wymiernych jest odliczalną.*

Twierdzenie to, dające się jeszcze uogólnić, zawdzięczamy G. Cantorowi[5].

[1] Szczegóły historyczne o ułamkach u starożytnych znaleźć można w dziele M. Cantora, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I. Band. 1880; o rachunku z ułamkami w wiekach średnich i nowożytnych u Günthera, Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525, 1887 i u Ungera. Die Methoden der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart, 1888.

[2] Ch. Méray. Les fractions et les quantités imaginaires, nouvelle théorie élémentaire, 1890, w ten sposób wprowadza pojęcie ułamka:

Wynik działania, polegającego na pomnożeniu danéj całkowitéj E przez liczbę całkowitą m i następnie na podzieleniu iloczynu przez trzecią liczbę całkowitą n [nie równą zeru], przy założeniu, że to dzielenie jest możliwe, może być także otrzymany jednym z dwóch sposobów: 1. Jeżeli E jest podzielne przez n, dzielimy E przez n i iloraz mnożymy przez m. 2. Jeżeli m jest podzielne przez n, uskuteczniamy to dzielenie, a następnie E mnożymy przez otrzymany iloraz. Aby zachować korzyści, wynikające z drugiego sposobu i w tym przypadku, gdy m nie jest podzielne przez n, *umawiamy się*, by wynik działania, o którém mowa, przedstawić w tym przypadku przez

$$E.\frac{m}{n} \ [\text{lub } \frac{m}{n} \times E]$$

i nazwać go iloczynem liczby E przez czynnik "fikcyjny,, [facteur fictif] m/n. Te czynniki "fikcyjne,, są liczbami ułamkowemi lub ułamkami.

Łatwo już widzieć, jak na téj podstawie buduje się dalsza teorya. Jeżeli przy pomnożeniu jednéj i téj saméj liczby całkowitéj E, nie równéj zeru, przez dwa ułamki m'/n', i m''/n'' zachodzi jeden z trzech związków

$$E\frac{m'}{n'} \gtreqless E\frac{m''}{n''},$$

to związek ten pozostanie niezmienny dla każdéj innéj liczby całkowitéj E [zakładamy, rozumie się, że mnożenia przez czynniki "fikcyjne,, są wykonalne]. Ten związek stały wyrażamy pisząc:

$$\frac{m'}{n'} \gtreqless \frac{m''}{n''}$$

i mówimy, że wartość pierwszego ułamka jest większa, równa lub mniejsza od wartości drugiego.

Aby zachodził jeden z tych trzech przypadków, warunkiem koniecznym i dostatecznym jest

$$m'\,n'' \gtreqless m''\,n'$$

Z warunku tego wynika bezpośrednio, że mnożąc licznik i mianownik ułamka przez jednę i tę samę liczbę całkowitą lub dzieląc licznik i mianownik przez ich wspólny dzielnik, otrzymujemy ułamek równy danemu.

Na téj własności polega sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika.

Hosted by Google

Jeżeli działania, oznaczone przez

$$E\frac{m'}{n'},\quad E\frac{m''}{n''},\quad E\frac{m'''}{n'''}\dots$$

są możliwe, to połączenie ich wyników za pomocą dodawanla i odejmowania

$$E\frac{m'}{n'} \pm E\frac{m''}{n''} \pm E\frac{m'''}{n''} \pm \dots\dots$$

daje liczbę, którą możemy otrzymać, mnożąc E przez pewną liczbę ułamkową. Ta liczba ułamkowa nazywa się *sumą* ułamków, m'/n', m''/n'', m''/n'''' i nie zmienia się, jeżeli za punkt wyjścia przyjmiemy inną liczbę całkowitą, od E różną.

Jeżeli działania

$$E\frac{m'}{n'}\ ,\ \left(E\frac{m'}{n'}\right)\times\frac{m''}{n''}$$

są możliwe, to wynik ostatniego z nich, oczywiście równy

$$E\frac{m'\,m''}{n'\,n''}\ ,$$

można otrzymać, mnożąc E przez ułamek $m'm''/n'n''$, który nazywamy iloczynem ułamków m'/n'', m''/n''.

Jeżeli mamy dwa ułamki

$$\frac{M}{N}\ ,\ \frac{m}{n}\ , \qquad [m \text{ jest nie zerem}]$$

to ułamek

$$\frac{x}{y}=\frac{Mn}{Nm}$$

ma tę własność, że iloczyn jego przez ułamek m/n daje wynik równy ułamkowi M/N. Ten ułamek x/y nazywa się ilorazem ułamków M/N i m/n.

Lerch [Základove ryzé arithmetické theorie 'veliczin, *Athenaeum*, 1886] podaje teoryą ułamków, polegającą na wprowadzeniu form liczbowych postaci $\left(\frac{a}{b}\right)$. Równoważność dwóch takich form

$$\left(\frac{a}{b}\right) \sim \left(\frac{c}{d}\right)$$

określamy za pomocą równania

$$a\,d = b\,c.$$

Z tego określenia wynika bezpośrednio

$$\left(\frac{0}{a}\right) \sim \left(\frac{0}{b}\right).$$

Hosted by Google

Forma $\left(\frac{a+a'}{b}\right)$ nazywa się sumą form $\left(\frac{a}{b}\right)$ i $\left(\frac{a'}{b}\right)$.

Na zasadzie tych określeń dowieść można, że

$$\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)\sim\left(\frac{ad+bc}{bd}\right)$$

Iloczyn form

$$\left(\frac{a}{b}\right),\left(\frac{c}{d}\right)$$

określamy za pomocą równania

$$\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{ac}{bd}\right);$$

skąd wynika, że jeżeli

$$\left(\frac{a}{b}\right)\sim\left(\frac{a'}{b'}\right),\ \left(\frac{c}{d}\right)\sim\left(\frac{c'}{d'}\right),$$

to będzie także

$$\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{d}\right)\sim\left(\frac{a'}{b'}\right)\cdot\left(\frac{c'}{d'}\right).$$

Z określenia iloczynu wynika pojęcie ilorazu.

Jeżeli przez a/b oznaczymy wyrażenie, przedstawiające każdą z form równoważnych formie $\left(\frac{a}{b}\right)$, to na zasadzie poprzedzających wzorów można już będzie wyprowadzić wszystkie własności działań nad liczbami ułamkowemi.

[3] Porówn. Pincherle, Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche [*Giornale di Matematiche*, XVIII, str. 179.], oraz Biermann, Theorie der analytischen Functionen, 1887., str. 9.

[4] Kronecker, Ueber den Zahlbegriff, [l. c. str. 346].

[5] G. Cantor. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. [*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, LXXXIV, str. 250.]

ROZDZIAŁ IV.

LICZBY UJEMNE.

15. ROZWÓJ POJĘĆ O LICZBACH UJEMNYCH.

W "Arytmetyce„ Diofanta, o którój powiedział Lagrange, że jest jednóm z dzieł, przynoszących największy zaszczyt duchowi ludzkiemu, znajdujemy już prawidła znaków w mnożeniu liczb dodatnich i ujemnych, jakkolwiek same liczby ujemne nie występują nigdzie u Diofanta wyraźnie. Przeciwnie, wszystkie zagadnienia, o ile mogłyby prowadzić do rozwiązań ujemnych, arytmetyk grecki opatruje starannie warunkami, mającemi na celu ominięcie podobnych rozwiązań[1]. Liczby ujemne w dzisiejszém znaczeniu tego pojęcia nie istniały wówczas w dziedzinie matematyki; nawet w dziesięć wieków po Diofancie matematycy włoscy Fibonacci, Paccioli, Cardano, natrafiając przy rozwiązywaniu rownań na pierwiastki ujemne, odrzucali je, jako liczby fałszywe, fikcyjne, niemożliwe. Fakt analogiczny, jak to powiemy niżéj, powtórzył się następnie z liczbami urojonemi: duch uogólnienia, stanowiący wybitną cechę późniejszych badań, nie panował jeszcze tak dalece nad umysłami, aby bez pewnego oporu można było ogłosić równouprawnienie dla liczb, które według pojęć ówczesnych były niejako przeciwieństwem rzeczywistości. Wprowadzenie liter do Algebry, a więc powstała stąd konieczność przywiązywania znaczenia do działań w przypadkach ogólnych; a następnie zastosowanie rachun-

Hosted by Google

ku do Geometryi, wktóréj oznaczanie długości o kierunkach przeciwnych, wykazało ważność a nawet konieczność używania liczb o znakach przeciwnych, przyczyniła się w wysokim stopniu do osłabienia owego oporu matematyków. Liczby ujemne pozyskują tedy zupełne prawo obywatelstwa w rachunku, a teorya ogólna równań jeszcze bardziéj użytek ich utrwala. Mimo to, jeszcze w końcu ubiegłego i na początku bieżącego stulecia, matematycy nie byli w zgodzie co do istotnego znaczenia liczb ujemnych. Euler[2] nazywa liczby ujemne mniejszemi od zera, przeciwko czemu powstają D'Alembert[3] i Śniadecki[4]. L. N. M. Carnot[5] widzi w liczbach ujemnych tylko symbole, służące do zachowania ogólności związków algebraicznych; Wroński[6], zwalczając ten pogląd, uważa liczby dodatnie i ujemne, jako przedstawicielki dwóch różnych stanów *jakości*, i nie uznaje żadnéj różnicy stanowiska jednych i drugich w Matematyce. Podobny pogląd wygłasza Gauss[7], według którego liczby dodatnie i ujemne przedstawiają przeciwieństwo pewnych dwóch procesów elementarnych np. przeciwieństwo przejścia w szeregu elementów od elementu A do elementu B a przejścia odwrotnego od B do A. Następny rozwój nauki, a mianowicie wprowadzenie liczb urojonych, rzuciło nowe światło na znaczenie liczb ujemnych, bo pozwoliło proces myśli, który prowadzi do nich, uważać za przypadek szczególny procesu, prowadzącego do ogólniejszych gatunków liczb.

Winniśmy zauważyć, że i dziś spotykamy u teoretyków wiedzy poglądy na istotę liczb ujemnych, niezupełnie zgodne Duhamel, stojący na stanowisku Carnota, twierdzi, że nie można nadawać żadnego znaczenia rzeczywistego działaniom arytmetycznym nad liczbami ujemnemi samoistnemi[8]. Dühring widzi w nich właściwie symbole działania, mającego być wykonaném na wielkościach bezwzględnych, a rachunek na liczbach ujemnych uważa za rachunek nad "niemożliwościami"[9], Kronecker[10] wreszcie pragnie je usunąć z Arytmetyki, a równości, w których występują liczby ujemne, zastąpić kongruencyami, w które wchodzi pewna nieoznaczona. Ta teorya znakomitego matematyka jest w związku z jego dążeniem do oparcia całéj dziedziny Arytmetyki i Algebry jedynie na liczbach całkowitych dodatnich.

Teorya formalna działań, która z góry nie jest przywiązaną do żadnéj specyalnéj dziedziny przedmiotów, wprowadza liczby ujemne

Hosted by Google

na podstawie określenia formalnego i stosuje do nowych liczb działania na podstawie prawa zachowania. Teorya ta czyni zadość wymaganiom ścisłości i nie przesądza wcale znaczenia, jakie nadajemy lub nadać możemy liczbom ujemnym w specyalnych dziedzinach zastosowań.

16. TEORYE DZIAŁAŃ NAD LICZBAMI UJEMNEMI.

Już w art. 11. określiliśmy liczby ujemne jako formy odwrotne za pomocą równania

$$0 - b = - b$$

i podaliśmy równania

$$a + (-c) = a - c, \quad a + c = a - (-c)$$

Równania $1'a$. $2'a$. $4'a$. i 12. art. 11., stosują się do liczb ujemnych zarówno jak do dodatnich; będzie tedy:

$$b + (a - b) = a$$

$$b + a - b = a$$

$$(b - c) + a = (b + a) - c,$$

$$a - (b + c) = (a - b) - c,$$

$$(c + a) - b = a - (b - c),$$

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d).$$

Według równania $12'b$. tegoż artykułu mamy

$$(a - b)\,c = a\,c - bc;$$

czyniąc $a = 0$ i uwzględniając przyjętą własność modułu dodawania, otrzymujemy

$$(-b)\,.\,c = - b\,c.$$

Zakładając znów w równaniu

$$a(c + d) = ac + a\,d$$

$d = - c$, otrzymujemy na zasadzie własności modułu

$$ac + a(-c) = 0,$$

skąd

$$a(-c) = - ac.$$

Hosted by Google

Z równania wreszcie

$$(-b)c = -bc$$

gdy w niém napiszemy $-c$ zamiast c, otrzymamy

$$(-b)(-c) = -b(-c) = -(-bc) = bc.$$

Tym sposobem prawidło znaków w mnożeniu jest wynikiem określeń formalnych teoryi działań.

Prawidło znaków w dzieleniu wynika bezpośrednio z prawidła znaków w mnożeniu.

Powyższy wywód stosuje się oczywiście nietylko do liczb ujemnych całkowitych ale i do liczb ujemnych ułamkowych, jeżeli liczby ułamkowe wprowadzimy na podstawie teoryi, wyłożonéj w rozdziale poprzedzającym.

Kronecker podał o teoryi liczb ujemnych krótką uwagę polegającą na tém, że równość taką, jak np.

$$7 - 9 = 3 - 5$$

można zastąpić kongruencyą

$$7 + 9x \equiv 3 + 5x \pmod{x+1},$$

gdzie "nieoznaczona" x zastępuje jednostkę -1. Kongruencya ta ma treść szerszą od poprzedniéj równości, bo dla każdéj liczby całkowitéj x wyrażenia $7+9x$ i $3+5x$, przy podzieleniu przez $x+1$, dają reszty równe. Przy dołączeniu warunku $x+1=0$, kongruencya przechodzi na równość i otrzymujemy liczby ujemne. Teorya liczb ujemnych wypływa przeto z teoryi kongruencyj powyższego kształtu.

W myśl téj uwagi Kroneckera, możemy z łatwością wyrazić wzory główne, odnoszące się do działań nad liczbami ujemnemi, pod nową postacią. Przedewszystkiém liczby ujemne

$$-1, \ -2, \ -3, \ . \ . \ .$$

możemy nastąpić wyrażeniami

$$x, \ 2x, \ 3x, \ . \ . \ .$$

gdzie x jest liczbą "nieoznaczoną". Równania

$$a + (-c) = a - c, \quad a + c = a - (-c)$$

możemy zastąpić kongruencyami

$$a + cx \equiv a - c \pmod{x+1}, \quad a + c \equiv a - cx \pmod{x+1}$$

Wzór

$$(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d),$$

w którym $a-b$ i $c-d$ są liczbami ujemnemi, możemy zastąpić wzorem

$$(a+bx)+(c+dx)\equiv(a+c)-(b+d)\ (\mathrm{mod}\, x+1)$$

Prawo rozdzielności wyraża się pod postacią:

$$(a+bx)\,c\equiv ac+bcx\ (\mathrm{mod}\, x+1)$$

Prawidło znaków, np. wzór

$$-a\,.-b=+ab$$

wypływa z kongruencyi

$$ax\,.\,bx\equiv ab\ (\mathrm{mod}\, x+1).$$

W podobny sposób wszystkie inne wzory z łatwością uzasadnić się dają. Wiążąc zaś tę teoryą z wyłożoną w artykule 13. teoryą liczb ułamkowych, możemy te prawidła rozciągnąć do wszystkich liczb wymiernych dodatnich i ujemnych, tak że w teoryi Kroneckera występować będą tylko kongruencye pomiędzy liczbami całkowitemi dodatniemi [11].

17. WIELKOŚĆ LICZB UJEMNYCH. MNOGOŚĆ TYCHŻE.

Liczby ujemne całkowite i ułamkowe stanowią nowe uzupełnienie dziedziny liczb dodatnich całkowitych i ułamkowych, której własności poznaliśmy w artykułach poprzedzających.

Liczby całkowite ujemne

1. $$-1,\ -2,\ -3\ \ldots$$

stanowią mnogość nieskończoną, złożoną z wyrazów, odpowiadających wyrazom mnogości

2. $$1,\ 2,\ 3,\ \ldots;$$

Każdy wyraz szeregu 2. nazywa się *wartością bezwzględną* odpowiedniego wyrazu szeregu 1.; możemy zatem powiedzieć, że każdy wyraz szeregu 1. ma wartość bezwzględną większą od wartości bezwzględnéj każdego z wyrazów poprzedzających, mniejszą zaś od wartości bezwzględnéj każdego z wyrazów następujących.

Oba szeregi 1. i 2., z dołączeniem do nich zera, grupują się w jeden szereg

$$\ldots -3, \; -2, \; -1, \; 0, \; 1, \; 2, \; 3 \ldots$$

ciągnący się w obie strony do nieskończoności. Jeżeli n oznacza którąkolwiek liczbę tego szeregu, to liczba, po niéj bezpośrednio następująca, będzie $n+1$, bezpośrednio poprzedzająca— $n-1$. Szereg 3., uporządkowany w ten sposób, aby pierwszym jego wyrazem było 0, drugim 1, trzecim -1, czwartym 2, piątym -2 i t. d. daje się oczywiście przyporządkować do szeregu 1.; odpowiadająca mu liczba kardynalna jest taka sama jak dla szeregu 1.

Jeżeli oprócz liczb całkowitych pomyślimy tak w szeregu 1. jako też w szeregu 2. wszystkie liczby ułamkowe, otrzymamy znowu dwie odpowiadające sobie mnogości nieskończone; każda liczba $-\mu$ drugiéj mnogości będzie wartością bezwzględną odpowiedniéj liczby μ w pierwszéj z nich. Obie mnogości dadzą się również uporządkować w szereg podwójnie nieskończony, odliczalny na szeregu 1. i zawierający w sobie *wszystkie* liczby wymierne dodatnie i ujemne. Przy porównywaniu liczb wymiernych porównywamy ich wartości bezwzględne. Przyjęty niekiedy sposób mówienia, że liczby ujemne są od zera mniejsze, wyraża tę okoliczność, że w mnogości podwójnie nieskończonéj wszystkich liczb wymiernych liczby ujemne znajdują się po lewéj stronie zera, a nierówność $-a < -b$ należy rozumieć w ten sposób, że wartość bezwzględna liczby a jest większa od wartości bezwzględnéj liczby b, to jest, że w mnogości liczb wymiernych liczba ujemna o wartości bezwzględnéj większéj znajduje się na lewo od liczby ujemnéj, mającéj wartość bezwzględną mniejszą.

---

[1] Porówn. najnowsze wydanie Arytmetyki Diofanta w przekładzie niemieckim G. Wertheima, 1890., gdzie we wstępie [str. 6.] znajdujemy następujące twierdzenie: "Liczba, mająca być odjętą, pomnożona przez takąż liczbę, daje liczbę, którą należy dodać; liczba zaś, mająca być odjętą, pomnożona przez liczbę, mającą być dodaną, daje liczbę, którą należy odjąć„. Twierdzenie to ["λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν, λεῖψις

δὲ επὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν„]. Wyrazy λεῖψις i ὕπαρξις przełożono tu umyślnie za pomocą wyrazów "liczba, mająca być odjętą„, "liczba, mająca być dodaną„, dla zaznaczenia, że liczby te nie występują, jako samoistne liczby ujemne. Jako przykład starannego omijania liczb ujemnych samoistnych przez naszego autora niechaj posłuży np. zadanie 5-e księgi I-ej: „Liczbę daną podzielić na dwie inne liczby w ten sposób, aby pewna przepisana część pierwszéj, dodana do pewnéj, również przepisanéj części drugiéj liczby, dała sumę daną„, do którego Diofant dodaje warunek następujący: "Suma dana musi być zawartą pomiędzy dwiema liczbami, które powstają, gdy weźmiemy przepisane części obu liczb danych„

Rozwiążemy zadanie to ogólnie. Liczbę a rozłożyć na dwie liczby, aby m-a część pierwszéj, powiększona o n-ą część drugiéj, równała się b. Niewiadomą liczbę pierwszą x znajdujemy z równania

$$\frac{x}{m} + \frac{a-x}{n} = b\,,$$

z którego otrzymujemy

$$x = \frac{m}{n-m}(bn-a),$$

$$a - x = \frac{n}{n-m}(a - bm)\;.$$

Aby liczby x i $a-x$ były dodatnie, trzeba aby było jednocześnie

$$bn \gtrless a,\; bm \lessgtr a\,,$$

skąd oczywiście wynika, że b musi być zawarte pomiędzy liczbami a/m i b/n. Przy spełnieniu się tego warunku, zagadnienie nie będzie miało rozwiązań ujemnych.

[2] Euler. Vollständige Anleitung zur Algebra, 1770. Wydanie nowe Reclama, str. 18.

[3] D'Alembert, w Opuscules mathématiques, I. [Porówn. Duhamel Des méthodes etc. II. str. 165.] dla okazania fałszywości poglądu Eulera, przytacza proporcyą

$$1 : -1 = -1 : 1,$$

w któréj, zgodnie z zasadniczą własnością proporcyj, iloczyn wyrazów skrajnych równa się iloczynowi wyrazów średnich i stosunek $\frac{1}{-1} = -1$ jest równy stosunkowi $\frac{-1}{1} = -1$. Tymczasem, jeżeli będziemy uważali liczby ujemne za mniejsze od zera, będzie w pierwszym stosunku $1 > -1$, w drugim zaś $-1 < 1$, co nie zgadza się znowu z równością stosunków. "Prawda, mówi daléj D'Alembert, że, według poglądu Leibniza, liczba -1 nie jest średnią proporcyonalną pomiędzy

pomiędzy 1 i 1, ani —2 pomiędzy 1. i 4., gdyż liczby ujemne wchodzą do rachunku, nie wchodząc do stosunków, ułamki zaś nie są tém samém, co stosunki; przyznaję jednak, że nie rozumiem ani siły ani prawdy tego rozumowania. Rozumowanie podobne obaliłoby wszystkie nasze pojęcia algebraiczne za pomocą niepotrzebnych i sztucznych ograniczeń i było by zresztą słusznem tylko w razie przypuszczenia, że liczby ujemne są niższe od zera, co nie jest prawdą,,.

[4] **Śniadecki** w "Rachunku algebraicznego teoryi,, 1783, która pozostanie najpiękniejszym pomnikiem literatury matematycznéj polskiéj XVIII stulecia, mówi [tom I. str. 10]: "Ilości ujemne [u Śniadeckiego "odjemne,,] mają swoje jestestwo tak rzetelne i prawdziwe jak i ilości dodatnie, tylko że w sposobie między sobą przeciwnym. A przeto wyrażenie ilości ujemnych nie zawisło od tak dzikich i obłąkanych tłomaczeń, któremi niektórzy autorowie uczących się bałamucą. Jeżeli to jest prawo dla ludzkiego rozumu, że we wszystkich poznawaniach nie może przeniknąć do prawdy tylko drogą porównywania, rozstrząsając naturę ilości, wpada w konieczną potrzebę uważania ich jedne względem drugich, a przeto znaki na wyrażenie tych względów i stanów są mu nieprzerwanie potrzebne...,, Co się zaś tyczy nazwy nadanéj liczbom ujemnym, jako mniejszym od zera [minores nihilo], to ona, według Śniadeckiego, oznacza tylko zmianę stanu, pochodzącą stąd, że pewne ilości zmieniające się stają się z dodatnich ujemnemi lub odwrotnie. "Jeżeli więc, powiada [str. 83], niektórzy autorowie wyrywają się zaraz z tą nazwą przy wstępie, możemy z teraźniejszych i przeszłych uwag rozsądzić, jak mało znają teoryą ilości dodatnich i ujemnych. Oprócz wielkiéj nieprzyzwoitości, przez którą uczących się wprawiają w ciemne i dziwaczne rzeczy opisywanie, błądzą przeciwko prawom geometrycznym, dając nazwisko powszechne bardzo szczególnemu przypadkowi i wprowadzając niezrozumiany język w tę naukę, która z swéj natury jest stolicą jasności i przekonania,,.

[5] **Carnot** zastanawia się obszernie nad liczbami ujemnemi we wstępie do swego dzieła Géométrie de position [An XI, 1803 str. II—XX], oraz w innéin sławném dziełku. Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal [1797., wyd. 5-e, 1881. str. 173 — 200]. Teoryą liczb ujemnych opiera na następującéj zasadzie głównéj:

"Każda wartość ujemna, znaleziona na niewiadomą w rozwiązywaniu zagadnienia, wyraża—jeżeli odwrócimy uwagę od znaku téj wartości—różnicę dwóch innych wartości, z których większa została wzięta za mniejszą, mniejsza zaś za większą w wyrażeniu warunków zagadnienia,,.

Nie będziemy przytaczali ani dowodu téj zasady, prostego zresztą bardzo, ani rozmaitych wniosków, jakie z niéj wyprowadza Carnot, powiemy tylko, że idzie mu przedewszystkiém o wytłomaczenie znaczenia rozwiązań ujemnych, do jakich prowadzi rachunek algebraiczny. Rozwiązania te, według niego, nie mają znaczenia same przez się, wskazując tylko, jakie zmiany poczynić należy w warunkach zagadnienia, aby utrzymać rozwiązanie dodatnie. Związki albo równania zachodzą, według niego, tylko pomiędzy wielkościami bezwzględnemi pewnego układu; jeżeli zmienimy w związkach tych znaki jednéj lub kilku wielkości, to wzory, tak przekształcone, należeć będą do innego stanu układu, w którym wielkości, ze zmienionemi znakami są odwrotnemi [inverses] względem wielkości w pierwszym stanie układu. Gdybyśmy tych zmian znaków nie dokonali, doszlibyśmy do wartości ujemnych.

Dla uniknienia wyrażeń niewłaściwych, proponuje Carnot wprowadzenie pojęcie *wielkości względnéj* [valeur de corrélation] dla wyrażenia, mającego zastąpić wielkość bezwzględną przy stosowaniu związków, nie objętych warunkami pierwotnemi. O takiéj wartości względnéj mówi, że staje się ujemną, a odpowiednia jéj wielkość staje się wtedy odwrotną, co odpowiada, według niego, zasadzie, wyrażanéj dotąd nieściśle: "wartości ujemne należy brać w kierunku przeciwnym wartościom dodatnim". Wartość względna ujemna jest dla Carnota pewną formą algebraiczną złożoną, wskazującą zarazem wielkość i działanie nad niém, jest działaniem, które staje się niewykonalném, jeżeli to wyrażenie ma zostać odosobnioném. Lecz wszystkie te "formy czysto hieroglificzne" powiada, znikają przez przekształcenia, a formy pierwotne, stosowane początkowo tylko do przypadku, dla którego przeprowadzono rozumowanie, stają się przez to przekształcenie właściwemi i dla innych przypadków.

Ten sam pogląd, jak to zobaczymy, stanowi podstawę teoryi Dühringa.

[6] Wroński poświęca w swém dziele Introduction i t. d. [str. 159], krótkie tylko uwagi liczbom ujemnym. Dwa związki wzajemne

$$A + B = C \quad \text{i} \quad C - B = A,$$

wskazują na szczególne znaczenie wielkości B, które—gdy odwrócimy uwagę od działań dodawania i odejmowania — występuje w pierwszym z tych związków, jako mające własność powiększania, w drugim zaś, opatrzone własnością zmniejszania. Różność roli liczby B w tych dwóch przypadkach pozwala na stosowanie prawa *jakości*, a stąd wynikają cechy szczególne, które nazywa stanami *dodatnim* i *ujemnym* liczby B. Stany odnoszą się do jakości, powiada Wroński, działania — do ilości; brak tego bardzo prostego rozróżnienia zaciemnił wszystkie dotychczasowe teorye liczb dodatnych i ujemnych.

[7] Liczby dodatnie i ujemne, powiada Gauss [*Göttingische gelehrte Anzeigen*, 1831, także *Werke* II, str. 176], mogą znaleźć zastosowanie tylko tam, gdzie rzeczom liczonym odpowiadają przeciwne, które, pomyślane z niemi razem, wzajemnie się znoszą. Dokładniéj mówiąc, założenie to ma miejsce wtedy tylko, jeżeli rzeczami liczonemi nie są substancye [przedmioty pomyślane w sobie], lecz związki pomiędzy dwoma przedmiotami. Zakłada się przytém, że te przedmioty są uporządkowane w szereg, w pewien oznaczony sposób, np. A, B, C, D... i że wzajemność [stosunek] między A i B uważamy za równy wzajemności, zachodzącéj

pomiędzy B i C i t. d. Tu do pojęcia przeciwieństwa należy tylko przestawienie [Umtausch] wzajemności, tak, że jeżeli wzajemność albo przejście od A do B uważamy za $+1$, to wzajemność albo przejście od B do A oznaczamy przez -1. Jeżeli więc taki szereg po obu stronach jest nieograniczony, to każda liczba rzeczywista całkowita wyraża wzajemność pewnego dowolnego wyrazu, przyjętego za pierwszy, do pewnego oznaczonego wyrazu szeregu.

[8] Duhamel, Des méthodes etc. II. str. 169.

[9] Znaki, powiada Dühring [Neue Grundmittel und Erfindungen, 1884 str. 8. i dalsze] mogą oznaczać tylko działania lub związki, z działań wynikające; znak — nigdy nie oznacza nic innego niż odejmowanie. Jeżeli w wyrażeniu postaci $a-x$, a jest wielkością oznaczoną, x wielkością zmienną np. rosnącą, to z chwilą, gdy x staje się równém a, poczyna się niemożność wykonania działania. Jeżeli napiszemy $a-x=-y$, to równanie to nie wyraża nic innego nad tę niemożność. Taka jest, według Dühringa, geneza i znaczenie liczby ujemnéj odosobnionéj. Znaczenie zaś rozwiązań ujemnych wyjaśnia on w sposób następujący:

Jeżeli mamy równanie $x+y=a$, gdzie x i y są liczby zmienne, a zaś jest liczbą stałą, to równanie $y=a-x$ w przypadku, gdy x jest większe od a, przedstawia niemożność. Kładąc $x-a=z$, mamy $y=-z$ jako wskazówkę, że y nie może być wielkością bezwzględną. Zastępując y przez z, otrzymujemy równanie $x-z=a$, gdzie wszystkie liczby [wielkości] są już bezwzględne, a zmieniając tu literę z na literę y — oznaczenie jest tu obojętne—otrzymujemy zamiast równania pierwotnego $x+y=a$ równanie $x-y=a$ nowego typu. Rozwiązanie ujemne daje przeto poznać, że w warunkach zadania mieści się niemożność, i jak tę niemożność usunąć przez zmianę znaku. Dühring stoi tu, jak widzimy na stanowisku Carnota.

Przyjmując rozwiązania ujemne, obejmujemy dwa typy równań $x+y=a$ $x-y=a$ jednym typem np. $x+y=a$; wprowadzenie liczb ujemnych oznacza tedy to samo, co zastąpienie jedném równaniem dwóch równań różnych. Ten sam fakt powtórzy się, jak to zobaczymy, w teoryi liczb urojonych.

Rachunek liczb ujemnych jest, według Dühringa, rachunkiem niemożliwości. "Mit dem Unmöglichen, powiada on, wenn man es eben als unmöglich setzt und behandelt, muss es in Schlüssen und Rechnungen hantirt werden, sonst bleibt jeder Gedankengang in der Kindheit„ — więc i według jego teoryi ten rachunek "niemożliwości„ ma swoje pewne prawidła, które nie mogą się różnić i nie różnią się od prawideł działań nad liczbami dodatniemi [bezwzględnemi]. Mimo zasadniczéj różnicy poglądu, całe następne rozwinięcie rachunku liczb ujemnych będzie zupełnie takie same, jak gdyby liczby te wprowadzone zostały, jako formy nowe, za pomocą określeń formalnych.

[10] Kronecker. Ueber den Zahlbegriff [l. c. str. 345].

[11] Lerch we wspomnianéj wyżéj pracy podaje teoryą liczb ujemnych, polegającą na zasadzie, podobnéj do téj, na jakiéj oparł teoryą liczb

ułamkowych. Wprowadza on formy czyli pary liczb $(a \mid b)$, w których a i b są liczbami całkowitemi. Dwie takie formy $(a \mid b)$ i $(c \mid d)$ nazywają się równoważnemi, jeżeli czynią zadość równości $a+d=b+c$. Określenie to stosuje się zarówno do przypadku, w którym $a \geq b$, $c \geq d$, jako też do przypadku, w którym $a < b$, $c < d$.

Z dwóch równoważności

$$(a \mid a') \sim (b \mid b')$$
$$(c \mid c') \sim (b \mid b')$$

wynika, na zasadzie powyższego określenia, równoważność

$$(a \mid a') \sim (c \mid c')$$

Wyrażenie, przedstawiające ogół form wzajem równoważnych, nazywa Lerch "differentą". Tak np. differenta $(1 \mid 4)$ obejmuje formy $(2 \mid 5)$, $(3 \mid 6)$, $(4 \mid 7)$ . . .

Differerenta $(x \mid x) = (0 \mid 0)$ nazywa się differentą zerową.

Sumą form $(a \mid a')$ i $(b \mid b')$ nazywamy formę $(a + b \mid a' + b')$. Z tego określenia wynika, że jeżeli

$$(a \mid a') \sim (c \mid c'),\ (b \mid b') \sim (d \mid d'),$$

to

$$(a \mid a')+(b \mid b') \sim (c \mid c')+(d \mid d')$$
$$(a+b \mid a'+b') \sim (c+d \mid c'+d')$$

Jednowartościowość i przemienność dodawania stwierdzamy na zasadzie powyższego, bez trudności:

Sumę m form $(a \mid b)$ oznaczamy przez $m(a \mid b)$; jeżeli A jest znakiem formy $(a \mid b)$, to sumę tę oznaczyć możemy przez mA lub Am, przyczém

$$mA = (ma \mid mb).$$

Każda differenta jest postaci mE, gdzie E jest diff. $(1 \mid 0)$ lub postaci $m'E'$ gdzie E'=diff. $(0 \mid 1)$. E nazywa się jednostką *dodatnią*, E' jednostką *ujemną*. Ogólnie jest

$$m\,E + n\,E' = \text{diff}\,(m \mid n).$$

Iloczyn form $(a \mid b)$, $(c \mid d)$ określamy za pomocą równania

$$(a \mid b) \,.\, (c \mid d) = (ac+bd \mid ad+bc),$$

z którego wynika jednowartościowość i przemienność mnożenia.

Jeżeli A i B są dwie "differenty dowolne", $(a \mid a')$, $(b \mid b')$ dwie odpowiadające im formy, to differenta C iloczynu $(a \mid a')$, $(b \mid b')$ nazywa się iloczynem different A i B, co oznaczamy w ten sposób $C = AB = BA$. Na podstawie tego określenia można łatwo dowieść, że

$$mE \,.\, nE = mnE, \quad mE \,.\, nE' = mnE', \quad mE' \,.\, nE' = mnE,$$

co wyraża znane prawidło znaków w mnożeniu.

Hosted by Google

Teorya L e r c h a nie jest w istocie rzeczy nową, bo zawiera się jako szczególny przypadek w teoryi "par algebraicznych,, [algebraic couples] ogłoszonéj przez S i r R o w a n a H a m i l t o n a jeszcze w roku 1835. O téj teoryi podamy wzmiankę w następującym rozdziale.

Ogłoszona niedawno teorya elementarna liczb ujemnych Ch. M e r a y'a [Les fractions et les quantités négativés, 1890], polega na tém, że uważa wielkości dodatnie i ujemne, jak to czyni W r o ń s k i, za dwa stany, różnéj jakości [quantités qualifiées] i zamiast znaków $+$ i $-$ wprowadza na początek dla objaśnienia teoryi znaki $\rightarrow$ i $\leftarrow$, umieszczone nad głoskami. Iloczyn określa M é r a y za pomocą wzorów:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overleftarrow{a} \times \overleftarrow{b} = \overrightarrow{(ab)}.$$

$$\overleftarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \overleftarrow{b} = \overleftarrow{(ab)}.$$

ROZDZIAŁ V.

LICZBY ZESPOLONE ZWYCZAJNE.

18. ROZWÓJ POJĘĆ O LICZBACH UROJONYCH.

Historya liczb zespolonych, zwanych inaczéj urojonemi, podobną jest do historyi liczb ujemnych. Do ostatnich prowadzi potrzeba uogólnienia odejmowania, do pierwszych takaż potrzeba uogólnienia wyciągania pierwiastków; jedne i drugie przez długi czas uważane były za fałszywe i ślad tego poglądu pozostał w nazwie liczb urojonych. Nad istotą liczb urojonych zastanawiano się wielokrotnie i dziś jeszcze, mimo zupełnego ustalenia ich użytku w nauce, różne na ten przedmiot panują poglądy. Przebiegnijmy pokrótce dzieje tego nowego gatunku liczb.

Już Cardano zwrócił uwagę na pierwiastki kwadratowe z liczb ujemnych, do jakich doprowadzało rozwiązywanie równań stopnia drugiego. Bombelli, Girard, de Moivre i inni rozwinęli rachunek na liczbach urojonych. Jan Bernoulli za pomocą liczb urojonych przedstawia rozmaite wzory Analizy, między innemi podaje sławny wzór

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\log \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}},$$

Euler zaś odkrywa wzory

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

które w wysokim stopniu przyczyniły się do postępu Analizy. Jan Śniadecki tłomaczył znaczenie rozwiązań urojonych w ten sposób, że "pokazują nam one niepodobieństwo tego, czego szukamy„ dla jakiéjś przeciwności, która się w pytanie, mimo uwagę naszę wmieszała; ponieważ wszakże do przypadków szczególnych, które ogarnia równanie, należy i ten, który to pytanie czyni niepodobném, płynie stąd uzasadnienie potrzeby rachunku nad temi liczbami[1]„.

Gauss w swojéj sławnéj rozprawie inauguracyjnéj [1799] o rozkładzie funkcyj algebraicznych całkowitych na czynniki rzeczywiste pierwszego i drugiego stopnia nie używa w dowodzeniu liczb urojonych, jakkolwiek jasno i dobitnie wyraża swój pogląd na możność i prawo ich stosowania[2]. Jeszcze dobitniej rolę tych liczb akcentuje Wroński [1811.], powstając przeciwko przyjętéj przez matematyków nazwie i proponując dla nich nazwę liczb *idealnych*, którą późniéj Kummer zastosował do analogicznych form liczbowych w Teoryi liczb. Jednostkę urojoną czyli idealną $\sqrt{-1}$ uważa Wroński za opartą bezpośrednio na pojęciu nieskończoności; liczby urojone nazywa jednym z fenomenów umysłowych, najbardziéj godnych uwagi, dającym się używać bez żadnéj sprzeczności logicznéj we wszystkich działaniach algorytmicznych i prowadzącym do wyników zgodnych z naszym rozumem[3]. To też posługuje się Wroński liczbami urojonemi z całą swobodą w badaniach swoich; on to jeden z pierwszych stosuje je do uogólnienia powyższych dwóch wzorów Eulera, stwarzając tym sposobem nowe funkcye trygonometryczne wyższych rzędów. Niestety jednak, ani ten stanowczy sąd Wrońskiego o liczbach urojonych, ani jego odkrycia, nie zwróciły na siebie uwagi współczesnych, i trzeba było dopiero powagi imienia takiego Gaussa, aby liczbom urojonym zapewnić równouprawnienie w nauce. Uczony ten w I-éj rozprawie o resztach dwukwadratowych [1825.], wskazuje Arytmetyce wyższéj czyli Teoryi liczb nowe pola badania przez wprowadzenie do jéj dziedziny liczb urojonych i wykłada [1831.] znaną obecnie i ogólnie używaną metodę przedstawiania liczb urojonych za pomocą punktów na płaszczyźnie, chociaż co do tego uprzedził go był już Argand [1806.][4]. Przez to geometryczne przedstawienie badanie układu liczb urojonych zamienia się na badanie rozmaitości dwuwymiarowéj. Jednocześnie stawia Gauss ważne pytanie, rozwiązane późniéj przez innych [porówn. rozdział VI-y], "dlaczego stosunki pomiędzy rzeczami, przedstawiającemi rozmaitość więcéj niż dwuwymiarową, nie dają jeszcze innych gatunków wielkości, dopuszczalnych w Arytmetyce ogólnéj„.

Teorya ogólna rozwiązywania równań, a zwłaszcza badania w dziedzinie funkcyj, jakie zawdzięczamy Abelowi, Jacobi'emu, Cauchy'emu, Riemannowi, Weierstrassowi i innym, oraz badania w Teoryi liczb, które prowadzili Gauss, Dirichlet, Eisenstein, Kummer, Dedekind i t. d. zapewniły liczbom urojonym niezbędne stanowisko we wszystkich gałęziach Algorytmii, a ważne zastosowania w dziedzinie Geometryi wykazały wysoką użyteczność tego narzędzia.

Ten rozwój zastosowań liczb urojonych nie mógł nie wywołać badań, skierowanych ku wyjaśnieniu istoty ich i uzasadnieniu podstaw rachunku nad niemi. Tu, jak i w teoryi liczb ujemnych, główne dwa uwidoczniają się poglądy. Według jednego z nich, za przedstawicieli którego należy uważać Wrońskiego, Gaussa, Weierstrassa, Hankela i t. p. liczby urojone mają w dziedzinie liczb stanowisko takie, jakie przyznajemy liczbom ułamkowym i ujemnym: uzupełniają one dziedzinę pierwotną liczb całkowitych i stanowią razem z liczbami *rzeczywistemi* jednę mnogość dwuwymiarową. Drugi pogląd, reprezentowany przez Cauchy'ego[5], Duhamela, Dühringa[6], Lipschitza[7], Kroneckera[8] i innych orzeka, że liczby urojone są tylko symbolami, znakami działań, jakie wykonywamy na liczbach rzeczywistych. Najbardziéj w tym kierunku posuwa się Kronecker, według poglądów którego liczby urojone mogą być usunięte z dziedziny badań analitycznych.

Tu, jak i przy liczbach ujemnych, teorya formalna godzi, zdaniem naszém, poglądy sprzeczne, bo wprowadzając liczby urojone i działania nad niemi za pomocą ścisłych określeń, uzasadnia tém samém stosowanie ich w nauce, pozostawiając swobodę interpretacyi tych form liczbowych w poszczególnych dziedzinach badania.

Hosted by Google

19. TEORYE DZIAŁAŃ NAD LICZBAMI UROJONEMI.

Niechaj będzie liczba dwuwymiarowa $\alpha e_1+\beta e_2$, w któréj α i β są jakiemikolwiek liczbami całkowitemi lub ułamkowemi, dodatniemi lub ujemnemi, e_1 i e_2 mają być dwiema jednostkami zasadniczemi, o których zakładamy, że nie mogą czynić zadość żadnemu równaniu

$$m\,e_1+n\,e_2=0,$$

w którém m i n są liczbami całkowitemi lub ułamkowemi, dodatniemi lub ujemnemi, różnemi od zera.

Równość dwóch takich liczb $\alpha e_1+\beta e_1$ i $\alpha' e_1+b' e_2$ określimy w ten sposób: Jest

$$\alpha e_1+\beta e_2=\alpha' e_1+\beta' e_2$$

wtedy i tylko wtedy, jeżeli

$$\alpha=\alpha',\ \beta=\beta'.$$

Z określenia tego wynika, że liczba zespolona $\alpha e_1+\beta e_2$ jest zerem wtedy tylko, jeżeli każdy ze współczynników α i β jest zerem.

Dodawanie dwóch liczb $\alpha e_1+\beta e_2$ i $\alpha' e_1+\beta' e_2$ określamy za pomocą wzoru

$$(\alpha e_1+\beta e_2)+(\alpha' e_1+\beta' e_2)=(\alpha+\alpha')e_1+(\beta+\beta')e_2.$$

Na podstawie tego wzoru łatwo uskutecznić dodawanie trzech i więcéj liczb zespolonych, a także wykazać, że dodawanie to jest działaniem łącznéem i przemiennéem i że odejmowanie takich liczb wykonywa się na podstawie wzoru

$$(\alpha e_1+\beta e_2)-(\alpha' e_1+\beta' e_2)=(\alpha-\alpha')e_1+(\beta-\beta')e_2.$$

Widzimy stąd, że suma i różnica dwóch liczb dwuwymiarowych są téj samej postaci, co liczby dane.

Przechodzimy teraz do mnożenia, o którém założmy, że jest działaniem łącznéem i przemiennéem oraz związanéem z dodawaniem prawem rozdzielności. Na téj zasadzie iloczyn dwóch liczb $\alpha e_1+\beta e_2$, $\alpha' e_1+\beta' e_2$ będzie

$$(\alpha e_1+\beta e_2)(\alpha' e_1+\beta' e_2)=\alpha\alpha' e_1 e_1+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)e_1 e_2+\beta\beta' e_2 e_2.$$

Jeżeli nie uczynimy żadnych nowych założeń co do iloczynów $e_1 e_1$, $e_1 e_2=e_2 e_1$, $e_2 e_2$, to iloczynu dwóch liczb zespolonych nie będzie

Hosted by Google

można sprowadzić do postaci prostszéj, ani dać mu postaci, jakie mają czynniki. Aby więc iloczynowi można było nadać znaczenie w dziedzinie naszéj, musimy ustalić znaczenie iloczynów jednostek.

Dla przeprowadzenia badania tego w całéj ogólności, pójdziemy drogą, wskazaną przez Weierstrassa [9].

Niechaj a oznacza pewną liczbą zespoloną, g i h dwie inne liczby zespolone dowolne, należące do téj saméj dziedziny i takie, że nie można jednéj z nich otrzymać z pomnożenia drugiéj przez czynnik rzeczywisty ϱ. Powiadam, że liczbie a można będzie nadać postać

$$a = \xi g + \xi' h,$$

gdzie ξ i ξ' są liczbami rzeczywistemi.

W saméj rzeczy, niechaj będzie

$$a = \alpha e_1 + \alpha' e_2, \quad g = \gamma e_1 + \gamma' e_2, \quad h = \delta e_1 + \delta' e_2.$$

Będzie tedy

$$\alpha e_1 + \alpha' e_2 = \xi(\gamma e_1 + \gamma' e_2) + \xi'(\delta e_1 + \delta' e_2),$$

skąd na zasadzie określenia równości:

$$\alpha = \xi\gamma + \xi'\delta$$
$$\alpha' = \xi\gamma' + \xi'\delta'$$

Z tych dwóch równań stopnia pierwszego między liczbami rzeczywistemi, oznaczymy szukane liczby ξ i ξ', byleby różnica

$$\gamma\delta' - \gamma'\delta,$$

była różną od zera. Warunek ten, równoważny warunkowi, aby stosunek γ/δ nie był równy stosunkowi γ'/δ', spełnia się na zasadzie uczynionego zastrzeżenia, że liczba g nie może równać się liczbie h, pomnożonéj przez jakikolwiek czynnik rzeczywisty ϱ.

Mając zatém do pomnożenia dwie liczby zespolone a i b, możemy przedstawić je pod postacią

$$a = \xi g + \xi' h, \quad b = \eta g + \eta' h,$$

a następnie wykonać mnożenie według podanego wyżéj prawidła. Będzie więc

Hosted by Google

1. $$a\,b = \xi\eta\,.\,gg + (\xi'\eta + \xi\eta')gh + \xi'\eta'\,.\,hh.$$

Zagadnienie nasze sprowadza się do znalezienia znaczenia iloczynów

$$g\,g,\;\; g\,h,\;\; h\,h$$

w założeniu, że liczba g nie jest równa $\varrho\, h$.

Dla oznaczenia tych iloczynów przyjmijmy równania następujące:

2. $$\begin{aligned} gg &= \lambda g + \lambda' h \\ hg = gh &= \mu g + \mu' h \\ hh &= \nu g + \nu' h. \end{aligned}$$

Pomiędzy współczynnikami

$$\lambda, \lambda';\quad \mu, \mu';\quad \nu, \nu'$$

zachodzą pewne związki, wynikające z przyjętéj przez nas własności mnożenia

$$ggh = ghg, \quad hgh = hhg.$$

Wstawiając w te równania wartości iloczynów gg, gh, hg i hh, wzięte z równań poprzednich, otrzymamy następujące równania warunkowe

3. $$\begin{aligned} &\lambda'\nu = \mu\mu' \\ &\lambda\mu' + \lambda'\nu' - \mu\lambda' - \mu'^2 = 0, \\ &\mu^2 + \mu'\nu - \nu\lambda - \nu'\mu = 0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że nie może być

$$\lambda\mu' - \mu\lambda' = \nu\mu' - \mu\nu' = \nu\lambda' - \lambda\nu' = 0,$$

gdyż stąd wynikłoby

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\mu}{\mu'} = \frac{\nu}{\nu_{,}} = k,$$

a więc:

$$gg = \lambda'(kg+h), \;\; gh = \mu'(kg+h),$$

t. j.

$$g = \frac{\lambda'}{\mu'} h\,,$$

co się sprzeciwia naszemu założeniu o liczbach g i h.

Jeżeli istnieją wartości λ, λ', μ, μ', ν, ν', czyniące zadość równaniom 3. to można oznaczyć liczbę e_1, aby czyniła zadość warunkowi

$$e_1 a = a e_1 = a,$$

t. j. aby była modułem mnożenia. W saméj rzeczy, aby iloczyn ab był równy a, to jest aby b było właśnie tym modułem e_1, musi być, według 1.

$$\xi\eta gg + (\xi'\eta + \xi\eta')\, gh + \xi'\eta' \,.\, hh = \xi g + \xi' h,$$

Kładąc po stronie pierwszéj wartości iloczynów gg, gh i hh, wzięte z równań 2., a następnie stosując warunek równości, dochodzimy do równań

$$\begin{aligned} \xi\eta\lambda + (\eta\xi' + \eta'\xi)\mu + \xi'\eta'\nu &= \xi \\ \xi\eta\lambda' + (\eta\xi' + \eta'\xi)\mu' + \xi'\eta'\nu' &= \xi' \end{aligned}$$

które winny się sprawdzać dla każdéj liczby a, to jest niezależnie od wartości liczb ξ i ξ'. Kładąc przeto raz $\xi = 1$, $\xi = '0$, drugi raz $\xi = 0$ i $\xi' = 1$, otrzymujemy z powyższego

$$\begin{aligned} \eta\lambda + \eta'\mu &= 1, \qquad & \eta\mu + \eta'\nu &= 0 \\ \eta\lambda' + \eta'\mu' &= 0, \qquad & \eta\mu' + \eta'\nu' &= 1. \end{aligned}$$

Wartości, które otrzymujemy z dwóch pierwszych równań zgadzają się z wartościami, jakie otrzymujemy z dwóch drugich, a to na mocy równań 3.

Liczba więc e_1, mająca własność modułu, istnieje; jeżeli przyjmiemy za liczbę g ten właśnie moduł, to iloczyny gg, gh, hh przejdą w następujące

$$e_1 e_1 = e_1, \quad e_1 h = h, \quad hh = \nu e_1 + \nu' h;$$

będzie zatém

$$\lambda = 1, \quad \lambda' = 0, \quad \mu = 0, \quad \mu' = 1$$

i zagadnienie nasze sprowadza się do oznaczenia współczynników ν i ν'.

Ponieważ liczba h jest dowolną, określmy ją za pomocą następującego założenia:

Uczyńmy

$$h_1 = -\frac{\nu'}{2} e_1 + h,$$

Hosted by Google

to otrzymamy

$$h_1 h_1 = \left(\frac{\nu'^2}{4} + \nu\right) e_1,$$

a jeżeli wartość bezwzględną liczby rzeczywistéj $\frac{\nu'^2}{4} + \nu$ oznaczymy przez ϑ^2 [ϑ i ϑ^2 mają być liczbami rzeczywistemi]:

$$h_1 h_1 = \vartheta^2 e_1 \text{ lub } h_1 h_1 = -\vartheta^2 e_1,$$

stosownie do tego, czy $\frac{\nu'^2}{4} + \nu$ jest dodatnie lub ujemne.

Jeżeli przyjmiemy, że druga jednostka zasadnicza $e_2 = \frac{1}{\vartheta} h_1$, otrzymamy z równań poprzedzających

$$e_2 e_2 = e_1 \quad \text{lub} \quad e_2 e_2 = -e_1.$$

należy zatém rozstrzygnąć, które z tych dwóch założeń stosować można w teoryi naszéj.

Gdybyśmy przyjęli pierwsze z założeń, to wtedy iloczyn dwóch liczb

$$e_1 + e_2, \quad e_1 - e_2,$$

różnych od zera, równałby się

$$e_1 e_1 + e_1 e_2 - e_1 e_2 - e_2 e_2 = e_1 e_1 - e_2 e_2 = 0,$$

a zatém byłby zerem, mimo że żaden z czynników zerem nie jest. Założenie to należy przeto odrzucić i pozostaje jedynie drugie założenie

$$e_2 e_2 = -e_1.$$

A zatém:

Jeżeli dla liczb zespolonych, utworzonych z dwóch jednostek zasadniczych e_1 i e_2, pragniemy zachować wszystkie własności mnożenia liczb rzeczywistych, to dla iloczynu jednostek należy przyjąć założenia:

$$e_1 e_1 = e_1, \quad e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2, \quad e_2 e_2 = -e_1.$$

Przyjmując $e_1 = 1$, t. j. zwykłéj jednostce rzeczywistéj, i oznaczając e_2 przez i, otrzymujemy liczby zespolone postaci $\alpha + \beta i$, dla których jednostka urojona i określa się równaniem

$$ii = -1,$$

lub

$$i^2 = -1.$$

Takie liczby $\alpha+\beta i$ nazywają się liczbami zespolonemi lub urojonemi zwyczajnemi, liczba α nazywa się częścią rzeczywistą, βi—częścią czysto urojoną. Liczby zespolone $\alpha + \beta i$ obejmują w sobie liczby rzeczywiste, które otrzymujemy, zakładając $\beta = 0$.

Działania nad liczbami zespolonemi $\alpha+\beta i$ odbywają się według prawideł, wyżéj wskazanych, a mianowicie:

$$(\alpha + \beta i) + (\alpha' + \beta' i) = (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta')i$$
$$(\alpha + \beta i) - (\alpha' + \beta' i) = (\alpha - \alpha') + (\beta - \beta')i$$

Iloczyn liczb, na podstawie określenia podanego wyżéj, przyjmuje postać

$$(\alpha + \beta i)\ (\alpha' + \beta' i) = \alpha\alpha' - \beta\beta' + (\alpha\beta' + \beta\alpha')i,$$

skąd bezpośrednio wnosimy, że iloczyn dwóch liczb urojonych postaci $\alpha + \beta i$ jest liczbą téj saméj postaci. Toż samo stosuje się do iloczynu trzech i więcéj czynników.

Z określenia wynika

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = 1\ \ldots$$

i w ogóle

$$i^{4m+n} = i^n$$

gdzie m jest liczbą całkowitą dowolną, n zaś przyjmuje wartości 0, 1, 2, 3.

Iloraz dwóch liczb zespolonych $\alpha+\beta i$ i $\alpha'+\beta' i$, z których druga nie jest zerem, możemy łatwo znaleźć. Oznaczmy ten iloraz przez $\xi + \eta i$; na podstawie określenia dzielenia będzie

$$(\xi+\eta i)\ (\alpha'+\beta' i) = \alpha + \beta i,$$

czyli

$$\xi\alpha' - \eta\beta' + (\xi\beta' + \eta\alpha')i = \alpha + \beta i,$$

skąd

$$\xi\alpha' - \eta\beta' = \alpha$$
$$\xi\beta' + \eta\alpha' = \beta.$$

Jeżeli więc α' i β' nie są zerami, otrzymujemy z tych równań

Hosted by Google

$$x = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2}, \; y = \frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2},$$

a więc

$$\frac{\alpha + \beta i}{\alpha' + \beta' i} = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2} + \frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2} i.$$

Ponieważ każde z działań elementarnych nad liczbami zespolonemi postaci $\alpha + \beta i$ doprowadza do liczb téjże postaci, a więc i wszelkie kombinacye skończonéj liczby takich działań doprowadzają również do liczb postaci $\alpha + \beta i$.

Dwie liczby $\alpha + \beta i$ i $\alpha - \beta i$ różniące się znakiem współczynnika przy jednostce urojonéj, nazywają się wzajemnie *sprzężonemi.* Suma dwóch liczb sprzężonych $\alpha + \beta i$ i $\alpha - \beta i$ równa się liczbie rzeczywistéj 2α, różnica jest liczbą czysto urojoną $2\beta i$, iloczyn równa się liczbie rzeczywistéj $\alpha^2 + \beta^2$.

W myśl poglądów Kroneckera, możemy liczby zespolone, w których jednostką urojoną jest $\sqrt{-1}$, przedstawić pod postacią $a + bx$, gdzie x jest "nieoznaczoną", równości zaś, w których występują takie liczby zespolone, zastąpić kongruencyami według modułu $x^2 + 1 = 0$. Tak np. równość dwóch liczb $a + bx$ i $a' + b'x$ wyraża się za pomocą kongruencyi

$$a + bx \equiv a' + b'x \pmod{x^2 + 1}$$

Ponieważ obie strony téj kongruencyi są stopnia pierwszego względem x, moduł zaś jest stopnia drugiego, kongruencya zatém sprowadza się do wyżéj podanych warunków

$$a = a', \; b = b'.$$

Suma i iloczyn liczb $a + bi$ i $a' + b'i$ wynikają z kongruencyj:

$$(a + bx) + (a' + b'x) \equiv (a + a') + (b + b')x \pmod{x^2 + 1}$$

$$(a + bx)(a' + b'x) \equiv aa' + (ab' + a'b)x + bb'x^2 \pmod{x^2 + 1},$$

z których, przy dołączeniu równania $x^2 + 1 = 0$, otrzymujemy znane wzory na dodawanie i mnożenie liczb urojonych.

Metoda ta ma służyć może nie tylko dla liczb zespolonych $a + b\sqrt{-1}$, ale i ogólnie dla liczb postaci $a + b\sqrt{-n}$, jeżeli zamiast modułu $x^2 + 1$ przyjąć moduł $x^2 + n$; może też służyć do badania wyrażeń, zależnych od liczb niewymiernych; tak np. równości,

Hosted by Google

w które wchodzi $\sqrt{2}$, można zastąpić kongruencyami według modułu x^2-2, z dołączeniem równania $x^2-2=0$.

Zasada metody niniejszéj jest zupełnie zgodną z zasadą podanéj przez Cauchy'ego jeszcze w r. 1847 metody równoważności algebraicznych, mającéj wyjaśnić teoryą liczb urojonych. U Kroneckera zasada ta wypływa z ogólnéj teoryi arytmetycznéj wielkości algebraicznych, którą znakomity uczony przedstawił przed dziewięciu laty w sławnéj rozprawie poświęconéj Kummerowi i którą w szeregu dalszych prac swych rozwija. Ważne i głębokie pomysły, zawarte w téj pracy, jednoczące z sobą rozległe dziedziny badań arytmetycznych i algebraicznych, pozwalają wznieść się na ogólne stanowisko, z którego poszczególne teorye, jakie przedstawiliśmy w artykułach poprzedzających, stanowią tylko pojedyńcze fragmenty[10].

20. NORMY, WARTOŚCI BEZWZGLĘDNE I MNOGOŚĆ LICZB UROJONYCH.

Normą liczby zespolonéj $a+bi$ nazywamy wyrażenie a^2+b^2, co wyrażamy w ten sposób:

$$N(a+bi) = a^2+b^2.$$

Norma liczby $a+bi$ równa się iloczynowi liczby $a+bi$ przez wzajemnie z nią sprzężoną $a-bi$.

Liczby

$$a+bi,\quad a-bi,\quad -a+bi,\quad -a-bi,$$

mają oczywiście normy równe.

Ponieważ iloczyn liczb urojonych $(a+bi)\,(a+b'i)$ równa się

$$aa'-bb'+(ab'+a'b)i,$$

normą przeto iloczynu będzie

$$(aa'-bb')^2+(ab'+a'b)^2.$$

To wyrażenie jest tożsamościowo równe wyrażeniu

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$$

a zatém norma iloczynu równa się iloczynowi norm czynników.

Własność tę można łatwo udowodnić dla jakiéjkolwiek skończonéj liczby czynników.

Hosted by Google

Wartością bezwzględną liczby urojonéj nazywamy wartość dodatnią pierwiastka kwadratowego jéj normy; wartość tę, nazywaną dawniéj *modułem* liczby urojonéj, oznaczamy wraz z Weierstrassem w ten sposób

$$| a + b i | = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Z określenia tego wynika, że liczby

$$a + b i, \quad a - b i, \quad -a + bi, \quad -a - bi$$

mają wartości bezwzględne równe; że wartością bezwzględną liczby rzeczywistéj $\pm a$ [zgodnie z określeniem w art. 17.] jest a, wartością bezwzględną liczby $\pm bi$ jest b.

Do wartości bezwzględnych liczb urojonych stosują się następujące twierdzenia:

I. Wartość bezwzględna sumy dwóch liczb urojonych nie jest mniejszą od różnicy a nie większą od sumy wartości bezwzględnych składników.

II. Wartość bezwzględna iloczynu liczb urojonych równa się iloczynowi wartości bezwzględnych czynników.

III. Wartość bezwzględna ilorazu dwóch liczb zespolonych równa się ilorazowi wartości bezwzględnych dzielnéj i dzielnika.

Dowód tych twierdzeń jak i dalsze rozwinięcie opartéj na nich teoryi znaleźć można w podręcznikach Algebry i Rachunku wyższego[11]. Powiemy tu tylko, że przy dowodzie tych twierdzeń elementarnych należy pamiętać o tém, iż stosowanie ich w przypadku niewymierności liczb wymaga naturalnie uprzedniego ustanowienia działań nad liczbami niewymiernemi.

Jeżeli ograniczymy się na dziedzinie liczb zespolonych wymiernych, to jest takich liczb $a+bi$, dla których a i b są liczbami wymiernemi dodatniemi lub ujemnemi, ogół których nazywa Dedekind "ciałami liczbowemi wymiernemi drugiego stopnia" lub "ciałem kwadratowemi wymiernemi", to zamiast wartości bezwzględnych, które są wymiernemi lub niewymiernemi, posługujemy się normami, które są zawsze wymiernemi.

Możemy z łatwością wykazać, że mnogość wszystkich liczb zespolonych wymiernych jest równoważną mnogości nieskończonéj liczb całkowitych [porówn. str. 60.]

W saméj rzeczy, wyobraźmy sobie, że norma przyjmuje kolejno wszystkie wartości wymierne, uporządkowane w szereg odliczalny.

o którym mówimy w art. 14. Do każdéj wartości normy a^2+b^2 do bierzmy wartości wymierne liczb a i b [o ile się znajdują], nie opuszczając żadnych. Liczba wartości dla każdéj skończonéj wartości normy będzie oczywiście skończoną; wypisując więc najprzód liczby $a+bi$, odpowiadające pierwszéj wartości normy, następnie liczby, odpowiadające drugiéj i t. d. będziemy po kolei wypisywali wszystkie i otrzymamy mnogość odliczalną na szeregu 1, 2, 3...

Do tego samego wyniku dochodzimy na podstawie uwagi, że mnogości złożonéj z elementów $a+bi$, musi odpowiadać ta sama liczba kardynalna, jaka odpowiada każdéj z dwóch mnogości a i bi; każda zaś z nich jest równoważną mnogości liczb całkowitych dodatnich.

---

[1] Śniadecki, Rachunku algebraicznego teorya przystosowana do linij krzywych. Tom I. str. 69.

[2] Gauss, Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Porówn. E. Netto, przekład niemiecki téj rozprawy 1890. [Ostwald's *Klassiker der exacten Wissenschaften* N. 14. str. 6—7.]

[3] Wroński, Introduction etc. str. 167—168.

[4] Gauss. Werke II, str. 174.

Argand, Essai sur la manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, 1806. Wydanie drugie Hoüela, 1874.

[5] Cauchy. Analyse algébrique, 1821. str. 173 i dalsze, Exercices d'analyse et de physique mathématique, IV. 1847., str. 87.

[6] Według poglądu Dühringa [Neue Grundmittel und Erfindungen, str. 26—54], liczby urojone są tylko dalszém skomplikowaniem niemożliwości, jaką przedstawiają już liczby ujemne; liczba czysto urojona nie wyraża, zdaniem jego, nic więcéj nad to, że pierwiastek kwadratowy z liczby ujemnéj jest niemożliwością. To połączenie znaku pierwiastka kwadratowego ze znakiem — jest niejako nowym znakiem $\sqrt{-1}$, który Dühring pisze wprost $\sqrt{-}$ lub Γ. Znak ten, postawiony przed wielkościami, wyraża odejmowanie, o którego wykonalność wtedy dopiero pytać można, gdy przez podniesienie do kwadratu przywracamy warunki możliwości. Cały rachunek nad liczbami urojonemi jest tylko przeprowadzeniem biegu myśli przez niemożliwość.

Niemożliwość, oznaczona za pomocą Γ, wynika już wprost z równania $z+y^2=a$, z którego otrzymujemy $y=\sqrt{a-z}$. Jeżeli z ma wartość większą od a, to liczby, zadośćczyniącéj równaniu, niema, a zatém $y=\sqrt{a-z}$ wyraża niemożliwość, którą piszemy pod postacią $y=\sqrt{-1}\sqrt{z-a}$ lub

$\sqrt{-}\sqrt{z-a}$ lub wreszcie $\Gamma(z-a)$, gdzie $z-a$ jest wielkością bezwzględną. Nazywając tę wielkość przez v, mieć będziemy $z+(\Gamma)^2 v^2=a$, albo $z-v^2=a$, a kładąc znów tu y za v, otrzymujemy równanie $z-y^2=a$ w miejsce poprzedzającego równania $z+y^2=a$.

Stąd, tak samo jak przy liczbach ujemnych, wynika, że należy używać dwóch równań, jeżeli chcemy obejść się bez używania znaków liczb urojonych.

Oba równania $z+y^2=a$, $z-y^2=a$ przechodzą jedno w drugie, jeżeli uczynimy y urojoném; którekolwiek z nich można uważać za główne, ogólne, drugie zaś jako przypadek szczególny. Jeżeli więc mamy równanie $z+w^2=a$, to w niém w może oznaczać albo wielkości bezwzględne albo wielkości, opatrzone znakiem niemożliwości Γ, a właściwie dwoma takiemi znakami Γ i $-\Gamma$; w pierwszym razie równanie to przedstawia $z+y^2=a$, w drugim $z-y^2=a$, gdzie y jest już wielkością bezwzględną.

Też same uwagi poczynić można o równaniu $x^2+y^2=r^2$, któremu odpowiada przytém interesująca interpretacya geometryczna, a mianowicie przechodzenie koła na hiperbolę i odwrotnie.

Liczba zespolona, złożona z dwóch części rzeczywistéj i urojonéj, jest, jak się wyraża D ü h r i n g, pojęciem jasném jak słońce [ein sonnenklarer Begriff]; jest ona złożona z dwóch części, które należy uważać za różne pod względem związków, w jakie wchodzi w rachunku nad wielkościami; znak $\sqrt{-1}$, znajdujący się przed częścią czysto urojoną, przypomina wykonanie tego, co powiedziano wyżéj o znaczeniu tego znaku. Liczba $a+b\sqrt{-1}$ wyraża się geometrycznie za pomocą sumy dwóch odcinków a i b na osi odciętéj, w któréj to sumie wszakże odcinek b nie traci swego znaczenia, wskazanego znakiem $\sqrt{-1}$, ukazującym związek rachunkowy z innemi wielkościami. Geometryczne przedstawienie G a u s s a D ü h r i n g odrzuca.

Teoryą, zbliżoną do teoryi D ü h r i n g a ogłosił niedawno S. V e c c h i: L'essenza reale delle quantità ora dette immaginarie e. c., 1890.

[7] Według L i p s c h i t z a [Lehrbuch der Analysis I, 1883. str. 75, 76], do liczb urojonych prowadzi uwaga, że suma dwóch kwadratów a^2+b^2 nie może być przedstawioną, jako iloczyn dwóch czynników rzeczywistych stopnia pierwszego względem a i b; aby rozkład ten umożliwić, wymyślono *symbol* i odpowiedni rachunek, przez który rozkład taki staje się *formalnie* możliwym.

Wyrażenie $a^2-b^2z^2$ równa się iloczynowi dwóch czynników $(a-bz)$ i $(a+bz)$. Jeżeli więc przyjmiemy, że z oznacza symbol, przy którym prawidła mnożenia wyrażeń dwumiennych nie ulegają zmianie, to kładąc w wyniku mnożenia z^2 równe -1, otrzymamy oczywiście rozkład liczby a^2+b^2 na dwa czynniki $a-bz$ i $a+bz$. Symbol z równy $\sqrt{-1}$, oznaczany zwykle przez i, daje rozkład formalny:

$$a^2+b^2=(a-bi)(a+bi)$$

Wogóle zagadnienie o przekształceniu wyrażeń algebraicznych stano-

Hosted by Google

wi według Lipschitza, źródło, z którego wypływa teorya liczb urojonych i nadurojonych. Potrzeba utrzymania ogólności twierdzeń, odnoszących się do tych przekształceń, prowadzi do symbolów, umożliwiających tę ogólność. Myśl tę rozwinął szczegółowiéj Lipschitz w badaniach swych nad sumami kwadratów [Untersuchungen ueber die Summen von Qnadraten, 1886.] w których podaje teoryą liczb urojonych zwyczajnych, kwaternionów i liczb urojonych wielowymiarowych.

Sir R. W. Hamilton, [porów. str. 121] wychodzi z uważania par czyli dwójek [couples] (a, b), w których a i b są liczbami rzeczywistemi. Dla przypadku $b=0$, uważamy $(a, 0)$ za liczbę rzeczywistą a. Dwie dwójki (a, b) i (c, d) uważamy za równe, jeżeli

$$a=c, \quad b=d$$

Stąd wynika, że dwójka (a, b) jest równa $(0, 0)=0$ tylko wtedy, jeżeli $a=0, b=0$.

Dodawanie określamy za pomocą wzoru

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, \ b+d),$$

iloczyn za pomocą wzoru

$$(a. b) \ . \ (c, d)=(ac-bd, \ ad+bc).$$

Kładąc w ostatnim wzorze $a=c=0$, $b=d=1$, otrzymujemy

$$(0,1).(0,1)=(-1,0)=-1.$$

Oznaczając dwójkę $(0,1)$ przez i, mamy

$$i^2=-1.$$

Ponieważ według powyższych określeń:

$$(a, b)=(a, 0)+(b, 0)\,(0, 1),$$

możemy przeto dwójkę (a, b) przedstawić pod postacią $a+bi$.

Podana przez Lercha we wspomnianéj wyżéj rozprawie [1886] teorya liczb urojonych niczém się nie różni od teoryi Hamiltona.

[8] Porówn. Molk, Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination [*Acta mathematica*, VI, str. 7, 8]

[9] Porówn. Pincherle l. c. str. 205 — 210. Biermann l. c. str. 44 — 47., a także Kossak, Die Elemente der Arithmetik, 1872 str. 25—26.

[10] Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen [*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, XCII, 1882.]; Molk i t. d, jak wyżéj.

[11] Np. w Zasadach Algebry wyższéj Zajączkowskiego, 1884 lub w Zasadach Rachunku różniczkowego i całkowego Folkierskiego, 1870.

Hosted by Google

ROZDZIAŁ VI.

LICZBY ZESPOLONE WYŻSZE.

21. ROZWÓJ POJĘĆ O LICZBACH NADUROJONYCH.

Liczby zespolone wyższe, inaczéj nadurojone lub wielowymiarowe stanowią jeden z najnowszych nabytków w dziedzinie badań matematycznych. Doprowadziła do nich naturalna droga uogólnień, która ujawniła się przedewszystkiém w usiłowaniach, skierowanych ku znalezieniu narzędzia do badania form geometrycznych w przestrzeni, analogicznego do narzędzia, jakie dla geometryi na płaszczyźnie stanowią liczby urojone zwyczajne. Hamilton, Grassmann i Scheffler niezależnie od siebie pytanie to podjęli i w sposób odmienny rozwiązali. Badania Hamiltona, rozpoczęte jeszcze w r. 1833, doprowadziły go do utworzenia skupień, złożonych z *n* liczb rzeczywistych, tak nazwanych "sets„, które są uogólnieniem par czyli dwójek, na których oparł teoryą liczb urojonych zwyczajnych [porówn. str. 136]. Późniéj wszakże, mając głównie na celu zastosowania rachunku do badania figur i ruchu w przestrzeni, zatrzymał się na liczbach czterojednostkowych i stworzył rachunek tak zwanych *kwaternionów*, który rozwinął znakomicie w szczegółach i ważnemi opatrzył zastosowaniami[1].

Grassmann rozpoczął również od rozważań natury geometrycznéj i uogólniając pojęcia działań i konstrukcyj, nadał bardziej abstrakcyjny charakter poszukiwaniom swoim, których owocem było utworzenie nowéj nauki, stanowiącéj organiczną i pięknie zbu-

Hosted by Google

dowaną całość. Naukę tę nazwać można ogólną teoryą rozmaitości albo geometryą wielowymiarową, wysnutą z założeń najogólniejszych, a nie ograniczoną postulatami, charakteryzującemi geometryą zwykłą. Ta ostatnia w stosunku do nauki Grassmannowskiéj stanowi przypadek specyalny, albo, jak chce sam Grassmann, zastosowanie jego nauki ogólnéj do naszéj przestrzeni [porów. art. 4.]. To, co mówimy o nauce Grassmannowskiéj, stosuje się przedewszystkiém do téj postaci, jaką nadał jéj w pierwszém dziele z roku 1844. [wydanie drugie z r. 1878]. W dziele drugiém z r. 1862 te same pomysły przybrały inną szatę, a mianowicie występują jako system nauki o liczbach [wielkościach] n-wymiarowych, która obejmuje w sobie teoryą działań i rachunku nad formami liczbowemi najogólniejszemi, która zatém jest niejako Algebrą powszechną—[universal Algebra, jak ją nazywa Sylvester][2].

Na innéj znowu drodze usiłował rozwiązać Scheffler zadanie o zastosowaniu form liczbowych do geometryi[3]. Metodę jego można uważać za rozwinięcie pomysłu Arganda [art. 18.], według którego $\sqrt{-1}$ wyraża obrót w płaszczyznie xy od dodatniéj części osi x do dodatniéj części osi y. Jeżeli idzie o przedstawienie figur w przestrzeni, trzeba wprowadzić nowy znak $\sqrt{\div 1}$ na oznaczenie obrotu w płaszczyznie yz od dodatniéj części osi y do dodatniéj części osi z. Tym sposobem punkt w przestrzeni, którego współrzędnemi w układzie prostokątnym są x, y, z, a właściwie promień wodzący tego punktu wyraża się u Schefflera w sposób następujący:

$$r = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{\div 1}\sqrt{-1}.$$

Wspomniane w art. 18. pytanie Gaussa o stosowalności prawideł działań arytmetycznych do liczb więcéj niż dwumiarowych pobudziło matematyków do zastanowienia się nad naturą tych liczb i działań nad niemi. Pierwszy, o ile wiemy, na pytanie to odpowiedział Hankel w r. 1867, w wielokrotnie cytowanéj pracy, wykazując, że układ liczb zespolonych wyższych [to jest więcéj niż o dwu jednostkach zasadniczych], w którym iloczyny jednostek są funkcyami liniowemi tych jednostek, podlegający wszystkim prawom działań Arytmetyki zwykłéj, a więc i warunkowi, aby iloczyn dwóch czynników stawał się zerem tylko wtedy, gdy przynajmniéj jeden z czynników jest zerem — taki układ nie istnieje[4]. Czyli mówiąc inaczéj,

Hosted by Google

tylko układy liczb jedno i dwuwymiarowych czynić mogą zadość wszystkim powyższym własnościom, przy większéj zaś liczbie jednostek zasadniczych iloczyn może być zerem, gdy czynniki są od zera różne.

Ten sam przedmiot podjął Weierstrass jeszcze przed Hankelem w wykładach uniwersyteckich w roku 1861/2, ale spostrzeżenia swoje ogłosił dopiero w r. 1884 [5]. Bada on, w jaki sposób można określić działania w dziedzinie liczb o n jednostkach $e_1, e_2 \ldots e_n$, aby, jeżeli a, b, c . są dowolnemi liczbami téj dziedziny, liczby

$$a+b,\ a-b,\ ab,\ \frac{a}{b}\ ,$$

należały także do niéj i aby działania arytmetyczne czyniły zadość warunkom:

$$a+b=b+a,\ (a+b)+c=(a+c)+b,\ (a-b)+b=a$$

$$ab=ba,\ (ab)c=a(bc),\ a(b+c)=ab+ac,\ \frac{a}{b}b=a.$$

Wynik tych badań jest następujący: Wprowadzenie liczb zespolonych wyższych do Arytmetyki nie jest nieuzasadnioném, lecz jest zbytecznéra, bo Arytmetyka tych liczb nie może prowadzić do żadnego wyniku, którego by nie można otrzymać za pomocą teoryi działań w układzie liczb jedno i dwuwymiarowych.

Dedekind w rozprawie, ogłoszonéj w r. 1885 [6], badając ten sam przedmiot, dochodzi do podobnego wyniku, wychodząc wszakże z odmiennego poglądu na istotę liczb zespolonych. Pogląd ten streścić można w ten sposób:

Niechaj będzie układ n^2 liczb $e_r^{(s)}$, $[r, s = 1, 2 \ldots n]$, takich, że ich wyznacznik jest różny od zera. [O wyznacznikach mówimy w art. 26.]. Układ n jednostek

$$e_1, e_2 \ldots e_n$$

ma być wielowartościowy w tém znaczeniu, że może przedstawiać którykolwiek z n układów

$$e_1^{(s)}, e_2^{(s)}, \ldots, e_n^{(s)};\quad s = 1, 2 \ldots n.$$

Należy to rozumieć tak, że każde równanie, zawierające, obok liczb rzeczywistych i urojonych zwykłych, liczby $e_1, e_2 \ldots e_n$, wtedy tylko może być uważane za prawdziwe, jeżeli utrzymuje się, gdy w miejsce $e_1, e_2 \ldots e_n$ podstawimy odpowiednie liczby każdego z powyższych n układów. Otóż, według poglądu Dedekinda, układ liczb

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ . \ . \ . \ a_n e_n$$

winien być uważany za przedstawiciela n układów liczb zwyczajnych, rzeczywistych i urojonych.

Kronecker w najnowszéj swéj pracy, poświęconéj liczbom zespolonym [7], wykazuje, że teorya działań nad niemi sprowadza się się do oznaczenia w sposób najogólniejszy $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$ funkcyj całkowitych $N', N'', N''' \ldots$ postaci

$$y_h y_k - c_0^{(h,k)} - c_1^{(h,k)} - \ldots - c_\nu^{(h,k)} y_\nu \qquad [h \leqq k, \ h, k = 1, 2 \ldots n]$$

zależnych od ν zmiennych nieoznaczonych $y_1, y_2, \ldots y_\nu$, aby czyniły zadość kongruencyi

$$F(y_1, y_2, \ldots y_\nu) = C_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_\nu y_\nu \ (\mathrm{modd}\,.\, N', N'', N''' \ldots)$$

w któréj strona pierwsza wyraża jakąkolwiek funkcyą całkowitą zmiennych $y_1, y_2 \ldots y_\nu$, na stronie zaś drugiéj $C_0, C_1 \ldots C_\nu$ są współczynnikami oznaczonemi, od zmiennych niezależnemi. Według tego poglądu zatém teorya liczb zespolonych wyższych sprowadza się do badania arytmetycznego funkcyj całkowitych.

Wyniki, do jakich dochodzą ostatni trzéj badacze, zdają się dowodzić zbyteczności nowego narzędzia, jakiém są liczby zespolone wyższe. Ale wniosek taki byłby, zdaniem naszém, zbyt pospieszny. Możność sprowadzenia działań nad liczbami zespolonemi wyższemi do działań nad liczbami rzeczywistemi i zespolonemi zwyczajnemi nie może przesądzać kwestyi użyteczności pierwszych, podobnie jak możność sprowadzenia rachunku na liczbach urojonych do działań nad liczbami rzeczywistemi nie przeczy zupełnie użyteczności i ważności liczb urojonych. Owszem, dopiero wprowadzenie tego ostatniego algorytmu pozwoliło na uogólnienie zasadniczych twierdzeń Algebry, nadało nową postać całéj Teoryi funkcyj, wzbogaciło Teoryą liczb, — jedném słowem, otwarło nowe i rozległe widoki badań. Liczby zespolone wyższe, jako nowsze, nie zdołały dotąd rozpowszechnić się w badaniach; sądzimy wszakże, że rachunek kwaternionów, któremu i sam Dedekind nie odmawia znaczenia [8], a jeszcze bardziéj rachunek Grassmanna stanowią potężne i bogate w zastosowaniu metody. Jeżeli dodamy jeszcze, że Lipschitz [9] zastosował nieda-

Hosted by Google

wno te formy liczbowe do teoryi przekształceń form kwadratowych, że Schur[10], Study[11] i Scheffers[12] stosują z powodzeniem układy zespolone wyższe do jednéj z najnowszych gałęzi nowoczesnéj nanauki, do tak zwanéj Teoryi grup przekształceń Lie'go, zajmującéj ważne stanowisko wśród metod Rachunku wyższego, to nie będziemy wątpili o doniosłości nowego narzędzia, którego użyteczności zresztą nie wypróbowano dotąd w różnych dziedzinach. Sam Grassmann wskazał ścisły związek jego nauki z teoryą niezmienników[13], a sądzimy, że zastosowanie wyłożonych w drugiéj części jego dzieła z r. 1862 zasad nauki o funkcyach liczb wielowymiarowych, najmniéj może dotąd znanéj, przyczyniłoby się bezwątpienia do wzbogacenia Teoryi funkcyj. Pole to otwarte i wdzięczne do uprawy dla tych, którzy zgłębią świetne i głębokie pomysły Grassmanna.

W Arytmetyce wyższéj liczby zespolone stały się narzędziem ważném i użyteczném; w téj wszakże dziedzinie liczby wielowymiarowe mają charakter odmienny od liczb zespolonych o n jednostkach $e_1, e_2 \ldots e_n$ niezależnych, to jest niezwiązanych z sobą równaniem liniowém; są one postaci

$$a = a\,r_1 + a_1\,r_2 + \ldots + \alpha_{n-1}\,r_n$$

gdzie $r_1, r_2 \ldots r_n$ są pierwiastkami równania stopnia n-go:

$$x^n = 1.$$

Jeżeli r jest pierwiastkiem pierwotnym tego równania, to pozostałe pierwiastki są jego potęgami całkowitemi i liczba a może być przedstawiona pod postacią

$$a = a_0 + a_1 r + \ldots + a_{n-1} r^{n-1}.$$

Dirichlet, Kummer, Eisenstein, Dedekind i inni rozwinęli teoryą tego gatunku liczb całkowitych[14].

Inne zastosowanie liczb zespolonych téj postaci wskazał Dühring. Według poglądu, który rozwinął w kilkakrotnie cytowanéj już pracy, liczby $r, r^2 \ldots r^{n-1}$ odgrywają rolę znaków, podobną do téj, jaką mają znaki $+$ i $-$ i jaką według jego teoryi odgrywa znak $\sqrt{-1}$. Równanie, w którem występują liczby, opatrzone podobnemi znakami, wyraża związek pomiędzy formami o różnéj liczbie wartości, rozpada się na pewną liczbę innych równań pomiędzy liczbami dodatniemi. Zasada ta stanowi podstawę metody rachun-

Hosted by Google

kowéj, którą Dühring nazwał "rachunkiem wartościowości" [Werthigkeitsrechnung][15].

22. TEORYA WEIERSTRASSA.

Liczba n-wymiarowa o jednostkach zasadniczych $e_1, e_2 \ldots e_n$ wyraża się pod postacią

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \sum_i \alpha_i e_i.$$

Liczby rzeczywiste $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ można nazwać *współrzędnemi* liczby zespolonéj a.

Równość liczb zespolonych, a mianowicie liczby a i liczby

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n e_n = \sum_i \beta_i e_i$$

ma miejsce wtedy i tylko wtedy, jeżeli odpowiednie współrzędne są równe, t. j. jeżeli

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2 \ldots \alpha_n = \beta_n.$$

Wynika stąd, że liczba zespolona a jest równa zeru wtedy i tylko wtedy, jeżeli każda z jéj współrzędnych jest zerem.

Sumę dwóch liczb określamy za pomocą wzoru

$$a + b = \sum_\iota (\alpha_\iota + \beta_\iota)\, e_\iota,$$

skąd wynika, że dodawanie jest łącznem i przemiennem i że różnicę dwóch liczb otrzymuje się według wzoru

$$a - b = \sum_\iota (\alpha_\iota - \beta_\iota)\, e_\iota.$$

Iloczyn dwóch liczb $a = \sum_\iota \alpha_\iota e_\iota$ i $b = \sum_\varkappa \beta_\varkappa e_n$, na podstawie prawa rozdzielności, będzie

$$ab = \sum_\iota \sum_\varkappa \alpha_\iota \beta_\varkappa e_\iota e_\varkappa = \sum_{\iota,\varkappa} \alpha_\iota \beta_\varkappa e_\iota e_\varkappa$$
$$\iota, \varkappa = 1, 2, \ldots n$$

Jeżeli chcemy, aby iloczyn należał do dziedziny danéj, to jest, aby był liczbą postaci téj, jaką mają czynniki, winniśmy przyjąć, że iloczyny jednostek e_ι i $e_\varkappa$ dają się wyrazić jako funkcye liniowe jednostek zasadniczych, a mianowicie, że

$$e_\iota e_\varkappa = \sum_s \eta_{s,\iota,\varkappa}\, e_s,$$
$$s, \iota, \varkappa = 1, 2, \ldots n,$$

Hosted by Google

gdzie $\eta_{s,\iota,\varkappa}$ są liczbami rzeczywistemi; otrzymamy tedy

$$ab = \sum_s \sum_\iota \sum_\varkappa \eta_{s,\iota,\varkappa}\, \alpha_\iota \beta_\varkappa e_s = \sum_{s,\iota,\varkappa} \eta_{s,\iota,\varkappa}\, \alpha_\iota \beta_\varkappa e_s.$$

Załóżmy daléj, że mnożenie liczb badanych jest łączne, to jest, że posiada własności

$$(ab)c = a(bc)$$

$$(e_\iota e_\varkappa) e_\lambda = e_\iota (e_\varkappa e_\lambda)$$

Wstawiając w ostatnie równanie w miejsce iloczynów $e_\iota e_\varkappa$, $e_\varkappa e_\lambda$ ich wyrażenia powyższe, a następnie porównywając współczynniki po obu stronach otrzymanego związku, dochodzimy do warunku

$$\sum_s \eta_{s,\iota,\varkappa}\, \eta_{\sigma,s,\lambda} = \sum_s \eta_{s,\varkappa,\lambda}\, \eta_{\sigma,\iota,s}$$

gdzie σ, i, $\varkappa$, λ przybierają wartości 1, 2, . . . n. Jeżeli założymy prócz tego przemienność mnożenia jednostek, wyrażającą się wzorem

$$e_\iota e_\varkappa = e_\varkappa e_\iota,$$

znajdziemy równania warunkowe

$$\eta_{s,\iota,\varkappa} = \eta_{s,\varkappa,\iota}.$$

Iloraz dwóch liczb zespolonych a i b ma czynić zadość równaniu

$$\frac{a}{b} \cdot b = a.$$

Oznaczmy ten iloraz przez c i załóżmy, że jest postaci

$$c = \sum \gamma_s e_s;$$

będzie zatém

$$\sum_s \gamma_s e_s \cdot \sum_\varkappa \beta_\varkappa e_\varkappa = \sum_s \alpha_s e_s$$

Wykonywając mnożenie według otrzymanego wyżéj wzoru, będziemy mieli

$$\sum_{s,\iota,\varkappa} \eta_{s,\iota,\varkappa} \gamma_\iota \beta_\varkappa e_s = \sum_s \alpha_s e_s,$$

stąd dla oznaczenia szukanych współrzędnych γ_s, mamy układ równań

$$\sum_{\iota,\varkappa} \eta_{s,\iota,\varkappa} \gamma_\iota \beta_\varkappa = \alpha_s$$

$$s = 1, 2 \ldots n$$

Hosted by Google

Równania te są liniowemi względem współrzędnych γ ; z teoryi równań liniowych wiadomo [porówn. art. 26.], że można niewiadome oznaczyć, jeżeli tylko wyznacznik układu, który oznaczmy przez

$$\Delta = \left| \sum_{\varkappa} \eta_{s,i,\varkappa} \beta_{\varkappa} \right|,$$

nie jest tożsamościowo równy zeru.

Przy takiém założeniu można znaleźć układy wartości dla liczb $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$, przy których dzielenie liczby a przez liczbę b daje iloraz oznaczony. Gdy zaś wyznacznik Δ jest zerem, wtedy dzielenie jest możliwe tylko wtedy, jeżeli pomiędzy $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ zachodzi pewien związek określony; wówczas zaś iloraz ma nieskończenie wiele wartości.

Warunek, by wyznacznik Δ nie był tożsamościowo zerem, spełniać się może w ogólności, mimo to wszakże istnieć mogą pewne szczególne wartości współrzędnych $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, przy których wyznacznik jest zerem. Liczba b o takich współrzędnych $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ ma tę właściwość, że można do niéj dobrać inną liczbę zespoloną c, różną od zera, aby iloczyn liczb b i c był równy zeru, t. j. aby było

$$b\,c = 0$$

Liczbę b nazywa Weierstrass *dzielnikiem zera.* Dzielnik zera, pomnożony przez liczbę dowolną, jest także oczywiście dzielnikiem zera[16].

Istnienie dzielników zera, od zera różnych, stanowi, według Weierstrassa, istotną różnicę pomiędzy Arytmetyką liczb zespolonych wyższych a zwyczajną. Ta uwaga zgadza się z przytoczoném w poprzednim artykule twierdzeniem Hankela, że w układzie liczb zespolonych wyższych, w których iloczyny jednostek są funkcyami liniowemi samych jednostek, iloczyn dwóch czynnikow może być zerem, jakkolwiek żaden z czynników nie jest zerem[17].

Jeżeli założymy, że wyznacznik nie jest tożsamościowo zerem, to możemy wykazać, iż w układzie naszym istnieje liczba e_0, posiadająca własność, wyrażoną równaniem

$$e_0\, a = a\, e_0 = a\ ,$$

gdzie a jest liczbą dowolną. Ta liczba e_0 jest modułem mnożenia.

Hosted by Google

W samėj rzeczy, jeżeli wyznacznik Δ nie jest tożsamościowo zerem, w takim razie iloraz a/a jest oznaczony. Na podstawie określenia dzielenia będzie

$$\frac{a}{a}\,a = a\,,$$

skąd wynika, że a/a jest właśnie owym modułem e_0. Łatwo też widzieć, że tak określona liczba e_0 równa się także b/b, gdzie b jest liczbą od a różną. Kładąc bowiem $b = ka$, znajdziemy zawsze liczbę k, jeżeli wyznacznik Δ nie jest zerem; będzie zatém:

$$be_0 = (ka)\,e_0 = k\,(ae_0) = ka = b,$$

skąd

$$b\,e_0 = b, \quad e_0 = \frac{b}{b}\,.$$

Jak w teoryi liczb zespolonych zwyczajnych wprowadzaliśmy nowe jednostki g i h zamiast pierwotnych e_1 i e_2 [art. 19.], podobnież i tu można w miejsce n jednostek $e_1, e_2 \ldots e_n$, wprowadzić n liczb $g_0, g_1 \ldots g_{n-1}$, należących do téj samėj dziedziny, a to następującym sposobem:

Niechaj będzie liczba zespolona

1. $$g = \xi_1\, e_1 + \xi_2\, e_2 + \ldots + \xi_\nu\, e_\nu.$$

Za pomocą mnożenia i przy założeniu wzorów, wyrażających iloczyny jednostek, możemy otrzymać kolejne potęgi liczby g, wyrażone w postaci:

2. $$\begin{aligned} g^1 &= \xi_1{}^{(1)} e_1 + \xi_2{}^{(1)} e_2 + \ldots + \xi_n{}^{(1)} e_n\,, \\ g^2 &= \xi_1{}^{(2)} e_1 + \xi_2{}^{(2)} e_2 + \ldots + \xi_n{}^{(2)} e_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g^n &= \xi_1{}^{(n)} e_1 + \xi_2{}^{(n)} e_2 + \ldots + \xi_n{}^{(n)} e_n, \end{aligned}$$

gdzie $\xi_1{}^{(1)}, \xi_2{}^{(1)}, \ldots \xi_n{}^{(1)}$ napisaliśmy w miejsce $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$.

Z tych n równań, jeżeli założymy, że wyznacznik

3. $$\begin{vmatrix} \xi_1{}^{(1)}, \xi_2{}^{(1)}, \ldots, \xi_n{}^{(1)} \\ \xi_1{}^{(2)}, \xi_2{}^{(2)}, \ldots, \xi_n{}^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_1{}^{(n)}, \xi_2{}^{(n)}, \ldots, \xi_n{}^{(n)} \end{vmatrix}$$

Hosted by Google

nie jest tożsamościowo zerem, możemy wyrazić jednostki $e_1, e_2 \ldots e_n$, jako funkcye liniowe liczb $g, g^2, \ldots g^n$.

Ponieważ na podstawie równań 2. potęgi liczby g wyższe od g^n dają się wyrazić jako funkcye liniowe potęg niższych: $g, g^2 \ldots g^n$, możemy więc napisać

$$g^{n+1} + \varepsilon_1 g^n + \varepsilon_2 g^{n-1} + \ldots + \varepsilon_n g = 0,$$

gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ są pewne liczby rzeczywiste. Dzieląc obie strony przez g i zważając, że

$$\frac{g}{g} = e_0,$$

gdzie e_0 jest modułem mnożenia, otrzymujemy

4. $$g^n + \varepsilon_1 g^{n-1} + \varepsilon_2 g^{n-2} + \ldots + \varepsilon_n e_0 = 0.$$

Wprowadźmy w miejsce jednostek $e_1, e_2, \ldots, e_n$, nowe jednostki

$$g_0, g_1, g_2, \ldots, g_{n-1};$$

5. $$g_0 = e_0, \quad g_\mu = g^\mu, \quad \mu = 1, 2 \ldots n-1.$$

Ponieważ jednostki $e_1, e_2, \ldots, e_n$ wyrażają się jako funkcye liniowe liczb $g, g^2, \ldots, g^n$, a więc na mocy równania 4. i określeń 5., będziemy mogli jednostki $e_1, e_2, \ldots, e_n$ zastąpić funkcyami liniowemi jednostek $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$, a każda liczba a, do naszéj dziedziny należąca, da się przedstawić pod postacią

$$a = \Sigma \alpha_s g_s, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Iloczyn dwóch takich liczb

$$a = \Sigma \alpha_s g_s \quad \text{i} \quad b = \Sigma \beta_s g_s$$

będzie

$$ab = \Sigma \alpha_s g_s . \Sigma \beta_s g_s = \sum_{t,u} (\alpha_t \beta_u) g_{t+u},$$
$$t, u = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Liczby $g_{t+u} = g^{t+u}$, gdy $t + u > n-1$, sprowadzamy na podstawie powyższego do potęg niższych, tak że ostatecznie iloczyn ab przybierze postać

$$\Sigma \gamma_s g_s; \quad s = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Mnożenie to, jakie przy układzie jednostek $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ wykonywamy, można, posługując się niektóremi twierdzeniami Algebry, scharakteryzować w sposób następujący:

Hosted by Google

W równaniu 4. napiszmy ξ w miejsce g, gdzie ξ ma oznaczać zmienną jedno- lub dwuwymiarową, 1 zaś w miejsce e_0, otrzymamy wtedy funkcyą

$$f(\xi) = \xi^n + \varepsilon_1 \xi^{n-1} + \varepsilon_2 \xi^{n-2} + \ldots + \varepsilon_n.$$

Liczbę $a = \sum a_s g_s$ i funkcyą całkowitą $\sum a_s \xi^s$ nazwijmy odpowiadającemi sobie wzajemnie. Jeżeli mamy dwie liczby $\sum a_s g_s$ i $\sum \beta_s g_s$, to iloczyn ich, równy $\sum\limits_{t,u} (a_t \beta_u) g_{t+u}$, przy pomocy równań 2. sprowadza się, jak wiemy, do postaci $\sum \gamma_s g_s$. Jeżeli liczbom a i b odpowiadają funkcye $\sum a_s \xi^s$ i $\sum \beta_s \xi^s$, to funkcyą, odpowiadającą iloczynowi ab, jest $\sum\limits_{t,u} (a_t \beta_u) \xi^{t+u}$; ta funkcya zaś przy pomocy równania $f(\xi) = 0$ sprowadzić się daje do postaci $\sum \gamma_s \xi^s$. Widzimy zatém, że, aby otrzymać funkcyą, odpowiadającą iloczynowi, należy pomnożyć przez siebie funkcye, odpowiadające czynnikom, iloczyn podzielić przez funkcyą $f(\xi)$, a reszta, pochodząca z tego dzielenia, będzie funkcyą, odpowiadającą iloczynowi ab.

Na téj podstawie uskutecznić można podział liczby zespolonéj na *składowe*, z których każda zmienia się w dziedzinie jedno lub dwuwymiarowéj. W saméj rzeczy, niechaj liczbie $\sum a_s g_s$ odpowiada funkcya $\varphi(\xi)$ stopnia niewyższego od $n-1$. Iloraz $\frac{\varphi(\xi)}{f(\xi)}$, według teoryi rozkładu ułamków na ułamki częściowe, jeżeli założymy, że funkcya $f(\xi)$ nie posiada pierwiastków wielokrotnych, daje się przedstawić w ten sposób:

$$\frac{\varphi(\xi)}{f(\xi)} = \frac{\varphi_1(\xi)}{f_1(\xi)} + \frac{\varphi_2(\xi)}{f_2(\xi)} + \ldots + \frac{\varphi_r(\xi)}{f_r(\xi)}$$

Tu każdy z liczników $\varphi_\mu(\xi)$ jest albo stałą albo funkcyą liniową, każdy zaś mianownik $f_\mu(\xi)$ jest odpowiednio funkcyą pierwszego lub drugiego stopnia zmiennéj ξ; jest przytém

$$f(\xi) = f_1(\xi) \cdot f_2(\xi) \ldots f_r(\xi).$$

gdzie czynniki po stronie drugiéj są wszystkie różne. Otrzymujemy zatém

$$\varphi(\xi) = \sum_\mu \frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)} \varphi_\mu(\xi),$$

skąd wynika, że funkcya $\varphi(\xi)$, odpowiadająca danéj liczbie zespolonéj, jest sumą funkcyj

$$\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}\varphi_\mu(\xi),$$

z których każda odpowiada liczbom, zmieniającym się w dziedzinie jedno lub dwuwymiarowéj. W saméj rzeczy, można wszystkie liczby, należące do powyższéj funkcyi, otrzymać, gdy czynnik $f_\mu(\xi)$ jest stopnia pierwszego, z liczby, odpowiadającéj funkcyi $\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}$; gdy zaś jest stopnia drugiego — z dwóch liczb, odpowiadających funkcyom

$$\frac{f(\xi)}{f_\mu(\xi)}, \frac{\xi f(\xi)}{f_\mu(\xi)}.$$

Każda więc liczba zespolona a może być przedstawiona jako suma r liczb zespolonych $a_1, a_2, \ldots a_r$, należących do dziedzin cząstkowych, które nazwijmy $G_1, G_2, \ldots, G_r$. Można dowieść: 1. że liczba a jest zerem wtedy i tylko wtedy, jeżeli każda ze składowych jest zerem; 2. że liczba a jednym tylko sposobem może być rozłożoną na składowe w uważanych dziedzinach; 3. że iloczyn dwóch liczb, należących do dwóch różnych dziedzin cząstkowych, jest zawsze zerem; 4. że iloczyn dwóch liczb, należących do jednéj dziedziny cząstkowéj, jest zerem tylko wtedy, jeżeli jeden z czynników jest zerem.

Niechaj składowemi modułu g_0 będą $g', g'', \ldots, g^{(r)}$. Jeżeli a_μ oznacza liczbę zespoloną, należącą do dziedziny G_μ, to z równania

$$g_0 = g' + g'' + \ldots + g^{(r)},$$

na zasadzie powyższego, będzie

$$g_0 a_\mu = g^{(\mu)} a_\mu$$

a ponieważ $g_0 a_\mu = a_\mu$, przeto

$$g^{(\mu)} a_\mu = a_\mu.$$

Jeżeli więc odpowiednia funkcya $f_\mu(\xi)$ jest stopnia pierwszego, to każda liczba, należąca do dziedziny G_μ, może być przedstawiona pod postacią $\alpha g^{(\mu)}$, a iloczyn $\alpha g^{(\mu)} . \beta g^{(\mu)}$ będzie równy $\alpha\beta . g^{(\mu)}$. Jeżeli zaś odpowiednia funkcya $f_\mu(\xi)$ jest stopnia drugiego, to każda liczba dziedziny G_μ daje się otrzymać z dwóch liczb $g^{(\mu)}$ i $h^{(\mu)}$, od siebie niezależnych. Niechaj będzie

$$h^{(\mu)}h^{(\mu)} = \gamma h^{(\mu)} + \gamma' g^{(\mu)};$$

metodą podobną do téj, jaką stosowano w art. 19., można okazać, że każda liczba téj dziedziny G_μ daje się przedstawić pod postacią

$$a g^{(\mu)} + a' k^{(\mu)}$$

gdzie liczba $k^{(\mu)}$ określa się za pomocą równania

$$k^{(\mu)}k^{(\mu)} = -g^{(\mu)},$$

przyczém iloczyn dwóch liczb wyraża się w ten sposób:

$$(a g^{(\mu)} + a' k^{(\mu)})(\beta g^{(\mu)} + \beta' k^{(\mu)}) = (a\beta - a'\beta')g^{(\mu)} + (a'\beta + a\beta')k^{(\mu)}.$$

Wynika stąd, że badanie w dziedzinie n jednostek $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sprowadza się do badania r dziedzin, z których każda jest jedno lub dwuwymiarową, Wszystkie działania w dziedzinie jednowymiarowéj wykonywają się według prawideł rachunku z liczbami rzeczywistemi, wszystkie działania w dziedzinie dwuwymiarowéj—według prawideł rachunku z liczbami urojonemi zwyczajnemi. Liczba nowych jednostek, zastępujących dane, jest równa n.

Jeżeli a i b są dwie liczby, należące do dziedziny n-wymiarowéj, i jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_r$; $b_1, b_2, \ldots, b_r$ są ich odpowiednie składowe w dziedzinach cząstkowych $G_1, G_2, \ldots, G_r$, wtedy, na zasadzie powyższego iloczyn dwóch liczb a i b będzie

$$a b = \sum_{\mu=1}^{i=r} a_\mu b_\mu ,$$

gdzie iloczyn liczb $a_\mu b_\mu$, należących do jednéj dziedziny G_μ wykonywa się według prawideł działań nad liczbami rzeczywistemi lub urojonemi zwyczajnemi. Ponieważ iloczyny $a_\mu b_\mu$ stanowią składowe iloczynu ab w dziedzinach cząstkowych, zatém iloczyn ab może być zerem tylko wtedy, jeżeli każda ze składowych $a_\mu b_\mu$ jest zerem. Gdy więc b nie jest zerem, to iloczyn ab może być zerem wtedy tylko, gdy a jest zerem. Jeżeli niektóre ze składowych liczby b są zerami, to, aby iloczyn ab był zerem, trzeba, aby w pozostałych składowych iloczynu ab odpowiednie składowe były zerami. Wynika stąd, że liczba b może być dzielnikiem zera tylko wtedy, gdy nie wszystkie jéj składowe są od zera różne.

Hosted by Google

Jeżeli przyjmiemy, że b nie jest dzielnikiem zera, to możemy napisać

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_r}{b_r} ,$$

gdyż mnożąc obie strony przez $b = b_1 + b_2 + \ldots + b_r$, otrzymujemy

$$\frac{a}{b}\, b = \frac{a_1}{b_1}(b_1 + b_2 + \ldots + b_r) + \ldots + \frac{a_r}{b_r}(b_1 + b_2 + \ldots + b_r),$$

$$a = \frac{a_1}{b_1} b_1 + \frac{a_2}{b_2} b_2 + \ldots + \frac{a_r}{b_r} b_r ,$$

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_r ,$$

przyczém iloraz dwóch liczb a_μ / b_μ, należących do dziedziny jedno- lub dwuwymiarowéj, daje się otrzymać według prawideł dzielenia liczb rzeczywistych i zespolonych zwyczajnych.

Z tych rozważań wyprowadza Weierstrass następujące twierdzenie:

"Jeżeli $a, b, c, d \ldots$ są liczbami dziedziny wielowymiarowéj i jeżeli za pomocą rachunku, w którym zachodzą tylko działania elementarne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie, mamy z tych liczb otrzymać nową, to składową liczby szukanéj dla każdéj dziedziny cząstkowéj G_μ znajdujemy, wykonywając przepisany rachunek ze składowemi liczb danych w dziedzinie G_μ".

Określenie dziedzin cząstkowych $G_1, G_2, \ldots, G_r$ opiera się na przyjęciu jednostki g o współrzędnych $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, takich, by wyznacznik 3. nie był zerem i aby funkcya $f(\xi)$ nie miała pierwiastków równych. Można przeto zapytać, czy określenie dziedzin cząstkowych zależy rzeczywiscie od danéj liczby g, albo innemi słowy, czy, przy wyborze innéj liczby g, dziedziny cząstkowe zmieniają się lub nie?

Pytanie to postawił i rozwiązał H. A. Schwarz [18] a wynik jego badania jest następujący:

"Dziedziny cząstkowe $G_1, G_2, \ldots, G_r$ nie zmieniają się, jeżeli zamiast liczby $g = \sum \xi_i e_i$ przyjmiemy inną liczbę $g' = \sum \xi_i' e_i$, czyniącą zadość tym samym, co pierwsza, warunkom".

W końcu winniśmy jeszcze przypomnieć, że teorya Weierstrassa stosuje się do liczb zespolonych, w założeniu, że mnożenie ich czyni zadość prawom łączności, przemienności i rozdzielności, oraz

Hosted by Google

że iloczyny jednostek są funkcyami liniowemi samych jednostek. Gdy którekolwiek z powyższych założeń miejsca nie ma, teorya działań prowadzi w ogóle do wyników odmiennych, jak to ma miejsce w metodach Grassmanna i Hamiltona, które rozpatrzymy w następnych artykułach.

Podobnie jak w art. 20., możemy okazać z łatwością, że mnogość nieskończona liczb zespolonych wymiernych, należących do dziedziny jednostek $e_1, e_2, \ldots, e_n$, jest odliczalną na szeregu nieskończonym liczb całkowitych.

23. POJĘCIA ZASADNICZE METODY GRASSMANNA.

Właściwym punktem środkowym nauki Grassmannowskiéj jest pojęcie mnożenia liczb wielowymiarowych, polegające na różnych założeniach o iloczynach jednostek; zanim wszakże przedmiot ten rozpatrzymy, winniśmy przytoczyć określenia niektórych pojęć w wysłowieniu właściwém Grassmannowi[19].

Liczbę zespoloną postaci

1. $$a = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \ldots + \xi_n a_n.$$

gdzie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ są liczbami rzeczywistemi, nazywamy *utworzoną* z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *przy pomocy* liczb $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, które możemy, jak poprzednio, dla krótkości nazywać współrzędnemi.

Jeżeli pomiędzy liczbami $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nie zachodzi żaden związek postaci

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_n a_n = 0,$$

w którym nie wszystkie współczynniki są od zera różne, to liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywać będziemy *liniowo niezależnemi*, lub, wprost krótko, niezależnemi.

Liczbę a_i, utworzoną z jednostek $e_1, e_2, \ldots, e_n$ według wzoru

2. $$a_i = \alpha_{i,1} e_1 + \alpha_{i,2} e_2 + \ldots + \alpha_{i,n} e_n$$

nazywa Grassmann liczbą [wielkością] prostą pierwszego stopnia, a dziedzinę wszystkich liczb utworzonych z $a_1, a_2, \ldots, a_n$ którą oznaczać będziemy przez $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, nazywa dziedziną n-go stopnia [n-wymiarową].

Prawidła dodawania, odejmowania liczb postaci 1. lub 2. oraz mnożenia i dzielenia ich przez liczby rzeczywiste są najzupełniéj

Hosted by Google

zgodne z prawidłami działań, przedstawionemi w poprzednim artykule.

Dwie dziedziny A i B liczb zespolonych nazywają się *tożsamościowemi*, jeżeli każda liczba pierwszéj z nich należy do drugiéj i odwrotnie. Nazywają się zaś *wzajemnie zachodzącemi na siebie*, jeżeli każda liczba, należąca do pierwszéj, należy do drugiéj, odwrotnie zaś nie wszystkie liczby dziedziny drugiéj są zarazem liczbami pierwszéj; dziedzina A nazywa się wtedy *niższą* [objętą], dziedzina B—*wyższą* [obejmującą]. Ogół liczb, należących do dwóch dziedzin, stanowi dziedzinę *wspólną* obu; ogół zaś liczb, dających się utworzyć z liczb, należących do dwóch lub więcéj dziedzin, nazywamy dziedziną *łączącą*. Tak np. jeżeli dziedzina A jest utworzona z jednostek e_1, e_2, e_3, dziedzina B z jednostek e_2, e_3, e_4, to dziedziną wspólną będzie dziedzina jednostek e_2, e_3, dziedziną łączącą—dziedzina, utworzona z jednostek e_1, e_2, e_3, e_4.

Z łatwością dowieść można twierdzeń następujących:

I. Jeżeli n liczb znajduje się w związku liniowym i jeżeli nie wszystkie są zerami, to można wydzielić z nich mniéj niż n liczb, między któremi nie zachodzi już związek liniowy.

II. Jeżeli w układzie n liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pierwsza a_1 nie jest zerem, a żadna następująca nie daje się utworzyć z poprzedzających, to pomiędzy temi liczbami nie zachodzi związek liniowy.

III. Jeżeli liczba a_1 daje się utworzyć z n liczb $b_1, b_2, \ldots b_n$, a jéj współrzędna, odnosząca się do liczby b_1, nie jest zerem, to dziedziny $(b_1, b_2 \ldots b_n)$ i $(a_1, b_2, \ldots b_n)$ są tożsamościowe.

Można to twierdzenie uogólnić w ten sposób:

IV. Jeżeli m liczb $a_1, a_2, \ldots, a_m$, nie będących w związku liniowym, daje się utworzyć z n liczb $b_1, b_2, \ldots, b_n$ $(n > m)$, to można do m liczb $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dobrać $n-m$ nowych liczb $a_{m+1}, \ldots, a_n$ z téj saméj dziedziny, tak aby dziedziny $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ stały się tozsamościowemi.

Wynika stąd:

V. Jeżeli n liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ można utworzyć z m liczb $b_1, b_2, \ldots, b_m$ $(m < n)$, to liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozostają ze sobą w związku liniowym.

VI. Dodając stopnie dwóch dziedzin, otrzymujemy liczbę równą sumie stopni dziedziny wspólnéj i łączącéj.

Hosted by Google

VII. Dwie dziedziny A i B odpowiednio stopni α i β, jeżeli obie należą do dziedziny stopnia n-go, mają dziedzinę wspólną stopnia co najmniéj równego $\alpha+\beta-n$.

VIII. Równanie, wyrażające równość dwóch liczb jednéj dziedziny, z których pierwsza jest utworzona z n liczb niezależnych $a, b, c \ldots$, druga z innych n liczb niezależnych $k, l, m \ldots$, a mianowicie równanie

$$\alpha a + \beta b + \gamma c \ldots = \varkappa k + \lambda l + \mu m + \ldots,$$

jeżeli zachodzące w niém formy $a, b, c \ldots k, l, m \ldots$ przedstawimy przy pomocy jednostek $e_1, e_2, \ldots, e_n$ w ten sposób:

$$\begin{array}{ll} a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n; & k = \varkappa_1 e_1 + \varkappa_2 e_2 + \ldots + \varkappa_n e_n \\ b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n; & l = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \\ c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \ldots + \gamma_n e_n; & m = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \ldots + \mu_n e_n \\ \cdots & \cdots \end{array}$$

sprowadza się do następującego układu równań pomiędzy liczbami rzeczywistemi

$$\begin{array}{l} \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 + \ldots = \varkappa\varkappa_1 + \lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \ldots \\ \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \gamma\gamma_2 + \ldots = \varkappa\varkappa_2 + \lambda\lambda_2 + \mu\mu_2 + \ldots \\ \cdots \\ \alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \gamma\gamma_n + \ldots = \varkappa\varkappa_n + \lambda\lambda_n + \mu\mu_n + \ldots \end{array}$$

24. GATUNKI MNOŻENIA WEDŁUG GRASSMANNA.

Mnożenie dwóch liczb

$$a = \Sigma \alpha_r e_r, \quad b = \Sigma \beta_s e_s,$$

uskutecznia się według prawidła podanego w art. 22., opartego na prawie rozdzielności:

1. $$ab = \Sigma \alpha_r \beta_s . e_r e_s.$$

Z określenia tego wynikają wzory:

$$(\Sigma \alpha_r e_r) b = \Sigma \alpha_r (e_r b).$$
$$(a + b + \ldots) p = ap + bp + \ldots$$
$$p(a + b + \ldots) = pa + pb + \ldots$$
$$\Sigma \alpha_r a_r . \Sigma \beta_s b_s = \Sigma \alpha_r \beta_s . a_r b_s,$$

w których $a, b, \ldots, p$ są liczbami zespolonemi.

Hosted by Google

Iloczyn trzech czynników otrzymujemy, mnożąc na podstawie powyższego prawidła iloczyn dwóch czynników przez czynnik trzeci; podobnie tworzymy iloczyn czterech i więcéj czynników. Wyrażenie 1. iloczynu dwóch czynników nie da się przedstawić w postaci prostszéj, jeżeli nie poczynimy pewnych założeń o iloczynach jednostek, lub jeżeli wogóle przyjmiemy, że te iloczyny $e_r e_s$ są od siebie wszystkie niezależne. Inaczéj jednak rzecz się ma, gdy założymy, że pomiędzy iloczynami $e_r e_s$ zachodzą związki lub równania warunkowe takie, że przyjmując pewne z tych iloczynów za dane, możemy na podstawie tych warunków oznaczyć iloczyny pozostałe.

Niechaj jedno z równań warunkowych będzie postaci:

2. $$\sum \alpha_{r,s} \,.\, e_r e_s = 0. \qquad r, s = 1, 2 \,.\,.\,.\, n,$$

gdzie α_{rs} są liczbami rzeczywistemi, nie równemi jednocześnie zeru.

Załóżmy, że równania warunkowe nie ulegają zmianie, gdy zamiast jednostek $e_1, e_2 \ldots e_r \ldots e_s \ldots e_n$ podstawimy liczby z nich utworzone, t. j. zamiast e_r podstawimy $\sum x_{r,u} e_u$ gdzie u zmienia się od 1. do n włącznie, zamiast e_s podstawimy $\sum x_{s,v} e_v$, gdzie v przyjmuje również wartości 1, 2, . . . , n. Tu liczby x są rzeczywistemi i mogą przyjmować wartości zupełnie dowolne. Jeżeli rzeczone podstawienie uskutecznimy, dojdziemy do równania

3. $$\sum x_{r,u} x_{s,v} (\alpha_{r,s} e_u e_v + \alpha_{s,r} e_v e_u) = 0.$$

Ponieważ wartości liczb x są dowolne, przyjmijmy przeto, że jeden ze współczynników $x_{r,u}$ np. współczynnik $x_{a,c}$ równa się 1, a następnie -1. Otrzymamy tym sposobem dwa równania, które, odjęte od siebie, doprowadzają do związku

4. $$\sum x_{s,v} (\alpha_{a,s} e_c e_v + \alpha_{s,a} e_v e_c) = 0,$$

gdzie pomiędzy parami wartości, jakie przyjmują s i v, należy wyłączyć $s = a$ i $v = c$. W równaniu 4. przyjmijmy znowu, że jeden ze współczynników np. $x_{b,d}$ równa się raz 1., drugi raz -1.; odejmując od siebie dwa otrzymane w ten sposób równania, dochodzimy do związku

5. $$\alpha_{a,b} e_c e_d + \alpha_{b,a} e_d e_c = 0,$$

gdzie a, b, c, d przyjmują wartości 1, 2, . . . , n, z wyłączeniem wszakże $a=b$, $c=d$.

Przy uwzględnieniu równania 5. związek 3. przyjmuje postać prostszą

$$\sum x_{r,u} x_{r,u} a_{rr} e_u e_u = 0,$$

z któréj, ponieważ liczby $x_{r,u}$ mają wartości dowolne, wynika równanie

$$a_{a,a} e_c e_c = 0,$$

stwierdzające, że związek 5. zachodzi także dla wyłączonego wyżéj przypadku $a = b$, $c = d$.

Tak więc równania warunkowe 2. przy uczynioném założeniu, doprowadzają do związków 5.

Kładąc w 5. raz $c=d$, drugi raz $a=b$, otrzymujemy

5′. $$(a_{a,b} + a_{b,a}) e_c e_c = 0.$$

5″. $$a_{a,a} (e_c e_d + e_d e_c) = 0.$$

Równaniom 5′ można uczynić zadość, przyjmując

1°. $a_{a,b} + a_{b,a} = 0$, 2°. $e_c e_c = 0$.

Warunek

$$a_{a,b} + a_{b,a} = 0,$$

wprowadzony do równania 5., daje

$$a_{a,b} (e_c e_d - e_d e_c) = 0,$$

skąd, jeżeli $a_{a,b}$ nie jest dla dowolnych wartości a i b zerem—co było zastrzeżoném—wynika

$$e_c e_d - e_d e_c = 0,$$

czyli

6. $$e_c e_d = e_d e_c.$$

Drugi warunek $e_c e_c = 0$ lub $e_a e_a = 0$, jeżeli mamy go uważać za identyczny z równaniami warunkowemi 2. pociąga za sobą wartości współczynników: $a_{a,a} = 1$, $a_{a,b} = 0$ (a różne od b). Uwzględniając te wartości w równaniu 5″, dochodzimy do związku

$$e_c e_d + e_d e_c = 0$$

t. j.

7. $$e_c e_d = - e_d e_c.$$

Hosted by Google

Wynik ostateczny całego poprzedniego wywodu da się streścić w następującém twierdzeniu:

"Mnożenie liczb wielowymiarowych, podległe równaniom warunkowym 2. przy założeniu, że te równania utrzymują się, gdy jednostki zastąpimy liczbami dowolnemi, liniowo z jednostek utworzonemi, — nazwijmy je mnożeniem *liniowem* — winno czynić zadość jednemu z dwóch układów

$$e_c e_d = e_d e_c,$$

$$e_c e_d = -e_d e_c \text{ ,,}$$

Mnożenie liniowe, czyniące zadość pierwszemu układowi, nazywamy mnożeniem *algebraiczném*; czyniące zadość drugiemu — mnożeniem *zewnętrzném*.

Do tych dwóch gatunków mnożenia liniowego można jeszcze dla zupełności dołączyć dwa mnożenia: jedno, w którém iloczyny $e_c e_d$ nie czynią zadość żadnym równaniom warunkowym, w którém zatém wszystkie współczynniki $\alpha_{a,b}$ są zerami; drugie, w którém wszystkie iloczyny jednostek są zerami. Mamy więc razem cztery gatunki mnożenia liniowego.

Mnożenie liniowe zawiera się jako przypadek szczególny w mnożeniu, które Grassmann nazywa *kołowém*, a które określa na podstawie własności, że równania warunkowe 2. nie ulegają zmianie, jeżeli zamiast dwóch jednostek n. p. e_r i e_s wprowadzimy liczby, liniowo z nich utworzone. Założenie to doprowadza do ośmiu gatunków mnożenia; cztery stanowią wyżéj objaśnione mnożenie liniowe, pozostałe jeszcze cztery liniowemi nie są. Z nich zasługuje na szczególną uwagę *mnożenie wewnętrzne*, podległe warunkom

$$e_a e_b = 0, \qquad e_a e_a = e_b e_b,$$

Mnożenie kołowe zawiera się znowu w mnożeniu *symetryczném*, opartém na założeniu, że równania warunkowe 2. nie zmieniają się, gdy zmienimy znak któréjkolwiek jednostki, oraz gdy dwie dowolne jednostki przestawimy. Przy tém założeniu otrzymujemy w ogóle 16 gatunków mnożenia.

Jeżeli napiszemy trzy grupy równań

$$a. \qquad e_r e_s = e_s e_r \qquad s \gtrless r.$$

β. $\quad e_r e_s + e_s e_r = 0, \; e_1 e_1 = e_2 e_2 \ldots = e_n e_n; \quad s \gtrless r$

γ. $\quad e_1 e_1 + e_2 e_2 + \ldots + e_n e_n = 0.$

$s, r = 1, 2, \ldots n$

to na podstawie poprzedzającego można będzie powiedzieć, że mnożenie zewnętrzne czyni zadość grupom β i γ, mnożenie wewnętrzne grupom α i β. Można pomyśleć mnożenie, czyniące zadość jednéj grupie środkowéj α; mnożenie takie nazywa Grassmann *środkowém*[22]. Rozpatrzymy po kolei własności każdego z wymienionych trzech gatunków mnożenia.

25. MNOŻENIE ZEWNĘTRZNE.

Z teoryi, wyłożonéj w artykule poprzedzającym, wynika bezpośrednio, że mnożenie zewnętrzne dwóch liczb zespolonych nie jest przemiennén.

W saméj rzeczy, niechaj będzie

$$a = \Sigma\, \alpha_r e_r, \quad b = \Sigma\, \beta_s e_s;$$

iloczyny ab i ba, na podstawie wzoru 1. poprzedzającego artykułu, będą

$$[ab] = \Sigma\, \alpha_r \beta_s\, [e_r e_s],$$
$$[ba] = \Sigma\, \alpha_r \beta_s\, [e_s e_r],$$

[Mnożenie zewnętrzne dla odróżnienia od innych gatunków mnożenia oznaczać będziemy nawiasem klamrowym]. Ponieważ w mnożeniu zewnętrznym zachodzą związki

$$[e_r e_s] = -[e_s e_r]$$

przeto

1. $$[ab] = -[ba].$$

Jeżeli $b = a$, ubędzie $[aa] = -[aa]$, a więc

2. $$[aa] = 0.$$

Iloczyn zewnętrzny dwóch czynników równych jest zerem.

Iloczyn zewnętrzny $[a\,b\,c\,d\ldots]$ większéj liczby czynników otrzymujemy, mnożąc $[ab]$ zewnętrznie przez c, iloczyn $[a\,b\,c]$ mnożąc przez d i t. d. Powstają stąd równości:

Hosted by Google

$$3. \qquad \begin{array}{l} [a\,b\,c\,d\ldots] = -\,[b\,a\,c\,d\ldots] \\ [a\,b\,c\,d\ldots] = -\,[d\,b\,c\,a\ldots] \end{array}$$

wyrażające, że iloczyn zewnętrzny zmienia znak przy przestawieniu dwóch jakichkolwiek czynników. Stąd wynika, że iloczyn zewnętrzny, w którym dwa którekolwiek czynniki są równe, jest zerem; będzie zatém naprzykład

$$4. \qquad [a\,b\,a\,c\,d\ldots] = 0.$$

Dwa iloczyny, złożone z tych samych czynników, inaczéj uporządkowanych, będą oczywiście jednego znaku lub znaków przeciwnych stosownie do tego, czy od szeregu czynników w pierwszym iloczynie można przejść do szeregu czynników w drugim za pomocą parzystej lub nieparzystéj liczby przestawień dwóch czynników. Można przeto napisać

$$5. \qquad [a_1\,a_2\,\ldots\,a_n] = (-1)^s\,[a_\lambda\,a_\mu\,\ldots\,a_\varrho],$$

gdzie po drugiéj stronie λ, μ, . . . , ϱ jest pewną przemianą liczb 1, 2, . . . , n i gdzie s jest liczbą przestawień, za pomocą któréj od jednéj przemiany możemy przejść do drugiéj.

Jeżeli pomiędzy czynnikami zachodzi związek liniowy, to iloczyn zewnętrzny jest zerem. W saméj rzeczy, niechaj pomiędzy czynnikami iloczynu $[a\,b\,c\,d\ldots]$ zachodzi związek

$$a = \beta b + \gamma c + \ldots$$

Uwzględniając ten związek, znajdziemy na zasadzie prawa rozdzielności:

$$\begin{aligned} [a\,b\,c\,d\ldots] &= [\beta b + \gamma c + \ldots][b\,c\,d\ldots] \\ &= [\beta\,b\,b\,c\,d\ldots] + [\gamma\,c\,b\,c\,d\ldots] + \ldots \\ &= \beta[b\,b\,c\,d\ldots] + \gamma\,[c\,b\,c\,d\ldots] + \ldots; \end{aligned}$$

Każdy z wyrazów w ostatniém wyrażeniu na mocy równania 4. jest zerem, a zatém

$$6. \qquad \begin{array}{l} [a\,b\,c\,d\ldots] = 0 \\ a = \beta b + \gamma c + \ldots \end{array}$$

Z tego twierdzenia wynika, że iloczyn zewnętrzny liczb zespolonych nie zmienia się, jeżeli do któregokolwiek czynnika dodamy wielokrotności pozostałych czynników.

Hosted by Google

Jeżeli określimy dzielenie, odpowiadające mnożeniu zewnętrznemu, jako działanie, za pomocą którego znajdujemy liczbę x, czyniącą zadość równaniu

$$x b = a,$$

to łatwo się przekonać, że dzielenie to nie jest jednowartościowém; jeżeli bowiem $x = x_1$ jest jedném z rozwiązań, to, na zasadzie poprzedniego twierdzenia, równaniu $xb=a$ czynić będzie zadość każda liczba zespolona $x_1 + \beta b$, gdzie β jest liczbą rzeczywistą dowolną.

26. WYZNACZNIKI.

Niechaj będzie układ n^2 elementów, uporządkowany w n wierszy, zawierających każdy po n elementów

$$\begin{array}{c} a_{1,1},\ a_{1,2},\ \ldots,\ a_{1,n} \\ a_{2,1},\ a_{2,2},\ \ldots,\ a_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1},\ a_{n,2},\ \ldots,\ a_{n,n} \end{array} \tag{1}$$

Z układu tego wybierzmy n elementów, a mianowicie po jednym z każdego wiersza z różnych kolumn, a więc np. z pierwszego wiersza element $a_{1,\varrho}$, z drugiego $a_{2,\sigma}, \ldots$ z ostatniego $a_{n,\tau}$ gdzie skaźniki $\varrho, \sigma, \ldots \tau$ są wszystkie różne, i utwórzmy iloczyn

$$a_{1,\varrho}\, a_{2,\sigma} \ldots a_{n,\tau}.$$

Takich iloczynów będzie oczywiście tyle, ile przemian można utworzyć z szeregu skaźników $\varrho, \sigma, \ldots, \tau$ lub, co na jedno wychodzi, z szeregu $1, 2, \ldots, n$, a zatém będzie ich $n!$. Każdemu z iloczynów dajemy znak dodatni, jeżeli szereg skaźników $\varrho, \sigma, \ldots, \tau$ powstaje z szeregu $1, 2, \ldots, n$ za pomocą parzystéj liczby przestawień dwóch skaźników, — znak ujemny, jeżeli powstaje przez nieparzystą liczbę takich przestawień. Z teoryi elementarnéj przemian wiadomo, że liczba przemian tak jednéj jak i drugiéj klasy jest równa połowie liczby $n!$; a zatém połowa iloczynów, jakie tworzymy, będzie miała znak dodatni, połowa znak ujemny. Suma tak utworzonych iloczynów, którą oznaczamy dla skrócenia przez

$$\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n},$$

Hosted by Google

wypisując pod znakiem Σ iloczyn wyrazów na przekątnéj układu 1., albo przez

$$2. \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix}$$

lub też przez

$$3. \qquad | a_{i,r} | ; i, r = 1, 2, \ldots, n.$$

nazywa się *wyznacznikiem*[20] układu 1. *Stopniem* jego jest liczba n.

Teorya wyznaczników daje się wysnuć w zupełności z teoryi iloczynów zewnętrznych.

W saméj rzeczy, niechaj będzie układ liczb zespolonych:

$$4. \qquad \begin{aligned} x_1 &= a_{1,1} a_1 + a_{1,2} a_2 + \ldots + a_{1,n} a_n \\ x_2 &= a_{2,1} a_1 + a_{2,2} a_2 + \ldots + a_{2,n} a_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_{n,1} a_1 + a_{n,2} a_2 + \ldots + a_{n,n} a_n \end{aligned}$$

Utwórzmy iloczyn zewnętrzny

$$[x_1 x_2 \ldots x_n].$$

Na podstawie twierdzeń, wyłożonych w poprzedzającym artykule, wnosimy z łatwością, że w iloczynie tym znikną wszystkie wyrazy, w których którykolwiek z czynników $a_1, a_2 \ldots a_n$ powtarza się raz lub kilka razy i pozostaną tylko wyrazy, zawierające iloczyn zewnętrzny n czynników $a_1, a_2, \ldots, a_n$; wyrazów tych będzie oczywiście $n!$. Ponieważ przestawienie czynników może wpłynąć tylko na zmianę znaku, a zatém iloczyny cząstkowe będą wszystkie zawierały czynnik $+ [a_1 a_2 \ldots a_n]$ lub $-[a_1 a_2 \ldots a_n]$; przyjmując więc $[a_1 a_2 \ldots a_n]$ za czynnik wspólny dla całkowitego iloczynu i wyłączając go za nawias, będziemy mieli w nawiasie połowę wyrazów dodatnich i połowę ujemnych. Wyrażenie, zawarte w nawiasie, jest właśnie, jak łatwo widzieć, dopiero co określonym wyznacznikiem 2. lub 3. Możemy więc napisać:

Hosted by Google

5. $$[x_1 x_2 \ldots x_n] = \mid a_{i,r} \mid [a_1 \, a_2 \ldots a_n],$$
$$i, r = 1, 2, \ldots n,$$

a więc wyznacznikiem układu 1. jest współczynnik iloczynu zewnętrznego liczb układu 4., określony za pomocą równania 5.

Gdybyśmy zamiast układu 4. przyjęli układ

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{1,1} a_1 + a_{2,1} a_2 + \ldots + a_{n,1} a_n , \\ x_2' &= a_{1,2} a_1 + a_{2,2} a_2 + \ldots + a_{n,2} a_n , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= a_{1,n} a_1 + a_{2,n} a_2 + \ldots + a_{n,n} a_n , \end{aligned}$$

różniący się od pierwszego tém, że współrzędne, które poprzednio stanowiły wiersze, stanowią obecnie kolumny, to iloczyn zewnętrzny $[x_1'. x_2' \ldots x_n']$ byłby tożsamościowo równy iloczynowi $[x_1 \, x_2 \ldots x_n]$ skąd wynika, że wyznacznik układu 1. nie ulega zmianie, jeżeli w układzie tym przyjmiemy wiersze za kolumny i kolumny za wiersze.

Z równania 5. wypływa cała teorya wyznaczników. Stosując do tego równania prawa, zawarte we wzorach 3. 4. 5. 6. artykułu poprzedzającego, otrzymujemy bezpośrednio następujące twierdzenia:

I. Wyznacznik zmienia znak przy przestawieniu dwóch którychkolwiek rzędów poziomych [pionowych].

II. Przy jakiéjkolwiek przemianie rzędów poziomych [pionowych] wyznacznik zmienia znak lub nie zmienia znaku, stosownie do tego, czy od dawnego układu przechodzimy do nowego za pomocą parzystéj lub nieparzystéj liczby przestawień dwóch rzędów.

III. Wyznacznik, w którym dwa rzędy poziome [pionowe] składają się z elementów równych lub proporcyonalnych, jest tożsamościowo równy zeru.

IV. Wyznacznik nie zmienia swéj wartości, jeżeli do elementów któregokolwiek rzędu poziomego [pionowego] dodamy, lub od nich odejmiemy, równe wielokrotności odpowiednich elementów innego rzędu poziomego [pionowego].

Jeżeli w równaniach 4. w miejsce $a_1, a_2, \ldots, a_n$ napiszemy

Hosted by Google

6.
$$
\begin{aligned}
a_1 &= \beta_{1,1} e_1 + \beta_{1,2} e_2 + \ldots + \beta_{1,n} e_n,\\
a_2 &= \beta_{2,1} e_1 + \beta_{2,2} e_2 + \ldots + \beta_{2,n} e_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_n &= \beta_{n,1} e_1 + \beta_{n,2} e_2 + \ldots + \beta_{n,n} e_n,
\end{aligned}
$$

otrzymamy

7.
$$
\begin{aligned}
x_1 &= (\alpha_{1,1}\beta_{1,1} + \alpha_{1,2}\beta_{2,1} + \ldots + \alpha_{1,n}\beta_{n,1})e_1 + \ldots + (\alpha_{1,1}\beta_{1,n} + \alpha_{1,2}\beta_{2,n} + \ldots + \alpha_{1,n}\beta_{n,n})e_n,\\
x_2 &= (\alpha_{2,1}\beta_{1,1} + \alpha_{2,2}\beta_{2,1} + \ldots + \alpha_{2,n}\beta_{n,1})e_1 + \ldots + (\alpha_{2,1}\beta_{2,n} + \alpha_{2,2}\beta_{2,n} + \ldots + \alpha_{2,n}\beta_{n,n})e_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= (\alpha_{n,1}\beta_{1,1} + \alpha_{n,2}\beta_{2,1} + \ldots + \alpha_{n,n}\beta_{n,1})e_1 + \ldots + (\alpha_{n,1}\beta_{1,n} + \alpha_{n,2}\beta_{2,n} + \ldots + \alpha_{n,n}\beta_{n,n})e_n,
\end{aligned}
$$

Kładąc dla skrócenia

8. $$\gamma_{s,t} = \alpha_{s,t}\beta_{1,t} + \alpha_{s,2}\beta_{2,t} + \ldots + \alpha_{s,n}\beta_{n,t},$$

otrzymujemy z równań 7. na podstawie równania 5.

9. $$[x_1\, x_2 \ldots x_n] = |\, \gamma_{s,t} \,|\, [e_1\, e_2 \ldots e_n] \quad s, t = 1, 2, \ldots, n.$$

Na téj samej zasadzie z równań 6. wypływa

$$[a_1\, a_2 \ldots a_n] = |\, \beta_{l,m} \,|\, [e_1\, e_2 \ldots e_n] \quad l, m = 1, 2, \ldots, n,$$

a podstawiając ten wynik we wzorze 5., znajdziemy

10. $$[x_1\, x_2 \ldots x_n] = |\, \alpha_{i,r} \,| \,.\, |\, \beta_{l,m} \,|\, [e_1\, e_2 \ldots e_n] \quad i, r, l, m = 1, 2, \ldots, n.$$

Porównanie wzorów 9. i 10. doprowadza do związku

11. $$|\alpha_{i,r}| \,.\, |\beta_{l,m}| = |\gamma_{s,t}|, \quad i, r, l, m, s, t, = 1, 2, \ldots, n.$$

który w połączeniu z wzorem 8. wyraża twierdzenie o mnożeniu wyznaczników.

Jeżeli w iloczynie zewnętrznym $[x_1\, x_2 \ldots x_n]$ w miejsce któregokolwiek z czynników, np. w miejsce czynnika x_s, podstawimy jego wyrażenie z równań 4., t. j.

$$x_s = \alpha_{s,1} a_1 + \alpha_{s,2} a_2 + \ldots + \alpha_{s,n} a_n,$$

to będzie można napisać

$$[x_1\, x_2 \ldots x_n] = \sum_{t=1}^{t=n} \alpha_{s,t} [x_1\, x_2 \ldots x_{s-1}\, a_t\, x_{s+1} \ldots x_n].$$

Hosted by Google

Iloczyn zewnętrzny

$$[x_1 \; x_2 \; . \; . \; . \; x_{s-1} \, a_t \, x_{s+1} \; . \; . \; . \; x_n],$$

na podstawie równania 5., możemy przedstawić pod postacią

$$[x_1 \; x_2 \; . \; . \; . \; x_{s+1} \, a_t \, x_{s+1} . \; . \; . \, x_n] = A_{s,t}[a_1 \; a_2 \; . \; . \; . \; a_n]$$

gdzie $A_{s,t}$ oznacza wyznacznik układu współczynników

$$\begin{array}{ccccccc}
\alpha_{1,1}, & \alpha_{1,2}, & \ldots, & \alpha_{1,t} & \ldots & \alpha_{1,n}, \\
. & . & . & . & . & . \\
\alpha_{s-1,1}, & \alpha_{s-1,2}, & \ldots, & \alpha_{s-1,t} & \ldots & \alpha_{s-1,n}, \\
0, & 0, & \ldots, & 1, & \ldots & 0, \\
\alpha_{s+1,1}, & \alpha_{s+1,2}, & \ldots, & \alpha_{s+1,t} & \ldots & \alpha_{s+1,n}, \\
. & . & . & . & . & . \\
\alpha_{n,1}, & \alpha_{n,2}, & \ldots, & \alpha_{n,t}, & \ldots & \alpha_{n,n}.
\end{array}$$

będzie zatém

$$[x_1 \; x_2 \; . \; . \; . \; x_n] = \sum_{t=1}^{t=n} \alpha_{s,t} A_{s,t} [a_1, a_2, \; . \; . \; . \; , a_n].$$

Porównywając to wyrażenie z wzorem 5., otrzymujemy równanie

12. $$|\alpha_{i,r}| = \sum_{t=1}^{t=n} \alpha_{s,t} A_{s,t}$$
$$i, r = 1, 2, \; . \; . \; . \; , n.$$

przedstawiające rozkład wyznacznika danego według elementów wiersza s-go. Wyznaczniki $A_{s,t}$ stanowią tak nazwane wyznaczniki *cząstkowe*, inaczéj *podwyznaczniki* lub *minory*, wyznacznika danego; dają się one przedstawić jako wyznaczniki stopnia $(n-1)$-go.

Jeżelibyśmy w wyrażeniu iloczynu zewnętrznego $[x_1 \; x_2 \; . \; . \; . \; x_n]$ zastąpili dwie liczby x_s i x_t ich wyrażeniami, wziętemi z równań 4., doszlibyśmy do rozkładu wyznacznika danego na sumę iloczynów, których czynnikami będą wyznaczniki cząstkowe, dające się przedstawić, jako wyznaczniki stopnia $(n-2)$-go. Zastępując wogóle m z pomiędzy czynników x_1, x_2,..., x_n ich wyrażeniami 4., dojdziemy do wyznaczników cząstkowych stopnia m-go. Dalsze rozwinięcie teoryi wyznaczników cząstkowych znajdzie czytelnik w podręcznikach Algebry i w dziełach, specyalnie traktujących o wyznacznikach.

Hosted by Google

Podamy tu jeszcze zastosowanie teoryi iloczynów zewnętrznych do rozwiązywania układów równań liniowych.

Niechaj będzie układ n równań liniowych o n niewiadomych $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$:

$$13. \quad \begin{array}{l} a_{1,1}\xi_1 + a_{1,2}\xi_2 + \ldots + a_{1,n}\xi_n = \beta_1, \\ a_{2,1}\xi_1 + a_{2,2}\xi_2 + \ldots + a_{2,n}\xi_n = \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}\xi_1 + a_{n,2}\xi_2 + \ldots + a_{n,n}\xi_n = \beta_n, \end{array}$$

w którym wszystkie liczby mają być rzeczywiste. Niewiadome możemy wyznaczyć w sposób następujący:

Pomnóżmy równanie pierwsze przez e_1, drugie przez $e_2 \ldots$ ostatnie przez e_n i dodajmy je następnie odpowiedniemi stronami. Kładąc:

$$a_{i,1}e_1 + a_{i,1}e_2 + \ldots + a_{i,n}e_n = a_i$$

$$\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n = b$$

otrzymujemy

$$14. \quad \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \ldots + \xi_n a_n = b$$

Mnożąc zewnętrznie obie strony równania 14. przez

$$[a_1\ a_2 \ldots a_{r-1}\, a_{r+1} \ldots a_n]$$

i uwzględniając własności mnożenia zewnętrznego, znajdziemy

$$15. \quad \xi_r\, [a_1\ a_2 \ldots a_{r-1}\, a_r\, a_{r+1} \ldots a_n] = [a_1\, a_2 \ldots a_{r-1}\, b\, a_{r+1} \ldots a_n].$$

Z równań 13. na podstawie wzoru 5. wynika, że iloczyn zewnętrzny po lewéj stronie równania 15. równa się wyznacznikowi układu 1., pomnożonemu przez $[e_1\ e_2 \ldots e_n]$, iloczyn zaś zewnętrzny po prawéj stronie równa się wyznacznikowi tego układu, po zastąpieniu w nim kolumny r-éj rzędem elementów $\beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_n$, także pomnożonemu przez $[e_1\ e_2 \ldots e_n]$; możemy przeto napisać:

$$16. \quad \xi_r\, |a_{s,t}|\, [e_1\ e_2 \ldots e_n] = |a_{s,t}|_{(r)}\, [e_1\ e_2 \ldots e_n]$$

$$s, t = 1, 2, \ldots, n,$$

gdzie znaczek (r) ma przypominać, iż w kolumnie r-éj układu 1. uskuteczniono powyższą zmianę. Z równania 16., ponieważ ξ_r jest liczbą rzeczywistą, $[e_1, e_2, \ldots, e_n]$ zaś jest od zera różne, otrzymujemy

17. $$\xi_r \left| a_{s,t} \right| = \left| a_{s,t} \right|_{(r)}$$
$$s, t = 1, 2, \ldots n.$$
$$r = 1, 2, \ldots n.$$

Z wzorów 17., jeżeli wyznacznik $\left| a_{s,t} \right|$ nie jest tożsamościowo zerem, znajdziemy oznaczone wartości dla niewiadomych $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$.

Jeżeli w układzie równań 13., założymy

18. $$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0,$$

to wyznaczniki $\left| a_{s,t} \right|_{(r)}$, jako zawiérające w kolumnie r-éj same zera, będą zerami, a więc, jeżeli wyznacznik $\left| a_{s,t} \right|$ nie jest zerem, otrzymamy

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0.$$

Układ 13. przy założeniach 18., stanowi układ równań liniowych jednorodnych z n niewiadomemi; możemy więc wypowiedzieć twierdzenie:

"Jeżeli wyznacznik układu równań liniowych jednorodnych nie jest zerem, to wartości niewiadomych, czyniące zadość układowi, są wszystkie zerami„.

Gdy ten warunek nie spełnia się, to wtedy ma miejsce następujące twierdzenie:

"Jeżeli wyznacznik układu jest zerem i wszystkie wyznaczniki cząstkowe stopnia $n-1$-go, $n-2$-go, ..., $n-l+1$-go są zerami, a nie jest zerem jeden z wyznaczników stopnia $n-l$-go, wtedy l niewiadomych n.p. $\xi_{n-l+1}, \xi_{n-l+2}, \ldots, \xi_n$ można uważać za nieoznaczone a pozostałe $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-l}$ za pomocą pierwszych wyrazić„ [21].

27. ILOCZYNY ODNIESIONE DO DZIEDZINY GŁÓWNÉJ.

Dziedziną główną nazwijmy dziedzinę jednostek $e_1, e_2, \ldots, e_n$; jéj stopniem jest liczba n.

Iloczyn m czynników postaci

1. $$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n,$$

zawierać będzie w każdym wyrazie iloczyny m jednostek $e_\alpha, e_\beta, \ldots e_\lambda$; iloczyny te nazwijmy jednostkami stopnia m-go. Liczba, utworzona z takich jednostek $E_1, E_2, \ldots$ stopnia m-go, będzie miała postać

Hosted by Google

2. $$A = a_1 E_1 + a_2 E_2 + \ldots$$

i nazywa się liczbą stopnia m-go. Iloczyn dwóch liczb, z których jedna jest stopnia m_1, druga stopnia m_2, będzie liczbą stopnia (m_1+m_2)-go. Jeżeli m_1+m_2 jest większe od n, to iloczyn dwóch takich liczb zawierać będzie jednostki stopnia wyższego od n, a więc iloczyny jednostek, w których jedna lub więcéj jednostek powtarzają się; iloczyn zewnętrzny takich liczb jest zerem [art. 25.].

Jest przeto rzeczą widoczną, że w dziedzinie n-go stopnia iloczyny czynników postaci 1., jeżeli ich liczba jest większą od n, oraz iloczyny czynników postaci 2., przy mniejszéj liczbie czynników, są zerami. Grassmann obmyślił metodę, za pomocą któréj iloczyny w przypadku, gdy suma stopni czynników ich jest większa od stopnia dziedziny głównéj, zastępujemy innemi iloczynami, dla których suma stopni nie jest większa od n. Metoda ta opiera się na pojęciu tak zwanego *dopełnienia* [Ergänzung].

Niechaj E oznacza jednostkę jakiegokolwiek stopnia, to jest albo jednę z jednostek prostych $e_1, e_2, \ldots, e_n$, albo iloczyn pewnéj liczby tych jednostek; otóż dopełnieniem jednostki E, które oznaczać będziemy przez

$$| \, E,$$

jest iloczyn zewnętrzny E' wszystkich jednostek prostych, w E niezawartych, wzięty ze znakiem dodatnim lub ujemnym, stosownie do tego, czy $[EE']$ jest równe 1 lub -1. Iloczyn $[e_1 e_2 \ldots e_n]$ przyjmuje się jako równy 1. Możemy przeto napisać:

$$| \, E = [EE'] E'$$

Będzie więc naprzykład:

$$\begin{aligned}
&| \, e_1 = [e_2 e_3 \ldots e_n], \\
&| \, e_2 = - [e_1 e_3 \ldots e_n], \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&| \, e_n = (-1)^{n-1} [e_1 e_2 \ldots e_n], \\
&| \, [e_1 e_2] = [e_3 e_4 \ldots e_n], \\
&| \, [e_1 e_3] = - [e_2 e_4 \ldots e_n], \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&| \, [e_{n-1} e_n] = [e_1 e_2 \ldots e_{n-2}] \qquad \text{i t. d.}
\end{aligned}$$

Hosted by Google

Iloczyn zewnętrzny jednostki przez jéj dopełnienie jest oczywiście równy 1.

3. $$[E \mid E'] = 1.$$

Dopełnieniem liczb zespolonych 1. i 2., nazywamy wyrażenia:

3. $$\begin{aligned} \mid a &= \alpha_1 \mid e_1 + \alpha_2 \mid e_2 + \ldots + \alpha_n \mid e_n, \\ \mid A &= \alpha_1 \mid E_1 + \alpha_2 \mid E_2 + \ldots + \ldots\ldots \end{aligned}$$

Jeżeli m jest stopniem liczby, to $n-m$ jest stopniem jéj dopełnienia.

Iloczyn zewnętrzny dwóch jednostek E i E', gdy suma ich stopni jest mniejsza od n albo równa n,—lub też liczbę, któréj dopełnieniem jest iloczyn dopełnień tych jednostek, gdy suma ich stopni jest od n większą—nazywamy iloczynem jednostek E i E', *odniesionym do dziedziny głównéj*. Iloczyny odniesione będą więc miały tę własność że suma ich stopni nie jest od n większa. Niechaj np. dziedzina główna będzie 3-go stopnia, i dajmy, że mamy dwie jednostki $E = e_1$ i $E' = [e_2 e_3]$, to iloczynem odniesionym będzie wprost

$$[EE'] = [e_1 e_2 e_3] = 1.$$

Jeżeli zaś $E = [e_1 e_2]$, $E' = [e_2 e_3]$, to iloczynem odniesionym będzie liczba, któréj dopełnieniem jest iloczyn dopełnień, t. j.

$$\mid [\mid E \mid E'].$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \mid E &= \mid [e_1 e_2] = e_3, \\ \mid E' &= \mid [e_2 e_3] = e_1, \end{aligned}$$

przeto

$$\mid [\mid E . E' \mid] = [e_3 e_1];$$

iloczynem odniesionym będzie

$$e_2 = [e_1 e_2 e_3] e_2.$$

Podobnież rzecz się ma z mnożeniem nietylko jednostek ale i liczb zespolonych w ogólności. Jeżeli suma stopni tych liczb jest równa n lub jest mniejsza od n, to tworzymy wprost iloczyn zewnętrzny; jeżeli zaś suma stopni jest od n większą, bierzemy iloczyn dopełnień czynników, tworząc dopełnienie na podstawie prawidła 3. Niechaj np. dziedzina dana będzie stopnia 3-go, a czynnikami liczby

$$\begin{aligned} a &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \\ b &= \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3. \end{aligned}$$

Hosted by Google

Iloczyn

$$ab = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[e_1e_2] + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)[e_1e_3] + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)[e_2e_3],$$

jest już odniesionym do dziedziny głównéj. Gdy wszakże mamy liczby

$$A = \alpha[e_1e_2] + \alpha'[e_1e_3],$$
$$B = \beta[e_2e_3] + \beta'[e_1e_2],$$

dla których suma stopni obu czynników jest większa od 4. wtedy bierzemy dopełnienia. Ponieważ

$$|\,[e_1\,e_2] = e_3$$
$$|\,[e_1\,e_3] = -\,e_2$$
$$|\,[e_2\,e_3] = e_1$$

będzie więc

$$|\,A = \alpha\,e_3 - \alpha'\,e_2$$
$$|\,B = \beta\,e_1 + \beta'\,e_3$$

Wykonywając mnożenie, otrzymujemy

$$[\,|\,A\,|\,B] = \alpha'\beta\,[e_1\,e_2] - \alpha\beta\,[e_1\,e_3] - \alpha'\beta'[e_2e_3].$$

a biorąc dopełnienia stron obu, mieć będziemy

$$|\,[\,|\,A\,|\,B] = \alpha'\beta\,e_3 + \alpha\beta\;e_2 - \alpha'\beta' e_1.$$

Strona druga wyraża iloczyn, odniesiony do dziedziny głównéj[22].

Na podstawie tych określeń można dowieść twierdzenia, że "jeżeli E, F, G są jednostkami, których stopnie równają się razem n, to iloczyn $[EF.EG]$, odniesiony do dziedziny głównéj, równa się iloczynowi $[EFG].E$," oraz uogólnić to twierdzenie w sposób następujący:

"Jeżeli liczba A jest postaci 1., liczby B i C postaci 2., i jeżeli suma stopni tych trzech liczb jest równa n, to wtedy iloczyn

$$[AB\,.\,AC],$$

odniesiony do dziedziny głównéj, równa się iloczynowi $[ABC]\,A$".

Twierdzenia te i wynikające z nich wnioski, których uzasadnienie szczegółowe znajdzie czytelnik w dziele Grassmanna, mają ważne zastosowanie w badaniach geometrycznych, gdzie z nadzwyczajną łatwością pozwalają na wywód wielu własności linij i powierzchni. [W tomie trzecim podamy zastosowania geometryczne tych metod Grassmanna].

Hosted by Google

28. MNOŻENIE WEWNĘTRZNE.

Iloczynem wewnętrznym dwóch jednostek E i F dowolnego stopnia nazywa Grassmann iloczyn odniesiony pierwszéj z nich przez dopełnienie drugiéj, co wyrażamy w ten sposób:

1. $$(EF) = [E \mid F].$$

[Do oznaczenia iloczynu wewnętrznego używać będziemy nawiasu okrągłego].

Z tego określenia wynika, że iloczyn wewnętrzny dwóch liczb A i B równa się iloczynowi odniesionemu pierwszéj z nich przez dopełnienie drugiéj, t. j.

$$(AB) = [A \mid B].$$

Jeżeli stopień czynnika A jest równy m, stopień czynnika B równy m', to stopień iloczynu wewnętrznego będzie oczywiście $n+m-m'$ lub $m-m'$, stosownie do tego, czy m' jest mniejsze lub większe od m.

Wynika stąd, że iloczyn wewnętrzny dwóch liczb jednego stopnia jest stopnia zero, czyli jest liczbą rzeczywistą.

Iloczyn wewnętrzny dwóch jednostek równych jest 1, dwóch jednostek różnych tego samego stopnia jest 0, t. j.

2. $$(E_r E_r) = 1, \qquad (E_r E_s) = 0. \qquad r \gtrless s.$$

W saméj rzeczy, na zasadzie określenia oraz wzoru 3. art. poprzedzającego, jest

$$(E_r E_r) = [E_r \mid E_r] = 1.$$

Ponieważ $\mid E_s$ jest iloczynem wszystkich jednostek prostych, w E_s nie zachodzących, a więc takich, które zachodzą w E_r, więc iloczyn $[E_r \mid E_s]$ zawiera czynniki równe, jest przeto równy zeru.

Stosując to twierdzenie do przypadku jednostek prostych, otrzymujemy

$$(e_r e_r) = 1, \qquad (e_r e_s) = 0\,,$$

t. j. układ równań równoważnych grupom α. i β. w art. 24., charakteryzującym mnożenie wewnętrzne. Określenie przeto, podane na wstępie niniejszego artykułu, zgadza się z określeniem, przytoczoném w art. 24.

Hosted by Google

Jeżeli $E_1, E_2, \ldots, E_m$ są jednostkami dowolnemi równego stopnia, to na podstawie wzorów 2. otrzymujemy

$$a_1 E_1 + a_2 E_2 + \ldots + a_m E_m) \; (\beta_1 E_1 + \beta_2 E_2 + \ldots + \beta_m E_m) \\ = a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + \ldots + a_m \beta_m ,$$

skąd wynika, że mnożenie wewnętrzne, jeżeli oba czynniki są równego stopnia, jest działaniem przemiennėm.

Iloczyn wewnętrzny dwóch czynników równych nazywa Grassmann *kwadratem wewnętrznym* i oznacza w ten sposób

$$(AA) = A^{\underline{2}}.$$

Z tego określenia wynika:

$$(a_1 E_1 + a_2 E_1 + \ldots, + a_m E_m)^{\underline{2}} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m{}^2$$

Dwie liczby, których kwadraty wewnętrzne są równe, nazywa Grassmann liczbami *równėj wartości bezwzględnėj. Normalnemi* względem siebie nazywa dwie liczby różne od zera, których iloczyn wewnętrzny jest równy zeru; *układem normalnym* stopnia n-go w dziedzinie stopnia n-go — układ n liczb pierwszego stopnia różnych od zera, mających równą wartość bezwzględną, która uważa się zarazem za wartość bezwzględną samego układu. Układ jednostek pierwotnych $e_1, e_2, \ldots, e_n$ stanowi taki układ normalny, którego wartość bezwzględna jest 1., gdyż dla tego układu zachodzą równości

$$e_1^{\underline{2}} = e_2^{\underline{2}} = \ldots = e_n^{\underline{2}} = 1$$

$$(e_1 e_2) = (e_1 e_3) = \ldots = (e_{n-1} e_n) = 0.$$

29. MNOŻENIE ŚRODKOWE.

Mnożenie to, jak wiemy, czyni zadość równaniom warunkowym β w art. 24. t. j. równaniom

1. $\quad e_r e_s + e_s e_s = 0 ; \quad s \lesseqgtr r ; \quad e_1 e_2 = e_1 e_2 \ldots = e_n e_n .$

Porównywając równanie 1. z warunkami mnożenia zewnętrznego, i wewnętrznego, dostrzeżemy z łatwością, że pomiędzy temi trzema mnożeniami zachodzi związek bardzo prosty, który, według Grassmanna[23], można przedstawić pod postacią

$$ab = \lambda (ab) + \mu [ab].$$

W równaniu tém a i b są liczbami zespolonemi, utworzonemi z jednostek prostych, ab jest iloczynem środkowym, (ab) wewnętrznym, $[ab]$ zewnętrznym, λ i μ pewnemi współczynnikami dowolnemi, nierównemi zeru. Ponieważ, gdy λ i μ zmieniają się w stosunku stałym, t. j. gdy λ/μ pozostaje pewną liczbą rzeczywistą, różną od zera, iloczyn ab zmienia tylko swój czynnik rzeczywisty, w skutek czego ani istota powyższego związku ani istota mnożenia nie ulega zmianie, można przeto przyjąć, że jeden ze współczynników, np. $\mu = 1$. Będzie tedy

2. $$ab = \lambda (ab) + [ab],$$

Kładąc w tém równaniu $a = e_r$, $b = e_r$, i zważając, że iloczyn wewnętrzny $(e_r e_r) = 1$, iloczyn zaś zewnętrzny $[e_r e_r] = 0$, otrzymujemy

3. $$e_r e_r = \lambda, \qquad r = 1, 2, \ldots n.$$

Kładąc zaś $a = e_r$, $b = e_s$, $r \gtrless s$, i zważając, że $(e_r e_s) = 0$, mieć będziemy

4. $$e_r e_s = [e_r e_s]$$

t. j. że iloczyn środkowy dwóch jednostek różnych równa się ich iloczynowi zewnętrznemu.

Z równań 3. i 4. wynika, że określenie istoty mnożenia środkowego sprowadza się do określenia znaczenia iloczynu $e_r e_r$ zgodnie z równaniem 3. i do oznaczenia $\frac{n(n-1)}{2}$ iloczynów zewnętrznych $e_r e_s$; razem więc mamy do określenia $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ iloczynów jednostek.

Na teoryi mnożenia środkowego oparta jest teorya kwaternionów, do któréj teraz przechodzimy.

30. KWATERNIONY HAMILTONA.

Kwaternionem nazywamy liczbę zespoloną postaci

1. $$a = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$

utworzoną z czterech jednostek, z których jedną jest 1, trzy zaś pozostałe e_1, e_2, e_3 ulegają prawu mnożenia środkowego.

Hosted by Google

Na podstawie równań 1., artykułu poprzedzającego będzie

2. $$e_3 e_2 = - e_2 e_3, \quad e_1 e_3 = - e_3 e_1, \quad e_2 e_1 = - e_1 e_2$$
$$e_1 e_1 = e_2 e_2 = e_3 e_3.$$

Aby określić istotę mnożenia trzeba, według podanéj wyżéj teoryi, oznaczyć liczbę λ, dla któréj:

$$e_1 e_1 = e_2 e_2 = e_3 e_3 = \lambda,$$

oraz trzy iloczyny

$$e_1 e_2, \ e_2 e_3, \ e_3 e_1.$$

Połóżmy tedy

3. $$e_1 e_2 = e_3, \quad \text{a więc} \quad e_2 e_1 = - e_3.$$

i przyjmijmy, że do mnożenia jednostek stosuje się prawo łączności. Na téj zasadzie z pierwszego równania 3., otrzymujemy

$$e_1 e_1 e_2 = e_1 e_3$$
$$\lambda e_2 = e_1 e_3;$$

stąd:

4. $$e_1 e_3 = \lambda e_2$$
$$e_3 e_1 = - \lambda e_2$$

Podobnież z drugiego równania 3. będzie

$$e_2 e_2 e_1 = - e_2 e_3$$
$$\lambda e_1 = - e_2 e_3;$$

stąd:

5. $$e_2 e_3 = - \lambda e_1$$
$$e_3 e_2 = \lambda e_1$$

Ponieważ $e_1 e_2 e_3$ równa się z jednéj strony $e_1 e_2 . e_3 = e_3 e_3 = \lambda$, z drugiéj zaś $e_1 . e_2 e_3 = - \lambda e_1 e_1 = - \lambda^2$, a zatém być winno $- \lambda^2 = \lambda$, skąd $\lambda = -1$. Wstawiając tę wartość w równania 4. i 5., otrzymujemy

$$e_1 e_3 = - e_2, \quad e_3 e_1 = e_2$$
$$e_2 e_3 = e_1, \quad e_3 e_2 = - e_1$$

Ostatecznie więc mamy następujący szereg równań, charakteryzujących jednostki zasadnicze kwaternionów:

Hosted by Google

$$
6.\quad
\begin{gathered}
e_1 e_1 = -1, \quad e_2 e_2 = -1, \quad e_3 e_3 = -1, \\
e_1 e_2 = e_3, \quad e_2 e_1 = -e_3, \\
e_2 e_3 = e_1, \quad e_3 e_2 = -e_1, \\
e_3 e_1 = e_2, \quad e_1 e_3 = -e_2, \\
e_1 e_2 e_3 = e_2 e_3 e_1 = e_3 e_1 e_2 = -1. \\
e_1 e_3 e_2 = e_2 e_1 e_3 = e_3 e_2 e_1 = 1.
\end{gathered}
$$

Dodawanie i odejmowanie kwaternionów odbywa się według ogólnych prawideł tych działań dla liczb zespolonych wyższych [art. 22.]. Mnożenie wykonywamy, uwzględniając prawo rozdzielności oraz równania 6. Na téj podstawie iloczyn dwóch liczb

$$
\begin{aligned}
a &= \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \\
b &= \beta_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3,
\end{aligned}
$$

przyjmuje postać następującą

$$
7.\quad
\begin{aligned}
ab = &(\alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3) \\
&+(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_1 \\
&+(\alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1)e_2 \\
&+(\alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0)e_3.
\end{aligned}
$$

Widzimy więc, że iloczyn dwóch kwaternionów jest kwaternionem téj saméj postaci, jakiéj są czynniki. Własność ta stosuje się do jakiéjkolwiek skończonéj liczby czynników.

Mnożenie kwaternionów nie jest przemienném. W saméj rzeczy, tworząc, według powyższego prawidła, iloczyn ba, otrzymamy

$$
8.\quad
\begin{aligned}
ba = &(\beta_0\alpha_0 - \beta_1\alpha_1 - \beta_2\alpha_2 - \beta_3\alpha_3) \\
&+(\beta_0\alpha_1 + \beta_1\alpha_0 + \beta_2\alpha_3 - \beta_3\alpha_2)e_1 \\
&+(\beta_0\alpha_2 - \beta_1\alpha_3 + \beta_2\alpha_0 + \beta_3\alpha_1)e_2 \\
&+(\beta_0\alpha_3 + \beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1 + \beta_3\alpha_0)e_3.
\end{aligned}
$$

Dwa iloczyny ab i ba nie są zatém wogóle równe.

Celem prostszego przedstawiania wyników działań nad kwaternionami 1. zastosujemy niektóre pojęcia i odpowiadające im oznaczenia, wprowadzone przez Hamiltona. Część rzeczywistą α_0 kwaternionu a nazwijmy *skalarem* i oznaczmy przez Sa, część zaś nierzeczywistą $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ nazwijmy *wektorem* i oznaczmy przez Va; będzie tedy:

Hosted by Google

9. $$a = Sa + Va.$$

Z tych określeń wynika, że skalar sumy równa się sumie skalarów, wektor sumy sumie wektorów; podobnież, skalar różnicy równa się różnicy skalarów, wektor różnicy jest równy różnicy wektorów.

Z wzorów 7. i 8. wypływa, że skalar $S(ab)$ iloczynu dwóch kwaternionów a i b równa się

$$\alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3,$$

wektor zaś iloczynu wyraża się za pomocą wzoru

$$\begin{aligned} V(ab) = & (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_1 \\ & + (\alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1)e_2 \\ & + (\alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0)e_3. \end{aligned}$$

Możemy też, korzystając ze skróconej formy 9., przedstawić iloczyn dwóch kwaternionów a i b pod postacią

$$(Sa + Va)(Sb + Vb) = Sa\,.\,Sb + Sb.Va + Sa\,.\,Vb + Va.Vb;$$

iloczyn zaś ba będzie miał postać

$$(Sb + Vb)(Sa + Va) = Sa\,.\,Sb + Sb.Va + Sa.Vb + Vb\,.\,Va.$$

Oba iloczyny różnią się tylko czwartemi wyrazami, gdyż według wzorów 7. i 8., zakładając w nich $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, otrzymujemy:

10. $$\begin{aligned} Va\,.\,Vb = & -(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) \\ & + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)e_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3 \\ Vb\,.\,Va = & -(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) \\ & -(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_1 - (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)e_2 - (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3. \end{aligned}$$

Te wzory pokazują, że skalary iloczynów $Va.Vb$ i $b.Va$ są równe, ich wektory są znaków przeciwnych; mamy tedy

11. $$\begin{aligned} S(Va.Vb) &= S(Vb\,.\,Va) \\ V(Va\,.\,Vb) &= -V(Vb\,.\,Va) \end{aligned}$$

skutkiem czego iloczyny ab i ba przyjmują postać:

12. $$\begin{aligned} ab &= Sa.Sb + Sb.Va + Sa.Vb + S(Va.Vb) + V(Va.Vb) \\ ba &= Sa.Sb + Sb.Va + Sa.Vb + S(Va.Vb) - V(Va.Vb). \end{aligned}$$

skąd

13. $$ab - ba = 2\,V(Va\,.\,Vb).$$

Zakładając $a = b$, otrzymujemy $ab = ba = a^2$, $V(Va\,Vb) = 0$, $S(Va.Vb) = (Va)^2$, a zatém

14. $$a^2 = (Sa)^2 + 2\,Sa\,Va + (Va)^2,$$

skąd

$$S.a^2 = (Sa)^2 + (Va)^2$$
$$V.a^2 = 2\,Sa\,.\,Va.$$

Z równań zaś 10., gdy w nich założymy $a = b$, znajdziemy

15. $$(Va)^2 = -(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2)$$

Potęga trzecia kwaternionu a będzie miała następujące wyrażenie

$$a^3 = (Sa)^3 + 3(Sa)^2.Va + 3\,Sa.(Va)^2 + (Va)^3,$$

przyczém, jak łatwo okazać, zachodzi związek

$$a^3 = (3\,a_0{}^2 - a_1{}^2 - a_2{}^2 - a_3{}^2)\,a - 2\,a_0(a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2) = 0,$$

z którego wypływa, że kwaternion a czyni zadość następującemu równaniu stopnia trzeciego :

$$a^3 - (3\,a_1{}^2 - a_1{}^2 - a_2{}^2 - a_3{}^2)a + 2\,a_0(a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2) = 0$$

Dwa kwaterniony $Sa + Va$ i $Sa - Va$, różniące się znakiem części wektorowéj, nazywają się wzajemnie *sprzężonemi*; kwaternion sprzężony z kwaternionem a oznacza H a m i l t o n przez Ka.

Z określenia tego otrzymujemy bezpośrednio

$$a + Ka = 2\,Sa$$
$$a - Ka = 2\,Va$$
$$a\,.\,Ka = (Sa + Va)(Sa - Va) = (Sa)^2 - (Va)^2,$$

a przy uwzględnieniu wzoru 15.:

$$a\,.\,Ka = a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2.$$

Wyrażenie na stronie drugiéj téj równości nazywa się *normą* kwaternionu i oznacza się przez $N(a)$, będzie zatém

16. $$a\,.\,Ka = N(a) = a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2.$$

Jeżeli w wyrażeniu 12. iloczynu ab zmienimy znak części wektorowéj, znajdziemy

$$K(ab) = Sa.Sb - Sb.Va - Sa.Vb + S(Va.Vb) - V(Va.Vb).$$

Hosted by Google

Dwa ostatnie wyrazy, na podstawie równań 11., można zastąpić jednym $Vb\,.\,Va$, będzie zatém

$$K(ab) = Sa.Sb - Sb.Va - Sa.Vb + Vb\,.\,Va.$$

Z drugiéj strony

$$Kb\,.\,Ka = (Sb - Vb)(Sa - Va)$$
$$= Sb.Sa - Vb.Sa - Sa.Vb + Vb\,.\,Va,$$

dochodzimy więc do związku

17. $$Kb\,.\,Ka = K(ab).$$

z którego, kładąc $b = a$, otrzymujemy

$$(Ka)^2 = K\,.\,a^2.$$

Mnożąc obie strony równania 17. przez b i zważając, że

$$b\,.\,Kb = N(b),$$

mieć będziemy

$$N(b)\,.\,Ka = b\,.\,K(ab),$$

a przez pomnożenie obu stron przez a, znajdujem y

$$N(b)\,.\,a\,.\,Ka = ab\,.\,K(ab)$$

lub

$$N(a)\,N(b) = N(ab).$$

Wzór ten wyraża, że norma iloczynu dwóch czynników równa się iloczynowi norm tychże czynników.

Stosując do tego twierdzenia wzory 7. i 16. otrzymujemy tożsamość

$$(\alpha_0{}^2 + \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \alpha_3{}^2)\ (\beta_0{}^2 + \beta_1{}^2 + \beta_2{}^2 + \beta_3{}^2)$$
$$= (\alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3)^2$$
$$+ (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2$$
$$+ (\alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1)^2$$
$$+ (\alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0)^2$$

pozwalającą nam przekształcić iloczyn dwóch liczb, z których każda jest sumą czterech kwadratów, na sumę czterech kwadratów. Wzór ten zawdzięczamy Eulerowi.

Hosted by Google

Z określenia normy wynika że wszystkie kwaterniony

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

w których odpowiednie współczynniki mają wartości bezwzględne, równe wartościom bezwzględnym współczynników kwaternionu a, będą miały normy równe. Jeżeli wyobrazimy sobie, że α_0 jest stałe i że zmieniamy tylko znaki współczynników pozostałych, otrzymamy 8 kwaternionów:

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,\\
&\alpha_0 - \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,\\
&\alpha_0 - \alpha_1 e_2 - \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,\\
&\alpha_0 - \alpha_1 e_1 - \alpha_1 e_2 - \alpha_3 e_3,\\
&\alpha_0 + \alpha_1 e_1 - \alpha_2 \alpha_1 + \alpha_3 e_3,\\
&\alpha_0 + \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3,\\
&\alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3,\\
&\alpha_0 - \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_3 - \alpha_3 e_3,
\end{aligned}$$

mających normy równe, a gdy zmienimy jeszcze znak przy α_0, to takich kwaternionów będzie szesnaście. Ale wymienione kwaterniony nie wyczerpują jeszcze mnogości kwaternionów, mających normy równe, albowiem jest rzeczą widoczną, że dojdziemy do téj saméj normy $\alpha_0 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$, skoro przemienimy wszystkiemi możliwemi sposobami współczynniki przy jednostkach; ponieważ zaś tych przemian może być $1.2.3.4 = 64$, a zatém będziemy mieli $16.64 = 1024$ kwaterniony, mające normy równe [od zera różne].

Wartość bezwzględną pierwiastka kwadratowego z normy nazywa Hamilton *tensorem* kwaternionu, oznacza go przez Ta i kwaternion a przedstawia pod postacią

$$a = Ta \,.\, Ua.$$

Czynnik Ua nosi nazwę wersora. Własnościami kwaternionów, wynikającemi z téj postaci, nie będziemy się tu zajmowali.

Iloraz dwóch kwaternionów

$$\frac{a}{b}$$

określamy jako kwaternion x, dla którego zachodzi równość

Hosted by Google

$$x \,.\, b = a.$$

Dla oznaczenia x pomnóżmy obie strony przez $K b$:

$$x \,.\, b \,.\, K b = a \,.\, K b$$

$$x N(b) = a \,.\, K b$$

stąd

18. $$x = \frac{1}{N(b)} a . K b$$

a więc iloraz jest oznaczony, gdy

$$N(b) = \beta_0{}^2 + \beta_1{}^2 + \beta_2{}^2 + \beta_3{}^2$$

nie jest zerem, co spełnia się zawsze, jeżeli kwaternion nie jest zerem.

Gdybyśmy przyjęli, że współczynniki kwaternionu są liczbami zespolonemi zwyczajnemi, to norma mogła by być zerem, jakkolwiek sam kwaternion nie jest zerem. Przypadek ten wyłączamy.

Kładąc

$$x = \xi_0 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$$

i uwzględniając, że na mocy wzoru 7., jest

$$\begin{aligned} a K b &= (\alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)(\beta_0 - \beta_1 e_1 - \beta_2 e_2 - \beta_3 e_3) \\ &= (\alpha_0 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3) \\ &\quad + (\alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1 + \alpha_3 \beta_2 - \alpha_2 \beta_3) e_1 \\ &\quad + (\alpha_2 \beta_0 - \alpha_3 \beta_1 - \alpha_0 \beta_2 + \alpha_1 \beta_3) e_2 \\ &\quad + (\alpha_3 \beta_0 + \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 - \alpha_0 \beta_0) e_3, \end{aligned}$$

otrzymujemy

19. $$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{1}{N(b)}(\alpha_0 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3), \\ \xi_1 &= \frac{1}{N(b)}(\alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1 + \alpha_3 \beta_2 - \alpha_2 \beta_3), \\ \xi_2 &= \frac{1}{N(b)}(\alpha_2 \beta_0 - \alpha_3 \beta_1 - \alpha_0 \beta_2 + \alpha_1 \beta_3), \\ \xi_3 &= \frac{1}{N(b)}(\alpha_3 \beta_0 + \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 - \alpha_0 \beta_3). \end{aligned}$$

Hosted by Google

Z równania 18. znajdujemy

$$\frac{a}{b} = \frac{a\,K\,b}{N(b)},$$

a dla $a = 1$:

$$\frac{1}{b} = \frac{K\,b}{N(b)};$$

stąd zaś wynika:

$$a \,.\, \frac{1}{b} = a \,.\, \frac{Kb}{N(b)} = \frac{a}{b},$$

t. j. związek analogiczny do związku 10*b*. art. 11 w teoryi działań formalnych.

Na podstawie określenia ilorazu będzie

$$a \,.\, \frac{b}{c} = a \,.\, \frac{b\,K\,c}{N(c)} = \frac{a\,b\,K\,c}{N(c)} = \frac{a\,b}{c}.$$

Jest to związek téj saméj postaci, jak związek 4*b*. art. 11 w teoryi działań formalnych.

W podobny sposób można okazać, że dzielenie kwaternionów posiada własności, wyrażone wzorami

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{cb},$$

$$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{a\,c}{b},$$

analogicznemi z drugim i trzecim wzorem 4*b*. art. 11 w teoryi działań formalnych; że natomiast do kwaternionów, z przyczyny nieprzemienności mnożenia, nie stosują się np. następujące równania:

$$b\,\frac{a}{b} = a,\quad \frac{b\,a}{b} = a,$$

$$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{a}{b} \,.\, c$$

Hosted by Google

31. DZIAŁANIA NAD WEKTORAMI.

Prawidła rachunku nad wektorami, t. j. nad liczbami trójjednostkowemi postaci

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 ,$$

wynikają bezpośrednio z teoryi, podanéj w poprzedzającym artykule.

Niechaj będą dwa wektory

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$
$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 .$$

Suma ich

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2 + (\alpha_3 + \beta_3) e_3$$

będzie również wektorem. Dodawanie wektorów jest działaniem łącznem i przemiennem.

Różnica wektorów a i b.

$$a - b = (\alpha_1 - \beta_1) e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) e_2 + (\alpha_3 - \beta_3) e_3$$

jest również wektorem. Różnica ta jest zerem, t. j. dwa wektory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \alpha_3 = \beta_3 .$$

Iloczyn wektorów a i b, według wzorów poprzedzającego artykułu, będzie

$$\begin{aligned} ab = & - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) \\ & + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)e_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3 . \end{aligned}$$

a zatém iloczyn wektorów jest kwaternionem. Iloczyn ba wyrazi się w ten sposób:

$$\begin{aligned} ba = & - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_3\beta_3) \\ & - (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_1 - (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)e_2 - (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3 . \end{aligned}$$

Iloczyny ab i ba mają części skalarowe równe, wektorowe zaś części równe i znaków przeciwnych, są więc kwaternionami sprzężonemi, a zatém:

$$S(ab) = S(ba), \quad V(ab) = - V(ba).$$

Hosted by Google

1. $$a\,b + b\,a = 2\,S(ab)\,,$$
$$a\,b - b\,a = 2\,V(ab).$$

Mnożenie wektorów nie jest więc działaniem przemiennėm.

Kładąc $b=a$, otrzymujemy

$$a^2 = -\,(\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2)$$

Kwadrat wektora jest zatém równy normie, wziętéj ze znakiem przeciwnym.

Wyrazimy iloczyn trzech wektorów, mnożąc iloczyn ab dwóch wektorów przez wektor trzeci

$$c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3.$$

Na zasadzie prawidła mnożenia kwaternionów otrzymamy

$$\begin{aligned} abc = & -(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\gamma_1-(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\gamma_2-(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\gamma_3 \\ & +[-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)\gamma_1+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\gamma_3-(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\gamma_2]e_1 \\ & +[-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)\gamma_2+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\gamma_1+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\gamma_3]e_2 \\ & +[-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)\gamma_3+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\gamma_2-(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\gamma_1]e_3. \end{aligned}$$

Skalar iloczynu, t. j.

$$S(abc) = -\,(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\gamma_1-(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\gamma_2-(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\gamma_3,$$

możemy przedstawić pod postacią wyznacznika

$$S(abc) = -\begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Na podstawie téj formy wyznacznikowéj wnosimy, że skalar iloczynu trzech wektorów zmienia znak przy przestawieniu dwóch czynników.

Wektor iloczynu $V(abc)$ możemy przedstawić pod postacią skróconą, wychodząc z tożsamości

2. $$abc - bca = (ab+ba)\,c - b\,(ca+ac).$$

Na podstawie równań 1. mamy

$$2\,V[a\,.\,V(bc)] = a.V(bc) - V(bc)\,.\,a,$$

a dodając do tego tożsamość

Hosted by Google

$$0 = a\,.\,S(bc) - S(bc)\,.\,a,$$

otrzymujemy:

$$2V[aV(bc)] = a[S(bc)+V(bc)] - [(S(bc)+V(bc)]\,a$$

lub
$$2V[aV(bc)] = abc - bca.$$

Na podstawie tychże równań 1. jest

$$ab + ba = 2S(ab),$$
$$ca + ac = 2S(ca).$$

Kładąc przeto w równanie 2. wartości, otrzymane dla obu jego stron, znajdziemy

$$V[a\,.\,V(b\,c)] = c\,S(ab) - b\,.\,S(c\,a);$$

dodając tu do obu stron tożsamość

$$V[a\,.\,S(bc)] = a\,S(bc)$$

i zważając, że

$$V[a\,S(b\,c)] + V[a\,V(b\,c)] = V(a\,.\,bc),$$

dochodzimy do równania

$$V(a\,b\,c) = a\,S(bc) - b\,S(c\,a) + c\,S(a\,b),$$

przedstawiającego wektor iloczynu trzech czynników.

Iloraz wektorów, określony za pomocą równania

$$x\,b = a,$$

jest wogóle kwaternionem. Zakładając w równaniach 19. art. poprzedzającego:

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0,$$

otrzymujemy iloraz x pod postacią

$$x = \xi_0 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3,$$

gdzie

$$\xi_0 = \frac{1}{N(b)}(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3),$$

$$\xi_1 = \frac{1}{N(b)}(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3),$$

Hosted by Google

$$\xi_2 = \frac{1}{N(b)}(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1),$$

$$\xi_3 = \frac{1}{N(b)}(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2),$$

$$N(b) = \beta_1{}^2 + \beta_2{}^2 + \beta_3{}^2.$$

---

[1] Teorya kwaternionów jest nauką czysto angielską, która dopiero w ostatnich czasach zaczęła rozpowszechniać się na kontynencie. Opowiadanie o usiłowaniach swych utworzenia nowego rachunku umieścił Hamilton w przedmowie do dzieła: Lectures on Quaternions containing a systematic statement of a new mathematical metod etc. 1853. [Jednocześnie tym samym przedmiotem zajmowali się bracia J. T. Graves i Ch. Graves]. Największą trudność stanowiło ustanowienie własności zasadniczych mnożenia wektorów [porówn. art. 31.], przedstawianych za pomocą liczb o trzech jednostkach zasadniczych i, j, k [u nas e_1, e_2, e_3]. Hamilton mniemał zrazu, że utrzymanie przemienności mnożenia jest rzeczą konieczną; po wielu wszakże próbach przekonał się, że iloczyn i iloraz wektorów nie są już wektorami, lecz kwaternionami, i że należy odrzucić przemienność mnożenia wektorów, zachowując łączność i rozdzielność tego działania. Według teoryi, którą dajemy w tekście, fakty te są nadzwyczaj prostemi, ale Hamiltonowi, ktory dążył do nich na innéj drodze, nie mogły się one prędko ujawnić.

Drugie obszerne dzieło Hamiltona, poświęcone kwaternionom, wydane zostało w r. 1866. [po śmierci autora] p. t: Elements of Quaternions [Przekład niemiecki Glana p. t. Elemente der Quaternionen, I, 1882, II. 1884.] zawiera treść poprzedzającéj jego pracy w bardziéj systematycznym układzie. Wykład ma charakter geometryczny, rozpoczyna się od teoryi wektorów, a następnie przechodzi do kwaternionów, uważanych jako ilorazy wektorów. Algebra kwaternionów, Teorya funkcyj kwaternionów, wreszcie liczne zastosowania do rozmaitych zagadnień Geometryi i Fizyki wykazują użyteczność i elegancyą metod kwaternionowych. Uczeni angielscy z upodobaniem stosują też tę metodę do badań fizykalnych; Clerk-Maxwell używa jéj w znakomitym swym Traktacie o elektryczności i magnetyzmie. Elementarną teoryą kwaternionów ogłosił Tait uczeń Hamiltona: An elementary treatise on quaternions [drugie wydanie 1873.]. Kelland i tenże Tait napisali Introduction to quaternions with numerous examples, 1873. We Francyi Allegret [Essai sur le calcul des quaternions, 1862.], Hoüel [Théorie élémentaire des quantités complexes. IV-me Partie, Éléments de la théorie des quaternions, 1873.] i Laisant [Introduction à la méthode des quaternions, 1881.] przeszczepili naukę angielską na grunt francuski. W Niemczech Hankel, jeden z pierwszych, uprzystępnił ją w treściwém, niezależnem od

Hosted by Google

metod geometrycznych przedstawieniu, z którego po części korzystamy i w naszym wykładzie. W języku polskim mamy pracę K. Hertza p. t. Pierwsze zasady kwaternionów Hamiltona, 1887.

Skupienie $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, w którém $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ są liczbami rzeczywistemi, określamy jako liczbę, podlegającą następującym prawom: [Porówn. Peano, Intégration par series des équations différentielles linéaires *Mathematische Annalen*, XXXII, 1888, str. 451 i dalsze, a także dzieło Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann etc., 1888.]:

Równość dwóch skupień

$$a = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n], \quad b = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n],$$

gdzie α i β są liczbami rzeczywistemi, określamy za pomocą równań

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n;$$

sumę $a + b$ za pomocą równania

$$a+b = [\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n];$$

iloczyn λa, gdzie λ jest liczbą rzeczywistą, za pomocą wzoru

$$\lambda a = [\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n];$$

różnicę za pomocą równania

$$a - b = a + (-1)\, b.$$

Zerem jest skupienie, dla którego

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0.$$

Liczba $\lambda a + \mu b + \ldots$ gdzie $\lambda, \mu \ldots$ są liczbami rzeczywistemi, jest oczywiście liczbą, podlegającą powyższym określeniom działań.

Jeżeli położymy

$$e_1 = [1, 0, 0, \ldots, 0], \; e_2 = [0, 1, 0, \ldots, 0], \ldots, e_n = [0, 0, \ldots, 0, 1],$$

otrzymamy skupienie a pod postacią

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

to jest pod postacią liczby zespolonéj wyższéj o n jednostkach zasadniczych.

Teorya ta obejmuje w sobie podane w art 22. teorye Hamiltona i Lercha.

[2] Pierwszą pobudkę, do badań wspomnionych w tekście, dały Grassmannowi spostrzeżenia nad stosowaniem liczb ujemnych w Geometryi, jak to czytamy w przedmowie do dzieła z r. 1844. Podobne pomysły podjęli wcześniéj jeszcze Möbius w rachunku barycentrycznym [1827.], i Bellavitis w teoryi ekwipolencyj [1839], ale najpłodniéj myśl ta rozwinęła się w umyśle Grassmanna. Twierdzenie, że gdy A, B, C oznaczają punkty na prostéj, jest zawsze $AB + BC = AC$, bez względu na to, czy punkt C leży między punktami A i B, czy zewnątrz ich, rozszerzył Grass-

Hosted by Google

mann do przypadku, w którym punkty A, B, C nie leżą na prostéj, a przechodząc, od sumy do iloczynu zauważył, że nietylko prostokąt ale i równoległobok może być uważany za iloczyn odcinków, w których, oprócz długości, uwzględniamy jeszcze i kierunki. To uogólnione mnożenie pozostawało w związku z uogólnioném dodawaniem, podobnie jak mnożenie zwykłe ze zwykłém dodawaniem. Lecz zachodziła i różnica obu mnożeń, polegająca na tém, że w mnożeniu nowém porządek czynników nie był bez wpływu na znak iloczynu. Wnikając coraz głębiéj w treść tych wyników, przekonał się Grassmann, że polegają one na pewnych zasadach ogólnych, niezależnych od obrazu geometrycznego form badanych, i tym sposobem doszedł do ogólnéj nauki, którą przedstawił w dziele: Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, 1844. Dzieło to, odbiegające tak metodą jako też i formą od ówczesnych dzieł matematycznych, pozostało na razie bez wpływu, mimo że Grassmann w rozmaitych rozprawach, ogłoszonych w dzienniku *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, wykazał całą płodność i użyteczność swojéj metody. Nawet i nowe opracowanie z r. 1862. w szacie algebraicznéj na razie pozostało prawie niepostrzeżoném. Dopiero Hankel w pracy swéj Ueber complexe Zahlensysteme, 1867. wykazał doniosłość badań Grassmanna, i od téj chwili pomysły jego zaczęły sobie zdobywać uznanie. Schlegel, Preyer, Noth, Schendel, Caspary, Peano i inni w wielu kierunkach wykazują ważność i użyteczność metod nauki Grassmannowskiéj. Sam Grassmann udowodnił [Der Ort der Hamiltonschen Quaternionen in der Ausdehnungslehre, *Mathematische Annalen*, XII. 1877. str. 375 — 386.], że rachunek kwaternionów stanowi tylko szczególny przypadek jego metody ogólnéj. [Mówimy o tém w artykule 30.].

[3] H. Scheffler ogłosił swoje pomysły w pracach: Ueber das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie etc. 1846. i Der Situationscalcul etc. 1851. Na takiéjże podstawie oparta jest metoda Żmurki, którą rozwinął w dziele: Wykład matematyki na podstawie ilości o dowolnych kierunkach. [Porówn. P. Dziwiński, Rys działalności naukowéj i nauczycielskiéj Wawrzyńca Żmurki, *Prace matematyczno-fizyczne*, II, 1890, str. 433—453.].

[4] Hankel l. c. str. 106 — 107. Dowód Hankela podajemy niżéj w przypisie 17-ym.

[5] Weierstrass. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. [*Göttinger Nachrichten*, 1884. str. str. 395—419.].

[6] Dedekind. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen [*Göttinger Nachrichten*, 1885. str, 142—159.].

[7] Kronecker. Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme [*Mittheilungen der Berliner Akademie*, 1888. str. 249—250]. Porówn. także tego autora Sur les unités complexes [*Comptes Rendus*, XCVI, XCIX, 1883. 1884.].

[8] Dedekind, l. c. str. 156.

Hosted by Google

[9] Lipschitz, Untersuchungen über die Summen von Quadraten, 1886.

[10] Schur, Zur Theorie der aus n Haupteinheinten gebildeten complexen Zahlen [*Mathematische Annalen*, XXXIII, 1889., str. 49—60.]

[11] Study, Complexe Zahlen und Transformationsgruppen [*Berichte der k. sächsischen Gesellschaft d. Wiss.* 1889. str. 177—228].

[12] Scheffers, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen, tamże, 1889. str. 290—307 oraz, Ueber die Berechnung der Zahlensysteme, tamże, 1889. str. 400—457.

[13] Grassmann, Die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre [*Mathematische Annalen*, VII., 1874. str. 538—548].

[14] O tych i jeszcze ogólniejszych liczbach całkowitych mówić będziemy w części II. niniejszego tomu.

[15] Rachunek Dühringa [Neue Grundmittel, i t. d.] polega na rozkładzie równań, wtedy mianowicie, gdy wielkości, zachodzące w równaniu, nie są jednowartościowe. Jest on rozwinięciem téj saméj zasady, na któréj opieramy określenie równości liczb urojonych [art. 22. i 24. zwłaszcza twier. VIII], a którą oddawna stosowano w Algebrze w teoryi związków, zawierających wyrażenia wymierne i niewymierne. Najprostszy przypadek takiego rozkładu przedstawia już równanie $A \pm B = 0$, w którém A jest jednowartościowém, $\pm B$ — dwuwartościowém, rozkładające się na dwa równania $A = 0$, $B = 0$. Drugi przykład przedstawia równanie $A + B\sqrt{-1} = 0$, w którém A jest jednowartościowém, $B\sqrt{-1}$ zaś przedstawia również dwie wartości $+B\sqrt{-1}$ i $-B\sqrt{-1}$; z tego równania wynika również $A=0$, $B=0$. Wyrażenie $A \pm B + jC$, gdzie j jest pierwiastkiem pierwotnym trzeciego stopnia z jedności, jest złożone z wielkości jednowartościowéj, dwu i trójwartościowéj, i dla tego równanie

$$A \pm B + jC = 0,$$

sprowadza się do układu trzech równań

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

W saméj rzeczy, jeżeli oznaczymy $A \pm B$ przez S, będziemy mieli

$$S + jC = 0.$$

Równanie to przedstawia trzy następujące:

$$S + jC = 0, \quad S + j^2C = 0, \quad S + j^3C = 0,$$

których dodanie, z uwagi, że $j + j^2 + j^3 = 0$, daje:

$$S = 0,$$

czyli

$$A \pm B = 0,$$

Stąd, na zasadzie powyższego, znajdziemy

$$A = 0, \quad B = 0,$$

Hosted by Google

a uwzględniając wynik $S=0$ w równaniu $S+jC=0$, otrzymujemy też $C=0$.

Ogólnie, jeżeli j oznacza pierwiastek pierwotny równania $x^n=1$, a więc gdy $j^2, j^3, \ldots, j^{n-1}$ są pozostałemi pierwiastkami tego równania, wtedy z równania

$$A+jB+j^2C+\ldots+j^{n-1}K=0,$$

w którém $A, B, C, \ldots, K$ są liczbami rzeczywistemi bezwzględnemi, otrzymujemy

$$A=0,\ B=0,\ \ldots, K=0.$$

Jakkolwiek rozwiązywanie równań należy właściwie do części III-éj, podamy jednak dla przykładu zastosowanie powyższéj zasady do rozwiązywania równań stopnia drugiego, trzeciego i czwartego.

Pierwiastkiem równania kwadratowego czystego $x^2=a$ jest wyrażenie dwuwartościowe $\pm\sqrt{a}$; jeżeli zaś równanie kwadratowe jest mieszaném postaci

$$x^2+px+q=0,$$

to winniśmy przyjąć, że pierwiastek jego składa się z części jedno i dwuwartościowéj, t. j. nadać mu postać $k\pm l$. Wstawiając tę wartość w równanie dane i uskuteczniając rozkład, według zasady ogólnéj, otrzymujemy dwa równania

$$k^2+l^2+pk+q=0,$$
$$2kl+pl=0.$$

Z drugiego z tych równań, jeżeli l nie jest zerem, znajdziemy

$$k=-\frac{p}{2},$$

skutkiem czego pierwsze przechodzi w następujące:

$$l^2-\frac{p^2}{4}+q=0,$$

skąd

$$l=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\cdot$$

Będzie tedy

$$x=k\pm l=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Dla równania stopnia trzeciego

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

należy przyjąć, że pierwiastek składa się z części: jedno- dwu- i trójwartościowéj, że ma zatém postać

$$k+jl+j^2m.$$

gdzie j jest pierwiastkiem pierwotnym stopnia trzeciego z jedności.

Wstawiając tę wartość w równanie dane, otrzymujemy

$$K+jL+j^2M=0.$$

gdzie

$$K=k^3+6\,k\,l\,m+l^3+m^3+p\,k^2+2\,p\,l\,m+q\,k+r,$$
$$L=3\,k^2\,l+3\,k\,m^2+3\,l^2\,m+2\,p\,k\,l+p\,m^2+q\,l,$$
$$M=3\,k\,l^2+3\,k^2\,m+3\,l\,m^2+2\,p\,k\,m+p\,l^2+q\,m.$$

Równanie powyższe rozpada się na trzy następujące:

$$K=0,\quad L=0,\quad M=0.$$

Z dwóch ostatnich, znajdujemy z łatwością

$$p=-3\,k,\ q=3\,k^2-3\,l\,m,$$

skąd

$$k=-\frac{p}{3},\quad q=\frac{p^3}{3}-3\,l\,m,\quad m=\frac{1}{l}\left(\frac{p^2}{9}-\frac{q}{3}\right):$$

wstawiając zaś w pierwsze z nich wartości za k i m, dochodzimy do równania stopnia 6-go:

$$l^6+\left(\frac{2p^3}{27}-\frac{pq}{3}+r\right)l^3+\left(\frac{p^6}{729}-\frac{p^4q}{81}-\frac{p^2q^2}{27}+\frac{q^3}{27}\right)=0\,,$$

które nazywa się równaniem *rozwiązującém* i daje się sprowadzić do równania stopnia drugiego.

Metoda niniejsza daje się znacznie uprościć, jeżeli uwzględnimy znane wyrażenia współczynników w funkcyi pierwiastków równania [porówn. art. 37.]. Pokażemy to na przykładzie równania stopnia czwartego, które wyobraźmy sobie bez wyrazu, zawierającego trzecią potęgę niewiadoméj, [do takiéj postaci łatwo każde równanie stopnia czwartego sprowadzić można]

$$x^4+q\,x^2+r\,x+s=0,$$

Kładąc dla pierwiastków x_1, x_2, x_3, x_4 tego równania wyrażenia

$$x_1=jl+j^2m+j^3n,$$
$$x_2=j^2l+j^4m+j^2n,$$
$$x_3=j^3l+j^2m+jn,$$
$$x_4=j^4l+j^4m+j^4n\,,$$

gdzie j jest pierwiastkiem pierwotnym czwartego stopnia z jedności, i uwzględniając znane związki

$$q=-\tfrac{1}{2}\,(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+x_4{}^2),$$
$$r=-\tfrac{1}{3}\,(x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3+x_4{}^3),$$
$$s=-\tfrac{1}{8}\,(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+x_4{}^2)^2-\tfrac{1}{4}\,(x_1{}^4+x_2{}^4+x_3{}^4+x_4{}^4),$$

otrzymujemy według zasady rozkładu, prawie bezpośrednio

Hosted by Google

$$q = -(4\,ln + 2m^2),$$
$$r = -(4\,l^2 m + 4\,m\,n^2),$$
$$s = -(l^4 + 4\,l\,m^2\,n - 2\,l^2\,n^2 - m^4 + n^4),$$

co nas doprowadza do równania rozwiązującego

$$m^6 + \frac{q}{2}\,m^4 + \left(\frac{q^2}{16} - \frac{s}{4}\right)m^2 - \frac{r^2}{64} = 0,$$

dającego się sprowadzić do równania stopnia trzeciego.

[16] Równanie

$$a + b\,x = 0,$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeżeli współczynniki a i b mają postać

$$a = k\,a', \quad b = k\,b'.$$

gdzie k jest dzielnikiem zera, b' zaś nie. W saméj rzeczy, będzie wtedy

$$k\,(a' + b'x) = 0;$$

ponieważ zaś k jest dzielnikiem zera, można przeto oznaczyć x tak, aby było

$$a' + b'\,x = l,$$

gdzie l jest jakimkolwiek dzielnikiem zera. Podobnież, równanie algebraiczne

$$a + b\,x + \ldots + h\,x^n = 0\,,$$

posiada nieskończenie wiele rozwiązań, jeżeli współczynniki są postaci

$$a = k\,a', \quad b = k\,b', \ldots, h = k\,h',$$

gdzie k jest dzielnikiem zera. Albowiem dość oznaczyć x tak, aby było

$$a' + b'\,x + \ldots + h'\,x^m = l,$$

gdzie l jest jakimkolwiek dzielnikiem zera takim, że

$$kl = 0$$

Tę własność równań o współczynnikach, będących dzielnikami zera, można uważać, jak twierdzi Weierstrass, za uogólnienie znanéj w Algebrze własności równań, według któréj posiadają one nieskończenie wiele pierwiastków, jeżeli współczynniki ich są zerami.

[17] Hankel w następujący sposób dowodzi twierdzenia wymienionego w tekscie.

Niechaj iloczyny jednostek wyrażają się jako funkcye liniowe samych jednostek za pomocą wzorów

$$e_{\iota\varkappa} = \zeta_{\iota,\varkappa} + \sum_s \eta_{s,\iota,\varkappa}\,e_s$$
$$s, \iota, \varkappa = 1, 2, \ldots, n;$$

Hosted by Google

$\zeta_{\iota\varkappa}$ i $\eta_{s,\iota,\varkappa}$ są liczbami stałemi rzeczywistemi. Kładąc tu $\iota=1$, $\varkappa=2,3,\ldots,n$ otrzymujemy układ $n-1$ równań

$$e_1\, e_2 = \zeta_{1,2} + \sum_s \eta_{s,1,2}\, e_s$$
$$e_1\, e_3 = \zeta_{1,3} + \sum_s \eta_{s,1,3}\, e_s$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$e_1\, e_n = \zeta_{1,n} + \sum_s \eta_{s,1,n}\, e_s$$

które można przedstawić pod postacią

$$-\zeta_{1,2} - \eta_{1,1,2}\, e_1 = (\eta_{2,1,2} - e_1)\, e_2 + \eta_{3,1,2}\, e_3 + \ldots\ldots + \eta_{n,1,2}\, e_n$$
$$-\zeta_{1,3} - \eta_{1,1,3}\, e_1 = \eta_{2,1,3}\, e_2 + (\eta_{3,1,3} - e_1) e_3 + \ldots\ldots + \eta_{n,1,3}\, e_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\zeta_{1,n} - \eta_{1,1,n}\, e_1 = \eta_{2,1,n}\, e_2 + \eta_{3,1,n}\, e_3 + \ldots\ldots + (\eta_{n,1,n} - e_1) e_n$$

Z tych równań możemy otrzymać $e_2, e_3, \ldots, e_n$ w funkcyi jednostki e_1, jeżeli wyznacznik układu [por. art 26.], t. j.

$$\begin{vmatrix} \eta_{2,1,2} - e_1, & \eta_{3,1,2}, & \ldots\ldots, & \eta_{n,1,2} \\ \eta_{2,1,3}\ , & \eta_{3,1,3} - e_1, & \ldots\ldots, & \eta_{n,1,3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_{2,1,n}\ , & \eta_{3,1,n}\ , & \ldots\ldots, & \eta_{n,1,n} - e_1 \end{vmatrix}$$

nie jest tożsamościowo równy zeru; każda z tych jednostek wyraża się wtedy jako iloraz dwóch funkcyj stopnia n—1-go względem e_1, mianownikiem wspólnym wszystkich wyrażeń jest wypisany wyznacznik. Tak otrzymane wyrażenia wstawmy do równania, wyrażającego iloczyn $e_1 e_1$, a mianowicie do równania

$$e_1\, e_1 = \zeta_{11} + \eta_{1,1,1}\, e_1 + \eta_{2,1,1}\, e_2 +, \ldots, + \eta_{n,1,1}\, e_n\ ,$$

i znieśmy mianownik, to dojdziemy oczywiście do równania stopnia $n+1$-go względem e_1, w którém współczynnik przy e_1^{n+1} będzie ± 1. Niechaj tém równaniem będzie:

$$e_1^{n+1} + A_1\, e_1^{n} + A_2\, e_1^{n-1} + \ldots + A_{n+1} = 0.$$

Równanie

$$x^{n+1} + A_1\, x^n + A_2\, x^{n-1} + \ldots + A_{n+1} = 0,$$

jak wykazuje teorya równań, ma $n+1$ pierwiastków zespolonych zwyczajnych $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, które czynią zadość następującym równaniom

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{n+1} = -A_1$$
$$\xi_1\, \xi_2 + \xi_1\, \xi_3 + \ldots + \xi_n\, \xi_{n+1} = A_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_{n+1} = (-1)^{n+1} A_{n+1},$$

Hosted by Google

a zatém być musi tożsamościowo:

$$e_1^{n+1} + A_1 e^n + A_2 e^{n-1} + \dots + A_{n+1}$$
$$= e_1^{n+1} - (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1}) e_1^n + \dots + (-1)^{n+1} \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{n+1}$$

albo, jeżeli przedstawimy stronę drugą pod postacią iloczynu, winno być

$$e_1^{n+1} + A_1 e^n + A_2 e^{n-1} + \dots + A_{n+1}$$
$$= (e_1 - \xi_1)(e_2 - \xi_2) \dots (e_1 - \xi_{n+1}).$$

Ponieważ pierwsza strona ma być zerem, powinna przeto i druga być zerem. Lecz strona ta staje się zerem, gdy $e_1 = \xi_k$, $k = 1, 2, \dots, n+1$, co wyłączamy, ponieważ e_1 nie ma być liczbą zespoloną zwyczajną. Jeżeli więc e_1 ma być liczbą zespoloną wyższą, to iloczyn poprzedni musi stawać się zerem, jakkolwiek żaden z jego czynników zerem nie jest.

[18] H. A. Schwarz. Bemerkung zu der in Nr 10 dieser Nachrichten abgedruckten Mittheilung des Herrn Weierstrass, [*Göttinger Nachrichten*, 1884, str. 516 — 519, także *Gesammelte mathematische Abhandlungen* II, 1890, str. 346—349].

[19] Zasadnicze pojęcia nauki Grassmanna i jego teoryą mnożenia przedstawiamy na podstawie dzieła: Die Ausdehnungslehre vollständig und in strenger Form bearbeitet, 1862., oraz klasycznéj rozprawy Sur les différents genres de multiplication [*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, XLIX., 1855. str. 123—141].

[20] Metodę wyznaczników, któréj początki znajdujemy u Leibniza [1693.] rozwinęli i udoskonalili: Cramer, Bezout, Vandermonde, Laplace, Lagrange, Wroński, Cauchy, Jacobi, Sylvester, Cayley i wielu innych. Wroński już w rozprawie [niedrukowanéj], przedstawionéj Instytutowi francuskiemu w r. 1810, [porówn. wyżéj str. 44.], używa tak nazwanych *sum kombinatoryjnych*. W rozprawie Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange, 1812. str. 14, określa on sumę kombinatoryjną

$$\text{ש}\,[\Delta^a X_1\, \Delta^b X_2 \dots \Delta^p X_\omega]$$

gdzie $X_1, X_2, \dots X_\omega$ są funkcyami jednéj zmiennéj, jako sumę iloczynów, które otrzymujemy, tworząc wszystkie możliwe przemiany wykładników $a, b, c \dots$, umieszczając te wykładniki, tak jak tworzą przemiany, nad czynnikami iloczynu

$$\Delta X_1 . \Delta X_2 \dots \Delta X_\omega,$$

dając tak utworzonym iloczynom znak dodatni, gdy liczba waryacyj wykładników $a, b, c \dots$, uważanych w porządku alfabetycznym, jest zerem lub liczbą parzystą, znak ujemny, gdy liczba waryacyj jest nieparzystą, i wreszcie tworząc sumę wszystkich tych iloczynów. Wroński dodaje, że tworzenie tych sum kombinatoryjnych, jest zupełnie analogiczne do tworzenia takichże sum przy rozwiązywaniu równań liniowych; jest mianowicie

Hosted by Google

$$
\begin{aligned}
&\text{ש}[\Delta^a X_1] = \Delta^a X_1;\\
&\text{ש}[\Delta^a X_1.\Delta^b X_2] = \Delta^a X_1.\Delta^b X_2 - \Delta^b X_1.\Delta^a X_2;\\
&\text{ש}[\Delta^a X_1.\Delta^b X_2.\Delta^c X_3] = \Delta^a X_1.\Delta^b X_2.\Delta^c X_3 - \Delta^a X_1.\Delta^c X_2.\Delta^b X_3\\
&\qquad + \Delta^b X_1.\Delta^c X_2.\Delta^a X_3 - \Delta^b X_1.\Delta^a X_2.\Delta^c X_3\\
&\qquad + \Delta^c X_1.\Delta^a X_2.\Delta^b X_3 - \Delta^c X_1.\Delta^b X_2.\Delta^a X_3;
\end{aligned}
$$

i t. d.

W dziele Philosophie de la technie algorithmique, I. Section, 1815 nazywa on sumy kombinatoryjne funkcyami *schin*. Funkcye schin, wktórych, zamiast różnic funkcyj, występują pochodne, nazwał Muir [A Treatise on the theory of determinants, 1882] *wrońskianami* [porówn. art. 38.].

Literatura wyznaczników jest bardzo obszerną. Wykład własności i zastosowań znajdzie czytelnik szczegółowo podany w Teoryi Wyznaczników M. A. Baranieckiego, 1879; treściwe przedstawienie w pracy: Krótkie wiadomości o wyznacznikach skreślił Władysław Trzaska, przypisek do dzieła: Zasady rachunku różniczkowego i całkowego Wł. Folkierskiego, 1870. Z dzieł obcych klasycznėm jest Baltzera: Theorie und Anwendung der Determinanten. wyd. 5. 1881. Historyą tego algorytmu zawiera Muira The Theory of determinants in the historical order of its developpement, którego część I wyszła w r. 1890.

[21] Porówn. M. A. Baraniecki l. c. str. 297—301.

[22] Dla otrzymania iloczynu odniesionego wzięliśmy tu wprost iloczyn dopełnień, na téj zasadzie [Grassmann, Ausdehnungslehre, 1862, str. 60.], że jeżeli stopień n dziedziny głównéj jest nieparzysty, to dopełnieniem dopełnienia liczby zespolonéj jest równe saméj liczbie. [Gdy zaś stopień dziedziny jest parzysty, to dopełnienie dopełnienia liczby zespolonéj jest równy téj liczbie pomnożonéj przez $(-1)^q$, gdzie q jest stopniem téj liczby].

[23] Grassmann. Der Ort der Hamiltonschen Quaternionen in der Ausdehnungslehre, l. c.

Hosted by Google

ROZDZIAŁ VII.

FUNKCYE CAŁKOWITE.

32. OKREŚLENIA.

Funkcye całkowite są tém dla Algebry, czém są liczby całkowite dla Arytmetyki. Twierdzenia, któremi wyrażają się ich własności, zawierają się w teoryi funkcyj algebraicznych i zarazem w teoryi ogólnéj funkcyj, należącéj do Rachunku wyższego. Do wywodu wszakże zasadniczych własności funkcyj całkowitych wystarczają prawdy, podane w poprzedzających rozdziałach, i dlatego zajmiemy się tu zbadaniem istoty funkcyj całkowitych na podstawie elementarnéj teoryi działań, oraz przedstawieniem ich własności, potrzebnych nam w częściach następnych tej książki.

Funkcyą *całkowitą* n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy wyrażenie, złożone z wyrazów postaci:

$$c_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

gdzie $c_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n}$ jest współczynnikiem stałym, wykładniki zaś $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ przyjmują wartości całkowite i dodatnie, nie wyłączając i zera. Ogólna więc postać funkcyi całkowitéj n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum c_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

gdzie strona pierwsza wyraża ogólnie funkcyą n zmiennych. Liczbę wyrazów przyjmujemy za skończoną.

Hosted by Google

Jeżeli suma wykładników $a_1+a_2+\ldots+a_n$ przynajmniej w jednym z wyrazów o współczynniku nierównym zeru jest równa m, w pozostałych zaś wyrazach jest mniejsza od m lub równa m, wtedy funkcya całkowita nazywa się funkcyą *stopnia* m-go. Jeżeli suma wykładników w każdym wyrazie jest równa m, funkcya nazywa się *jednorodną* stopnia m-go.

Jeżeli funkcya całkowita nie zmienia się, gdy przestawiamy dwie którekolwiek zmienne, nazywamy ją *symetryczną*.

Przykłady.

$$x_1^2+x_2^2+x_2^2-3x_1x_2x_3+x_1+x_2^2-4x_3+5x_1x_4$$

jest funkcyą stopnia 3-go czterech zmiennych x_1, x_2, x_3, x_4;

$$x_1^4+x_1^2x_2^2-2x_2^4+x_1x_2x_3^2+3x_1^2x_2x_3+4x_1x_2^2x_3$$

jest funkcyą jednorodną stopnia 4-go trzech zmiennych x_1, x_2, x_3;

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-3x_1x_2x_3$$

$$x_1^m+x_2^m+\ldots+x_n^m$$

$$x_1^rx_2^s+x_1^rx_3^s+\ldots+x_{n-1}^rx_n^s+x_1^sx_2^r+\ldots x_{n-1}^sx_n^r$$

są funkcyami symetrycznemi: pierwsza stopnia 3-go trzech zmiennych x_1, x_2, x_3, druga stopnia m-go n zmiennych $x_1, x_2\ldots x_n$, trzecia stopnia $r+s$ tychże zmiennych.

Liczba wyrazów funkcyi całkowitéj jednorodnéj stopnia m-go zupełnéj, to jest takiéj funkcyi jednorodnéj tego stopnia, w któréj nie brak żadnego wyrazu, wynosi, oczywiście, tyle, ile można utworzyć kombinacyj z powtórzeniem z n elementów, wziętych po m, jest zatém równa

$$\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots\ldots m}$$

Funkcyą stopnia m-go niejednorodną możemy wyobrazić sobie, jako złożoną z funkcyi jednorodnéj stopnia m-go, funkcyi jednorodnéj stopnia $(m-1)$-go, stopnia $(m-2)$-go ..., z funkcyi stopnia 1-go, wreszcie z wyrazu stałego; liczba zatém wyrazów zupełnéj takiéj funkcyi będzie

$$\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots m}+\frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2\ldots(m-1)}+\ldots+\frac{n(n+1)}{1.2}+\frac{n}{1}+1$$

Z elementarnéj teoryi kombinacyj wiadomo, że wyrażenie to jest

Hosted by Google

równe liczbie kombinacyj bez powtórzenia z $n+m$ elementów, wziętych po m; otrzymamy tedy na liczbę wyrazów funkcyi niejednorodnéj zupełnéj stopnia m-go wyrażenie

$$\frac{(n+1)(n+2)\,.\,.\,.\,(n+m)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,m}$$

Ponieważ ta liczba, jak widzimy, jest zarazem liczbą wyrazów funkcyi jednorodnéj stopnia m-go, zależnéj od $n+1$ zmiennych, przeto funkcya niejednorodna zupełna stopnia m-go, zależna od n zmiennych, zawiera tyle wyrazów, ile ich ma funkcya jednorodna zupełna stopnia m-go, zależna od $n+1$ zmiennych. Do tego samego wyniku można dojść bezpośrednio, zważywszy, że funkcya jednorodna stopnia m-go, zależna od n zmiennych

$$x_1,\ x_2,\ .\,.\,.\ x_n,\ x_{n+1}$$

zamienia się na funkcyą niejednorodną zupełną, zależną od n zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_n$, gdy w pierwszéj funkcyi uczynimy jednę ze zmiennych, np. zmienną x_{n+1} równą 1.

Zważywszy dalej, że liczba, wyżéj otrzymana, może być przedstawiona pod postacią

$$\frac{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n\,.\,(n+1)\,(n+2)\,.\,.\,.\,(n+m)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n \quad 1\ .\ 2\,.\,.\,.\,.\,.\,m}$$

wnosimy, że liczba wyrazów funkcyi niejednorodnéj stopnia m-go zupełnéj, zależnéj od n zmiennych, jest równą liczbie wyrazów funkcyi niejednorodnéj stopnia n-go zupełnéj, zależnéj od m zmiennych.

Przykład funkcyi jednorodnéj stopnia m-go w któréj nie brak żadnego wyrazu, stanowi rozwinięcie m-éj potęgi wielomianu

$$x_1+x_2+\ldots+x_n,$$

wyrażające się w sposób następujący:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^m=\sum\frac{m!}{a_1!\,a_2!\ldots a_n!}x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}$$
$$m!=1,2,\ldots m;\quad a_\lambda!=1,2,\ldots a_\lambda;\quad [\lambda=1,2,\ldots n],$$

gdzie suma Σ rozciąga się na wszystkie wartości całkowite i dodatnie, nie wyłączając i zera, liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, czyniące zadość równości

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=m.$$

Hosted by Google

Wzór ten stanowi uogólnienie tak nazwanego *dwumianu* Newtona:

$$(x_1+x_2)^m=\sum_{k=0}^{k=m}\frac{m!}{(m-k)!\,k!}\,x_1^{m-k}x_2^k.$$

Według określenia, w każdym wyrazie funkcyi jednorodnéj

$$\sum c_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n}x_1^{\alpha_1},\,x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n},$$

suma wykładników $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ jest równa m; jeżeli przeto zamiast $x_1, x_2 \ldots x_n$ podstawimy $\varrho x_1, \varrho x_2 \ldots \varrho x_n$, będzie

$$\sum c_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n}x_1^{\alpha_1}x^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}=\varrho^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\sum c_{\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$$
$$=\varrho^m\sum c_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n}x_1^{\alpha_1}x^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

co można napisać w skróceniu tak:

$$F(\varrho x_1, \varrho x_2 \ldots \varrho x_n)=\varrho^m F(x_1, x_2 \ldots x_n).$$

Wzór ten wyraża własność zasadniczą funkcyj jednorodnych.

Jeżeli w jakiéjkolwiek funkcyi całkowitéj

$$\sum c_{\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_n}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

współczynniki są liczbami rzeczywistemi, zmiennym zaś nadajemy wartości rzeczywiste, to i sama funkcya przyjmuje wartości rzeczywiste. W szczególności, jeżeli współczynniki są całkowite, a zmienne przyjmują wartości całkowite, funkcya przedstawia liczby całkowite.

Jeżeli przy współczynnikach rzeczywistych zmiennym nadajemy wartości zespolone zwyczajne, to funkcya przyjmuje wogóle również wartości zespolone zwyczajne. W szczególności, jeżeli w funkcyi jednéj zmiennéj

$$F(x)=c_0x^m+c_1x^{m-1}+\ldots+c_{m-1}x+c_m,$$

o współczynnikach rzeczywistych, za zmienną x podstawimy raz $y+zi$, drugi raz $y-zi$, wtedy, jak łatwo sprawdzić, i funkcya $F(x)$ stanie się w pierwszym razie $\Phi(y,z)+\Psi(y,z)i$, w drugim $\Phi(y,z)-\Psi(y,z)i$, gdzie Φ i Ψ są funkcyami stopnia m-go dwóch zmiennych y i z. Jeżeli więc funkcya $F(x)$ staje się zerem dla pewnéj wartości $x=y+zi$, to być musi jednocześnie

Hosted by Google

$$\Phi(y, z) = 0, \quad \Psi(y, z) = 0,$$

skąd wynika, że funkcya $F(x)$ musi stawać się zerem i dla wartości sprzężonéj $x = y - zi$.

Jeżeli w funkcyi całkowitéj zmienne przyjmują wartości zespolone wyższe, to wartości funkcyi całkowitéj zależą od założeń, jakie przyjmujemy dla działań nad liczbami zespolonemi. Przy założeniach, jakie służą za podstawę teoryi W e i e r s t r a s s a [art. 22], funkcya całkowita liczb zespolonych przyjmuje wogóle wartości, należące do téj saméj dziedziny, do jakiéj należą zmienne.

Funkcya całkowita n zmiennych, przyjmujących wartości rzeczywiste, może być przedstawiona jako funkcya jednéj liczby n-wymiarowéj. W saméj rzeczy, mając funkcyą $F(x_1\, x_2 \ldots x_n)$, połóżmy

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n ,$$

gdzie $e_1, e_2, \ldots e_n$ stanowią układ normalny [porówn. art. 28.]; będzie tedy, na podstawie prawideł mnożenia wewnętrznego:

$$(x e_1) = x_1, (x e_2) = x_2 \ldots (x e_n) = x_n,$$

a więc

$$F(x_1, x_2 \ldots x_n) = F\big((xe_1), (xe_2) \ldots (xe_n)\big).$$

Przekształcenie to, wskazane przez G r a s s m a n n a[1], może być zastosowane do funkcyj nietylko całkowitych ale i do jakichkolwiek. Jeżeli jednostki $e_1, e_2, \ldots e_n$ zastąpimy ich dopełnieniami [art. 27.], które oznaczmy dla krótkości przez $r_1, r_2, \ldots r_n$, wtedy mnożenie wewnętrzne na stronie drugiéj powyższéj równości możemy zastąpić mnożeniem zewnętrzném i napisać

$$F(x_1, x_2 \ldots x_n) = F\big([xr_1], [xr_2] \ldots [xr_n]\big).$$

Jeżeli w szczególności funkcya F jest funkcyą całkowitą jednorodną stopnia m-go, to w każdym wyrazie liczba zespolona x występuje m razy jako czynnik.

Wyobraźmy sobie, że we wszystkich wyrazach rozwinięcia strony drugiéj usuwamy liczbę x z połączeń $[x r_i]$, otrzymamy wtedy wyrażenie, w którém miejsca, zajęte poprzednio przez liczbę x, są pustemi. Oznaczmy to wyrażenie dla skrócenia przez a, wyrażenie tedy funkcyi $F\big([x r_2], [x r_2], \ldots [x r_n]\big)$ stanie się nadzwyczaj prostém, bo przybierze postać

Hosted by Google

$$a x^m,$$

która ma właśnie oznaczać, że w wyrażenia a z pustemi miejscami ["Lückenausdruck„, jak się wyraża Grassmann] w każdém z tych miejsc umieszczamy zmienną x.

33. TWIERDZENIE ZASADNICZE.

"Jeżeli dwie funkcye całkowite zmiennych $x_1, x_2, \dots x_n$ są tożsamościowo równe, wówczas współczynniki odpowiednich wyrazów są równe„.

Niechaj będą dwie funkcye całkowite tożsamościowo równe:

$$F(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma\, c^{(1)}_{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n}\, x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

$$F(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma\, c^{(2)}_{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n}\, x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n};$$

wyrazami ich odpowiedniemi nazywamy dwa wyrazy, w których wykładniki przy każdéj ze zmiennych są odpowiednio równe[2].

Uporządkujmy obie funkcye dane według potęg jednéj ze zmiennych np. zmiennéj x_1, względem któréj niechaj funkcye będą stopnia m-go; przyjmą one tedy postać

$$F_1 = \Sigma f_k^{(1)}(x_2, x_3 \dots x_n)\, x_1^k, \quad F_2 = \Sigma f_k^{(2)}(x_2, x_3 \dots x_n) x_1^k,$$

gdzie $f_k^{(1)} f_k^{(2)}$, są funkcyami, zależnemi tylko od pozostałych zmiennych $x_2, x_3, \dots x_n$. Ponieważ funkcye F_1 i F_2 są tożsamościowo równe, różnica zatém $F_1 - F_2$ dla każdéj wartości zmiennéj x_1 [przy danym układzie wartości pozostałych zmiennych $x_2, x_3 \dots x_n$] jest tożsamościowo zerem; a więc

$$\Sigma (f_k^{(1)} - f_k^{(2)})\, x_1^k = 0$$

Jeżeli za x_1 podstawimy tu kolejno m liczb dowolnych ale różnych $\alpha, \beta, \dots \varkappa$, otrzymamy następujący układ równań:

$$(f_0^{(1)} - f_0^{(2)}) + (f_1^{(1)} - f_1^{(2)})\alpha + (f_2^{(1)} - f_2^{(2)})\alpha^2 + \dots + (f_m^{(1)} - f_m^{(2)})\alpha^m = 0$$

$$(f_0^{(1)} - f_0^{(2)}) + (f_1^{(1)} - f_1^{(2)})\beta + (f_2^{(1)} - f_2^{(2)})\beta^2 + \dots + (f_m^{(1)} - f_m^{(2)})\beta^m = 0$$

. . . .

. . . .

$$(f_0^{(1)} - f_0^{(2)}) + (f_1^{(1)} - f_1^{(2)})\varkappa + (f_2^{(1)} - f_2^{(2)})\varkappa^2 + \dots + (f_m^{(1)} - f_m^{(2)})\varkappa^m = 0$$

Hosted by Google

Jako układ równań względem różnic

$$f_0^{(1)}-f_0^{(2)},\ f_1^{(1)}-f_1^{(2)},\ \ldots,f_m^{(1)}-f_m^{(2)},$$

jest to układ jednorodny i liniowy; ponieważ zaś wyznacznik tego układu, t. j.

$$\begin{vmatrix} 1, \alpha, \alpha^2 \ldots \alpha^m \\ 1, \beta, \beta^2 \ldots \beta^m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1, \varkappa, \varkappa^2 \ldots \varkappa^m \end{vmatrix}$$

jest różny od zera, gdy $\alpha, \beta, \ldots \varkappa$ są liczbami różnemi[3], co było wyżéj zastrzeżone, na podstawie więc znanego twierdzenia [art. 26.] wnosimy, że musi być koniecznie

$$f_0^{(1)}-f_0^{(2)}=0,\quad f_1^{(1)}-f_1^{(2)}=0\ \ldots\ f_m^{(1)}-f_m^{(2)}=0.$$

skąd wynika następujący układ funkcyj tożsamościowo równych, zależnych od zmiennych $x_2, x_3, \ldots x_n$;

$$f_0^{(1)}=f_0^{(2)},\quad f_1^{(2)}=f_1^{(2)}\ \ldots\ f_m^{(1)}=f_m^{(2)}.$$

Jeżeli do dwóch funkcyj każdego z tych układów zastosujemy metodę, użytą przy funkcyach F_1 i F_2, dojdziemy do równań, wyrażających tożsamość funkcyj, zależnych od $n-2$ zmiennych $x_3, x_4, \ldots x_n$ Postępując kolejno tąż drogą, dojdziemy wreszcie do równań

$$c^{(1)}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n}=c^{(2)}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n}$$

co było do okazania.

Z twierdzenia powyższego wyprowadzić można wiele ważnych wniosków, z których przytoczymy następujące:

I. Jeżeli funkcya całkowita jest tożsamościowo zerem, to jéj współczynniki są zerami.

II. Jeżeli dwie funkcye całkowite F_1 i F_2 stopnia m-go zmiennéj x są równemi dla $m+1$ różnych wartości téj zmiennéj, to funkcye te są tożsamościowo równe.

III. Jeżeli funkcya całkowita stopnia m-go zmiennéj x staje się zerem dla $m+1$ różnych wartości téj zmiennéj, to jest tożsamościowo równą zeru.

Hosted by Google

34. ILORAZ FUNKCYJ CAŁKOWITYCH.

Niechaj będą dwie funkcye całkowite F i f stopnia m-go i n-go, [m nie mniejsze od n], a mianowicie:

$$F = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$
$$f = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n.$$

Oznaczmy dwie inne funkcye całkowite Q i R, jednę stopnia $(m-n)$-go, drugą stopnia $(n-1)$-go:

$$Q = c_0 x^{m-n} + c_1 x^{m-n-1} + \ldots + c_{m-n-1} x + c_{m-n}$$
$$R = d_0 x^{n-1} + d_1 x^{n-2} + \ldots + d_{n-2} x + d_{n-1},$$

tak aby zachodziła tożsamość

$$F = f\,Q + R.$$

Pomnóżmy funkcyą f przez funkcyą Q i dodajmy do iloczynu funkcyą R, następnie porównajmy współczynniki otrzymanéj funkcyi ze współczynnikami funkcyi F. Na podstawie twierdzenia w art. poprzedzającym podanego, otrzymany układ $m+1$ równań

$$1.\quad \begin{array}{lr}
b_0 c_0 & = a_0, \\
b_1 c_0 + b_0 c_1 & = a_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
b_{m-n} c_0 + b_{m-n-1} c_1 + \ldots + b_0 c_{m-n} & = a_n, \\
b_{m-n+1} c_0 + b_{m-n} c_1 + \ldots + b_1 c_{m-n} + d_0 & = a_{n+1} \\
b_{m-n+2} c_0 + b_{m-n-1} c_1 + \ldots + b_2 c_{m-n} + d_1 & = a_{n+2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
b_m c_0 + b_{m-1} c_1 + \ldots + b_n c_{m-n} + d_{n-1} & = a_m,
\end{array}$$

w których dla symetryi wprowadzono współczynniki $b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots b_m$, równe zeru. Z równań 1. możemy wyznaczyć [porówn. art. 26.] $m+1$ współczynników

$$c_0, c_1 \ldots c_{m-n}, d_0, d_1 \ldots d_{n-1},$$

a więc tém samém funkcye Q i R, z których pierwsza nazywa się *ilorazem* funkcyj F i f, druga *resztą* z podzielenia funkcyi F przez przez funkcyą f.

Do wyznaczenia $m-n+1$ współczynników ilorazu wystarcza

Hosted by Google

$m-n+1$ pierwszych równań powyższego układu, a mianowicie dla wyznaczenia współczynnika c_r $[r \leqq m-n]$ dość uwzględnić tylko r pierwszych równań. W samej rzeczy, wyznacznik układu r pierwszych równań jest:

$$\begin{vmatrix} b_0, & 0 & ,0 & ,\dots & 0 \\ b_1, & b_0 & ,0 & ,\dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_r, & b_{r-1}, & b_{r-2}, & \dots & b_0 \end{vmatrix} = b_0^{r+1}$$

współczynnik zaś c_r przyjmuje postać wyznacznika

2. $$c_r = \frac{(-1)^r}{b_0^{r+1}} \begin{vmatrix} a_0, & b_0, & 0 & ,\dots & 0 \\ a_1, & b_1, & b_0 & ,\dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_r, & b_r, & b_{r-1} & ,\dots & b_1 \end{vmatrix}$$

Celem wyznaczenia współczynnika d_r reszty $[r=0,1,2,\dots n-1]$ uważmy układ, złożony z $m-n+1$ pierwszych równań 1. oraz z jednego z równań, które po nich następują, mianowicie równania

$$b_{m-n+r+1}c_0 + b_{m-n+r}c_1 + \dots + b_{r-1}c_{m-n} + d_r = a_{m-n+r+1};$$

będziemy mieli tym sposobem układ $m-n+2$ równań, z którego rugując $m-n+1$ liczb $c_0, c_1, \dots c_{m-n}$, otrzymujemy jedno równanie

$$\begin{vmatrix} b_0 & ,0 & ,\dots, 0 & ,a_0 \\ b_1 & ,b_0 & ,\dots, 0 & ,a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m-n} & ,b_{m-n-1}, & \dots, b_0 & ,a_n \\ b_{m-n+r+1}, & b_{m-n+r}, & \dots, b_{r+1}, & a_{m-n+r+1}-d_r \end{vmatrix} = 0.$$

Rozkład tego wyznacznika na dwa inne daje:

$$\begin{vmatrix} b_0 & ,0 & \dots 0 & ,0 \\ b_1 & ,b_0 & \dots 0 & ,0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m-n} & b_{m-n-1}\dots b_0 & & ,0 \\ b_{m-n+r+1}, & b_{m-n+r}\dots & b_{r+1}, & d_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_0, & ,0 & \dots 0 & a_0 \\ b_1, & ,b_0 & \dots 0 & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m-n} & ,b_{m-n-1}\dots b_0, & & a_{m-n} \\ b_{m-n+r+1}, & b_{m-n+r}\dots & b_{r+1}, & a_{m-n+r+1} \end{vmatrix}$$

Hosted by Google

skąd za pomocą łatwego przekształcenia dochodzimy do wzoru

$$3.\ d_r = \frac{(-1)^{\frac{(m-n)(m-n-1)}{2}}}{-b_0^{\,m-n+1}} \begin{vmatrix} a_0, & a_1 & \ldots & a_{m-n-1}, & a_{m-n} & , a_{m-n+r+1} \\ 0, & 0 & \ldots & 0 & , b_0 & , b_{r+1} \\ 0, & 0, & \ldots & b_0 & , b_1 & , b_{r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & b_0, & \ldots & b_{m+n-2}, & b_{m-n-1}, & b_{r+m-n} \\ b_0, & b_1, & \ldots & b_{m+n-1}, & b_{m-n} & , b_{r+m-n+1} \end{vmatrix}.$$

Wzozy 2. i 3. dają szukane wyrażenia współczynników ilorazu i reszty za pomocą współczynników funkcyj danych. Możemy też wyrazić sam iloraz i resztę bezpośrednio pod postacią wyznaczników. Jeżeli mianowicie do powyższego układu $m-n+1$ równań dodamy tożsamość

$$x^{m-n}c_0 + x^{m-n-1}c_1 + \ldots + c_{m-n} - Q = 0,$$

będziemy mieli układ $m-n+2$ równań, z którego rugując

$$c_0, c_1, \ \ldots \ c_{m-n},$$

otrzymamy związek

$$\begin{vmatrix} a_0 & , b_0 & , 0 & , \ldots\ldots & 0 \\ a_1 & , b_1 & , b_0 & , \ldots\ldots & 0 \\ a_2 & , b_2 & , b_1 & , \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m-n}, & b_{m-n}, & b_{m-n-1}, & \ldots, & b_1, b_0 \\ Q & , x^{m-n}, & x^{m-n-1}, & \ldots & x, 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Wynika z niego [4].

$$4.\ \ Q = \frac{(-1)^{\frac{(m-n)(m-n-1)}{2}}}{b_0^{\,m-n+1}} \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2 & \ldots & a_{m-n-1} & , a_{m-n}, & 0 \\ 0, & 0, & 0 & \ldots & 0 & , b_0 & , 1 \\ 0, & 0, & 0 & \ldots & b_0 & , b_1 & , x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & b_0, & b_1 & \ldots & b_{m-n-2}, & b_{m-n-1}, & x^{m-n-1} \\ b_0, & b_1, & b_2 & \ldots & b_{m-n-1}, & b_{m-n} & , x^{m-n} \end{vmatrix}.$$

Gdy zaś w wyrażeniu reszty

$$R = d_0 x^{n-1} + d_1 x^{n-2} + \ldots + d_{n-1},$$

podstawimy wartości 3. współczynników d_r, dojdziemy po odpowiednich przekształceniach[5] do wzoru:

$$5.\quad R = \frac{(-1)^{\frac{(m-n)(m-n-1)}{2}}}{-b_0^{\,m-n+1}} \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \ldots & a_{m-n-1}, & a_{m-n} & , F \\ 0, & 0, & \ldots & 0 & , b_0 & , f \\ 0, & 0, & \ldots & b_0 & , b_1 & , xf \\ \ldots & & & & & \\ 0, & b_0, & \ldots & b_{m-n-2}, & b_{m-n-1}, & x^{m-n-1} f \\ b_0, & b_1, & \ldots & b_{m-n-1}, & b_{m-n} & , x^{m-n} f \end{vmatrix}$$

Niechaj w szczególnym przypadku funkcya f będzie stopnia pierwszego, i dajmy, że

$$f = x - h.$$

Dla otrzymania ilorazu i reszty należy tedy w powyższych wzorach położyć

$$b_0 = 1,\ b_1 = -h,\ b_2 = b_3 = \ldots = 0,$$

skutkiem czego dla kolejnych współczynników ilorazu otrzymujemy

$$6.\quad \begin{aligned} c_0 &= a_0 \\ c_1 &= c_0 h + a_1 \\ c_2 &= c_1 h + a_2 \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ c_{m-1} &= c_{m-2} h + a_{m-1} \end{aligned}$$

skąd wynika:

$$7.\quad \begin{aligned} c_0 &= a_0 \\ c_1 &= a_0 h + a_1 \\ c_2 &= a_0 h^2 + a_1 h + a_2 \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ c_{m-1} &= a_0 h^{m-1} + a_1 h^{m-2} + a_2 h^{m-3} + \ldots a_{m-1}; \end{aligned}$$

reszta zaś R sprowadza się do wyrazu

$$8.\quad d_{n-1} = a_0 h^m + a_1 h^{m-1} + a_2 h^{m-2} + \ldots + a_m,$$

t. j. do wartości funkcyi F przy $x = h$, którą oznaczamy przez $F(h)$. Jeżeli więc dla $x = h$ będzie $F(h) = 0$, to:

$$F = (x - h) f_1,$$

gdzie f_1 jest funkcyą o współczynnikach $c_0, c_1, \ldots c_{m-1}$, wyżéj wypisanych.

Jeżeli funkcya F staje się zerem dla m różnych wartości zmiennéj np. dla $x = h_1, h_2 \ldots, h_m$, wtedy, na zasadzie powyższego, będzie najprzód

$$F = (x - h) f_1,$$

gdzie f_1 jest funkcyą oznaczoną stopnia $m - 1$-go, która nie jest zerem dla $x = h$, lecz musi stawać się zerem dla $x = h_2, h_3 \ldots h_m$. Z tego powodu można znów funkcyą f_1 przedstawić pod postacią

$$f_1 = (x - h_2) f_2,$$

gdzie funkcya f_2 stopnia $m - 2$-go nie jest zerem dla $x = h_2$, lecz staje się równą zeru dla $x = h_3, \ldots, h_m$. Można tedy napisać:

$$F = (x - h_2)(x - h_2) f_2$$

oraz

$$f_2 = (x - h) f_3,$$

gdzie f_3 jest funkcyą stopnia $m - 3$-go. Postępując tą drogą dalej, otrzymamy funkcye $f_4, f_5, \ldots f_{m-1}, f_m$ kolejno stopnia $m - 4$-go, $m - 5$-go....1-go, 0-go, z których ostatnia f_m jest równa współczynnikowi a_0. Tym sposobem dochodzimy do następującego rozkładu funkcyi danéj:

$$F(x) = a_0 (x - h_1)(x - h_2) \ldots (x - h_m)$$

t. j. do rozkładu funkcyi całkowitéj m-go stopnia na m czynników stopnia pierwszego.

Funkcya $F(x)$ stopnia m, stając się zerem dla m różnych wartości zmiennéj x, t. j. dla $h_1, h_2, \ldots h_m$, nie może być już zerem dla żadnéj innéj wartości zmiennéj, chyba, że [na zasadzie twierdzenia w art. 34.] jest tożsamościowo równą zeru.

Oznaczenie liczb $h_1, h_2, \ldots, h_m$ dla każdéj danéj funkcyi $F(x)$ t. j. dla funkcyi, któréj współczynniki są dane, należy do Algebry.

Hosted by Google

35. NAJWIĘKSZY WSPÓLNY DZIELNIK.

Jeżeli funkcya

$$F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m,$$

nie jest podzielną bez reszty przez funkcyą

$$f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n,$$

wtedy jest:

$$F = fQ + R_1,$$

gdzie reszta R_1 jest funkcyą całkowitą stopnia n_1, nie większego od $n-1$, iloraz Q jest stopnia równego $m-n$. Podzielmy funkcyą przez funkcyą R i niechaj będzie

$$f = R_1 Q_1 + R_2;$$

Reszta R_2 będzie stopnia n_2, nie większego od $n_1 - 1$, funkcya zaś Q stopnia $n - n_1$. Postępując tą drogą, dochodzimy do następującego układu równań:

$$1. \quad \begin{aligned} F &= fQ_1 + R_1 \\ f &= R_1 Q_1 + R_2 \\ R_1 &= R_2 Q_2 + R_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ R_{\mu-1} &= R_\mu Q_\mu + R_{\mu+1} \end{aligned}$$

w których stopnie reszt $R_1, R_2, \ldots R_{\mu+1}$ są kolejno: n_1, $n_2 < n_1$, $n_3 < n_2 \ldots n_{\mu-1} < n_\mu$, stopnie zaś ilorazów $Q, Q_1 \ldots Q_\mu$ są: $m-n$, $n-n_1$, $n_1 - n_2 \ldots n_{\mu-1} - n_\mu$. Współczynniki wszystkich ilorazów i reszt można wyznaczyć na podstawie wzorów, podanych w poprzedzającym artykule.

Z równań 1. otrzymujemy:

$$\begin{aligned} R_{\mu+1} &= R_{\mu-1} - R_\mu Q_\mu, \\ &= R_{\mu-1} - Q_\mu (R_{\mu-2} - Q_{\mu-1} R_{\mu-1}) \\ &= - Q_\mu R_{\mu-2} + (1 + Q_\mu Q_{\mu-1}) R_{\mu-1} \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Widzimy stąd, że podstawiając wyrażenia reszt $R_{\mu-1}$, $R_{\mu-2} \ldots$.

w poprzedzające równości, kolejno otrzymywane, dochodzi się do związku

2. $$R_{\mu+1} = P_\mu \,.\, F + Q_\mu \,.\, f,$$

w którym P_μ i Q_μ są funkcyami całkowitemi zmiennéj x, pierwsza stopnia $n-n_\mu$, druga stopnia $m-n_\mu$, o współczynnikach, które dają się wyrazić wymiernie przez współczynniki funkcyj danych F i f.

Kolejne działania, wykonywane według algorytmu, wskazanego w równaniach 1., doprowadzają ostatecznie do reszty równéj zeru. Niechaj taką resztą będzie $R_{\mu+2}$. Poprzedzająca reszta $R_{\mu+1}$ stopnia $n_{\mu+1}$ będzie albo stałą, różną od zera, wtedy $n_{\mu+1} = 0$; albo też pewną funkcyą całkowitą zmiennéj x, wtedy $n_{\mu+1} > 0$. W każdym razie ta poprzedzająca reszta $R_{\mu+1}$, na mocy równania

$$R_\mu = R_{\mu+1}\, Q_{\mu+1}\,,$$

będzie dzielnikiem reszty R_μ, a więc na mocy równań 1. będzie dzielnikiem kolejnych funkcyj $R_{\mu+1}, R_{\mu-2} \ldots R, f, F$. Jest ona *największym wspólnym dzielnikiem* funkcyj f i F. Jeżeli $R_{\mu+1}$ jest stałą, różną od zera, to funkcye dane F i f nie mają żadnego wspólnego dzielnika, który byłby funkcyą całkowitą i nazywamy je wówczas *względnie pierwszemi*; jeżeli zaś $R_{\mu+1}$ jest funkcyą całkowitą stopnia $n_{\mu+1} \geqq 1$ mówimy, że obie funkcye F i f za największy wspólny dzielnik mają funkcyą całkowitą stopnia $n_{\mu+1}$.

W przypadku gdy funkcye F i f są względnie pierwsze, gdy więc $R_{\mu+1}$ jest stałą, od zera różną, możemy równanie 2., przez podzielenie przez $R_{\mu+1}$, sprowadzić do postaci

3. $$1 = PF + Qf;$$

gdzie funkcya całkowita P będzie stopnia najwyżéj $n-1$-go, funkcya całkowita Q stopnia najwyżej $m-1$-go. Kładąc:

$$P = p_0\, x^{n-1} + p_1\, x^{n-2} + \ldots + p_{n-1},$$
$$Q = q_0\, x^{m-1} + p_1\, x^{m-2} + \ldots + q_{m-1},$$

możemy współczynniki p i q oznaczyć tą samą metodą, jakiéj użyliśmy w poprzednim artykule do oznaczenia współczynników ilorazu i reszty. Mnożąc P przez F, Q przez f i stosując twierdzenie artykułu 33. otrzymujemy układ $m+n$ równań

Hosted by Google

$$\begin{array}{lll}
a_0p_0 & +b_0q_0 & =0 \\
a_1p_0+a_0p_1 & +b_1q_0+b_0q_1 & =0 \\
a_2p_0+a_1p_1+a_0p_1 & +b_2q_0+b_1q_1+b_0q_2 & =0 \\
\multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
a_{m+n-2}p_0+a_{m+n-3}p_1+\ldots+a_mp_{n-2}+a_{m-1}p_{n-1} & +b_{m+n-2}q_0+b_{m+n-3}q_1+\ldots+b_nq_{m-2}+b_{n-1}q_{m-1} & =0 \\
a_{m+n-1}p_0+a_{m+n-2}p_1+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_mp_{n-1} & +b_{m+n-1}q_0+b_{m+n-2}q_1+\ldots+b_{n+1}q_{m-2}+b_nq_{m-1} & =1
\end{array}$$

w których dla symetryi wprowadziliśmy współczynniki

$$a_{m+1},\ a_{m+2},\ \ldots,\ a_{m+n-1},\ b_{n+1},\ b_{n+2}\ \ldots\ b_{n+m-1},$$

równe zeru. Z tych $m+n$ równań oznaczymy $m+n$ współczynników

$$p_0,\ p_1\ \ldots\ p_{n-1},\quad q_0,\ q_1\ \ldots\ q_{m-1}.$$

W saméj rzeczy, jeżeli wyznacznik układu powyższych równań, t. j. wyznacznik [podany przez Sylvestera]

$$\begin{vmatrix}
a_0, & a_1, & a_2 \ldots a_n & , a_{n+1} \ldots a_m & , 0, & \ldots 0 \\
0\,, & a_0, & a_1 \ldots a_{n-1}, & a_n \ \ldots a_{m-1} & , a_m & \ldots 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\
0\,, & 0 \ldots & \ldots a_1 & , a_2 \ \ldots a_{m-n+1}, & a_{m-n+2} & \ldots a_m \\
b_0, & b_1, \ldots & \ldots b_n & , 0 \quad \ldots 0 & , 0 & \ldots 0 \\
0\,, & b_0, \ldots & \ldots b_{n-1}, & b_n \quad \ldots 0 \ldots & \ldots\ldots & \ldots 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\
0\,, & 0, \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots b_0 & , b_1 \ldots & \ldots b_n
\end{vmatrix}$$

oznaczymy przez C_0, a wyznaczniki cząstkowe, odpowiadające elementom ostatniéj kolumny, oznaczymy odpowiednio przez

$$C_{00},\ C_{01}\ \ldots\ C_{0,n-1},\quad D_{00},\ D_{0,1}\ \ldots\ D_{0,m-1},$$

otrzymamy

$$p_i = \frac{C_{0,1}}{C_0}, \qquad q_i = \frac{D_{0,1}}{C_0}$$

a równanie 3. przyjmie postać

4. $$C_0 = F\sum_{i=0}^{i=n-1} C_{0,i}\,x^{n-i-1} + f\sum_{k=0}^{k=m-1} D_{0,i}\,x^{m-k-1}.$$

Gdy więc funkcye F i f są względnie pierwsze, zachodzi związek 4. w którym C_0 jest od zera różne, i odwrotnie, jeżeli wyznacznik C_0

Hosted by Google

jest różny od zera, zachodzi związek 4. lub 3., funkcye F i f są względnie pierwszemi.

Gdy wszakże wyznacznik C_0 jest tożsamościowo zerem, funkcye F i f, jak to zaraz okażemy, mają za największy wspólny dzielnik pewną funkcyą całkowitą stopnia ϱ-go $[\varrho \geqq 1]$. W saméj rzeczy, związek 2., gdy w nim uczynimy $\mu+1=\varrho$, przez X_ϱ zaś rozumieć będziemy resztę R_ϱ, w któréj współczynnik przy x^ϱ uczyniliśmy równym $\mathbf{1}$, a zamiast P_μ i Q_μ napiszemy wprost P i Q, przedstawić można pod postacią

5. $$X_\varrho = PF + Qf.$$

Kładąc

$$P = p_0 x^{n-\varrho-1} + p_1 x^{n-\varrho-2} + \ldots + p_{n-\varrho-1},$$
$$Q = q_0 x^{m-\varrho-1} + q_1 x^{m-\varrho-2} + \ldots + q_{m-\varrho-1},$$
$$X_\varrho = x^\varrho + r_1 x^{\varrho-1} + \ldots + r_\varrho,$$

możemy metodą poprzednią wyrazić współczynniki

$$p_0, p_1 \ldots p_{n-\varrho-1}, \quad q_0, q_1, \ldots q_{m-\varrho-1}$$

oraz

$$r_1, r_2, \ldots r_\varrho$$

przez współczynniki funkcyj danych F i f. Jeżeli oznaczymy mianowicie wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots & a_{m+n-2\varrho-1} \\ \quad a_0, a_1, a_2 \ldots & a_{m+n-2\varrho-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ & a_{m-\varrho} \\ b_0, b_1, b_2 \ldots\ldots & b_{m+n-2\varrho-1} \\ \quad b_0, b_1, b_2 \ldots & b_{m+n-2\varrho-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \qquad b_0, b_1 \ldots & b_{n-\varrho} \end{vmatrix}$$

przez C_ϱ, a jego wyznaczniki cząstkowe, odpowiadające elementom ostatniéj kolumny, przez

$$C_{\varrho,0}, C_{\varrho,1} \ldots C_{\varrho,n-\varrho-1}, \quad D_{\varrho,0}, D_{\varrho,1} \ldots D_{\varrho,m-\varrho-1}$$

znajdziemy, jak wyżéj;

$$p_i = \frac{C_{\varrho,i}}{C_\varrho}, \qquad q_i = \frac{D_{\varrho,i}}{C_\varrho},$$

a związek 5. przyjmie postać

6. $$C_\varrho X_\varrho = F . \sum_{i=0}^{i=n-\varrho-1} C_{\varrho,i} x^{n-\varrho-i-1} + f . \sum_{i=0}^{i=m-\varrho-1} D_{\varrho,i} x^{m-\varrho-i-1}.$$

Zachodzenie tego związku stwierdza, że funkcye F i f mają za największy wspólny dzielnik $D_\varrho X_\varrho$, t. j. funkcyą całkowitą stopnia ϱ-go, a nie mają dzielnika stopnia wyższego. Gdy więc wyznacznik C_0 jest zerem, wyznacznik zaś C_1 nie jest zerem, funkcye F i f mają za największy wspólny dzielnik funkcyą całkowitą stopnia pierwszego $C_1 X_1$. Gdy wyznaczniki C_0 i C_1 są tożsamościowo zerami, wyznacznik zaś C_2 nie jest zerem, funkcye F i f mają za największy wspólny dzielnik funkcyą $C_2 X_2$ stopnia 2-go. Wogóle, jeżeli

$$C_0 = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_{\varrho-1} = 0$$

wyznacznik zaś C_ϱ jest od zera różny, wtedy funkcye F i f mają za największy wspólny dzielnik funkcyą $C_\varrho X_\varrho$ stopnia ϱ-go, a nie mają wspólnego dzielnika stopnia wyższego[6].

Jeżeli nakoniec

$$C_0 = 0, \; C_1 = 0, \; . \; . \; . \; C_n,$$

to wtedy funkcya f jest sama dzielnikiem funkcyi F.

Tak więc

$$C_0 = 0,$$

przedstawia warunek konieczny i dostateczny, aby dwie funkcye F i f miały czynnik wspólny.

Wyznacznik C_0 nazywa się *rugownikiem* funkcyj danych.

Twierdzenia te mają ważne zastosowanie w teoryi eliminacyi.

36. ROZKŁAD FUNKCYI CAŁKOWITÉJ WEDŁUG POTĘG INNÉJ.

Jeżeli F i f są dwie funkcye całkowite zmiennéj x stopni m i n $[m > n]$, to pierwszą z nich można przedstawić pod postacią

$$F = F^{(0)} + F^{(1)} f + F^{(2)} f^2 + \; . \; . \; + F^{(p)} f^p,$$

gdzie $F^{(0)}, F^{(1)}, F^{(2)} \ldots F^{(p)}$ są funkcyami całkowitemi téjże zmiennéj stopnia co najwyżéj $(n-1)$-go, p zaś jest liczbą całkowitą nie większą od m/n.

Hosted by Google

Dla okazania tego twierdzenia[7] podzielmy funkcyą F przez f, i niechaj będzie

$$F = Qf + F^{(0)}$$

Jeżeli stopień funkcyi Q jest większy od stopnia funkcyi f, podzielmy Q przez f i dajmy, że

$$Q = Q_1 f + F^{(1)}$$

Jeżeli stopień funkcyi Q_1 jest większy od stopnia funkcyi f, podzielmy znowu Q_1 przez f, otrzymamy tedy

$$Q_1 = Q_2 f + F^{(2)}$$

Prowadząc to działanie w dalszym ciągu, otrzymujemy szereg równań

$$\begin{aligned} Q_2 &= Q_3 f + F^{(3)} \\ &\vdots \\ Q_{p-2} &= Q_{p-1} f + F^{(p-1)} \end{aligned}$$

Znajdujemy z tych równań

$$\begin{aligned} F &= Qf + F^{(0)} = (Q_1 f + F^{(1)})f + F^{(0)} \\ &= F^{(0)} + F^{(1)} f + Q_1 f^2 \\ &= F^{(0)} + F^{(1)} f + (Q_2 f + F^{(2)}) f^2 \\ &= F^{(0)} + F^{(1)} f + F^{(2)} f^2 + Q_2 f^3 \\ &= \ldots \ldots \end{aligned}$$

Ostatecznie więc, jeżeli Q_{p-1} oznaczymy przez $F^{(p)}$, dojdziemy do wzoru, który należało dowieść. Z natury ilorazu wynika, że funkcye $F^{(0)}, F^{(1)}, \ldots F^{(p-1)}$ są wszystkie stopnia nie wyższego od $n-1$, stopnie zaś funkcyj $Q_1, Q_2, \ldots Q_{p-1}$ są odpowiednio nie wyższe od $m-n$, $m-2n$, $\ldots m-np$, a zatém np musi być mniejsze od m, czyli $p < \frac{m}{n}$.

37. FUNKCYE SYMETRYCZNE.

Określenie funkcyj symetrycznych podaliśmy już w art. 32. Nie wdając się tu w szczegółowy wykład teoryi tych ważnych form matematycznych, chcemy tu podać niektóre tylko ich własności zasadnicze[8].

Przedewszystkiém rozpatrzmy iloczyn

1. $$(x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_n)$$

Hosted by Google

który, jak to bezpośrednio widać, jest funkcyą symetryczną zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_n$. Wykonawszy mnożenie, otrzymujemy funkcyą 1. pod postacią

$$x^n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)x^{n-1} + (x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} + \ldots + (-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n$$

t. j. pod postacią funkcyi całkowitéj stopnia n-go względem zmiennéj x

2. $$x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ . \ . \ . \ + (-1)^n p_n.$$

Współczynniki téj funkcyi, t. j.

3. $$\begin{aligned} p_1 &= x_1 + x_2 + \ldots x_n \\ p_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= x_1x_2 \ldots x_n \end{aligned}$$

są funkcyami całkowitemi, jednorodnemi i symetrycznemi zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_n$. Funkcye symetryczne 3., które oznacza się dla krótkości przez

4. $$p_1 = \Sigma x_1,\ p_2 = \Sigma x_1 x_2,\ \ldots\ p_n = \Sigma x_1 x_2 \ldots x_n,$$

nazywają się funkcyami symetrycznemi *elementarnemi*.

Funkcye jednorodne

$$x_1^r + x_2^r + \ . \ . \ . \ + x_n^r,$$

które oznacza się krótko przez s_r lub Σx_1^r, t. j. sumy jednakowych potęg zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_n$, są funkcyami symetrycznemi jednorodnemi; funkcye te możemy wyrazić, jak to zaraz okażemy, za pomocą funkcyj symetrycznych elementarnych.

W saméj rzeczy, według 2. i 3. mamy

5. $$x^n - p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n p_n = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Druga strona téj równości jest podzielna przez każdy z iloczynów $x - x_1, x - x_2 \ldots x - x_n$, toż samo więc stosuje się do strony pierwszéj. Iloraz z podzielenia strony pierwszéj przez którykolwiek z tych czynników jest funkcyą całkowitą stopnia $(n-1)$-go. Współczynniki funkcyi całkowitéj, jaką otrzymujemy, dzieląc stronę pierszą równości 5. przez $x - x_r$, oznaczmy przez $p_1^{(r)}, p_2^{(r)} \ldots p_{n-1}^{(r)}$; sam więc iloraz będzie miał postać

6. $x^{n-1}-p_1^{(r)}x^{n-2}+ \ldots +(-1)^i p_i^{(r)} x^{n-i} \ldots + (-1)^{n-1} p_{n-1}^{(r)}$.

Współczynniki funkcyi 6., obliczymy według wzorów 7., w art. 34; współczynnik $p_i^{(r)}$ będzie miał wyrażenie następujące:

$$p_i^{(r)} = p_i - p_{i-1} x_r + p_{i-2} x_r^2 - \ldots + (-1)^i x_r^i,$$
$$i = 1, 2, \ldots n-1.$$

Ponieważ zaś na zasadzie wzorów 6. w tymże artykule 34. jest

$$p_i = p_i^{(r)} + p_{i-1}^{(r)} x_r,$$

otrzymujemy przeto

$$p_{i-1}^{(r)} x_r = (-1)^{i-1}[x_r^i - p_1 x_r^{i-1} + \ldots + (-1)^{i-1} p_{i-1} x_r]$$
$$r = 1, 2, \ldots n.$$

Sumując obie strony względem r, i zważając, że stosując wzory 3. do funkcyi 6., mamy

$$\sum_r p_{i-1}^{(r)} x_r = i p_i,$$

dochodzimy do związku:

7. $$s_i - p_3 s_{i-1} + p_2 s_{i-2} \ldots + (-1)^{i-1} p_{i-1} s_1 + (-1)^i i p_i = 0$$
$$i = 1, 2, \ldots n-1.$$

z którego wynikają tożsamości

8.
$$\begin{aligned}
&s_1 - p_1 = 0,\\
&s_1 - p_1 s_1 + 2p_2 = 0,\\
&s_1 - p_1 s_2 + p_2 s_1 - 3p_3 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_{n-1} - p_1 s_{n-1} + p_2 s_{n-2} \ldots + (-1)^{n-1}(n-1) p_{n-1} = 0,
\end{aligned}$$

znane pod nazwą wzorów N e w t o n a[9]. Za pomocą z nich wyrażamy $s_1, s_2, \ldots s_{n-1}$ przez $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$, to jest przez funkcye symetryczne elementarne. Rozwiązując równania 7., względem $s_1, s_2 \ldots, s_{n-1}$, otrzymujemy

9. $$s_i = \begin{vmatrix} p_1, & 2p_3, & 3p_1 & \ldots & ip_i \\ 1, & p_1 & , p_2 & \ldots & p_{i-1} \\ 0, & 1 & , p_1 & \ldots & p_{i-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0 & , 0. & \ldots & p_1 \end{vmatrix}$$

Hosted by Google

Dla obliczenia funkcyj symetrycznych s_i o skaźniku większym od $n-1$, pomnóżmy tożsamość

$$x_r^n - p_1 x_r^{n-1} + p_2 x_r^{n-2} + \ldots + (-1)^n p_n = 0$$
$$r = 1, 2, \ldots n.$$

przez x_r^k, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, i w otrzymanéj nowéj tożsamości

$$x_r^{n+k} - p_1 x_r^{n+k-1} + p_2 x_r^{n+k-2} \ldots + (-1)^n p_n x_r^k = 0$$

zmieniając r przez wszystkie jego n wartości, a następnie sumując wszystkie tożsamości, znajdziemy równość

9. $$s_{n+k} - p_1 s_{n+k-1} + p_2 s_{n+k-2} + \ldots (-1)^n p_n s_k = 0$$
$$k = 0, 1, 2 \ldots$$

pozwalającą nam obliczać $s_n, s_{n+1} \ldots$, gdy znamy już $s_1, s_2 \ldots s_{n-1}$, i stwierdzającą zarazem, że wzór 9. jest wzorem ogólnym, służącym dla dowolnych wartości skaźników i, byleby współczynniki p_i ze skaźnikiem i większym od n uważać za zera.

Wzór 9. można przedstawić pod postacią

10. $$s_i = i \Sigma (-1)^{i+\lambda_1+\lambda_2+\ldots\lambda_n} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n-1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!} p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_n^{\lambda_n}$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ czynią zadość równaniu warunkowemu

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = i.$$

Wzór ten znany jest pod nazwą wzoru W a r i n g a [10].

Naodwrót możemy wyrazić funkcye symetryczne elementarne przez sumy jednakowych potęg, to jest przez funkcye s. Mianowicie z powyższych równań 7. dochodzimy do wzoru ogólnego.

11. $$p_i = \frac{1}{1.2.3\ldots i} \begin{vmatrix} s_1, & s_2, & s_3 & \ldots & s_i \\ 1, & s_1, & s_2 & \ldots & s_{i-1} \\ 0, & 2, & s_1 & \ldots & s_{i-2} \\ . & . & . & . & . \\ 0, & 0, & 0. & \ldots & s_1. \end{vmatrix}.$$

W badaniach W r o ń s k i e g o ważną rolę odgrywają funkcye symetryczne, które nazwał funkcyami *alef*; powstają one, gdy w rozwinięciu m-éj potęgi wielomianu [porówn. art. 32.] uczynimy wszystkie współczynniki równemi jedności. Funkcye te oznaczać bę-

Hosted by Google

dziemy[11] przez $A_m(x_1+x_2+\ldots+x_n)$, lub gdy nie zachodzi obawa dwuznaczności, wprost przez A_m; jest zatém

12. $$A_m=\sum x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}$$
$$a_1+a_2+\ldots+a_n=m.$$

Funkcye alef dają się wyrazić za pomocą funkcyj symetrycznych elementarnych. W saméj rzeczy, z łatwością dostrzegamy, że

$$A_1(x_1+x_2+\ldots+x_n)=x_1+x_2+\ldots+x_n=p_1,$$
$$A_2(x_1+x_2+\ldots+x_n)=(x_1+x_2\ldots+x_n).A_1(x_1+x_2\ldots+x_n)$$
$$-(x_1x_2+\ldots+x_{n-1}x_n),$$
$$=p_1A_1(x_1+x_2+\ldots+x_n)-p_2A_0(x_1+x_2+\ldots+x_n),$$

gdzie $A_0(x_1+x_2+\ldots+x_n)$ uważamy jako równe 1.

$$A_3(x_1+x_2+\ldots+x_n)=(x_1+x_2+\ldots+x_n).A_2(x_1+x_2+\ldots+x_n)$$
$$-(x_1x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n).A_1(x_1+x_2+\ldots+x_n)$$
$$+(x_1x_2x_3+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n).A_0(x_1+x_2+\ldots x_n)$$
$$=p_1A_2(x_1+x_2\ldots+x_n)-p_2A_1(x_1+x_2+\ldots+x_n)+p_3A_0(x_1+x_2+\ldots+x_n),$$
. . . .

co prowadzi do następującego wzoru[12]

13. $$A_i=p_1A_{i-1}-p_2A_{i-2}+p_3A_{i-3}-\ldots+(-1)^{i-1}p_iA_0$$

którego ogólność stwierdzić można za pomocą przejścia od A_i do A_{i+1}.

Z wzoru 13. wynikają następujące wyrażenia funkcyj alef pierwszych ośmiu rzędów:

$$A_1=p_1,$$
$$A_2=p_1^2-p_2,$$
$$A_3=p_1^3-2p_1p_2+p_3,$$
$$A_4=p_1^4-3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_2^2-p_4,$$

$$A_5 = p_1{}^5 - 4p_1{}^3p_2 + 3p_1{}^2p_3 + 3p_1p_2{}^2 - 2p_1p_4 - 2p_2p_3 + p_5,$$

$$A_6 = p_1{}^6 - 5p_1{}^4p_2 + 4p_1{}^3p_3 + 6p_1{}^2p_2{}^2 - 3p_1{}^2p_4 - 6p_1p_2p_3 + 2p_1p_5 - p_2{}^3 + 2p_2p_4 + p_3{}^2 - p_6,$$

$$A_7 = p_1{}^7 - 6p_1{}^5p_2 + 5p_1{}^4p_3 + 10p_1{}^3p_2{}^2 - 4p_1{}^3p_4 - 12p_1{}^2p_2p_3 + 3p_1{}^2p_5 - 4p_1p_2{}^3 + 3p_1p_3{}^2 + 6p_1p_2p_4 - 2p_1p_6 + 3p_2{}^2p_3 - 2p_2p_5 - 2p_3p_4 + p_7,$$

$$A_8 = p_1{}^8 - 7p_1{}^6p_2 + 6p_1{}^5p_3 + 15p_1{}^4p_2{}^2 - 5p_1{}^4p_4 - 20p_1{}^3p_2p_3 + 4p_1{}^3p_5 + 6p_1{}^2p_3{}^2 - 10p_1{}^2p_2{}^3 + 12p_1{}^2p_2p_4 - 3p_1{}^2p_6 + 12p_1p_2{}^2p_3 - 6p_1p_2p_5 - 6p_1p_3p_4 + 2p_1p_7 + p_2{}^4 - 3p_2{}^2p_4 - 3p_2p_3{}^2 + 2p_2p_6 + 2p_3p_5 + p_4{}^2 - p_8.$$

Ogólnie można wyrazić funkcyą alef A_i pod postacią wyznacznika

14. $$A_i = \begin{vmatrix} p_1, p_2, p_3 & \ldots & p_i \\ 1, p_1, p_2 & \ldots & p_{i-1} \\ 0, 1, p_1 & \ldots & p_{i-2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0, 0, 0 & \ldots & p_1 \end{vmatrix}$$

który służy dla wszelkich wartości dodatnich skaźnika i, byleby wartości p_i dla skaźników i większych od n uważać za zera.

Na podstawie wzoru 13., możemy otrzymać związek pomiędzy funkcyami alef a sumami równych potęg, wyrażający się wzorem

15. $$iA_i = s_1A_{i-1} + s_2A_{i-2} + \ldots + s_{i-1}A_{i-1} + s_iA_0.$$

Wzór **14.**, można przedstawić pod postacią analogiczną do wzoru Waringa, mianowicie

16. $$A_i = \Sigma(-1)^{i+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!} p_1{}^{\lambda_1} p_2{}^{\lambda_2} \ldots p_n{}^{\lambda_n},$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = i.$$

Gdy rozwiniemy tu stronę drugą, dojdziemy do wzoru, podanego przez Wrońskiego[13]:

$$17.\quad A_i = p_1{}^i - p_1{}^{i-2}(i-1)\,p_2$$
$$+\,p_1{}^{i-4}\left\{(i-2)\,p_1p_3 + (i-2)^{2|-1}\frac{p_2{}^2}{1^{2|1}}\right\}$$
$$-\,p_1{}^{i-6}\left\{(i-3)\,p_1{}^2p_4 + (i-3)^{2|-1}\,p_1p_2p_3 + (i-3)^{3|-1}\frac{p_2{}^3}{1^{3|1}}\right\}$$
$$+\,p_1{}^{i-8}\left\{(i-4)\,p_1{}^3p_5 + (i-4)^{2|-1}p_1{}^2\left(p_2p_3 + \frac{p_3{}^2}{1^{2|1}}\right) + (i-4)^{3|-1}p_1\frac{p_2{}^2}{1^{3|1}}p_3 + (i-4)^{4|-1}\frac{p_2{}^4}{1^{4|1}}\right\}$$
$$-\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Strona druga przerywa się na wyrazie, w którym wykładnik przy p_1 staje się ujemnym; symbole $(i-2)^{2|-1}, (i-3)^{3|-1}\ldots$ i t. p., $1^{2|1}, 1^{3|1}\ldots$ mają znaczenie, które objaśnia wzór

$$l^{m|\pm n} = l\,(l\pm n)\,(l\pm 2n)\ldots(l\pm(m-1)n).$$

Za pomocą wzoru 16. lub 17., można obliczać kolejne wartości funkcyj alef, potrzebne zwłaszcza w tak zwanéj *teleologicznéj* metodzie Wrońskiego rozwiązywania równań algebraicznych. Wyżéj podane wyrażenia fuukcyj alef ośmiu pierwszych rzędów zawierają się oczywiście w tym wzorze.

Zauważmy, że na zasadzie określenia 12. funkcya alef A_i jest funkcyą symetryczną jednorodną, którą można rozłożyć na sumę funkcyj symetrycznych prostych

$$\begin{array}{llll}
\Sigma x_1{}^i, & \Sigma x_1{}^{i-1}x_2, & \Sigma x_1{}^{i-2}x_2{}^2, & \Sigma x_1{}^{i-3}x_2{}^3 \;\ldots \\
 & & \Sigma x_1{}^{i-2}x_2x_3, & \Sigma x_1{}^{i-3}x_2{}^2x_3 \;\ldots \\
 & & & \Sigma x_1{}^{i-3}x_2x_3x_4 \;\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Tak np. funkcye symetryczne $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ wyrazić można w ten sposób:

$$A_1 = \Sigma x_1,$$
$$A_2 = \Sigma x_1{}^2 + \Sigma x_1x_2,$$
$$A_3 = \Sigma x_1{}^3 + \Sigma x_1{}^2x_2 + \Sigma x_1x_2x_3,$$
$$A_4 = \Sigma x_1{}^4 + \Sigma x_1{}^3x_2 + \Sigma x_1{}^2x_2{}^2 + \Sigma x_1{}^2x_2x_3 + \Sigma x_1x_2x_3x_4,$$

Hosted by Google

$$A_5 = \Sigma x_1{}^5 + \Sigma x_1{}^4 x_2 + \Sigma x_1{}^3 x_2 x_3 + \Sigma x_1{}^2 x_2{}^2 x_3 + \Sigma x_1{}^2 x_2 x_3 x_4 + \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 x_5,$$

$$A_6 = \Sigma x_1{}^6 + \Sigma x_1{}^5 x_2 + \Sigma x_1{}^4 x_2{}^2 + \Sigma x_1{}^4 x_2 x_3 + \Sigma x_1{}^3 x_2{}^3 + \Sigma x_1{}^3 x_2{}^2 x_3 + \Sigma x_1{}^3 x_2 x_3 x_4 + \Sigma x_1{}^2 x_2{}^2 x_3{}^2 + \Sigma x_1{}^2 x_2{}^2 x_3 x_4 + \Sigma x_1{}^2 x_2 x_3 x_4 x_5 + \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6.$$

i t. d.

W Teoryi liczb stosuje W r o ń s k i inną własność funkcyj alef, którą można przedstawić w ten sposób:

18. $$A_i(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) - A_i(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) = (x_n - x_1) A_{i-1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

W saméj rzeczy, z tożsamości

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^i = (x_2 + x_3 + \ldots + x_n)^i + i\, x_1 (x_2 + x_3 + \ldots + x_n)^{i-1} + \frac{i(i-2)}{1.2} x_1{}^2 (x_2 + x_3 + \ldots + x_n)^{i-2} + \ldots + x_1{}^i$$

przechodząc do funkcyj alef otrzymujemy

$$A_i(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = A_i(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) + x_1 A_{i-1}(x_2 + x_5 + \ldots + x_n) + x_1{}^2 A_{i-2}(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) + \ldots + x_1{}^i,$$

skąd

$$A_i(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) = A_i(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - \{x_1 A_{i-1}(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) + x_1 A_{i-2}(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) + \ldots\}.$$

Wyrażenie, zawarte w nawiasie, jest oczywiście równe

$$A_{i-1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n),$$

będzie przeto

$$A_i(x_2 + x_3 + \ldots + x_n) = A_i(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - x_1 A_{i-1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

Podobnież

$$A_i(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) = A_i(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - x_n A_{i-1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Odejmując od siebie ostatnie równości, dochodzimy do związku 18. Ponieważ x_1 i x_n są dowolnemi z pomiędzy liczb $x_1, x_2 .., x_n$, możemy więc, kładąc za nie x_p i x_q i oznaczając dla skrócenia $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ przez X, napisać wzór 18. pod postacią, nadaną mu przez W r o ń s k i e g o[14]

19. $$A_i(X - x_p) - A_i(X - x_q) = (x_q - x_p)\, A_i(X).$$

Wszystkie podane wzory na wyrażenie funkcyj symetrycznych przez funkcye elementarne wynikają z ogólnego twierdzenia, orzekającego, że *każda* funkcya całkowita symetryczna może być przedstawiona jako funkcya całkowita funkcyj symetrycznych elementarnych.

W saméj rzeczy, daną jakąkolwiek funkcyą symetryczną φ uporządkujmy w sposób następujący[15]. Niechaj α_1 będzie wykładnikiem najwyższéj potęgi zmiennéj x_1, zachodzącéj w wyrazach téj funkcyi, α_2 wykładnikiem najwyższéj potęgi zmiennéj x_2, znajdującéj się w wyrazach funkcyi po czynniku $x_1^{\alpha_1}$; α_3 wykładnikiem najwyższéj potęgi zmiennéj x_3, znajdującéj się w wyrazach funkcyi po czynniku $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, i t. d.; wreszcie niechaj α_n będzie wykładnikiem najwyższéj potęgi zmiennéj x_n w wyrazach funkcyi po czynniku $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$. Otóż wyraz

$$c\, x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n}$$

gdzie c jest współczynnikiem stałym, przyjmujemy za pierwszy wyraz funkcyi φ. Z powyższego wynika, że niektóre z wykładników

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \dots \alpha_{n-1},\ \alpha_n,$$

mogą być zerami, że każdy z nich może być równy poprzedzającemu, lecz żaden nie może być większy od poprzedzającego. Gdyby bowiem było naprzykład $\alpha_3 > \alpha_2$, wtedy — ponieważ w danéj funkcyi symetrycznéj być musi i wyraz $c x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_3} x_3^{\alpha_2} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n}$ — nie byłoby $x_2^{\alpha_2}$ najwyższą potęgą zmiennéj x_2, następującą po $x_1^{\alpha_1}$.

Mając już pierwszy wyraz funkcyi φ, przyjmujemy jako drugi jéj wyraz ten, w ktorym zmienna x_1 ma wykładnik najwyższy po wykładniku α_1, zmienna x_2 wykładnik najwyższy po czynniku, zawierającym potęgę pierwszéj zmiennéj i t. d. Tym sposobem będzie

$$\varphi = c\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n} + \dots$$

Z wzorów 4., po podniesieniu obu stron pierwszego z nich do potęgi $\alpha_1 - \alpha_2$, drugiego do potęgi $\alpha_2 - \alpha_3$, ..., przedostatniego do potęgi $\alpha_n - \alpha_{n-1}$, ostatniego do potęgi α_n, a następnie po pomnożeniu przez siebie otrzymanych równości, dochodzimy do związku

20. $$c \,.\, p_1^{\alpha_1-\alpha_2} p_2^{\alpha_2-\alpha_3} \dots p_{n-1}^{\alpha_n-\alpha_{n-1}} p_n^{\alpha_n}$$
$$= c(\Sigma x_1)^{\alpha_1-\alpha_2} (\Sigma x_1 x_2)^{\alpha_2-\alpha_3} \dots (\Sigma x_1 x_2 \dots x_n)^{\alpha_n}$$

Pierwszy wyraz strony drugiéj będzie oczywiście równy

$$c\,x_1^{\alpha_1-\alpha_2}(x_1\,x_2)^{\alpha_2-\alpha_3}, \ldots (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\alpha_n} = c\,x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

to jest wyrazowi pierwszemu funkcyi danéj φ.

Jeżeli funkcyą symetryczną 20. oznaczymy przez P, to różnica $\varphi - P$ będzie nową funkcyą symetryczną φ_1, do któréj można zastosować toż samo postępowanie i dojść w ten sposób do funkcyi symetrycznéj $\varphi_1 = \varphi - P_1$, gdzie P_1 powstaje tak samo jak funkcya P, przez podniesienie funkcyj elementarnych $p_1, p_2 \ldots$ do potęg wskazanych przez różnice wykładników w pierwszym wyrazie funkcyi φ_1.

Proces ten doprowadza do szeregu funkcyj symetrycznych

$$\varphi_1, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_{i-1}, \varphi_i,$$

czyniących zadość równościom

$$\begin{aligned} \varphi \quad - P \quad &= \varphi_1, \\ \varphi_1 \quad - P_1 \quad &= \varphi_2, \\ \ldots\ldots&\ldots \\ \varphi_{i-2} - P_{i-2} &= \varphi_{i-1}, \\ \varphi_{i-1} - P_i \quad &= \varphi_i, \end{aligned}$$

gdzie funkcya φ_i jest stałą. Z tych równań wynika

$$\varphi = P + P_1 + P_2 + \ldots + P_{i-1} + \varphi_i,$$

co stwierdza właśnie, ze funkcya φ daje się przedstawić jako funkcya całkowita funkcyj elementarnych.

Sposób, w jaki dowiedliśmy ogólnego twierdzenia o funkcyach symetrycznych, jest zarazem metodą przedstawiania ich za pomocą funkcyj symetrycznych elementarnych. Metodę tę obmyślił W a r i n g.

Przykład. Niechaj będzie dana funkcya symetryczna

$$\varphi = \Sigma\, x_1^3 x_2^2 x_3.$$

Pierwszym jéj wyrazem jest

$$x_1^3 x_2^2 x_3,$$

zatém $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$; $\alpha_1 - \alpha_2 = 1$, $\alpha_2 - \alpha_3 = 1$. Tworzymy

$$P = p_1 p_2 p_3 = \Sigma x_1 . \Sigma x_1 x_2 . \Sigma x_1 x_2 x_3 .$$

Wykonawszy iloczyn funkcyj symetrycznych $\Sigma x_1, \Sigma x_1 x_2, \Sigma x_1 x_2 x_3$, otrzymujemy funkcyą symetryczną

$$\Sigma x_1^3 x_2^2 x_3 + 3\Sigma x_1^3 x_2 x_3 x_4 + 3\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 8\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3 x_4$$
$$+ 22\Sigma x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 + 60\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6,$$

skąd

$$\varphi_1 = \varphi - P = -3\Sigma x_1^3 x_2 x_3 x_4 - 3\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2 - 8\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3 x_4$$
$$- 22\Sigma x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 - 60\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 .$$

Pierwszym wyrazem funkcyi φ_1 jest

$$-3 x_1^3 x_2 x_3 x_4,$$

a kolejne różnice wykładników są

$$2,\ 0,\ 0,\ 4;$$

tworzymy przeto funkcyą symetryczną

$$P_1 = -3 p_1^2 p_4 = -3(\Sigma x_1)^2 . \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4$$
$$= -3\Sigma x_1^3 x_2 x_3 x_4 - 6\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 - 27\Sigma x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5$$
$$- 90\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6,$$

oraz różnicę

$$\varphi_2 = \varphi_1 - P_1 = -3\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2 - 2\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3 x_4$$
$$+ 5\Sigma x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 + 30\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 .$$

Pierwszym wyrazem funkcyi φ_2 jest

$$-3 x_1^2 x_2^2 x_3^2,$$

a kolejne różnice jéj wykładników są:

$$0,\ 0,\ 2;$$

tworzymy przeto funkcyą

$$P_2 = -3 p_3^2 = -3(\Sigma x_1 x_2 x_3)^2$$
$$= -3\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2 - 6\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 - 18\Sigma x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5$$
$$- 60\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6,$$

skutkiem czego będzie:

$$\varphi_3 = \varphi_2 - P_2 = 4\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 + 23\Sigma x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 + 90\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6,$$

gdzie pierwszym wyrazem jest

$$4\,x_1{}^2 x_2{}^2 x_3 x_4,$$

a kolejne różnice wykładników są

$$0,\ 1,\ 0,\ 1.$$

Tworzymy funkcyą

$$\begin{aligned} P_3 = 4\,p_2 p_4 &= 4 \sum x_1 x_2 \,.\, \sum x_1 x_2 x_3 x_4 \\ &= 4 \sum x_1{}^2 x_2{}^2 x_3 x_4 + 16 \sum x_1{}^2 x_2 x_3 x_4 x_5 \\ &\qquad + 60 \sum x_1 x_2 x_3 x_4 x_5, \end{aligned}$$

tak że

$$\varphi_4 = \varphi_3 - P_3 = 7 \sum x_1{}^2 x_2 x_3 x_4 x_5 + 30 \sum x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6,$$

gdzie pierwszym wyrazem jest

$$7\,x_1{}^2 x_2 x_3 x_4 x_5,$$

a kolejne różnice wykładników wynoszą

$$1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1.$$

Tworzymy dalej funkcyą

$$\begin{aligned} P_4 = 7\,p_1 p_5 &= 7 \sum x_1 . \sum x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \\ &= 7 \sum x_1{}^2 x_2 x_3 x_4 x_5 + 42 \sum x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 \end{aligned}$$

a więc

$$\varphi_5 = \varphi_4 - P_4 = -12 \sum x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6.$$

Pierwszym wyrazem funkcyi φ_5 jest

$$-12\,x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6,$$

kolejne zaś różnice wykładników są

$$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1\,;$$

tworzymy więc funkcyą

$$P_5 = -12\,p_6 = -12 \sum x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6,$$

skutkiem czego będzie

$$\varphi_6 = \varphi_5 - P_5 = 0,$$

tak że ostatecznie

$$\varphi = P + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5,$$

to jest

$$\Sigma x_1{}^3 x_2{}^2 x_3 = p_1 p_2 p_3 - 3p_1{}^2 p_4 - 3p_3{}^2 + 4p_2 p_4 + 7p_1 p_5 - 12p_6$$

Z tego przykładu widać, że przedstawianie funkcyj symetrycznych za pomocą funkcyj symetrycznych, w zasadzie proste, jest jednak w wykonaniu za pomocą metody Waringa zmudne, bo wymaga wielokrotnego mnożenia funkcyj symetrycznych elementarnych.

Zauważmy, że ogólny kształt każdéj funkcyi symetrycznéj, wyrażonéj przez funkcye symetryczne elementarne, jest

21. $$\varphi = \Sigma A p_1{}^{\lambda_1} p_2{}^{\lambda_2} \ldots p_n{}^{\lambda_n},$$

zadanie przeto, o którem mowa, sprowadza się do oznaczenia najprzód wykładników $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, a następnie współczynników A we wszystkich wyrazach. Oznaczenie wykładników jest rzeczą łatwą i opiera się na pojęciu tak zwanéj wagi, wprowadzoném przez Cayley'a i Sylvestera.

Przy sprowadzaniu funkcyi symetrycznéj

22. $$\varphi = \Sigma x_1{}^{\alpha_1} x_2{}^{\alpha_2} \ldots x_n{}^{\alpha_n}$$

do postaci 21. zachodzi mianowicie, jak to zaraz okażemy, ta ważna okoliczność, że stopień funkcyi 21. jest równy najwyższemu z wykładników $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, wykładniki zaś $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ czynią zadość równości

23. $$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

W saméj rzeczy, jeżeli w wyrażeniu 21. zamiast $p_1, p_2, \ldots p_n$ napiszemy odpowiednio, co jest dozwoloném na mocy równań 3.,

$$l_1 x_k + m_1,\ l_2 x_k + m_2 \ \ldots\ l_n x_k + m_n,$$

gdzie $l_1, m_1, l_2, m_2 \ldots l_n, m_n$ są funkcyami całkowitemi zmiennych $x_1 \ldots x_{k-1}, x_{k+1} \ldots x_n$, otrzymamy wyrażenie

$$\varphi = \Sigma (l_1 x_k + m)^{\lambda_1} (l_2 x_k + m_1)^{\lambda_2} \ldots (l_n x_k + m_n)^{\lambda_n}$$

którego stopniem względem x_k jest oczywiście najwyższa wartość sumy $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$, ta zaś jest równa najwyższemu z wykładników $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$. Daléj znów, gdy w 22. zamiast $x_1, x_2, \ldots x_n$ napiszemy $\varrho x_1, \varrho x_2, \ldots \varrho x_n$, to φ przejdzie w $\varrho^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\varphi$; jednocześnie zaś funkcye symetryczne elementarne $p_1, p_1 \ldots p_n$ jako funkcye jednorodne, na podstawie twierdzenia w art. 32., przechodzą w $\varrho p_1, \varrho^2 p_2 \ldots \varrho^n p_n$, przez co druga strona równania 21. staje się

$$\varrho^{\lambda_1+2\lambda_2+\dots n\lambda_n} \sum A p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_n^{\lambda_n};$$

otrzymujemy więc

$$\varrho^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} \varphi = \varrho^{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n} \varphi,$$

skąd bezpośrednio wypływa warunek 23.

Liczba $\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_2$ nazywa się *wagą* wyrazu

$$p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_n^{\lambda_n}.$$

Funkcya, któréj wyrazy mają wagi równe, nazywa się *izobaryczną.*

Przykłady

Funkcya $\sum x_1 = x_1 + x_2 + \dots x_n = p_1$ ma wagę równą 1.

Funkcya $\sum x_1 x_2 = p_2$ ma wagę równą 2; takąż wagę ma funkcya symetryczna

$$\sum x_1^2 + 2 \sum x_1 x_2 = p_1^2$$

Funkcye:

$$\sum x_1 x_2 x_3 = p_3,$$
$$\sum x_1^2 x_1 + 3 \sum x_1 x_2 x_3 = p_1 p_2,$$
$$\sum x_1^3 + 3 \sum x_1^2 x_2 + 6 \sum x_1 x_2 x_3 = p_1^3,$$

mają wagę równą 3.

Funkcye:

$$\sum x_1 x_1 x_3 x_4 = p_4$$
$$\sum x_1^2 x_2 x_3 + 4 \sum x_1 x_2 x_3 x_4 = p_1 p_3$$
$$\sum x_1^2 x_2^2 + 2 \sum x_1^2 x_2 x_3 + 6 \sum x_1 x_2 x_3 x_4 = p_2^2$$

i t. d, mają wagę równą 4.

Twierdzenie powyższe ułatwia wielce przekształcanie funkcyj symetrycznych dowolnych na funkcye elementarne. W saméj rzeczy, jeżeli mamy przekształcić funkcyą np. $\sum x_1^3 x_2^2 x_3$, to wiemy na zasadzie tego twierdzenia, że odpowiadające jéj wyrażenie, złożone z funkcyj elementarnych, musi być stopnia trzeciego i wagi równéj 6., t. j. że zawierać będzie wyrazy $p_1 p_2 p_3, p_1^2 p_4, p_3^2, p_2 p_4, p_1 p_5, p_6$, pozostaje więc tylko oznaczenie współczynników.

Do tego celu służą specyalne tablice funkcyj symetrycznych, ułożone przez Meiera Hirscha[16], Cayley'a[17], Faa de Bruno[18] Řehořovsky'ego[19]. Objaśnimy tu układ i sposób użycia takich tablic według symbolistyki Cayley'a.

Funkcye symetryczne oznacza się za pomocą symbolu, zawierającego wykładniki jéj elementów, tak np. funkcyą Σx_1 oznaczamy krótko przez (1), $\Sigma x_1 x_2$ przez (11) lub (1^2), $\Sigma x_1 x_2 x_3$ przez (111) lub (1^3), $\Sigma x_1{}^3 x_2$ przez (31), $\Sigma x_1{}^3 x_2{}^2 x_3$ przez (321), $\Sigma x_1{}^4 x_2{}^3 x_3 x_4 x_5$ przez (43111) lub (431^3) i t. d.

Funkcye symetryczne, wyrażone przez funkcye elementarne, oznaczamy za pomocą podobnych symbolów, w których wykładniki zastępujemy wagami. Musimy wszakże zwrócić uwagę na to, że w tablicach funkcyj symetrycznych zamiast

$$p_1, p_2, p_3 \ldots p_i \ldots \ldots p_n$$

znajdujemy

$$a_1, a_2, a_3 \ldots a_i \ldots \ldots a_n,$$

gdzie:

$$a_1 = -p_1, a_2 = p_2, a_3 = -p_3, \ldots\; a_i = (-1)^i p_i \ldots\; a_n = (-1)^n p_n.$$

Funkcya $a_i{}^\lambda a_{i'}{}^{\lambda'} a_{i''}{}^{\lambda''} \ldots$ oznacza się za pomocą symbolu $i^\lambda\, i'^{\lambda'}\, i''^{\lambda''} \ldots$ tak że np.

$$a_1{}^2 = 1^2, \quad a_2{}^2 = 2^2, \quad a_2 a_3 = 23, \quad a_4 = 4,$$
$$a_1{}^4 a_2 = 1^4 2, \quad a_1 a_2 a_3 = 123, \quad a_1{}^3 a_2{}^2 a_3 = 1^3 2^2 3, \text{ i t. p.}$$

Przy takiém znakowaniu, funkcya, którą obliczyliśmy wyżéj za pomocą metody Waringa, przedstawi się pod postacią

$$(321) = 123 - 3.1^2 4 - 3.3^2 + 4.24 + 7.15 - 12.6$$

a funkcye, podane w przykładach na poprzedzającéj stronnicy, w sposób następujący:

$$(1) = 1,$$
$$(1^2) = 2,$$
$$(2) + 2.(1^2) = 1^2,$$
$$(1^3) = 3.,$$
$$(21) + 3.(1^3) = 12,$$
$$(3) + 3.(21) + 6.(1^3) = 1^3,$$
$$(1^4) = 4,$$
$$(21^2) + 4.(1^4) = 13,$$
$$(2^2) + 2.(21^2) + 6.(1^4) = 2^2.$$

Hosted by Google

Tablice funkcyj symetrycznych kolejnych wag są tak urządzone, że w kolumnie pierwszéj po stronie prawéj są wypisane wyrażenia funkcyj symetrycznych w zmiennych $x_1, x_2 \ldots$, w pierwszym zaś wierszu poziomym od góry agregaty funkcyj symetrycznych elementarnych; w innych kolumnach i wierszach są wypisane współczynniki. Do każdego agregatu postaci pierwszéj należą współczynniki, znajdujące się w tym samym wierszu poziomym; współczynniki te, przy przekształcaniu funkcyj symetrycznych, wypisują się obok odpowiednich agregatów postaci drugiéj. W przypisach[20] podajemy tablice funkcyj symetrycznych, odpowiadające wagom od 1 do 8 włącznie, tu zaś na kilku przykładach objaśniamy ich użytek.

Przykłady.

1. Mamy do przekształcenia funkcyą $\Sigma x_1{}^2$. Funkcya ta jest wagi $=2$; znajdujemy ją pod formą (1^2) w tablicy 2-éj, będzie więc

$$(1^2) = +1 \,.\, 1^2 - 2 \,.\, 2$$

t. j.

$$\Sigma x_1{}^2 = a_1{}^2 - 2a_2 = p_1{}^2 - 2p_2.$$

2. Niechaj będzie do przekształcenia funkcya, wyżéj podana: $\Sigma x_1{}^3 x_2 x^2{}_3$. Funkcya ta jest wagi$=6$. Znajdujemy ją w tablicy 6-éj pod postacią (321); współczynnikami jéj są

$$+1, \; -3, \; -3, \; +4, \; +7, \; -12$$

a odpowiedniemi agregatami funkcyj symetrycznych elementarnych:

$$123, \quad 3^2, \quad 1^2 4, \quad 24, \quad 15, \quad 6,$$

otrzymujemy przeto

$$(321) = +1 \,.\, 123 - 3 \,.\, 3^2 - 3 \,.\, 1^2 4 + 4 \,.\, 24 + 7 \,.\, 15 - 12 \,.\, 6$$

t. j.

$$\begin{aligned}\Sigma x_1{}^3 x_2{}^2 x_3 &= a_1 a_2 a_3 - 3\, a_3{}^2 - 3a_1{}^2 a_4 + 4\, a_2 a_4 + 7a_1 a_5 - 12 a_6 \\ &= p_1 p_2 p_3 - 3p_3{}^2 - 3p_1{}^2 p_4 + 4\, p_2 p_4 + 7p_1 p_5 - 12 p_6\end{aligned}$$

3. Dajmy funkcyą

$$\Sigma x_1{}^3 x_2 x_3 x_4 = (31^3).$$

Podług tablicy 6-éj jéj współczynnikami będą

$$1, \quad 0, \quad -2, \quad -1, \quad 6,$$

a odpowiedniemi agregatami

$$3^2, \quad 1^24, \quad 24, \quad 15, \quad 6;$$

znajdujemy przeto

$$(31^3) = 1.3^2 + 0.1^24 - 2.24 - 1.15 + 6.6,$$

a więc:

$$\begin{aligned}\Sigma x_1^3 x_2 x_3 x_4 &= a_3^2 - 2a_2a_4 - a_1a_5 + 6a_6 \\ &= p_3^2 - 2p_2p_4 - p_1p_5 + 6p_6.\end{aligned}$$

Niechaj będzie jeszcze funkcya symetryczna

$$\Sigma x_1^6 x_2 x_3 - \Sigma x_1^4 x_2^2 x_3^2 = (61^2) - (42^2).$$

Podług tablicy 8-éj mamy:

$$\begin{aligned}(61^2) = {} & 1.1^53 - 5.1^323 + 5.12^23 + 5.1^23^2 - 5.23^2 - 1.1^44 \\ & + 4.1^224 - 2.2^24 - 9.134 + 4.4^2 + 1.1^35 - 3.125 \\ & + 8.35 - 1.1^26 + 2.26 + 1.17 - 8.8;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(42^2) = {} & 1.1^23^2 - 2.23^2 + 0.1^44 - 2.1^224 + 4.2^24 + 0.134 \\ & - 4.4^2 + 2.1^35 - 4.125 + 8.35 - 2.1^26 - 4.26 \\ & + 8.17 - 8.8;\end{aligned}$$

a więc

$$\begin{aligned}(61)^2 - (42^2) = {} & 1.1^53 - 5.1^323 + 5.12^23 + 6.1^23^2 - 7.23^2 \\ & - 1.1^44 - 2.1^224 + 2.2^24 - 9.134 + 3.1^35 \\ & - 7.125 + 16.35 - 3.1^26 - 2.26 + 9.17 - 16.8;\end{aligned}$$

t. j.

$$\begin{aligned}\Sigma x_1^6 x_2 x_3 - \Sigma x_1^4 x_2^2 x_3^2 = {} & a_1^5 a_3 - 5a_1^3 a_2 a_3 + 5a_1 a_2^2 a_3 + 6a_1^2 a_3^2 \\ & - 7a_2 a_3^2 - a_1^4 a_4 + 2a_1^2 a_2 a_4 + 2a_2^2 a_4 \\ & - 9a_1 a_3 a_4 + 3a_1^3 a_5 - 7a_1 a_2 a_5 + 16a_3 a_5 \\ & - 3a_1^2 a_6 - 2a_2 a_6 + 9a_1 a_7 - 16a_8,\end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned}\Sigma x_1^6 x_2 x_3 - \Sigma x_1^4 x_2^2 x_3^2 = {} & p_1^5 p_3 - 5p_1^3 p_2 p_3 + 5p_1 p_2^2 p_3 + 6p_1^2 p_3^2 \\ & - 7p_2 p_3^2 - p_1^4 p_4 + 2p_1^2 p_2 p_4 + 2p_2^2 p_4 \\ & - 9p_1 p_3 p_4 + 3p_1^3 p_5 - 7p_1 p_2 p_5 + 16p_3 p_5 \\ & - 3p_1^2 p_6 - 2p_2 p_6 + 9p_1 p_7 - 16p_8.\end{aligned}$$

Hosted by Google

Tablice funkcyj symetrycznych mogą też służyć do obliczania funkcyj alef. W saméj rzeczy, dajmy, że mamy do obliczenia funkcyą A_5. Funkcya ta, jak wiadomo, jest sumą funkcyj symetrycznych (5), (41), (32), (31^2), (2^21), (213), (5^5), którym odpowiadają następujące współczynniki:

-1	przy agregacie		1^5,
$+5-1=4$	"	"	1^32,
$-5+3-1=-3$	"	"	12^2,
$-5+1+2-1=-3$	"	"	1^23,
$+5-5+1+2-1=2$	"	"	23,
$+5-1-5+1+3-1=2$	"	"	14,
$-5+5+5-5-5+5-1=-1$	"	"	5,

będzie zatém

$$A_5 = -1.1^5 + 4.1^32 - 3.12^2 - 3.1^23 + 2.23 + 2.14 - 1.5,$$

to jest

$$A_5 = -a_1{}^5 + 4a_1{}^3a_2 - 3a_1a_2{}^2 - 3a_1{}^2a_3 + 2a_1a_4 + 2a_2a_3 - a_5$$

lub

$$A_5 = p_1{}^5 - 4p_1{}^3p_2 + 3p_1p_2{}^2 + 3p_1{}^2p_3 - 2p_1p_4 - 2p_2p_3 + p_5.$$

Wynik ten jest zgodny z podanym wyżéj.

W końcu wspomnimy jeszcze o metodzie, za pomocą któréj Kronecker[21] sprowadza badanie funkcyj symetrycznych, zależnych od zmiennych $x_1, x_2 \ldots, x_n$ do pewnego układu takichże funkcyj, zwanego *układem zasadniczym*. Do układu zasadniczego należą funkcye

$$\Sigma\, x_1{}^{a_1}x_2{}^{a_2}\ldots x_{n-1}{}^{a_{n-1}},$$

dla których

$$a_1 > a_2 \ldots > a_{n-1},$$

$$\begin{array}{l} a_1 \leqq n-1 \\ a_2 \leqq n-2 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ a_{n-1} \leqq 1 \end{array}$$

Hosted by Google

W samej rzeczy, jeżeli iloczyn 1., który jak wiadomo, równa się

$$x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^n p_n,$$

podzielimy przez iloczyn $k-1$ czynników:

$$(x-x_1)(x-x_2)\ \ldots (x-x_{k-1}),$$

otrzymamy iloczyn $n-k+1$ czynników

$$(x-x_k)(x-x_{k+1})\ \ldots\ (x-x_n)$$

pod postacią funkcyi całkowitéj stopnia $(n-k+1)$-go, któréj współczynniki, na podstawie teoryi, podanéj w art. 34 wyrazić można, jako funkcye całkowite liczb

$$x_1, x_2 \ldots x_k, \qquad p_1, p_2 \ldots p_n.$$

Funkcya ta staje się oczywiście zerem dla $x=x_k$; kładąc więc w niéj x_k na miejsce x, otrzymujemy równanie, którego pierwszym wyrazem będzie x_k^{n-k+1}, a pozostałe wyrazy zawierać będą potęgi liczby x_n o wykładniku mniejszym od $n-k+1$. To więc równanie daje nam możność wyrażenia każdéj potęgi liczby x_k, wyższéj od $(n-k)$-éj za pomocą potęg niższych. Kładąc więc $k=1,2 \ldots n$, będziemy mogli każdą funkcyą zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_n$ sprowadzić do takich funkcyj całkowitych, które względem zmiennéj x_1 są stopnia $n-1$, względem zmiennéj x_2 stopnia $n-2, \ldots$ względem zmiennéj x_n stopnia 0, a których współczynniki są funkcyami całkowitemi funkcyj symetrycznych elementarnych. Tym sposobem twierdzenie ogólne o funkcyach symetrycznych zostało jeszcze raz dowiedzione. Funkcye całkowite, do których zredukowaliśmy funkcye dane, stanowią układ zasadniczy.

Funkcye tego układu można uporządkować według ich wag, wypisując najprzód funkcye symetryczne o wadze równéj 1, następnie funkcye o wadze równéj 2, . . ., w końcu o wadze równéj $\frac{n(n-1)}{2}$.

38. POCHODNE FUNKCYI CAŁKOWITÉJ.

Niechaj będzie funkcya całkowita n zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_n$:

1. $$F = \sum c_{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n}\ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Uporządkujmy tę funkcyą według potęg jednéj ze zmiennych np.

Hosted by Google

zmiennéj x_i i dajmy, że otrzymujemy wówczas funkcyą całkowitą stopnia m_i względem téj zmiennéj:

$$2.\quad F = a_0^{(i)} x_i^{m_i} + a_1^{(i)} x_i^{m_i - 1} + \ldots + a_{m_i-2}^{(i)} x^2 + a_{m_i-1}^{(i)} x_i + a_{m_i}^{(i)} x_i^0$$
$$= \sum_{l=0}^{l=m_i} a_l^{(i)} x_i^{m_i - l};$$

współczynniki $a_l^{(i)} [l = 0, 1, 2 \ldots m_i]$ są tu funkcyami zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_{i-1}, x_{i+i} \ldots x_n$. Każdy z wyrazów funkcyi 2. pomnóżmy przez wykładnik znajdującéj się w nim potęgi zmiennéj x_i, a następnie w każdym wykładnik zmiennéj zniżmy o 1, t. j. zamiast

$$3.\quad a_l^{(i)} x_i^{m_i - l}$$

napiszmy

$$4.\quad (m_i - l)\, a_l^{(i)} x_i^{m_i - l - 1}$$

[Zamiast ostatniego wyrazu $a_{m_i}^{(i)} x_i^0$ napiszemy oczywiście 0]. Nazwijmy wyrażenie 4. *pochodną* wyrazu 3. *względem zmiennéj* x_i i utwórzmy funkcyą stopnia $m_i - 1$, złożoną z wyrazów postaci 4. Funkcya ta

$$m_i a_0^{(i)} x_i^{m_i - 1} + (m_i - 1)\, a_1^{(i)} x_i^{m_i - 2} + \ldots + 2 a_{m_i-2}^{(i)} x_i + a_{m_i-1}^{(i)}$$
$$= \sum_{l=0}^{l=m_i-1} (m_i - l)\, a_l^{(i)} x_i^{m_i - l - 1}$$

nazywa się *pochodną* funkcyi całkowitéj F *względem zmiennéj* x_i i oznacza się przez

$$F'_{x_i} \text{ lub } D_{x_i} F.$$

Będzie tedy

$$5.\quad F'_{x_i} = D_{x_i} F = \sum_{l=0}^{l=m_i-1} (m_i - l)\, a_i^{(i)} x_i^{m_i - l - 1}$$

Z tego określenia wynika: 1^0. że pochodna funkcyi całkowitéj względem zmiennéj x_i jest równa sumie pochodnych jéj wyrazów względem téjże zmiennéj; 2^0. pochodna względem zmiennéj x_i wyrazu, zmiennéj téj nie zawierającego, jest równa zeru; 3^0. stopień pochodnéj względem zmiennéj x_i jest o 1 niższy od stopnia funkcyi pierwotnéj względem téjże zmiennéj.

Hosted by Google

Zmieniając we wzorze 5. skaźnik i, to jest kładąc kolejno

$$i = 1, 2, 3 \ldots n,$$

otrzymujemy n pochodnych $F'_{x_1}, F'_{x_2} \ldots F'_{x_n}$.

Niechaj będzie naprzykład funkcya jednorodna

$$F = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = m} c_{\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots x_n^{\alpha_n} \tag{6.}$$

Biorąc według prawidła pochodne względem zmiennéj x_i, znajdujemy

$$F'_{x_i} = \sum c_{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n} \alpha_i x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\alpha_i - 1} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

skąd

$$x_i F'_{x_i} = \sum c_{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n} \alpha_i x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

Suma podobnych równości dla $i = 1, 2, \ldots n$ daje:

$$\begin{aligned}\sum x_i F'_{x_i} &= \sum c_{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha} (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) \sum c_{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \\ &= m F,\end{aligned}$$

skąd

$$F = \frac{1}{m} \sum x_i F'_{x_i} \tag{7.}$$

Wzór ten, zwany wzorem E u l e r a, wyraża następującą własność funkcyj całkowitych jednorodnych.

"Każda funkcya całkowita jednorodna stopnia m-go, zależna od n zmiennych, jest równa m-éj części sumy pochodnych, wziętych względem każdéj ze zmiennych a pomnożonych przez zmienne odpowiednie".

Własność ta przedstawia pod inną postacią twierdzenie o funkcyach jednorodnych, podane w artykule 32.

Do funkcyi 5. można zastosować to samo działanie, jakie stosowaliśmy do funkcyi 1. lub 2. Biorąc pochodną wyrazu 4. względem zmiennéj x_i, znajdujemy:

$$(m_i - l)(m_i - l - i)\, a_l^{(i)} x_i^{m_i - l - 2} \tag{8.}$$

a suma wyrazów 8., t. j. funkcya całkowita stopnia $(m_i - 2)$-go

Hosted by Google

$$\sum_{l=0}^{l=m_i-2}(m_i-l)(m_i-l-1)\,a_l^{(i)}x_i^{m_i-l-2}$$

jest pochodną funkcyi F'_{x_i} względem zmiennéj x_i; czyli jest pochodną pochodnéj funkcyi danéj F; nazywamy ją *pochodną rzędu drugiego* lub *pochodną drugą* funkcyi F i oznaczamy przez $F''_{x_ix_i}$ albo przez $F''_{x_i^2}$, albo wreszcie przez $D^2_{x_i^2}F$; będzie zatém

9. $$F''_{x_i^2}=D^2_{x_i^2}F=\sum_{l=0}^{l=m_i-2}(m_i-l)(m_i-l-1)\,a_l^{(l)}x_i^{m_i-l-2}$$

Wyraz 4. jest funkcyą całkowitą nietylko zmiennéj x_i ale wogóle i pozostałych zmiennych; możemy przeto otrzymać pochodną jego względem któréjkolwiek z tych zmiennych np. względem x_k; w działaniu tém czynnik $x_i^{m_i-l-1}$ należy wtedy uważać za współczynnik stały. Pochodna tedy wyrazu 3. względem x_k będzie równa:

10. $$(m_i-l)\,x_i^{m_i-l-1}D_{x_k}a_l^{(i)}$$

gdzie pochodną funkcyi całkowitéj $a_l^{(i)}$ względem x_k wyznaczamy na podstawie tego samego prawidła, podług którego oznaczyliśmy wyżéj pochodną względem x_i funkcyi F. Biorąc sumę wyrazów postaci 10., otrzymujemy pochodną względem x_k pochodnéj F'_{x_i}; tę pochodną drugą funkcyi F oznaczamy przez $F''_{x_ix_k}$ lub $D^2_{x_ix_k}F$, będzie tedy

11. $$F''_{x_ix_k}=D^2_{x_ix_k}F=\sum_{l=0}^{l=m_i-1}(m_i-l)\,D_{x_k}a_l^{(i)}.x_l^{m_i-l-1}$$

Wzór 11. obejmuje w sobie $n(n-1)$ pochodnych, które otrzymujemy, zmieniając skaźniki i i k; pomiędzy temi pochodnemi będzie wszakże tylko połowa różnych, o czém przekonywa twierdzenie

12. $$F''_{x_ix_k}=F''_{x_kx_i}$$

wyrażające, że pochodna druga nie zależy od porządku skaźników.

W saméj rzeczy, biorąc pochodną wyrazu 3. względem zmiennéj x_k, otrzymujemy

$$D_k a_l^{(i)}x_i^{m_i-l},$$

pochodna zaś tego wyrażenia względem x_i, ponieważ $D_k a_l^{(i)}$ od x_i nie zależy, będzie

Hosted by Google

$$(m_i - l)\, Dx_k\, a_l^{(i)}.x_i^{m_i - l - 1},$$

to jest zupełnie identyczną z wyrażeniem 10. Jest zatém:

$$F''_{x_k x_i} = \sum_{l=0}^{l=m_i-1} (m_i - l) D_k\, a_l^{(i)}.x_i^{m_i - l - 1},$$

skąd wynika prawdziwość twierdzenia 12.

Pochodnych rzędu drugiego różnych będzie $\frac{n(n+1)}{2}$.

Od pochodnych rzędu drugiego możemy przejść do pochodnych *rzędu trzeciego*, biorąc pochodne funkcyj całkowitych 9. i 10. względem któréjkolwiek ze zmiennych. I tak biorąc pochodne funkcyi całkowitéj 9. względem zmiennéj x_i, otrzymujemy pochodną *rzędu trzeciego* lub *pochodną trzecią* funkcyi F względem x_i. Wyrażenie téj pochodnéj jest następujące:

13. $$F'''_{x_i^3} = D^3_{x_i^3} F = \sum_{l=0}^{l=m_i-3} (m_i - l)(m_i - l - 1)(m_i - l - 2) a_l^{(i)} x^{m_i - l - 3}$$

Biorąc zaś pochodną funkcyi całkowitéj $F''_{x_i x_k}$ lub $F''_{x_k x_i}$ względem zmiennéj x_r, znajdziemy:

14. $$F'''_{x_i x_k x_r} = D^3_{x_i x_k x_r} F = \sum_{l=0}^{l=m_i-1} (m_i - l) D^2_{x_k x_r} a_l^{(i)} x^{m_i - l - 1}$$

I tu sposobem, podobnym do podanego wyżéj, przekonać się można, że pochodna

$$F'''_{x_i x_k x_r},$$

nie zależy od porządku skaźników. Postępując tą metodą daléj, dochodzimy do pochodnych rzędu *czwartego*, *piątego* i t. d. Pochodne te będą miały następujące wyrażenia:

15.
$$F^{IV}_{x_i^4} = D^4_{x_i^4} F = \sum_{l=0}^{l=m_i-4} (m_i - l)(m_i - l - 1)(m_i - l - 2)(m_i - l - 3) a_l^{(i)} x^{m_i - l - 4}$$

$$F^{V}_{x_i^5} = D^5_{x_i^5} F = \sum_{l=0}^{l=m_i-5} (m_i - l)(m_i - l - 1)(m_i - l - 2)(m_i - l - 3)(m_i - l - 4) a_l^{(i)} x^{m_i - l - 5}$$

. . . .

$$F^{(s)}_{x_i^s} = D^s_{x_i^s} F = \sum_{l=0}^{i=m_i-s} (m_i - l)(m_i - l - 1) \ldots (m_i - l - s + 1) a_l^{(i)} x^{m_i - l - s}$$

Hosted by Google

Pochodna rzędu m_i-go funkcyi F względem x_i będzie składała się z jednego wyrazu

16. $$F^{(m_i)}_{x_i^{m_i}} = D^{m_i}_{x_i^{m_i}} F = m_i(m_i-1)(m_i-2)\ .\ .\ .\ 2.1.a_0^{(i)}$$

to jest będzie funkcyą całkowitą, zależną tylko od zmiennych pozostałych, a wszystkie jéj następne pochodne względem zmiennéj x_i, to jest

$$F^{(m_i+1)}_{x_i^{m_i+1}},\ F^{(m_i+2)}_{x_i^{m_i+2}}\ .\ .\ .$$

będą zerami. Jeżeli w szczególności funkcya F jest funkcyą całkowitą stopnia m jednéj tylko zmiennéj x, to kolejne jéj pochodne: pierwsza, druga i t. d. są funkcyami całkowitemi stopni: $m-1$, $m-2$ . . ., pochodna rzędu m-go jest stopnia zero, czyli jest liczbą stałą, a wszystkie pochodne rzędów wyższych od m-go są zerami.

Niechaj będą dwie funkcye całkowite zmiennéj x

$$F_1 = \Sigma_\lambda a_\lambda x^\lambda, \qquad F_2 = \Sigma_\mu b_\mu x^\mu;$$

postarajmy się oznaczyć pochodną ich iloczynu $F_1\, F_2$ względem zmiennéj x.

Ponieważ

$$F_1 F_2 = \Sigma_{\lambda,\mu} a_\lambda b_\mu x^\lambda x^\mu = \Sigma_{\lambda\mu} a_\lambda b_\mu x^{\lambda+\mu},$$

przeto na podstawie określenia będzie:

$$\begin{aligned} D_x(F_1F_2) &= \Sigma_{\lambda,\mu}(\lambda+\mu)a_\lambda b_\mu x^{\lambda+\mu-1} \\ &= \Sigma_\mu b_\mu x^\mu . \Sigma_\lambda \lambda\, a_\lambda . x^{\lambda-1} + \Sigma_\lambda a_\lambda x^\lambda . \Sigma_\mu \mu . b_\mu x^{\mu-1}, \end{aligned}$$

skąd wynika wzór

17. $$D_x(F_1 F_2) = F_2 . D_x F_1 + F_1 . D_x F_2$$

wyrażający, że pochodna iloczynu dwóch funkcyj równa się sumie iloczynów pierwszego czynnika przez pochodną drugiego i drugiego czynnika przez pochodną pierwszego.

Na zasadzie tego twierdzenia możemy otrzymać prawidło, według którego znajdujemy pochodną trzech, czterech i w ogóle skończonéj liczby czynników.

W saméj rzeczy:

$$F_1 F_2 F_3 = (F_1.F_2).F_3,$$

a więc według 16.

$$\begin{aligned} D_x(F_1 F_2 F_3) &= F_3.D_x(F_1 F_2) + F_1 F_2.D_x F_3 \\ &= F_3(F_2.D_x F_1 + F_1.D_x F_2) + F_1 F_2.D_x F_3 \\ &= F_3 F_2.D_x F_1 + F_3 F_1.D_x F_2 + F_1 F_2.D_x F_3 \end{aligned}$$

Podobnież będzie

$$\begin{aligned} D_x(F_1 F_2 F_3 F_4) = F_2 F_3 F_4.D_x F_1 + F_1 F_3 F_4.D_x F_2 + F_1 F_2 F_4.D_x F_3 \\ + F_1 F_2 F_3 D_x F_4 \end{aligned}$$

i w ogólności

18. $$\begin{aligned} D_x(F_1 F_2 \ldots F_{n-1} F_n) = F_2 \ldots F_n.D_x F_1 \\ + F_1 F_3 \ldots F_n.D_x F_2 + \ldots + F_1 F_2 \ldots F_{n-1}.D_x F_n. \end{aligned}$$

Jeżeli przez Φ nazwiemy iloczyn $F_1 F_2 \ldots F_n$, to wzór 17 możemy przedstawić pod postacią

19. $$\begin{aligned} D_x \Phi &= \frac{\Phi}{F_1}.D_x F_1 + \frac{\Phi}{F_2}.D_x F_2 + \ldots + \frac{\Phi}{F_n}.D_x F_n \\ &= \Phi\left(\frac{D_x F_1}{F_1} + \frac{D_x F_2}{F_2} + \ldots + \frac{D_x F_n}{F_n}\right) \end{aligned}$$

Zakładając $F_1 = F_2 = \ldots = F_n = F$, a więc $\Phi = F^n$, otrzymujemy z wzoru 17.

20. $$D_x F^n = n F^{n-1}.D_x F,$$

t.j. wzór na pochodną potęgi funkcyi całkowitéj. Biorąc pochodną obu stron wzoru 16., otrzymujemy na zasadzie tego samego wzoru:

$$\begin{aligned} D^2_{x^2}(F_1 F_2) &= D_x F_1.D_x F_2 + F_2.D^2_{x^2} F_1 + D_x F_2.D\ F_1 + F_1 D^2_{x^2} F_2 \\ &= F_2.D^2_{x^2} F_1 + 2 D_x F_1.D_x F_2 + F_1.D^2_{x^2} F_2 \end{aligned}$$

Biorąc pochodną obu stron, będziemy mieli

$$\begin{aligned} D^3_x(F_1 F_2) = F_2.D^3_{x^3} F_1 + 3 D_x F_2.D^2_{x^2} F_1 + 3 D^2_{x^2} F_2.D_x F_1 \\ + F_1.D^3_{x^3} F_2, \end{aligned}$$

a postępując w ten sam sposób daléj, dojdziemy do wzoru ogólnego

Hosted by Google

$$D^m_{x^m}(F_1F_2) = F_2 . D^m_{x^m} F_1 + m\, D_x F_2 . D^{m-1}_{x^{m-1}} F_1$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} D_{x^2} F_2 \,.\, D^{m-2}_{x^{m-2}} F_1 + \ldots + m D^{m-1}_{x^{m-1}} F_2 . D_x F_1 + F_1 D^m_{x^m} F_2,$$

którego ogólność stwierdzić można, przechodząc od rzędu m do rzędu $m+1$-go. Wzór ten, znany pod nazwą wzoru **Leibniza**, możemy przedstawić pod postacią,

$$21. \quad D^m_{x^m}(F_1F_2) = \sum_{l=0}^{l=m} \frac{m(m-1)\ldots(m-l+1)}{1\,.\,2\ldots l} D^{(l)}_{x^l} F_2 . D^{(m-l)}_{x^{m-l}} F_1$$

rozumiejąc przez pochodne rzędu 0, t. j. przez $D^0_{x^0} F_1$ i $D^{(0)}_{x^0} F_1$ same funkcye F_1 i F_2.

Wzór ten można uogólnić, rozszerzając go na iloczyn ilukolwiek funkcyj całkowitych. Wzór ogólniejszy ma postać

$$22. \; D^m_{x^m}(F_1F_2\ldots F_n) = \sum \frac{m!}{\alpha_1!\; \alpha_2! \ldots \alpha_n!} D^{\alpha_1}_{x^{\alpha_1}} F_1 . D^{\alpha_2}_{x^{\alpha_2}} F_2 \ldots D^{\alpha_n}_{x^{\alpha_n}} F_n\,,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n = m.$$

analogiczną z wzorem, dającym rozwinięcie m-éj potęgi wielomianu $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ [art. 32.].

Wzory 21. i 22. przedstawia się niekiedy symbolicznie pod postacią

$$23. \quad \begin{aligned} D^m_{x^m}(F_1F_2) &= (D_xF_1 + D_xF_2)^m, \\ D^m_{x^m}(F_1F_2\ldots F_n) &= (D_xF_1 + D_xF_2 + \ldots + D_xF_n)^m, \end{aligned}$$

którą należy rozumieć w ten sposób, że rozwijając potęgę m-ą sumy $D_xF_1 + D_xF_2$ lub sumy $D_xF_1 + D_xF_2 + \ldots D_xF_n$, nie opuszczamy wyrazów z wykładnikiem zero, oraz zastępujemy

$$(D_xF_1)^{\alpha_1}, \; (D_xF_2)^{\alpha_2} \ldots$$

przez

$$D^{\alpha_1}_{x_1^{\alpha_1}} F_1 \qquad D^{\alpha_2}_{x^{\alpha_2}} F_2 \ldots\ldots$$

gdy $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ nie są zerami, a przez

$$F_1, \; F_2 \ldots$$

gdy te wykładniki są zerami.

Hosted by Google

Jeżeli w równaniu 17. napiszemy $F_1 F_2 = F$, skąd

$$F_2 = \frac{F}{F_1},$$

znajdziemy z niego

$$D_x \frac{F}{F_1} = \frac{1}{F_1}\left(D_x F - \frac{F}{F_1} D_x F_1 \right)$$

lub

24. $$D_x \frac{F}{F_1} = \frac{F_1 . D_x F - F . D_x F_1}{F_1{}^2},$$

t. j. wzór na pochodną ilorazu dwóch funkcyj całkowitych.

Jeżeli w szczególności $F=1$, otrzymujemy

25. $$D_x \frac{1}{F_1} = -\frac{D_x F_1}{F_1{}^2}.$$

Jeżeli we wzorze 18. położymy

$$F_1 = x_1 - a_1, \quad F_2 = x - a_2, \; . \; . \; . \; F_n = x - a_n,$$
$$\Phi = (x - a_1)(x - a_2) \; . \; . \; . \; (x - a_n),$$

gdzie $a_1, a_2 \ldots a_n$ są liczby różne, będziemy mieli

$$D_x F_1 = D_x F_2 = \ldots = D_x F_n = 1,$$

zatém

26. $$D_x \; \Phi = \frac{\Phi}{x - a_1} + \frac{\Phi}{x - a_2} + \ldots + \frac{\Phi}{x - a_n} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Phi}{x - a_i}.$$

Podamy jeszcze określenia kilku pojęć, które będą pózniéj potrzebne.

Jeżeli dla funkcyi

$$F = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a^{m-1} x + a_m$$

i jéj pochodnéj

$$F'_x = m a_0 x^{m-1} + (m-1) a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1},$$

utworzymy rugownik według teoryi podanej w art. 35., otrzymamy wyznacznik, który podzielony przez a_0, stanowi *wyróżnik* [discriminant] funkcyi danéj[22]. Wyróżnik ten, przyrównany do zera, przed-

Hosted by Google

stawia warunek, przy którym funkcya dana i jéj pochodna mają czynnik wspólny. W Algebrze pojęcie wyróżnika ma znaczenie bardzo ważne.

Wrońskianem m funkcyj $F_1, F_2, .., F_m$ jednéj zmiennéj x, nazywamy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} F_1 & , F_2 & \dots F_m \\ F_1' & , F_2' & \dots F_m' \\ F_1'' & , F_2'' & \dots F_m'' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ F_1^{(m)}, & F_2^{(m-1)} & \dots F_m^{(m-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1, & F_2 & \dots F_m \\ DF_1, & DF_2 & \dots DF_m \\ D^2F_1, & D^2F_2 & \dots D^2F_m \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ D^{m-1}F_1, & D^{m-1}F_2 & \dots D^{m-1}F_m \end{vmatrix}$$

w którego pierwszym wierszu znajdują się funkcye dane, w drugim pochodne pierwsze tych funkcyj, w trzecim pochodne drugie . . ., w m-ym pochodne (m—1)-e. Wrońskian oznaczać będziemy przez

$$W(F_1, F_2, \dots F_m).$$

W r o ń s k i nazywał te wyznaczniki funkcyami *schin* [porów. str. 192][23]. Pojęcie wrońskianu można rozszerzyć do funkcyj $F_1, F_2, .. F_m$, zależnych od n zmiennych $x_1, x_2 \dots x_n$, wprowadzając funkcye utworzone z pochodnych, a mianowicie funkcye

$$\delta F_i = q_1 D_{x_1} F_i + q_2 D_{x_2} F_i + \dots + q_n D_{x_n} F_i$$

gdzie $q_1, q_2, \dots q_n$ są liczbami dowolnemi, oraz

$$\delta F_i = \delta(\delta F_i), \ \delta^3 F_i = \delta(\delta^2 F_i) \ \dots$$

Wrońskianem takich funkcyj nazwiemy wtedy wyrażenie:

$$W(F_1, F_2, \dots F_m) = \begin{vmatrix} F_1, & F_2, & \dots F_m \\ \delta F_1, & \delta F_2, & \dots \delta F_m \\ \delta^2 F_1, & \delta^2 F_2, & \dots \delta^2 F_m \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta^{m-1}F_1, & \delta^{m-1}F_2 & \dots \delta^{m-1}F_m \end{vmatrix}$$

Jakobianem[24] funkcyj $F_1, F_2, \dots F_n$ n zmiennych $x_1, x_2 \dots x_n$ nazywamy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} D_{x_1} F_1, & D_{x_2} F_1, & \dots & D_{x_n} F_1 \\ D_{x_1} F_2, & D_{x_2} F_2, & \dots & D_{x_n} F_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{x_1} F_n, & D_{x_2} F_n, & \dots & D_{x_n} F_n \end{vmatrix}$$

Wyznacznik ten oznaczać będziemy przez

$$J(F_1, F_2, \dots F_n).$$

Jeżeli funkcye $F_1, F_2, \dots F_n$ są same pochodnemi pierwszemi pewnéj funkcyi F, to jest jeżeli

$$F_1 = D_{x_1} F, \quad F_2 = D_{x_2} F, \quad \dots \quad F_n = D_{x_n} F,$$

wtedy elementy jakobianu są wszystkie pochodnemi drugiego rzędu funkcyi F; oznaczając pochodną $D_{x_i x_k} F$ dla krótkości przez F_{ik}— na mocy twierdzenia 12. jest $F_{ik} = F_{ki}$— otrzymujemy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} F_{11}, & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21}, & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{n1}, & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix},$$

nazwany *hessianem* funkcyi F i oznaczany zwykle przez $H(F)$[25].

Określenia tu podane są ogólne, bo stosują się nietylko do funkcyj całkowitych, ale do wszelkich funkcyj w ogólności. We właściwém miejscu poznamy ważne własności i zastosowania tych algorytmów, a zastosowania wrońskianów wskażemy już w art. 42.

39. WZÓR TAYLORA.

W art. 36 podaliśmy wzór $F = F^{(0)} + F^{(1)} f + F^{(2)} f^2 + \dots + F^{(p)} f^p$, na zasadzie którego funkcyą całkowitą F zmiennéj x możemy rozłożyć według potęg innéj funkcyi całkowitéj f téjże zmiennéj. Niechaj będzie

1. $F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m,$

Hosted by Google

f zaś niechaj będzie funkcyą liniową,

2. $$f = x - h.$$

Według teoryi podanej w art. 36, współczynniki rozkładu otrzymujemy, dzieląc F przez f, iloraz z tego dzielenia przez f i t. d. i oznaczając reszty w każdém z tych dzieleń. Kolejne ilorazy i reszty oznaczymy na podstawie wzorów 7. i 8. art. 34. Według tych wzorów, iloraz z podzielenia funkcyi 1. przez funkcyą 2. będzie

3. $$a_0 x^{m-1} + (a_0 h + a_1) x^{m-2} + (a_0 h^2 + a_1 h + a_2) x^{m-2} + \dots \\ + (a_0 h^{m-1} + a_1 h^{m-2} + \dots + a_{m-1}),$$

reszta zaś będzie równa

$$F^{(0)} = a_0 h^m + a_1 h^{m-1} + \dots + a_{m-1} h + a_m = F(h).$$

Dzieląc funkcyą 3. przez $x-h$, otrzymujemy iloraz

4. $$a_0 x^{m-2} + (2a_0 h + a_1) x^{m-3} + (3a_0 h^2 + 2a_1 h + a_2) x^{m-4} + \dots \\ + \left\{(m-1) a_0 h^{m-2} + (m-2) a_1 h^{m-3} + \dots + a_{m-2}\right\}$$

reszta zaś $F^{(1)}$ będzie równa wartości funkcyi 4. dla $x = h$, to jest:

5. $$F^{(1)} = m a_0 h^{m-1} + (m-1) a_1 h^{m-2} + \dots + 2a_{m-2} h + a_{m-1}.$$

Dzieląc funkcyą 4. przez $x-h$, znajdujemy iloraz

$$a_0 x^{m-3} + (3a_0 h + a_1) x^{m-4} + \dots + \left\{\frac{(m-1)(m-2)}{1.2} a_0 h^{m-3} + \dots + a_{m-3}\right\}$$

a resztą będzie

6. $$F^{(2)} = \frac{1}{1.2}\left\{m(m-1) a_0 h^{m-2} + (m-1)(m-2) a_1 h^{m-3} + \dots + 2.1.a_{m-2}\right\}$$

Postępując tą drogą daléj, otrzymamy następujące wyrażenia reszt:

$$F^{(3)} = \frac{1}{1.2.3}\left\{m(m-1)(m-2) a_0 h^{m-3} + \dots + 3.2.1.a_{m-3}\right\}$$

7. . . . .

$$F^{(m)} = \frac{1}{1.2.3\dots m} m.(m-1)(m-2)\dots 3.2.1.a_0$$

Hosted by Google

Z porównania wzorów 5. 6. 7 z wzorami 5. 9. 15. 16 artykułu poprzedzającego widzimy, że pomiędzy resztami $F^{(0)}, F^{(1)}, F^{(2)} \ldots F^{(m)}$ a wartościami, jakie przyjmują funkcya $F(x)$ i jéj kolejne pochodne względem zmiennéj x, przy wartości x równéj h, zachodzą związki bardzo proste, a mianowicie:

$$
\begin{aligned}
F^{(0)} &= F(h), \\
F^{(1)} &= F'(h), \\
F^{(2)} &= \frac{1}{1.2} F''(h), \\
F^{(3)} &= \frac{1}{1.2.3} F'''(h), \\
&\ldots\ldots\ldots \\
F^{(m)} &= \frac{1}{1.2.3\ldots m} F^{(m)}(h);
\end{aligned} \tag{8}
$$

gdzie $F^{(i)}(h)$ oznacza wartość, jaką przyjmuje pochodna $F_{x^i}^{(i)}(x)$ dla wartości $x=h$. Dochodzimy więc do wzoru:

$$9.\ F(x)=F(h)+(x-h)F'(h)+(x-h)^2\frac{F''(h)}{1.2}+\ldots+(x-h)^m\frac{F^{(m)}(h)}{1.2\ldots m},$$

który możemy napisać także pod postacią

$$10.\ F(x+h)=F(x)+hF'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots+\frac{h^m}{1.2\ldots m}F^{(m)}(x)$$

Wzór ten nazywa się wzorem Taylora. Daje on rozwinięcie *przyrostu* funkcyi, t. j. różnicy

$$F(x+h)-F(x),$$

według potęg przyrostu zmiennéj:

$$11.\ F(x+h)-F(x)=hF'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots+\frac{h^m}{1.2\ldots m}F^{(m)}(x).$$

Z wzoru 9. gdy w nim napiszemy $h=0$, wypływa,

$$12.\quad F(x)=F(0)+xF'(0)+x^2\frac{F''(0)}{1.2}+\ldots+x^m\frac{F^{(m)}(0)}{1.2\ldots m},$$

Hosted by Google

Wzór ten nazywamy wzorem Maclaurina.

Z wzoru 11. kładąc w nim

$$F(x) = x^m,$$

otrzymujemy

$$(x+h)^m = x^m + m\,h\,x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} h^2 x^{m-2} + \ldots + h^m$$

to jest *dwumian* Newtona.

Naodwrót, opierając się na dwumianie Newtona, można rozwinięcie funkcyi $F(x+h)$, przedstawiające się pod postacią

$$F(x+h) = a_0 (x+h)^m + a_1 (x+h)^{m-1} + \ldots + a_{m-1}(x+h) + a_m,$$

przekształcić na wzór Taylora lub Maclaurina.

Od wzoru, dającego rozwinięcie przyrostu funkcyi jednéj zmiennéj, można z łatwością przejść do wzoru, dającego rozwinięcie funkcyi, zależnéj od wielu zmiennych. Dla przypadku dwóch zmiennych x_1, x_2 otrzymujemy wtedy rozwinięcie

$$\begin{aligned}
F(x_1+h_1,\, x_2+h_2) &= F(x_1, x_2) + (h_1 D_{x_1} F + h_2 D_{x_2} F) \\
&+ \frac{1}{1.2}(h_1{}^2 D^2_{x_1{}^2} F + 2\,h_1 h_2 D^2_{x_1 x_2} F + h_2{}^2 D^2_{x_2{}^2} F) \\
13.\quad &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{1}{1.2\ldots.m}(h_1{}^m D^n_{x_1{}^m} F + m h_1{}^{m-1} h_2 D^m_{x_1{}^{m-1} x_2} F \\
&\qquad + \frac{m(m-1)}{1.2} h_1{}^{m-2} h_2{}^2 D^m_{x_1{}^{m-2} x_2{}^2} F + \ldots + h_2{}^m D^m_{x_2{}^m} F).
\end{aligned}$$

Wywód tego wzoru, jak i rozciągnięcie go na większą liczbę zmiennych, znajdzie czytelnik w podręcznikach Algebry lub Rachunku Wyższego.

40. RÓŻNICE FUNKCYJ CAŁKOWITÉJ.

Wzór 11. art. poprzedzającego daje nam przyrost funkcyi całkowitéj, t. j. *różnicę* dwóch jéj wartości $F(x+h)$ i $F(x)$, wyrażoną za

Hosted by Google

pomocą przyrostu h, zwanego różnicą zmiennéj x. Jeżeli wprowadzimy oznaczenia

$$\Delta x = h,\ F(x+h) - F(x) = \Delta F(x),$$

to wzór ten można napisać w ten sposób:

$$1.\qquad \Delta F(x) = \frac{\Delta x}{1} \cdot F'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{1.2} F''(x) + \dots + \frac{(\Delta x)^m}{1.2\dots m} F^{(m)}(x).$$

Zajmiemy się tu bliższém zbadaniem różnic pomiędzy wartościami funkcyi, odpowiadającemi różnym wartościom zmiennéj. W tym celu wyobraźmy sobie szereg wartości funkcyi całkowitéj $F(x)$, odpowiadających wartościom zmiennéj

$$x, x + \Delta x, x + 2\Delta x, x + 3\Delta x \dots,$$

t. j.

$$F(x), F(x+\Delta x), F(x+2\Delta x), F(x+3\Delta x), \dots$$

Różnice pomiędzy kolejnemi wyrazami tego szeregu, t. j.

$$F(x+\Delta x) - F(x), F(x+2\Delta x) - F(x+\Delta x), F(x+3\Delta x) - F(x+2\Delta x),$$

które oznaczamy przez

$$\Delta F(x),\ \Delta F(x+\Delta x),\ \Delta F(x+2\Delta x), \dots$$

stanowią *różnice pierwszego rzędu* funkcyi $F(x)$.

Różnice pomiędzy kolejnemi różnicami pierwszego rzędu oznaczamy przez

$$\Delta^2 F(x),\ \Delta^2 F(x+\Delta x) \dots$$

i nazywamy *różnicami drugiego rzędu.* W podobny sposób otrzymujemy różnice rzędu *trzeciego*, *czwartego* i t. d., które oznaczamy przez $\Delta^3 F(x)$, $\Delta^4 F(x)$ i t. d.

Jeżeli dana funkcya całkowita $F(x)$ jest stopnia m-go, to różnice rzędu pierwszego są funkcyami całkowitemi stopnia $(m-1)$-go, różnice rzędu drugiego—funkcyami stopnia $(m-2)$-go i t. d. różnice rzędu $(m-1)$-go są funkcyami stopnia pierwszego, wreszcie różnice rzędu m-go są stopnia zero, t. j. są wszystkie równe jednéj liczbie stałéj. Różnice rzędów wyższych od m-go są wszystkie zerami.

W saméj rzeczy, jeżeli funkcya $F(x)$ jest stopnia m-go, to z wzoru 1. widzimy bezpośrednio, że funkcya $\Delta F(x)$ jest stopnia pochodnéj $F'(x)$, a więc, jak to widzieliśmy w art. poprzedzającym, sto-

Hosted by Google

pnia $m-1$-go. Kładąc we wzorze 1. $x+\Delta x$ w miejsce x, otrzymujemy

$$\Delta F(x+\Delta x) = \frac{\Delta x}{1} F'(x+\Delta x) + \frac{(\Delta x^2)}{1.2} F''(x+\Delta x) + \ldots + \frac{(\Delta x)^m}{1.2\ldots m} F^{(m)}(x+\Delta x),$$

a odejmując równanie 1., będziemy mieli

$$\Delta^2 F(x) = \frac{\Delta x}{1} \Delta F'(x) + \frac{(\Delta x^2)}{1.2} \Delta F''(x) + \ldots + \frac{(\Delta x)^m}{1.2\ldots m} \Delta F^{(m)}(x),$$

skąd widać, że różnica $\Delta^2 F(x)$ jest funkcyą stopnia równego stopniowi funkcyi $\Delta F'(x)$; a że stopień funkcyi $F'(x)$ równa się $m-1$, stopień przeto funkcyi $\Delta F'(x)$ i funkcyi $\Delta^2 F(x)$ równa się $m-2$. Wynika stąd zarazem, że stopień funkcyi $\Delta^2 F'(x)$ jest $m-3$. W ten sposób rozumując daléj, przekonywamy się o prawdzie powyższego twierdzenia.

Z tego twierdzenia wynika, że dwie funkcye, różniące się stałą dowolną, mają oczywiście różnice pierwszego rzędu równe; dwie funkcye, różniące się od siebie funkcyą stopnia pierwszego, mają różnice pierwsze, różniące się o stałą, różnice zaś rzędu drugiego równe. Wogóle funkcye całkowite stopnia m-go, różniące się od siebie funkcyą stopnia k-go $[k < m]$, mają różnice rzędu $k+1$-go równe. Z podanych określeń wynikają bezpośrednio równości:

$$\begin{aligned}
\Delta F(x) &= F(x+\Delta x) - F(x),\\
\Delta^2 F(x) &= \Delta F(x+\Delta x) - \Delta F(x) = F(x+2\Delta x) - F(x+\Delta x)\\
&\quad - F(x+\Delta x) + F(x)\\
&= F(x+2\Delta x) - 2F(x+\Delta x) + F(x),\\
\Delta^3 F(x) &= F(x+3\Delta x) - 2F(x+2\Delta x) + F(x+\Delta x)\\
&\quad - F(x+2\Delta x) + 2F(x+\Delta x) - F(x)\\
&= F(x+3\Delta x) - 3F(x+2\Delta x) + 3F(x+\Delta x) - F(x).
\end{aligned}$$

Za pomocą tego rachunku dochodzimy do wzoru ogólnego

$$2. \qquad \Delta^i F(x) = F(x+i\Delta x) - iF(x+(i-1)\Delta x) + \frac{i(i-1)}{1.2} F(x+(i-2)\Delta x) - \ldots + (-1)^i F(x),$$

Hosted by Google

o którego ogólności przekonywamy się, przechodząc od skaźnika i do skaźnika $i+1$.

Wzór 2. daje różnicę rzędu i-go funkcyi $F(x)$, wyrażoną przez wartości funkcyi

$$F(x),\ F(x+\Delta x)\ \ldots\ F(x+i\Delta x);$$

współczynniki rozwinięcia są takie same, jak w rozwinięciu potęgi i-éj dwumianu.

Poczyńmy po kolei rozmaite założenia o funkcyi $F(x)$.

Jeżeli

$$F(x) = x^m,$$

to

$$(x+\Delta x)^m = x^m + m\,x^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2}\,x^{m-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^m$$

a więc

$$3.\qquad \Delta\,x^m = mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1,2}\,x^{m-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^m.$$

Wogóle będzie

$$\Delta^i x^m = m(m-1)\ldots(m-i+1)x^{m-i}(\Delta x)^i + Ax^{m-i-1}(\Delta x)^{i+1} + Bx^{m-i-2}(\Delta x)^{i+2}\ldots,$$

gdzie A, B . . . oznaczają współczynniki przy dalszych potęgach zmiennéj x. Dla $i=m$ będzie

$$4.\qquad \Delta^m x^m = m(m-1)\ldots 2.1.(\Delta x)^m = m!\,(\Delta x)^m = 1^{m|1}(\Delta x)^m;$$

dla $i>m$ będzie $\Delta^i x^m = 0$.

Jeżeli

$$F(x) = a_0\,x^m + a_1\,x^{m-1} + \ldots a_m,$$

wtedy z wzoru 2 lub na podstawie wzoru 4. otrzymamy z łatwością

$$5.\qquad \Delta^m F(x) = 1^{m|1}.a_0\,(\Delta x)^m$$

$\Delta^i F(x) = 0$, gdy rząd różnicy jest większy od stopnia funkcyi, co zgadza się z wyżéj podaném twierdzeniem.

Niechaj

$$F(x) = x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots(x-(m-1)\Delta x.$$

Funkcya ta oznacza się za pomocą symbolu

$$x^{m|-\Delta x}$$

i nazywa się *faktoryalną*.

Jéj kolejne różnice mają następujące wyrażenia:

$$\Delta F(x) = m\,\Delta x . x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots(x-(m-2)\Delta x),$$

6. $$\Delta^2 F(x) = m(m-1)(\Delta x)^2 . x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots(x-(m-3)\Delta x),$$

: :

$$\Delta^i F(x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-i+1)(\Delta x)^i x.(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots(x-(m-i-1)\Delta x)$$
$$= m^{i|-1}.(\Delta x)^i . x^{m-i|-\Delta x}.$$

Jeżeli funkcya faktoryalna $F(x)$ jest postaci

$$F(x) = x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots(x+(m-1)\Delta x)$$
$$= x^{m|\Delta x},$$

wtedy podobnież dochodzimy do wzoru

7. $$\Delta^i F(x) = m(m-1)\ldots(m-i+1)(\Delta x)^i (x+i\Delta x).(x+(i+1)\Delta x)\ldots(x+(m-1)\Delta x)$$
$$= m^{i|-1}(\Delta x)^i (x+i\Delta x)^{m-i|-\Delta x}.$$

Jeżeli funkcya $F(x)$ jest iloczynem dwóch funkcyj $F_1(x)F_2(x)$, to

$$\begin{aligned}\Delta F(x) &= F_1(x+\Delta x).F_2(x+\Delta x) - F_1(x)F_2(x)\\ &= \{F_1(x)+\Delta F_1(x)\}\{F_2(x)+\Delta F_2(x)\}\\ &\quad - F_1(x)F_2(x)\\ &= F_1(x).\Delta F_2(x) + \Delta F_1(x)\{F_2(x)+\Delta F_2(x)\}\end{aligned}$$

Biorąc różnicę drugiego rzędu, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Delta^2 F(x) = {}& F_1(x)\Delta^2 F_2(x) + 2\Delta F_1(x)\{\Delta F_2(x) + \Delta^2 F_2(x)\}\\ &+ \Delta^2 F_1(x)\{F_2(x) + 2\Delta F_2(x) + \Delta^2 F(x)\}\end{aligned}$$

Postępując w ten sposób daléj, dochodzimy do wzoru ogólnego

8. $$\begin{aligned}\Delta^m F(x) = {}& F_1(x)\Delta^m F_2(x) + mDF_1(x)\{\Delta^{m-1}F_2(x) + \Delta^m F(x)\}\\ &+ \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 F_1(x)\{\Delta^{m-2}F_2(x) + 2\Delta^{m-1}F_2(x) + \Delta^m F_2(x)\}\\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Delta^3 F_1(x)\{\Delta^{m-3}F_2(x) + 3\Delta^{m-2}F_2(x) + 3\Delta^{m-1}F_2(x) + \Delta^m F_2(x)\}\\ &+ \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Hosted by Google

którego ogólność za pomocą indukcyi zupełnéj sprawdzić można. Wzór ten na różnicę m-go rzędu iloczynu funkcyj odpowiada wzorowi Leibniza, podanemu w art. 38.

Mając dla danéj wartości x wartość funkcyi całkowitéj $F(x)$ oraz jéj różnic $\Delta F(x)$, $\Delta^2 F(x) \ldots \Delta^m F(x)$, możemy oznaczyć wartość $F(x+i\Delta x)$, za pomocą wzoru

$$9. \quad F(x+i\Delta x) = F(x) + i\Delta F(x) + \frac{i(i-1)}{1.2}\Delta^2 F(x) + \ldots + \Delta^i F(x),$$

którego współczynniki są takie same, jak w rozwinięciu potęgi dwumianu. Dla wyprowadzenia tego wzoru, zauważmy, że, jeżeli mamy szereg wartości funkcyi

$$F(x),\ F(x+\Delta x),\ F(x+3\Delta x)\ \ldots\ F(x+m\Delta x)\,,$$

to wtedy zachodzą następujące równania:

$$F(x+\Delta x) = F(x) + \Delta F(x),$$

$$\begin{aligned} F(x+2\Delta x) &= F(x+\Delta x) + \Delta F(x+\Delta x) \\ &= F(x) + \Delta F(x) + \Delta F(x) + \Delta^2 F(x) \\ &= F(x) + 2\Delta F(x) + \Delta^2 F(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x+3\Delta x) &= F(x+2\Delta x) + \Delta F(x+2\Delta x) \\ &= F(x) + 2\Delta F(x) + \Delta^2 F(x) + \Delta F(x) + 2\Delta^2 F(x) + \Delta^3 F(x) \\ &= F(x) + 3\Delta F(x) + 3\Delta^2 F(x) + \Delta^3 F(x). \end{aligned}$$

Postępując daléj tym sposobem, dochodzimy do wzoru 9., którego ogólność stwierdzić można, przechodząc od liczby całkowitéj i do $i+1$. Kladąc $i=m$, gdzie m jest stopniem funkcyi całkowitéj, otrzymujemy

$$F(x+m\Delta x) = F(x) + m\Delta Fx + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 F(x) + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Delta^3 Fx$$
$$+ \ldots\ldots + \Delta^m F(x)$$

Połóżmy $m\Delta x = k$, a więc $m = \frac{k}{\Delta x}$, wtedy wzór ten przybiera postać

Hosted by Google

$$F(x+k)=F(x)+\frac{k}{1}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}+\frac{k(k-\Delta x)}{1\,.\,2}\frac{\Delta^2 F(x)}{(\Delta x)^2}+\frac{k(k-\Delta x)(k-2\Delta x)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{\Delta^3 F(x)}{(\Delta x)^3}$$

10.

$$+\ \ldots\ +\frac{k(k-\Delta x)(k-2\Delta x)\ldots(k-(m-1)\Delta x)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}\frac{\Delta^m F(x)}{(\Delta x)^m},$$

lub

$$F(x+k)=F(x)+\frac{k}{1}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}+\frac{k^{2|-\Delta x}}{1^{2|1}}\frac{\Delta^2 F(x)}{(\Delta x)^2}+\frac{k^{3|-\Delta x}}{1^{3|1}}\frac{\Delta^3 Fx}{(\Delta x)^3}$$
$$+\ \ldots\ +\frac{k^{m|-\Delta x}}{1^{m|1}}\frac{\Delta^m F(x)}{(\Delta x)^m}$$

Wzór ten zawdzięczamy N e w t o n o w i[26]; służy on do tak nazwanéj *interpolacyi*, któréj najogólniejsze zadanie polega na oznaczaniu wartości funkcyi z dostatecznéj liczby innych jéj wartości. Jeżeli mamy dane wartości funkcyi

$$F(x),\ F(x+\Delta x)\ \ldots\ F(x+(m-1)\Delta x),$$

to możemy obliczyć kolejne różnice $\Delta F(x)$, $\Delta^2 F(x)$ . . , $\Delta^m F(x)$, a na podstawie wzoru 10. znaleźć wartość funkcyi dla wartości zmiennéj $x+k$, gdzie k jest liczbą dowolną. Rozwiązaniem tego samego zadania inną metodą zajmiemy się w następnym artykule.

Działanie, za pomocą którego znajdujemy różnicę funkcyj nazywamy *różnicowaniem*. Działanie odwrotne, za pomocą którego od różnic przechodzimy do samych funkcyj, nazywa się *różnicowaniem odwrotném* albo *całkowaniem* (sumowaniem). *Różnica odwrotna* lub *całka* oznacza się za pomocą znaku Σ, a za jéj określenie służyć może równanie

$$\Sigma\Delta F(x) = F(x),$$

które wyraża, że działania Δ i Σ, zastosowane do funkcyi $F(x)$, nie zmieniają téj funkcyi; podobnież jest

$$\Delta\Sigma F(x) = F(x).$$

Do wyrażenia całki danéj różnicy możemy zawsze dodać stałą dowolną, dlatego że, jak wyżéj objaśniono, dwie funkcye, różniące się stałą, mają oczywiście różnice równe.

Z powyższego określenia wynika, że różnica odwrotna sumy dwóch funkcyj równa się sumie różnic odwrotnych obu funkcyj i że wogóle dla zcałkowania sumy trzeba dodać sumy całek jéj składników.

Hosted by Google

Na téj zasadzie z wzoru 3., całkując obie jego strony, otrzymujemy:

$$\Sigma(\Delta x^m) = x^m = m\,\Delta x\,\Sigma x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}(\Delta x)^2\,\Sigma x^{m-2} + \ldots\ldots$$

Równanie to pozwala nam znaleźć całkę Σx^{m-1}, gdy znamy całki Σx^{m-2}, Σx^{m-3}. Kładąc w niem $m-1=i$, będziemy mieli

$$11.\quad \Sigma x^i = \frac{x^{i+1}}{(i+1)\Delta x} - \left\{\frac{i}{1.2}\Delta x\,\Sigma x^{i-1} + \frac{i(i-1)}{1.2.3}(\Delta x)^2\Sigma x^{i-2} + \ldots\right\}$$

Kładąc zaś tu kolejno $i = 0, 1, 2\ldots$ dochodzimy do następujących wzorów:

$$12.\quad \begin{aligned}
\Sigma x^0 &= \frac{x}{\Delta x}\\
\Sigma x^1 &= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{\Delta x} - \frac{1}{2},\\
\Sigma x^2 &= \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3}x\,\Delta x,\\
\Sigma x^3 &= \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2.2}x^2\Delta x,\\
\Sigma x^4 &= \frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3\,\Delta x - \frac{1}{5.6}x(\Delta x)^3\\
\Sigma x^5 &= \frac{1}{6}\cdot\frac{x^6}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{2.6}x^4\,\Delta x - \frac{1}{2.6}x^2(\Delta x)^3.
\end{aligned}$$

. . . .

Jeżeli napiszemy ogólnie

$$\Sigma x^m = Ax^{m+1} + Bx^m + Cx^{m-1} + \ldots$$

to biorąc różnice stron obu, możemy dojść z łatwością do bezpośredniego oznaczenia współczynników i do następującego wzoru:

$$13.\quad \Sigma x^m = \frac{1}{(m+1)\Delta x}\left\{x^{m+1} - \frac{m+1}{2}\Delta x.x^m + \frac{(m+1)^{2|-1}}{1^{2|1}}B_1(\Delta x)^2.x^{m-1}\right.$$
$$\left. - \frac{(m+1)^{4-|1}}{1^{4|1}}B_2(\Delta x)^4 x^{m-3} + \frac{(m+1)^{6|-1}}{1^{6|1}}B_3.(\Delta x)^6.x^{m-5} - \ldots\right\} + C,$$

Hosted by Google

gdzie C jest stałą dowolną. Współczynniki $B_1, B_2, B_3 \ldots$, zachodzące w tym wzorze, nazywają się liczbami Bernoulli'ego i mają następujące wartości

$$B_1=\frac{1}{6},\ B_2=\frac{1}{30},\ B_3=\frac{1}{42},\ B_4=\frac{1}{30},\ B_5=\frac{5}{66},$$
$$B_6=\frac{691}{2730},\ B_7=\frac{7}{6},\ B_8=\frac{3617}{510},\ B_9=\frac{43867}{798},$$
$$B_{10}=\frac{1222277}{2310},$$

Liczby Bernoulli'ego mają zastosowanie w wielu zagadnieniach Analizy. [Niekiedy znakowania, używane przez różnych autorów, różnią się od podanego tu, mianowicie nasze współczynniki B_i bywają oznaczane przez B_{2i} lub przez B_{2i-1}; w pierwszym razie wszystkie liczby Bernoulli'ego ze skaźnikiem parzystym, drugi raz liczby ze skaźnikiem nieparzystym są zerami]. Wroński nazywa liczbami Bernoulli'ego współczynniki

$$\frac{1}{2},\ \frac{B_1}{2},\ -\frac{B_2}{4},\ \frac{B_3}{6},\ -\frac{B_4}{8},\ \frac{B_5}{10}\cdots$$

i oznacza je przez

$$\theta_1,\quad \theta_2,\quad \theta_4,\quad \theta_6,\quad \theta_8,\quad \theta_{10},$$

wszystkie zaś współczynniki θ ze skaźnikami nieparzystemi prócz θ_1, t. j. $\theta_3, \theta_5 \ldots$ przyjmuje za zera[27].

Liczby Bernoulli'ego napotkano po raz pierwszy w rozwiązaniu zagadnienia, dotyczącego oznaczenia sumy jednakowych potęg kolejnych liczb całkowitych, to jest sumy

$$1^i+2^i+3^i+\ldots+(x-1)^i,$$

gdzie x jest liczbą całkowitą. W kursach Algebry elementarnéj podawane bywają wzory

$$1+2+3+\ldots+(x-1)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}$$
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(x-1)^2=\frac{x^2}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}$$
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(x-1)^3=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{4}$$
$$1^4+2^4+3^4+\ldots+(x-1)^4=\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x}{30}.$$

Hosted by Google

Pierwszy z nich otrzymujemy, jeżeli w tożsamości $(t+1)^2 - t^2 = 2t+1$ za t położymy $1, 2 \ldots x-1$, a otrzymane równości dodamy; drugi wynika podobnie z tożsamości $(t+1)^3 - t^3 = 3t^2+3t+1$, trzeci z tożsamości $(t+1)^4 - t^4 = 4t^3+6t^2+4t+1$, czwarty z tożsamości $(t+1)^5 - t^5 = 5t^4+10t^3+10t^2+5t+1$. Podobną drogą przekonać się można, że suma

$$1^i + 2^i + 3^i + \ldots + (x-1)^i$$

jest funkcyą stopnia $(i+1)$-go liczby x. Funkcya ta ma postać następującą

$$14. \quad \frac{x^{i+1}}{i+1} - \frac{1}{2} x^i + \frac{i}{2\,!} B_1 x^{i-1} - \frac{i(i-1)(i-2)}{4\,!} B_2 x^{i-3} + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{6\,!} B_3 x^{i-5} \ldots$$

Wzór ten podał Jakób Bernoulli[28]. Podana w przypisach tablica liczb θ, wzięta z dzieł Wrońskiego[29], służyć może do rozwiązywania zagadnień, w których stosowane bywają liczby Bernoulli'ego.

41. WZÓR INTERPOLACYJNY LAGRANGE'A.

Rozwiążmy zadanie:

"Znaleźć najogólniejszą funkcyą całkowitą zmiennéj x, która dla $m+1$ różnych wartości zmiennéj: $a_0, a_1 \ldots a_m$ przyjmuje $m+1$ wartości danych $w_0, w_1, \ldots w_m$".

Niechaj funkcyą szukaną $F(x)$ stopnia m-go będzie

$$1. \quad F(x) = c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \ldots + c_{m-1} x + c_m$$

Dla oznaczenia $m+1$ współczynników jéj mamy, według założenia,

$$2. \quad F(a_0) = w_0, \quad F(a_1) = w_1 \ \ldots \ F(a_m) = w_m$$

t. j. układ równań

$$3. \quad \begin{aligned} & c_0 a_0^m + c_1 a_0^{m-1} + \ldots + c_{m-1} a_0 + c_m = w_0, \\ & c_0 a_1^m + c_1 a_1^{m-1} + \ldots + c_{m-1} a_1 + c_m = w_1, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & c_0 a_m^m + c_1 a_m^{m-1} + \ldots + c_{m-1} a_m + c_m = w_m, \end{aligned}$$

Hosted by Google

Ponieważ wyznacznik układu 3., t. j. wyznacznik

$$W = \begin{vmatrix} a_0{}^m, & a_0{}^{m-1} & \ldots & a_0, & 1 \\ a_1{}^m, & a_1{}^{m-1} & \ldots & a_1, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m{}^m, & a_m{}^{m-1} & \ldots & a_m, & 1 \end{vmatrix}$$

jest różny od zera, możemy przeto współczynniki $c_0, c_1 \ldots c_m$ oznaczyć; a mianowicie będzie

$$c_1 = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} w_0, & a_0{}^{m-1}, & \ldots & a_0, & 1 \\ w_1, & a_1{}^{m-1}, & \ldots & a_1, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_m, & a_m{}^{m-1}, & \ldots & a_m, & 1 \end{vmatrix}, \quad c_2 = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} a_0{}^m, & w_0 & \ldots & 1 \\ a_1{}^m, & w_1 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m{}^m, & w_m & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

i t. d.

Współczynniki, jak widać z tych wzorów, są funkcyami liniowemi liczb $w_0, w_1 \ldots w_m$. Można więc napisać

4. $c_i = \alpha_0{}^{(i)} w_0 + \alpha_1{}^{(i)} w_1 + \ldots + \alpha_m{}^{(i)} w_m, \quad [i = 0, 1, 2 \ldots m],$

gdzie współczynniki $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ są zupełnie oznaczone; wstawiając 4. w równanie 1., otrzymamy po odpowiedniém uporządkowaniu wyrazów:

5. $F(x) = w_0 F_0(x) + w_1 F_1(x) + \ldots + w_m F_m(x).$

Tu $F_0, F_1 \ldots F_m$ są funkcyami stopnia m-go, mającemi tę własność, że funkcya $F_i(x)$ jest równą 1 dla $x = a_i$, równą 0 dla a_k, gdzie $k \lesseqgtr i$.

Ponieważ funkcya $F_i(x)$ staje się tym sposobem zerem dla m wartości zmiennych $a_0, a_1 \ldots a_{i-1}, a_{i+1} \ldots a_m$, nie więc może być już zerem dla żadnéj innéj wartości, bo w takim razie na zasadzie twierdzenia, podanego w art. 33, byłaby tożsamościowo zerem, co nie jest, gdyż dla $x = a_i$ jest równa 1. Na téj zasadzie możemy napisać:

6. $F_i(x) = b_i(x - a_0) \ldots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \ldots (x - a_n)$

gdzie b_i jest pewną stałą. Wprowadzając funkcyą, określoną za pomocą równania:

Hosted by Google

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m),$$

będziemy mieli:

$$F_k(x) = b_k \frac{f(x)}{x-a_k},$$

a ponieważ według wzoru 26. w art. 38 jest

$$\sum_k \frac{f(x)}{x-a_k} = f'(x),$$

przeto

$$\sum_k \frac{F_k(x)}{b_k} = f'(x).$$

Kładąc tu $x = a_i$ i uwzględniając warunki, jakim czynią zadość funkcye F_k, otrzymujemy z tego równania:

$$b_i = \frac{1}{f'(a_i)}$$

skutkiem czego funkcya 6. przyjmuje postać

$$F_i(x) = \frac{1}{f'(a_i)}(x-a_0)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\ldots(x-a_m)$$
$$= \frac{f(x)}{(x-a_i)f'(a_i)},$$

a równanie 5. przechodzi w następujące

7. $$F(x) = \sum_i \frac{w_i}{f'(a_i)} \frac{f(x)}{x-a_i},$$

stanowiące tak nazwany wzór *wzór interpolacyjny* Lagrange'a.

Jeżeli w miejsce $f'(a_i)$ napiszemy wartość téj pochodnéj, równą

$$(a_i-a_0)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_m),$$

otrzymamy wzór Lagrange'a pod postacią

8. $$F(x) = \sum_i w_i \frac{(x-a_0)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i-1})\ldots(x-a_m)}{(a_i-a_0)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n)}$$

Znalazłszy funkcyą $F(x)$, czyniącą zadość warunkom zadania, możemy znaleźć rozwiązanie jeszcze ogólniejsze. W saméj rzeczy, jeżeli $\Phi(x)$ jest inną funkcyą, czyniącą zadość tym samym warunkom,

Hosted by Google

to oczywiście różnica

$$\Phi(x) - F(x),$$

staje się zerem dla $m+1$ wartości

$$x = a_0, a_1 \ldots a_m,$$

jest zatém podzielna bez reszty przez iloczyn

$$(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_m),$$

to jest przez funkcyą $f(x)$; możemy przeto napisać,

$$\Phi(x) - F(x) = f(x) \, . \, \theta(x),$$

gdzie $\theta(x)$ jest pewną dowolną funkcyą całkowitą zmiennéj x. Otrzymujemy więc

$$\Phi(x) = F(x) + f(x)\,\theta(x).$$

Tak więc

9. $$\Phi(x) = \sum_i \frac{w_i}{f'(a_i)} \frac{f(x)}{x-a_i} + f(x)\theta(x)$$

gdzie $\theta(x)$ jest funkcyą dowolną, przedstawia najogólniejsze rozwiązanie naszego zagadnienia[30]. Jeżeli funkcya szukana ma być stopnia m-go, musi być $\theta(x) = 0$ i otrzymujemy jedno tylko rozwiązanie, dane za pomocą wzoru 7.

Jeżeli równość 9. napiszemy pod postacią

10. $$\frac{\Phi(x)}{f(x)} = \theta(x) + \frac{w_0}{f'(a)_0}\frac{1}{x-a_0} + \ldots + \frac{w_m}{f'(a_m)} \cdot \frac{1}{x-a_m},$$

otrzymamy wzór, dający rozkład ułamka

$$\frac{\Phi(x)}{f(x)}.$$

na część całkowitą $\theta(x)$ i ułamki częściowe, i stanowiący uogólnienie wzoru 26. w art. 38. Wzór 10. ma ważne zastosowania w Algebrze i w Rachunku całkowym.

Na wzorze 5. lub 8., który można przedstawić pod postacią

11. $$F(x) = F(a_0)\,F_0(x) + F(a_1)\,F_1(x) + \ldots + F(a_m)\,F_m(x)$$
$$= \sum_i F(a_i)\,F_i(x),$$

opiera Kronecker metodę badania podzielności funkcyj cał-

Hosted by Google

kowitych[31]. Dajmy na to, że mamy pewną funkcyą całkowitą $\varphi(x)$ stopnia $2m$ lub $2m+1$ o współczynnikach całkowitych i chcemy zbadać, czy funkcya ta jest lub nie jest podzielną przez inne funkcye całkowite o takichże współczynnikach. W tym celu, oczywista, dostatecznie jest zbadać, czy posiada dzielniki całkowite stopnia m-go lub niższego. Dzielnik stopnia m-go może być przedstawiony pod postacią 1.; jeżeli więc funkcya całkowita $\varphi(x)$ ma być podzielną przez funkcyą $F(x)$, to liczba całkowita $\varphi(a_i)$ musi być podzielna przez $F(a_i)$. Jeżeli oznaczymy wszystkie dzielniki całkowite dodatnie i ujemne liczb $\varphi(a_i)$ dla $i=1, 2, \ldots m$ otrzymamy tym sposobem skończoną liczbę układów wartości liczb $F(a_i)$. Te układy, wstawione do równania 11., dadzą nam funkcye stopnia m-go, między któremi znajdują się, o ile istnieją, wszystkie dzielniki stopnia m-go funkcyi danéj. Widać stąd, że za pomocą skończonéj liczby działań przekonać się można, czy funkcya całkowita dana jest podzielna przez inne lub nie podzielna. Funkcya całkowita o współczynnikach całkowitych podzielna przez inną takąż funkcyą całkowitą, nazywa się *przywiedlną* [réductible], w przeciwnym razie *nieprzywiedlną* [irréductible].

Pokażemy jeszcze jedno interesujące zastosowanie wzoru Lagrange'a, również wskazane przez Kroneckera[32], do teoryi liczb Bernoulli'ego, o których mówiliśmy w poprzedzającym artykule.

Dajmy, że mamy oznaczyć funkcyą całkowitą stopnia m-go na mocy $m+1$ warunków, aby mianowicie dla wartości zmiennéj równéj zeru była zerem i aby dla wartości całkowitych $1, 2, 3 \ldots x-1$ równała się odpowiednim wartościom wyrażenia

$$1^{m-1}+2^{m-1}+\ldots+(x-1)^{m-1}$$

Kładąc we wzorze 8.

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0, & w_0 &= 0,\\
a_1 &= 1, & w_1 &= 0,\\
a_2 &= 2, & w_2 &= 1,\\
&\ldots\ldots\\
a_i &= i, & w_i &= 1^{m-1}+2^{m-1}+\ldots+(i-1)^{m-1}\\
&\ldots\ldots\\
a_m &= m, & w_m &= 1^{m-1}+2^{m-1}+\ldots+(m-1)^{m-1},
\end{aligned}$$

Hosted by Google

będziemy mieli

$$F(x)=\sum_i\{1^{m-1}+2^{m-1}+\ldots+(i-1)^{m-1}\}\frac{x(x-1)\ldots(x-i+1)(x-i-1)\ldots(x-m)}{i(i-1)\;.\;.\;.\;1.-1\;\ldots-(m-i)}$$

$$=\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-m)}{1.2\ldots m}\sum_i\frac{1^{m-1}+2^{m-1}+\ldots+(i-1)^{m-1}}{1.2\ldots i}(-1)^{m-1}\frac{m(m-1)..(m-i+1)}{x-i}$$

$$=\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-m)}{1.2\ldots m}\sum_{i,k,}\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2.3\ldots i}\frac{(-1)^{m-i}}{x-i}k^{m-1}$$

$$i=1,2,\ldots m-1;\;\; k=2,3,\ldots m,\quad \text{czyli } 0<k<i\leqq m.$$

Współczynnik przy potędze pierwszéj zmiennéj x w tém rozwinięciu jest równy

$$\sum_{i,k}\frac{m\,(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2.3\ldots i}\frac{(-1)^i}{i}k^{m-1},$$

a porównywając to wyrażenie z wzorem 14. w art. poprzedzającym, otrzymujemy bezpośrednio

$$\sum_{i,k}\frac{m\,(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2.3\ldots i}\frac{(-1)^i}{i}k^{m-1}=0 \text{ lub } (-1)^{\frac{m-1}{2}}B_{\frac{m-1}{2}}$$

$$0<i<k\leqq m,$$

stosownie do tego, czy m jest parzyste lub nieparzyste.

Kładąc n. p. $m=5$ i $m=6$ tu, znajdujemy

$$10.\tfrac{1}{2}-10.\tfrac{1}{3}(1^4+2^4)+5.\tfrac{1}{4}(1^4+2^4+3^4)-\tfrac{1}{5}(1^4+2^4+3^4+4^4)=\tfrac{1}{30};$$

$$15.\tfrac{1}{2}-20.\tfrac{1}{3}(1^5+2^5)+15.\tfrac{1}{4}(1^5+2^5+3^5)-6.\tfrac{1}{5}(1^5+2^5+3^5+4^5)$$
$$+\tfrac{1}{6}(1^5+2^5+3^5+4^5+5^5)=0.$$

42. "PRAWO NAJWYŻSZE„ WROŃSKIEGO.

Rozwiążmy zadanie:

"Daną funkcyą całkowitą $F(x)$ zmiennéj x rozwinąć według innych funkcyj całkowitych $F_1(x)$, $F_2(x)\;.\;.\;.\;F_p(x)$, téjże zmiennéj, czyli, innemi słowy, oznaczyć współczynniki stałe A_0, A_1, A_2.. . . A_p, aby było tożsamościowo

1. $$F(x)=A_0+A_1F_1(x)+A_2F_2(x)+\ldots+A_pF_p(x)\text{„.}$$

Hosted by Google

Aby zadanie to rozwiązać, należy mieć daną wartość funkcyj $F(x)$, $F_1(x)\ldots F_p(x)$ i jéj pochodnych aż do pochodnych rzędu p-go włącznie dla pewnéj wartości zmiennéj x np. dla $x=a$. W saméj rzeczy, jeżeli równanie 1. ma być tożsamością, to pochodne obu stron winny być tożsamościowo równe, otrzymujemy przeto układ równań

2. $$F = A_0 + A_1F_1 + A_2F_2 + \ldots + A_pF_p$$

3. $$\begin{cases} DF = & A_1DF_1 + A_2DF_2 + \ldots + A_pDF_p, \\ D^2F = & A_1D^2F_1 + A_2D^2F_2 + \ldots + A_pD^2F_p, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ D^pF = & A_1D^pF_1 + A_2D^pF_2 + \ldots + A_pD^pF_p, \end{cases}$$

gdzie $F, F_1, \ldots DF_1, D^2F_1 \ldots D^2F_1, D^2F_2 \ldots$ i t. d. oznaczają wartości, jakie przyjmują funkcye i ich pochodne przy wartości $x=a$. Z p równań 3., jeżeli wyznacznik

4. $$\begin{vmatrix} DF_1\,, & DF_2\,, & \ldots & DF_p \\ D^2F_1, & D^2F_2, & \ldots & D^2F_p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D^pF_1, & D^pF_1. & \ldots & D^pF_p \end{vmatrix},$$

t. j. wrońskian funkcyj $DF_1, DF_2 \ldots DF_p$, który oznaczamy przez

$$W(DF_1,\, DF_2 \ldots DF_p),$$

nie jest zerem, możemy wyznaczyć współczynniki $A_1, A_2, \ldots A_p$; będzie mianowicie

5. $$A_i = \frac{W(DF_1,\, DF_2 \ldots DF_{i-1}DF,\, DF_{i+1} \ldots DF_p)}{W(DF_1,\, DF_2 \ldots\ldots\ldots\ldots DF_p)},$$

gdzie wyznacznik w liczniku powstaje z wyznacznika w mianowniku, gdy w pierwszym elementy kolumny i-éj zastąpimy odpowiednio elementami

$$DF,\, D^2F \ldots D^pF.$$

Oznaczywszy przy pomocy 5. współczynniki $A_1, A_2 \ldots A_p$, znajdziemy z równania 2. współczynnik A_0.

Tym sposobem zadanie zostało rozwiązane.

W r o ń s k i podaje dla współczynnika A_i wzór, w który wchodzą współczynniki $A_{i+1}, A_{i+2} \ldots$ po nim następujące. Współczynnik A_0 na zasadzie równania 2. wyraża pod postacią.

6. $$A_0 = F - A_1F_1 - A_2F_2 - \ldots - A_pF_p.$$

Biorąc pochodne obu stron równania 1. otrzymujemy

$$DF(x) = A_1DF_1(x) + A_2DF_2(x) + \ldots + A_pDF_p(x),$$

skąd

7. $$\frac{DF(x)}{DF_1(x)} = A_1 + A_2\frac{DF_2(x)}{DF_1(x)} + \ldots + A_p\frac{DF_p(x)}{DF_1(x)},$$

a więc, kładąc a za x, będziemy mieli

8. $$A_1 = \frac{DF}{DF_1} - A_2\frac{DF_2}{DF_1} - \ldots - A_p\frac{DF_p}{DF_1}.$$

Przechodzimy do wyrażenia współczynnika A_2. Biorąc pochodne obu stron równania 7. [na podstawie prawidła 24. w art. 38], znajdujemy

$$\frac{DF_1(x)D^2F(x) - DF(x)D^2F_1(x)}{(DF_1(x))^2} = A_2.\frac{DF_1(x)D^2F_2(x) - D_2F(x)D^2F_1(x)}{(DF_1(x))^2}$$
$$+ A_3\frac{DF_1(x)\,D^2F_3(x) - DF_3(x)\,D^2F_1(x)}{(DF_1(x))^2} + \ldots$$
$$+ A_p\frac{DF_1(x)\,D^2F_p(x) - DF_p(x)\,D^2F_1(x)}{(DF_1(x))^2}.$$

Dzieląc obie strony przez współczynnik przy A_2, kładąc następnie we wszystkich wyrazach $x = a$, otrzymujemy

$$A_2 = \frac{DF_1D^2F - DFD^2F_1}{DF_1D^2F_2 - DF_2D^2F_1} - A_3\frac{DF_1D^2F_3 - DF_3D^2F_1}{DF_1D^2F_2 - DF_2D^2F_1} - \ldots.$$
$$- A_p\frac{DF_1D^2F_p - DF_pD^2F_1}{DF_1D^2F_2 - DF_2D^2F_p}.$$

Jeżeli zauważymy, że każde z wyrażeń, zawartych po drugiéj stronie, da się przedstawić pod postacią ilorazu wyznaczników, będziemy mogli napisać:

9. $$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} DF_1, & DF \\ D^2F_1, & D^2F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} DF_1, & DF_2 \\ D^2F_1, & D^2F_2 \end{vmatrix}} - A_3\frac{\begin{vmatrix} DF_1, & DF_3 \\ D^2F_1, & D^2F_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} DF_1, & DF_2 \\ D^2F_1, & D^2F_2 \end{vmatrix}} - \ldots - A_p\frac{\begin{vmatrix} DF_1, & DF_p \\ D^2F_1, & D^2F_p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} DF_1, & DF_2 \\ D^2F_1, & D^2F_2 \end{vmatrix}}.$$

Hosted by Google

Postępując tą drogą daléj, t. j. po podzieleniu obu stron przez przez współczynnik przy A_2, biorąc pochodne i następnie kładąc $x=a$ [wykonanie tego rachunku pozostawiamy czytelnikowi], dojdziemy do wzoru

$$
10. \qquad A_3 = \frac{\begin{vmatrix} DF_1, & DF_2, & DF \\ D^2F_1, & D^2F_2, & D^2F \\ D^3F_1, & D^3F_2, & D^3F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} DF_1, & DF_2, & DF_3 \\ D^2F_1, & D^2F_2, & D^2F_3 \\ D^3F_1, & D^3F_2, & D^2F_3 \end{vmatrix}} - A_4 \frac{\begin{vmatrix} DF_1, & DF_2, & DF_4 \\ D^2F_1, & D^2F_2. & D^2F_4 \\ D^3F_1, & D^3F_2, & D^3F_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} DF_1, & DF_2, & DF_3 \\ D^2F_1, & D^2F_2, & D^2F_3 \\ D^3F_1, & D^3F_2, & D^3F_3 \end{vmatrix}} - \ldots
$$

$$
- A_p \frac{\begin{vmatrix} DF_1, & DF_2, & DF_p \\ D^2F_1, & D^2F_2, & D^2F_p \\ D^3F_1, & D^3F_2, & D^3F_p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} DF_1, & DF_2, & DF_3 \\ D^2F_1, & D^2F_2, & D^2F_3 \\ D^3F_1, & D^3F_2, & D^3F_3 \end{vmatrix}} .
$$

Wyznączniki, zachodzące we wzorach 9. i 10., są wrońskianami; wprowadzając przeto skrócone oznaczenie wrońskianów, możemy napisać wzory te w sposób następujący:

$$
A_2 = \frac{W(DF_1, DF)}{W(DF_1, DF_2)} - A_3 \frac{W(DF_1, DF_3)}{W(DF_1, DF_2)} - \ldots - A_p \frac{W(DF_1, DF_p)}{W(DF_1, DF_2)},
$$

$$
A_3 = \frac{W(DF_1, DF_2, DF)}{W(DF_1, DF_2, DF_3)} - A_4 \frac{W(DF_1, DF_2, DF_4)}{W(DF_1, DF_2, DF_3)} - \ldots
$$

$$
- A_p \frac{W(DF_1, DF_2, DF_p)}{W(DF_1, DF_2, DF_3)} .
$$

Postępując tą drogą dalej, dojdziemy do wzoru ogólnego

$$
11. \qquad A_i = \frac{W(DF_1, DF_2 \ldots DF_{i-1}, DF)}{W(DF_1, DF_2 \ldots DF_{i+1} DF_i)}
$$

$$
- A_{i+1} \frac{W(DF_1, DF_2 \ldots DF_{i-1} DF_{i+1})}{W(DF_1, DF_2 \ldots DF_{i-1} DF_i)} - \ldots
$$

$$
- A_p \frac{W(DF_1, DF_2 \ldots DF_{i-1} DF_p)}{W(DF_1, DF_2 \ldots DF_{i-1} DF_i)} ,
$$

którego ogólność sprawdzić można, przechodząc od wzoru na A_i do wzoru na A_{i+1}.

Hosted by Google

Zastosujmy wzór 11. do przypadku szczególnego. Niechaj będzie

$$F_1(x)=f(x),\ F_2(x)=f(x)^2,\ \ldots\ F_p(x)=f(x)^p,$$

Pochodne kolejne funkcyi

$$F_r(x)=f(x)^r$$

będą:

$$\begin{aligned}
DF_r(x) &= rf(x)^{r-1}Df(x)\\
D^2F_r(x) &= r(r-1)f(x)^{r-2}(Df(x))^2+rf(x)^{r-1}D^2f(x)\\
D^3F_r(x) &= r(r-1)(r-2)f(x)^{r-3}(Df(x))^3+\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
D^rF_r(x) &= r(r-1)\ \ldots\ 2.1\,(Df(x))^r+\ldots
\end{aligned}$$

Jeżeli założymy, że dla wartości $x=a$ funkcya $f(x)$ przybiera wartość f równą zeru, otrzymamy

$$DF_r(x)=0,\quad D^2F_r(x)=0\ \ldots\ D^{r-1}F_r(x)=0$$
$$D^rF(x)=r(r-1)\ \ldots\ .2.1(Df(x))^r$$

Jeżeli te wartości pochodnych wstawimy do wrońskianu, stanowiącego mianownik we wzorze 11. otrzymamy wyznacznik, w którym wszystkie elementy, znajdujące się po prawéj stronie głównéj przekątnéj, są zerami; wyznacznik ten sprowadza się przeto do jednego wyrazu, równego iloczynowi elementów na przekątnéj, t. j. równa się

$$1.Df.1.2.(Df)^2.1.2.3.(Df)^3\ \ldots\ 1.2\ \ldots\ i(Df)^i$$
$$=1!\,2!\,3!\ldots i!\,(Df)^{1+2+\ldots+i}=1!\,2!\,3!\ldots i!\,(Df)^{\frac{i(i+1)}{2}}.$$

Wrońskiany

$$W(DF_1,\ DF_2\ldots DF_{i-1},\ DF_{i+1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$W(DF_1,\ DF_2\ldots,DF_{i-1},DF_p)$$

będą zerami i wyrażenie współczynnika A_i sprowadza się do jednego wyrazu

$$A_i=\frac{W(Df,\ Df^2,\ Df^3\ldots,Df^{i-1},DF)}{1!\,2!\,3!\ldots i!\,(Df)^{\frac{i(i+1)}{2}}}$$

Rozwinięcie funkcyi $F(x)$ według funkcyj $f(x)$, $f(x)^2 \dots f(x)^p$ będzie zatém miało postać:

$$12. \qquad F(x) = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{W(Df \,.\, Df^2 \,.\, Df^3 \dots Df^{i-1} DF)}{1!\,2!\,3! \dots i!\,(Df)^{\frac{i(i+1)}{2}}} f(x)^i .$$

Jest to pod inną postacią rozwinięcie podane w art. 36. Zakładając tu, jak to uczyniliśmy w art. 38, $f = x - h$, otrzymamy wzór Taylora.

Zakładając we wzorze 11.

$$F_i(x) = f(x) \,.\, f(x+h) \dots f(x+(i-1)h),$$

doszlibyśmy podobnym sposobem do rozwinięcia funkcyi danéj F według funkcyj faktoryalnych F_i, którego rozwinięcie poprzedzające jest przypadkiem szczególnym dla $h=0$.

Dodamy tu jeszcze, że można otrzymać za pomocą téj saméj metody, inną postać "prawa najwyższego", zastępując w równaniach 3. pochodne różnicami odpowiednich rzędów.

"Prawo najwyższe" można uważać za najogólniejszą postać rozwinięcia funkcyi całkowitéj według innych funkcyj.

Wroński zastosował podaną tu formę nie tylko do funkcyj całkowitych ale do wszelkich funkcyj analitycznych. W przypadku tym wszakże rozwinięcie składa się wogóle z nieskończonéj liczby wyrazów i stosowalność jego wymaga pewnych warunków i zastrzeżeń. [porówn. art. 7]. Zbadanie tego przedmiotu należy już do ogólnéj Teoryi funkcyj.

---

[1] Grassmann. Ausdehnungslehre, 1862 str. 223, oraz Die neuere Algebra und die Ausdehnungslehre [*Mathematische Annalen*, VII, str. 543.]

[2] Twierdzenia w art. 33 i 34 przedstawiamy według dzieła A. Capelli — G. Garbieri, Corso di analisi algebrica. Volume I. 1886, Capitolo VI, a teoryą, podaną w art. 35., według dzieła Faà di Bruno [Walter], Einleitung in die Theorie der binären Formen, 1881, § 5.

[3] Wyznacznik, podany w tekście, równa się, jak to łatwo okazać, iloczynowi $\frac{1}{2} n(n-1)$ rożnic, które utworzyć można pomiędzy liczbami $\alpha, \beta, \dots \varkappa$, t. j. iloczynowi:

$$(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) \dots (\varkappa-\alpha)(\gamma-\beta) \dots (\varkappa-\beta) \dots$$

[4] Dochodzimy do wzoru 5., rozkładając pierwszą stronę otrzymanego związku na sumę dwóch wyznaczników, które powstają z niéj: pierwszy przez postawienie zer w kolumnie pierwszéj na miejscu elementów $a_0, a_1 \dots a_{m-n}$, drugi przez zastąpienie elementu Q zerem.

[5] Przekształcenia te polegają na zebraniu otrzymanych wyznaczników

w jeden, a następnie na dodaniu do elementów kolumny tego ostatniego elementów kolumn pozostałych, pomnożonych odpowiednio przez $x^m, x^{m-1} \ldots x^n$.

[6] Temu ważnemu twierdzeniu nadać można jeszcze wyrażenie następujące:

"Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby dwie funkcye F i f miały czynnik wspólny stopnia ρ-go a nie wyższego, jest, aby wszystkie minory stopnia $(\rho-1)$-go rugownika C_0 były zerami, a nie były zerami wszystkie minory stopnia ρ-go tegoż rugownika,,.

[7] Porówn. G. Chrystal, Algebra. Part I. 1886, str. 103.

[8] Szczegółowy wykład teoryi funkcyj symetrycznych znajdzie czytelnik we wspomnianém dziele Faà di Bruno lub téż w dziele V. Rehorovský'ego, Theorie soumernych funkci korenu, 1883.

[9] Newton, Arithmetica universalis, Ed. 1732, str. 192.

[10] Wzór ten podał Waring w piśmie Meditationes algebraicae, 1782; przed nim wszakże ogłosił go matematyk holenderski Albert Girard w r. 1629 w piśmie Invention nouvelle en Algèbre. Porówn. Matthiesen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra, 1878, str. 62.

[11] Funkcye alef oznacza Wroński w dziele swém Introduction à la philosophie des mathématiques, str. 65 w sposób następujący:

$$\aleph\,[x_1+x_2+\ldots+x_n]^m;$$

w rozprawie Résolution générale des équations de tous les degrés 1812., pisze zaś już wprost $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3 \ldots$.

[12] Wroński, Introduction etc. str. 143.

[13] Wzór ten podany przez Wrońskiego bez dowodu w dziele Réforme absolue et par conséquent finale du savoir humain, Tome III, 1847, str. 30. Dowód tego wzoru, jak i uzasadnienie innych własności funkcyj alef podał S. Dickstein w *Pamiętnikach Akademii Krakowskiéj*, Tom XII, 1886 i XVI, 1888.

[14] Wroński, Introduction etc. str. 68.

[15] Porówn. J. A. Serret, Handbuch der höheren Algebra, deutsch bearbeitet von G. Wertheim, 1868, str. 304—308

[16] Pierwsze tablice funkcyj symetrycznych Meiera Hirscha znajdują się w dziełku Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen, Erster Theil, 1809.

[17] Cayley. A memoir on the symmetric Functions of the roots of an equation, [*Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol CXLVII, 1857, także A. Cayley, *The collected mathematical Papers* vol. II, 1889, str. 417 i dalsze].

[18] Faà di Bruno l. c.

[19] Rehorovský, l. c., a także tegoż Tafeln der symmetrischen Functionen der Wurzeln und der Coefficienten-Combinationen vom Gewichte 11 und 12 [*Denkschriften der k. Akademie in Wien*, XLVI, 1882, str. 51—58].

Hosted by Google

20 TABLICE FUNKCYJ SYMETRYCZNYCH.

Waga = 1.

	1
(1)	− 1

Waga = 2.

	2	1^2
(2)	− 2	+ 1
(1^2)	+ 1	

Waga = 3.

	3	12	1^3
(3)	− 3	+ 3	− 1
(21)	+ 3	− 1	
(1^3)	− 1		

Waga = 4.

	4	13	2^2	$1^2 2$	1^4
(4)	− 4	+ 4	+ 2	− 4	+ 1
(31)	+ 4	− 1	− 2	+ 1	
(2^2)	+ 2	− 2	+ 1		
($1^2 2$)	− 4	+ 1			
(1^4)	+ 1				

Hosted by Google

Waga = 5.

	5	14	23	$1^2 3$	12^2	$1^3 2$	1^5
(5)	− 5	+ 5	+ 5	− 5	− 5	+ 5	− 1
(41)	+ 5	− 1	− 5	+ 1	+ 3	− 1	
(32)	+ 5	− 5	+ 1	+ 2	− 1		
(31^2)	− 5	+ 1	+ 2	− 1			
($2^2 1$)	− 5	+ 3	− 1				
(21^3)	+ 5	− 1					
(1^5)	− 1						

Waga = 6.

	6	15	24	$1^2 4$	3^2	123	$1^3 3$	2^3	$1^2 2^2$	$1^4 2$	1^6
(6)	− 6	+ 6	+ 6	− 6	+ 3	−12	+ 6	− 2	+ 9	− 6	+ 1
(51)	+ 6	− 1	− 6	+ 1	− 3	+ 7	− 1	+ 2	− 4	+ 1	
(42)	+ 6	− 6	+ 2	+ 2	− 3	+ 4	− 2	− 2	+ 1		
(3^2)	+ 3	− 3	− 3	+ 3	+ 3	− 3	0	+ 1			
(41^2)	− 6	+ 1	+ 2	− 1	+ 3	− 3	+ 1				
(321)	−12	+ 7	+ 4	− 3	− 3	+ 1					
(2^3)	− 2	+ 2	− 2	0	+ 1						
(31^3)	+ 6	− 1	− 2	+ 1							
($2^2 1^2$)	+ 9	− 4	+ 1								
(21^4)	− 6	+ 1									
(1^6)	+ 1										

Hosted by Google

Waga = 7.

	7	16	25	$1^2 5$	34	124	$1^3 4$	13^2	$2^2 3$	$1^2 23$	$1^4 3$	12^3	$1^3 2^2$	$1^5 2$	1^7
(7)	− 7	+ 7	+ 7	− 7	+ 7	−14	+ 7	− 7	− 7	+21	− 7	+ 7	−14	+ 7	− 1
(61)	+ 7	− 1	− 7	+ 1	− 7	+ 8	− 1	+ 4	+ 7	− 9	+ 1	− 5	+ 5	− 1	
(52)	+ 7	− 7	+ 3	+ 2	− 7	+ 4	− 2	+ 7	− 3	− 6	+ 2	+ 3	− 1		
(43)	+ 7	− 7	− 7	+ 7	+ 5	+ 2	− 3	− 5	+ 1	+ 3	0	− 1			
(51^2)	− 7	+ 1	+ 2	− 1	+ 7	− 3	+ 1	− 4	− 2	+ 4	− 1				
(421)	−14	+ 8	+ 4	− 3	+ 2	− 8	+ 3	+ 1	+ 2	− 1					
$(3^2 1)$	− 7	+ 4	+ 7	− 4	− 5	+ 1	0	+ 2	− 1						
(32^2)	− 7	+ 7	− 3	− 2	+ 1	+ 2	0	− 1							
(41^3)	+ 7	− 1	− 2	+ 1	− 3	+ 3	− 1								
(321^2)	+21	− 9	− 6	+ 4	+ 3	− 1									
$(2^3 1)$	+ 7	− 5	+ 3	0	− 1										
(31^4)	− 7	+ 1	+ 2	− 1											
$(2^2 1^3)$	−14	+ 5	− 1												
(21^5)	+ 7	− 1													
(1^7)	− 1														

Waga = 8.

	8	17	26	$1^{2}6$	35	125	$1^{3}5$	4^{2}	134	$2^{2}4$	$1^{2}24$	$1^{4}4$	23^{2}	$1^{2}3^{2}$	$12^{2}3$	$1^{3}23$	$1^{5}3$	2^{4}	$1^{2}2^{3}$	$1^{4}2^{2}$	$1^{6}2$	1^{8}
(8)	− 8	+ 8	+ 8	− 8	+ 8	−16	+ 8	+ 4	−16	− 8	+24	− 8	− 8	+12	+24	−32	+ 8	+ 2	−16	+20	− 8	+ 1
(71)	+ 8	− 1	− 8	+ 1	− 8	+ 9	− 1	− 4	+ 9	+ 8	−10	+ 1	+ 8	− 5	−17	+11	− 1	− 2	+ 9	− 6	+ 1	
(62)	+ 8	− 8	+ 4	+ 2	− 8	+ 4	− 2	− 4	+16	− 4	− 6	+ 2	+ 2	− 9	0	+ 8	− 2	+ 2	− 4	+ 1		
(53)	+ 8	− 8	− 8	+ 8	+ 7	+ 1	− 3	− 4	+ 1	+ 8	− 9	+ 3	− 7	+ 3	+ 6	− 3	0	− 2	+ 1			
(4^{2})	+ 4	− 4	− 4	+ 4	− 4	+ 8	− 4	+ 6	− 8	− 4	+ 4	0	+ 4	+ 2	− 4	0	0	+ 1				
(61^{2})	− 8	+ 1	+ 2	− 1	+ 8	− 3	+ 1	+ 4	− 9	− 2	+ 4	− 1	− 5	+ 5	+ 5	− 5	+ 1					
(521)	−16	+ 9	+ 4	− 3	+ 1	− 8	+ 3	+ 8	−10	− 4	+11	− 3	+ 5	− 1	− 3	+ 1						
(431)	−16	+ 9	+16	− 9	+ 1	−10	+ 4	− 8	+10	0	− 1	0	− 1	− 2	+ 1							
(42^{2})	− 8	+ 8	− 4	− 2	+ 8	− 4	+ 2	− 4	0	+ 4	− 2	0	− 2	+ 1								
($3^{2}2$)	− 8	+ 8	+ 2	− 5	− 7	+ 5	0	+ 4	− 1	− 2	0	0	+ 1									
(51^{3})	+ 8	− 1	− 2	+ 1	− 3	+ 3	− 1	− 4	+ 4	+ 2	− 4	+ 1										
(421^{2})	+24	−10	− 6	+ 4	− 9	+11	− 4	+ 4	− 1	− 2	+ 1											
($3^{2}1^{2}$)	+12	− 5	− 9	+ 5	+ 3	− 1	0	+ 2	− 2	+ 1												
($32^{2}1$)	+24	−17	0	+ 5	+ 6	− 3	0	− 4	+ 1													
(2^{4})	+ 2	− 2	+ 2	0	− 2	0	0	+ 1														
(41^{4})	− 8	+ 1	+ 2	− 1	+ 3	− 3	+ 1															
(321^{3})	−32	+11	+ 8	− 5	− 3	+ 1																
($2^{3}1^{2}$)	−16	+ 9	− 4	0	+ 1																	
(31^{5})	+ 8	− 1	− 2	+ 1																		
($2^{2}1^{4}$)	+20	− 6	+ 1																			
(21^{6})	− 8	+ 1																				
(1^{8})	+ 1																					

Hosted by Google