Заметки: стр-13, 21,

J. Smorczewski

METODA

NIEJSZYCH KWADRATÓW.

J. Smoczewski

METODA

NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW.

DZIEŁA I ROZPRAWY MATEMATYCZNO-FIZYCZNE,
wydawane przez
A. CZAJEWICZA i S. DICKSTEINA
Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB, PRACUJĄCYCH NA POLU NAUKOWEM, IMIENIA JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

VIII.

METODA NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW.

Napisał

A. B. Danielewicz,

MAGISTER NAUK FIZYCZNO-MATEMATYCZNYCH
B. SZKOŁY GŁÓWNEJ WARSZAWSKIEJ.

WARSZAWA.
W Drukarni Noskowskiego.

1904.

Дозволено Цензурою.
Варшава, 7 Апрѣля 1904 года.

PRZEDMOWA.

Nasza literatura matematyczna nie jest pozbawiona prac, odnoszących się do „Metody najmniejszych kwadratów." W tomie II-gim „Zasad rachunku różniczkowego i całkowego" p. Wł. Folkierskiego (Paryż, 1873) znajdujemy ~~bardzo~~ pięknie opracowany rozdział p. t. „Zastosowania rachunku całkowego do rachunku prawdopodobieństwa," którego znaczna część jest poświęcona metodzie najmniejszych kwadratów. W tomie V-ym „Prac matematyczno-fizycznych" (Warszawa, 1894), p. Wł. Gosiewski pomieścił głęboko pomyślaną pracę „O metodzie najmniejszych kwadratów," a w 1896 roku p. Br. Gustawicz wydał w Krakowie „Rachunek wyrównania błędów spostrzeżeń na podstawie metody najmniejszych kwadratów." W tej ostatniej książce znajdujemy wzmiankę o pracy D. Zbrożka, pomieszczonej w tomie IX-ym Pamiętników Akademii Umiejętności w Krakowie p. t. „Zastosowanie wyznaczników w teoryi najmniejszych kwadratów" (1884) oraz o autografie prof. A. Witkowskiego „Teorya najmniejszych kwadratów, według wykładów prof. D. Zbrożka" (Lwów, 1879).

Lecz praca p. Folkierskiego, jako stanowiąca tylko zastosowanie rachunku wyższego do rachunku prawdopodobieństwa, nie wyczerpuje przedmiotu całkowicie i prócz tego trudną jest do nabycia, z powodu zupełnego wyczerpania dzieła, w skład którego wchodzi. Praca p. Wł. Gosiewskiego nie stanowi podręcznika, lecz rozprawę, której „zadaniem — jak sam autor na wstępie powiada — jest uzasadnienie metody najmniejszych kwadratów, oparte na tem jedynie założeniu, że prawdopodobieństwo błędu jest funkcyą tego błędu"; książka zaś p. Gustawicza stanowi, w niewielkiej tylko liczbie egzemplarzy wydaną, odbitkę z XII-go i XIII-go Sprawozdania Dyrekcyi c.-k. gimnazyum III-go w Krakowie za r. 1895 i 1896, skutkiem czego, ile mi wiadomo, nie puszczono jej wcale w handel księgarski.

Właściwie zatem, pomimo istnienia wymienionych prac, młodzież nasza była dotąd pozbawiona przystępnego dla niej podręcznika metody najmniejszych kwadratów i dlatego zapewne przedmiot ten, ogólnie mówiąc, mało jest u nas znany.

Tymczasem praktyka dowodzi, że metoda najmniejszych kwadratów daje zazwyczaj bardzo dobre wyniki i może stanowić nietylko narzędzie do nadawania większej poprawności rezultatom spostrzeżeń, lecz może być także stosowana do innych jeszcze celów, jak o tem czytelnicy sami, z rozdziału VI-go, niejednokrotnie przekonać się będą mogli.

Te okoliczności oraz wpływ paru osób skłoniły mnie do zajęcia się opracowaniem niniejszej książki, mającej wypełnić zaznaczony powyżej brak podręcznika, przystępnego dla czytelników, obeznanych chociażby z najgłówniejszemi tylko zasadami rachunku wyższego.

Przy jej pisaniu, oprócz na wstępie wzmiankowanych prac polskich, z których korzystałem bardzo wiele, posiłkowałem się jeszcze, w różnym stopniu, następującemi dziełami:

„Méthode des moindres carrés. Mémoires sur la combinaison des observations, par. Ch. Fr. Gauss," przełożone na język francuski przez J. Bertrand'a (Paryż, 1855).

„Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen" D-ra J. Dienger'a (Brunświg, 1857).

„Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-Rechnung." G. Hagen'a (Berlin, 1867).

„Traité du calcul des probabilités" H. Laurent'a (Paryż, 1873).

„Calcul des probabilités" J. Bertrand'a (Paryż, 1889).

„Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung" D-ra Norberta Herz'a (Lipsk, 1900) i nieco z

„Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung" D-ra Karola Wagner'a (Jena, 1898).

Najwięcej wszakże korzystałem z nieocenionych rad, wskazówek i gruntowych wyjaśnień p. Władysława Gosiewskiego, niewątpliwie najlepszego u nas znawcy tego przedmiotu, za co też Szanownemu Profesorowi poważam się tutaj wyrazić moją szczerą wdzięczność i najserdeczniejsze podziękowanie.

Zdaje mi się, że same reguły postępowania przedstawiłem dość jasno; rozumowania usiłowałem także przeprowadzić wyraźnie i ściśle, o ile na to sam przedmiot i zakres książki pozwalał. Parę miejsc, traktowanych mniej wyczerpująco w tekście głównym, starałem się pogłębić w uzupełnieniach, w których nadto pomieściłem niektóre wiadomości z nauk pomocniczych, by ewentualnie czytelnik nie potrzebował się uciekać do dzieł specyalnych, jakich często można nie posiadać pod ręką.

Pominąłem jednak zupełnie zasady rachunku prawdopodobieństwa, raz dlatego, żeby uzupełnieniom nie nadawać zbyt wielkich rozmiarów i następnie, ponieważ zasady te, w granicach wystarczających i w sposób bardzo przystępny, podałem już raz w rozdziale I-ym książki, wydanej w 1896 r. p. t. „Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych." Zresztą potrzebę znajomości rachunku prawdopodobieństwa sprowadziłem do minimum: definicya prawdopodobieństwa, prawdopodobieństwo zupełne i złożone, czyli zbioru i zbiegu zdarzeń, są pojęciami dość rozpowszechnionemi, często zaś używane, przy wykładzie metody najmniejszych kwadratów, bardziej już złożone twierdzenie Bayes'a, udało mi się, dzięki prof. Gosiewskiemu, dość szczęśliwie ominąć.

Tablicę I-szą zaczerpnąłem ze wzmiankowanej książki J. Bertrand'a „Calcul des probabilités"; tablicę II-gą z G. Hagen'a „Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-Rechnung."

Na zakończenie niech mi wolno będzie złożyć także serdeczne podziękowanie pp. Al. Czajewiczowi i S. Dicksteinowi za wydanie książki, za pomoc i za światłe rady, jakich mi niejednokrotnie udzielać raczyli.

Bolesław Danielewicz.

Warszawa, w marcu 1904 r.

TREŚĆ.

ERRATA.

str.	*wiersz*	*zamiast*	*powinno być*
8	10 od dołu	średnio-arytmetyczna	średnia arytmetyczna
13	14 „	oznaczyć	wyznaczyć
19	1 „	$x_0 = -x$, oraz $X = +x$ otrzymujemy	$x_0 = -x$ oraz $X = +x$, otrzymujemy
28	8 „	oznaczony	wyznaczony
34	9 od góry	a	a_λ
35	4 od dołu	oznaczyć	wyznaczyć
41	13 „	Jeżeli teraz za każde $s_\lambda \ldots$	Jeżeli teraz, z powodu jednakowej dokładności pojedynczych spostrzeżeń, za każde $s_\lambda \ldots$
56	12 i 13 od dołu	najprawdopobniejszej	najprawdopodobniejszej
61	7 od góry	wartości	wartość
75	13 od dołu	to samo równanie	te same równania
103	3 od góry	oznaczają się	wyznaczają się

W wyrażeniach (9) i (6′) na str. 180-ej przed $\sum\limits_{\rho,\sigma}$ stać powinien czynnik $\frac{1}{D^2}$.

Na str. 184-ej (wiersz 1-szy od dołu) i na str. 185-ej (wiersz 11-ty od góry) są poprzestawiane głoski C i A: tam gdzie stoją C powinny być A i naodwrót, gdzie są A powinny być C.

ROZDZIAŁ I.

POJĘCIA OGÓLNE.

1. Błędy spostrzeżeń. Jak wszystkie w ogóle czynności ludzkie, tak samo i wszelkiego rodzaju spostrzeżenia, choćby z największą dokonane starannością, nie są bezwzględnie dokładne. Przyczyny tego są najrozmaitsze: narzędzia, za pomocą których czynimy spostrzeżenia, mogą nie być zupełnie dokładnie wykonane lub użyte; zmysły zawodzą, albo ulegają złudzeniu; środek, wśród którego dokonywamy czynności, szkodliwie oddziaływa na narzędzia i zmysły — słowem, najróżnorodniejsze okoliczności, mimo największej uwagi, wciskają się niepostrzeżenie, na każdym kroku, do prac naszych i powodują, że rezultat, otrzymany choćby przez najbieglejszego wykonawcę, różni się od prawdziwego stanu rzeczy.

Jeżeli np. mamy wymierzyć odległość dwóch punktów na powierzchni ziemi położonych, wytykamy linię prostą pomiędzy nimi i przykładając następnie, w kierunku tej prostej, odpowiednie narzędzie (łańcuch, taśmę lub t. p.) wymierzamy szukaną odległość. Lecz linia może być wytknięta nie ściśle według prostej, łańcuch lub taśma mogą mieć niedokładny podział, ogniwa pierwszego lub włókna drugiej, czy to pod wpływem temperatury, wilgoci lub większego, albo mniejszego naprężenia, mogą się w trakcie roboty rozciągać lub kurczyć, a wszystko razem wzięte sprawia, że otrzymany z pomiaru rezultat jest różny od rzeczywistej odległości danych punktów od siebie.

Różnica pomiędzy rzeczywistym stanem rzeczy, a otrzymanym ze spostrzeżeń rezultatem nazywa się **błędem spostrzegania** (błędem obserwacyjnym).

2. Błędy stałe i przypadkowe. Te najrozmaitsze przyczyny, powodujące błędy, dają się podzielić na dwa rodzaje: na przyczyny działające zawsze w sposób jednakowy, których więc skutki można łatwo zauważyć i ocenić, a temsamem w rezultacie uwzględnić, oraz na przyczyny działające najrozmaiciej i za każdym razem inaczej — tak, że ich ani zauważyć, ani pochwycić niepodobna.

Jeżeli np. ogniwa łańcucha są rozluźnione, długość jego jest różna od tej, jaką ma wyobrażać, skutkiem czego każde wyciągnięcie łańcucha staje się powodem błędu, który się stale powtarza: ile razy wyciągniemy łańcuch, tyle razy popełnimy tę samą niedokładność i w rezultacie popełnimy błąd, będący sumą tych częściowych niedokładności. Oprócz tego jednak możemy popełnić mnóstwo innych jeszcze błędów: raz może być łańcuch silniej wyciągnięty, innym razem mniej silnie; raz może być położony ściśle według prostej, innym razem może nieco od niej zbaczać; to kołek może być zatknięty cokolwiek z boku lub zadaleko w tę lub inną stronę i t. d. Zdarzać się więc mogą przeróżne pomyłki w dwóch odmiennych kierunkach — to na plus, to na minus, których ani przewidzieć, ani zauważyć niepodobna i to tembardziej niepodobna, im owe niedokładności są mniejsze.

Pierwszego rodzaju błędy nazywają się **stałymi** i te łatwo usunąć się dają; dość bowiem, np. w przytoczonym przykładzie, zmierzyć dokładnie łańcuch przed, albo po jego użyciu, wyznaczyć różnicę w długości i tę następnie w rezultacie uwzględnić.

Drugiego rodzaju niedokładności, jak to już powiedziano, ani przewidzieć, ani zauważyć, ani — tembardziej — ocenić nie można i dlatego powstające z nich błędy noszą nazwę **przypadkowych**.

Sposoby na wyznaczenie i usunięcie błędów stałych podaje nauka o miernictwie; sposobami zaś największego zbliżenia się do prawdziwego rezultatu, pomimo błędów przypadkowych, zajmuje się nauka, stanowiąca treść niniejszej książki.

3. Własności błędów przypadkowych. Błędy przypadkowe posiadają pewne własności, wypływające bezpośrednio z charakteru przypadkowości. Własności rzeczone można było przyjąć i rzeczywiście przyjęto za fundament, na którym nasza nauka opartą została.

Przedewszystkiem z tego, cośmy o błędach przypadkowych powiedzieli, wynika, że każdy błąd obserwacyjny jest sumą algebraiczną bardzo wielu bardzo małych błędów elementarnych, które, co do swej bezwzględnej wartości, mogą być przyjęte za równe i każdy z nich równie łatwo może być dodatnym jak ujemnym. Wynika stąd, iż błędy spostrzeżeń, różniące się znakami, lecz równe co do swej bezwzględnej wielkości, są jednakowo prawdopodobne.

Następnie, chociaż napozór błędy przypadkowe, jako takie, żadnemu nie powinny podlegać prawu, niemniej jednak powszechnie wiadomo, że błędy większe rzadziej się trafiają niż mniejsze, albo inaczej: błędy mniejsze są prawdopodobniejsze od większych i naodwrót, czyli prawdopodobieństwo błędu jest funkcyą jego wielkości. Największe prawdopodobieństwo zajścia posiada błąd równy zeru, a prawdopodobieństwo błędu względnie nieskończenie wielkiego równa się zeru.

4. Prawdopodobieństwo błędu jako funkcya jego wielkości. Niech $F(x)$ wyobraża funkcyę ciągłą, przedstawiającą prawdopodobieństwo, że błąd danego spostrzeżenia zawiera się w granicach od 0 do x. Jeżeli x powiększymy o Δx, to $F(x+\Delta x)$ będzie prawdopodobieństwem popełnienia błędu zawartego w granicach od 0 do $x + \Delta x$, zaś różnica $F(x + \Delta x) - F(x)$ stanowi prawdopodobieństwo błędu zawierającego się w granicach od x do $x + \Delta x$.

Gdy granicę stosunku

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

czyli pochodną $F'(x)$, oznaczymy przez $f(x)$, iloczyn

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f(x)\,dx$$

przedstawia prawdopodobieństwo popełnienia błędu zawartego w granicach od x do $x + dx$, albo, ze względu na bezgraniczną małość ilości dx, przedstawia prawdopodobieństwo, z jakiem popełniamy błąd x.

Jeżeli w układzie prostokątnym XOY (fig. 1) nakreślimy

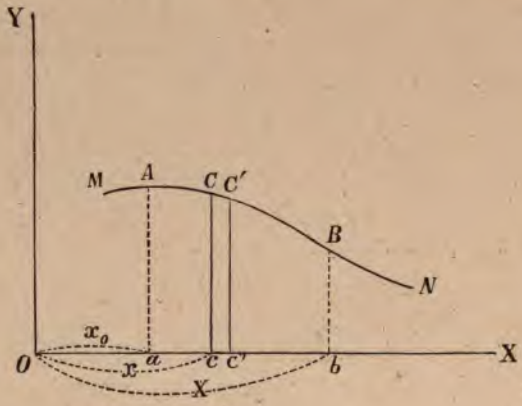

fig. 1.

krzywą MN, stanowiącą obraz graficzny funkcyi

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y = f(x),$$

to, na zasadzie (1), powierzchnia nieskończenie wązkiego paska $Ccc'C' = f(x)\,dx$ przedstawia prawdopodobieństwo, że błąd zawiera się w granicach od x do $x + dx$, a całka

$$(3) \quad . \; . \; . \; . \quad Y = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \text{powierzchni } aABb$$

wyobraża prawdopodobieństwo z jakiem błąd mieści się w granicach od x_0 do X.

Wynika stąd, że funkcya $f(x)$, jako pochodna funkcyi $F(x)$, jest czemś w rodzaju natężenia, z jakiem się zmienia prawdopodobieństwo w chwili, gdy błąd przechodzi przez wielkość x — podobnie, jak w mechanice pochodna funkcyi, wyrażającej prędkość, stanowi przyspieszenie; a w statystyce matematycznej, pochodna funkcyi, wyrażającej liczbę osób urodzonych w danym okresie, przedstawia natężenie resp. gęstość urodzeń w danej chwili i t. p.

Funkcyę $f(x)$ nazwano **prawem błędów** (Fehlergesetz, la facilité de l'erreur).

Ponieważ dx, jako różniczka zmiennej niezależnej, jest ilością stałą, przeto wartości funkcyi $f(x)$, wyrażającej prawo błędów, są ilościami proporcyonalnemi do prawdopodobieństw, z jakiemi popełniamy błędy, zawarte w granicach od x do $x+dx$, albo prościej, z powodu znanej nam już przyczyny, ilościami proporcyonalnemi do prawdopodobieństw, z jakiemi popełniamy błędy x.

Skoro tak jest, to wszystkie własności prawdopodobieństw $f(x)\,dx$ są zarazem własnościami prawa błędów $f(x)$, więc przedewszystkiem, według art. 3,

$$f(x) = f(-x). \tag{4}$$

Następnie, ponieważ ze wzrostem bezwzględnej wielkości błędu, jego prawdopodobieństwo maleje i naodwrót, zatem

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{df(x)}{dx} = f'(x) < 0, \text{ gdy } x > 0 \\[2mm] \dfrac{df(x)}{dx} = f'(x) > 0, \text{ gdy } x < 0. \end{array}\right. \tag{5}$$

Dalej, skoro bardzo wielkie błędy są niemożliwe, więc zawsze znajdzie się pewna granica, której błąd przekroczyć nie może. Jeżeli granicę tę oznaczymy np. przez δ, wtedy

$$\left\{\begin{array}{l} \text{dla } x \geqq \delta \text{ jest } f(x) = 0, \text{ co tembardziej ma miejsce} \\ \text{dla } x = \infty. \end{array}\right. \tag{6}$$

Wreszcie, jakiś błąd, nie wyłączając zera, z pewnością w czasie dokonywania spostrzeżeń popełniony będzie, z czego wypada

$$(7) \quad \int_{-\delta}^{+\delta} f(x)\,dx = 1 \quad \text{oraz} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \quad (7')$$

5. Średnie błędów. Wyobraźmy sobie nieograniczenie wielką liczbę obserwacyi n, dokonanych celem wyznaczenia pewnej wielkości, np. rozciągłości A. Gdy rzeczywistą wielkość tej rozciągłości porównamy z otrzymanymi rezultatami pomiarów, mieć będziemy, nie wyłączając zera, n różnej wielkości błędów dodatnych i ujemnych.

Błędy te uporządkujmy według ich wielkości, począwszy od zera do możliwych dla błędów granic, za które — jak wiadomo — można przyjąć $-\infty$ i $+\infty$. Tak uporządkowane błędy podzielmy na grupy, objęte granicami różniącemi się od siebie o dx.

Przypuśćmy dalej, że w granicach od x do $x + dx$ mieści się m_x błędów; wtedy prawdopodobieństwo, że błąd zawiera się w granicach pomienionych, równa się

$$\frac{m_x}{n} = f(x)\,dx, \text{ skąd}$$

где n число наблюдений

N3 10/III 09

$$(8) \quad \dots\dots\dots \quad m_x = n\,.\,f(x)\,dx.$$

Ponieważ błędy, zawarte w granicach od x do $x + dx$, można przyjąć za równe błędowi x, przeto

$$x\,.\,m_x = n\,.\,x\,.\,f(x)\,dx$$

przedstawia sumę błędów zawartych w granicach od x do $x + dx$, a suma błędów zawartych w granicach od $-\infty$ do $+\infty$ równa się

$$n\,.\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx.$$

см. выноску.

по мат-ски ожид. ошибок есть сред-ней

Gdy teraz ostatnie wyrażenie podzielimy przez n, mieć będziemy średnią wszystkich możliwych błędów, którą oznaczywszy przez σ_1, otrzymamy

$$(9) \quad \dots\dots\dots \quad \sigma_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx.$$

Jeżeli (8) pomnożymy nie przez x, lecz przez x^2, x^3 i t. d. i postępować będziemy dalej zupełnie tak samo jak poprzednio, mieć będziemy średnią kwadratów błędów, średnią sześcianów błędów i t. d., to jest otrzymamy

$$(9') \quad \dots\dots\dots \quad \sigma_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,f(x)\,dx;$$

$$\sigma_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3\,f(x)\,dx;\ \sigma_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4\,f(x)\,dx;\ \sigma_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^5\,f(x)\,dx;\ \text{i t. d.}$$

математическое ожидание ошибок равно $\sum x.f(x)dx$
мат. ожид. ошибок от $-\infty$ до $+\infty$ равно $\sum_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx =$
$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$, и оно называется среднею величиною ошибки.

Skoro, według art. 3-go, błędy dodatne zachodzą z równą łatwością jak i błędy ujemne tej samej bezwzględnie wielkości, to oczywiście

(9'') σ_1; σ_3; σ_5; i t. d. powinny być równe zeru.

6. Błąd średni i prawdopodobny. Z pośród całego szeregu opisanych, w poprzednim artykule, średnich, najważniejszą jest średnia kwadratów błędów

$$\sigma_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx.$$

Oznaczywszy tę średnią przez s^2, mamy

(10) . . . . $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = s^2 = \sigma_2$, skąd otrzymujemy

(11) . . . . $s = \pm \sqrt{\sigma_2}$.

Ilość s zowie się błędem średnim. средняя ошибка

Oprócz błędu średniego wyróżnia się jeszcze t. zw. błąd prawdopodobny, t. j. taki błąd p, który czyni zadość równaniu

(12) . . . . $\int_{-p}^{+p} f(x)\, dx = \frac{1}{2}$.

Dzieli on, oczywiście, bezwzględną wielkość wszystkich możliwych błędów na dwie części (od 0 do p i od p do ∞), posiadające tę własność, że błąd popełniony może się z jednakowem prawdopodobieństwiem mieścić tak w jednej jak i w drugiej części; albo inaczej, można postawić jeden przeciwko jednemu, że błąd popełniony jest mniejszy od p. по абсолютной своей величине

Итак, средняя ошибка $= \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx}$

вероятная ошибка есть p, определяемое из уравнения $\int_{-p}^{+p} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

ROZDZIAŁ II.

PRAWO BŁĘDÓW.

Fehlergesetz

7. Różne sposoby postępowania. W poprzednim rozdziale przyszliśmy do przeświadczenia, że istnieje jakaś funkcya, określająca sposób, w jaki się zmienia prawdopodobieństwo popełnienia różnej wielkości błędów. Funkcyę tę nazwaliśmy prawem błędów i, nie znając kształtu samej funkcyi, określiliśmy jej zasadnicze własności. Obecnie chodzi nam o kształt pomienionej funkcyi, czyli o wyrażenie analityczne na prawo błędów.

$f(x)$

Odszukaniem rzeczonego wyrażenia zajmowało się bardzo wielu uczonych (Gauss, Laplace, Encke, Bessel, Hagen i inni), ale wszystkie, użyte przez nich, sposoby postępowania dają się sprowadzić ostatecznie do dwóch tylko typów: do przyjęcia za podstawę założenia Gaussa i do t. zw. teoryi molekularnej.

Sposób pierwszy polega na założeniu, że najprawdopodobniejszą wielkością wielokrotnie wymierzonej rozciągłości jest średnio-arytmetyczna z otrzymanych rezultatów; sposób zaś drugi wychodzi ze znanej nam, z art. 3-go, zasady, iż każdy błąd można uważać za sumę algebraiczną bardzo wielu bardzo małych błędów elementarnych.

I jeden i drugi sposób prowadzi do identycznych wyrażeń, a chociaż sposób pierwszy jest bardziej rozpowszechniony, my jednak użyjemy sposobu drugiego, ponieważ w podręcznikach polskich (Folkierski, Gustawicz) dotąd tylko sposób Gaussa był użyty, dobrze się więc stanie, gdy i sposób oparty na teoryi molekularnej nie będzie obcy czytelnikom polskim. Шалуха.

Zresztą, aczkolwiek Gauss uważał, że wszelki dowód na uczynione przez niego założenie jest zbyteczny, gdyż samo się ono własną udowadnia oczywistością, niemniej jednak nie każdy może się na takie orzeczenie zgodzić.

Co się tyczy t. zw. teoryi molekularnej, to i ona nie jest wolną od pewnych subtelności w rozumowaniu, w każdym jednak razie obchodzi się bez pewnika Gaussa, który dopiero wypływa z niej jako wniosek, wynikający z otrzymanego na prawo błędów wyrażenia analitycznego.

вранье, попытк... провер... незам... ными о... разом... утверж... въ друг... ніе Гаусса формы, совершенно некон... ном... стр 13

8. Prawdopodobieństwo popełnienia błędów, wyrażonych przez liczby całkowite. Wyobraźmy sobie naczynie, z dowolną, lecz równą sobie, liczbą czarnych i białych półgałek, zupełnie identycznie odrobionych. Przy ciągnieniu na chybił trafił, prawdopodobieństwo wyjścia zarówno białej jak czarnej półgałki równa się oczywiście $\frac{1}{2}$. Przypuśćmy następnie, że wykonywamy $2n$ ciągnień, wrzucając zawsze wyciągniętą półgałkę, po zanotowaniu jej koloru, nazad do naczynia. Wtedy mogą się trafić następujące przypadki:

1)	albo wyjdą wszystkie	$2n$ półgałki białe	i 0	czarnych,
2)	„ wyjdzie	$2n - 1$ półgałek białych	i 1	czarna,
3)	„ „	$2n - 2$ „ „	i 2	czarne,
4)	„ „	$2n - 3$ „ „	i 3	„
	i t. d.		i t. d.	
$\lambda + 1$)	albo wyjdzie	$2n - \lambda$ półgałek białych	i λ	czarnych,
	i t. d.		i t. d.	
$n + 1$)	albo wyjdzie	n półgałek białych	i n	czarnych,
	i t. d.		i t. d.	
$2n - \lambda + 1$)	albo wyjdzie	λ półgałek białych	i $2n - \lambda$	czarnych,
	i t. d.		i t. d.	
$2n - 3 + 1$)	albo wyjdą	3 półgałki białe	i $2n - 3$	czarnych,
$2n - 2 + 1$)	„ „	2 „ „	i $2n - 2$	„
$2n - 1 + 1$)	„ wyjdzie	1 półgałka biała	i $2n - 1$	„
$2n + 1$)	„ „	0 półgałek białych	i $2n$	„

Wszystkich pojedynczo liczonych i jednakowo możliwych przypadków może tu być widocznie 2^{2n}, które układają się w $2n + 1$ grup powyżej wyliczonych, lecz nie jednakowo możliwych, albowiem, podczas kiedy w pierwszej grupie zachodzi tylko jedna kombinacya z pośród wszystkich 2^{2n}, w grupie drugiej mieści się kombinacyi $2n$, w grupie trzeciej $\frac{2n(2n-1)}{1.2}$, w czwartej $\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}$ i t. d., w grupie $(\lambda + 1)$-ej jest kombinacyi $\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-\overline{\lambda-1})}{1.2.3\ldots\lambda}$ i t. d., w $(n+1)$ grupie, czyli w środkowej i najliczniejszej, jest kombinacyi $\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-\overline{n-1})}{1.2.3\ldots n}$; dalej liczba kombinacyi w grupach następnie idących powtarza się w porządku odwrotnym do poprzednio opisanego.

Dzieląc każdy z tych wyrazów przez 2^{2n}, otrzymamy prawdopodobieństwo pojawienia się kombinacyi z odpowiedniej grupy, a suma owych prawdopodobieństw stanowi rozwinięcie dwumianu

$$(13) \quad \ldots \quad (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})^{2n} = (\tfrac{1}{2})^{2n} + \frac{2n}{1}\cdot(\tfrac{1}{2})^{2n-1}\cdot(\tfrac{1}{2})^{1} +$$

$$+\frac{2n(2n-1)}{1.2}\cdot(\tfrac{1}{2})^{2n-2}\cdot(\tfrac{1}{2})^{2} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}\cdot(\tfrac{1}{2})^{2n-3}\cdot(\tfrac{1}{2})^{3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-\overline{\lambda-1})}{1.2.3\ldots\lambda}\cdot(\tfrac{1}{2})^{2n-\lambda}\cdot(\tfrac{1}{2})^{\lambda} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-\overline{n-1})}{1.2.3\ldots n}\cdot(\tfrac{1}{2})^{n}\cdot(\tfrac{1}{2})^{n} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-\overline{\lambda-1})}{1.2.3\ldots\lambda}\cdot(\tfrac{1}{2})^{\lambda}\cdot(\tfrac{1}{2})^{2n-\lambda} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}\cdot(\tfrac{1}{2})^{3}\cdot(\tfrac{1}{2})^{2n-3} + \frac{2n(2n-1)}{1.2}\cdot(\tfrac{1}{2})^{2}\cdot(\tfrac{1}{2})^{2n-2} +$$

$$+\frac{2n}{1}\cdot(\tfrac{1}{2})^{1}\cdot(\tfrac{1}{2})^{2n-1} + (\tfrac{1}{2})^{2n} = 1;$$

показатели

gdzie nadto wykładniki pierwszego czynnika $\frac{1}{2}$ przedstawiają liczby półgałek białych, a wykładniki drugiego czynnika $(\frac{1}{2})$ — liczby półgałek czarnych. Wyraz środkowy jest widocznie największy, w stronę lewą i prawą idące stopniowo maleją w ten sposób, że równo oddalone od wyrazu środkowego są sobie równe. Suma wszystkich wyrazów równa się jedności.

Niech nam teraz półgałki białe przedstawiają połówki jakiejś idealnej jednostki błędu dodatnego, a półgałki czarne niech reprezentują połówki tej samej wielkości błędu ujemnego. Jeżeli przytem założymy, że te połówki owej idealnej jednostki błędu zarówno dodatnego jak ujemnego mogą przy pomiarach z równą zachodzić łatwością, to wyrazy rozwinięcia (13) przedstawią nam kolejno prawdopodobieństwa, z jakiemi zachodzą w całkowitych jednostkach wyrażone błędy następujące: $\frac{2n-0}{2}$; $\frac{(2n-1)-1}{2}$; $\frac{(2n-2)-2}{2}$;

$$\frac{(2n-3)-3}{2};\ldots;\frac{(2n-\lambda)-\lambda}{2};\ldots;\frac{n-n}{2};\ldots;\frac{\lambda-(2n-\lambda)}{2};\ldots$$

$$\ldots;\frac{3-(2n-3)}{2};\ \frac{2-(2n-2)}{2};\ \frac{1-(2n-1)}{2};\ \frac{0-2n}{2},$$ czyli błędy:

$$+n,\ +(n-1),\ +(n-2),\ +(n-3),\ldots,+(n-\lambda),\ldots,0,\ldots$$

$$\ldots,-(n-\lambda),\ldots,-(n-3),\ -(n-2),\ -(n-1),\ -n.$$

Prawdopodobieństwa te odpowiadają wszystkim warunkom, jakim, według rozdziału I, błędy zadość czynić powinny, albowiem: 1) błędy równej wielkości, lecz przeciwnych znaków, są jednakowo prawdopodobne, 2) błąd równy zeru jest najprawdopodobniejszy, 3) im błąd jest bezwzględnie większy, tem jest mniej prawdopodobny, a błąd bardzo wielki jest prawie niemożliwy. Nie dosyć na tem, ale, wychodząc z błędu środkowego, t. j. od największego wyrazu rozwinięcia (13), wyrażającego prawdopodobieństwo popełnienia błędu 0, gdy, począwszy od tego wyrazu, dodawać będziemy do niego wyrazy kolejno idące w stronę lewą, to sumy tych wyrazów dawać nam będą prawdopodobieństwa popełnienia błędów: 0 lub 1; 0, 1 lub 2; 0, 1, 2 lub 3, i t. d., t. j. w ogóle, oznaczywszy wyrazy rozwinięcia (13) przez y, suma $\sum_m^M y$, przy założeniach $M = m,\ m+1,\ m+2,\ldots, M$ dawać nam będzie prawdopodobieństwa, z jakiemi popełniamy błędy: m; m lub $m+1$; m, $m+1$ lub $m+2$; i t. d.; m, $m+1$, $m+2,\ldots,$ lub M. Suma wszystkich wyrazów rozwinięcia (13) równa się jedności, czyli prawdopodobieństwo przechodzi w pewność, że jakiś błąd, nie wyłączając zera, popełnić musimy. notojpecie

9. Prawdopodobieństwo popełnienia błędów jakichkolwiek.—Wyrażenie analityczne prawa błędów. Wyrazy rozwinięcia (13) można przedstawić za pośrednictwem wyrazu środkowego — największego. Gdy ten wyraz oznaczymy przez ε, czyli gdy założymy

$$\frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{n!} = \varepsilon, \text{ to}$$

dla błędu 0, prawdopodobieństwo $y_0 = \varepsilon$,

„ „ 1, „ $y_1 = \frac{n}{n+1} \cdot \varepsilon$,

„ „ 2, „ $y_2 = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} \cdot \varepsilon$,

„ „ 3, „ $y_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \cdot \varepsilon$,

t. d. i t. d.

dla błędu m prawdopodobieństwo $y_m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)} \cdot \varepsilon$,

dla błędu $m+1$ „ $y_{m+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m+1)} \cdot \varepsilon$.

Stąd $y_{m+1} = \frac{n-m}{n+m+1} y_m$, a odejmując od obu stron po y_m

(14) . . . . . $y_{m+1} - y_m = -\frac{2m+1}{n+m+1} y_m$.

Jeżeli dalej wartość bezwzględną błędu elementarnego (molekularnego) oznaczymy przez Δx, skutkiem czego ewentualny błąd $x = m \cdot \Delta x$ i $x + \Delta x = (m+1)\Delta x$, skąd $m = \frac{x}{\Delta x}$ i $m + 1 = \frac{x + \Delta x}{\Delta x}$, to równanie (14) przejdzie na

(15) . . $y_{x+\Delta x} - y_x = -\frac{2x + \Delta x}{n\Delta x + x + \Delta x} y_x$.

Ponieważ przytem

$$y_{x+\Delta x} - y_x = \Delta y_x,$$

zatem (15) możemy napisać pod postacią

(15') . . . . . . $\frac{\Delta y_x}{y_x} = -\frac{2x + \Delta x}{n\Delta x + x + \Delta x}$.

Ale z istoty rzeczy wynika, że $n\Delta x$ powinno być niezmiernie wielkie względem $x = m\Delta x$, oraz $m\Delta x$ względem samego Δx. Wypada stąd

$$(15'') \quad \dots\dots \quad \frac{\Delta y_x}{y_x} = -\frac{2x}{n\Delta x} = -\frac{2x \, . \, \Delta x}{n \, . \, \Delta x^2}.$$

Załóżmy teraz, że $\Delta x = dx$ jest nieskończenie małe, a (dodatne ze swej natury) n nieskończenie wielkie — w ten jednak sposób, że

$$(16) \quad \dots\dots\dots \quad \lim \cancel{\mathrm{gr}}(ndx^2) = \frac{1}{h^2},$$

произвольное положение равносильное положению Гаусса см. стр 152 доказать это

rozumiejąc przez h ilość skończoną, w którym to razie $ndx = \frac{1}{h^2 dx}$ będzie wyrażało błąd nieskończenie wielki. Wówczas, opuszczając, zbyteczny nam już obecnie, znaczek x przy y w (15''), otrzymujemy:

$$(17) \quad \dots\dots\dots \quad \frac{dy}{y} = -2h^2 x dx,$$

zaś po zcałkowaniu

$$\log_e y = -h^2 x^2 + \log_e C,$$

albo inaczej

$$(18) \quad \dots\dots\dots \quad y = C \, . \, e^{-h^2 x^2}$$

Funkcya ta stanowi wyrażenie na prawdopodobieństwo popełnienia jakiegokolwiek błędu x. C jest stałą dowolną, dopiero oznaczyć się mającą, a e podstawą logarytmów naturalnych. Ilości C i h, w wyrażeniu (18), mają swoje specyalne znaczenie.

Jeżeli w (18) założymy $x = 0$, otrzymamy $y = C$; stała C oznacza zatem prawdopodobieństwo, z jakiem popełniamy błąd zero, czyli z jakiem nie popełniamy błędu, albo inaczej jeszcze, oznacza prawdopodobieństwo, że spostrzeżenie jest dokładne (bez błędu).

Ustaliwszy znów C, ze wzrostem h maleje y, czyli im h większe, tem jest mniejsze prawdopodobieństwo popełnienia danego błędu x, ilość więc h zależy od dokładności, z jaką dokonywamy spostrzeżenia, im dokładniej wykonamy obserwacye, tem h będzie większe. Dlatego ilość h nazywa się miarą dokładności (la mesure de la précision), albo poprostu dokładnością lub ścisłością spostrzeżeń. ~~без~~ [illegible] точность

x) Из вывода Гаусса (стр. 155) возьмем $\frac{1}{2}C_1 = -h^2$; $\frac{1}{h^2} = -\frac{2}{C_1} = -\frac{2}{\varphi'(x)} = \frac{-2}{\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)} = \frac{-2}{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\frac{1}{y}\right)} = \frac{-2}{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{y}\frac{1}{dx}\right)} =$ (как указано в верху настоящей страницы) $= \frac{-2}{\frac{d}{dx}\left(- \frac{2x}{\dots}\right)}$; обозначив $ndx^2 = z$, получ

Ponieważ według wzoru (18) prawdopodobieństwo popełnienia

$$\text{błędu } x_0 = C \, . \, e^{-h^2 x^2_0}$$

$$\text{błędu } x_1 = C \, . \, e^{-h^2 x^2_1}$$

$$\text{i t. d.}$$

$$\text{błędu } x_{m-1} = C \, . \, e^{-h^2 x^2_{m-1}}$$

przeto prawdopodobieństwo popełnienia jednego z pomienionych błędów, zresztą któregokolwiek, równa się

$$C \, . \, (e^{-h^2 x^2_0} + e^{-h^2 x^2_1} + \ldots + e^{-h^2 x^2_{m-1}}).$$

Zmieniając tedy x w sposób ciągły od x_0 do $x = m\Delta x = X$, przy Δx malejącem do nieskończoności, na prawdopodobieństwo, że błąd zawiera się w granicach od x_0 do X, otrzymujemy wyrażenie

$$Y = C \sum_{x = x_0}^{x = X} e^{-h^2 x^2} = \frac{C}{\Delta x} \cdot \sum_{x = x_0}^{x = X} e^{-h^2 x^2} \, . \, \Delta x = \frac{C}{dx} \int_{x_0}^{X} e^{-h^2 x^2} \, dx. \tag{19}$$

Błąd niezawodnie znajduje się w granicach od $-\infty$ do $+\infty$, skutkiem czego

$$Y_\infty = \frac{C}{dx} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} \, dx = 1.$$

Jeżeli w ostatniej całce podstawimy $hx = z$, skąd $dx = \frac{dz}{h}$, to

$$Y_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} \, dx = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \, dz,$$

że zaś (patrz uzupełnienie I)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \, dz = \sqrt{\pi},$$

чимъ $\frac{1}{h^2} = \frac{-2}{-2\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{z}\right)} = \frac{1}{\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{z}\right)}$; откуда $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{z}\right) = h^2$; $\frac{x}{z} = xh^2 + K$; при $k = 0$ получаемъ $z = ndx^2 = \frac{1}{h^2}$; такимъ образомъ, основное положенiе молекулярнаго принципа вытекаетъ изъ принципа Гаусса, и потому можно сказать, что молекулярный принципъ самъ по себѣ [illegible] zatem

$$Y_\infty = \frac{C}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{C}{h\,.\,dx}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}\,.\,C}{h\,.\,dx} = 1, \text{ skąd}$$

$$(20) \quad \ldots\ldots\ldots \quad C = \frac{h\,.\,dx}{\sqrt{\pi}}. \quad \ldots\ldots\ldots$$

To dowodzi, że prawdopodobieństwo wykonania obserwacyi bezbłędnej jest nieskończenie małe, o ile dokładność spostrzeżeń (h) nie jest nieskończenie wielką. Takiej wszakże dokładności w praktyce doścignąć nie można.

Podstawiwszy otrzymane wyrażenie na C w (19), na prawdopodobieństwo popełnienia błędu w granicach od x_0 do X wypada

$$(19') \quad \ldots \quad Y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{x_0}^{X} e^{-h^2x^2}\,dx = \int_{x_0}^{X}\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2x^2}\,dx.$$

W art. 4-ym otrzymaliśmy również wyrażenie ogólne na prawdopodobieństwo popełnienia błędu, zawartego w granicach od x_0 do X, mianowicie było niem

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad Y = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

Jedno i drugie, t. j. (19') i (3) wyrażają jedno i to samo, musi więc być

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X}\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2x^2}\,dx,$$

co znów może mieć miejsce tylko wtedy, gdy

$$(21) \quad \ldots\ldots \quad y = f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2x^2}.$$

Jest to właśnie szukane wyrażenie analityczne na prawo błędów, w którem h posiada wiadome nam znaczenie.

10. Krzywa przedstawiająca funkcyę, wyrażającą prawo błędów. Otrzymane wyrażenie na prawo błędów stanowi funkcyę o jednej zmiennej, która więc może być przedstawioną za pomocą krzywej płaskiej. Starajmy się zdeterminować tę krzywą

dx есть вероятность ошибки, величиной x

$$(21) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2},$$

przyjmując y za rzędne, a x za odcięte w układzie prostokątnym XOY (fig. 2).

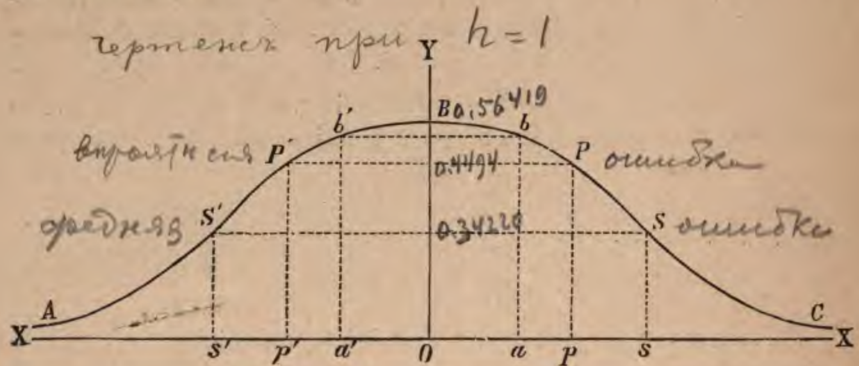

fig. 2.

Z przyrównania pierwszej pochodnej do zera otrzymujemy równanie

$$-\frac{2h^3x}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} = 0,$$

któremu czynią zadość $x = 0$ i $x = \pm\infty$. Ponieważ jednak druga pochodna

$$y'' = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} + \frac{4h^5x^2}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$$

przy $x = 0$ staje się ilością ujemną, zaś przy $x = \pm\infty$ zerem,
max. przeto badana krzywa posiada jedną tylko największość przy $x = 0$,
min. znajdującą się na osi Y-ów, najmniejszości zaś nie posiada żadnej.

Wartości $x = 0$ odpowiada $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, założywszy więc np. $h = 1$, otrzymamy

$$y = +\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}564\,19$$

jako największość rzędnych. Tę wartość, po przyjęciu dowolnej długości za jednostkę miary, odetnijmy na osi Y-ów do punktu B. Tym sposobem otrzymujemy pierwszy punkt, należący do badanej krzywej (przy $h = 1$).

Z kształtu równania (21) widzimy następnie, że krzywa przez oś Y-ów jest podzielona na dwie symetryczne części i że rzędna nigdy ujemną stać się nie może, skutkiem czego krzywa leży w całości ponad osią X-ów.

Ponieważ krzywa jest symetryczną względem osi Y-ów, możemy więc dalej poprzestać na badaniu jednej tylko, np. prawej gałęzi.

Otóż pochodna pierwsza

$$y' = -\frac{2h^3x}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2x^2}$$

jest, dla gałęzi prawej, stale ujemną, co nas poucza, że ze wzrostem odciętej rzędna stale się zmniejsza.

Okoliczność ta jest zresztą, i bez badania pochodnej, oczywistą wprost z kształtu strony drugiej równania (21), z którego się pokazuje bezpośrednio, że istotnie ze wzrostem x rzędna y maleje stale i w sposób ciągły, aż nareszcie przy $x = \infty$ staje się zerem.

Krzywa zatem, począwszy od swej największości $+\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ (resp. od $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, gdy założymy $h = 1$), stale i symetrycznie w obie strony się zniża, dążąc asymptotycznie ku osi X-ów.

Zobaczmy teraz, w którą stronę zwraca krzywa swą wypukłość i wklęsłość.

W tym celu zbadajmy iloczyn

$$y \,.\, y'' = -\frac{2h^4}{\pi} \,.\, e^{-2h^2x^2} + \frac{4h^6}{\pi}\, x^2 e^{-2h^2x^2} = \frac{2h^4}{\pi}\, e^{-2h^2x^2} \,.\, (2h^2x^2 - 1).$$

Pierwszy czynnik jest stale dodatny, znak więc iloczynu yy'' zależy od znaku drugiego czynnika, a mianowicie:

1) dokąd $2h^2x^2 - 1 < 0$, czyli dokąd $x < \frac{1}{h\sqrt{2}}$, krzywa jest zwrócona wklęsłością w stronę osi X-ów,

2) gdy $2h^2x^2 - 1 > 0$, czyli gdy $x > \frac{1}{h\sqrt{2}}$, krzywa jest zwrócona wypukłością w stronę osi X-ów.

Wynika stąd, że punkty odpowiadające odciętym

$$x = \pm \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

są punktami przegięcia, co można sprawdzić i bezpośrednio, przyrównywując drugą pochodną do zera. Istotnie

$$y'' = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} + \frac{4h^5}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-h^2x^2} = 0,$$

czyli

$$-e^{-h^2x^2} + 2h^2x^2e^{-h^2x^2} = e^{-h^2x^2}(2h^2x^2 - 1) = 0.$$

Równaniu temu stanie się zadość, gdy

$$2h^2x^2 - 1 = 0,$$

skąd rzeczywiście wypada

(22) . . . . $x = \pm \frac{1}{h\sqrt{2}}$

Ten punkt przegięcia ma swoje specyalne znaczenie. Według wzoru (11) w art. 6, błąd średni

$$s = \pm \sqrt{\sigma_2},$$

według zaś wzoru (9')

$$\sigma_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx.$$

Podstawiwszy w ostatnie wyrażenie

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2},$$

wypada

$$\sigma_2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-h^2x^2}\, dx,$$

czyli, według wzoru (6) w uzupełnieniu I,

$$\sigma_2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2h^3} = \frac{1}{2h^2};$$ stąd

(23) . . . . $s = \pm \sqrt{\sigma_2} = \pm \frac{1}{h\sqrt{2}}.$

Z porównania (22) z (23) okazuje się, że punkt przegięcia krzywej

NB

$$(21) \quad \dots\dots\dots \quad y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

odpowiada błędowi średniemu.

Podstawiając w (21) $x = \frac{1}{h\sqrt{2}}$, otrzymujemy

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \cdot \frac{1}{2h^2}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{h}{\sqrt{e\pi}},$$

средняя ошибк
при $hx = 0,707$
$y = 0.34220\, h$

a po założeniu $h = 1$ w ostatnich wyrażeniach na x i y, wypada

$$\text{dla } x = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,11; \quad y = \frac{1}{\sqrt{e\pi}} = 0{,}342\,20,$$

co posiadając, możemy nakreślić (przy założeniu $h = 1$) ogólną postać krzywej prawa błędów, której kształt, przedstawiony na fig. 2, przypomina jakby pionowe przecięcie dzwonu o powłoce sięgającej nieskończoności. Punkty S i S', odpowiadające błędowi średniemu s resp. s', są punktami przegięcia.

Rozumie się, że przy innej wielkości h, zarys krzywej ulegnie pewnemu przekształceniu, mianowicie spadek ku osi X-ów będzie tem gwałtowniejszy, im h większe; ogólny wszakże wygląd, czyli charakterystyczna postać krzywej nie podlega zmianie.

11. Liczebne wartości prawdopodobieństw popełniania błędów. Krzywa, wyobrażająca prawo błędów, określa powierzchnie przedstawiające prawdopodobieństwa popełnienia błędów, zawartych w danych granicach.

Prawdopodobieństwem błędu zawartego w granicach od x_0 do X jest

$$(24) \quad \dots\dots \quad W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{X} e^{-h^2 x^2}\, dx.$$

Jeżeli zaś chodzi nam, jak to najczęściej się trafia, o prawdopodobieństwo błędu bez względu na znak, to, założywszy $x_0 = -x$, oraz $X = +x$ otrzymujemy

$$(25) \quad . \; . \; W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2}\, dx = \text{powierzchni } abb'a'$$

$$= \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-h^2x^2}\, dx.$$

Wyrażenie (25) oznacza zatem prawdopodobieństwo, z jakiem bezwzględna wielkość błędu nie przekracza granicy x.

Całkę (25) można przedstawić pod inną postacią.

Załóżmy $hx = z$, wtedy $dx = \frac{dz}{h}$, a granice od 0 do x przechodzą na granice od 0 do xh. Po wykonaniu podstawień, wzór (25) zmienia się na

$$(25') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{xh} e^{-z^2}\, dz$$

i w tej postaci posiada bardzo duże znaczenie zarówno w rachunku prawdopodobieństwa jak i w teoryi błędów. Oznacza się zazwyczaj przez $\theta(xh)$ — tak, że

$$(26) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \theta(xh) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{xh} e^{-z^2}\, dz.$$

z = hx

Ponieważ całka

$$\int_{0}^{xh} e^{-z^2}\, dx$$

nie daje się wyrazić w formie skończonej, zatem dla $\theta(xh)$ obliczono wartości, odpowiadające różnym wielkościom xh (patrz uzupełnienie II), i otrzymane rezultaty ułożono w formę tabeli, którą podajemy na końcu niniejszej książki (tablica I).

12. Zasada średniej arytmetycznej. Przypuśćmy, że jedną i tę samą wielkość wymierzyliśmy z jednakową ścisłością (a więc przy tem samem h) n razy, otrzymując za każdym razem inny rezultat a_1; a_2; a_3; ... ;a_{n-1}; a_n. Zachodzi pytanie, jaka jest najprawdopodobniejsza wartość tej szukanej wielkości.

a есть наивероятнейшее значение искомой величины.

Gdy szukaną wartość mierzonej wielkości oznaczymy przez a, to popełnionymi błędami są

$$a_1 - a = x_1;\ a_2 - a = x_2;\ a_3 - a = x_3; \ldots$$
$$\ldots; a_{n-1} - a = x_{n-1} \text{ i } a_n - a = x_n.$$

Jeżeli założymy na chwilę, że $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n$ nie są jeszcze ze spostrzeżeń otrzymanemi, w takim razie prawdopodobieństwem:

dla ewentualnego błędu $x_1 = a_1 - a$ jest $y_{x_1} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2(a_1-a)^2}\, dx_1$,

„ „ „ $x_2 = a_2 - a$ „ $y_{x_2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2(a_2-a)^2}\, dx_2$,

„ „ „ $x_3 = a_3 - a$ „ $y_{x_3} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2(a_3-a)^2}\, dx_3$,

i t. d. i t. d.

„ „ „ $x_n = a_n - a$ „ $y_{x_n} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2(a_n-a)^2}\, dx_n$.

Prawdopodobieństwem zejścia się pomienionych błędów jest iloczyn powyższych wyrażeń, czyli

$$W = y_{x_1} \cdot y_{x_2} \cdot y_{x_3} \cdots y_{x_n}$$
$$= \frac{h^n}{(\sqrt{\pi})^n} \cdot e^{-h^2\left\{(a_1-a)^2 + (a_2-a)^2 + \ldots + (a_n-a)^2\right\}}\, dx_1 \,.\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Skoro jednak $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n$ są już ze spostrzeżeń otrzymane, przeto W wyraża prawdopodobieństwo, że błędy $x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n$ zajdą przy ponownych spostrzeżeniach, a jeżeli mają być najprawdopodobniejszymi, powinno być W największością, czyli

$$(\alpha)\quad h^2\left\{(a_1-a)^2+(a_2-a)^2+(a_3-a)^2+\ldots+(a_n-a)^2\right\} \text{ najmniejszością,}$$

z którego to warunku obliczone a będzie oczywiście najprawdopobniejszą wartością wielkości szukanej.

Ażeby ją zatem znaleźć, przyrównajmy do zera pierwszą pochodną ostatniego wyrażenia, wziętą względem a. Uczyniwszy to wypada

вот весь способ наименьших квадрат

$$(a_1 - a) + (a_2 - a) + (a_3 - a) + \ldots + (a_n - a) = 0,$$

skąd

$$(27) \quad \ldots \quad a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n}.$$

Że ta wartość a odpowiada najmniejszości wyrażenia (α) łatwo przekonać się można, biorąc drugą pochodną tegoż wyrażenia. Jest nią $+2nh^2$, czyli ilość dodatna, co właśnie dowodzi, iż mamy tu do czynienia z najmniejszością.

Widzimy tedy z (27), że najprawdopodobniejszą wartością wielokrotnie i z jednakową ścisłością wymierzonej wielkości jest średnia arytmetyczna z otrzymanych rezultatów.

Zasada powyższa, którą tu otrzymaliśmy drogą analizy, została, jak o tem już z art. 7 wiemy, przez Gaussa przyjętą z góry za pewnik i posłużyła mu za środek do wyprowadzenia takiego samego wyrażenia na prawo błędów, jakie i myśmy otrzymali na drodze teoryi molekularnej. Ten drugi sposób wyprowadzenia wyrażenia na prawo błędów podajemy w uzupełnieniu III.

Zasada średniej arytmetycznej wypłynęła z uczynienia sumy kwadratów błędów najmniejszością; na tem samem założeniu, jak to dalej zobaczymy, opiera się dalszy ciąg niniejszej pracy i dlatego ten sposób poznawania błędów zyskał miano „Metody najmniejszych kwadratów”.

13. Błąd prawdopodobny. Wróćmy do wyrażenia

$$(26) \quad \ldots\ldots \quad \theta(xh) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{xh} e^{-z^2}\, dz.$$

Dla wyrażenia tego posiadamy w tablicy I-ej wartości, odpowiadające różnym wielkościom ilości xh, gdzie x oznacza błąd, a h dokładność czynionych spostrzeżeń.

Przy pomocy tablicy I-ej możemy rozwiązywać różnego rodzaju zadania. Tak np. dla $xh = 1$, znajdujemy w tablicy I-ej $\theta(xh) = 0{,}842\,7$ różne od jedności o $0{,}157\,3$. Znaczy to, że średnio na 10 000 spostrzeżeń trafi się 8 427 razy błąd mniejszy, a tylko 1 573 razy błąd większy od $\frac{1}{h}$.

Jeżeli uczynimy $\theta(xh) = \frac{1}{2}$, to z art. 6 wiemy, że wówczas odpowiednia wartość błędu x przybiera nazwę błędu prawdopodobnego p, a ponieważ, według uzupełnienia II-go, jest wtedy

$$(28) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ ph = 0{,}476\,936\,4, \qquad xh = 0.476\,9364$$

zatem błąd prawdopodobny

$$(29) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ p = \frac{0{,}476\,936\,4}{h}, \qquad x = \frac{0.4769364}{h}$$

a dokładność obserwacyi

$$(30) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ h = \frac{0{,}476\,936\,4}{p}. \qquad h = \frac{0.4769364}{x}$$

Gdy więc znamy dokładność czynionych obserwacyi, z (29) obliczyć możemy błąd prawdopodobny; gdy, naodwrót, znamy błąd prawdopodobny, z (30) znajdziemy dokładność dokonanych spostrzeżeń.

Zakładając w (29) $h = 1$, wypada $p = 0{,}476\,936\,4$, a po podstawieniu tej wartości p za x w (21) otrzymujemy $y = 0{,}449\,4$. Tym spółrzędnym błędu prawdopodobnego odpowiadają na fig. 2 punkty P i P'.

Wyrażenie (30) pozwala nam wyznaczyć przybliżenie dokładność narzędzi, któremi dokonywamy spostrzeżenia, lub dokładność samych spostrzeżeń, o ile drogą doświadczalną potrafimy dla tych obserwacyi określić błąd prawdopodobny p.

Jeżeli dla wypróbowania instrumentu czynić będziemy dostrzeżenia nad dobrze nam znaną wielkością, lub gdy dla wyznaczenia dokładności spostrzeżeń za szukaną wielkość przyjmiemy średnią arytmetyczną z otrzymanych rezultatów, to różnice pomiędzy wypadłymi rezultatami, a wielkością dokładną, albo średnią arytmetyczną są błędami. Gdy bezwzględne wielkości tych błędów uporządkujemy w szereg rosnący, błąd środkowy szeregu będzie oczywiście przybliżoną wartością błędu prawdopodobnego, widocznie bowiem wtedy jednakowa istnieje szansa, że błąd rzeczywisty jest większy, jak i że jest mniejszy od środkowego. Skoro następnie w ten sposób znalezioną wielkość błędu prawdopodobnego podstawimy w (30), znajdziemy ilość h, która determinuje stopień dokładności dokonanych spostrzeżeń.

Weźmy przykład.

W 1798 r. ogłosił Cavendish wynik 29 doświadczeń, z których wyznaczył gęstość ziemi. Przyjąwszy mianowicie gęstość wody za jedność, otrzymał następujące rezultaty: 5,50; 5,61; 5,88; 5,07; 5,26; 5,55; 5,36; 5,29; 5,58; 5,65; 5,57; 5,53; 5,62; 5,29; 5,44; 5,34; 5,85; 5,79; 5,10; 5,27; 5,39; 5,42; 5,47; 5,63; 5,34; 5,46; 5,30; 5,75 i 5,68.

Średnia arytmetyczna tych rezultatów równa się 5,48, skutkiem czego błędami są: +0,02; +0,13; +0,40; −0,41; −0,22, +0,07; −0,12; −0,19; +0,10; +0,17; +0,09; +0,05; +0,14; −0,19; −0,04; −0,14; +0,37; +0,31; −0,38; −0,21; −0,09; −0,06; −0,01; +0,15; −0,14; −0,02; −0,18; +0,27; +0,20.

Uporządkowawszy teraz bezwzględne wielkości tych błędów w szereg rosnący: 0,01; 0,02; 0,02; 0,04; 0,05; 0,06; 0,07; 0,09; 0,09; 0,10; 0,12; 0,13, 0,14; 0,14; 0,14; 0,15; 0,17; 0,18; 0,19; 0,19; 0,20; 0,21; 0,22; 0,27; 0,31; 0,37; 0,38; 0,40; 0,41, dostrzegamy, że środkowe miejsce zajmuje błąd $p = 0{,}14$, po podstawieniu którego w (30), na dokładność obserwacyi wypada

$$h = \frac{0{,}476\,936\,4}{0{,}14} = 3{,}41.$$

Widzieliśmy, na początku niniejszego artykułu, że, przy $xh = 1$, na 10 000 spostrzeżeń będzie około 8 427 mniejszych i 1 573 błędów większych od $\frac{1}{h}$; gdy za h podstawimy dopiero co znalezioną wartość 3,41, wypadnie $x = \frac{1}{h} = 0{,}29$, t. j. w doświadczeniach Cavendisha powinno być $0{,}8427 \times 29 = 24$ błędów mniejszych od 0,29 i $0{,}1573 \times 29 =$ prawie 5 błędów większych od 0,29, co też rzeczywiście ma miejsce.

Wskazany powyżej sposób znajdowania błędu prawdopodobnego, resp. dokładności spostrzeżeń jest tylko przybliżony — niejako doświadczalny. Istnieje wszakże sposób ściślejszy, lecz o nim mówić będziemy dopiero w rozdziale następnym.

при $xh = 0{,}25$ $x = \frac{0.25}{h} = 0.0733$

для $xh = 0.25$ $\Theta(xh) = 0.2763263$

$0.2763263 \times 29 = 8$

$0.7236737 \times 29 = 21$

т. е. 8 ошибок < 0.0733

и 21 ошибка > 0.0733

что почти соответствует наблюдению (7 и 22)

и т. д.

ROZDZIAŁ III.

WYRÓWNANIE SPOSTRZEŻEŃ NAD JEDNĄ WIELKOŚCIĄ NIEWIADOMĄ.

14. Spostrzeżenia bezpośrednie i pośrednie, jednakowo i niejednakowo dokładne. Wielkości mogą być mierzone bezpośrednio, albo pośrednio. Jeżeli wielkość jest dla nas przystępną, tak, że znane nam sposoby wykonywania pomiarów można wprost do niej stosować, wówczas spostrzeżenia zostają wykonane bezpośrednio. Gdy naodwrót dla poznania wielkości danej musimy mierzyć inne wielkości, pozostające z pierwszą w pewnym związku, z pomocą którego możemy dopiero obliczyć wielkość szukaną, to taki sposób postępowania nazywa się pośrednim.

Oprócz tego każdy rodzaj powtarzanych spostrzeżeń może być dokonany z jednakową i z różną dokładnością, na co baczną zwrócić trzeba uwagę, gdy mamy przed sobą szereg obserwacyi, z których użytkować zamierzamy, inaczej bowiem postępować musimy z pierwszemi, a inaczej z drugiemi.

W rozdziale niniejszym najprzód mówić będziemy o spostrzeżeniach bezpośrednich, czynionych nad jedną wielkością, przedewszystkiem wykonywanych z jednakową, a później z różną dokładnością. Następnie przejdziemy do spostrzeżeń pośrednich.

15. Zastosowanie teoryi do praktyki. Treść obu poprzednich rozdziałów ma znaczenie czysto teoretyczne; zakładaliśmy tam zawsze nieograniczenie wielką liczbę błędów, zmieniających się w sposób ciągły. Tymczasem w praktyce rzecz się ma inaczej, liczba spostrzeżeń może być większa lub mniejsza, ale zawsze skończona, a błędy ulegają różnym zmianom, lecz bardzo dalekim od ciągłości. Mamy tu więc przypadek powtarzający się zawsze, ile razy przechodzimy od teoryi do praktyki, czyli kiedy przychodzi stosować teoryę do praktyki.

Osiągnięte dotąd przez nas, za pośrednictwem teoretycznych dociekań, rezultaty sprowadzają się ostatecznie do trzech zasad:

1) Najprawdopodobniejszą wartością mierzonej wielokrotnie, z jednakową dokładnością, wielkości jest średnia arytmetyczna z otrzymanych rezultatów.

2) Pomiędzy błędem średnim s i miarą dokładności h zachodzi związek

$$(23) \quad s = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \text{ skąd } h = \frac{1}{s\sqrt{2}} \quad (23')$$

3) Pomiędzy błędem prawdopodobnym p i miarą dokładności h zachodzi związek

$$(28) \quad ph = 0{,}476\,936\,4, \text{ skąd znów } h = \frac{0{,}476\,936\,4}{p} \quad (28')$$

Wreszcie z dwóch ostatnich zasad wypływa, jako wniosek, czwarta

4) Pomiędzy błędem średnim i prawdopodobnym zachodzi związek

$$(31) \quad s = 1{,}482\,6\,p \text{ i naodwrót } p = 0{,}674\,49\,s \quad (31')$$

Z wzorów (23) i (28) wynika oczywiście, że mając jedną z wielkości zasadniczych s, p lub h, znajdziemy dwie drugie; mając zaś h, poznamy prawo błędów

$$(21) \quad y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2x^2}$$

dla danego szeregu spostrzeżeń. Że więc zadanie błędów w praktyce zdołamy rozwiązać, gdy znajdziemy sposób obliczenia jednej z powyższych trzech ilości dla danego szeregu spostrzeżeń.

Błąd średni jest właśnie tą ilością, której wartość przybliżoną, dla skończonego szeregu danych spostrzeżeń, obrachować można.

16. Błąd średni ograniczonej liczby spostrzeżeń. Chcąc znaleźć błąd średni dla skończonej liczby danych spostrzeżeń, należy przedewszystkiem wniknąć w istotę wyrażenia

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad s^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, f(x) \, dx.$$

примечание $x_1 = a_1 - a$
$x_2 = a_2 - a$
$- - - -$
$x_n = a_n - a$
см. стр. 1

Gdy we wzór (10) podstawimy wyrażenie

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f(x) \, dx = \frac{m_x}{n}$$

i gdy, skutkiem zniesienia różniczki dx, znak całki zastąpimy przez znak sumowania, wypadnie

$$s^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{m_x \, . \, x^2}{n},$$

albo, podstawiając za $-\infty$ i $+\infty$ możliwe granice błędów $-\delta$ i $+\delta$,

$$(10') \quad \ldots\ldots\ldots \quad s^2 = \sum_{-\delta}^{+\delta} \frac{m_x \, . \, x^2}{n}.$$

W wyrażeniu tem n oznacza nieograniczenie wielką liczbę błędów, zaś x należy zmienić tyle razy, ile grup błędów po m_x mieści się w n błędach, objętych granicami od $-\delta$ do $+\delta$.

Lecz m_x oznacza liczbę błędów, zawartą w granicach od x do $x + dx$, które przyjęliśmy za równe x. Jeżeli tedy zamiast iloczynu z x^2 przez m_x podstawimy sumę złożoną z m_x wyrazów z których każdy równa się x^2; albo ściślej, jeżeli za $m_x \, . \, x^2$ podstawimy sumę kwadratów błędów, zawartych w granicach od x do $x + dx$, t. j.

$$m_x . x^2 = x^2_{m_1} + x^2_{m_2} + \ldots + x^2_{m_x},$$

gdzie $x^2_{m_1}; \, x^2_{m_2}; \ldots; x^2_{m_x}$ są zawarte w granicach od x do $x + dx$, to w miejsce (10') otrzymamy wyrażenie

$$(10'') \quad . \; . \quad s^2 = \frac{(-\delta)^2 + \ldots + (0)^2 + \ldots + (+\delta)^2}{n} = \frac{\sum_{-\delta}^{+\delta} x^2}{n},$$

w którem x zmienia się w granicach od $-\delta$ do $+\delta$ razy n w sposób ciągły, o ile n jest nieograniczenie wielkie.

Wyrażenie (10″) dowodzi, że kwadrat błędu średniego jest średnią arytmetyczną z kwadratów błędów popełnionych. Prawidło to daje się więc wprost zastosować i do błędów ze spostrzeżeń w liczbie ograniczonej, tak, że dla ograniczonej liczby n spostrzeżeń o błędach x_1; x_2; . . . ;x_n, kwadratem błędu średniego jest

$$s^2 = \frac{x^2_1 + x^2_2 + \ldots + x^2_n}{n} = \frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=n} x^2_\lambda}{n},$$

albo, pozostawiając, dla prostoty, znaczki od $\lambda = 1$ do $\lambda = n$ domyślności czytelnika,

$$(32) \quad \ldots\ldots\ldots \quad s^2 = \frac{\Sigma x^2_\lambda}{n},$$

sam zaś błąd średni

$$(32') \quad \ldots\ldots \quad s = \pm \sqrt{\frac{\Sigma x^2_\lambda}{n}}.$$

[illegible] верно; — разность между истинным значением измеряемой величины и результатами отдельных измерений. (см. Ермакова §2)

Błędy x_λ należy tu uważać za prawdziwe, czyli za różnice pomiędzy rzeczywistą wartością mierzonej wielkości, a otrzymanymi z pomiarów rezultatami (patrz art. 18).

Wzór (32) od wzorów (10) różni się tem tylko, że gdy we wzorach (10) przyjmuje się nieograniczoną liczbę błędów, zmieniających się w sposób ciągły, we wzorze (32) n jest ograniczone, zaś x_1; x_2;. . .;x_n są wielkościami, zmieniającemi się w ten sposób, jak wypada z dokonanych spostrzeżeń.

Sama nazwa „błąd średni" tłómaczy, że musi to być błąd taki, który, po podstawieniu go w miejsce błędów rzeczywistych we wszystkie obserwacye, daje rezultat równie prawdopodobny, jak i błędy rzeczywiste. Że temu warunkowi odpowiada nasz błąd s, oznaczony ze wzoru (32′), nie trudno przekonać się można. Jeżeli bowiem powyżej określony błąd oznaczymy przez q, to prawdopodobieństwem popełnienia rzeczonego błędu, czyli prawdopodobieństwem popełnienia błędu zawartego w granicach od q do $q + dq$, według wzorów (1) i (21), jest

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2q^2}\, dq,$$

a prawdopodobieństwo, że ten sam błąd popełnimy n razy, równa się

$$(\alpha) \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n . e^{-nh^2q^2} (dq)^n.$$

Z drugiej strony, prawdopodobieństwem popełnienia ewentualnego błędu x_λ jest действительного

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2_\lambda} \, dx_\lambda, \text{ albo } \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2_\lambda} \, dq,$$

gdyż dx_λ i dq są stałe dowolne, byle nieograniczenie małe.

Prawdopodobieństwo zatem zejścia się błędów $x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n$ równa się

$$(\beta) \quad . \; . \quad \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n . e^{-h^2 (x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 + \ldots + x^2_n)} (dq)^n.$$

Aby błąd q dawał rezultat równie prawdopodobny, jak i błędy $x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n$, musi być $(\alpha) = (\beta)$, co znów może mieć miejsce, gdy

$$nq^2 = x^2_1 + x^2_2 + x^3_3 + \ldots + x^2_n = \Sigma x^2_\lambda;$$

stąd

$$q = \pm \sqrt{\frac{\Sigma x^2_\lambda}{n}},$$

t. j. na q otrzymaliśmy takie samo wyrażenie, jakie daje wzór (32') na błąd średni s.

Gdy znamy błąd s, ze wzoru (31') odnajdziemy błąd prawdopodobny p, oraz ze wzoru (23') miarę dokładności h dla danego szeregu skończonej liczby spostrzeżeń.

Дальнѣйшее изложеніе въ §§ 17 и 18 не читать, т. к. вообще невѣрно и замѣнить § 2 Ер... Маковъ

17. Błędy średniej arytmetycznej. Gdy z n spostrzeżeń, dokonanych z jednakową dokładnością, otrzymamy na szukaną wielkość ξ wartości $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n$, wtedy najprawdopodobniejszą wartością tej wielkości ξ jest

$$(\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n},$$

zaś błąd tej średniej arytmetycznej

$$(33) \quad \ldots\ldots\ldots \quad S = a - \xi.$$

Błędem pojedynczego spostrzeżenia λ-go jest

$$Z_\ell \; \cancel{x_\lambda} = a_\lambda - \xi = a_\lambda - a + a - \xi = a_\lambda - a + S, \quad ^{x)}$$

x) Это значитъ, т. к. ошибкой наблюденій x_ℓ мы обозначаемъ $a_\ell - a$. Поэтому для дальнѣйшихъ соображеній, чтобы не путать, вводимъ значеніе Z_ℓ.

wypada stąd

$$\sum z_\ell \, \cancel{\Sigma x_\lambda} = \Sigma\,(a_\lambda - a) + nS,$$

a ponieważ z (α) $\Sigma\,(a_\lambda - a) = \Sigma a_\lambda - n\,.\,a = 0$, zatem

$$\sum z_\ell \, \cancel{\Sigma x_\lambda} = nS,$$

albo, podnosząc obie strony do kwadratu,

$$\sum z_\ell^2 + 2\sum z_\ell \cdot z_\mu =$$

(β) . . . . . . $\cancel{\Sigma x^2_\lambda + 2\,\Sigma x_\lambda x_\mu} = n^2 S^2,$

czyli, po podstawieniu z (32) $\sum z_\ell^2 \; \cancel{\Sigma x^2_\lambda} = n\cancel{s^2}\,k$, $x_\ell = a_\ell - \xi$ *)

$S = a - \xi$

$$2\sum z_\ell z_\mu$$

(β′) . . . . . . $n\cancel{s^2}\,k + \cancel{2\Sigma x_\lambda x_\mu} = n^2 S^2.$

W równości tej ns^2 i n^2S^2 są niewątpliwie ilościami dodatnemi, zaś $\sum z_\lambda z_\mu\ \cancel{\Sigma x_\lambda x_\mu}$ niewiadomego znaku i niewiadomej wielkości, gdyż iloczyny $z_\lambda z_\mu\ \cancel{x_\lambda x_\mu}$ są różnoznakowe, a o wielkości błędów prawdziwych nie mamy żadnego pojęcia. O sumie tej to tylko powiedzieć można, że jej wyrazy, jako różnoznakowe i w ogóle niewielkie, do pewnego stopnia znosić się będą i to tembardziej, im więcej oraz im dokładniej wykonanych spostrzeżeń posiadamy. Gdy $2\Sigma z_\lambda z_\mu$ w (β′) opuścimy, S straci charakter błędu prawdziwego i nabierze znaczenia błędu przybliżonego *), dla którego otrzymamy najprzód związek

(β″) . . . . $n\cancel{s^2}\,k = n^2S^2$

i następnie

(34) . . . . $\boxed{S = \dfrac{k}{\sqrt{n}}}$.

Tak obliczony błąd S może być przyjęty za błąd średni średniej arytmetycznej. Jeżeli więc przez P oznaczymy błąd prawdopodobny tej średniej, to z (31) wypada

(35) . . . . $P = 0{,}674\,49\,.\,S$ i $S = 1{,}482\,6\,.\,P$

oraz z połączenia wzorów (34) i (35) ze wzorem (31′)

(35′) . . . . $P = \dfrac{p}{\sqrt{n}}$.

---

*) Tem bliższego prawdy, im więcej oraz im dokładniej wykonanych spostrzeżeń posiadamy.

*) Между тем как в [illegible] § 12 x_ℓ имело другое значение, а именно $x_\ell = a_\ell - a$

[illegible] не [illegible] сред[illegible] [illegible] [illegible] как [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] величинами и перех[illegible] величинами, а не [illegible] наблюдени[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

Jeżeli dalej przez H oznaczymy miarę dokładności średniej arytmetycznej, wówczas z (23) otrzymujemy

$$(36) \quad \ldots\ldots\ldots \quad S = \frac{1}{H\sqrt{2}}$$

i naodwrót

$$(36') \quad \ldots\ldots \quad H = \frac{1}{S\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{n}}{s\sqrt{2}} = h\sqrt{n}.$$

18. Obliczenie błędu średniego. W art. 16, przy wyprowadzeniu wzoru na błąd średni

$$(32') \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varepsilon = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon^2_\lambda}{n}},$$

zastrzegliśmy, że przez ε_λ rozumieć należy błędy prawdziwe, t. j. różnice pomiędzy rzeczywistą wartością mierzonej wielkości, a otrzymanemi z pomiarów wielkościami. Ponieważ my jednak nie znamy rzeczywistej wartości mierzonej wielkości (gdybyśmy ją znali, wszystkie nasze rachunki nie miałyby celu), tylko jej wartość najprawdopodobniejszą

$$a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n},$$

przeto starać się musimy o jak najbardziej przybliżone obrachowanie błędu średniego z różnic, jakie zachodzą pomiędzy wartością najprawdopodobniejszą mierzonej wielkości, a otrzymanymi z pomiarów rezultatami. Różnice te oznaczmy przez α, czyli połóżmy

$$(\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha_\lambda = a_\lambda - a.$$

Owóż, jak nam wiadomo,

$$\varepsilon_\lambda = a_\lambda - \xi = a_\lambda - a + a - \xi = \alpha_\lambda + S;$$

wypada stąd

$$\varepsilon^2_\lambda = \alpha^2_\lambda + 2\alpha_\lambda \,.\, S + S^2,$$

a po zsumowaniu

$$\Sigma\varepsilon^2_\lambda = \Sigma\alpha^2_\lambda + 2S \,.\, \Sigma\alpha_\lambda + \Sigma S^2.$$

Że zaś $\Sigma\alpha_\lambda = \Sigma a_\lambda - na = 0$, zaś $\Sigma S^2 = nS^2$, więc

$$(\beta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Sigma\varepsilon^2_\lambda = \Sigma\alpha^2_\lambda + nS^2.$$

Lecz z (32) $\Sigma\varepsilon^2_\lambda = n\varepsilon^2$, z (34) przybliżenie $nS^2 = s^2$, co gdy podstawimy w (β), otrzymamy $ns^2 = \Sigma\alpha^2_\lambda + s^2$, czyli $(n-1) \,.\, s^2 = \Sigma\alpha^2_\lambda$, a stąd

$$(37) \quad \ldots\ldots \quad s = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\alpha^2_\lambda}{n-1}}$$

jako przybliżone wyrażenie błędu średniego za pomocą różnic $\alpha_\lambda = a_\lambda - a$.

19. Zebranie wzorów. Wyprowadzone dotąd wzory pisaliśmy z kolei tak, jak nam z rozumowania wypadały; są one zatem rozproszone po różnych artykułach. Ponieważ jednak, przy zastosowaniach do praktyki, dobrze jest mieć wzory przed oczami, więc gromadzimy je tutaj razem, aby ułatwić czytelnikom posiłkowanie się nimi.

Jeżeli przez n oznaczymy, jak zwykle, liczbę dokonanych spostrzeżeń nad wielkością ξ, przez $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n$ rezultaty otrzymane ze spostrzeżeń, to średnią arytmetyczną, czyli najprawdopodobniejszą wartością szukanej wielkości jest

$$(\mathrm{I}) \quad \ldots \quad a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\Sigma a_\lambda}{n}.$$

Gdy następnie przez α_λ oznaczymy, w ogóle, błąd otrzymanego rezultatu a_λ w stosunku do średniej arytmetycznej, tak, że

$$(\mathrm{II}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \alpha_\lambda = a_\lambda - a,$$

wtedy błąd średni pojedynczego spostrzeżenia równa się

$$(\mathrm{III}) \ldots \quad s = \pm\sqrt{\frac{\alpha^2_1 + \alpha^2_2 + \alpha^2_3 + \ldots + \alpha^2_n}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\alpha^2_\lambda}{n-1}}.$$

Błąd prawdopodobny pojedynczego spostrzeżenia

$$(\mathrm{IV}) \quad \ldots \quad p = 0{,}674\,49 \,.\, s, \text{ skąd } s = 1{,}482\,6 \,.\, p.$$

x) Это и есть чушь, т. к. в ур. 32 (стр. 22) значение x_λ иное, чем принятое здесь.

Pomiędzy miarą dokładności spostrzeżeń, a błędem średnim i prawdopodobnym pojedynczych spostrzeżeń istnieją związki

$$(\mathrm{V}) \quad \ldots \quad s = \frac{1}{h\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad ph = 0{,}476\,936\,4 \quad \ldots \quad (\mathrm{VI})$$

skutkiem czego na miarę dokładności wykonanych spostrzeżeń wypadają wzory

$$(\mathrm{VII}) \quad \ldots \quad h = \frac{1}{s\sqrt{2}} = \frac{0{,}476\,936\,4}{p}.$$

Błędem średnim najprawdopodobniejszej wartości mierzonej wielkości (średniej arytmetycznej) jest

$$(\mathrm{VIII}) \quad \ldots \quad S = \frac{s}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma\alpha^2{}_\lambda}{n(n-1)}}.$$

zyrub

Błąd prawdopodobny tejże wartości równa się

$$(\mathrm{IX}) \quad \ldots \quad P = \frac{p}{\sqrt{n}}.$$

Pomiędzy błędem średnim i prawdopodobnym średniej arytmetycznej zachodzą związki

$$(\mathrm{X}) \quad \ldots \quad P = 0{,}674\,49 \,.\, S \quad \text{i} \quad S = 1{,}482\,6 \,.\, P.$$

Pomiędzy błędem średnim i miarą dokładności średniej arytmetycznej zachodzi znów związek

$$(\mathrm{XI}) \quad \ldots \quad S = \frac{1}{H\sqrt{2}},$$

z którego na miarę dokładności średniej arytmetycznej otrzymujemy wyrażenie

$$(\mathrm{XII}) \quad \ldots \quad H = \frac{1}{S\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{n}}{s\sqrt{2}} = h\sqrt{n}.$$

Z ostatniego wyrażenia wypada

$$(\mathrm{XIII}) \quad \ldots \quad n = \frac{H^2}{h^2},$$

które to wyrażenie może nam służyć do skontrolowania rachunków.

Za pomocą tych wzorów możemy zdeterminować wszystkie szczegóły, odnoszące się do danego szeregu spostrzeżeń.

Weźmy np. pod uwagę wzmiankowane już poprzednio badania Cavendisha nad gęstością ziemi (art. 13). Otrzymane rezultaty dają się przedstawić w następującej tabelce:

1	2	3	4
№ porządkowy	Rezultaty spostrzeżeń a	Błędy spostrzeżeń $\mathcal{X}_\lambda$	Kwadraty błędów spostrzeżeń $\mathcal{X}^2_\lambda$
1	5,50	+0,02	0,000 4
2	5,61	+0,13	0,016 9
3	5,88	+0,40	0,160 0
4	5,07	−0,41	0,168 1
5	5,26	−0,22	0,048 4
6	5,55	+0,07	0,004 9
7	5,36	−0,12	0,014 4
8	5,29	−0,19	0,036 1
9	5,58	+0,10	0,010 0
10	5,65	+0,17	0,028 9
11	5,57	+0,09	0,008 1
12	5,53	+0,05	0,002 5
13	5,62	+0,14	0,019 6
14	5,29	−0,19	0,036 1
15	5,44	−0,04	0,001 6
16	5,34	−0,14	0,019 6
17	5,85	+0,37	0,136 9
18	5,79	+0,31	0,096 1
19	5,10	−0,38	0,144 4
20	5,27	−0,21	0,044 1
21	5,39	−0,09	0,008 1
22	5,42	−0,06	0,003 6
23	5,47	−0,01	0,000 1
24	5,63	+0,15	0,022 5
25	5,34	−0,14	0,019 6
26	5,46	−0,02	0,000 4
27	5,30	−0,18	0,032 4
28	5,75	+0,27	0,072 9
29	5,68	+0,20	0,040 0
	158,99	$\left.\begin{matrix}+2,47\\-2,40\end{matrix}\right\}+0,07$	1,196 7

Kolumna 2-ga powyższej tabelki przedstawia rezultaty doświadczeń Cavendisha. Suma tych rezultatów, podzielona przez 29, daje średnią arytmetyczną

$$\text{(I)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad a = \frac{158{,}99}{29} = 5{,}48.$$

Różnice pomiędzy rezultatami, pomieszczonymi w kol. 2-ej, a średnią arytmetyczną 5,48, znajdujemy w kol. 3-ej; są to błędy spostrzeżeń w stosunku do średniej arytmetycznej. Kolumna 4-ta przedstawia kwadraty błędów obocznych.

Z tabelki tej zatem oraz ze wzorów w niniejszym artykule zebranych, otrzymujemy

$$\text{(III)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; s = \pm \sqrt{\frac{1{,}196\,7}{29}} = \pm \cancel{0{,}206\,7} \; 0.2031$$

$$\text{(IV)} \quad . \; . \; . \; . \; p = 0{,}206\,7 \times 0{,}674\,49 = \pm \cancel{0{,}139\,4}$$

$$\text{(VII)} \quad . \; . \; . \; h = \frac{1}{0{,}206\,7\sqrt{2}} = \frac{0{,}476\,936\,4}{0{,}139\,4} = 3{,}42$$

$$\text{(VIII)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; S = \pm \frac{0{,}206\,7}{\sqrt{29}} = \pm 0{,}038\,4$$

$$\text{(IX)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad P = \pm \frac{0{,}139\,4}{\sqrt{29}} = \pm 0{,}025\,9$$

$$\text{(XII)} \quad . \; . \; . H = \frac{1}{0{,}038\,4\sqrt{2}} = 3{,}42\sqrt{29} = 18{,}42.$$

Dla skontrolowania powyższych rezultatów podstawmy w (XIII) otrzymane wartości na H i h, wypada

$$\text{(XIII)} \quad . \; . \; n = \frac{H^2}{h^2} = \frac{(18{,}42)^2}{(3{,}42)^2} = 29, \text{ jak być istotnie powinno.}$$

Z (I) i (IX) pokazuje się, że, według badań Cavendisha, prawdziwa gęstość ziemi zawiera się, z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, pomiędzy $5{,}48 \pm 0{,}025\,9$, czyli w granicach od 5,454 1 do 5,505 9.

Gdyby nam ten stopień ścisłości nie wystarczał, czyli, gdybyśmy chcieli oznaczyć granice, w jakich się zawiera prawdziwa gęstość ziemi, z większem prawdopodobieństwem, aniżeli $\frac{1}{2}$, np. z prawdopodobieństwem $= 0{,}999$, wychodzącem niemal na pewność, to należy we wzorze

$$(26) \ldots\ldots \quad \theta(hx) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hx} e^{-z^2} dz$$

założyć $\theta(hx) = 0{,}999$, czemu, według tab. I-ej, czyni zadość

$$hx = 2{,}33.$$

Jeżeli teraz w ostatniem wyrażeniu podstawimy z (XII) $h = H = 18{,}42$, to wypadnie

$$x = \frac{2{,}33}{18{,}42} = \pm 0{,}126\,5,$$

t. j. można postawić 999 przeciwko jednemu, iż rzeczywista gęstość ziemi zawiera się w granicach $5{,}48 \pm 0{,}126\,5$, czyli pomiędzy $5{,}606\,5$ i $5{,}353\,5$.

W artykule 13 znaleźliśmy, drogą doświadczalną, $p = 0{,}14$ i $h = 3{,}41$, które to wartości bardzo mało różnią się od powyżej, drogą rachunkową, otrzymanych rezultatów (IV) i (VII).

Вnсл necbломо-дeнin

20. Ważność spostrzeżeń. *Ważnościami* (poids, Gewicht) spostrzeżeń nazywają się ilości, proporcyonalne do kwadratów z miar dokładności. Jeżeli więc przez h_1; h_2; h_3;... oznaczymy, jak zwykle, miary dokładności danych spostrzeżeń, a przez g_1; g_2; g_3;... ich ważności, powinno być

$$(38) \ldots\ldots \quad g_1 : g_2 : g_3 : \ldots = h^2_1 : h^2_2 : h^2_3 : \ldots$$

Ważności zazwyczaj wyrażają się przez liczby całkowite, co, jak wiadomo, zawsze z ilościami proporcyonalnemi da się uczynić.

Oznaczmy przez G ważność średniej arytmetycznej z n spostrzeżeń o jednakowej ważności g; jest wtedy

$$G : g = H^2 : h^2 = nh^2 : h^2 = n : 1.$$

Stąd

$$(39) \ldots\ldots \quad G = ng.$$

Dowodzi to, że *ważność średniej arytmetycznej jest tyle razy większa od ważności pojedynczego spostrzeżenia, z ilu spostrzeżeń jednakowo dokładnych otrzymuje się tę średnią arytmetyczną.*

Jeżeli wspólną ważność g, z równą dokładnością wykonanych, n spostrzeżeń, przyjmiemy za jedność, t. j. gdy w (39) założymy $g = 1$, otrzymamy

$$G = n, \tag{39'}$$

czyli w takim razie ważność średniej arytmetycznej stanowi liczba spostrzeżeń, użytych do wyznaczenia pomienionej średniej.

Skoro $g_1 : g_2 = h^2_1 : h^2_2$, a $h^2_1 : h^2_2 = \frac{1}{2\,s^2_1} : \frac{1}{2\,s^2_2} = \frac{1}{s^2_1} : \frac{1}{s^2_2}$ $= s^2_2 : s^2_1$, zatem mamy

$$g_1 : g_2 = s^2_2 : s^2_1 = \frac{1}{s^2_1} : \frac{1}{s^2_2}, \tag{40}$$

to jest, ważności są odwrotnie proporcyonalne do kwadratów błędów średnich, albo, co na jedno wychodzi, wprost proporcyonalne do odwrotności kwadratów błędów średnich, tak, że za ważność danego szeregu spostrzeżeń można uważać odwrotność z kwadratu ich błędu średniego. Wypada stąd

$$s_1 = s_2 \sqrt{\frac{g_2}{g_1}}. \tag{41}$$

Daje to możność zamiany błędu średniego o ważności g_2 na błąd średni o ważności g_1. Jeżeli np. założymy $g_1 = 1$, będzie

$$s_1 = s_2 \sqrt{g_2}, \tag{41'}$$

to jest, błąd średni o ważności g_2 zamienia się tą drogą na błąd średni o ważności równej jednostce.

Związek (40) daje nam sposób ocenienia względnej dokładności użytych do obserwacyi instrumentów. Przypuśćmy np., że do wymierzenia pewnego kąta używamy dwóch teodolitów T_1 i T_2. Jednym i drugim wykonaliśmy jednakową liczbę, z równą starannością dopełnionych, pomiarów. Pierwszy teodolit dał na błąd średniej arytmetycznej 12″, drugi 6″. Skutkiem tego ważności g_1 i g_2 spostrzeżeń, dokonanych rzeczonymi teodolitami, dają proporcyę

$$g_1 : g_2 = \frac{1}{12^2} : \frac{1}{6^2} = 6^2 : 12^2;$$

stąd $g_2 = \left(\frac{12}{6}\right)^2 . g_1 = 4 g_1$, to jest, ważność spostrzeżeń, wykonanych drugim teodolitem jest cztery razy większa od ważności spostrzeżeń, dokonanych teodolitem pierwszym.

Przyjąwszy $g_1 = 1$, otrzymamy $g_2 = 4$. To znaczy, że każde spostrzeżenie, dokonane drugim teodolitem, ma taką w rezultacie wagę, jak cztery spostrzeżenia, wykonane teodolitem pierwszym; albo inaczej, każde pojedyncze spostrzeżenie, wykonane teodolitem drugim, można uważać za cztery spostrzeżenia, resp. za średnią arytmetyczną z czterech spostrzeżeń, dokonanych teodolitem pierwszym.

21. Spostrzeżenia o różnej ważności. Przy wyprowadzaniu wzorów, których zbiór podałem w art. 19, zakładaliśmy stale, że wszystkie pojedyncze spostrzeżenia są wykonane z jednakową dokładnością. Warunek ten wszakże nie zawsze w praktyce ma miejsce; trafia się bowiem czasami, że dane spostrzeżenia wykonywają różni obserwatorowie, w rozmaitych zostający warunkach; albo, że się używa do tych samych spostrzeżeń różnej dokładności instrumentów, różną przedstawiających ścisłość, jak to widzieliśmy w art. 20; lub zachodzić mogą rozmaite inne przyczyny, nadające pojedynczym spostrzeżeniom różne stopnie dokładności.

Gdy z takiego zbioru różnej dokładności spostrzeżeń mamy wyprowadzić najprawdopodobniejszą wartość szukanej wielkości oraz wyliczyć połączone z nią błędy, wówczas nie można wprost stosować wzorów art. 19, lecz należy w nich uwzględnić różną ścisłość pojedynczych spostrzeżeń, co się dokonywa w sposób, który ma stanowić przedmiot niniejszego artykułu.

Przypuśćmy, że mamy ν szeregów spostrzeżeń, z jednakową wykonanych dokładnością, z tych szereg pierwszy składa się z n_1 spostrzeżeń pojedynczych, szereg drugi z n_2, trzeci z n_3 i t. d. szereg ν-ty z n_ν spostrzeżeń. Wszystkich spostrzeżeń pojedynczych mamy zatem

$$(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_\nu.$$

Otrzymane z nich rezultaty oznaczmy przez

$$\begin{array}{l}
a_{1,1}\,;\ a_{1,2}\,;\ a_{1,3}\,;\ \ldots\,;a_{1,n_1} \\
a_{2,1}\,;\ a_{2,2}\,;\ a_{2,3}\,;\ \ldots\,;a_{2,n_2} \\
a_{3,1}\,;\ a_{3,2}\,;\ a_{3,3}\,;\ \ldots\,;a_{3,n_3} \\
- \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \\
a_{\nu,1}\,;\ a_{\nu,3}\,;\ a_{\nu,3}\,;\ \ldots\,;a_{\nu,n_\nu}
\end{array}$$

Gdy dalej oznaczymy

przez a_1 średnią arytmetyczną z n_1 pierwszych spostrzeżeń,
„ a_2 „ „ z n_2 drugich spostrzeżeń,
„ a_3 „ „ z n_3 trzecich spostrzeżeń,
i t. d. i t. d.
przez a_ν średnią arytmetyczną z n_ν spostrzeżeń ν-tych,
to, jak nam wiadomo, być musi

$$(42) \ldots \left\{\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{n_1}(a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + \ldots + a_{1,n_1}) \\ a_2 &= \frac{1}{n_2}(a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} + \ldots + a_{2,n_2}) \\ a_3 &= \frac{1}{n_3}(a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} + \ldots + a_{3,n_3}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_\nu &= \frac{1}{n_\nu}(a_{\nu,1} + a_{\nu,2} + a_{\nu,3} + \ldots + a_{\nu,n_\nu}) \end{aligned}\right.$$

Średnia arytmetyczna ze wszystkich n spostrzeżeń, razem wziętych, równa się

$$a = \frac{1}{n}\cdot\{(a_{1,1} + a_{1,2} + \ldots + a_{1,n_1}) + (a_{2,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{2,n_2})$$
$$+ (a_{3,1} + a_{3,2} + \ldots + a_{3,n_3}) + \ldots + (a_{\nu,1} + a_{\nu,2} + \ldots + a_{\nu,n_\nu})\}$$

albo, po uwzględnieniu (α) i (42),

$$(43) \quad . \; . \quad a = \frac{n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 + \ldots + n_\nu a_\nu}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_\nu} = \frac{\Sigma n_\lambda a_\lambda}{\Sigma n_\lambda}.$$

Oznaczywszy dalej ważność jednakowo dokładnych spostrzeżeń pojedynczych przez g_0, a ważności średnich arytmetycznych a_1; a_2; a_3; ... ;a_ν przez g_1; g_2; g_3; ... ;g_ν, to, według (39), mamy

$$(44) \ldots\ldots \left\{\begin{aligned} g_1 &= n_1 g_0, \text{ skąd } n_1 = \frac{g_1}{g_0} \\ g_2 &= n_2 g_0, \quad „ \quad n_2 = \frac{g_2}{g_0} \\ g_3 &= n_3 g_0, \quad „ \quad n_3 = \frac{g_3}{g_0} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_\nu &= n_\nu g_0, \text{ skąd } n_\nu = \frac{g_\nu}{g_0} \end{aligned}\right.$$

Po podstawieniu ostatnich wyrażeń na n_1; n_2, n_3; ...; n_ν we wzór (43), otrzymujemy

$$(\mathrm{XIV}) \ldots a = \frac{g_1 a_1 + g_2 a_2 + g_3 a_3 + \ldots + g_\nu a_\nu}{g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_\nu} = \frac{\Sigma g_\lambda a_\lambda}{\Sigma g_\lambda}.$$

Jeżeli teraz przyjmiemy a_1; a_2; a_3; ...; a_ν nie za średnie arytmetyczne, lecz za bezpośrednie rezultaty, otrzymane z pojedynczych, niejednakowo dokładnych, spostrzeżeń o ważnościach g_1; g_2; g_3; ...; g_ν, wtedy wzór (XIV) przedstawi nam najprawdopodobniejszą wartość szukanej wielkości, nad którą wykonaliśmy ν spostrzeżeń niejednakowo dokładnych *).

Błąd średni najprawdopodobniejszej wartości a, według (VIII), równa się

$$S = \frac{s}{\sqrt{n}},$$

a ponieważ z (44)

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_\nu = \frac{g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_\nu}{g_0},$$

zatem

$$(\mathrm{XV}) \ldots S = \frac{s\sqrt{g_0}}{\sqrt{g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_\nu}} = \frac{s\sqrt{g_0}}{\sqrt{\Sigma g_\lambda}},$$

dla którego potrzeba jeszcze wyznaczyć s z błędów α_λ, obliczonych w stosunku do średniej arytmetycznej oraz z ważności spostrzeżeń.

Otóż

$$(45) \ldots \ldots \begin{cases} \alpha_1 = a_1 - a \\ \alpha_2 = a_2 - a \\ \alpha_3 = a_3 - a \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_\nu = a_\nu - a \end{cases}$$

Gdy rzeczywistą wartość mierzonej wielkości oznaczymy, jak zwykle, przez ξ, to mamy

---

*) Można tego dowieść i bezpośrednio, w sposób podany w art. 12, gdy w wyrażenia na y_{x_1}; y_{x_2}; ...; y_{x_n} za równe tam h podstawimy różne h_1; h_2; ...; h_ν, za które następnie można, według (38), podstawić proporcyonalne do h^2_1; h^2_2; ...; h^2_ν ważności g_1; g_2; ...; g_ν.

$$S_1 = a_1 - \xi = a_1 - a + a - \xi = \alpha_1 + S,$$

po skwadratowaniu i pomnożeniu obu stron przez n_1

$$n_1 S^2_1 = n_1 \alpha^2_1 + n_1 S^2 + 2 n_1 \alpha_1 S.$$

Podobne wyrażenia można wyprowadzić na $n_2 S^2_2$; $n_3 S^2_3$; ... ...; $n_\nu S^2_\nu$. Ponieważ zaś, według (34), w ogóle $n_\lambda S^2_\lambda = s^2_\lambda$, gdzie s_λ jest błędem średnim dla n_λ spostrzeżeń pojedynczych, przeto mamy

$$\begin{aligned} s^2_1 &= n_1\alpha^2_1 + n_1 S^2 + 2 n_1 \alpha_1 S \\ s^2_2 &= n_2\alpha^2_2 + n_2 S^2 + 2 n_2 \alpha_2 S \\ s^2_3 &= n_3\alpha^2_3 + n_3 S^2 + 2 n_3 \alpha_3 S \\ & \dots\dots\dots\dots \\ s^2_\nu &= n_\nu\alpha^2_\nu + n_\nu S^2 + 2 n_\nu \alpha_\nu S \end{aligned}$$

a po zsumowaniu

$$\Sigma s^2_\lambda = \Sigma n_\lambda \alpha^2_\lambda + S^2 \Sigma n_\lambda + 2 S \Sigma n_\lambda \alpha_\lambda.$$

Jeżeli teraz za każde s_λ podstawimy wspólny błąd średni s dla wszystkich, razem wziętych, n spostrzeżeń pojedynczych, to mieć będziemy $\Sigma s^2_\lambda = \nu s^2$, czyli

$$(\beta) \quad \dots\dots \quad \nu s^2 = \Sigma n_\lambda \alpha^2_\lambda + S^2 \Sigma n_\lambda + 2 S \Sigma n_\lambda \alpha_\lambda.$$

Lecz z (43)

$$a \Sigma n_\lambda = \Sigma n_\lambda a_\lambda, \text{ skąd wypada } \Sigma n_\lambda a_\lambda - a \Sigma n_\lambda = \Sigma n_\lambda a_\lambda - \Sigma n_\lambda a$$

$$= \Sigma n_\lambda (a_\lambda - a) = \Sigma n_\lambda \alpha_\lambda = 0 \text{ oraz z } (\alpha)\ \Sigma n_\lambda = n.$$

Podstawiwszy powyższe rezultaty w (β) i uwzględniwszy (34), wypadnie

$$\nu s^2 = \Sigma n_\lambda \alpha^2_\lambda + n S^2 = \Sigma n_\lambda \alpha^2_\lambda + s^2,$$

skąd otrzymujemy

$$(\nu - 1)\, s^2 = \Sigma n_\lambda \alpha^2_\lambda, \text{ a stąd znów}$$

$$(46) \quad s = \pm \sqrt{\frac{\Sigma n_\lambda \alpha^2_\lambda}{\nu - 1}} = \pm \sqrt{\frac{n_1 \alpha^2_1 + n_2 \alpha^2_2 + n_3 \alpha^2_3 + \dots + n_\nu \alpha^2_\nu}{\nu - 1}}.$$

Jeżeli wreszcie w (46) podstawimy, z (44), $n_\lambda = \frac{g_\lambda}{g_0}$, mamy ostatecznie

$$\text{(XVI)} \quad s = \pm \sqrt{\frac{g_1\alpha^2_1 + g_2\alpha^2_2 + \ldots + g_\nu\alpha^2_\nu}{(\nu-1)\, g_0}} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma g_\lambda \alpha^2_\lambda}{(\nu-1)\, g_0}},$$

o co nam właśnie chodziło.

Gdy jeszcze podstawimy (XVI) w (XV), wypadnie

$$\text{(XV')} \quad S = \pm \sqrt{\frac{g_1\alpha^2_1 + g_2\alpha^2_2 + \ldots + g_\nu\alpha^2_\nu}{(\nu-1)(g_1+g_2+g_3+\ldots+g_\nu)}} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma g_\lambda \alpha^2_\lambda}{(\nu-1)\, \Sigma g_\lambda}},$$

jako wzór na błąd średni najprawdopodobniejszej wartości, obliczonej z niejednakowo dokładnych spostrzeżeń.

22. Przykłady. Aby pokazać sposób stosowania w praktyce wyprowadzonych w poprzednich artykułach wzorów, podajemy tu kilka przykładów, wyjętych z książki p. Gustawicza.

Przykład I. Z pomiarów tego samego kąta otrzymano 14 wartości, z których każda jest rezultatem kilkakrotnie powtórzonych spostrzeżeń. Wszystkie te pomiary dały wspólną wartość 69°31′ i oprócz tego następujące ilości sekund:

1)	45″,00	otrzymano	z 5	powtórzeń
2)	31″,25	„	z 4	„
3)	45″,00	„	z 3	„
4)	42″,50	„	z 5	„
5)	37″,50	„	z 3	„
6)	38″,33	„	z 3	„
7)	27″,50	„	z 3	„
8)	43″,33	„	z 3	„
9)	40″,63	„	z 4	„
10)	36″,25	„	z 2	„
11)	42″,50	„	z 3	„
12)	39″,17	„	z 3	„
13)	45″,00	„	z 2	„
14)	40″,83	„	z 3	„

Chodzi o najprawdopodobniejszą wartość kąta, o popełnione błędy oraz o dokładność, z jaką spostrzeżenia zostały wykonane. Jeżeli za ważność jednego powtórzenia przyjmiemy $g_0 = 1$, ważnościami g_λ dla każdej wartości kąta, według (44), jest liczba powtórzeń, jaką wykonaliśmy, aby tę wartość otrzymać. Skutkiem tego, materyał, potrzebny do zdeterminowania szczegółów, odnoszących się do mierzonego kąta, przedstawia następująca tabelka:

1	2	3	4	5	6	7	8
λ	g_λ	a_λ	$g_\lambda a_\lambda$	α_λ	$g_\lambda \alpha_\lambda$	α^2_λ	$g_\lambda \alpha^2_\lambda$
1	5	45,00	225,00	+5,22	+26,10	27,248	136,240
2	4	31,25	125,00	—8,53	—34,12	72,761	291,044
3	3	45,00	135,00	+5,22	+15,66	27,248	81,744
4	5	42,50	212,50	+2,72	+13,60	7,398	36,990
5	3	37,50	112,50	—2,28	—6,84	5,198	15,594
6	3	38,33	114,99	—1,45	—4,35	2,103	6,309
7	3	27,50	82,50	—12,28	—36,84	150,798	452,394
8	3	43,33	129,99	+3,55	+10,65	12,603	37,809
9	4	40,63	162,52	+0,85	+3,40	0,723	2,892
10	2	36,25	72,50	—3,53	—7,06	12,461	24,922
11	3	42,50	127,50	+2,72	+8,16	7,398	22,194
12	3	39,17	117,51	—0,61	—1,83	0,372	1,116
13	2	45,00	90,00	+5,22	+10,44	27,248	54,496
14	3	40,83	122,49	+1,05	+3,15	1,103	3,309
—	46	—	1 830,00	—	+91,16 —91,04	—	1 167,053

Z (XIV) najprawdopodobniejsza wartość kąta

$$a = \frac{\Sigma g_\lambda a_\lambda}{\Sigma g_\lambda} = \frac{1830}{46} = 39'',78,$$

z której, w porównaniu z kol. 3, otrzymujemy kol. 5, czyli błędy w stosunku do najprawdopodobniejszej wartości kąta.

Błąd średni pojedynczych pomiarów, według (XVI), wynosi

$$s = \pm \sqrt{\frac{\Sigma g_\lambda \alpha^2_\lambda}{\nu - 1}} = \pm \sqrt{\frac{1\,167{,}053}{13}} = \pm\, 9'',475,$$

skutkiem czego, według (XV), błędem średnim najprawdopodobniejszej wartości jest

$$S = \pm \frac{s}{\sqrt{\Sigma g_\lambda}} = \pm \frac{9'',475}{\sqrt{46}} = \pm\, 1'',397.$$

To samo otrzymujemy wprost z (XV'), albowiem

$$S = \pm \sqrt{\frac{\Sigma g_\lambda \alpha^2_\lambda}{(\nu - 1)\, \Sigma g_\lambda}} = \pm \sqrt{\frac{1\,167{,}053}{13 \times 46}} = \pm\, 1'',397.$$

Błąd prawdopodobny wykonanych pomiarów, według (IV), wynosi

$$p = 0{,}674\,49 \times s = 0{,}674\,49 \times 9'',475 = \pm\, 6'',391,$$

a błąd prawdopodobny najprawdopodobniejszej wartości, według (X), równa się

$$P = 0{,}674\,49 \times 1'',397 = \pm\, 0'',942.$$

Wreszcie miarę dokładności spostrzeżeń, według (VII), stanowi

$$h = \frac{1}{s\sqrt{2}} = \frac{1}{9{,}475 \times 1{,}414} = 0{,}074\,6;$$

miarą dokładności najprawdopodobniejszej wartości, według (XII), jest

$$H = \frac{1}{S\sqrt{2}} = \frac{1}{1{,}397 \times 1{,}414} = 0{,}506\,2.$$

Według (XIII) jest wreszcie

$$n = \frac{H^2}{h^2} = \frac{(0{,}506\,2)^2}{(0{,}074\,6)^2} = 46,$$

jak to istotnie być powinno.

Ostatecznie zatem, najprawdopodobniejsza wartość mierzonego kąta równa się 69°31'39'',78, a rzeczywista jego wartość zawiera się, z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, w granicach od 69°31'39''78 — 0'',942 = 69°31'38'',838 do 69°31'39'',78 + 0'',942 = 69°31'40'',722.

Przy prawdopodobieństwie $\theta(xH) = 0{,}999$, $xH = 2{,}33$, ponieważ zaś $H = 0{,}5062$, zatem

$$x = \frac{2{,}33}{0{,}5062} = 4'',60,$$

czyli rzeczywista wartość mierzonego kąta prawie na pewno, gdyż z prawdopodobieństwem 0,999, zawiera się w granicach 69°31'39'',78 ± 4'',60, t. j. pomiędzy 69°31'35'',18 i 69°31'44'',38.

P r z y k ł a d II. Za pomocą trzech teodolitów, które, przy mierzeniu tego samego kąta, dały błędy średnie $s_1 = 6''$; $s_2 = 10''$ i $s_3 = 14''$, wymierzono dany kąt i otrzymano: przy użyciu pierwszego teodolitu 25°16'17'',62; przy użyciu drugiego 25°16'13'',32; przy użyciu trzeciego teodolitu 25°16'10'',23. Zachodzi pytanie, jaka jest najprawdopodobniejsza wielkość danego kąta i jaki błąd prawdopodobny tej najprawdopodobniejszej wartości?

Oznaczmy ważności spostrzeżeń, dokonanych pomienionymi instrumentami, odpowiednio przez g_1; g_2; g_3; na podstawie wzoru (40) powinno być

$$g_1 : g_2 : g_3 = \frac{1}{s^2_1} : \frac{1}{s^2_2} : \frac{1}{s^2_3} = \frac{1}{6^2} : \frac{1}{10^2} : \frac{1}{14^2} = 1225 : 441 : 225,$$

a gdy, dla uniknięcia zbyt wielkich liczb, ważność spostrzeżeń, dokonywanych trzecim teodolitem oznaczymy przez 2, to ważnościami spostrzeżeń, wykonanych pierwszym i drugim teodolitem, będą prawie 11 i 4, t. j. skoro założymy $g_3 = 2$, będzie $g_2 = 4$, $g_1 = 11$. Ponieważ dalej we wszystkich trzech spostrzeżeniach jest jednakowa liczba stopni i minut, w rachunku uwzględnić potrzebujemy tylko sekundy, t. j. wystarczy założyć $a_1 = 17'',62$; $a_2 = 13'',32$ i $a_3 = 10'',23$.

Na podstawie tych danych ze wzoru (XIV) otrzymujemy

$$a = \frac{11 \times 17'',62 + 4 \times 13'',32 + 2 \times 10'',23}{11 + 4 + 2}$$

$$= \frac{193{,}82 + 53{,}28 + 20{,}46}{17} = \frac{267{,}56}{17},$$

czyli $a = 15'',74$

Następnie ułóżmy tabelkę

g_λ	a_λ	α_λ	$g_\lambda \alpha_\lambda$	α^2_λ	$g_\lambda \alpha^2_\lambda$
11	17'',62	+1'',88	+20,68	3,534 4	38,878 4
4	13'',32	—2'',42	—9,68	5,856 4	23,425 6
2	10'',23	—5'',51	—11,02	30,360 1	60,720 2
17	—	—	+20.68 —20,70	—	123,024 2

z której, na podstawie wzoru (XVI), mamy

$$s = \pm \sqrt{\frac{123{,}0242}{2}} = \pm \sqrt{61{,}5121} = \pm\ 7'',843,$$

a ze wzoru (XV)

$$S = \frac{7{,}843}{\sqrt{17}} = \pm\ 1'',90.$$

To samo otrzymamy także wprost ze wzoru (XV')

$$S = \pm \sqrt{\frac{123{,}024\,2}{2 \times 17}} = \pm\ 1'',90.$$

Stąd znów na błąd prawdopodobny wypada

$$P = 0{,}674\,49 \times 1'',90 = \pm\ 1'',28.$$

Że w działaniach nie popełniliśmy większego błędu, okazuje się z zastosowania wzoru (XIII), z którego wynika

$$n = \frac{H^2}{h^2} = \frac{s^2}{S^2} = \frac{(7{,}843)^2}{(1{,}90)^2} = 17,$$

jak być powinno.

Przykład III. Trzema teodolitami o ważności 3, 2 i 1 wymierzono kąt dany i obok stałej wartości 12°15′ otrzymano jeszcze na sekundy: w pięciu pomiarach teodolitem pierwszym: 31″,7; 39″,8; 40″,7; 28″,6 i 32″,3; w siedmiu pomiarach teodolitem drugim: 32″,8; 36″,7; 38″,2; 29″,3; 41″,6; 35″,3 i 36″,2; w sześciu pomiarach teodolitem trzecim: 32″,6; 38″,2; 32″,3; 39″,5; 41″,2 i 35″,3. Jaka jest najprawdopodobniejsza wartość tego kąta i jaki jej błąd prawdopodobny?

Skoro ważność pierwszego teodolitu oznacza się przez 3, drugiego przez 2, a trzeciego przez 1, przeto każdą obserwacyę, wykonaną pierwszym teodolitem można uważać za trzy razy powtórzoną; każdą obserwacyę, wykonaną drugim teodolitem, za dwa razy powtórzoną w porównaniu do jednokrotnej obserwacyi, wykonanej teodolitem trzecim; czyli średniej arytmetycznej z pierwszych 5-ciu spostrzeżeń należy przypisać ważność $5 \times 3 = 15$; średniej arytmetycznej z 7-miu drugich spostrzeżeń ważność $7 \times 2 = 14$, a średniej arytmetycznej z 6-ciu trzecich spostrzeżeń ważność $6 \times 1 = 6$. Że zaś

$$a_1 = \frac{31{,}7 + 39{,}8 + 40{,}7 + 28{,}6 + 32{,}3}{5} = 34'',62$$

$$a_2 = \frac{32{,}8 + 36{,}7 + 38{,}2 + 29{,}3 + 41{,}6 + 35{,}3 + 36{,}2}{7} = 35'',73$$

$$a_3 = \frac{32{,}6 + 38{,}2 + 32{,}3 + 39{,}5 + 41{,}2 + 34{,}3}{6} = 36'',35$$

mamy więc tabelkę

g_λ	a_λ	$g_\lambda a_\lambda$
15	34,62	519,30
14	35,73	500,22
6	36,35	218,10
35	—	1 237,62

z której $a = \frac{\Sigma g_\lambda a_\lambda}{\Sigma g_\lambda} = \frac{1\,237{,}62}{35} = 35'',36.$

W następstwie tego rezultatu przychodzimy do tabelki

g_λ	α_λ	$g_\lambda \alpha_\lambda$	α^2_λ	$g_\lambda \alpha^2_\lambda$
15	−0,74	−11,10	0,547 6	8,214 0
14	+0,37	+5,18	0,136 9	1,916 6
6	+0,99	+5,94	0,980 1	5,880 6
35	—	−11,10 +11,12	—	16,011 2

A więc

$$S = \pm \sqrt{\frac{\Sigma g_\lambda \alpha^2_\lambda}{(\nu - 1)\, \Sigma g_\lambda}} = \pm \sqrt{\frac{16{,}011\,2}{2 \times 35}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1\,120{,}784\,0}{(70)^2}} = \pm \frac{33{,}478}{70} = \pm\, 0'',478.$$

$$P = 0{,}674\,49 \times 0{,}478 = \pm\, 0'',32.$$

P r z y k ł a d IV. Z licznych spostrzeżeń, dokonanych w latach 1845—1846 nad szerokością geograficzną Moskwy, otrzymano następujące rezultaty:

1) . .	55°45′20″,29	z błędem średnim	$s_1 = 0'',368$
2) . .	„ 19″,39	„	$s_2 = 0'',400$
3) . .	„ 20″,61	„	$s_3 = 0'',295$
4) . .	„ 20″,27	„	$s_4 = 0'',341$
5) . .	„ 19″,81	„	$s_5 = 0'',279$
6) . .	„ 19″,61	„	$s_6 = 0'',590$
7) . .	„ 19″,22	„	$s_7 = 0'',388$
8) . .	„ 19″,08	„	$s_8 = 0'',265$
9) . .	„ 19″,71	„	$s_9 = 0'',381$

Wyznaczyć najprawdopodobniejszą szerokość geograficzną Moskwy oraz błąd prawdopodobny tejże szerokości.

Ważności podanych rezultatów winny czynić zadość stosunkom

$$g_1 : g_2 : g_3 : g_4 : g_5 : g_6 : g_7 : g_8 : g_9 =$$

$$= \frac{1}{(0{,}368)^2} : \frac{1}{(0{,}400)^2} : \frac{1}{(0{,}295)^2} : \frac{1}{(0{,}341)^2} : \frac{1}{(0{,}279)^2} : \frac{1}{(0{,}590)^2}$$

$$: \frac{1}{(0{,}388)^2} : \frac{1}{(0{,}265)^2} : \frac{1}{(0{,}381)^2},$$

albo, jeżeli poprzestaniemy na samych tylko liczbach całkowitych, odpowiednio zaokrąglonych,

$$g_1 : g_2 : g_3 : g_4 : g_5 : g_6 : g_7 : g_8 : g_9 = 7 : 6 : 11 : 9 : 13 : 3 : 7 : 14 : 7,$$

to znaczy, że gdy przyjmiemy np. $g_1 = 7$, będzie $g_2 = 6$, $g_3 = 11$ $g_4 = 9$, $g_5 = 13$, $g_6 = 3$, $g_7 = 7$, $g_8 = 14$, $g_9 = 7$.

Biorąc pod uwagę tylko sekundy, otrzymujemy tabelkę:

№ porządk.	g_λ	a_λ	$g_\lambda a_\lambda$
1	7	20,29	142,03
2	6	19,39	116,34
3	11	20,61	226,71
4	9	20,27	182,43
5	13	19,81	257,53
6	3	19,61	58,83
7	7	19,22	134,54
8	14	19,08	267,12
9	7	19,71	137,97
	77	—	1 523,50

z której

$$a = \frac{1\,523{,}50}{77} = 19'',79.$$

Na podstawie ostatniego rezultatu i trzeciej kolumny poprzedniej tabelki, formujemy nową:

№ porządk.	g_λ	α_λ	$g_\lambda \alpha_\lambda$	α^2_λ	$g_\lambda \alpha^2_\lambda$
1	7	+0,50	+3,50	0,250 0	1,750 0
2	6	−0,40	−2,40	0,160 0	0,960 0
3	11	+0,82	+9,02	0,672 4	7,396 4
4	9	+0,48	+4,32	0,230 4	2,073 6
5	13	+0,02	+0,26	0,000 4	0,005 2
6	3	−0,18	−0,54	0,032 4	0,097 2
7	7	−0,57	−3,99	0,324 9	2,274 3
8	14	−0,71	−9,94	0,504 1	7,057 4
9	7	−0,08	−0,56	0,006 4	0,044 8
	77	—	+17,10 −17,43	—	21,658 9

Z ostatniej tabelki wypada

$$S = \pm \sqrt{\frac{\Sigma g_\lambda \alpha^2_\lambda}{(\nu - 1)\,\Sigma g_\lambda}} = \pm \sqrt{\frac{21{,}658\,9}{8 \times 77}} = \pm\, 0'',188,$$

a stąd $P = 0{,}674\,49 \times 0{,}188 = \pm\, 0'',127$.

Znaczy to, że najprawdopodobniejszą szerokością geograficzną Moskwy jest 55°45′19″,79 z błędem prawdopodobnym 0″,127.

23. Spostrzeżenia pośrednie jednej wielkości. Wyobraźmy sobie funkcyę

$$(47) \quad \ldots\ldots \quad \xi = f(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m),$$

w której ilości $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$, od siebie niezależne, mogą być wyznaczone za pomocą spostrzeżeń bezpośrednich; chodzi zaś o najprawdopodobniejszą wartość ilości ξ, odpowiadającą otrzymanym ze spostrzeżeń wartościom ilości $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$ oraz o związane z nią błędy i o ważność, jaką temu najprawdopodobniejszemu rezultatowi przypisać można.

Niech $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ będą najprawdopodobniejszemi wartościami, otrzymanemi ze spostrzeżeń, poczynionych nad $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$, zaś $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ błędami prawdziwymi tych najprawdopodobniejszych wartości, tak, że

$$(48) \quad \ldots \quad x_1 = a_1 - z_1,\ x_2 = a_2 - z_2, \ldots, x_m = a_m - z_m.$$

Gdy następnie przez a oznaczymy najprawdopodobniejszą wartość ilości szukanej ξ, a przez x jej błąd prawdziwy, to oczywiście

$$(\mathrm{XVII}) \quad \ldots \quad a = f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m).$$

oraz

$$(49) \quad \ldots \quad x = a - \xi.$$

Z (47), (XVII) i (49) otrzymujemy

$$(50) \quad \ldots \quad x = f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m) - f(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m).$$

Według wzoru Taylor'a, zastosowanego do funkcyi o wielu zmiennych niezależnych, po opuszczeniu części, zawierającej iloczyny i potęgi przyrostków, jest

$$f(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m) = f(a_1 - x_1,\ a_2 - x_2, \ldots, a_m - x_m)$$

$$= f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m) - \left(\frac{\partial f}{\partial z_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_m} x_m\right).$$

Stąd

$$(50') \quad \ldots \quad f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m) - f(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial z_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial z_3} x_3 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_m} x_m,$$

gdzie wartości pochodnych cząstkowych brać trzeba przy $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$, $z_3 = a_3, \ldots, z_m = a_m$.

Podstawiwszy (50') w (50), wypada

$$(51) \quad \ldots \quad x = \frac{\partial f}{\partial z_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial z_3} x_3 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_m} x_m,$$

a po podniesieniu obu stron do kwadratu

$$(52) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^2 = \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial z_\lambda}\right)^2 x^2_\lambda + 2\Sigma \frac{\partial f}{\partial z_\lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial z_\mu} x_\lambda x_\mu.$$

Jeżeli teraz od błędów prawdziwych przejdziemy do średnich, to jest, gdy na miejsce błędów prawdziwych x_λ podstawimy błędy średnie S_λ, to — ponieważ średnie pierwszych potęg błędów x_λ, względnie x_μ (według (9″) w art. 5) są równe zeru — część, powstająca z drugiej sumy po stronie prawej w (52), zniknie i otrzymamy (patrz uzupełnienie IV),

$$(52') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S^2 = \Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial z_\lambda}\right)^2 S^2_\lambda,$$

czyli

$$(\text{XVIII}) \quad . \quad . \quad . \quad S = \pm \sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial z_\lambda}\right)^2 S^2_\lambda}.$$

Znaczy to, że gdy we wzorze (XVIII) za $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_m$ podstawimy błędy średnie najprawdopodobniejszych wartości ilości $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$, wtedy obliczone zeń S oznaczać będzie błąd średni najprawdopodobniejszej wartości a, jaką otrzymaliśmy na ξ z (47) po podstawieniu w niem $z_\lambda = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$.

Jeżeli dalej obie strony wyrażenia (XVIII) pomnożymy przez znany nam czynnik stały 0,674 49, zamieniający błąd średni na prawdopodobny, wtedy otrzymamy

$$(\text{XIX}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad P = \pm \sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial z_\lambda}\right)^2 P^2_\lambda}.$$

Wzór ostatni podajemy tylko na przypadek, gdyby były dane błędy prawdopodobne wielkości bezpośrednio mierzonych, w razie bowiem gdy są dane błędy średnie, lepiej jest użyć wzoru (XVIII) i znalezioną wartość S pomnożyć, jak zwykle, przez 0,674 49.

Gdy za ważności najprawdopodobniejszych wartości przyjmiemy, według wzoru (40), odwrotności kwadratów błędów średnich, t. j. gdy w (52′) podstawimy

$$G = \frac{1}{S^2} \quad \text{i} \quad G_\lambda = \frac{1}{S^2_\lambda},$$

to wypadnie

$$(\text{XX}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{G} = \Sigma \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z_\lambda}\right)^2}{G_\lambda}$$

jako wzór, z którego możemy obrachować ważność dla najprawdopodobniejszej wartości ilości $\xi = a$.

Zastosujmy wyprowadzone wzory do szczególnych kształtów funkcyi f. — Jeżeli np. założymy

$$(53) \;.\;.\; \xi = f(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m) = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 + \ldots + c_m z_m,$$

gdzie $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m$ są ilościami stałemi, to najprawdopodobniejsza wartość dla ξ równa się

$$(53') \;.\;.\;.\;.\; a = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + \ldots + c_m a_m;$$

ponieważ zaś w tym razie $\frac{\partial f}{\partial z_\lambda} = c_\lambda$, więc błędem średnim dla znalezionej najprawdopodobniejszej wartości a, według (XVIII), jest

$$(53'') \;.\;.\;.\; S = \pm \sqrt{c^2_1 S^2_1 + c^2_2 S^2_2 + c^2_3 S^2_3 + \ldots + c^2_m S^2_m}$$
$$= \pm \sqrt{\Sigma c^2_\lambda S^2_\lambda}.$$

Błędem prawdopodobnym, według (XIX), jest

$$(53''') \;.\;.\; P = \pm \sqrt{c^2_1 P^2_1 + c^2_2 P^2_2 + c^2_3 P^3_3 + \ldots + c^2_m P^2_m}$$
$$= \pm \sqrt{\Sigma c^2_\lambda P^2_\lambda}.$$

Ważność znalezionej wartości a, według (XX), równa się

$$(53^{IV}) \;.\;.\; \frac{1}{G} = \frac{c^2_1}{G_1} + \frac{c^2_2}{G_2} + \frac{c^3_3}{G_3} + \ldots + \frac{c^2_m}{G_m} = \Sigma \frac{c^2_\lambda}{G_\lambda}.$$

Niech następnie

$$(54) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \xi = f(z_1, z_2) = z_1 \,.\, z_2,$$

to jest, niech szukana ilość będzie iloczynem dwóch, dających się wymierzyć, wielkości.

Najprawdopodobniejsza wartość

$$(54') \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; a = a_1 a_2.$$

Że zaś $\frac{\partial f}{\partial z_1} = z_2 = a_2$, $\frac{\partial f}{\partial z_2} = z_1 = a_1$, zatem:

błąd średni . . . . . $S = \pm \sqrt{a^2_2 S^2_1 + a^2_1 S^2_2}$ . . . . (54'')

błąd prawdopodobny. . $P = \pm \sqrt{a^2_2 P^2_1 + a^2_1 P^2_2}$ . . . . (54''')

Gdyby nam chodziło np. o powierzchnię prostokąta, którego

jeden bok $= 7{,}22$ z błędem prawdopodobnym $0{,}03$,
drugi bok $= 5{,}47$ z " " $0{,}02$,

to szukana powierzchnia $a = 7{,}22 \times 5{,}47 = 39{,}49$ z błędem prawdopodobnym

$$P = \pm \sqrt{(5{,}47)^2 . (0{,}03)^2 + (7{,}22)^2 . (0{,}02)^2} = \pm 0{,}22;$$

to jest, rzeczywista powierzchnia zawiera się, z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, w granicach od 39,27 do 39,71.

Załóżmy jeszcze w (53) $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_m = 1$ oraz $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_m = l$. Wtedy:

$$(55) \quad \ldots \quad \begin{cases} a = ml, \\ S = s\sqrt{m}, \\ P = p\sqrt{m}, \\ G = \dfrac{g}{m} = \dfrac{1}{ms^2}, \text{ gdyż } g = \dfrac{1}{s^2}. \end{cases}$$

Wreszcie, ponieważ $m = \frac{a}{l}$, zatem

$$(56) \quad \ldots \quad S = s\sqrt{\frac{a}{l}} \quad \text{i} \quad P = p\sqrt{\frac{a}{l}}.$$

Jeżeli np. dla zmierzenia odległości dwóch punktów trzeba było łatę, l jednostek długą, przyłożyć m razy, to błąd średni i prawdopodobny otrzymanego rezultatu nie jest m razy, lecz tylko $\sqrt{m}$ razy większy od błędu, jaki się w jednokrotnem przyłożeniu łaty zawiera. I w ogóle, według (56), błąd popełniony będzie tem większy, im a, czyli odległość dwóch punktów, jest większa, a łata l krótsza.

Z powyższych wzorów można także i naodwrót, z wielokrotnie powtórzonych pomiarów długości ξ i wyprowadzonego stąd błędu S resp. P, znaleźć błędy zawarte w pojedynczym pokładzie łaty, albowiem

$$(57) \quad \ldots\ldots\ldots \quad s = \frac{S}{\sqrt{m}} \text{ i } p = \frac{P}{\sqrt{m}}.$$

24. PRZYKŁADY. Przykład I. Mamy trójkąt o bokach a, b, c i kątach naprzeciwko tych boków leżących A, B i C. Z pomiaru okazało się, że bok $b = 106$ metrom z błędem średnim $S_b = 0^m,06$ oraz kąt $B = 29^o 39'$ z błędem średnim $S_B = 1'$ i kąt $A = 120^o 7'$ z błędem $S_A = 2'$. Chodzi o wyznaczenie boku a z odnoszącymi się do niego błędami. Jak wiadomo z trygonometryi $a : b = \sin A : \sin B$, czyli

$$a = b \cdot \frac{\sin A}{\sin B}.$$

Stąd, po podstawieniu danych wielkości, otrzymujemy

$$a = 185^m,34.$$

Dla obrachowania odpowiedniego błędu średniego, obliczmy przedewszystkiem kwadraty pochodnych cząstkowych funkcyi a:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)^2 = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = 3{,}057\,4, \quad \left(\frac{\partial a}{\partial A}\right)^2 = b^2 . \frac{\cos^2 A}{\sin^2 B} = 11\,559{,}08,$$

$$\left(\frac{\partial a}{\partial B}\right)^2 = \frac{b^2 \sin^2 A \cos^2 B}{\sin^4 B} = \frac{b^2 \sin^2 A \operatorname{cotg}^2 B}{\sin^2 B} = 106\,019.$$

Jeżeli następnie dane błędy średnie $1'$ i $2'$ wyrazimy przez ich długości linijne $\frac{2\pi}{360 \times 60}$ i $2 \times \frac{2\pi}{360 \times 60}$, to $S^2_b = 0{,}0036$, $S^2_A = 0{,}000\,000\,338\,12$ i $S^2_B = 0{,}000\,000\,084\,53$. Zatem, według wzoru (XVIII), na szukany błąd średni S_a wypada

$$S_a = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)^2 S^2_b + \left(\frac{\partial a}{\partial A}\right)^2 S^2_A + \left(\frac{\partial a}{\partial B}\right)^2 S^2_B}$$

$$= \pm \sqrt{0{,}023\,876\,7} = \pm\, 0^m,154\,5.$$

Błąd prawdopodobny

$$P_a = \pm\, 0{,}154\,5 \times 0{,}674\,49 = \pm\, 0^m,104\,2.$$

Miara dokładności $H = \frac{1}{S_a \sqrt{2}} = 4{,}577.$

Przykład II. Do wymierzenia odległości dwóch punktów użyto pięciu sążniowych łat: L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, jednej $l_1 = 3$ stopom i jednej $l_2 = 2$ stopom. Przy wykonywaniu pomiaru kładziono łaty L_λ według ich numerów porządkowych. Gdy tak uczyniono dwa razy, okazała się potem jeszcze potrzeba położenia raz L_1, raz L_2 i po razie l_1 i l_2.

Dla każdego zetknięcia łat wyznaczono błąd średni na 0'',01, a błąd końcowy na 0'',15. Wreszcie, po porównaniu łat z miarą normalną, okazało się, że

$$L_1 = 1^s + 0'',0156 \text{ z błędem } S_1 = 0'',0008$$
$$L_2 = 1^s + 0'',0302 \quad \text{,,} \quad S_2 = 0'',0006$$
$$L_3 = 1^s + 0'',0075 \quad \text{,,} \quad S_3 = 0'',0010$$
$$L_4 = 1^s + 0'',0030 \quad \text{,,} \quad S_4 = 0'',0006$$
$$L_5 = 1^s + 0'',0205 \quad \text{,,} \quad S_5 = 0'',0023$$
$$l_1 = 3' - 0'',0550 \quad \text{,,} \quad S_6 = 0'',0003$$
$$l_2 = 2' + 0'',0020 \quad \text{,,} \quad S_7 = 0'',0002$$

Zachodzi pytanie, jaka jest najprawdopodobniejsza odległość dwóch danych punktów i jakie błędy należy tej najprawdopodobniejszej odległości przypisać?

Najprawdopodobniejsza odległość

$$a = 3L_1 + 3L_2 + 2L_3 + 2L_4 + 2L_5 + l_1 + l_2 = 12^s 5' 0'',146\,4.$$

Następnie, według (53'')

$$S = \pm\sqrt{9S_1^2 + 9S_2^2 + 4S_3^2 + 4S_4^2 + 4S_5^2 + S_6^2 + S_7^2 + 13\,.\,(0{,}01)^2 + (0{,}15)^2}$$
$$= \pm\sqrt{0{,}023\,835\,73} = \pm\, 0{,}154\,3.$$
$$P = 0{,}154\,3 \times 0{,}674\,49 = \pm\, 0{,}104\,1.$$

Przykład III. Dla wymierzenia odległości dwóch punktów musiano przyłożyć 13 razy łatę, długą na $2^m{,}052$, przyczem błąd każdego przyłożenia oceniono na $0^m{,}005$. Jaką jest najprawdopodobniejsza odległość tych punktów i jakimi jest obciążona błędami?

Najprawdopodobniejsza wartość widocznie równa się

$$a = 2^m,052 + 2^m,052 + \ldots + 2^m,052 = 2^m,052 \times 13 = 26^m,676;$$

zaś błąd średni

$$S = \pm \sqrt{(0,005)^2 + (0,005)^2 + \ldots + (0,005)^2} = \pm \sqrt{13 . (0,005)^2}$$
$$= \pm 0,005 \sqrt{13} = \pm 0,005 \times 3,605\,5 = \pm 0,018\,027\,5 = \pm 1^{cm},803.$$

Błąd prawdopodobny

$$P = 1,803 \times 0,674\,49 = \pm 1^{cm},216,$$

czyli, rzeczywista odległość punktów, z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, zawiera się pomiędzy $26^m,664$ a $26^m,688$. Rezultat ten można otrzymać wprost ze wzorów (55).

Przykład IV. W trójkącie wymierzono dwa kąty: kąt A pięć razy, kąt B siedm razy. Na kąt A otrzymano 32^0 oraz $15',6$; $19',7$; $21',8$; $17',3$ i $18',9$; na kąt B 123^0 oraz $45',6$; $49',3$; $42',6$; $48',9$; $47',6$; $44',9$ i $46',7$. Znaleźć trzeci kąt C z błędami.

Związek pomiędzy kątem C i A oraz B jest, jak wiadomo, następujący

(α) . . . . $C = 180^0 - (A + B)$.

Nie licząc stopni, najprawdopodobniejszą wielkością kąta A jest $a = \frac{93',3}{5} = 18',7$; najprawdopodobniejszą wielkością kąta B jest $b = \frac{325',6}{7} = 46',5$.

Dla otrzymania odpowiednich błędów średnich, układamy tabliczkę:

dla kąta A. dla kąta B.

a_λ	α_λ	α^2_λ	b_λ	β_λ	β^2_λ
15',6	−3,1	9,61	45',6	−0,9	0,81
19',7	+1,0	1,00	49',3	+2,8	7,84
21',8	+3,1	9,61	42',6	−3,9	15,21
17',3	−1,4	1,96	48',9	+2,4	5,76
18',9	+0,2	0,04	47',6	+1,1	1,21
			44',9	−1,6	2,56
			46',7	+0,2	0,04
—	+4,3 −4,5	22,22	—	+6,5 −6,4	33,43

$$S_A = \pm \sqrt{\frac{22,22}{5 \times 4}} = \pm \sqrt{1,111} = \pm 1',05,$$

$$S_B = \pm \sqrt{\frac{33,43}{7 \times 6}} = \pm \sqrt{0,796} = \pm 0',89.$$

Mamy więc jako wartości najprawdopodobniejsze:

$A = 32^o18',7$ z błędem średnim $\pm 1',05$
$B = 123^o46',5$ „ „ $\pm 0',89.$

Skutkiem tego najprawdopodobniejsza wielkość

$$C = 180^o - 156^o5',2 = 23^o54',8$$

z błędem średnim

$$S_C = \pm \sqrt{(1,05)^2 + (0,89)^2} = \pm \sqrt{1,111 + 0,796}$$
$$= \pm \sqrt{1,907} = \pm 1',38$$

i prawdopodobnym

$$P_C = 1',38 \times 0,674\,49 = \pm 0',93.$$

ROZDZIAŁ IV.

Опредѣленіе неизвѣстныхъ по значеніямъ ихъ функц

WYZNACZENIE NIEWIADOMYCH, ZAWARTYCH W FUNKCYI, KTÓREJ WARTOŚCI OTRZYMUJÈMY ZE SPOSTRZEŻEŃ.

25. Zagadnienie ogólne. Niech będzie funkcya

$$(58) \quad . \ . \ . \quad f(z_1,\ z_2,\ z_3, \ldots, z_m;\ q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots, q_m) = \xi,$$

w której z_1, z_2, $z_3, \ldots, z_m$ są ilościami zmiennemi, a q_1, q_2, $q_3, \ldots, q_m$ niezależnemi od siebie niewiadomemi.

Jeżeli zmiennym z_1, z_2, $z_3, \ldots, z_m$ nadamy pewne określone wartości a_1, b_1, $c_1, \ldots, k_1$, wtedy drogą spostrzeżeń możemy wyznaczyć wartość $\xi = l_1$; gdy zmiennym z_1, z_2, $z_3, \ldots, z_m$ nadamy inne wartości a_2, b_2, $c_2, \ldots, k_2$, wówczas za pomocą spostrzeżeń znajdziemy $\xi = l_2$, i t. d. Gdy czynność tę powtórzymy n razy mieć będziemy n równań:

$$(58') \quad . \ . \left\{ \begin{array}{l} f(a_1,\ b_1,\ c_1, \ldots, k_1;\ q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots, q_m) = l_1, \\ f(a_2,\ b_2,\ c_2, \ldots, k_2;\ q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots, q_m) = l_2, \\ f(a_3,\ b_3,\ c_3, \ldots, k_3;\ q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots, q_m) = l_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(a_n,\ b_n,\ c_n, \ldots, k_n;\ q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots, q_m) = l_n, \end{array} \right.$$

które n i e s ą d o k ł a d n e, ponieważ l_1, l_2, $l_3, \ldots, l_n$, jako rezultaty spostrzeżeń, nie są równe prawdziwym wartościom ξ, lecz różnią się od nich o popełnione, podczas dokonywania spostrzeżeń, błędy $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, tak, że, skoro prawdziwe wartości ξ oznaczymy przez $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$, będzie

(58″) . . $\xi_1 = l_1 + x_1,\ \xi_2 = l_2 + x_2,\ \xi_3 = l_3 + x_3, \ldots, \xi_n = l_n + x_n.$

Chodzi o wyznaczenie takich wartości na niewiadome $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$, aby, po ich podstawieniu w (58), dla odpowiednich wartości, podstawionych za $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$, można było z pomienionego wyrażenia (58) obrachować najprawdopodobniejsze wartości ξ.

Oczywiście na ξ otrzymamy najprawdopodobniejsze wartości wtedy, gdy za $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$ podstawimy również najprawdopodobniejsze wartości z pośród tych wszystkich, jakie w ogóle rzeczonym ilościom nadawać można.

Uwaga. Ilości $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$ mogą mieć rozmaite znaczenie, stosownie do zadania, jakie mamy przed sobą. Mogą mieć znaczenie zwyczajnych spółczynników lub wykładników, dla których szukamy wartości najprawdopodobniejszych, celem liczebnego określenia danego wyrażenia analitycznego; albo mogą przedstawiać pewne nieznane nam wielkości, których bezpośrednio obserwować nie można lub trudno i dlatego do ich wyznaczenia używamy drogi pośredniej, obserwując nie same te ilości szukane, lecz wartości funkcyi w skład której wchodzą. Różne znaczenia, jakie posiadać mogą ilości q, poznamy w zadaniach rozwiązanych w rozdziale VI, tutaj mogą nas one nie obchodzić, gdyż obecnie idzie nam tylko o sposób znalezienia wartości najprawdopodobniejszych dla ilości q, bez względu na to, jakie być może ich znaczenie.

26. Równania błędów. Kształt funkcyi (58) może być najrozmaitszy. Najprostszą jest postać liniowa względem $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$, to jest

(59) . . . . $q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3 + \ldots + q_m z_m = \xi.$

Postać ta jest zarazem zasadniczą, gdyż, jak to później zobaczymy, do niej każdą inną sprowadzić można. Tym więc kształtem przedewszystkiem się zajmiemy.

Następnie, podobnie jak w rozdziale III-im tak i tutaj, wartości na ξ mogą być otrzymane ze spostrzeżeń jednakowo lub niejednakowo dokładnych. Najprzód zajmiemy się przypadkiem, gdy wszystkie spostrzeżenia są jednakowo dokładne, później, gdy są różnej dokładności.

Jeżeli dla wyznaczenia, w równaniu (59), m niewiadomych ilości $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$ wykonamy n spostrzeżeń nad ξ i otrzymamy

przy $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m = a_1, b_1, c_1, \ldots, k_1$ na ξ wartość l_1,
„ $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m = a_2, b_2, c_2, \ldots, k_2$ „ ξ „ l_2,
„ $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m = a_3, b_3, c_3, \ldots, k_3$ „ ξ „ l_3,
„ . . . .
„ $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m = a_n, b_n, c_n, \ldots, k_n$ na ξ wartości l_n,

to, podstawiwszy powyższe wartości w (59), wypadnie

$$(60) \quad \ldots \quad \begin{cases} q_1a_1 + q_2b_1 + q_3c_1 + \ldots + q_mk_1 = l_1, \\ q_1a_2 + q_2b_2 + q_3c_2 + \ldots + q_mk_2 = l_2, \\ q_1a_3 + q_2b_3 + q_3c_3 + \ldots + q_mk_3 = l_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_1a_n + q_2b_n + q_3c_n + \ldots + q_mk_n = l_n. \end{cases}$$

Gdy $n < m$, nie będziemy w możności wyznaczyć wszystkich ilości q.

Jeżeli $n = m$, wtedy potrafimy wprawdzie obrachować wszystkie q, czyniące zadość równaniom (60), lecz nie będą to wartości poszukiwane, ponieważ l, jako otrzymane ze spostrzeżeń, nie są wolne od błędów, skutkiem czego ilości q, czyniące ściśle zadość równaniom (60), dają w rezultacie nie prawdziwe, lecz obarczone nieznanymi nam błędami wartości na ξ.

Gdy wreszcie $n > m$, wówczas, biorąc którekolwiek m równań z pośród otrzymanych n, możemy wyznaczyć wartości na q, lecz i tu nie będą to wartości prawdziwe, tylko przybliżone, a nadto nie będą czyniły zadość pozostałym $n - m$ równaniom, których przy obliczaniu q, nie uwzględniliśmy.

Widzimy zatem, że takich wartości na q, któreby przy danych $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$ dawały prawdziwe wartości na ξ, w żadnym razie obrachować nie możemy, a skoro tak jest, to należy się przynajmniej starać o znalezienie wartości najprawdopodobniejszych oraz połączonych z niemi błędów, bez czego nie mielibyśmy pojęcia, co są warte otrzymane przez nas rezultaty.

Samo z siebie wynika, że gdy cel nasz sprowadzamy do znalezienia nie całkiem ścisłych, lecz najprawdopodobniejszych tylko wartości, to starać się przynajmniej trzeba o możliwie jak największą liczbę jak najdokładniejszych spostrzeżeń, albowiem, jak wiadomo, im więcej oraz im dokładniejsze posiadać będziemy spostrzeżenia, tem bardziej do prawdziwych rezultatów zbliżyć się potrafimy.

Ponieważ $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ są wartościami ξ, otrzymanemi ze spostrzeżeń, zatem, jak to już nadmieniliśmy w art. 25, są one obciążone błędami, które oznaczmy przez $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, tak, że zupełnie dokładne wartości na q powinny zadość czynić równaniom

$$\begin{aligned}
q_1a_1 + q_2b_1 + q_3c_1 + \ldots + q_mk_1 &= l_1 + x_1,\\
q_1a_2 + q_2b_2 + q_3c_2 + \ldots + q_mk_2 &= l_2 + x_2,\\
q_1a_3 + q_2b_3 + q_3c_3 + \ldots + q_mk_3 &= l_3 + x_3,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
q_1a_n + q_2b_n + q_3c_n + \ldots + q_mk_n &= l_n + x_n.
\end{aligned}$$

Wypadają stąd na błędy obserwacyjne wyrażenia

$$\text{(XXI)}\quad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= q_1a_1 + q_2b_1 + q_3c_1 + \ldots + q_mk_1 - l_1,\\
x_2 &= q_1a_2 + q_2b_2 + q_3c_2 + \ldots + q_mk_2 - l_2,\\
x_3 &= q_1a_3 + q_2b_3 + q_3c_3 + \ldots + q_mk_3 - l_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= q_1a_n + q_2b_n + q_3c_n + \ldots + q_mk_n - l_n.
\end{aligned}\right.$$

Równania te, dla krótkości, nazywać będziemy równaniami błędów, podczas gdy dla równań (58') resp. (60) zachowamy nazwę równań niedokładnych, niezupełnie ścisłych lub przybliżonych. Przejście od jednych do drugich jest tylko formalne.

27. Równania normalne Gauss'a. Załóżmy na chwilę, że wartości $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ nie zostały jeszcze dostrzeżone, lecz mogą być dopiero otrzymane ze spostrzeżeń o jednakiej dokładności h; wtedy prawdopodobieństwem popełnienia błędu x_1, według (21), jest

$$y_{x_1} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2_1}\, dx_1,$$

prawdopodobieństwem popełnienia błędu x_2 jest

$$y_{x_2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x_2^2} dx_2, \text{ i t. d.,}$$

prawdopodobieństwem popełnienia błędu x_n

$$y_{x_n} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x_n^2} dx_n.$$

Prawdopodobieństwo W zejścia się powyższych błędów jest iloczynem powyższych prawdopodobieństw, czyli

$$(61) \quad W = y_{x_1} \cdot y_{x_2} \cdots y_{x_n} = \frac{h^n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2 (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)} dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Ponieważ jednak $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ są już dostrzeżone, przeto W wyraża prawdopodobieństwo, że w razie, gdybyśmy spostrzeżenia powtórzyli, otrzymamy te same wartości na $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$, resp., że się powtórzy ten sam zbieg błędów $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Jeżeli chcemy, aby ten zbieg błędów był najprawdopodobniejszym, a temsamem, żeby niewiadome q przybrały wartości najprawdopodobniejsze, W powinno być największością, co znów nastąpi, gdy

№3
см. Мар
стр. ---

$$(62) \quad \ldots\ldots \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2$$

stanie się najmniejszością, czyli najprawdopodobniejsze wartości dla q zamieniają (62) na najmniejszość, z czego wynika naodwrót, że najprawdopodobniejsze wartości na q obliczyć można z warunku, czyniącego (62) najmniejszością *).

Warunkiem tym jest, aby pochodne cząstkowe wyrażenia (62), wzięte względem niewiadomych q, były równe zeru.

---

*) Najczęściej do wyprowadzenia tej zasady używa się, znanego w rachunku prawdopodobieństwa, twierdzenia Bayes'a. Ponieważ jednak, jak wszędzie tak i tutaj, chodziło mi o drogę jak najprostszą, przeto użyłem łaskawie doradzonego mi przez p. Wł. Gosiewskiego i podanego w tekście sposobu, który dla książki niniejszej wydał mi się zupełnie wystarczającym. Ta sama uwaga stosuje się także do art. 12 i 33.

Марковъ

Podstawiając w (62) za x wyrażenia z (XXI) otrzymujemy funkcyę

$$
\begin{aligned}
(63) \quad \ldots\ldots \quad & x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 + \ldots + x^2_n = \\
= & (q_1a_1 + q_2b_1 + q_3c_1 + \ldots + q_mk_1 - l_1)^2 \\
+ & (q_1a_2 + q_2b_2 + q_3c_2 + \ldots + q_mk_2 - l_2)^2 \\
+ & (q_1a_3 + q_2b_3 + q_3c_3 + \ldots + q_mk_3 - l_3)^2 \\
+ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ & (q_1a_n + q_2b_n + q_3c_n + \ldots + q_mk_n - l_n)^2,
\end{aligned}
$$

której pochodnemi cząstkowemi, wziętemi względem $q_1, q_2, \ldots, q_m$ i przyrównanemi do zera, są

pochodna cząstkowa względem q_1

$$
\left.\begin{array}{l}
\quad (q_1a_1 + q_2b_1 + q_3c_1 + \ldots + q_mk_1 - l_1)\, a_1 \\
+ (q_1a_2 + q_2b_2 + q_3c_2 + \ldots + q_mk_2 - l_2)\, a_2 \\
+ (q_1a_3 + q_2b_3 + q_3c_3 + \ldots + q_mk_3 - l_3)\, a_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ (q_1a_n + q_2b_n + q_3c_n + \ldots + q_mk_n - l_n)\, a_n
\end{array}\right\} = 0,
$$

pochodna cząstkowa względem q_2

$$
\left.\begin{array}{l}
\quad (q_1a_1 + q_2b_1 + q_3c_1 + \ldots + q_mk_1 - l_1)\, b_1 \\
+ (q_1a_2 + q_2b_2 + q_3c_2 + \ldots + q_mk_2 - l_2)\, b_2 \\
+ (q_1a_3 + q_2b_3 + q_3c_3 + \ldots + q_mk_3 - l_3)\, b_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ (q_1a_n + q_2b_n + q_3c_n + \ldots + q_mk_n - l_n)\, b_n
\end{array}\right\} = 0,
$$

. . . .

pochodna cząstkowa względem q_m

$$
\left.\begin{array}{l}
\quad (q_1a_1 + q_2b_1 + q_3c_1 + \ldots + q_mk_1 - l_1)\, k_1 \\
+ (q_1a_2 + q_2b_2 + q_3c_2 + \ldots + q_mk_2 - l_2)\, k_2 \\
+ (q_1a_3 + q_2b_9 + q_3c_3 + \ldots + q_mk_3 - l_3)\, k_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ (q_1a_n + q_2b_n + q_3c_n + \ldots + q_mk_n - l_n)\, k_n
\end{array}\right\} = 0.
$$

Po zniesieniu nawiasów, uskutecznieniu redukcyi, przeniesieniu wyrazów wolnych od q na stronę drugą i wprowadzeniu skróconych oznaczeń:

$$a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 + \ldots + a_n a_n = \Sigma a^2,$$

$$b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 + \ldots + b_n a_n = \Sigma ba \text{ i t. d.},$$

$l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3 + \ldots + l_n a_n = \Sigma al$

zamiast bardziej szczegółowych: $\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=n} a^2_\lambda$, $\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=n} b_\lambda a_\lambda$ i t. d., powyższe równania warunkowe dają się napisać w kształcie *)

$$\text{(XXII)} \left\{ \begin{array}{l} q_1\Sigma a^2 + q_2\Sigma ab + q_3\Sigma ac + q_4\Sigma ad + \ldots + q_m\Sigma ak = \Sigma al, \\ q_1\Sigma ba + q_2\Sigma b^2 + q_3\Sigma bc + q_4\Sigma bd + \ldots + q_m\Sigma bk = \Sigma bl, \\ q_1\Sigma ca + q_2\Sigma cb + q_3\Sigma c^2 + q_4\Sigma cd + \ldots + q_m\Sigma ck = \Sigma cl, \\ q_1\Sigma da + q_2\Sigma db + q_3\Sigma dc + q_4\Sigma d^2 + \ldots + q_m\Sigma dk = \Sigma dl, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ q_1\Sigma ka + q_2\Sigma kb + q_3\Sigma kc + q_4\Sigma kd + \ldots + q_m\Sigma k^2 = \Sigma kl. \end{array} \right.$$

H. y.

Żeby się przekonać, czy obrachowane z (XXII) wartości na $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$ zamieniają sumę kwadratów błędów (62), względnie (63) na największość, czy też na najmniejszość, rozwińmy kwadraty w (63) i uporządkujmy rezultat w następujący sposób:

$$(\alpha) \left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 + \ldots x^2_n = \\ = q_1(q_1\Sigma a^2 + q_2\Sigma ab + q_3\Sigma ac + \ldots + q_{m-1}\Sigma ai + q_m\Sigma ak - \Sigma al) \\ + q_2(q_1\Sigma ba + q_2\Sigma b^2 + q_3\Sigma bc + \ldots + q_{m-1}\Sigma bi + q_m\Sigma bk - \Sigma bl) \\ + q_3(q_1\Sigma ca + q_2\Sigma cb + q_3\Sigma c^2 + \ldots + q_{m-1}\Sigma ci + q_m\Sigma ck - \Sigma cl) \\ + \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ + q_{m-1}(q_1\Sigma ia + q_2\Sigma ib + q_3\Sigma ic + \ldots + q_{m-1}\Sigma i^2 + q_m\Sigma ik - \Sigma il) \\ + q_m(q_1\Sigma ka + q_2\Sigma kb + q_3\Sigma kc + \ldots + q_{m-1}\Sigma ki + q_m\Sigma k^2 - \Sigma kl) \\ + \Sigma l^2 - (q_1\Sigma al + q_2\Sigma bl + q_3\Sigma cl + \ldots + q_{m-1}\Sigma il + q_m\Sigma kl). \end{array} \right.$$

---

*) Właściwie q stać powinny na drugiem miejscu; ale ponieważ wtedy możnaby sądzić, że q wchodzą pod znak Σ, zatem, aby uniknąć nieporozumienia, stawiamy je na miejscu pierwszem.

Skoro w wyrażeniu (α) podstawimy za q wartości obliczone z równań (XXII), to m pierwsze wiersze zamienią się, oczywiście, na zera i suma kwadratów błędów przybierze wartość

$$(\beta) \quad . \; . \; \Sigma l^2 - (q_1\Sigma al + q_2\Sigma bl + q_3\Sigma cl + \ldots + q_{m-1}\Sigma il + q_m\Sigma kl).$$

Jeżeli (β) jest najmniejszością, to gdy w (α) za jedno chociaż q, np. za q_1, podstawimy ilość nieskończenie mało różną od q_1, dajmy na to $q_1 + \varepsilon$, (α) powinno przybrać wartość większą od (β).

Uczyniwszy tak, wypadnie (β) zwiększone o ilość dodatną $\varepsilon^2\Sigma a^2$, co właśnie dowodzi, że ilości q, obrachowane z (XXII), zamieniają sumę kwadratów (62) na najmniejszość, czyli, że z m równań (XXII) dają się obrachować najprawdopodobniejsze wartości szukanych m niewiadomych $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots, q_m$, określające wyrażenie (59) w ten sposób, że dla danych $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$ otrzymujemy najprawdopodobniejsze wartości na ξ.

Z równań (XXII) użytkował pierwszy Legendre w pracy „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comêtes" (Paryż, 1806)*), ale nie podał sposobu ich wyprowadzenia. Uczynił to dopiero Gauss w dziele „Theoria motus corporum coelestium" (Hamburg, 1809) i dlatego równania pomienione nazwano równaniami normalnemi Gauss'a.

28. Rozwiązywanie równań normalnych Gauss'a. Chcąc użyć równań (XXII), potrzeba przedewszystkiem poobliczać spółczynniki Σ przy q. Praca to bardzo mozolna, zwłaszcza przy większej liczbie spostrzeżeń. Można ją wykonać rozmaicie, tworząc zwyczajnie kwadraty oraz iloczyny i sumując takowe następnie, albo zapomocą logarytmów, albo wreszcie używając do tego celu tablicy kwadratów (tab. II) w sposób, opisany w uzupełnieniu V-em.

Otrzymawszy wszystkie sumy, należy rozwiązać równania (XXII). Do tego prowadzą znów rozmaite drogi. Można użyć albo jednego z podanych przez algebrę elementarną sposobów (gdy chodzi nam tylko o q bez oznaczenia błędów), albo t. zw. równań eliminacyjnych, które wiodą do układu zredukowanych równań normalnych, jak to w swej książce uczynił p. Gustawicz, albo wreszcie można użyć wyznaczników (patrz uzupełnienie VI).

*) Hagen, str. 43.

My użyjemy ostatniego sposobu, ponieważ tą drogą otrzymane rezultaty przedstawiają się w nader prostej, łatwej do zapamiętania i nadzwyczaj wygodnej formie.

Gdy wyznacznik, ułożony ze spółczynników Σ przy q w równaniach (XXII), oznaczymy przez D, czyli gdy położymy

$$(64) \quad . \; . \; D = \begin{vmatrix} \Sigma a^2, & \Sigma ab, & \Sigma ac, & \Sigma ad, & \ldots, & \Sigma ak \\ \Sigma ba, & \Sigma b^2, & \Sigma bc, & \Sigma bd, & \ldots, & \Sigma bk \\ \Sigma ca, & \Sigma cb, & \Sigma c^2, & \Sigma cd, & \ldots, & \Sigma ck \\ \Sigma da, & \Sigma db, & \Sigma dc, & \Sigma d^2, & \ldots, & \Sigma dk \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma ka, & \Sigma kb, & \Sigma kc, & \Sigma kd, & \ldots, & \Sigma k^2 \end{vmatrix}$$

oraz, gdy przez D_μ oznaczymy wyznacznik, jaki się otrzymuje z wyznacznika (64) po zastąpieniu w nim kolumny spółczynników Σ przy q_μ przez kolumnę wyrazów, stojących po prawej stronie równań (XXII), to ogólnym wzorem na rozwiązanie równań normalnych Gauss'a (patrz wzór (23) w uzupełnieniu VI) jest

$$(\text{XXIII}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; q_\mu = \frac{D_\mu}{D}.$$

Jeżeli obliczone, tą czy inną drogą, najprawdopodobniejsze wartości niewiadomych q podstawimy w (59) i następnie za $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$ podstawiać będziemy kolejno wartości a, b, c, d, ..., k, podobnie, jak to czyniliśmy dla pozyskania równań (60), to w rezultacie takim sposobem obliczone z (59) wartości będą najprawdopodobniejszemi wartościami obserwowanej wielkości ξ.

Jakkolwiek każdorazowe rozwinięcie wyznaczników nie przedstawia żadnych wyjątkowych trudności, niemniej jednak, aby ułatwić czytelnikom rozwiązywanie zadań, podajemy tu gotowe rozwinięcia wyznaczników, z jakimi się najczęściej w praktyce spotkać można. Jest mianowicie:

$$(65) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

$$(66) \quad \ldots \quad \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{cases} a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 \\ + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 \\ + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2. \end{cases}$$

Wyznacznik o czterech wierszach i kolumnach posiada w rozwinięciu $4! = 24$ wyrazy, każdy po cztery czynniki; lepiej więc jest uporządkować go według elementów któregokolwiek wiersza lub kolumny i następnie dopiero rozwinąć otrzymane minory według wzoru (66). Będzie w takim razie

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2, & c_2, & d_2 \\ b_3, & c_3, & d_3 \\ b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1, & c_1, & d_1 \\ b_3, & c_3, & d_3 \\ b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1, & c_1, & d_1 \\ b_2, & c_2, & d_2 \\ b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1, & c_1, & d_1 \\ b_2, & c_2, & d_2 \\ b_3, & c_3, & d_3 \end{vmatrix}$$

W podobny sposób postępować także należy, gdy chodzi o sprawdzenie, czy wartość danego wyznacznika bez błędu obliczoną została. Gdyby chodziło o sprawdzenie ostatnim sposobem obliczonego wyznacznika, należy go uporządkować według innej kolumny lub wiersza i rachunek ponownie wykonać. Porządkując go np. według elementów pierwszego wiersza, otrzymamy

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2, & c_2, & d_2 \\ b_3, & c_3, & d_3 \\ b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2, & b_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \\ a_4, & b_4, & c_4 \end{vmatrix}$$

Gdy w powyższe rozwinięcia za elementy wyznacznika podstawimy odpowiednie spółczynniki liczebne z równań (XXII), to mieć będziemy gotowy materyał, potrzebny do obliczenia niewiadomych q. Weźmy przykład.

Ze spostrzeżeń okazało się, iż dla związku

$$(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad q_1 z + q_2 z^2 = \xi,$$

$$\begin{aligned}
\text{przy } z &= a_1 = 0{,}33 \text{ jest } \xi = l_1 = 2{,}51 \\
\text{„} \quad z &= a_2 = 1{,}04 \quad \text{„} \quad \xi = l_2 = 5{,}23 \\
\text{„} \quad z &= a_3 = 1{,}32 \quad \text{„} \quad \xi = l_3 = 6{,}12 \\
\text{„} \quad z &= a_4 = 2{,}06 \quad \text{„} \quad \xi = l_4 = 7{,}97 \\
\text{„} \quad z &= a_5 = 2{,}60 \quad \text{„} \quad \xi = l_5 = 8{,}81 \\
\text{„} \quad z &= a_6 = 3{,}14 \quad \text{„} \quad \xi = l_6 = 9{,}10 \\
\text{„} \quad z &= a_7 = 3{,}82 \quad \text{„} \quad \xi = l_7 = 8{,}26 \\
\text{„} \quad z &= a_8 = 4{,}13 \quad \text{„} \quad \xi = l_8 = 8{,}04;
\end{aligned}$$

chodzi o najprawdopodobniejsze wartości na q_1 i q_2, a więc i na ξ.

Z powyższych rezultatów, przy pomocy tab. II, otrzymujemy tabelkę, pomieszczoną na str. 70.

Mamy z niej:

$$\begin{aligned}
\Sigma a^2 &= 55{,}446 \\
\Sigma b^2 &= 669{,}01 \\
\Sigma l^2 &= 427{,}92 \\
\Sigma (a + b)^2 &= 1\,098{,}31 \\
\Sigma (a + l)^2 &= 777{,}38 \\
\Sigma (b + l)^2 &= 2\,011{,}68 \\
\Sigma (a + b + l)^2 &= 2\,734{,}99;
\end{aligned}$$

stąd wypada:

$$\Sigma ab = \frac{\Sigma (a + b)^2 - \Sigma a^2 - \Sigma b^2}{2} = 186{,}93$$

$$\Sigma al = \frac{\Sigma (a + l)^2 - \Sigma a^2 - \Sigma l^2}{2} = 147{,}01$$

$$\Sigma bl = \frac{\Sigma (b + l)^2 - \Sigma b^2 - \Sigma l^2}{2} = 457{,}38$$

a	$b = a^2$	l	$b^2 = a^4$	l^2	$a + b$	$(a+b)^2$	$a+l$	$(a+l)^2$	$b + l$	$(b+l)^2$	$a+b+l$	$(a+b+l)^2$
0,33	0,109	2,51	0,01	6,30	0,439	0,19	2,84	8,07	2,619	6,86	2,949	8,70
1,04	1,082	5,23	1,17	27,35	2,122	4,50	6,27	39,31	6,312	39,84	7,352	54,05
1,32	1,742	6,12	3,03	37,45	3,062	9,38	7,44	55,35	7,862	61,81	9,182	84,31
2,06	4,244	7,97	18,01	63,52	6,304	39,74	10,03	100,60	12,214	149,18	14,274	203,75
2,60	6,760	8,81	45,70	77,62	9,360	87,61	11,41	130,19	15,570	242,43	18,170	330,15
3,14	9,860	9,10	97,22	82,81	13,000	169,00	12,24	149,82	18,960	359,48	22,100	488,41
3,82	14,592	8,26	212,93	68,23	18,412	339,00	12,08	145,93	22,852	522,22	26,672	711,40
4,13	17,057	8,04	290,94	64,64	21,187	448,89	12,17	148,11	25,097	629,86	29,227	854,22
18,44	55,446	56,04	669,01	427,92	73,886	1 098,31	74,48	777,38	111,486	2 011,68	129,926	2 734,99

i dla sprawdzenia

$$\Sigma\,(a+b+l)^2 = \Sigma a^2 + \Sigma b^2 + \Sigma l^2 + 2\,(\Sigma ab + \Sigma al + \Sigma bl) = 2\,735{,}016,$$

t. j. prawie ściśle to samo, co wykazuje ostatnia kolumna naszej tabelki (2 734,99).

Z powyższych rezultatów otrzymujemy następujące równania normalne Gauss'a:

$\Sigma a^2 \qquad \Sigma ab \qquad \Sigma al$

$$55{,}446\, q_1 + 186{,}93\, q_2 = 147{,}01$$

$\Sigma ab \qquad \Sigma b^2 \qquad \Sigma bl$

$$186{,}93\, q_1 + 669{,}01\, q_2 = 457{,}38,$$

dla których

$$D = \begin{vmatrix} 55{,}446, & 186{,}93 \\ 186{,}93, & 669{,}01 \end{vmatrix} = 2\,151{,}10$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 147{,}01, & 186{,}93 \\ 457{,}38, & 669{,}01 \end{vmatrix} = 12\,853{,}12$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 55{,}446, & 147{,}01 \\ 186{,}93, & 457{,}38 \end{vmatrix} = -\,2{,}120{,}69.$$

Wypada więc na wartości najprawdopodobniejsze niewiadomych q:

$$q_1 = \frac{12\,853{,}12}{2\,151{,}10} = 5{,}975\,1, \quad q_2 = -\,\frac{2\,120{,}69}{2\,151{,}10} = -\,0{,}985\,9,$$

czyli liczebnem wyrażeniem równania (α) jest

$$(\alpha') \quad \ldots\ldots \quad 5{,}975\,1\, z - 0{,}985\,9\, z^2 = \xi.$$

Jeżeli w równanie (α') podstawimy odpowiednie wartości na z, to znajdziemy:

1	2	3	4	5
dla z	ξ z rachunku	ξ ze spostrzeżeń	Różnice α	Kwadraty różnic α^2
0,33	1,86	2,51	−0,65	0,422 5
1,04	5,15	5,23	−0,08	0,006 4
1,32	6,17	6,12	+0,05	0,002 5
2,06	8,12	7,97	+0,15	0,022 5
2,60	8,87	8,81	+0,06	0,003 6
3,14	9,04	9,10	−0,06	0,003 6
3,82	8,44	8,26	+0,18	0,032 4
4,13	7,86	8,04	−0,18	0,032 4
$\Sigma =$	55,51	56,04	−0,53	0,525 9

Liczby zawarte w kol. 2-ej stanowią najprawdopodobniejsze wartości ξ, a suma kwadratów błędów 0,525 9 (kol. 5) jest najmniejszą z pośród wszystkich, jakieby wypadły przy wszelkich innych wartościach niewiadomych q_1 i q_2.

Sumy kol. 2-ej i 3-ej podane zostały dla sprawdzenia liczb kol. 4-ej (55,51 — 56,04 = — 0,53).

29. Uwaga. Zdarza się często, że na $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ wypadają wartości względnie wielkie, skutkiem czego formowanie kwadratów i iloczynów z tych ilości przedstawia nader mozolną dla rachmistrza pracę. Ażeby w takich razach ulżyć sobie, nadajemy niewiadomym $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$ przybliżone wartości i szukamy najprawdopodobniejszych poprawek.

W tym celu z pośród (60) wybieramy którekolwiek m równań i z nich obliczamy dla q przybliżone wartości, które oznaczmy przez $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m$; gdy nadto przez $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_m$ oznaczymy szukane poprawki, będzie

$$(67) \quad . \; . \quad q_1 = E_1 + \varepsilon_1, \; q_2 = E_2 + \varepsilon_2, \; q_3 = E_3 + \varepsilon_3, \ldots, q_m = E_m + \varepsilon_m,$$

co podstawiwszy w (XXI) mamy, w miejsce poprzednich, następujące równania błędów:

$$(\mathrm{XXI'}) \ldots \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 b_1 + \varepsilon_3 c_1 + \ldots + \varepsilon_m k_1 \\ &\quad - (l_1 - E_1 a_1 - E_2 b_1 - E_3 c_1 - \ldots - E_m k_1), \\ x_2 &= \varepsilon_1 a_2 + \varepsilon_2 b_2 + \varepsilon_3 c_2 + \ldots + \varepsilon_m k_2 \\ &\quad - (l_2 - E_1 a_2 - E_2 b_2 - E_3 c_2 - \ldots - E_m k_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \varepsilon_1 a_n + \varepsilon_2 b_n + \varepsilon_3 c_n + \ldots + \varepsilon_m k_n \\ &\quad - (l_n - E_1 a_n - E_2 b_n - E_3 c_n - \ldots - E_m k_n), \end{aligned} \right.$$

gdzie zazwyczaj

$$l_\mu - E_1 a_\mu - E_2 b_\mu - E_3 c_\mu - \ldots - E_m k_\mu = \lambda_\mu$$

są ilościami względnie małemi, a równania normalne Gauss'a (XXII) ulegają tej tylko zmianie, że za $q_1, q_2, q_3, \ldots q_m$ i l wchodzą ilości $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_m$ i λ.

Zastosujmy ten sposób postępowania do naszego przykładu.

Gdy do przybliżonego wyznaczenia q_1 i q_2 użyjemy równań

$$\begin{aligned} 1{,}04\, q_1 + 1{,}081\,6\, q_2 &= 5{,}23 \\ 4{,}13\, q_1 + 17{,}056\,9\, q_2 &= 8{,}04, \end{aligned}$$

to wypadnie

$$q_1 = \frac{80{,}516\,347}{13{,}274\,646}, = \text{prawie } 6 = E_1,$$

$$q_2 = -\frac{13{,}238\,3}{13{,}274\,646} = \text{prawie } -1 = E_2.$$

W miejsce więc danych $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ należy obecnie podstawić

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2{,}51 - 0{,}33 \times 6 + 0{,}109 \times 1 = + 0{,}639 \\ \lambda_2 &= 5{,}23 - 1{,}04 \times 6 + 1{,}082 \times 1 = + 0{,}072 \\ \lambda_3 &= 6{,}12 - 1{,}32 \times 6 + 1{,}742 \times 1 = - 0{,}058 \\ \lambda_4 &= 7{,}97 - 2{,}06 \times 6 + 4{,}244 \times 1 = - 0{,}146 \\ \lambda_5 &= 8{,}81 - 2{,}60 \times 6 + 6{,}760 \times 1 = - 0{,}030 \\ \lambda_6 &= 9{,}10 - 3{,}14 \times 6 + 9{,}860 \times 1 = + 0{,}120 \\ \lambda_7 &= 8{,}26 - 3{,}82 \times 6 + 14{,}592 \times 1 = - 0{,}068 \\ \lambda_8 &= 8{,}04 - 4{,}13 \times 6 + 17{,}057 \times 1 = + 0.317 \end{aligned}$$

Skutkiem tego odpowiednie kolumny poprzedniej tabelki należy teraz zastąpić przez następujące:

λ	λ^2	$a+\lambda$	$(a+\lambda)^2$	$b+\lambda$	$(b+\lambda)^2$	$a+b+\lambda$	$(a+b+\lambda)^2$
+0,639	0,408	0,969	0,939	0,748	0.560	1,078	1,162
+0,072	0,005	1,112	1,237	1,154	1,332	2,194	4,814
−0,058	0,003	1,262	1,593	1,684	2,836	3,004	9,024
−0,146	0,021	1,914	3,663	4,098	16,794	6,158	37,921
−0,030	0,001	2,570	6,605	6,730	45,293	9,330	87,049
+0,120	0,014	3,260	10,628	9,980	99,600	13,120	172,140
−0,068	0,005	3,752	14,078	14,524	210,950	18,344	336,500
+0,317	0,101	4,447	19,776	17,374	301,860	21,504	462,420
+0,846	0,558	19,286	58,519	56,292	679,225	74,732	1 111,030

Z tabelki powyższej oraz z pomieszczonej w art. 28 wypada

$$\Sigma a\lambda = \frac{\Sigma\,(a+\lambda)^2 - \Sigma a^2 - \Sigma\lambda^2}{2} = 1,258,$$

$$\Sigma b\lambda = \frac{\Sigma\,(b+\lambda)^2 - \Sigma b^2 - \Sigma\lambda^2}{2} = 4,829$$

i dla sprawdzenia

$$\Sigma\,(a+b+\lambda)^2 = \Sigma a^2 + \Sigma b^2 + \Sigma\lambda^2 + 2\,(\Sigma ab + \Sigma a\lambda + \Sigma b\lambda) = 1\,111,048,$$

t. j. prawie to samo, co mamy w ostatniej kolumnie powyższej tabelki (1 111,030).

Tym sposobem równania normalne Gauss'a sprowadzają się obecnie do

$$55,446\,\varepsilon_1 + 186,93\,\varepsilon_2 = 1,258,$$

$$186,930\,\varepsilon_1 + 669,01\,\varepsilon_2 = 4,829,$$

dla których: $D = 2\,151{,}10$, $D_1 = -61{,}070\,39$, $D_2 = 32{,}590\,794$, skutkiem czego

$$\varepsilon_1 = -\frac{61{,}070\,39}{2\,151{,}10} = -0{,}028\,4,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{32{,}590\,794}{2\,151{,}10} = +0{,}015\,2,$$

czyli ostatecznie

$$q_1 = E_1 + \varepsilon_1 = 6 - 0{,}028\,4 = +5{,}971\,6,$$

$$q_2 = E_2 + \varepsilon_2 = -1 + 0{,}015\,2 = -0{,}984\,8.$$

Wartości te różnią się bardzo mało od poprzednio otrzymanych (o 0,0035, względnie 0,0011). Różnice powstały stąd, że w obu sposobach nie uwzględniliśmy wszystkich cyfr dziesiętnych.

30. Błędy niewiadomych. Obliczenie niewiadomych q nie rozwiązuje jeszcze zagadnienia w całości, otrzymane bowiem rezultaty nie są bezwzględnie ścisłe i nie mamy pojęcia, o ile są dokładne. Ażeby się o tem przekonać, trzeba obrachować błędy, jakimi wypadłe na q wartości są obarczone. Przedmiot ten stanowić będzie treść niniejszego artykułu.

Jeżeli w równaniach błędów (XXI) za q podstawimy ich wartości prawdziwe, wtedy mieć będziemy błędy rzeczywiste wielkości ξ, czyli różnice pomiędzy prawdziwemi wartościami $\xi = \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ a otrzymanemi ze spostrzeżeń $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$. Dla tych błędów zatrzymamy, zgodnie z (58″), oznaczenia $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Jeżeli w to samo równanie (XXI) podstawimy nie prawdziwe wartości niewiadomych q, lecz najprawdopodobniejsze, t. j. obliczone z równań normalnych Gauss'a (XXII), wówczas mieć będziemy różnice pomiędzy najprawdopodobniejszemi wartościami ξ a otrzymanemi ze spostrzeżeń, czyli takie błędy, których suma kwadratów jest ilością najmniejszą ze wszystkich, jakie możnaby otrzymać, podstawiając w (XXI) za q różne inne wartości. Dla tego rodzaju błędów, których wielkość znamy, przyjmiemy oznaczenia $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$.

Skoro obliczone z równań normalnych wartości q nie są prawdziwe, przeto każda z nich mieści w sobie pewien błąd, po dodaniu którego do odpowiedniej wartości q, otrzymamy prawdziwą jego wartość. Oznaczywszy pomienione błędy przez $\varkappa_1, \varkappa_2,$

$\varkappa_3, \ldots, \varkappa_m$, prawdziwemi wartościami szukanych niewiadomych q będą $q_1 + \varkappa_1$, $q_2 + \varkappa_2$, $q_3 + \varkappa_3, \ldots, q_m + \varkappa_m$. Po podstawieniu ostatnich wyrażeń na q w (XXI), wypada dla równania λ-go

$$(68) \ldots \left\{ \begin{aligned} x_\lambda = (q_1+\varkappa_1)a_\lambda + (q_2+\varkappa_2)b_\lambda + (q_3+\varkappa_3)c_\lambda + \ldots \\ \ldots + (q_m+\varkappa_m)k_\lambda - l_\lambda = (q_1a_\lambda + q_2b_\lambda + q_3c_\lambda + \ldots \\ \ldots + q_mk_\lambda - l_\lambda) + \varkappa_1a_\lambda + \varkappa_2b_\lambda + \varkappa_3c_\lambda + \ldots + \varkappa_mk_\lambda, \end{aligned} \right.$$

podczas gdy

$$(69) \quad \ldots \quad \alpha_\lambda = q_1a_\lambda + q_2b_\lambda + q_3c_\lambda + \ldots + q_mk_\lambda - l_\lambda.$$

Z (68) i (69) znajdujemy

$$(68') \quad \ldots \quad x_\lambda = \alpha_\lambda + \varkappa_1a_\lambda + \varkappa_2b_\lambda + \varkappa_3c_\lambda + \ldots + \varkappa_mk_\lambda.$$

Żeby wyznaczyć błędy średnie znalezionych wartości na q, starajmy się przedewszystkiem wyrazić ich błędy prawdziwe $\varkappa$ przez błędy $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ otrzymanych ze spostrzeżeń ilości $l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$.

W tym celu pomnóżmy (68) przez a_λ i, kładąc kolejno $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n$, rezultaty zsumujmy. Następnie pomnóżmy (68) przez b_λ, podstawmy kolejno $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n$ i rezultaty zsumujmy, i t. d. aż do k_λ. Uczyniwszy tak, otrzymamy:

$$(70) \ldots \left\{ \begin{aligned} \Sigma ax &= (q_1\Sigma a^2 + q_2\Sigma ab + q_3\Sigma ac + \ldots + q_m\Sigma ak - \Sigma al) \\ &\quad + (\varkappa_1\Sigma a^2 + \varkappa_2\Sigma ab + \varkappa_3\Sigma ac + \ldots + \varkappa_m\Sigma ak), \\ \Sigma bx &= (q_1\Sigma ba + q_2\Sigma b^2 + q_3\Sigma bc + \ldots + q_m\Sigma bk - \Sigma bl) \\ &\quad + (\varkappa_1\Sigma ba + \varkappa_2\Sigma b^2 + \varkappa_3\Sigma bc + \ldots + \varkappa_m\Sigma bk), \\ \Sigma cx &= (q_1\Sigma ca + q_2\Sigma cb + q_3\Sigma c^2 + \ldots + q_m\Sigma ck - \Sigma cl) \\ &\quad + (\varkappa_1\Sigma ca + \varkappa_2\Sigma cb + \varkappa_3\Sigma c^2 + \ldots + \varkappa_m\Sigma ck), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma kx &= (q_1\Sigma ka + q_2\Sigma kb + q_3\Sigma kc + \ldots + q_m\Sigma k^2 - \Sigma kl) \\ &\quad + (\varkappa_1\Sigma ka + \varkappa_2\Sigma kb + \varkappa_3\Sigma kc + \ldots + \varkappa_m\Sigma k^2). \end{aligned} \right.$$

Wyrażenia w pierwszych nawiasach, według równań normalnych Gauss'a, są równe zeru, zatem (70) przechodzą na:

$$(70') \ldots \left\{ \begin{array}{l} \varkappa_1\Sigma a^2 + \varkappa_2\Sigma ab + \varkappa_3\Sigma ac + \ldots + \varkappa_m\Sigma ak = \Sigma ax, \\ \varkappa_1\Sigma ba + \varkappa_2\Sigma b^2 + \varkappa_3\Sigma bc + \ldots + \varkappa_m\Sigma bk = \Sigma bx, \\ \varkappa_1\Sigma ca + \varkappa_2\Sigma cb + \varkappa_3\Sigma c^2 + \ldots + \varkappa_m\Sigma ck = \Sigma cx, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varkappa_1\Sigma ka + \varkappa_2\Sigma kb + \varkappa_3\Sigma kc + \ldots + \varkappa_m\Sigma k^2 = \Sigma kx. \end{array} \right.$$

Z równań tych, różniących się od równań normalnych (XXII) tylko stronami drugiemi (mianowicie $\Sigma al, \Sigma bl, \Sigma cl, \ldots, \Sigma kl$ są tu zastąpione przez $\Sigma ax, \Sigma bx, \Sigma cx, \ldots, \Sigma kx$), znajdziemy np.

$$(71) \quad \ldots \quad \varkappa_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \Sigma ax, & \Sigma ab, & \Sigma ac, & \ldots, & \Sigma ak \\ \Sigma bx, & \Sigma b^2, & \Sigma bc, & \ldots, & \Sigma bk \\ \Sigma cx, & \Sigma cb, & \Sigma c^2, & \ldots, & \Sigma ck \\ \ldots & & & & \\ \Sigma kx, & \Sigma kb, & \Sigma kc, & \ldots, & \Sigma k^2 \end{vmatrix},$$

albo inaczej

$$\varkappa_1 = \frac{1}{D}(D_{1,1}\Sigma ax + D_{2,1}\Sigma bx + D_{3,1}\Sigma cx + \ldots + D_{m,1}\,\Sigma kx),$$

co, po uporządkowaniu według x, można wyrazić w kształcie bardziej rozwiniętym

$$(71') \ldots \left\{ \begin{array}{l} \varkappa_1 = \dfrac{a_1D_{1,1} + b_1D_{2,1} + c_1D_{3,1} + \ldots + k_1D_{m,1}}{D}\,x_1 \\ \quad + \dfrac{a_2D_{1,1} + b_2D_{2,1} + c_2D_{3,1} + \ldots + k_2D_{m,1}}{D}\,x_2 + \ldots \\ \quad \ldots + \dfrac{a_nD_{1,1} + b_nD_{2,1} + c_nD_{3,1} + \ldots + k_nD_{m,1}}{D}\,x_n. \end{array} \right.$$

Jeżeli liczniki spółczynników przy $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, dla krótkości, oznaczymy kolejno przez $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, to zamiast (71') można napisać

$$(71'') \ldots \varkappa_1 = \frac{A_1}{D} x_1 + \frac{A_2}{D} x_2 + \frac{A_3}{D} x_3 + \ldots + \frac{A_n}{D} x_n,$$

a po podniesieniu obu stron do kwadratu

$$\varkappa_1{}^2 = \frac{1}{D^2} (A^2{}_1 x^2{}_1 + A^2{}_2 x^2{}_2 + A^2{}_3 x^2{}_3 + \ldots + A^2{}_n x^2{}_n) + \frac{2}{D^2} \Sigma A_\lambda A_\mu x_\lambda x_\mu.$$

Gdy wreszcie od błędów prawdziwych przejdziemy do średnich, w takim razie, podobnie jak w art. 23, sumę drugą, po stronie prawej, możemy opuścić i pozostanie

$$(72) \quad s^2(q_1) = \frac{1}{D^2} \{A^2{}_1 s^2(l_1) + A^2{}_2 s^2(l_2) + A^2{}_3 s^2(l_3) + \ldots + A^2{}_n s^2(l_n)\},$$

gdzie $s^2(q_1)$, $s^2(l_1)$, $s^2(l_2)$, $s^2(l_3), \ldots, s^2(l_n)$ oznaczają kwadraty błędów średnich ilości $q_1, l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$.

Lecz $l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$ są wartościami ξ, otrzymanemi ze spostrzeżeń z założenia jednakowo dokładnych; gdy więc za błędy średnie $s(l_1)$, $s(l_2)$, $s(l_3), \ldots, s(l_n)$ podstawimy w (72) wspólny błąd średni wszystkich spostrzeżeń $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ i gdy oznaczymy go przez $s(\xi)$, to wzór (72) przejdzie na

$$(72') \quad \ldots \quad s^2(q_1) = (A^2{}_1 + A^2{}_2 + A^2{}_3 + \ldots + A^2{}_n) \frac{s^2(\xi)}{D^2}.$$

Zobaczmy teraz, czemu się równa suma kwadratów w nawiasie.

$$\begin{aligned} A^2{}_1 &= (a_1 D_{1,1} + b_1 D_{2,1} + c_1 D_{3,1} + \ldots + k_1 D_{m,1})^2 \\ &= a^2{}_1 D_{1,1} D_{1,1} + a_1 b_1 D_{1,1} D_{2,1} + a_1 c_1 D_{1,1} D_{3,1} + \ldots + a_1 k_1 D_{1,1} D_{m,1} \\ &+ b_1 a_1 D_{2,1} D_{1,1} + b^2{}_1 D_{2,1} D_{2,1} + b_1 c_1 D_{2,1} D_{3,1} + \ldots + b_1 k_1 D_{2,1} D_{m,1} \\ &+ c_1 a_1 D_{3,1} D_{1,1} + c_1 b_1 D_{3,1} D_{2,1} + c^2{}_1 D_{3,1} D_{3,1} + \ldots + c_1 k_1 D_{3,1} D_{m,1} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ k_1 a_1 D_{m,1} D_{1,1} + k_1 b_1 D_{m,1} D_{2,1} + k_1 c_1 D_{m,1} D_{3,1} + \ldots + k^2{}_1 D_{m,1} D_{m,1}, \end{aligned}$$

po zebraniu zaś tych wyrażeń kolumnami,

$$A^2{}_1 = (a^2{}_1 D_{1,1} + b_1 a_1 D_{2,1} + c_1 a_1 D_{3,1} + \ldots + k_1 a_1 D_{m,1})\, D_{1,1}$$
$$+ (a_1 b_1 D_{1,1} + b^2{}_1 D_{2,1} + c_1 b_1 D_{3,1} + \ldots + k_1 b_1 D_{m,1})\, D_{2,1} + \ldots$$
$$\ldots + (a_1 k_1 D_{1,1} + b_1 k_1 D_{2,1} + c_1 k_1 D_{3,1} + \ldots + k^2{}_1 D_{m,1})\, D_{m,1}.$$

W taki sam sposób otrzymamy także:

$$A^2{}_2 = (a^2{}_2 D_{1,1} + b_2 a_2 D_{2,1} + c_2 a_2 D_{3,1} + \ldots + k_2 a_2 D_{m,1})\, D_{1,1}$$
$$+ (a_2 b_2 D_{1,1} + b^2{}_2 D_{2,1} + c_2 b_2 D_{3,1} + \ldots + k_2 b_2 D_{m,1})\, D_{2,1} + \ldots$$
$$\ldots + (a_2 k_2 D_{1,1} + b_2 k_2 D_{2,1} + c_2 k_2 D_{3,1} + \ldots + k^2{}_2 D_{m,1})\, D_{m,1},$$

. . . .

$$A^2{}_n = (a^2{}_n D_{1,1} + b_n a_n D_{2,1} + c_n a_n D_{3,1} + \ldots + k_n a_n D_{m,1})\, D_{1,1}$$
$$+ (a_n b_n D_{1,1} + b^2{}_n D_{2,1} + c_n b_n D_{3,1} + \ldots + k_n b_n D_{m,1})\, D_{2,1} + \ldots$$
$$\ldots + (a_n k_n D_{1,1} + b_n k_n D_{2,1} + c_n k_n D_{3,1} + \ldots + k^2{}_n D_{m,1})\, D_{m,1}.$$

Gdy powyższe wyrażenia zsumujemy kolumnami, wypadnie

$$(73) \quad \ldots\ldots \quad A^2{}_1 + A^2{}_2 + A^2{}_3 + \ldots + A^2{}_n$$
$$= (D_{1,1}\Sigma a^2 + D_{2,1}\Sigma ba + D_{3,1}\Sigma ca + \ldots + D_{m,1}\Sigma ka)\, D_{1,1}$$
$$+ (D_{1,1}\Sigma ab + D_{2,1}\Sigma b^2 + D_{3,1}\Sigma cb + \ldots + D_{m,1}\Sigma kb)\, D_{2,1}$$
$$+ (D_{1,1}\Sigma ac + D_{2,1}\Sigma bc + D_{3,1}\Sigma c^2 + \ldots + D_{m,1}\Sigma kc)\, D_{3,1}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (D_{1,1}\Sigma ak + D_{2,1}\Sigma bk + D_{3,1}\Sigma ck + \ldots + D_{m,1}\Sigma k^2)\, D_{m,1}.$$

Lecz, według uzupełnienia VI,

$$D_{1,1}\Sigma a^2 + D_{2,1}\Sigma ba + D_{3,1}\Sigma ca + \ldots + D_{m,1}\Sigma ka = \begin{vmatrix} \Sigma a^2, \Sigma ab, \Sigma ac, \ldots, \Sigma ak \\ \Sigma ba, \Sigma b^2, \Sigma bc, \ldots, \Sigma bk \\ \Sigma ca, \Sigma cb, \Sigma c^2, \ldots, \Sigma ck \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Sigma ka, \Sigma kb, \Sigma kc, \ldots, \Sigma k^2 \end{vmatrix} = D,$$

$$D_{1,1}\Sigma ab + D_{2,1}\Sigma b^2 + D_{3,1}\Sigma cb + \ldots + D_{m,1}\Sigma kb = \begin{vmatrix} \Sigma ab, & \Sigma ab, & \Sigma ac, & \ldots, & \Sigma ak \\ \Sigma b^2, & \Sigma b^2, & \Sigma bc, & \ldots, & \Sigma bk \\ \Sigma cb, & \Sigma cb, & \Sigma c^2, & \ldots, & \Sigma ck \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma kb, & \Sigma kb, & \Sigma kc, & \ldots, & \Sigma k^2 \end{vmatrix}$$

Ten drugi wyznacznik, z powodu identyczności dwóch kolumn, jest zerem, że zaś i wszystkie pozostałe w (73) wiersze stanowią, widocznie, wyznaczniki z dwiema kolumnami identycznemi, czyli ponieważ są zerami, więc (73) sprowadza się do

$$(73') \quad . \; . \; . \quad A^2_1 + A^2_2 + A^2_3 + \ldots A^2_n = D \,.\, D_{1,1}.$$

Gdy (73′) podstawimy w (72′), wypadnie

$$(\mathrm{XXIV}) \quad . \; . \; . \; . \quad s^2(q_1) = \frac{D_{1,1}}{D}\, s^2(\xi), \text{ czyli}$$

$$(\mathrm{XXV}) \quad . \; . \; . \; . \quad s(q_1) = s(\xi)\sqrt{\frac{D_{1,1}}{D}}.$$

Jeżeli obie strony wyrażenia (XXV) pomnożymy przez 0,674 49, otrzymamy po jednej i drugiej stronie błędy prawdopodobne, t. j.

$$(\mathrm{XXVI}) \quad . \; . \; . \; . \quad p(q_1) = p(\xi)\sqrt{\frac{D_{1,1}}{D}}.$$

W taki sam sposób można wyprowadzić analogiczne wzory na błędy średnie i prawdopodobne dla pozostałych niewiadomych $q_2, q_3, \ldots, q_m$.

Gdy mianowicie w ogóle przez $D_{\mu,\mu}$ oznaczymy minor rzędu pierwszego, powstały z wyznacznika D, wyrażonego we wzorze (64), przez opuszczenie μ-go wiersza i μ-tej kolumny, to będzie

$$(\mathrm{XXV'}) \quad . \; . \; . \; . \quad s(q_\mu) = s(\xi)\sqrt{\frac{D_{\mu,\mu}}{D}},$$

$$(\mathrm{XXVI'}) \quad . \; . \; . \; . \quad p(q_\mu) = p(\xi)\sqrt{\frac{D_{\mu,\mu}}{D}},$$

gdzie $D_{\mu,\mu}$ oraz D, według uzupełnienia VII, dają się rozłożyć na sumę kwadratów i dlatego $\sqrt{\frac{D_{\mu,\mu}}{D}}$ nie mogą być urojone. To ostatnie wynika zresztą bezpośrednio z poprzedniego rozumowania, w szczególności zaś z wyrażenia (73'), z którego się pokazuje, że D i $D_{1,1}$ (w ogóle $D_{\mu,\mu}$) muszą posiadać jednakowe znaki.

Należy teraz wyznaczyć błąd średni $s(\xi)$, którego jeszcze nie znamy.

Skoro $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ są n błędami prawdziwymi spostrzeżeń $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ nad wielkością ξ, to, jak nam wiadomo,

$$s^2(\xi) = \frac{\Sigma x^2_\lambda}{n}, \quad \lambda = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

czyli, dla otrzymania $s^2(\xi)$ trzeba wyznaczyć Σx^2_λ.

Otóż pomnóżmy (68') przez x_λ i, podstawiwszy kolejno $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n$, zsumujmy otrzymane stąd wyrażenia. Otrzymamy tą drogą

$$(74) \quad \Sigma x^2_\lambda = \Sigma \alpha_\lambda x_\lambda + \varkappa_1 \Sigma a_\lambda x_\lambda + \varkappa_2 \Sigma b_\lambda x_\lambda + \varkappa_3 \Sigma c_\lambda x_\lambda + \ldots + \varkappa_m \Sigma k_\lambda x_\lambda. \text{ *)}$$

Pomnóżmy dalej (68') przez α_λ i następnie podstawmy znów kolejno $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n$ i zsumujmy rezultaty, wtedy będzie

$$(75) \quad \Sigma \alpha_\lambda x_\lambda = \Sigma \alpha^2_\lambda + \varkappa_1 \Sigma a_\lambda \alpha_\lambda + \varkappa_2 \Sigma b_\lambda \alpha_\lambda + \varkappa_3 \Sigma c_\lambda \alpha_\lambda + \ldots + \varkappa_m \Sigma k_\lambda \alpha_\lambda.$$

Że zaś, po podstawieniu za α_λ wyrażeń (69), przy $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n$, sumy $\Sigma a_\lambda \alpha_\lambda, \Sigma b_\lambda \alpha_\lambda, \Sigma c_\lambda \alpha_\lambda, \ldots, \Sigma k_\lambda \alpha_\lambda$ są nie czem innem, jak tylko wyrażeniami równań normalnych (XXII), po przeniesieniu stron drugich na pierwsze, czyli zerami, zatem z (75) wypada

$$(75') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Sigma \alpha_\lambda x_\lambda = \Sigma \alpha^2_\lambda.$$

---

*) Moglibyśmy i tutaj, podobnie jak poprzednio, znaczki λ pozostawić domyślności czytelnika; wolimy je wszakże, dla większej jasności, tym razem zatrzymać. Właściwie nawet i tutaj i poprzednio powinno być $\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=n} x^2_\lambda$, $\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=n} \alpha_\lambda x_\lambda$, $\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_\lambda x_\lambda$ i t. d.; tak drobiazgowe jednak oznaczenia są zbyteczne, gdy, jak np. w obecnym przypadku, zaniechanie ich nie prowadzi do żadnych wątpliwości.

Z tego powodu (74) przechodzi na wzór

$$(76)\quad \Sigma x^2_\lambda = \Sigma \alpha^2_\lambda + \varkappa_1 \Sigma a_\lambda x_\lambda + \varkappa_2 \Sigma b_\lambda x_\lambda + \varkappa_3 \Sigma c_\lambda x_\lambda + \ldots + \varkappa_m \Sigma k_\lambda x_\lambda,$$

w którym $\Sigma \alpha^2_\lambda$ jest znane.

Chodzi więc jeszcze tylko o wyznaczenie $\varkappa_1 \Sigma a_\lambda x_\lambda$, $\varkappa_2 \Sigma b_\lambda x_\lambda$, $\varkappa_3 \Sigma c_\lambda x_\lambda, \ldots, \varkappa_m \Sigma k_\lambda x_\lambda$.

Gdy $\varkappa_1$, wyrażone przez wzór (71′), pomnożymy przez $\Sigma a_\lambda x_\lambda$, to otrzymamy

$$(77)\ \ldots\ \varkappa_1 \Sigma a_\lambda x_\lambda = \Big(\frac{a_1 D_{1,1} + b_1 D_{2,1} + c_1 D_{3,1} + \ldots + k_1 D_{m,1}}{D} x_1 + \frac{a_2 D_{1,1} + b_2 D_{2,1} + c_2 D_{3,1} + \ldots + k_2 D_{m,1}}{D} x_2 + \ldots \ldots + \frac{a_n D_{1,1} + b_n D_{2,1} + c_n D_{3,1} + \ldots + k_n D_{m,1}}{D} x_n \Big) \times (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n).$$

W iloczynie po stronie drugiej znajdują się wyrazy, posiadające $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ w kwadracie oraz wyrazy z iloczynami, ogólnego kształtu $x_\lambda x_\mu$.

Zbiór pierwszych jest następujący:

$$(77')\ \ldots \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{D} \{(a^2_1 D_{1,1} + b_1 a_1 D_{2,1} + c_1 a_1 D_{3,1} + \ldots + k_1 a_1 D_{m,1})\, x^2_1 \\ &+ (a^2_2 D_{1,1} + b_2 a_2 D_{2,1} + c_2 a_2 D_{3,1} + \ldots + k_2 a_2 D_{m,1})\, x^2_2 \\ &+ (a^2_3 D_{1,1} + b_3 a_3 D_{2,1} + c_3 a_3 D_{3,1} + \ldots + k_3 a_3 D_{m,1})\, x^2_3 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (a^2_n D_{1,1} + b_n a_n D_{2,1} + c_n a_n D_{3,1} + \ldots + k_n a_n D_{m,1})\, x^2_n. \end{aligned} \right.$$

Zbiór drugich posiada w każdym wyrazie iloczyn błędów $x_\lambda x_\mu$. Jeżeli więc na miejsce nieznanych nam błędów prawdziwych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ podstawimy odpowiednie im błędy średnie, to zbiór drugi można opuścić i pozostanie tylko zbiór pierwszy (77′), w którym na miejscu $x^2_1, x^2_2, x^2_3, \ldots, x^2_n$ znajduje się już teraz kwadrat błędu średniego $s^2(\xi)$. Wtedy zatem (77′) sprowadza się do

$$(77'')\quad \frac{s^2(\xi)}{D}(D_{1,1}\Sigma a^2 + D_{2,1}\Sigma ba + D_{3,1}\Sigma ca + \ldots + D_{m,1}\Sigma ka) = \frac{s^2(\xi)}{D}.D = s^2(\xi),$$

co, po podstawieniu w (77), daje związek przybliżony

$$(78) \ldots \begin{cases} \varkappa_1 \Sigma a_\lambda x_\lambda = s^2(\xi). \quad \text{W podobny sposób znajdziemy:} \\ \varkappa_2 \Sigma b_\lambda x_\lambda = s^2(\xi), \\ \varkappa_3 \Sigma c_\lambda x_\lambda = s^2(\xi), \\ \cdots\cdots \\ \varkappa_m \Sigma k_\lambda x_\lambda = s^2(\xi). \end{cases}$$

Gdy (78) podstawimy w (76), wypadnie

$$(76') \ldots\ldots \quad \Sigma x^2_\lambda = \Sigma \alpha^2_\lambda + ms^2(\xi),$$

a ponieważ

$$\frac{\Sigma x^2_\lambda}{n} = s^2(\xi), \quad \text{skąd} \quad \Sigma x^2_\lambda = ns^2(\xi),$$

zatem (76') przechodzi na

$$(76'') \ldots\ldots \quad ns^2(\xi) = \Sigma \alpha^2_\lambda + ms^2(\xi),$$

czyli

$$(\mathrm{XXIV'}) \ldots\ldots \quad s^2(\xi) = \frac{\Sigma \alpha^2_\lambda}{n-m},$$

t. j. szukane

$$(\mathrm{XXVII}) \ldots \quad s(\xi) = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \alpha^2_\lambda}{n-m}}$$

oraz

$$(\mathrm{XXVIII}) \ldots \quad p(\xi) = \pm\, 0{,}674\,49 \sqrt{\frac{\Sigma \alpha^2_\lambda}{n-m}},$$

gdzie $\Sigma \alpha^2_\lambda$ znane, jako suma kwadratów różnic pomiędzy najprawdopodobniejszemi wartościami wielkości ξ a wartościami, otrzymanemi na nią ze spostrzeżeń; n liczba dokonanych spostrzeżeń, zaś m liczba niewiadomych q.

Gdy w (XXV') i (XXVI') podstawimy wyrażenia (XXVII) i (XXVIII), mieć będziemy

$$(\mathrm{XXV''}) \ldots \quad s(q_\mu) = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \alpha^2_\lambda}{n-m}} \cdot \sqrt{\frac{D_{\mu,\mu}}{D}},$$

oraz

$$(\mathrm{XXVI''}) \ldots \quad p(q_\mu) = \pm\, 0{,}674\,49 \sqrt{\frac{\Sigma \alpha^2_\lambda}{n-m}} \cdot \sqrt{\frac{D_{\mu,\mu}}{D}}.$$

31. Streszczenie. Dla dogodności czytelników streszczamy to, cośmy dotąd w niniejszym rozdziale powiedzieli.

Niech będzie wyrażenie

$$(59) \quad q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3 + \ldots + q_m z_m = \xi.$$

Gdy za zmienne $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$ podstawimy wartości $a_1, b_1, c_1, \ldots, k_1$, otrzymujemy ze spostrzeżeń $\xi = l_1$; gdy za te same zmienne podstawimy wartości $a_2, b_2, c_2, \ldots, k_2$, otrzymujemy ze spostrzeżeń $\xi = l_2$ i t. d., gdy wreszcie za zmienne z podstawimy wartości $a_n, b_n, c_n, \ldots, k_n$, ze spostrzeżeń otrzymujemy $\xi = l_n$.

Ażeby, na podstawie tych danych, obliczyć najprawdopodobniejsze wartości na $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$, które dadzą możność obrachowania najprawdopodobniejszych wartości na ξ, należy ułożyć równania błędów:

$$(\mathrm{XXI}) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = q_1 a_1 + q_2 b_1 + q_3 c_1 + q_4 d_1 + \ldots + q_m k_1 - l_1, \\ x_2 = q_1 a_2 + q_2 b_2 + q_3 c_2 + q_4 d_2 + \ldots + q_m k_2 - l_2, \\ x_3 = q_1 a_3 + q_2 b_3 + q_3 c_3 + q_4 d_3 + \ldots + q_m k_3 - l_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = q_1 a_n + q_2 b_n + q_3 c_n + q_4 d_n + \ldots + q_m k_n - l_n, \end{array} \right.$$

a z nich równania normalne Gauss'a:

$$(\mathrm{XXII}) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 \Sigma a^2 + q_2 \Sigma ab + q_3 \Sigma ac + q_4 \Sigma ad + \ldots + q_m \Sigma ak = \Sigma al, \\ q_1 \Sigma ba + q_2 \Sigma b^2 + q_3 \Sigma bc + q_4 \Sigma bd + \ldots + q_m \Sigma bk = \Sigma bl, \\ q_1 \Sigma ca + q_2 \Sigma cb + q_3 \Sigma c^2 + q_4 \Sigma cd + \ldots + q_m \Sigma ck = \Sigma cl, \\ q_1 \Sigma da + q_2 \Sigma db + q_3 \Sigma dc + q_4 \Sigma d^2 + \ldots + q_m \Sigma dk = \Sigma dl, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_1 \Sigma ka + q_2 \Sigma kb + q_3 \Sigma kc + q_4 \Sigma kd + \ldots + q_m \Sigma k^2 = \Sigma kl. \end{array} \right.$$

Ze spółczynników przy q po stronie lewej równań (XXII) ułóżmy wyznacznik

$$(64)\quad D = \begin{vmatrix} \Sigma a^2, & \Sigma ab, & \Sigma ac, & \Sigma ad, & \ldots, & \Sigma ak \\ \Sigma ba, & \Sigma b^2, & \Sigma bc, & \Sigma bd, & \ldots, & \Sigma bk \\ \Sigma ca, & \Sigma cb, & \Sigma c^2, & \Sigma cd, & \ldots, & \Sigma ck \\ \Sigma da, & \Sigma db, & \Sigma dc, & \Sigma d^2, & \ldots, & \Sigma dk \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma ka, & \Sigma kb, & \Sigma kc, & \Sigma kd, & \ldots, & \Sigma k^2 \end{vmatrix}$$

oraz, ze stron drugich, kolumnę zastępczą

$$(64')\quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma al \\ \Sigma bl \\ \Sigma cl \\ \Sigma dl \\ \ldots \\ \Sigma kl. \end{array} \right.$$

Gdy w ogóle za μ-tą kolumnę w wyznaczniku D podstawimy kolumnę (64′), sformowaną ze stron drugich równań (XXII), i gdy otrzymany z tego podstawienia wyznacznik oznaczymy przez D_μ, najprawdopodobniejszą wartością niewiadomej q_μ jest

$$\text{(XXIII)} \quad \ldots\ldots\ldots \; q_\mu = \frac{D_\mu}{D}, \text{ gdzie } \mu = 1, 2, 3, 4, \ldots, m.$$

Podstawiwszy z wzoru (XXIII) obliczone wartości na q_1, q_2, q_3, $q_4, \ldots, q_m$ w (59), otrzymamy najprawdopodobniejsze wartości na ξ:

$$\begin{array}{ll} \text{przy} & z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m = a_1, b_1\, c_1, \ldots, k_1, \\ \;\;\text{„} & z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m = a_2, b_2\, c_2, \ldots, k_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \;\;\text{„} & z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m = a_n, b_n\, c_n, \ldots, k_n, \end{array}$$

z których na błąd średni i prawdopodobny dla dokonanych spostrzeżeń otrzymujemy:

$$\text{(XXVII)} \quad \ldots \quad s(\xi) = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \alpha^2_\lambda}{n-m}}$$

i

$$\text{(XXVIII)} \quad \ldots \quad p(\xi) = \pm\, 0{,}674\,49 \sqrt{\frac{\Sigma \alpha^2_\lambda}{n-m}},$$

gdzie $\alpha_\lambda = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ są różnicami pomiędzy najprawdopodobniejszemi i otrzymanemi ze spostrzeżeń wartościami ilości ξ; n jest liczbą dokonanych spostrzeżeń, a m liczbą niewiadomych $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$.

Gdy wreszcie przez $D_{1,1}$, $D_{2,2}$, $D_{3,3}$, ... $D_{m,m}$, w ogóle przez $D_{\mu,\mu}$, oznaczymy minory wyznacznika D z (64), otrzymane przez opuszczenie pierwszego wiersza i pierwszej kolumny, drugiego wiersza i drugiej kolumny, i t. d., w ogóle μ-go wiersza i μ-ej kolumny, to błędy średnie i prawdopodobne znalezionych wartości na q_μ wyrażają się w ogóle przez:

$$\text{(XXV)} \quad . \; . \quad s(q_\mu) = s(\xi)\sqrt{\frac{D_{\mu,\mu}}{D}} = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\alpha^2_\lambda}{n-m}} \cdot \sqrt{\frac{D_{\mu,\mu}}{D}},$$

$$\text{(XXVI)} \quad p(q_\mu) = p(\xi)\sqrt{\frac{D_{\mu,\mu}}{D}} = \pm 0{,}674\,49\sqrt{\frac{\Sigma\alpha^2_\lambda}{n-m}} \cdot \sqrt{\frac{D_{\mu,\mu}}{D}}.$$

W art. 28-ym podaliśmy przykład obliczenia najprawdopodobniejszych wartości na q_1 i q_2 w wyrażeniu

$$(\alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad q_1\varepsilon + q_2\varepsilon^2 = \xi.$$

Równaniami normalnemi Gauss'a były:

$$55{,}446\, q_1 + 186{,}93\, q_2 = 147{,}01$$

$$186{,}93\, q_1 + 669{,}01\, q_2 = 457{,}38,$$

dla których wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} 55{,}446, & 186{,}93 \\ 186{,}93, & 669{,}01 \end{vmatrix} = 2\,151{,}10.$$

Minory: $D_{1,1} = 669{,}01$, $D_{2,2} = 55{,}446$; zatem

$$\frac{D_{1,1}}{D} = \frac{669{,}01}{2\,151{,}10} = 0{,}311, \quad \frac{D_{2,2}}{D} = \frac{55{,}446}{2\,151{,}10} = 0{,}026,$$

a ponieważ, z tabelki drugiej kol. 5-ej w art. 28-ym,

$\Sigma\alpha^2_\lambda = 0{,}525\,9$ i oprócz tego $n = 8$, $m = 2$, więc

$$s^2(\xi) = \frac{0{,}525\,9}{8-2} = 0{,}087\,65.$$

Stąd $s(\xi) = \pm\, 0{,}296$, $p(\xi) = \pm\, 0{,}674\,49 \times 0{,}296 = \pm\, 0{,}199\,6$ i dalej:

$s^2(q_1) = 0{,}087\,65 \times 0{,}311 = 0{,}027\,259$, $s(q_1) = \pm\, 0{,}165$, $p(q_1) = \pm\, 0{,}111$;

$s^2(q_2) = 0{,}087\,65 \times 0{,}026 = 0{,}002\,279$, $s(q_2) = \pm\, 0{,}047$, $p(q_2) = \pm\, 0{,}032$.

Gdy znamy błędy średnie niewiadomych q, możemy z łatwością wyznaczyć ich miary dokładności, zupełnie w taki sam sposób, jak to czyniliśmy w rozdziale III-cim, wzór (23'). Znając znów miary dokładności, możemy obrachować ważności, w sposób podany w art. 20-ym. Na podstawie wyżej powiedzianego, miarą dokładności dla q_μ jest

$$\text{(XXIX)} \ldots \quad h(q_\mu) = \frac{1}{s(q_\mu)\sqrt{2}} = \frac{1}{s(\xi)\sqrt{\dfrac{2D_{\mu,\mu}}{D}}} = \frac{1}{s(\xi)} \cdot \sqrt{\frac{D}{2D_{\mu,\mu}}}.$$

Ważnością znalezionej na q_μ wartości jest ilość proporcyonalna do

$$\text{(XXX)} \quad \ldots\ldots \quad h^2(q_\mu) = \frac{D}{2D_{\mu,\mu} \, . \, s^2(\xi)},$$

a ponieważ $2s^2(\xi)$ jest wspólne dla wszystkich q, przeto za ważność każdego z nich można przyjąć $\frac{D}{D_{\mu,\mu}}$, t. j. można położyć

$$\text{(XXX')} \quad \ldots\ldots \quad g(q_\mu) = \frac{D}{D_{\mu,\mu}}.$$

Tak np. w powyżej podanym przykładzie:

$$g(q_1) = \frac{D}{D_{1,1}} = \frac{2\,151,10}{669,01} = 3,216,$$

$$g(q_2) = \frac{D}{D_{2,2}} = \frac{2\,151,10}{55,446} = 38,796.$$

32. Przykład. Dajmy, że dla wyrażenia

$$(\alpha) \quad \ldots\ldots \quad q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3 = \xi$$

$$(\beta) \left\{ \begin{array}{llll} \text{przy } z_1, z_2, z_3 = 1, 0, 0 & \text{otrzymaliśmy ze spostrzeżeń} & \xi = 0,4 \\ \quad \text{„} \quad z_1, z_2, z_3 = 0, 1, 0 & \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & \xi = 0,8 \\ \quad \text{„} \quad z_1, z_2, z_3 = 0, 0, 1 & \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & \xi = 0,8 \\ \quad \text{„} \quad z_1, z_2, z_3 = 1, -1, 0 & \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & \xi = 0,7 \\ \quad \text{„} \quad z_1, z_2, z_3 = -1, 0, 1 & \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & \xi = 2,8 \\ \quad \text{„} \quad z_1, z_2, z_3 = 0, 1, -1 & \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & \xi = 1,1. \end{array} \right.$$

Gdy te wartości podstawimy w (α), wypadną następujące równania przybliżone *):

$$(\gamma) \quad \ldots\ldots \quad \left\{\begin{array}{l} 1 \,.\, q_1 + 0 \,.\, q_2 + 0 \,.\, q_3 = 0{,}4 \\ 0 \,.\, q_1 + 1 \,.\, q_2 + 0 \,.\, q_3 = 0{,}8 \\ 0 \,.\, q_1 + 0 \,.\, q_2 + 1 \,.\, q_3 = 0{,}8 \\ 1 \,.\, q_1 - 1 \,.\, q_2 + 0 \,.\, q_3 = 0{,}7 \\ -1 \,.\, q_1 + 0 \,.\, q_2 + 1 \,.\, q_3 = 2{,}8 \\ 0 \,.\, q_1 + 1 \,.\, q_2 - 1 \,.\, q_3 = 1{,}1, \end{array}\right.$$

z których, po oznaczeniu, jak zwykle, spółczynników przy q_1, q_2 i q_3 w ogóle przez a, b, c, a stron drugich przez l, otrzymujemy tabelkę, pomieszczoną na str. 89, zaś przy jej pomocy:

$$\Sigma ab = \frac{\Sigma\,(a+b)^2 - \Sigma a^2 - \Sigma b^2}{2} = -1,$$

$$\Sigma ac = \frac{\Sigma\,(a+c)^2 - \Sigma a^2 - \Sigma c^2}{2} = -1,$$

$$\Sigma al = \frac{\Sigma\,(a+l)^2 - \Sigma a^2 - \Sigma l^2}{2} = -1{,}70,$$

$$\Sigma bc = \frac{\Sigma\,(b+c)^2 - \Sigma b^2 - \Sigma c^2}{2} = -1,$$

$$\Sigma bl = \frac{\Sigma\,(b+l)^2 - \Sigma b^2 - \Sigma l^2}{2} = +1{,}20,$$

$$\Sigma cl = \frac{\Sigma\,(c+l)^2 - \Sigma c^2 - \Sigma l^2}{2} = +2{,}50$$

i dla sprawdzenia

$$\begin{aligned} \Sigma\,(a+b+c+l)^2 = 17{,}98 = \Sigma a^2 + \Sigma b^2 + \Sigma c^2 + \Sigma l^2 + 2\,(\Sigma ab + \Sigma ac \\ + \Sigma al + \Sigma bc + \Sigma bl + \Sigma cl) = 3 + 3 + 3 + 10{,}98 \\ + 2\,(-1 - 1 - 1{,}70 - 1 + 1{,}20 + 2{,}50) = 19{,}98 \\ + 2\,.\,(-1) = 19{,}98 - 2 = 17{,}98. \end{aligned}$$

---

*) Równania błędów pomijamy, gdyż w praktyce dogodniej jest używać równań przybliżonych (p. koniec art. 26-go).

a	a^2	b	b^2	c	c^2	$a+b$	$(a+b)^2$	$a+c$	$(a+c)^2$	$b+c$	$(b+c)^2$	l	l^2	$a+l$	$(a+l)^2$	$b+l$	$(b+l)^2$	$c+l$	$(c+l)^2$	$a+b+c+l$	$(a+b+c+l)^2$
1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0,4	0,16	1,4	1,96	0,4	0,16	0,4	0,16	1,4	1,96
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0,8	0,64	0,8	0,64	1,8	3,24	0,8	0,64	1,8	3,24
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0,8	0,64	0,8	0,64	0,8	0,64	1,8	3,24	1,8	3,24
1	1	—1	1	0	0	0	0	1	1	—1	1	0,7	0,49	1,7	2,89	—0,3	0,09	0,7	0,49	0,7	0,49
—1	1	0	0	1	1	—1	1	0	0	1	1	2,8	7,84	1,8	3,24	2,8	7,84	3,8	14,44	2,8	7,84
0	0	1	1	—1	1	1	1	—1	1	0	0	1,1	1,21	1,1	1,21	2,1	4,41	0,1	0,01	1,1	1,21
1	3	1	3	1	3	2	4	2	4	2	4	6,6	10,98	7,6	10,58	7,6	16,38	7,6	18,98	9,6	17,98

Mamy więc następujące trzy równania normalne Gauss'a:

$$(\delta) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} 3\,.\,q_1 - 1\,.\,q_2 - 1\,.\,q_3 = -1{,}7, \\ -1\,.\,q_1 + 3\,.\,q_2 - 1\,.\,q_3 = 1{,}2, \\ -1\,.\,q_1 - 1\,.\,q_2 + 3\,.\,q_3 = 2{,}5, \end{cases}$$

z których obliczamy wyznacznik zasadniczy

$$D = \begin{vmatrix} 3, & -1, & -1 \\ -1, & 3, & -1 \\ -1, & -1, & 3 \end{vmatrix} = 16$$

oraz wyznaczniki:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1{,}7, & -1, & -1 \\ 1{,}2, & 3, & -1 \\ 2{,}5, & -1, & 3 \end{vmatrix} = 1{,}2, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 3, & -1{,}7, & -1 \\ -1, & 1{,}2, & -1 \\ -1, & 2{,}5, & 3 \end{vmatrix} = 12{,}8,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3, & -1, & -1{,}7 \\ -1, & 3, & 1{,}2 \\ -1, & -1, & 2{,}5 \end{vmatrix} = 18{,}0$$

i minory:

$$D_{1,1} = \begin{vmatrix} 3, & -1 \\ -1, & 3 \end{vmatrix} = 8, \qquad D_{2,2} = \begin{vmatrix} 3, & -1 \\ -1, & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$D_{3,3} = \begin{vmatrix} 3, & -1 \\ -1, & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

Wypada stąd:

$$(\varepsilon) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} q_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1{,}2}{16} = 0{,}075, \\ q_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{12{,}8}{16} = 0{,}800, \\ q_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{18{,}0}{16} = 1{,}125. \end{cases}$$

Gdy (ε) podstawimy w strony pierwsze równań (γ) i obliczymy ich wartości, to otrzymamy tabliczkę

ξ z obliczenia	ξ ze spostrzeżeń	α_λ	α^2_λ
0,075	0,4	−0,325	0,105 6
0,800	0,8	0	0
1,125	0,8	+0,325	0,105 6
−0,725	0,7	−1,425	2,030 7
1,050	2,8	−1,750	3,062 5
−0,325	1,1	−1,425	2,030 7
+2,000	6,6	−4,600	7,335 1

a z niej

$$s(\xi) = \pm \sqrt{\frac{7,3351}{6-3}} = \pm 1,56,$$

$$p(\xi) = \pm 1,56 \times 0,674\,49 = \pm 1,05;$$

$$s(q_1) = s(q_2) = s(q_3) = \pm 1,56 \sqrt{\frac{D_{\mu,\mu}}{D}} = \pm 1,56 \sqrt{\frac{8}{16}} = \pm 1,10,$$

$$p(q_1) = p(q_2) = p(q_3) = \pm 1,10 \times 0,674\,49 = \pm 0,74.$$

Wreszcie, gdy (ε) podstawimy w (α), najprawdopodobniejszem wyrażeniem na ξ, przy wartościach (β) na z, jest

$$(\alpha') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 0,075\, z_1 + 0,8\, z_2 + 1,125\, z_3 = \xi.$$

ROZDZIAŁ V.

WYZNACZENIE NIEWIADOMYCH, ZAWARTYCH W FUNKCYI, KTÓREJ WARTOŚCI OTRZYMUJEMY ZE SPOSTRZEŻEŃ.

(Dokończenie).

33. Przypadek spostrzeżeń niejednakowo dokładnych. W rozdziale poprzednim stale zakładaliśmy, że spostrzeżenia, dokonywane nad wielkością ξ, są jednakowo dokładne i dlatego w art. 27-ym za miarę dokładności wszystkich tych spostrzeżeń przyjęliśmy stałą ilość h.

Jeżeli teraz założymy, że spostrzeżenia rzeczone są dokonywane z różną dokładnością i gdy miary dokładności spostrzeżeń, za pomocą których otrzymujemy $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ na ξ w wyrażeniu

$$(59) \quad \ldots \quad q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3 + \ldots + q_m z_m = \xi,$$

oznaczymy przez $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n$, to, na zasadzie podobnego, jak w art. 27-ym, rozumowania, prawdopodobieństwem zejścia się błędów $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ jest

$$W = y_{x_1} \cdot y_{x_2} \ldots y_{x_n} = \frac{h_1 . h_2 \ldots . h_n}{(\sqrt{\pi})^n} \cdot e^{-(h^2{}_1 x^2{}_1 + h^2{}_2 x^2{}_2 + \ldots + h^2{}_n x^2{}_n)} \, dx_1 . dx_2 \ldots dx_n.$$

Prawdopodobieństwo to przybiera największą wartość przy takich wartościach $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$, które czynią wykładnik

$$(79) \quad \ldots \quad h^2{}_1 x^2{}_1 + h^2{}_2 x^2{}_2 + h^2{}_3 x^2{}_3 + \ldots + h^2{}_n x^2{}_n$$

najmniejszością, czyli, które zamieniają pochodne cząstkowe wyrażenia (79), wzięte względem $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$, na zero.

mag Bayssa

Po podstawieniu w (79) za $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ wyrażeń:

$$
\text{(XXI)} \ldots \left\{
\begin{array}{l}
x_1 = q_1 a_1 + q_2 b_1 + q_3 c_1 + \ldots + q_m k_1 - l_1, \\
x_2 = q_1 a_2 + q_2 b_2 + q_3 c_2 + \ldots + q_m k_2 - l_2, \\
x_3 = q_1 a_3 + q_2 b_3 + q_3 c_3 + \ldots + q_m k_3 - l_3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n = q_1 a_n + q_2 b_n + q_3 c_n + \ldots + q_m k_n - l_n,
\end{array}
\right.
$$

wypada

$$
\begin{aligned}
& h^2_1 x^2_1 + h^2_2 x^2_2 + h^2_3 x^2_3 + \ldots + h^2_n x^2_n \\
= {} & h^2_1 (q_1 a_1 + q_2 b_1 + q_3 c_1 + \ldots + q_m k_1 - l_1)^2 \\
+ {} & h^2_2 (q_1 a_2 + q_2 b_2 + q_3 c_2 + \ldots + q_m k_2 - l_2)^2 \\
+ {} & h^2_3 (q_1 a_3 + q_2 b_3 + q_3 c_3 + \ldots + q_m k_3 - l_3)^2 \\
+ {} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ {} & h^2_n (q_1 a_n + q_2 b_n + q_3 c_n + \ldots + q_m k_n - l_n)^2,
\end{aligned}
$$

a stąd, tą samą drogą, jak w art. 27-ym, przychodzimy do równań normalnych Gauss'a:

$$
\text{(XXXI)} . \left\{
\begin{array}{l}
q_1 \Sigma h^2 a^2 + q_2 \Sigma h^2 ab + q_3 \Sigma h^2 ac + \ldots + q_m \Sigma h^2 ak = \Sigma h^2 al, \\
q_1 \Sigma h^2 ba + q_2 \Sigma h^2 b^2 + q_3 \Sigma h^2 bc + \ldots + q_m \Sigma h^2 bk = \Sigma h^2 bl, \\
q_1 \Sigma h^2 ca + q_2 \Sigma h^2 cb + q_3 \Sigma h^2 c^2 + \ldots + q_m \Sigma h^2 ck = \Sigma h^2 cl, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_1 \Sigma h^2 ka + q_2 \Sigma h^2 kb + q_3 \Sigma h^2 kc + \ldots + q_m \Sigma h^2 k^2 = \Sigma h^2 kl,
\end{array}
\right.
$$

z których można obliczyć najprawdopodobniejsze wartości na q, o ile znamy $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n$.

Lecz kwadraty miar dokładności, jak wiemy, są proporcyonalne do ważności spostrzeżeń, gdy więc dla ważności zachowamy dawne oznaczenia $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n$, mamy

$$
(80) \quad \ldots \frac{h^2_1}{g_1} = \frac{h^2_2}{g_2} = \frac{h^2_3}{g_3} = \ldots = \frac{h^2_n}{g_n} = \text{stałej.}
$$

Podstawiwszy (80) w (XXXI), otrzymujemy nową, lecz dającą te same, co i równania (XXXI), rezultaty, postać równań normalnych Gauss'a w zastosowaniu do spostrzeżeń o różnej dokładności, mianowicie:

$$
(\text{XXXI}')\quad \left\{\begin{array}{l}
q_1\Sigma ga^2 + q_2\Sigma gab + q_3\Sigma gac + \ldots + q_m\Sigma gak = \Sigma gal,\\
q_1\Sigma gba + q_2\Sigma gb^2 + q_3\Sigma gbc + \ldots + q_m\Sigma gbk = \Sigma gbl,\\
q_1\Sigma gca + q_2\Sigma gcb + q_3\Sigma gc^2 + \ldots + q_m\Sigma gck = \Sigma gcl,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
q_1\Sigma gka + q_2\Sigma gkb + q_3\Sigma gkc + \ldots + q_m\Sigma gk^2 = \Sigma gkl,
\end{array}\right.
$$

gdzie, zamiast kwadratów miar dokładności, wchodzą ważności spostrzeżeń.

Podstawowym wyznacznikiem dla rozwiązywania tych równań jest oczywiście

$$
(81)\quad D = \left|\begin{array}{l}
\Sigma ga^2,\ \Sigma gab,\ \Sigma gac,\ \ldots,\ \Sigma gak\\
\Sigma gba,\ \Sigma gb^2,\ \Sigma gbc,\ \ldots,\ \Sigma gbk\\
\Sigma gca,\ \Sigma gcb,\ \Sigma gc^2,\ \ldots,\ \Sigma gck\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Sigma gka,\ \Sigma gkb,\ \Sigma gkc,\ \ldots,\ \Sigma gk^2
\end{array}\right| \ \text{z kolumną zastępczą} \left\{\begin{array}{l}
\Sigma gal\\
\Sigma gbl\\
\Sigma gcl\\
\ldots\\
\Sigma gkl.
\end{array}\right.
$$

34. Błędy niewiadomych, przy spostrzeżeniach o różnej dokładności. Pomnóżmy pierwsze z równań błędów (XXI) przez $\sqrt{g_1}$, drugie przez $\sqrt{g_2}$, trzecie przez $\sqrt{g_3}$, ..., ostatnie przez $\sqrt{g_n}$, wtedy otrzymamy równania:

$$
(\text{XXXII})\quad \left\{\begin{array}{l}
x_1\sqrt{g_1} = q_1a_1\sqrt{g_1} + q_2b_1\sqrt{g_1} + \ldots + q_mk_1\sqrt{g_1} - l_1\sqrt{g_1},\\
x_2\sqrt{g_2} = q_1a_2\sqrt{g_2} + q_2b_2\sqrt{g_2} + \ldots + q_mk_2\sqrt{g_2} - l_2\sqrt{g_2},\\
x_3\sqrt{g_3} = q_1a_3\sqrt{g_3} + q_2b_3\sqrt{g_3} + \ldots + q_mk_3\sqrt{g_3} - l_3\sqrt{g_3},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n\sqrt{g_n} = q_1a_n\sqrt{g_n} + q_2b_n\sqrt{g_n} + \ldots + q_mk_n\sqrt{g_n} - l_n\sqrt{g_n},
\end{array}\right.
$$

z których wprost można wypisać równania normalne (XXXI') zupełnie tak samo, jak wypisywaliśmy równania (XXII) z (XXI). Przez to jednak, według art. 20-go, błędy o różnych ważnościach $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n$ zamieniliśmy na błędy o ważności równej jednostce, czyli, gdy na miejsce równań (XXI) podstawimy równania (XXXII), możemy postępować w dalszym ciągu tak samo, jakby rezultatami jednakowo dokładnych spostrzeżeń były $l_1\sqrt{g_1}$, $l_2\sqrt{g_2}$, $l_3\sqrt{g_3}, \ldots, l_n\sqrt{g_n}$ z błędami $x_1\sqrt{g_1}$, $x_2\sqrt{g_2}$, $x_3\sqrt{g_3}, \ldots, x_n\sqrt{g_n}$; skutkiem zaś tego, całe rozumowanie art. 30-go utrzymuje się w obecnym przypadku bez żadnej zmiany, byle wszędzie równania (XXI) były zastępowane przez (XXXII), równania (XXII) przez (XXXI') i wyznacznik (64) przez (81). Utrzymują się więc w swej mocy wyprowadzone w art. 30-ym wzory (XXV) i (XXVI) na błędy niewiadomych $q_1, q_2, q_3, \ldots q_m$ z tą tylko różnicą, że zamiast (XXVII) i (XXVIII) należy obecnie przyjąć

$$\text{(XXXIII)} \ \ldots\ldots \quad s(\xi) = \pm\sqrt{\frac{\Sigma g_\lambda \alpha^2_\lambda}{n-m}} \quad \text{oraz}$$

$$\text{(XXXIV)} \ \ldots\ldots \quad p(\xi) = \pm\, 0{,}674\,49\sqrt{\frac{\Sigma g_\lambda \alpha^2_\lambda}{n-m}},$$

ponieważ dawne α_λ przeobrażają się teraz w $\alpha_\lambda\sqrt{g_\lambda}$.

Wypada stąd:

$$\text{(XXXV)} \ \ldots\ldots \quad s(q_\mu) = \pm\sqrt{\frac{\Sigma g_\lambda \alpha^2_\lambda}{n-m}}\cdot\sqrt{\frac{D_{\mu,\mu}}{D}},$$

$$\text{(XXXVI)} \ \ldots \quad p(q_\mu) = \pm\, 0{,}674\,49\sqrt{\frac{\Sigma g_\lambda \alpha^2_\lambda}{n-m}}\cdot\sqrt{\frac{D_{\mu,\mu}}{D}},$$

gdzie $D_{\mu,\mu}$ są minorami pierwszego rzędu wyznacznika D, wyrażonego pod postacią (81).

35. Przykład. Niech będzie wyrażenie

$$(\alpha) \ \ldots\ldots \quad q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3 + q_4 z_4 = \xi,$$

dla którego mamy:

$$(\beta)\left\{\begin{array}{llr}
\text{przy } z_1, z_2, z_3, z_4 = 1,\ 0,\ 0,\ 0; & \xi = 1{,}67 & \text{oznacz. z 24 spostrz.} \\
\text{,, } z_1, z_2, z_3, z_4 = 0,\ 1,\ 0,\ 0; & \xi = 1{,}34 & \text{,, ,, 16 ,,} \\
\text{,, } z_1, z_2, z_3, z_4 = 0,\ 0,\ 1,\ 0; & \xi = 1{,}76 & \text{,, ,, 32 ,,} \\
\text{,, } z_1, z_2, z_3, z_4 = 0,\ 0,\ 0,\ 1; & \xi = 1{,}84 & \text{,, ,, 12 ,,} \\
\text{,, } z_1, z_2, z_3, z_4 = 1, -1,\ 0,\ 0; & \xi = 1{,}44 & \text{,, ,, 8 ,,} \\
\text{,, } z_1, z_2, z_3, z_4 = -1,\ 0,\ 1,\ 0; & \xi = 1{,}13 & \text{,, ,, 24 ,,} \\
\text{,, } z_1, z_2, z_3, z_4 = 1,\ 0,\ 0, -1; & \xi = 1{,}97 & \text{,, ,, 4 ,,} \\
\text{,, } z_1, z_2, z_3, z_4 = 0, -1,\ 1,\ 0; & \xi = 1{,}86 & \text{,, ,, 16 ,,} \\
\text{,, } z_1, z_2, z_3, z_4 = 0,\ 1,\ 0, -1; & \xi = 1{,}06 & \text{,, ,, 32 ,,} \\
\text{,, } z_1, z_2, z_3, z_4 = 0,\ 0,\ 1, -1; & \xi = 1{,}68 & \text{,, ,, 8 ,,}
\end{array}\right.$$

Chodzi o najprawdopodobniejsze wartości niewiadomych q_1, q_2, q_3 i q_4.

Po podstawieniu (β) w (α) otrzymujemy następujące równania przybliżone:

$$(\gamma)\left\{\begin{array}{lr}
1 . q_1 + 0 . q_2 + 0 . q_3 + 0 . q_4 = 1{,}67 & \text{z 24 spostrzeżeń} \\
0 . q_1 + 1 . q_2 + 0 . q_3 + 0 . q_4 = 1{,}34 & \text{z 16 ,,} \\
0 . q_1 + 0 . q_2 + 1 . q_3 + 0 . q_4 = 1{,}76 & \text{z 32 ,,} \\
0 . q_1 + 0 . q_2 + 0 . q_3 + 1 . q_4 = 1{,}84 & \text{z 12 ,,} \\
1 . q_1 - 1 . q_2 + 0 . q_3 + 0 . q_4 = 1{,}44 & \text{z 8 ,,} \\
-1 . q_1 + 0 . q_2 + 1 . q_3 + 0 . q_4 = 1{,}13 & \text{z 24 ,,} \\
1 . q_1 + 0 . q_2 + 0 . q_3 - 1 . q_4 = 1{,}97 & \text{z 4 ,,} \\
0 . q_1 - 1 . q_2 + 1 . q_3 + 0 . q_4 = 1{,}86 & \text{z 16 ,,} \\
0 . q_1 + 1 . q_2 + 0 . q_3 - 1 . q_4 = 1{,}06 & \text{z 32 ,,} \\
0 . q_1 + 0 . q_2 + 1 . q_3 - 1 . q_4 = 1{,}68 & \text{z 8 ,,}
\end{array}\right.$$

Ponieważ wszystkie liczby spostrzeżeń są wielokrotne względem 4, ważności zaś są ilościami względnemi, przeto, unikając wielkich liczb, możemy przyjąć za ważności danych spostrzeżeń:

$$(\delta) \ldots . g_1 = 6,\ g_2 = 4,\ g_3 = 8,\ g_4 = 3,\ g_5 = 2,\ g_6 = 6,$$
$$g_7 = 1,\ g_8 = 4,\ g_9 = 8,\ g_{10} = 2.$$

Z (γ) i (δ) wypadają trzy tabelki, pomieszczone na str. 98 i 99. Z tabelki 3-ej znajdujemy

$$\Sigma gab = \frac{\Sigma g(a+b)^2 - \Sigma ga^2 - \Sigma gb^2}{2} = \frac{29{,}00 - 15{,}00 - 18{,}00}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

i podobnie:

$$\Sigma gac = -6,\ \Sigma gad = -1,\ \Sigma gal = 8{,}09,$$
$$\Sigma gbc = -4,\ \Sigma gbd = -8,\ \Sigma gbl = 3{,}52,$$
$$\Sigma gcd = -2,\ \Sigma gcl = 31{,}662,\ \Sigma gdl = -8{,}29$$

oraz, dla sprawdzenia działań,

$$\begin{aligned}\Sigma g(a+b+c+d+l)^2 = \Sigma ga^2 &+ \Sigma gb^2 + \Sigma gc^2 + \Sigma gd^2 + \Sigma gl^2 + 2\,(\Sigma gab \\ &+ \Sigma gac + \Sigma gad + \Sigma gal + \Sigma gbc + \Sigma gbd + \Sigma gbl \\ &+ \Sigma gcd + \Sigma gcl + \Sigma gdl) = 193{,}978\,9,\end{aligned}$$

t. j. tyleż, co w ostatniej kolumnie tabelki 3-ej.

Mamy więc następujące równania normalne Gauss'a:

$$(\varepsilon) \ldots \left\{\begin{aligned} 15\,q_1 - 2\,q_2 - 6\,q_3 - 1\,q_4 &= 8{,}09 \\ -2\,q_1 + 18\,q_2 - 4\,q_3 - 8\,q_4 &= 3{,}52 \\ -6\,q_1 - 4\,q_2 + 20\,q_3 - 2\,q_4 &= 31{,}66 \\ -1\,q_1 - 8\,q_2 - 2\,q_3 + 14\,q_4 &= -8{,}29, \end{aligned}\right.$$

dla których wyznacznikiem zasadniczym jest

$$(\varsigma) \ldots D = \begin{vmatrix} 15, & -2, & -6, & -1 \\ -2, & 18, & -4, & -8 \\ -6, & -4, & 20, & -2 \\ -1, & -8, & -2, & 14 \end{vmatrix} = 38\,608$$

i następnie:

$$(\varsigma') \ldots D_1 = \begin{vmatrix} 8{,}09, & -2, & -6, & -1 \\ 3{,}52, & 18, & -4, & -8 \\ 31{,}66, & -4, & 20, & -2 \\ -8{,}29, & -8, & -2, & 14 \end{vmatrix} = 64\,448{,}16,$$

Tab. 1.

a	b	c	d	$a+b$	$a+c$	$a+d$	$b+c$	$b+d$	$c+d$
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0	1	1
1	−1	0	0	0	1	1	−1	−1	0
−1	0	1	0	−1	0	−1	1	0	1
1	0	0	−1	1	1	0	0	−1	−1
0	−1	1	0	−1	1	0	0	−1	1
0	1	0	−1	1	0	−1	1	0	−1
0	0	1	−1	0	1	−1	1	−1	0
2	0	4	-2	2	6	0	4	—2	2

Tab. 2.

a^2	b^2	c^3	d^2	$(a+b)^2$	$(a+c)^2$	$(a+d)^2$	$(b+c)^2$	$(b+d)^2$	$(c+d)^2$
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	0
4	4	4	4	6	6	6	6	6	6

Tab. 3.

ga^2	gb^2	gc^2	gd^2	$g(a+b)^2$	$g(a+c)^2$	$g(a+d)^2$	$g(b+c)^2$	$g(b+d)^2$	$g(c+d)^2$
6	0	0	0	6	6	6	0	0	0
0	4	0	0	4	0	0	4	4	0
0	0	8	0	0	8	0	8	0	8
0	0	0	3	0	0	3	0	3	3
2	2	0	0	0	2	2	2	2	0
6	0	6	0	6	0	6	6	0	6
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	4	4	0	4	4	0	0	4	4
0	8	0	8	8	0	8	8	0	8
0	0	2	2	0	2	2	2	2	0
15	18	20	14	29	23	27	30	16	30

Tab. 1.

l	$a+l$	$b+l$	$c+l$	$d+l$	$a+b+c+d+l$
1,67	2,67	1,67	1,67	1,67	2,67
1,34	1,34	2,34	1,34	1,34	2,34
1,76	1,76	1,76	2,76	1,76	2,76
1,84	1,84	1,84	1,84	2,84	2,84
1,44	2,44	0,44	1,44	1,44	1,44
1,13	0,13	1,13	2,13	1,13	1,13
1,97	2,97	1,97	1,97	0,97	1,97
1,86	1,86	0,86	2,86	1,86	1,86
1,06	1,06	2,06	1,06	0,06	1,06
1,68	1,68	1,68	2,68	0,68	1,68
15,75	17,75	15,75	19,75	13,75	19,75

Tab. 2.

l^2	$(a+l)^2$	$(b+l)^2$	$(c+l)^2$	$(d+l)^2$	$(a+b+c+d+l)^2$	g
2,788 9	7,128 9	2,788 9	2,788 9	2,788 9	7,128 9	6
1,795 6	1,795 6	5,475 6	1,795 6	1,795 6	5,475 6	4
3,097 6	3,097 6	3,097 6	7,617 6	3,097 6	7,617 6	8
3,385 6	3,385 6	3,385 6	3,385 6	8,065 6	8,065 6	3
2,073 6	5,953 6	0,193 6	2,073 6	2,073 6	2,073 6	2
1,276 9	0,016 9	1,276 9	4,536 9	1,276 9	1,276 9	6
3,880 9	8,820 9	3,880 9	3,880 9	0,940 9	3,880 9	1
3,459 6	3,459 6	0,739 6	8,179 6	3,459 6	3,459 6	4
1,123 6	1,123 6	4,243 6	1,123 6	0,003 6	1,123 6	8
2,822 4	2,822 4	2,822 4	7,182 4	0,462 4	2,822 4	2
25,704 7	37,604 7	27,904 7	42,564 7	23,964 7	42,924 7	—

Tab. 3.

gl^2	$g(a+l)^2$	$g(b+l)^2$	$g(c+l)^2$	$g(d+l)^2$	$g(a+b+c+d+l)^2$
16,733 4	42,773 4	16,733 4	16,733 4	16,733 4	42,773 4
7,182 4	7,182 4	21,902 4	7,182 4	7,182 4	21,902 4
24,780 8	24,780 8	24,780 8	60,944 8	24,780 8	60,944 8
10,156 8	10,156 8	10,156 8	10,156 8	24,196 8	24,196 8
4,147 2	11,907 2	0,387 2	4,147 2	4,147 2	4,147 2
7,661 4	0,101 4	7,661 4	27,221 4	7,661 4	7,661 4
3,880 9	8,820 9	3,880 9	3,880 9	0,940 9	3,880 9
13,838 4	13,838 4	2,958 4	32,718 4	13,838 4	13,838 4
8,988 8	8,988 8	33,948 8	8,988 8	0,028 8	8,988 8
5,644 8	5,644 8	5,644 8	14,364 8	0,924 8	5,644 8
103,014 9	134,194 9	128,054 9	186,338 9	100,434 9	193,978 9

$$
(\varsigma') \ldots \left\{
\begin{aligned}
D_2 &= \begin{vmatrix} 15, & 8{,}09, & -6, & -1 \\ -2, & 3{,}52, & -4, & -8 \\ -6, & 31{,}66, & 20, & -2 \\ -1, & -8{,}29, & -2, & 14 \end{vmatrix} = 43\,762{,}08, \\
D_3 &= \begin{vmatrix} 15, & -2, & 8{,}09, & -1 \\ -2, & 18, & 3{,}52, & -8 \\ -6, & -4, & 31{,}66, & -2 \\ -1, & -8, & -8{,}29, & 14 \end{vmatrix} = 91\,180{,}80, \\
D_4 &= \begin{vmatrix} 15, & -2, & -6, & 8{,}09 \\ -2, & 18, & -4, & 3{,}52 \\ -6, & -4, & 20, & 31{,}66 \\ -1, & -8, & -2, & -8{,}29 \end{vmatrix} = 19\,741{,}56
\end{aligned}
\right.
$$

oraz minory:

$$
(\varsigma'') \left\{
\begin{aligned}
D_{1,1} &= \begin{vmatrix} 18, & -4, & -8 \\ -4, & 20, & -2 \\ -8, & -2, & 14 \end{vmatrix} = 3\,336, \quad D_{2,2} = \begin{vmatrix} 15, & -6, & -1 \\ -6, & 20, & -2 \\ -1, & -2, & 14 \end{vmatrix} = 3\,592, \\
D_{3,3} &= \begin{vmatrix} 15, & -2, & -1 \\ -2, & 18, & -8 \\ -1, & -8, & 14 \end{vmatrix} = 2\,714, \quad D_{4,4} = \begin{vmatrix} 15, & -2, & -6 \\ -2, & 18, & -4 \\ -6, & -4, & 20 \end{vmatrix} = 4\,340.
\end{aligned}
\right.
$$

Wypada stąd:

$$
(\eta) \ldots \left\{
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{D_1}{D} = \frac{64\,448{,}16}{38\,608} = 1{,}67, \\
q_2 &= \frac{D_2}{D} = \frac{43\,762{,}08}{38\,608} = 1{,}13, \\
q_3 &= \frac{D_3}{D} = \frac{91\,180{,}80}{38\,608} = 2{,}36, \\
q_4 &= \frac{D_4}{D} = \frac{19\,741{,}56}{38\,608} = 0{,}51.
\end{aligned}
\right.
$$

Podstawiwszy powyższe wartości (η) w (γ), otrzymujemy tabelkę

ξ z obliczenia	ξ ze spostrzeżeń	α_λ	α^2_λ	g_λ	$g_\lambda \alpha^2_\lambda$
1,67	1,67	0	0	6	0
1,13	1,34	−0,21	0,0441	4	0,1764
2,36	1,76	+0,60	0,3600	8	2,8800
0,51	1,84	−1,33	1,7689	3	5,3067
0,54	1,44	−0,90	0,8100	2	1,6200
0,69	1,13	−0,44	0,1936	6	1,1616
1,16	1,97	−0,81	0,6561	1	0,6561
1,23	1,86	−0,63	0,3969	4	1,5876
0,62	1,06	−0,44	0,1936	8	1,5488
1,85	1,68	+0,17	0,0289	2	0,0578
11,76	15,75	−3,99	—	—	14,9950

z niej zaś

$$(\vartheta) \ldots\ldots s(\xi) = \pm \sqrt{\frac{14{,}9950}{10-4}} = \pm \sqrt{\frac{14{,}9950}{6}}$$

$$= \pm \sqrt{2{,}4992} = \pm\ 1{,}58.$$

Oprócz tego:

$$\frac{D_{1,1}}{D} = 0{,}0864, \quad \frac{D_{2,2}}{D} = 0{,}0930, \quad \frac{D_{3,3}}{D} = 0{,}0703, \quad \frac{D_{4,4}}{D} = 0{,}1124.$$

Znajdujemy stąd błędy średnie:

$$s(q_1) = \pm\ 1{,}58 \sqrt{0{,}0864} = \pm\ 1{,}58 \times 0{,}29 = \pm\ 0{,}46$$

$$s(q_2) = \pm\ 1{,}58 \sqrt{0{,}0930} = \pm\ 1{,}58 \times 0{,}30 = \pm\ 0{,}47$$

$$s(q_3) = \pm\ 1{,}58 \sqrt{0{,}0703} = \pm\ 1{,}58 \times 0{,}27 = \pm\ 0{,}43$$

$$s(q_4) = \pm\ 1{,}58 \sqrt{0{,}1124} = \pm\ 1{,}58 \times 0{,}34 = \pm\ 0{,}54$$

i błędy prawdopodobne:

$$p(q_1) = \pm 0{,}46 \times 0{,}674\,49 = \pm 0{,}31$$

$$p(q_2) = \pm 0{,}47 \times 0{,}674\,49 = \pm 0{,}32$$

$$p(q_3) = \pm 0{,}43 \times 0{,}674\,49 = \pm 0{,}29$$

$$p(q_4) = \pm 0{,}54 \times 0{,}674\,49 = \pm 0{,}36.$$

36. Przypadek równań warunkowych. Zdarza się czasami, że niewiadome $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$, wchodzące do wyrażenia (59), dla których szukamy wartości najprawdopodobniejszych, muszą czynić zadość pewnym równaniom warunkowym (o kształcie liniowym):

$$(82) \ldots \left\{ \begin{array}{l} A_1 q_1 + B_1 q_2 + C_1 q_3 + \ldots + K_1 q_m = N_1, \\ A_2 q_1 + B_2 q_2 + C_2 q_3 + \ldots + K_2 q_m = N_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_\nu q_1 + B_\nu q_2 + C_\nu q_3 + \ldots + K_\nu q_m = N_\nu, \end{array} \right.$$

w liczbie mniejszej od m, czyli przy $\nu < m$, tak, że szukane wartości niewiadomych $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$ winny nietylko sprowadzać do najmniejszości sumę kwadratów błędów (XXI), ale nadto jeszcze powinny ściśle sprawdzać równania warunkowe (82).

Ponieważ równań warunkowych mamy mniej, aniżeli niewiadomych, zatem z (82) możemy ν ilości q wyrazić przez pozostałe $m-\nu$; gdy zaś tak wyrażone q w liczbie ν podstawimy w (XXI), względnie w (60), pozostanie nam do obrachowania tylko $m-\nu$ niewiadomych, co uskutecznimy takim samym sposobem, jak to uczyniliśmy w art. 28-ym lub 33-im, stosownie do tego, czy spostrzeżenia, dokonane nad wielkością ξ, są jednakowo lub niejednakowo dokładne.

Znalazłszy najprawdopodobniejsze wartości na $m-\nu$ niewiadomych, podstawiamy je w (82) i wyznaczamy pozostałe niewiadome, razem więc mieć będziemy najprawdopodobniejsze wartości wszystkich m niewiadomych $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$, które ściśle czynić będą zadość równaniom warunkowym (82).

Co się tyczy błędów średnich i prawdopodobnych, to $s(\xi)$ i $p(\xi)$ obliczają się w sposób zwykły, przez podstawienie wartości najprawdopodobniejszych za q w równania przybliżone i prowadzenie dalszego rachunku zupełnie w taki sam sposób, jak to czyniliśmy w art. 30-ym, względnie 34-ym *). Błędy zaś średnie i prawdopodobne najprzód obliczonych $m-\nu$ niewiadomych q oznaczają się z $s(\xi)$ i $p(\xi)$ również w sposób znany nam z powyżej powołanych artykułów — za pomocą wyznacznika zasadniczego, ułożonego ze spółczynników strony lewej równań normalnych Gauss'a o $m-\nu$ niewiadomych oraz z jego pierwszych minorów, branych względem elementów, stojących na odpowiednich miejscach przekątni.

Aby obrachować błędy średnie i prawdopodobne pozostałych ν niewiadomych q, należy z równań warunkowych (82) wyznaczyć różne od poprzednio wyrugowanych niewiadome, podstawić otrzymane wyrażenia w dane równania przybliżone i ułożyć z nich nowe równania normalne Gauss'a. Ze spółczynników stron lewych tych nowych równań normalnych wypisać wyznacznik D oraz jego minory i przez wypadłe stąd $\sqrt{\frac{D_{\mu,\mu}}{D}}$ pomnożyć $s(\xi)$ i $p(\xi)$. Iloczyny, jak wiemy, będą błędami średnimi i prawdopodobnymi pozostałych obecnie z wyrugowania $m-\nu$ niewiadomych q.

Gdyby powtórne rugowanie nie wyczerpało jeszcze wszystkich m niewiadomych, trzeba działanie powtarzać dalej, póki nie znajdziemy błędów prawdopodobnych dla wszystkich niewiadomych q, których wartości najprawdopodobniejsze zostały już poprzednio obliczone (p. uzupełnienie VIII).

37. Przykład. Wyrażenie

$$(\alpha) \quad . \; . \; . \; . \quad q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3 + q_4 z_4 + q_5 z_5 + q_6 z_6 = \xi$$

przybiera ze spostrzeżeń:

$$(\beta) \; . \; . \; . \left\{ \begin{array}{llll} \text{przy} & z_1, z_2, \ldots, z_6 = 1, 0, 0, 0, 0, 0 & \text{wartość} & \xi = 0{,}4 \\ \;\;" & z_1, z_2, \ldots, z_6 = 0, 1, 0, 0, 0, 0 & \;\;" & \xi = 0{,}8 \\ \;\;" & z_1, z_2, \ldots, z_6 = 0, 0, 1, 0, 0, 0 & \;\;" & \xi = 0{,}8 \\ \;\;" & z_1, z_3, \ldots, z_6 = 0, 0, 0, 1, 0, 0 & \;\;" & \xi = 0{,}7 \\ \;\;" & z_1, z_2, \ldots, z_6 = 0, 0, 0, 0, 1, 0 & \;\;" & \xi = 2{,}8 \\ \;\;" & z_1, z_2, \ldots . z_6 = 0, 0, 0, 0, 0, 1 & \;\;" & \xi = 1{,}1 \end{array} \right.$$

*) Za mianownik $n-m$ we wzorach (XXVII), (XXVIII), (XXV) i (XXVI) w art. 31-ym oraz w (XXXIII) — (XXXVI) w art. 34-ym należy tu, oczywiście, brać $n-(m-\nu) = n + \nu - m$.

przyczem niewiadome q winny czynić zadość równaniom warunkowym:

$$(\gamma) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} q_1 - q_2 - q_4 = 0, \\ -q_1 + q_3 - q_5 = 0, \\ q_2 - q_3 - q_6 = 0. \end{cases}$$

Podstawiając (β) w (α) otrzymujemy następujące sześć równań przybliżonych, w których wyrazy z czynnikami zero, dla krótkości, opuszczamy:

$$(\delta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} q_1 = 0{,}4 \\ q_2 = 0{,}8 \\ q_3 = 0{,}8 \\ q_4 = 0{,}7 \\ q_5 = 2{,}8 \\ q_6 = 1{,}1, \end{cases}$$

a po wyrugowaniu z (δ), za pomocą równań warunkowych (γ), ilości q_4, q_5 i q_6, znajdziemy równania:

$$(\delta') \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} q_1 = 0{,}4 \\ q_2 = 0{,}8 \\ q_3 = 0{,}8 \\ q_1 - q_2 = 0{,}7 \\ -q_1 + q_3 = 2{,}8 \\ q_2 - q_3 = 1{,}1. \end{cases}$$

Z równań (δ'), identycznych z równaniami (γ) w art. 32-im, wypadają równania normalne Gauss'a:

$$(\varepsilon) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} 3 \,.\, q_1 - 1 \,.\, q_2 - 1 \,.\, q_3 = -1{,}7 \\ -1 \,.\, q_1 + 3 \,.\, q_2 - 1 \,.\, q_3 = 1{,}2 \\ -1 \,.\, q_1 - 1 \,.\, q_2 + 3 \,.\, q_3 = 2{,}5 \end{cases}$$

i z nich otrzymujemy:

$$(\varsigma) \quad \ldots\ldots \quad q_1 = 0{,}075, \quad q_2 = 0{,}800, \quad q_3 = 1{,}125.$$

Gdy wartości (ς) podstawimy w (γ), wypadnie:

$$(\varsigma') \qquad q_4 = -0{,}725, \quad q_5 = 1{,}050, \quad q_6 = -0{,}325.$$

Podstawiwszy dalej (ς) i (ς') w (δ), mamy:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -0{,}325, & \alpha^2_1 &= 0{,}105\,6\\
\alpha_2 &= 0{,}000, & \alpha^2_2 &= 0{,}000\,0\\
\alpha_3 &= 0{,}325, & \alpha^2_3 &= 0{,}105\,6\\
\alpha_4 &= -1{,}425, & \alpha^2_4 &= 2{,}030\,7\\
\alpha_5 &= -1{,}750, & \alpha^2_5 &= 3{,}062\,5\\
\alpha_6 &= -1{,}425, & \alpha^2_6 &= 2{,}030\,7\\
& & \Sigma\alpha^2 &= 7{,}335\,1.
\end{aligned}$$

Stąd:

$$s(\xi) = \pm\sqrt{\frac{7{,}335\,1}{(6+3)-6}} = \pm\sqrt{\frac{7{,}335\,1}{9-6}} = \pm\,1{,}56,$$

$$p(\xi) = \pm\,1{,}56 \times 0{,}674\,49 = \pm\,1{,}05.$$

Że zaś z (ε)

$$D = \begin{vmatrix} 3, & -1, & -1\\ -1, & 3, & -1\\ -1, & -1, & 3 \end{vmatrix} = 16$$

oraz:

$$D_{1,1} = \begin{vmatrix} 3, & -1\\ -1, & 3 \end{vmatrix} = 8, \qquad D_{2,2} = \begin{vmatrix} 3, & -1\\ -1, & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$D_{3,3} = \begin{vmatrix} 3, & -1\\ -1, & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

przeto:

$$s(q_1) = s(q_2) = s(q_3) = \pm\,1{,}56\sqrt{\frac{D_{\mu,\mu}}{D}} = \pm\,1{,}56\sqrt{\frac{8}{16}}$$

$$= \pm\,1{,}56 \times 0{,}707 = \pm\,1{,}10,$$

$$p(q_1) = p(q_2) = p(q_3) = \pm\,1{,}05\sqrt{\frac{8}{16}} = \pm\,1{,}10 \times 0{,}674\,49 = \pm\,0{,}74.$$

Chodzi jeszcze o błędy prawdopodobne znalezionych wartości na q_4, q_5 i q_6. W tym celu z równań (γ) wyznaczamy

$$q_1 = q_2 + q_4, \quad q_3 = q_2 - q_6, \quad q_5 = - q_4 - q_6.$$

Po podstawieniu tych wyrażeń w (δ), wypadają równania:

$$(\delta'') \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} q_2 + q_4 &= 0,4 \\ q_2 &= 0,8 \\ q_2 - q_6 &= 0{,}8 \\ q_4 &= 0,7 \\ -q_4 - q_6 &= 2,8 \\ q_6 &= 1,1, \end{aligned} \right.$$

a z nich równania Gauss'a:

$$(\delta) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} 3 \,.\, q_2 + 1 \,.\, q_4 - 1 \,.\, q_6 &= 2, \\ 1 \,.\, q_2 + 3 \,.\, q_4 + 1 \,.\, q_6 &= -1,7, \\ -1 \,.\, q_2 + 1 \,.\, q_4 + 3 \,.\, q_6 &= -2,5, \end{aligned} \right.$$

z których na q_2, q_4 i q_6, a więc, za pomocą równań (γ), i na q_1, q_3 i q_5 wypadają te same, co i poprzednio, najprawdopodobniejsze wartości (ς) i (ς').

Ponieważ zaś tutaj

$$D = \begin{vmatrix} 3, & 1, & -1 \\ 1, & 3, & 1 \\ -1, & 1, & 3 \end{vmatrix} = 16 \text{ oraz } D_{2,2} = D_{4,4} = D_{6,6} = 8,$$

zatem jest także:

$$s(q_4) = s(q_6) = \pm 1,10,$$
$$p(q_4) = p(q_6) = \pm 0,74.$$

W podobny sposób, za pomocą jeszcze jednego rugowania, otrzymamy:

$$s(q_5) = \pm 1,10, \quad p(q_5) = \pm 0,74,$$

t. j. błąd średni i prawdopodobny dla najprawdopodobniejszych wartości wszystkich sześciu niewiadomych q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 i q_6 są jednakie, mianowicie błąd średni $= \pm 1,10$, błąd prawdopodobny $= \pm 0,74$.

Najprawdopodobniejszem wyrażeniem (α) na ξ jest

$$(\alpha') \quad . \quad 0{,}075\, z_1 + 0{,}800\, z_2 + 1{,}125\, z_3 - 0{,}725\, z_4 + 1{,}05\, z_5 - 0{,}325\, z_6 = \xi.$$

38. Przypadek równań nieliniowych. W artykułach poprzednich zakładaliśmy stale, że wyrażenie

$$(58) \quad . \quad . \quad . \quad f(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m;\, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m) = \xi,$$

z którego wypadają równania przybliżone, posiada kształt liniowy. Jeżeli warunkowi temu wyrażenie (58) nie czyni zadość, wtedy, pomijając drogi spekulacyjne, kształt jego sprowadzić można do postaci liniowej za pomocą wzoru Taylor'a, zastosowanego do funkcyi o wielu zmiennych.

W tym celu załóżmy, tak samo jak w art. 26, że

przy $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m = a_1, b_1, c_1, \ldots, k_1$ otrzym. ze spostrzeż. $\xi = l_1$

„ $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m = a_2, b_2, c_2, \ldots, k_2$ „ „ „ $\xi = l_2$

„ $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m = a_3, b_3, c_3, \ldots, k_3$ „ „ „ $\xi = l_3$

. . . .

„ $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m = a_n, b_n, c_n, \ldots, k_n$ „ „ „ $\xi = l_n$

i podstawmy te rezultaty w (58). Wypadną stąd następujące równania przybliżone:

$$(83) \quad \begin{cases} f(a_1, b_1, c_1, \ldots, k_1;\, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m) = f_1(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m) = l_1, \\ f(a_2, b_2, c_2, \ldots, k_2;\, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m) = f_2(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m) = l_2, \\ f(a_3, b_3, c_3, \ldots, k_3;\, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m) = f_3(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m) = l_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(a_n, b_n, c_n, \ldots, k_n;\, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m) = f_n(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m) = l_n. \end{cases}$$

Z tych równań obrachujmy najprzód przybliżone wartości na $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$ i oznaczmy je przez $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m$. Ponieważ są to przybliżone tylko wartości na q, zatem prawdziwe różnią się od $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m$ o pewne niewielkie ilości $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_m$, tak, że w równaniach (83) należy podstawić

$$(84) \quad q_1 = E_1 + \varepsilon_1,\; q_2 = E_2 + \varepsilon_2,\; q_3 = E_3 + \varepsilon_3, \ldots, q_m = E_m + \varepsilon_m.$$

Po uskutecznieniu podstawień, trzeba oczywiście szukać najprawdopodobniejszych wartości na $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_m$, albowiem znalazłszy je i podstawiwszy w (84), mieć będziemy najprawdopodobniejsze wartości niewiadomych $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$.

Powstałe, z podstawień, strony pierwsze równań (83) rozwińmy według wzoru Taylor'a, wówczas, w miejsce (83), mieć będziemy równania:

$$
(85) \quad \left\{
\begin{aligned}
& f_1(E_1+\varepsilon_1, E_2+\varepsilon_2, E_3+\varepsilon_3, \ldots, E_m+\varepsilon_m) = f_1(E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m) \\
& \quad + \frac{\partial f_1}{\partial E_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f_1}{\partial E_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f_1}{\partial E_3}\varepsilon_3 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial E_m}\varepsilon_m + R_1 = l_1, \\
& f_2(E_1+\varepsilon_1, E_2+\varepsilon_2, E_3+\varepsilon_3, \ldots, E_m+\varepsilon_m) = f_2(E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m) \\
& \quad + \frac{\partial f_2}{\partial E_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f_2}{\partial E_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f_2}{\partial E_3}\varepsilon_3 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial E_m}\varepsilon_m + R_2 = l_2, \\
& f_3(E_1+\varepsilon_1, E_2+\varepsilon_2, E_3+\varepsilon_3, \ldots, E_m+\varepsilon_m) = f_3(E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m) \\
& \quad + \frac{\partial f_3}{\partial E_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f_3}{\partial E_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f_3}{\partial E_3}\varepsilon_3 + \ldots + \frac{\partial f_3}{\partial E_m}\varepsilon_m + R_3 = l_3, \\
& \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& f_n(E_1+\varepsilon_1, E_2+\varepsilon_2, E_3+\varepsilon_3, \ldots, E_m+\varepsilon_m) = f_n(E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m) \\
& \quad + \frac{\partial f_n}{\partial E_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f_n}{\partial E_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f_n}{\partial E_3}\varepsilon_3 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial E_m}\varepsilon_m + R_n = l_n,
\end{aligned}
\right.
$$

w których $f_\mu(E_1, E_2, E_3, .., E_m)$ jakoteż $\frac{\partial f_\mu}{\partial E_\lambda}$ są wiadome, a $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n$ przedstawiają sumy wyrazów, mnożonych przez wyższe od 1-ki potęgi oraz przez iloczyny ilości ε. Jeżeli przyjmiemy ε za bardzo małe, co zależy od ścisłości, z jaką obrachowaliśmy E, to $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n$, jako również bardzo małe, możemy opuścić. Gdy nadto, dla krótkości, oznaczymy:

$$
(86) \quad \ldots \left\{
\begin{aligned}
& l_1 - f_1(E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m) = L_1, \\
& l_2 - f_2(E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m) = L_2, \\
& l_3 - f_3(E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m) = L_3, \\
& \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& l_n - f_n(E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m) = L_n,
\end{aligned}
\right.
$$

to równania (85) przejdą na:

$$(83') \ldots \left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial f_1}{\partial E_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f_1}{\partial E_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f_1}{\partial E_3}\varepsilon_3 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial E_m}\varepsilon_m = L_1, \\
\frac{\partial f_2}{\partial E_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f_2}{\partial E_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f_2}{\partial E_3}\varepsilon_3 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial E_m}\varepsilon_m = L_2, \\
\frac{\partial f_3}{\partial E_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f_3}{\partial E_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f_3}{\partial E_3}\varepsilon_3 + \ldots + \frac{\partial f_3}{\partial E_m}\varepsilon_m = L_3, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\frac{\partial f_n}{\partial E_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f_n}{\partial E_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f_n}{\partial E_3}\varepsilon_3 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial E_m}\varepsilon_m = L_n,
\end{array}\right.$$

które są liniowe względem poprawek $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_m$, czyli posiadają kształt zupełnie taki sam, jak równania (60) w art. 26 względem $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$.

W podobny sposób postąpić należy i z równaniami warunkowemi, jeżeli te nie posiadają postaci liniowej. Jeżeliby np. równania warunkowe nie posiadały kształtu (82), lecz postać nieliniową:

$$(82') \quad \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l}
\varphi_1(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m) = 0, \\
\varphi_2(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m) = 0, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\varphi_\nu(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m) = 0,
\end{array}\right.$$

to, podstawiwszy w równaniach (82') za $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$ wyrażenia (84), możemy je, przy pomocy wzoru Taylor'a, zastąpić przez:

$$(82'') \ . \left\{\begin{array}{l}
\Phi_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial E_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial E_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial E_3}\varepsilon_3 + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial E_m}\varepsilon_m = 0, \\
\Phi_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial E_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial E_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial E_3}\varepsilon_3 + \ldots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial E_m}\varepsilon_m = 0, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\Phi_\nu + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial E_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial E_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial E_3}\varepsilon_3 + \ldots + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial E_m}\varepsilon_m = 0,
\end{array}\right.$$

gdzie:

$$(87) \quad \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l}
\Phi_1 = \varphi_1(E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m), \\
\Phi_2 = \varphi_2(E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m), \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\Phi_\nu = \varphi_\nu(E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m).
\end{array}\right.$$

Widzimy zatem, że istotnie równaniom nieliniowym, zarówno przybliżonym jak i warunkowym, możemy nadać postać liniową, a temsamem odnośne zagadnienia możemy zawsze sprowadzić do jednego z poprzednio rozpatrywanych przypadków.

Gdyby na $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_m$ wypadły wartości względnie duże, znaczyłoby to, żeśmy na $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m$ przyjęli za mało przybliżone wartości i dlatego otrzymane rezultaty

$$q_1 = E_1 + \varepsilon_1, \quad q_2 = E_2 + \varepsilon_2, \quad q_3 = E_3 + \varepsilon_3, \ldots, q_m = E_m + \varepsilon_m$$

należy przyjąć nie za najprawdopodobniejsze, lecz za nowe, bardziej do prawdziwych przybliżone wartości

$$E_1 + \varepsilon_1 = E'_1, \quad E_2 + \varepsilon_2 = E'_2, \quad E_3 + \varepsilon_3 = E'_3, \ldots, E_m + \varepsilon_m = E'_m$$

i podstawiwszy w (83)

$$q_1 = E'_1 + \varepsilon'_1, \quad q_2 = E'_2 + \varepsilon'_2, \quad q_3 = E'_3 + \varepsilon'_3, \ldots, q_m = E'_m + \varepsilon'_m,$$

szukać następnie nowych poprawek $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \ldots, \varepsilon'_m$ zupełnie w taki sam sposób, jak to czyniliśmy, szukając $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_m$.

Manipulacyę podobną powtarzać trzeba dotąd, póki na szukane poprawki nie otrzymamy dostatecznie małych wartości.

39. Ogólne znaczenie artykułu 36. Ponieważ art. 38-my sprowadza się, przez zamianę równań nieliniowych na liniowe, do art. 36-go, ten ostatni zatem stanowi najogólniejszą treść metody najmniejszych kwadratów, wszystkie bowiem poprzednie przypadki są tylko przypadkami szczególnymi tej formy ogólnej.

Jeżeli w art. 36-ym założymy $\nu = 0$, czyli, gdy przyjmiemy, że równań warunkowych niema, wtedy mieć będziemy treść art. 33-go i 34-go, o ile w art. 36-ym przyjmiemy g_λ różne od jedności.

Jeżeli założymy nadto $g_\lambda = 1$, wypadnie treść całego rozdziału IV-go.

Gdy wreszcie przyjmiemy $m = 1$ i spółczynnik przy q równy jedności, otrzymamy cały rozdział III-ci z uwzględnieniem spostrzeżeń jednakowo lub niejednakowo dokładnych, stosownie do tego, czy g_λ są równe, czy też różne od jedności.

Weźmy np. przypadek ostatni przy spostrzeżeniach niejednakowo dokładnych. Wtedy (XXXI') przechodzą na

$$q_1 \Sigma g_\lambda = \Sigma g_\lambda l_\lambda,$$

a stąd

$$(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad q_1 = \frac{\Sigma g_\lambda l_\lambda}{\Sigma g_\lambda}, \text{ t. j. wzór (XIV).}$$

Według wzoru (XXXV), błąd średni

$$(\beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad s(q_1) = \pm \sqrt{\frac{\Sigma g_\lambda \alpha^2_\lambda}{n-1}} \cdot \sqrt{\frac{D_{1,1}}{D}}.$$

Lecz wzór (81) przechodzi obecnie na

$$(\gamma) \quad D = \Sigma g_\lambda, \text{ co można napisać w kształcie } \begin{vmatrix} \Sigma g_\lambda, & 0, & 0, \ldots \\ 0, & 1, & 0, \ldots \\ 0, & 0, & 1, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Stąd

$$D_{1,1} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, \ldots \\ 0, & 1, & 0, \ldots \\ 0, & 0, & 1, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 1,$$

skutkiem czego

$$(\beta') \quad s(q_1) = \pm \sqrt{\frac{\Sigma g_\lambda \alpha^2_\lambda}{n-1}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\Sigma g_\lambda}} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma g_\lambda \alpha^2_\lambda}{(n-1)\,\Sigma g_\lambda}},$$

co znamy już z rozdziału III-go, jako wzór (XV').

Gdy $g = 1$, z (α) wypada znana zasada średniej arytmetycznej

$$(\alpha') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad q_1 = \frac{\Sigma l_\lambda}{n},$$

zaś z (β') otrzymujemy wzór

$$(\beta'') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad s(q_1) = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \alpha^2_\lambda}{n(n-1)}},$$

identyczny z wzorem (VIII) w art. 19-ym.

ROZDZIAŁ VI.

ZASTOSOWANIA METODY NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW.

40. Uwagi ogólne. Przykłady, podane w rozdz. IV-ym i V-ym, nie stanowiły zastosowań rozwijanych tam prawideł, tylko ich ilustracyę, objaśniającą sposób prowadzenia rachunku, gdy mamy gotowe równania przybliżone i, ewentulanie, równania warunkowe. Właściwe zastosowania polegają głównie na ułożeniu owych równań przybliżonych i warunkowych z danych, zawartych w zagadnieniu, które rozwiązać pragniemy. Gdy ta część pracy jest załatwiona, ciąg dalszy nie przedstawia już żadnych trudności, gdyż dokonywa się według ściśle określonych, w pomienionych rozdziałach, reguł, stanowiących jakby rodzaj narzędzia, dającego możność wykonania działań na uprzednio przygotowanym materyale.

Dla tak określonych zastosowań wszakże niema prawideł ogólnych; trafność postępowania zależy od inteligencyi, doświadczenia i od wprawy rachującego, jak to zresztą w ogóle ma miejsce przy stosowaniu wszelkiego rodzaju reguł teoretycznych do praktyki.

Jedynem prawidłem ogólnem, jakie tutaj podać możemy, jest rada, aby przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań, doskonale zdać sobie sprawę zarówno z samego zagadnienia jak i ze środków, którymi posługiwać się możemy, wtedy bowiem sama refleksya nad tymi czynnikami najczęściej wskaże nam właściwą drogę postępowania.

Zastosowania metody najmniejszych kwadratów bywają liczne i dosyć wielostronne. Przy jej pomocy możemy wyrównywać spostrzeżenia; możemy, w sposób przybliżony, rozwiązywać różne zagadnienia analityczne i, co jest, mojem zdaniem, bardzo ważne, możemy nadawać formę analityczną zjawiskom, których zmiany tylko ze spostrzeżeń poznajemy.

W rozdziale niniejszym podamy kilka rodzajów zastosowań, mogących służyć za wskazówkę i przykład, jak w pewnych razach postępować należy; resztę pozostawić trzeba własnej pomysłowości badacza.

41. Wyrównywanie spostrzeżeń. Zaczynamy od wyrównywania spostrzeżeń.

Zadanie 1. Niech będzie punkt O (fig. 3) oraz cztery inne punkty: A, B, C, D, tworzące kierunki OA, OB, OC, OD, dla których znajdujemy drogą spostrzeżeń:

$$(\alpha)\ \ldots \left\{\begin{aligned} AOB &= 48^{\circ}17'1'',4 \\ AOC &= 96^{\circ}52'16'',8 \\ AOD &= 152^{\circ}54'6'',8 \\ BOC &= 48^{\circ}35'14'',3 \\ BOD &= 104^{\circ}37'7'',8 \\ COD &= 56^{\circ}1'48'',9. \end{aligned}\right.$$

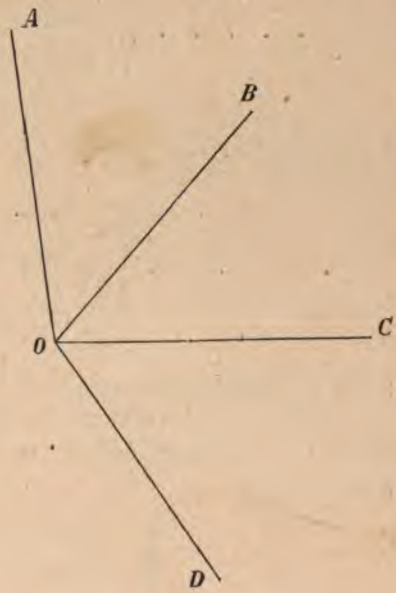

fig. 3.

Ponieważ rezultaty pomiarów nie są wolne od błędów, więc prawdziwe wielkości pomienionych kątów są różne od otrzymanych ze spostrzeżeń; oznaczmy je przez:

$$(\beta)\ \ldots\ldots \left\{\begin{aligned} AOB &= 48^{\circ}17'1'',4 + \varepsilon_1 \\ AOC &= 96^{\circ}52'16'',8 + \varepsilon_2 \\ AOD &= 152^{\circ}54'6'',8 + \varepsilon_3 \\ BOC &= 48^{\circ}35'14'',3 + \varepsilon_4 \\ BOD &= 104^{\circ}37'7'',8 + \varepsilon_5 \\ COD &= 56^{\circ}1'48'',9 + \varepsilon_6, \end{aligned}\right.$$

gdzie ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5 i ε_6 są szukanemi poprawkami wymierzonych kątów, dającemi przybliżone równania:

$$(\gamma) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 &= 0 \\ \varepsilon_2 &= 0 \\ \varepsilon_3 &= 0 \\ \varepsilon_4 &= 0 \\ \varepsilon_5 &= 0 \\ \varepsilon_6 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Oprócz tego widocznie być powinno także:

$$(\delta) \quad \left\{ \begin{aligned} BOC &= AOC - AOB \\ BOD &= AOD - AOB \\ COD &= AOD - AOC, \end{aligned} \right.$$

z czego, po podstawieniu (β) w (δ), wypadają trzy równania warunkowe:

$$(\delta') \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - 1{,}1 &= 0 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + 2{,}4 &= 0 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_6 - 1{,}1 &= 0, \end{aligned} \right.$$

którym szukane poprawki ε ściśle zadość uczynić powinny.

Gdy wyprowadzone z (δ') wyrażenia na ε_4, ε_5 i ε_6 podstawimy w (γ), otrzymamy, w miejsce (γ), następujące równania przybliżone:

$$(\gamma') \quad \left\{ \begin{aligned} 1\,.\,\varepsilon_1 + 0\,.\,\varepsilon_2 + 0\,.\,\varepsilon_3 &= 0 \\ 0\,.\,\varepsilon_1 + 1\,.\,\varepsilon_2 + 0\,.\,\varepsilon_3 &= 0 \\ 0\,.\,\varepsilon_1 + 0\,.\,\varepsilon_2 + 1\,.\,\varepsilon_3 &= 0 \\ 1\,.\,\varepsilon_1 - 1\,.\,\varepsilon_2 + 0\,.\,\varepsilon_3 &= 1{,}1 \\ -1\,.\,\varepsilon_1 + 0\,.\,\varepsilon_2 + 1\,.\,\varepsilon_3 &= 2{,}4 \\ 0\,.\,\varepsilon_1 + 1\,.\,\varepsilon_2 - 1\,.\,\varepsilon_3 &= 1{,}1. \end{aligned} \right.$$

Prowadzą one do równań normalnych Gauss'a kształtu:

$$(\varepsilon) \quad \dots \quad \left\{ \begin{aligned} 3 \,.\, \varepsilon_1 - 1 \,.\, \varepsilon_2 - 1 \,.\, \varepsilon_3 &= -1{,}3 \\ -1 \,.\, \varepsilon_1 + 3 \,.\, \varepsilon_2 - 1 \,.\, \varepsilon_3 &= 0 \\ -1 \,.\, \varepsilon_1 - 1 \,.\, \varepsilon_2 + 3 \,.\, \varepsilon_3 &= 1{,}3, \end{aligned} \right.$$

które, razem z równaniami warunkowemi:

$$(\delta') \quad \dots\dots \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4 &= 1{,}1 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \varepsilon_5 &= -2{,}4 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_6 &= 1{,}1, \end{aligned} \right.$$

wyznaczają najprawdopodobniejsze wartości szukanych poprawek. Wypada mianowicie:

$$(\varsigma) \quad \dots \quad \varepsilon_1 = -0{,}325, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = 0{,}325, \quad \varepsilon_4 = 1{,}425,$$
$$\varepsilon_5 = -1{,}750, \quad \varepsilon_6 = 1{,}425,$$

czyli, najprawdopodobniejszemi wielkościami mierzonych kątów są:

$$(\beta') \quad \dots \quad \left\{ \begin{aligned} AOB &= 48^\circ 17' 1'',4 - 0'',325 = 48^\circ 17' 1'',075 \\ AOC &= 96^\circ 52' 16'',8 + 0 = 96^\circ 52' 16'',8 \\ AOD &= 152^\circ 54' 6'',8 + 0'',325 = 152^\circ 54' 7'',125 \\ BOC &= 48^\circ 35' 14'',3 + 1'',425 = 48^\circ 35' 15'',725 \\ BOD &= 104^\circ 37' 7'',8 - 1'',750 = 104^\circ 37' 6'',050 \\ COD &= 56^\circ 1' 48'',9 + 1'',425 = 56^\circ 1' 50'',325. \end{aligned} \right.$$

Podstawiwszy następnie (ς) w (γ), znajdujemy

α_λ	α^2_λ
−0,325	0,105 6
0	0
0,325	0,105 6
1,425	2 030 6
−1,750	3,062 5
1,425	2,030 6
$\Sigma\alpha^2_\lambda$ = 7,334 9	

Stąd: $$s(\xi) = \pm \sqrt{\frac{7,3349}{9-6}} = \pm 1,56,$$

$$p(\xi) = \pm 1,56 \times 0,67449 = \pm 1,05.$$

Z (ε) otrzymujemy dalej

$$D = \begin{vmatrix} 3, & -1, & -1 \\ -1, & 3, & -1 \\ -1, & -1, & 3 \end{vmatrix} = 16 \quad \text{oraz} \quad D_{1,1} = D_{2,2} = D_{3,3} = 8.$$

Skutkiem tego:

$$s(\varepsilon_1) = s(\varepsilon_2) = s(\varepsilon_3) = \pm 1,56 \sqrt{\frac{8}{16}} = \pm 1,10,$$

$$p(\varepsilon_1) = p(\varepsilon_2) = p(\varepsilon_3) = \pm 1,05 \sqrt{\frac{8}{16}} = \pm 1,10 \times 0,67449 = \pm 0\,74.$$

Zupełnie do tych samych rezultatów przyjdziemy, rugując którekolwiek inne przyrostki z równań (γ) za pośrednictwem (δ'), czyli błędem prawdopodobnym dla najprawdopodobniejszych wartości wszystkich kątów (β') jest $\pm 0'',74$.

Zadanie 2. Celem zniwelowania powierzchni trójkąta ABD (fig. 4), wymierzono różnice poziomów:

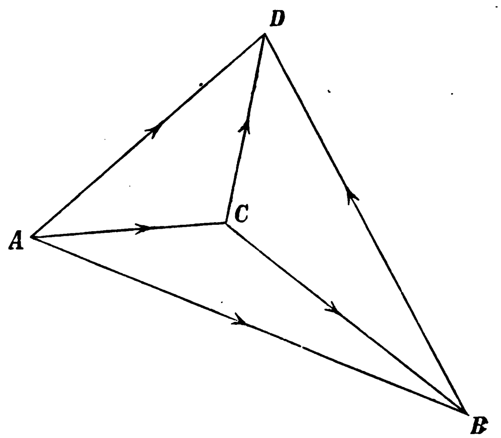

fig. 4.

$$
(\alpha)\ .\ \left\{
\begin{array}{lllll}
1) & \text{pomiędzy } A \text{ i } B = 10^m{,}883\,8 & \text{z ważnością} & g_1 = 34 \\
2) & \quad " \quad A \text{ i } C = 4^m{,}678\,3 & \text{z} \quad " & g_2 = 108 \\
3) & \quad " \quad A \text{ i } D = 18^m{,}559\,5 & \text{z} \quad " & g_3 = 49 \\
4) & \quad " \quad C \text{ i } B = 6^m{,}196\,3 & \text{z} \quad " & g_4 = 66 \\
5) & \quad " \quad C \text{ i } D = 13^m{,}867\,7 & \text{z} \quad " & g_5 = 78 \\
6) & \quad " \quad B \text{ i } D = 7^m{,}665\,7 & \text{z} \quad " & g_6 = 60.
\end{array}
\right.
$$

Znaleźć najprawdopodobniejsze różnice pomiędzy wyniesieniami tych czterech punktów.

Strzałki oznaczają kierunek wznoszenia się gruntu.

Jeżeli szukane poprawki oznaczymy przez ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5 i ε_6, to prawdziwe różnice wzniesień wynoszą:

$$
(\beta)\ \ldots\ldots \left\{
\begin{array}{l}
A,B = 10^m{,}883\,8 + \varepsilon_1 \\
A,C = 4^m{,}678\,3 + \varepsilon_2 \\
A,D = 18^m{,}559\,5 + \varepsilon_3 \\
C,B = 6^m{,}196\,3 + \varepsilon_4 \\
C,D = 13^m{,}867\,7 + \varepsilon_5 \\
B,D = 7^m{,}665\,7 + \varepsilon_6
\end{array}
\right.
$$

skutkiem czego, za równania przybliżone można przyjąć:

$$
(\gamma)\ \ldots\ldots \left\{
\begin{array}{lll}
\varepsilon_1 = 0 & \text{z ważnością} & g_1 = 34 \\
\varepsilon_2 = 0 & \quad " & g_2 = 108 \\
\varepsilon_3 = 0 & \quad " & g_3 = 49 \\
\varepsilon_4 = 0 & \quad " & g_4 = 66 \\
\varepsilon_5 = 0 & \quad " & g_5 = 78 \\
\varepsilon_6 = 0 & \quad " & g_6 = 60.
\end{array}
\right.
$$

Oprócz tego, oczywiście, być powinno:

$$
(\delta)\ \ldots\ldots \left\{
\begin{array}{l}
A,C + C,B = A,B \\
A,C + C,D = A,D \\
A,B + B,D = A,D,
\end{array}
\right.
$$

albo, po podstawieniu w (δ) odpowiednich wyrażeń z (β), mamy, oprócz równań (γ), trzy równania warunkowe:

$$(\delta') \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - 0{,}009\,2 &= 0 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_5 - 0{,}013\,5 &= 0 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \varepsilon_6 - 0{,}010\,0 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Podstawiwszy w (γ) wyprowadzone z (δ') wyrażenia na ε_4, ε_5 i ε_6, otrzymujemy nową postać równań niezupełnie ścisłych:

$$(\gamma') \, . \left\{ \begin{array}{rlr} 1\,.\,\varepsilon_1 + 0\,.\,\varepsilon_2 + 0\,.\,\varepsilon_3 = 0 & \text{z ważnością} & g_1 = 34 \\ 0\,.\,\varepsilon_1 + 1\,.\,\varepsilon_2 + 0\,.\,\varepsilon_3 = 0 & \quad \text{"} & g_2 = 108 \\ 0\,.\,\varepsilon_1 + 0\,.\,\varepsilon_2 + 1\,.\,\varepsilon_3 = 0 & \quad \text{"} & g_3 = 49 \\ -1\,.\,\varepsilon_1 + 1\,.\,\varepsilon_2 + 0\,.\,\varepsilon_3 = 0{,}009\,2 & \quad \text{"} & g_4 = 66 \\ 0\,.\,\varepsilon_1 + 1\,.\,\varepsilon_2 - 1\,.\,\varepsilon_3 = 0{,}013\,5 & \quad \text{"} & g_5 = 78 \\ 1\,.\,\varepsilon_1 + 0\,.\,\varepsilon_2 - 1\,.\,\varepsilon_3 = 0{,}010\,0 & \quad \text{"} & g_6 = 60, \end{array} \right.$$

które, drogą zwyczajną, prowadzą do równań normalnych Gauss'a:

$$(\varepsilon) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} 160\,\varepsilon_1 - 66\,\varepsilon_2 - 60\,\varepsilon_3 &= -\,0{,}007\,2 \\ -66\,\varepsilon_1 + 252\,\varepsilon_2 - 78\,\varepsilon_3 &= 1{,}660\,2 \\ -60\,\varepsilon_1 - 78\,\varepsilon_2 + 187\,\varepsilon_3 &= -\,1{,}653\,0. \end{aligned} \right.$$

Równania (ε), w połączeniu z równaniami warunkowemi:

$$(\delta') \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 &= 0{,}009\,2 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_5 &= 0{,}013\,5 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \varepsilon_6 &= 0{,}010\,0, \end{aligned} \right.$$

dają najprawdopodobniejsze poprawki:

$$(\varsigma) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\,0{,}001\,31 \\ \varepsilon_2 &= 0{,}003\,88 \\ \varepsilon_3 &= -\,0{,}007\,64 \\ \varepsilon_4 &= 0{,}004\,01 \\ \varepsilon_5 &= 0{,}001\,98 \\ \varepsilon_6 &= 0{,}003\,67. \end{aligned} \right.$$

Najprawdopodobniejszemi zatem różnicami we wzniesieniach omawianych punktów są:

$$(\eta) \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} A,B &= 10{,}883\,8 - 0{,}001\,3 = 10^m{,}882\,5 \\ A,C &= 4{,}678\,3 + 0{,}003\,9 = 4^m{,}682\,2 \\ A,D &= 18{,}559\,5 - 0{,}007\,6 = 18^m{,}551\,9 \\ C,B &= 6{,}196\,3 + 0{,}004\,0 = 6^m{,}200\,3 \\ C,D &= 13{,}867\,7 + 0{,}002\,0 = 13^m{,}869\,7 \\ B,D &= 7{,}665\,7 + 0{,}003\,7 = 7^m{,}669\,4. \end{aligned} \right.$$

Gdy (ς) podstawimy w (γ), wypadną następujące kwadraty błędów

g_λ	α^2_λ	$g_\lambda \alpha^2_\lambda$
34	0,000 001 716 1	0,000 058 347 4
108	0,000 015 054 4	0,001 625 875 2
49	0,000 058 369 6	0,002 860 110 4
66	0,000 016 080 1	0,001 061 286 6
78	0,000 003 920 4	0,000 305 791 2
60	0,000 013 468 9	0,000 808 134 0
	$\Sigma g_\lambda \alpha^2_\lambda =$	0,006 719 544 8

Stąd:

$$s(\xi) = \pm \sqrt{\frac{0{,}006\,719\,544\,8}{9-6}} = \pm\, 0{,}047\,3,$$

$$p(\xi) = \pm\, 0{,}047\,3 \times 0{,}674\,49 = \pm\, 0{,}031\,9.$$

Z (ε) otrzymujemy nadto

$$D = \begin{vmatrix} 160, & -66, & -60 \\ -66, & 252, & -78 \\ -60, & -78, & 187 \end{vmatrix} = 4\,226\,868 \quad \text{oraz:}$$

$$D_{1,1} = \begin{vmatrix} 252, & -78 \\ -78, & 187 \end{vmatrix} = 41\,040, \qquad D_{2,2} = \begin{vmatrix} 160, & -60 \\ -60, & 187 \end{vmatrix} = 26\,320,$$

$$D_{3,3} = \begin{vmatrix} 160, & -66 \\ -66, & 252 \end{vmatrix} = 35\,964.$$

Rugując następnie z (δ') i (γ) np.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_3 - \varepsilon_6 + 0{,}010\,0 \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_6 + 0{,}019\,2 \\ \varepsilon_5 &= \varepsilon_4 + \varepsilon_6 - 0{,}005\,7, \end{aligned}$$

znajdziemy równania normalne Gauss'a:

$$\begin{aligned} 191\,\varepsilon_3 - 108\,\varepsilon_4 - 142\,\varepsilon_6 &= -2{,}413\,6 \\ -108\,\varepsilon_3 + 252\,\varepsilon_4 + 186\,\varepsilon_6 &= 2{,}518\,2 \\ -142\,\varepsilon_3 + 186\,\varepsilon_4 + 280\,\varepsilon_6 &= 2{,}858\,2, \end{aligned}$$

a z nich:

$$D_{4,4} = \begin{vmatrix} 191, & -142 \\ -142, & 280 \end{vmatrix} = 33\,316, \qquad D_{6,6} = \begin{vmatrix} 191, & -108 \\ -108, & 252 \end{vmatrix} = 36\,468.$$

W podobny sposób, po wyrugowaniu ε_1, ε_2 i ε_4, znajdziemy

$$D_{5,5} = 29\,404.$$

Wypada więc:

$$\sqrt{\frac{D_{1,1}}{D}} = 0{,}098\,5, \quad \sqrt{\frac{D_{2,2}}{D}} = 0{,}078\,9, \quad \sqrt{\frac{D_{3,3}}{D}} = 0{,}092\,2,$$

$$\sqrt{\frac{D_{4,4}}{D}} = 0{,}088\,8, \quad \sqrt{\frac{D_{5,5}}{D}} = 0{,}083\,4, \quad \sqrt{\frac{D_{6,6}}{D}} = 0{,}092\,9.$$

Zatem (η) są najprawdopodobniejszemi różnicami we wzniesieniach punktów A, B, C i D, z błędami prawdopodobnymi:

$$\begin{aligned} p(A,B) &= \pm\, 0{,}031\,9 \times 0{,}098\,5 = \pm\, 0{,}003\,1 \\ p(A,C) &= \pm\, 0{,}031\,9 \times 0{,}078\,9 = \pm\, 0{,}002\,5 \\ p(A,D) &= \pm\, 0{,}031\,9 \times 0{,}092\,2 = \pm\, 0{,}002\,9 \\ p(C,B) &= \pm\, 0{,}031\,9 \times 0{,}088\,8 = \pm\, 0{,}002\,8 \\ p(C,D) &= \pm\, 0{,}031\,9 \times 0{,}083\,4 = \pm\, 0{,}002\,7 \\ p(B,D) &= \pm\, 0{,}031\,9 \times 0{,}092\,9 = \pm\, 0{,}003\,0. \end{aligned}$$

ZADANIE 3. Wyznaczyć szerokość geograficzną danego miejsca z odległości zenitalnych gwiazd na południku oraz z ich zboczeń.

Jeżeli przez δ oznaczymy zboczenie gwiazdy, przez z jej odległość zenitalną na południku i przez φ szerokość geograficzną miejsca, z którego wyznaczamy odległości zenitalne gwiazd, to

$$(\alpha') \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varphi = \delta - z$$

$$(\alpha'') \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varphi = \pi - \delta - z$$

$$(\alpha''') \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varphi = \delta + z$$

stosownie do tego, czy gwiazda przechodzi przez południk pomiędzy biegunem i zenitem, pomiędzy poziomem i biegunem, czy wreszcie pomiędzy równikiem i zenitem (fig. 5).

Zboczenia δ są stałe dla każdej gwiazdy i znane z katalogów astronomicznych; z należy otrzymać ze spostrzeżeń, dokonanych na tem miejscu, dla którego szukamy szerokości geograficznej.

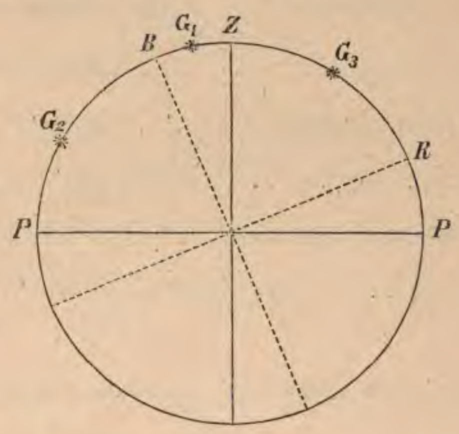

fig 5.

Otrzymane ze spostrzeżeń wartości na z są błędne, a jedną z przyczyn popełniania błędów jest zgięcie osi lunety, którą wykonywamy obserwacye. To zgięcie osi jest, oczywiście, największe, gdy luneta znajduje się w położeniu poziomem i wtedy jego wielkość oznaczmy przez ψ; zmniejsza się następnie stopniowo w miarę, jak kierunek lunety odchyla się od poziomu ku zenitowi, aż przy kierunku pionowym staje się równe zeru. Można więc przyjąć, że zgięcie osi lunety, począwszy od wielkości ψ, jaką posiada w położeniu poziomem, zmniejsza się w stosunku do zmian, jakim podlega dostawa kąta, utworzonego przez kierunek lunety z poziomem, albo, co na jedno wychodzi, w stosunku do zmian, zachodzących w wstawie kąta, jaki tworzy kierunek lunety z prostą zenitalną, t. j. równa się

$$(\beta) \qquad \psi \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \psi \sin z.$$

Z tej przyczyny (α'), (α'') i (α''') zastąpić należy przez:

$$(\gamma') \quad \ldots\ldots \quad \varphi = \delta - (z + \psi \sin z)$$

$$(\gamma'') \quad \ldots\ldots \quad \varphi = \pi - \delta - (z + \psi \sin z)$$

$$(\gamma''') \quad \ldots\ldots \quad \varphi = \delta + (z + \psi \sin z).$$

Przypuśćmy, żeśmy dla danego miejsca otrzymali następujące rezultaty:

Gwiazda	Wzór na oznaczenie szerokości geograficzn.	Odległość zenitalna z	Zboczenie δ	Liczba spostrzeżeń, czyli ważność g	sin z
α Małej Niedźwiedzicy	(γ')	28°23′4″,1	88°19′39″,7	46	0,475 39
α Andromedy	(γ''')	31°51′42″,7	28°4′43″,9	32	0,527 87
α Wielkiej Niedźwiedzicy	(γ'')	57°18′58″,2	62°44′24″,1	42	0,841 66
α Orła	(γ''')	51°32′45″,8	8°23′38″,6	38	0,783 11

z których wypadają równania przybliżone:

$$(\delta)\left\{\begin{array}{llll} \text{według } (\gamma') & \varphi = 88°19'39'',7 - 28°23'4'',1 - 0,475\,39\,\psi & \text{z ważnością} & 46 \\ \quad ,, \quad (\gamma''') & \varphi = 28°4'43'',9 + 31°51'42'',7 + 0,527\,87\,\psi & \quad ,, & 32 \\ \quad ,, \quad (\gamma'') & \varphi = 117°15'35'',9 - 57°18'58'',2 - 0,841\,66\,\psi & \quad ,, & 42 \\ \quad ,, \quad (\gamma''') & \varphi = 8°23'38'',6 + 51°32'45'',8 + 0,783\,11\,\psi & \quad ,, & 38. \end{array}\right.$$

Jeżeli dalej, unikając wielkich liczb, przyjmiemy za pierwsze przybliżenie dla φ zaokrągloną do dziesiątek średnią arytmetyczną z (δ), po założeniu $\psi = 0$, czyli gdy założymy

$$(\varepsilon) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varphi = 59°56'30'' + \varepsilon,$$

to z (δ) wypadną następujące równania niezupełnie ściśle:

$$(\varsigma) \ldots \begin{cases} \varepsilon + 0{,}475\,39\,\psi = 5'',6 & \text{z ważnością } 46 \\ \varepsilon - 0{,}527\,87\,\psi = -3'',4 & \phantom{\text{z ważnością }} „ \;\; 32 \\ \varepsilon + 0{,}841\,66\,\psi = 7'',7 & \phantom{\text{z ważnością }} „ \;\; 42 \\ \varepsilon - 0{,}783\,11\,\psi = -5'',6 & \phantom{\text{z ważnością }} „ \;\; 38. \end{cases}$$

Z równań (ς) otrzymujemy równania normalne Gauss'a

$$(\eta) \ldots \begin{cases} 158\,\varepsilon + 10{,}567\,\psi = 259.4 \\ 10{,}567\,\varepsilon + 72{,}368\,\psi = 618{,}726, \end{cases}$$

dla których:

$$D = \begin{vmatrix} 158, & 10{,}567 \\ 10{,}567, & 72{,}368 \end{vmatrix} = 11\,322{,}483,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 259{,}4, & 10{,}567 \\ 618{,}726, & 72{,}368 \end{vmatrix} = 12\,234{,}181,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 158, & 259{,}4 \\ 10{,}567, & 618{,}726 \end{vmatrix} = 95\,017{,}628.$$

Wypada stąd:

$$(\vartheta) \ldots \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{12\,234{,}181}{11\,322{,}483} = 1'',1 \\ \psi = \dfrac{95\,017{,}628}{11\,322{,}483} = 8'',4, \end{cases}$$

czyli najprawdopodobniejszą szerokością geograficzną danego miejsca jest

$$\varphi = 59^\circ 56' 30'' + 1'',1 = 59^\circ 56' 31'',1;$$

najprawdopodobniejszem zgięciem osi lunety w jej położeniu poziomem

$$\psi = 8'',4.$$

Gdy dalej (ϑ) podstawimy w (ς), wypadnie

z obliczenia	ze spostrzeżeń	α_λ	α^2_λ	g_λ	$g_\lambda \alpha^2_\lambda$
5,1	5,6	+0,5	0,25	46	11,50
−3,3	−3,4	−0,1	0,01	32	0,32
8,2	7,7	−0,5	0,25	42	10,50
−5,5	−5,6	−0,1	0,01	38	0,38
				$\Sigma g_\lambda \alpha^2_\lambda = 22{,}70$	

a stąd:

ogólny błąd średni $s(\xi) = \pm \sqrt{\frac{22{,}70}{4-2}} = \pm\sqrt{11{,}35} = \pm 3'',37$

ogólny błąd prawdopodobny $p(\xi) = \pm 3'',37 \times 0{,}674\,49 = \pm 2'',27.$

Ponieważ zaś

$$D_{1,1} = 72{,}368, \quad D_{2,2} = 158,$$

skąd

$$\sqrt{\frac{D_{1,1}}{D}} = \sqrt{\frac{72{,}368}{11\,322{,}483}} = 0{,}08$$

$$\sqrt{\frac{D_{2,2}}{D}} = \sqrt{\frac{158}{11\,322{,}483}} = 0{,}118,$$

przeto:

$$p(\varphi) = \pm 2'',27 \times 0{,}08 \; = \pm 0'',18$$

$$p(\psi) = \pm 2'',27 \times 0{,}118 = \pm 0'',27.$$

42. Wyrównywanie spostrzeżeń za pomocą wzorów (wzory empiryczne). Bywają zjawiska, badane za pomocą spostrzeżeń, które w zależności od pewnych czynników, zmieniających się regularnie, również w sposób prawidłowy w zasadzie zmieniać się powinny, a jednak z różnych powodów, głównie zaś z przyczyny trudności obserwacyjnych i płynących stąd błędów, spostrzeżenia wykazują rozmaite nienaturalne skoki i nieprawidłowości, które wyrównać trzeba.

Jeżeli np. weźmiemy pod uwagę śmiertelność ludzką, to chociaż wpływają na nią najrozmaitsze przyczyny, wszelako przyczynę zasadniczą stanowi wiek — tak, że, ze wzrostem wieku, śmiertelność, przynajmniej po przejściu krytycznych lat dziecięcych, nie nagle, lecz stopniowo, ze względną prawidłowością zmieniać się powinna, gdyż niepodobna pojąć, dlaczegoby śmiertelność w wieku lat stycznych zbyt się od siebie różnić miała. Dla niewielkiej liczby osób, przez krótki czas obserwowanych, nadzwyczajne takie różnice dadzą się logicznie wytłómaczyć, lecz przy bardzo wielkiej liczbie osób, obserwowanych przez czas dłuższy, znaczniejsze różnice, w zbliżonych do siebie latach wieku, miejsca mieć nie powinny—zwłaszcza, jeżeli okoliczności, w jakich te osoby żyją, niezbyt się od siebie różnią. Pomimo to, spostrzeżenia często i w takich razach wykazują nieprawidłowości, które więc przedewszystkiem niedostatkom spostrzeżeń przypisać należy.

Chcąc tedy otrzymać racyonalną tablicę śmiertelności, potrzeba otrzymane ze spostrzeżeń rezultaty wyrównać, t. j. doprowadzić je do takiego stanu, który, zbliżając się możliwie jak najbardziej do rezultatów spostrzeżeń, czyni także zadość i warunkom, dyktowanym przez zdrowy rozsądek.

Podobnie rzecz się ma ze średnią temperaturą dzienną danego miejsca. W latach pojedynczo branych, średnie temperatury dni stycznych, z różnych przyczyn, mogą się znacznie od siebie różnić. Ale gdy weźmiemy większy szereg lat i obliczymy dla każdego dnia przeciętną z jego temperatur średnich, rezultat dać powinien szereg liczb, stopniowo i regularnie z dnia na dzień, stosownie do pory roku, odpowiednio się zmieniających, ponieważ temperatura przedewszystkiem zależy od położenia ziemi względem słońca, a zmiany w położeniu ziemi zachodzą z matematyczną systematycznością. I tu jednak, tak samo jak w poprzednim przykładzie, przeciętne, nawet z większej liczby lat, wykazują różne nieprawidłowości, które, jeżeli nam chodzi o normalny przebieg temperatury w danem miejscu, odpowiednio wyrównać należy.

Przykładów podobnych możnaby naliczyć więcej.

Spostrzeżenia surowe wyrównywać można różnymi sposobami; jednego z nich dostarcza właśnie metoda najmniejszych kwadratów. Najważniejszą rzeczą, w razach takich, przy stosowaniu metody najmniejszych kwadratów, jest odszukanie kształtu funkcyi (58), któraby możliwie jak najlepiej odpowiadała danym zjawiskom; ciąg dalszy stanowi już tylko proste zastosowanie prawideł metody najmniejszych kwadratów do danego przypadku.

Ogólnie niepodobna określić, jak do funkcyi (58) dojść można — prowadzą do niej najrozmaitsze drogi; trafność postępowania zależy od umiejętności badacza i daje się ocenić wielkością błędów prawdopodobnych, odpowiadających stałym funkcyi. Jeżeli błędy prawdopodobne są bardzo wielkie, w stosunku do otrzymanych wartości na szukane stałe, funkcya jest nieodpowiednia i naodwrót.

Dla śmiertelności ludzkiej dużą popularność zyskał sobie klasyczny wzór Gompertz-Makeham'a

$$y = \frac{k}{a^x} \cdot g^{q^x},$$

gdzie y oznacza liczbę osób żyjących w wieku x, zaś k, a, g i q są stałe, dające się wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów, gdy za x podstawiać będziemy wiek, a za y otrzymane ze spostrzeżeń liczby osób żyjących w tym wieku.

Do wyrównania średnich temperatur dziennych w naszym klimacie, z niezłym rezultatem, użyć można, w układzie biegunowym napisanego, wzoru

$$\rho = a + b \cos \omega.$$

We wzorze tym ρ oznacza promień wodzący, na którym odcinamy długości, proporcyonalne do średnich temperatur dziennych, a ω kąt, jaki ów promień wodzący czyni z osią układu biegunowego, licząc na jeden dzień

$$\frac{360^\circ}{366} = 59'0'',98361.$$

Parametry a i b wyznaczają się przy pomocy metody najmniejszych kwadratów.

Zadania powyższe przytoczyliśmy tutaj, gdyż oba doskonale przedstawiają to, co przez wyrównanie spostrzeżeń za pomocą wzorów rozumieć należy; lecz ani jednem, ani drugiem bliżej zajmować się nie będziemy, raz dlatego, że obfitość odnośnych materyałów obserwacyjnych nie nadaje się do podręcznika, a następnie, ponieważ pierwszem zajmowaliśmy się szczegółowo w I-ym tomie „Wiadomości matematycznych" (za r. 1897), drugiem w tomie IX-ym „Pamiętnika fizyograficznego" (za r. 1889), dokąd odsyłamy osoby, pragnące się bliżej z tymi przedmiotami zapoznać.

Tu dodamy tylko, że dla temperatury warszawskiej otrzymaliśmy wyrażenie

$$(\alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \rho = 7{,}42 + 12{,}018 \cos\omega,$$

przyjąwszy za oś biegunową promień, odpowiadający dniu 18-go lipca, na który przypada najwyższa temperatura średnia. Gdy w (α) zakładać będziemy kolejno: $\omega = 0$; $59'0'',983\,61$; $2\times 59'0'',983\,61$ i t. d., otrzymamy (przy danym kształcie funkcyi) najprawdopodobniejsze, czyli wyrównane temperatury dla 18-go, 19-go, 20-go lipca, i t. d.

Równanie (α), zwane równaniem termicznem Warszawy, stanowi analityczne wyrażenie przebiegu średniej temperatury dziennej w Warszawie i, jako takie, może być użyte do różnego rodzaju badań i zastosowań.

Gdyby nam chodziło np. o średnią temperaturę roczną, to, ze względu, iż wzorem na średnią arytmetyczną funkcyi $f(x)$, w granicach od x_0 do X, jest

$$s = \frac{\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx}{\int_{x_0}^{X} dx} \; {}^{*}),$$

---

*) Dla nieznających tego wzoru, podajemy jego wywód. Niech będzie funkcya ciągła $f(x)$ oraz n jej wartości:

$$f(x),\; f(x+\Delta x),\; f(x+2\Delta x), \ldots, f(x+\overline{n-1}\,\Delta x).$$

Średnia arytmetyczna tych wartości równa się

$$(\alpha) \; . \; . \; s = \frac{\sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} f(x+\lambda\Delta x)}{n} = \frac{\Delta x \sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} f(x+\lambda\Delta x)}{n\Delta x} = \frac{\sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} f(x+\lambda\Delta x)\,\Delta x}{\sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \Delta x},$$

a gdy x zmieniać będziemy nie o Δx, lecz w sposób ciągły od $x = x_0$ do $x = X$, to odpowiednia temu średnia przechodzi, oczywiście, na

$$(\beta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad s = \frac{\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.}{\int_{x_0}^{X} dx},$$

mamy w obecnym przypadku

$$s = \frac{\int_0^{2\pi} \rho d\omega}{\int_0^{2\pi} d\omega} = \frac{7{,}42 \int_0^{2\pi} d\omega + 12{,}018 \int_0^{2\pi} \cos \omega d\omega}{\int_0^{2\pi} d\omega} = \frac{7{,}42 \times 2\pi}{2\pi} = 7{,}42,$$

co się zgadza z rezultatem spostrzeżeń.

Inne zastosowania wzoru (α) pomijamy, jako nie stanowiące celu niniejszej pracy, i przechodzimy do analogicznego z powyższem zadania.

ZADANIE 4. Z doświadczeń, czynionych nad długością wahadła, bijącego sekundy w różnych punktach ziemi, wypadły następujące rezultaty:

№ bieżący	Miejsce spostrzeżeń	Północna szerokość geograficzna φ	Otrzymana ze spostrzeż. długość wahadła sekund. w calach ang.
1	Św. Tomasz . .	$-0^0 24' 41''$	39,020 74
2	Maranham . . .	$-2^0 31' 43''$	39,012 14
3	Ascension . . .	$-7^0 55' 48''$	39,024 10
4	Sierra Leone . .	$+8^0 29' 28''$	39,019 97
5	Trinidad. . . .	$+10^0 38' 56''$	39,018 84
6	Bahia.	$-12^0 59' 21''$	39,024 25
7	Jamajka. . . .	$+17^0 56' 7''$	39,035 10
8	New-York . . .	$+40^0 42' 43''$	39,101 68
9	Londyn	$+51^0 31' 8''$	39,139 29
10	Drontheim . . .	$+63^0 25' 54''$	39,174 56
11	Hammerfest . .	$+70^0 40' 5''$	39,195 19
12	Grenlandya . .	$+74^0 32' 19''$	39,203 35
13	Spitzberg . . .	$+79^0 49' 58''$	39,214 69

Rezultaty powyższe, jako otrzymane ze spostrzeżeń, nie są w zasadzie wolne od błędów, o czem można się nawet przekonać z powierzchownego ich przeglądu, gdyż, z przyczyny znanego kształtu ziemi, ze wzrostem szerokości geograficznej wzrastać też powinna i długość wahadła sekundowego, a warunkowi temu niezupełnie odpowiadają początkowe pozycye powyższego wykazu.

Są powody do przyjęcia, że długość wahadła sekundowego powinna się zmieniać według prawa

$$(\alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \xi = q_1 + q_2 \sin^2 \varphi,$$

gdzie ξ oznacza długość wahadła, φ szerokość geograficzną, zaś q_1 i q_2 są stałe niewiadome. Chodzi o wyrównanie wyżej podanych spostrzeżeń, czyli o wyznaczenie takich wartości na q_1 i q_2, które, po podstawieniu w (α), dałyby najprawdopodobniejsze wartości na długość wahadła sekundowego w różnych punktach ziemi.

Ażeby uniknąć zbyt wielkich liczb, podstawmy w (α):

$$(\beta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \begin{cases} q_1 = 39 + \varepsilon_1 \\ q_2 = 0{,}2 + \varepsilon_2; \end{cases}$$

gdy to uczynimy, wypadnie

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \sin^2 \varphi = \xi - 39 - 0{,}2 \sin^2 \varphi,$$

czyli, po oznaczeniu

$$(\gamma) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \xi - 39 - 0{,}2 \sin^2 \varphi = l,$$

mieć będziemy równanie

$$(\alpha') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \sin^2 \varphi = l.$$

Gdy w (γ) za ξ i φ podstawimy kolejno wielkości, podane w poprzedniej tabelce, otrzymamy następujące wyniki:

Nr. bieżący	ξ	$\sin^2\varphi$	$0{,}2\sin^2\varphi$	l
1	39,020 74	0,000 05	0,000 01	0,020 73
2	39,012 14	0,001 95	0,000 39	0,011 75
3	39,024 10	0,019 03	0,003 81	0,020 29
4	39,019 97	0,021 80	0,004 36	0,015 61
5	39,018 84	0,034 15	0,006 83	0,012 01
6	39,024 25	0,050 52	0,010 10	0,014 15
7	39,035 10	0,094 82	0,018 96	0,016 14
8	39,101 68	0,425 44	0,085 09	0,016 59
9	39,139 29	0,612 80	0,122 56	0,016 73
10	39,174 56	0,799 95	0,159 99	0,014 57
11	39,195 19	0,890 41	0,178 08	0,017 11
12	39,203 35	0,928 92	0,185 78	0,017 57
13	39,214 69	0,968 84	0,193 77	0,020 92

z których powstaje trzynaście niezupełnie ścisłych równań:

$$(\delta) \quad \ldots\ldots \quad \left\{\begin{aligned}
\varepsilon_1 + 0{,}000\,05\,\varepsilon_2 &= 0{,}020\,73\\
\varepsilon_1 + 0{,}001\,95\,\varepsilon_2 &= 0{,}011\,75\\
\varepsilon_1 + 0{,}019\,03\,\varepsilon_2 &= 0{,}020\,29\\
\varepsilon_1 + 0{,}021\,80\,\varepsilon_2 &= 0{,}015\,61\\
\varepsilon_1 + 0{,}034\,15\,\varepsilon_2 &= 0{,}012\,01\\
\varepsilon_1 + 0{,}050\,52\,\varepsilon_2 &= 0{,}014\,15\\
\varepsilon_1 + 0{,}094\,82\,\varepsilon_2 &= 0{,}016\,14\\
\varepsilon_1 + 0{,}425\,44\,\varepsilon_2 &= 0{,}016\,59\\
\varepsilon_1 + 0{,}612\,80\,\varepsilon_2 &= 0{,}016\,73\\
\varepsilon_1 + 0{,}799\,95\,\varepsilon_2 &= 0{,}014\,57\\
\varepsilon_1 + 0{,}890\,41\,\varepsilon_2 &= 0{,}017\,11\\
\varepsilon_1 + 0{,}928\,92\,\varepsilon_2 &= 0{,}017\,57\\
\varepsilon_1 + 0{,}968\,84\,\varepsilon_2 &= 0{,}020\,92.
\end{aligned}\right.$$

Z równań powyższych formujemy tabelkę

a	b	l	a^2	b^2	ab	al	bl
1	0,000 05	0,020 73	1	0,000 000	0 000 05	0,020 73	0,000 001
1	0,001 95	0,011 75	1	0,000 004	0,001 95	0,011 75	0,000 023
1	0,019 03	0,020 29	1	0 000 362	0,019 03	0,020 29	0,000 386
1	0,021 80	0,015 61	1	0,000 475	0,021 80	0,015 61	0,000 340
1	0,034 15	0,012 01	1	0,001 166	0,034 15	0,012 01	0,000 410
1	0,050 52	0,014 15	1	0,002 552	0,050 52	0,014 15	0,000 715
1	0,094 82	0,016 14	1	0,008 990	0,094 82	0,016 14	0,001 530
1	0,425 44	0,016 59	1	0,181 002	0,425 44	0,016 59	0,007 058
1	0,612 80	0,016 73	1	0,375 520	0,612 80	0,016 73	0,010 252
1	0,799 95	0,014 57	1	0,639 926	0,799 95	0,014 57	0,011 655
1	0,890 41	0,017 11	1	0,792 833	0,890 41	0,017 11	0,015 235
1	0,928 92	0,017 57	1	0,862 893	0,928 92	0,017 57	0,016 321
1	0,968 84	0,020 92	1	0,938 651	0,968 84	0,020 92	0,020 268
		$\Sigma =$	13	3,804 374	4 848 68	0,214 17	0,084 194

dającą dwa równania normalne Gauss'a:

$$(\varepsilon) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} 13\,\varepsilon_1 + 4{,}848\,68\,\varepsilon_2 = 0{,}214\,17 \\ 4{,}848\,68\,\varepsilon_1 + 3{,}804\,37\,\varepsilon_2 = 0{,}084\,19, \end{cases}$$

dla których:

$$D = 25{,}947\,112\,3, \quad D_1 = 0{,}406\,571\,553\,7, \quad D_2 = 0{,}056\,028\,204\,4,$$

$$D_{1,1} = 3{,}804\,37, \quad D_{2,2} = 13.$$

Stąd:

$$(\zeta) \quad . \quad . \quad . \quad \varepsilon_1 = \frac{D_1}{D} = 0{,}015\,67, \qquad \varepsilon_2 = \frac{D_2}{D} = 0{,}002\,16,$$

czyli:

$$(\eta) \quad . \quad . \quad q_1 = 39 + 0{,}015\,67 = 39{,}015\,67, \quad q_2 = 0{,}2 + 0{,}002\,16 = 0{,}202\,16,$$

t. j. szukanem wyrażeniem na najprawdopodobniejsze (przy danym kształcie funkcyi), względnie na wyrównane długości wahadła sekundowego, jest

$$(\vartheta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \xi = 39{,}015\,67 + 0{,}202\,16 \sin^2 \varphi.$$

Jeżeli dalej w (ϑ) podstawimy za φ wielkości, podane w tabelce pierwszej, wypadnie

Nr. bieżący	Długość wahadła sekundowego z obliczenia	Długość wahadła sekundowego ze spostrzeżeń	α_λ	α^2_λ
1	39,015 68	39,020 74	+0,005 06	0,000 025 603 6
2	39,016 06	39,012 14	−0,003 92	0,000 015 366 4
3	39,019 52	39,024 10	+0,004 58	0,000 020 976 4
4	39,020 08	39,019 97	−0,000 11	0,000 000 012 1
5	39,022 57	39,018 84	−0,003 73	0,000 013 911 9
6	39,025 88	39,024 25	−0,001 63	0,000 002 656 9
7	39,034 84	39,035 10	+0,000 26	0,000 000 067 6
8	39,101 68	39,101 68	0	0
9	39,139 55	39,139 29	−0,000 26	0,000 000 067 6
10	39,177 39	39,174 56	−0,002 83	0,000 008 008 9
11	39,195 68	39,195 19	−0,000 49	0,000 000 240 1
12	39,203 46	39,203 35	−0,000 11	0,000 000 012 1
13	39,211 53	39,214 69	+0,003 16	0,000 009 985 6
			$\Sigma\alpha^2_\lambda =$	0,000 096 909 2

0,000 096 909,2 × 3,8043
(13-2) × 25,947 1123

0,000 096 909,2 × 13
-2) × 25,947 1123

Przy pomocy tej tabelki można wyznaczyć błędy prawdopodobne dla q_1 i q_2, albowiem:

$$s(\xi) = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\alpha^2_\lambda}{n-m}} = \pm\sqrt{\frac{0{,}000\,096\,909\,2}{13-2}} = \pm\, 0{,}002\,968,$$

$$p(\xi) = \pm\, 0{,}002\,968 \times 0{,}674\,49 = \pm\, 0{,}002\,002;$$

że zaś $\sqrt{\frac{D_{1,1}}{D}} = 0{,}382\,91$, $\sqrt{\frac{D_{2,2}}{D}} = 0{,}707\,83$, zatem:

$$p(q_1) = \pm\, 0{,}002\,002 \times 0{,}382\,91 = \pm\, 0{,}000\,767,$$

$$p(q_2) = \pm\, 0{,}002\,002 \times 0{,}707\,83 = \pm\, 0{,}001\,417,$$

t. j. błędy stosunkowo małe, skutkiem czego można przyjąć, że (ϑ) dość dokładnie przedstawia przebieg długości wahadła sekundowego w zależności od szerokości geograficznej.

Wyrażenie (ϑ) nietylko wyrównywa otrzymane ze spostrzeżeń rezultaty, ale pozwala nadto jeszcze obrachować, w sposób przybliżony, długość wahadła sekundowego i dla innych miejscowości.

Tak np. Warszawa leży pod szerokością

$$\varphi = 52^\circ 13' 5'',7,$$

mamy więc dla niej

$$\xi = 39{,}015\,67 + 0{,}202\,16 \sin^2 52^\circ 13' 5'',7$$
$$= 39{,}015\,67 + 0{,}202\,16 \times 0{,}624\,65 = 39{,}141\,95 \text{ c. a.}$$

Według „Kosmografii" Jędrzejewicza, długość wahadła, bijącego sekundy w Warszawie, równa się 99,415 cm., co stanowi 39,140 48 c. a.; długość ta zbacza od naszej tylko o 0,001 47 c. a.

Wzory tego rodzaju jak (ϑ) zowią się wzorami empirycznymi (doświadczalnymi) i mogą mieć zastosowanie tak dobrze w naukach przyrodniczych, jak w społecznych i technicznych.

43. Zastosowania analityczne. Bywają wypadki, w których metoda najmniejszych kwadratów daje się zastosować do wywodów analitycznych. Weźmy na to parę przykładów.

Zadanie 5. Znaleźć przybliżone wyrażenia na $\sqrt{x^2 + y^2}$ przy warunku, aby stosunek $\frac{y}{x}$ zawierał się w pewnych, z góry określonych, granicach.

Ścisłe obliczenie wyrażenia $\sqrt{x^2 + y^2}$, w ogóle mówiąc, przedstawia rachunek dość długi, chodzi więc o to, czy nie można go zastąpić przez wyrażenie prostsze, kształtu $q_1 x + q_2 y$, które pozwala prędzej rachunek przeprowadzić.

Na podstawie powyższego kształtu, mającego zastąpić wyrażenie $\sqrt{x^2 + y^2}$, zadanie nasze sprowadza się do wyznaczenia na niewiadome q_1 i q_2 takich wielkości, aby, w danych dla stosunku $\frac{y}{x}$ granicach, zachodziła równość

$$(\alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \sqrt{x^2 + y^2} = q_1 x + q_2 y.$$

Po podstawieniu w (α)

$$(\beta) \quad . \; . \; . \quad x = r \cos\varphi \text{ i } y = r \sin\varphi, \text{ skąd } \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi,$$

otrzymujemy

$$(\alpha') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sqrt{x^2+y^2} = r\,(q_1 \cos\varphi + q_2 \sin\varphi),$$

przyczem, skoro $\frac{y}{x}$ ma się zawierać w pewnych danych granicach, więc w tych samych granicach musi się zawierać i $\operatorname{tg}\varphi$. Dajmy, że granicom rzeczonym odpowiadają kąty φ_0 i φ_1.

Z drugiej strony

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = r\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = r,$$

czyli powinno być

$$(\gamma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad q_1 \cos\varphi + q_2 \sin\varphi = 1.$$

Równość (γ), przy zmieniającem się φ, a stałych q_1 i q_2, ściśle miejsca mieć nie może, dlatego starać się przynajmniej trzeba o wyznaczenie takich q_1 i q_2, żeby wartość lewej strony w (γ) jak najmniej oddalała się od jedności.

W tym celu nadajmy kątowi φ nieograniczenie wiele wartości, zawartych w granicach od φ_0 do φ_1. Uczyniwszy to, z (γ) otrzymamy nieskończenie wiele równań niezupełnie ścisłych, które prowadzą do dwóch równań normalnych Gauss'a:

$$(\delta) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} q_1 \sum_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos^2\varphi + q_2 \sum_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin\varphi\cos\varphi &= \sum_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi, \\ q_1 \sum_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin\varphi\cos\varphi + q_2 \sum_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin^2\varphi &= \sum_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin\varphi. \end{aligned} \right.$$

Ażeby wykonać nieskończonościowe sumowania w (δ), pomnóżmy oba równania przez $d\varphi$ i zcałkujmy ich wyrazy w granicach od φ_0 do φ_1. Otrzymujemy:

$$(\delta') \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} q_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos^2\varphi d\varphi + q_2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi d\varphi, \\ q_1 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi + q_2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin^2\varphi d\varphi &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin\varphi d\varphi. \end{aligned} \right.$$

Ponieważ:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos^2\varphi d\varphi = \Bigg|_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left(\frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0}{4}$$

$$+ \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} = \frac{\sin\varphi_1 \cos\varphi_1 - \sin\varphi_0 \cos\varphi_0}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}$$

$$= \frac{\cos(\varphi_1 + \varphi_0) \sin(\varphi_1 - \varphi_0)}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2},$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin^2\varphi d\varphi = \Bigg|_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left(-\frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} - \frac{\cos(\varphi_1 + \varphi_0) \sin(\varphi_1 - \varphi_0)}{2},$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi = \Bigg|_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\sin^2\varphi}{2} = \frac{\sin^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_0}{2}$$

$$= \frac{\sin^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_0 (\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1)}{2}$$

$$= \frac{(\sin\varphi_1 \cos\varphi_0 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_0)(\sin\varphi_1 \cos\varphi_0 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_0)}{2}$$

$$= \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_0) \sin(\varphi_1 - \varphi_0)}{2},$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi d\varphi = \Bigg|_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin\varphi = \sin\varphi_1 - \sin\varphi_0 = 2\cos\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2} \sin\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2},$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin\varphi d\varphi = \Bigg|_{\varphi_0}^{\varphi_1} (-\cos\varphi d\varphi) = \cos\varphi_0 - \cos\varphi_1 = 2\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2} \sin\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2},$$

zatem równania (δ') przechodzą na:

$$(\varepsilon) \ldots \left\{ \begin{array}{l} q_1 \{\cos(\varphi_1 + \varphi_0) \sin(\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_1 - \varphi_0)\} \\ \quad + q_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_0) \sin(\varphi_1 - \varphi_0) = 4 \cos\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2} \sin\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}, \\ q_1 \sin(\varphi_1 + \varphi_0) \sin(\varphi_1 - \varphi_0) + q_2 \{(\varphi_1 - \varphi_0) \\ \quad - \cos(\varphi_1 + \varphi_0) \sin(\varphi_1 - \varphi_0)\} = 4 \sin\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2} \sin\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}. \end{array} \right.$$

Z ostatnich równań wypada:

$$(\zeta) \quad \dots\dots \quad \begin{cases} q_1 = \dfrac{4\cos\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}}{\varphi_1-\varphi_0+\sin(\varphi_1-\varphi_0)} \\[2ex] q_2 = \dfrac{4\sin\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}}{\varphi_1-\varphi_0+\sin(\varphi_1-\varphi_0)}. \end{cases}$$

Jeżeli np. postawimy warunek, aby $y < x$, to $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$ może się zmieniać tylko od 0 do 1, czyli φ od 0 do $\frac{\pi}{4}$. Wówczas:

$$q_1 = \frac{4\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}} = 0{,}947\,54$$

$$q_2 = \frac{4\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sin^2\frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}} = 0{,}392\,49.$$

Skutkiem tego, dla wszystkich przypadków, gdy $y < x$, możemy przybliżenie obliczać $\sqrt{x^2+y^2}$ z wyrażenia:

$$(\eta) \quad \dots\dots\dots \quad 0{,}947\,54\,x + 0{,}392\,49\,y.$$

Naprzykład, dla $x = 4$, $y = 3$, mamy

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{25} = 5,$$

podczas gdy z wyrażenia (η) znajdujemy

$$0{,}947\,54 \times 4 + 0{,}392\,49 \times 3 = 4{,}967\,63.$$

Zadanie 6. Poprowadzić prostą, możliwie jak najbardziej, w pewnych granicach, zbliżoną do danej krzywej.

Niech będzie krzywa płaska

$$(\alpha) \quad \dots\dots\dots\dots \quad f(x, y) = 0,$$

chodzi zaś o taką prostą

$$(\beta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = q_1 x + q_2,$$

której rzędne, w granicach od x_0 do X, możliwie jak najbardziej zbliżają się do rzędnych krzywej (α).

Oczywiście, dla określenia szukanej prostej, należy odpowiednio wyznaczyć spółczynniki q_1 i q_2.

W tym celu w (β) nadajmy zmiennej x nieskończenie wiele, w sposób ciągły zmieniających się od x_0 do X, wartości i jednocześnie za y podstawiajmy odpowiednie wartości z równania (α); otrzymamy tym sposobem nieskończenie wiele równań niezupełnie ścisłych, z których, wiadomym sposobem, formujemy dwa równania normalne Gauss'a:

$$(\gamma) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 \int_{x_0}^{X} x^2 dx + q_2 \int_{x_0}^{X} x dx = \int_{x_0}^{X} xy dx, \\ q_1 \int_{x_0}^{X} x dx + q_2 \int_{x_0}^{X} dx = \int_{x_0}^{X} y dx, \end{array} \right.$$

gdzie za y podstawić należy wyrażenie, wyprowadzone z (α). Wypada stąd:

$$q_1 = \frac{\int_{x_0}^{X} xy dx - \frac{1}{2}(X + x_0) \int_{x_0}^{X} y dx}{\frac{1}{3}(X^3 - x^3_0) - \frac{1}{4}(X + x_0) . (X^2 - x^2_0)},$$

$$q_2 = \frac{\frac{1}{3}(X^3 - x^3_0) \int_{x_0}^{X} y dx - \frac{1}{2}(X^2 - x_0^2) \int_{x_0}^{X} xy dx}{\left(X - x_0\right) . \left(\frac{X^3 - x^3_0}{3}\right) - \left(\frac{X^2 - x^2_0}{2}\right)^2}.$$

Lewa strona drugiego równania (γ) równa się

$$\int_{x_0}^{X} (q_1 x + q_2)\, dx = q_1 \frac{X^2 - x^2_0}{2} + q_2 (X - x_0)$$

i przedstawia powierzchnię, zawartą pomiędzy określoną prostą, osią odciętych i rzędnemi, wyprowadzonemi z punktów x_0 oraz X. Strona druga tegoż równania, czyli $\int_{x_0}^{X} y dx$, wyobraża powierzchnię, zawartą pomiędzy daną krzywą, osią odciętych i temi samemi, co i wyżej, rzędnemi. Że zaś drugie równanie w (γ) orzeka, iż

$$\int_{x_0}^{X} (q_1 x + q_2)\, dx = \int_{x_0}^{X} y dx,$$

zatem do krzywej (α) zbliża się najwięcej ta prosta, która z powierzchni, określonej osią odciętych i powyżej opisanemi rzędnemi, ogranicza taką samą, co do wielkości, powierzchnię, jak i krzywa dana.

Zupełnie tak samo postępować należy, jeżeli w miejsce prostej (β) podstawimy parabolę jakiegokolwiek rzędu

$$(\delta) \quad \ldots\ldots \quad y = q_1 + q_2 x + q_3 x^2 + q_4 x^3 + \ldots$$

Jeżeli np. weźmiemy parabolę rzędu drugiego

$$(\delta') \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = q_1 + q_2 x + q_3 x^2,$$

odnośnemi równaniami, służącemi do wyznaczenia szukanych spółczynników q_1, q_2 i q_3, są:

$$q_1 \int_{x_0}^{X} dx + q_2 \int_{x_0}^{X} x dx + q_3 \int_{x_0}^{X} x^2 dx = \int_{x_0}^{X} y dx,$$

$$q_1 \int_{x_0}^{X} x dx + q_2 \int_{x_0}^{X} x^2 dx + q_3 \int_{x_0}^{X} x^3 dx = \int_{x_0}^{X} xy dx,$$

$$q_1 \int_{x_0}^{X} x^2 dx + q_2 \int_{x_0}^{X} x^3 dx + q_3 \int_{x_0}^{X} x^4 dx = \int_{x_0}^{X} x^2 y dx.$$

Pierwsze z tych równań określa zarazem prawo powierzchni, podobne do poprzednio opisanego.

44. INNE ZASTOSOWANIA. Weźmy jeszcze parę przykładów na innego rodzaju zastosowania.

ZADANIE 7. Pomiędzy dwiema posiadłościami zatarła się granica; wiadomo wprawdzie, że biegła według linii prostej, ale kopców niema, są tylko nieznaczne cztery ślady, które jednak nie leżą ściśle na prostej. Chodzi o wyznaczenie najprawdopodobniejszej granicy pomiędzy obu temi posiadłościami.

Spółrzędne wzmiankowanych śladów, odniesione do pewnego, dowolnie obranego, układu prostokątnego, są następujące:

$$(\alpha) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \text{dla } x = 0, & y = 3{,}5 \\ \ \ ,, \quad x = 88, & y = 5{,}7 \\ \ \ ,, \quad x = 182, & y = 8{,}2 \\ \ \ ,, \quad x = 274, & y = 10{,}3. \end{cases}$$

Gdy za równanie szukanej granicy (linii prostej), w tym samym układzie, przyjmiemy

$$(\beta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = q_1 x + q_2,$$

to czterma równaniami przybliżonemi są:

$$(\gamma) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} 0 \,.\, q_1 + 1 \,.\, q_2 = 3{,}5 \\ 88 \,.\, q_1 + 1 \,.\, q_2 = 5{,}7 \\ 182 \,.\, q_1 + 1 \,.\, q_2 = 8{,}2 \\ 274 \,.\, q_1 + 1 \,.\, q_2 = 10{,}3. \end{cases}$$

Z równań (γ) otrzymujemy

a	b	l	a^2	b^2	ab	al	bl
0	1	3,5	0	1	0	0	3,5
88	1	5,7	7 744	1	88	501,6	5,7
182	1	8,2	33 124	1	182	1 492,4	8,2
274	1	10,3	75 076	1	274	2 822,2	10,3
		$\Sigma =$	115 944	4	544	4 816,2	27,7

a stąd dwa równania normalne Gauss'a:

$$(\delta) \quad \dots\dots \quad \begin{cases} 115\,944 \,.\, q_1 + 544 \,.\, q_2 = 4\,816{,}2 \\ 544 \,.\, q_1 + 4 \,.\, q_1 = 27{,}7, \end{cases}$$

dla których:

$$D = 167\,840, \quad D_1 = 4\,196, \quad D_2 = 591\,636.$$

Więc:

$$q_1 = \frac{419\,6}{167\,840} = 0{,}025, \qquad q_2 = \frac{591\,636}{167\,840} = 3{,}525,$$

czyli równaniem szukanej granicy jest

$$(\beta') \quad \dots\dots\dots \quad y = 0{,}025\, x + 3{,}525.$$

Zadanie 8. W trójkącie ABC (fig. 6) wymierzono:

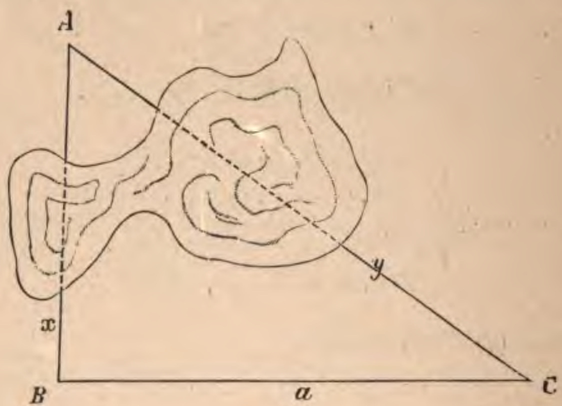

fig. 6.

$$(\alpha) \quad \dots\dots \quad \begin{cases} \text{kąt } A = 56^\circ 25' 36'',4 \text{ z ważnością } 5, \\ \text{„} \ B = 88^\circ 40' 15'',2 \qquad \text{„} \qquad 3, \\ \text{„} \ C = 34^\circ 54' \ 7'',5 \qquad \text{„} \qquad 6 \text{ oraz} \end{cases}$$

$$(\beta) \quad \dots\dots\dots \quad \text{bok } BC = a = 215^m{,}364$$

z błędem prawdopodobnym $p(a) = \pm\, 0{,}042$.

Lecz boków AB i AC w żaden sposób, z przyczyny przeszkody naturalnej, bezpośrednio zmierzyć się nie dało. Zachodzi pytanie, jakie są najprawdopodobniejsze odległości punktów B i C od A?

Ponieważ znalezione z pomiarów wielkości kątów A, B i C są błędne, już choćby dlatego, że ich suma nie czyni 180^0, zatem oznaczmy prawdziwe wielkości tych kątów przez:

$$(\gamma) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} A &= 56^0 25' 36'',4 + \varepsilon_1, \\ B &= 88^0 40' 15'',2 + \varepsilon_2, \\ C &= 34^0 54' \; 7'',5 + \varepsilon_3, \end{aligned} \right.$$

z czego dla szukanych popoprawek ε_1, ε_2 i ε_3 wypadają równania przybliżone:

$$(\varepsilon) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{lll} \varepsilon_1 = 0 & \text{z ważnością} & g_1 = 5, \\ \varepsilon_2 = 0 & \quad " & g_2 = 3, \\ \varepsilon_3 = 0 & \quad " & g_3 = 6, \end{array} \right.$$

które nadto winny ściśle czynić zadość warunkowi

$$A + B + C = 179^0 59' 59'',1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 180^0,$$

czyli równaniu

$$(\varepsilon') \quad \ldots\ldots \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 0''9 = 0.$$

Z (ε') otrzymujemy $\varepsilon_3 = 0,9 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, co pozwala zastąpić równania (ε) przez:

$$(\varepsilon'') \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{rll} \varepsilon_1 = 0 & \text{z ważnością} & g_1 = 5, \\ \varepsilon_2 = 0 & \quad " & g_2 = 3, \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0,9 & \quad " & g_3 = 6. \end{array} \right.$$

Z (ε'') znajdujemy dwa równania normalne:

$$(\zeta) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} 11\,\varepsilon_1 + 6\,\varepsilon_2 &= 5,4, \\ 6\,\varepsilon_1 + 9\,\varepsilon_2 &= 5,4, \end{aligned} \right.$$

które, w połączeniu z równaniem warunkowem (ε'), dają:

$$(\eta) \quad \dots\dots \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{18}{70} = 0{,}257, \\ \varepsilon_2 = \dfrac{30}{70} = 0{,}429, \\ \varepsilon_3 = \dfrac{15}{70} = 0{,}214. \end{cases}$$

Nadto z (ζ) otrzymujemy dalej:

$$(\vartheta) \quad \dots \quad D = \begin{vmatrix} 11, & 6 \\ 6, & 9 \end{vmatrix} = 63, \quad D_{1,1} = 9, \quad D_{2,2} = 11.$$

Jeżeli z (ε) i (ε') wyrugujemy ε_2, to znajdziemy równania normalne:

$$(\zeta') \quad \dots\dots \quad \begin{cases} 8\,\varepsilon_1 + 3\,\varepsilon_3 = 2{,}7, \\ 3\,\varepsilon_1 + 9\,\varepsilon_3 = 2{,}7, \end{cases}$$

z których wypadają na ε_1, ε_2 i ε_3 te same, co i poprzednio, wartości (η) i $D_{3,3} = 8$. Mamy więc:

$$(\lambda) \dots \sqrt{\frac{D_{1,1}}{D}} = \sqrt{\frac{9}{63}} = 0{,}378, \quad \sqrt{\frac{D_{2,2}}{D}} = \sqrt{\frac{11}{63}} = 0{,}418,$$

$$\sqrt{\frac{D_{3,3}}{D}} = \sqrt{\frac{8}{63}} = 0{,}356.$$

Gdy (η) podstawimy w (ε), a następnie znalezione błędy podniesiemy do kwadratu i, pomnożywszy je przez odpowiednie ważności, zsumujmy; gdy sumę podzielimy przez $3 + 1 - 3 = 1$ i z ilorazu wyciągniemy pierwiastek kwadratowy, to wypadnie:

$$s(\xi) = \pm 1{,}076, \quad p(\xi) = \pm 0{,}726$$

oraz, przy pomocy (λ),

$$(\mu) \quad \dots\dots \quad \begin{cases} p(\varepsilon_1) = \pm 0{,}726 \times 0{,}378 = \pm 0'',274, \\ p(\varepsilon_2) = \pm 0{,}726 \times 0{,}418 = \pm 0'',303, \\ p(\varepsilon_3) = \pm 0{,}726 \times 0{,}356 = \pm 0'',258. \end{cases}$$

Najprawdopodobniejszemi tedy wielkościami kątów uważanego trójkąta, czyniącemi zadość warunkowi $A+B+C=180^\circ$, są:

$$(\nu)\ldots\left\{\begin{array}{llll} A=56^\circ25'36'',657 & \text{z błędem prawdopod.} & p(A)=\pm 0'',274, \\ B=88^\circ40'15'',629 & \quad\text{"} \quad\quad\text{"} & p(B)=\pm 0'',303, \\ C=34^\circ54'\ 7'',714 & \quad\text{"} \quad\quad\text{"} & p(C)=\pm 0'',258. \end{array}\right.$$

W trójkącie ABC:

$$(o)\ \ldots\ AB=x=\frac{a\sin C}{\sin A},\quad AC=y=\frac{a\sin B}{\sin A}.$$

Gdy w (o) za a, A, B i C podstawimy ich najprawdopodobniejsze wielkości (β) i (ν), wtedy na najprawdopodobniejsze odległości punktów B i C od A otrzymamy:

$$x=147^m,899,\quad y=258^m,415.$$

Podamy jeszcze, na zakończenie, bardzo ciekawy przykład zastosowania metody najmniejszych kwadratów do spraw społecznych *).

ZADANIE 9. Miasto A, podzielone na dziewięć dzielnic, jest zamieszkane przez ludność dwóch typów: X i Y. Oba typy, pod wielu względami, bardzo się od siebie różnią i są niejednostajnie po dzielnicach rozsiedlone. W tem samem mieście funkcyonują kasy oszczędnościowe, do których wszyscy mają jednaki przystęp; kasy wydają składającym pieniądze książeczki, przeznaczone do zapisywania wnoszonych kwot. Zachodzi pytanie, który z obu typów ludności liczniej korzysta z usług kas oszczędnościowych?

Zagadnienie, w zasadzie, jest bardzo proste, wystarczy bowiem obliczyć, ile w mieście A mieszka osób typu X, ile osób typu Y oraz ile książeczek wydano osobom typu X i ile osobom typu Y. Skoro z takich danych obrachujemy, ile przeciętnie wypada książeczek na 1000 osób jednego i drugiego typu, mieć będziemy odpowiedź, nie pozostawiającą żadnej wątpliwości.

---

*) Patrz artykuł p. Wł. Gosiewskiego w № 13 „Wszechświatu" za rok 1890.

Ale kasy oszczędnościowe nie notują typu, do jakiego należą osoby składające pieniądze, skutkiem czego w odnośnych sprawozdaniach nie znajdujemy potrzebnych nam wiadomości do tego, aby odpowiedzieć ściśle na postawione sobie pytanie.

Wobec takiego położenia rzeczy, starajmy się przynajmniej o odpowiedź prawdopodobną.

Wzmiankowane sprawozdania podają oddzielnie liczbę książeczek, wydanych osobom, zamieszkującym różne dzielnice miasta; z innego źródła wiemy także, ile osób każdego typu mieszka w każdej dzielnicy. Dane statystyczne są następujące:

W dzielnicy	Mieszka osób		Wydano książeczek
	typu X	typu Y	
I	42 752	7 533	239
II	25 960	10 712	247
III	4 562	31 863	484
IV	42 626	33 996	656
V	27 837	17 617	703
VI	56 009	27 948	655
VII	42 736	5 120	236
VIII	39 711	3 511	261
IX	10 291	8 390	111

Jeżeli przez x oznaczymy liczbę książeczek, jaką przeciętnie posiada każde 1000 osób typu X, przez y liczbę książeczek, posiadanych przez każde 1000 osób typu Y, to z powyższej tabelki otrzymujemy dziewięć następujących równań:

$$(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} 42{,}752\, x + 7{,}533\, y &= 239 \\ 25{,}960\, x + 10{,}712\, y &= 247 \\ 4{,}562\, x + 31{,}863\, y &= 484 \\ 42{,}626\, x + 33{,}996\, y &= 656 \\ 27{,}837\, x + 17{,}617\, y &= 703 \\ 56{,}009\, x + 27{,}948\, y &= 655 \\ 42{,}736\, x + 5{,}120\, y &= 236 \\ 39{,}711\, x + 3{,}511\, y &= 261 \\ 10{,}291\, x + 8{,}390\, y &= 111. \end{aligned} \right.$$

Z równań (α) wypadają dwa równania normalne Gauss'a (poprzestajemy na liczbach całkowitych):

$$(\beta) \quad \dots \quad \begin{cases} 11\,761\,x + 4\,695\,y = 124\,646, \\ 4\,695\,x + 3\,543\,y = 75\,917, \end{cases}$$

dla których:

$$(\gamma) \quad \dots \quad \begin{cases} D = 19\,626\,198, \\ D_1 = 85\,190\,463, \quad D_2 = 307\,646\,867, \\ D_{1,1} = 3\,543, \quad D_{2,2} = 11\,761, \end{cases}$$

a stąd:

$$x = \frac{D_1}{D} = 4{,}341, \quad y = \frac{D_2}{D} = 15{,}675,$$

czyli $\frac{y}{x} = \frac{15{,}675}{4{,}341} = 3{,}61$, co znaczy, że typ Y najprawdopodobniej korzysta 3,61 razy liczniej z usług kas oszczędnościowych, aniżeli typ X.

Gdy znalezione na x i y wartości podstawimy w (α), otrzymamy $\Sigma\alpha^2_\lambda = 111\,043$. Jest więc:

$$s(\xi) = \sqrt{\frac{\Sigma\alpha^2_\lambda}{9-2}} = \sqrt{\frac{111\,043}{7}} = \pm\, 125{,}95,$$

$$p(\xi) = 125{,}95 \times 0{,}674\,49 = \pm\, 84{,}95$$

oraz:

$$p(x) = p(\xi)\sqrt{\frac{D_{1,1}}{D}} = 84{,}95 \times 0{,}013\,44 = \pm\, 1{,}142,$$

$$p(y) = p(\xi)\sqrt{\frac{D_{2,2}}{D}} = 84{,}95 \times 0{,}024\,48 = \pm\, 2{,}080,$$

czyli można postawić jeden przeciwko jednemu, że liczba książeczek, posiadanych przeciętnie przez każde 1000 osób, należących do typu X, zawiera się w granicach od 3,199 do 5,483; liczba książeczek, posiadanych przez każde 1000 osób, należących do typu Y, mieści się w granicach od 13,595 do 17,755.

45. ZAKOŃCZENIE. Podane w niniejszym rozdziale zadania zaczerpnięte przeważnie z książek: Hagena, Folkierskiego i Gustawicza, nie wyczerpują naturalnie wszystkich rodzajów zastosowań, do jakich nadaje się metoda najmniejszych kwadratów;

przedstawiają jednak charakterystyczne typy zagadnień, z jakiemi spotkać się można w miernictwie, astronomii, analizie, w badaniach meteorologicznych, fizycznych i społecznych. W podobny sposób można rozwiązywać także różnego rodzaju zagadnienia doświadczalne w umiejętnościach technicznych.

Widzimy stąd, że, jak to nadmieniliśmy w przedmowie, metoda najmniejszych kwadratów nie ogranicza się bynajmniej na samem tylko wyrównywaniu spostrzeżeń, lecz posiada daleko obszerniejsze pole zastosowań, które, zwłaszcza przy badaniach fizycznych, technicznych i społecznych, niepoślednie usługi oddać mogą. Dla bardzo wielu np. rodzajów zjawisk, nie dających się drogą czystego rozumowania ująć w ścisłe prawo, jest rzeczą nader ważną otrzymać choćby prawdopodobne wyrażenia analityczne. Wtedy bowiem: najprzód, można całe szeregi ze spostrzeżeń otrzymanych cyfr zastąpić przez względnie bardzo krótką formułę (wzory empiryczne), co dla praktyki stanowi duże udogodnienie, i następnie, wyrażenia analityczne nadają się do wielu, niezależnych od spostrzeżeń, działań, mogą zatem łatwiej doprowadzić badacza do wniosków ogólniejszego znaczenia, aniżeli te, jakie wyprowadzić jest w stanie ze spostrzeżeń nie ujętych w formułę, lecz ułożonych w same tylko szeregi liczbowe.

UZUPEŁNIENIA.

UZUPEŁNIENIE I.

WYZNACZENIE CAŁKI $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-z^2} dz$.

Niech będzie

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \int_0^\infty e^{-z^2} dz = v.$$

Podstawmy $z = t\sqrt{\rho}$; ponieważ wtedy $z^2 = \rho t^2$ i $dz = \sqrt{\rho}\, dt$, zatem

$$\int_0^\infty e^{-\rho t^2} dt = \frac{v}{\sqrt{\rho}}.$$

Jeżeli obie strony ostatniej równości pomnożymy przez $e^{-\rho} d\rho$, wypadnie

$$\int_0^\infty e^{-\rho(1+t^2)} dt d\rho = \frac{ve^{-\rho}}{\sqrt{\rho}} d\rho.$$

Zcałkujmy obie strony względem ρ, w granicach od $\rho = 0$ do $\rho = \infty$, otrzymamy wówczas

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\rho(1+t^2)} dt d\rho = \int_0^\infty \frac{ve^{-\rho}}{\sqrt{\rho}} d\rho.$$

Że jednak

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho(1+t^2)}\, dt d\rho = -\frac{dt}{1+t^2}\Big|_0^{\infty} e^{-\rho(1+t^2)} = -\frac{dt}{1+t^2}(0-1) = \frac{dt}{1+t^2},$$

mamy więc

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = v \int_0^{\infty} \frac{e^{-\rho}}{\sqrt{\rho}}\, d\rho.$$

Gdy w całce po stronie drugiej podstawimy

$$\rho = z^2, \text{ skąd } d\rho = 2zdz,$$

to wypadnie

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2v \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz,$$

albo, po uwzględnieniu (1),

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2v^2 = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Lecz

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \Big|_0^{\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2},$$

co, po podstawieniu w (2), daje $2v^2 = \frac{\pi}{2}$, czyli

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad v = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Wiemy jednak, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{0} e^{-z^2} dz + \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = 2\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz,$$

więc

$$(4) \quad \dots\dots \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi},$$

o co nam właśnie chodziło.

Jeżeli w (3) podstawimy $z = hx$, skutkiem czego $z^2 = x^2h^2$ i $dz = hdx$, to otrzymamy

$$\int_0^\infty e^{-z^2} dz = h\int_0^\infty e^{-h^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

czyli

$$(5) \quad \dots\dots\dots \quad \int_0^\infty e^{-h^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2h},$$

po wzięciu zaś pochodnej obu stron względem h,

$$-2h\int_0^\infty x^2e^{-h^2x^2} dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2h^2}.$$

Wypada stąd

$$(6) \quad \dots\dots\dots \quad \int_0^\infty x^2e^{-h^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4h^3}.$$

Jest to wartość całki, której ważne znaczenie niebawem poznamy.

Gdy w (6) założymy $h=1$, mieć będziemy $\int_0^\infty x^2e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$,

stąd zaś

$$(7) \quad \dots\dots\dots \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

UZUPEŁNIENIE II.

Obrachowanie wartości liczebnych wyrażenia

$$\theta(xh) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{xh} e^{-z^2} dz.$$

Wiadomo, że funkcya e^{-z^2} daje się, według wzoru Maclaurin'a, rozwinąć na szereg zbieżny

$$(1)\quad e^{-z^2} = 1 - \frac{z^2}{1} + \frac{z^4}{1.2} - \frac{z^6}{1.2.3} + \frac{z^8}{1.2.3.4} - \frac{z^{10}}{1.2.3.4.5} + \frac{z^{12}}{1.2.3.4.5.6} - \ldots$$

Po pomnożeniu obu stron przez dz i zcałkowaniu, w granicach od 0 do xh, otrzymujemy

$$(2)\quad \int_0^{xh} e^{-z^2} dz = \left[z - \frac{1}{1!}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{z^5}{5} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{z^7}{7} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{z^9}{9} - \ldots \right]_0^{xh}$$

$$= xh - \frac{1}{1!}\cdot\frac{(xh)^3}{3} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{(xh)^5}{5} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{(xh)^7}{7}$$

$$+ \frac{1}{4!}\cdot\frac{(xh)^9}{9} - \frac{1}{5!}\cdot\frac{(xh)^{11}}{11} + \frac{1}{6!}\cdot\frac{(xh)^{13}}{13} - \ldots,$$

t. j. również szereg zbieżny i to tem szybciej zbieżny, im xh jest mniejsze.

Załóżmy na przykład $xh = 0{,}1$. Z trzech pierwszych wyrazów otrzymuje się liczbę 0,099 667 67, po pomnożeniu której przez $\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1{,}128\,38$ wypada 0,112 4630, czyli liczba, jaką odnajdujemy w tablicy I-ej.

Z danej tedy granicy xh obliczyć całkę, a więc i $\theta(xh)$ jest rzeczą względnie łatwą; lecz zadanie odwrotne, mianowicie dla danej wartości $\theta(xh)$ odnaleźć odpowiednie xh, jest o wiele trudniejsze.

Dla praktyki, w której nie chodzi o wiele cyfr dziesiętnych, wystarczy obrachować xh przy pomocy tablicy I-ej, za pośrednictwem zwykłej (jak w logarytmach) interpolacyi; gdy jednak chodzi o większą ścisłość, jakiej wymagają liczby zasadnicze, sposób ten nie wystarcza, uciec się zatem trzeba do innego.

Jeżeli w równaniu (2) podstawimy $xh = t$, mieć będziemy

$$\int_0^t e^{-z^2} dz = t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{10} t^5 - \frac{1}{42} t^7 + \frac{1}{216} t^9 - \frac{1}{1320} t^{11}$$

$$+ \frac{1}{9360} t^{13} - \ldots,$$

czyli, gdy nam chodzi o $\theta(xh) = \theta(t) = A$, musimy rozwiązać równanie

$$(3) \ . \quad t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{10} t^5 - \frac{1}{42} t^7 + \frac{1}{216} t^9 - \frac{1}{1320} t^{11} + \frac{1}{9360} t^{13} - \ldots$$

$$\ldots = \frac{\sqrt{\pi}}{2} A = 0{,}886\,227\,A,$$

w którem, naturalnie, stronę lewą należy ograniczyć do skończonej liczby wyrazów.

Ile należy użyć wyrazów po stronie lewej, o tem przybliżoną wskazówkę dać nam może tablica I; wszakże, po znalezieniu odpowiedniej wartości na t z potrzebną nam liczbą cyfr dziesiętnych, trzeba w pierwszy opuszczony wyraz podstawić znalezioną wartość na t, aby się przekonać, czy przez opuszczenie tego wyrazu ostatnie cyfry strony drugiej równania nie ulegają zmianie.

Jedną z bardzo ważnych liczb w „Metodzie najmniejszych kwadratów" jest wartość xh, odpowiadająca wartości $A = \theta(xh) = 0{,}5$ (patrz art. 13). Po wprowadzeniu tego założenia w (3), otrzymujemy równanie

$$(4) \quad t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{10} t^5 - \frac{1}{42} t^7 + \frac{1}{216} t^9 - \frac{1}{1320} t^{11} + \frac{1}{9360} t^{13} - \ldots$$

$$\ldots = 0{,}443\,113\,5,$$

któremu czyni zadość

$$(5) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad t = xh = 0{,}476\,936\,4,$$

jak o tem, za pośrednictwem podstawienia, niezbyt trudno przekonać się można.

UZUPEŁNIENIE III.

Способ Гаусса.

Drugi sposob wyprowadzenia wzoru na prawo błędów.

Z art. 4-go wiadomo nam, że gdy funkcyę, zwaną prawem błędów, oznaczymy przez $f(x)$, to $f(x)$ maleje ze wzrostem x oraz

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \quad f(x) = f(-x) \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

основное [illegible]

Oprócz tego, przyjmijmy z góry za pewnik zasadę Gauss'a, że **najprawdopodobniejszą wartością** n **razy, z jednakową dokładnością, wymierzonej wielkości jest średnia arytmetyczna z otrzymanych rezultatów**, czyli, gdy otrzymane z przemierzenia wielkości ξ rezultaty oznaczymy przez $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$, najprawdopodobniejszą wartością wielkości ξ jest

$$(2) \quad a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n} = \frac{1}{n}\,(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n).$$

Błędami tych pomiarów są ilości:

$$x_1 = a_1 - \xi,\; x_2 = a_2 - \xi,\; x_3 = a_3 - \xi, \ldots, x_{n-1} = a_{n-1} - \xi,\; x_n = a_n - \xi;$$

stąd wypada:

$w_1 = f(x_1)\,dx_1$ na prawdopodobieństwo, że błąd zawiera się w granicach od x_1 do $x_1 + dx_1$,

$w_2 = f(x_2)\,dx_2$ " " " " x_2 " $x_2 + dx_2$,

i t. d. i t. d. i t. d.

$w_n = f(x_n)\,dx_n$ " " " " x_n " $x_n + dx_n$.

Prawdopodobieństwo jednoczesnego pojawienia się powyższych błędów równa się

$$(3) \quad . \; . \; . \; . \quad W = f(x_1) . f(x_2) . f(x_3) \ldots f(x_n) . dx_1 . dx_2 . dx_3 \ldots dx_n.$$

Dla najprawdopodobniejszej wartości $\xi = a$, W powinno stać się największością, t. j. pochodna pierwsza wyrażenia (3), po podstawieniu w nią $\xi = a$, winna stać się zerem, czyli musi być

$$(4) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \left(\frac{dW}{d\xi}\right)_{\xi = a} = 0,$$

albo, ponieważ W przy $\xi = a$ nie staje się ani zerem, ani nieskończonością, musi też być

$$(4') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \left(\frac{d \log_e W}{d\xi}\right)_{\xi = a} = 0.$$

$d \lg z = \frac{1}{z} dz$

Że zaś $\frac{dx_1}{d\xi} = \frac{dx_2}{d\xi} = \frac{dx_3}{d\xi} = \ldots = \frac{dx_n}{d\xi} = -1$, więc

$$(5) \quad . \; . \; . \; . \quad \frac{d \log_e W}{d\xi} = -\left[\frac{f'(x_1)}{f(x_1)} + \frac{f'(x_2)}{f(x_2)} + \frac{f'(x_3)}{f(x_3)} + \ldots + \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}\right],$$

[illegible] $x_1, x_2,$

bo $\frac{d}{d\xi}(d\xi) = 0$

a gdy oznaczymy w ogóle

$$(6) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \varphi(x),$$

z wyrażenia (5), po podstawieniu a za ξ, otrzymujemy, według (4'),

$$(4'') \; . \; . \; \varphi(a_1 - a) + \varphi(a_2 - a) + \varphi(a_3 - a) + \ldots + \varphi(a_n - a) = 0.$$

Warunkowi (4'') musi uczynić zadość funkcya $\varphi(x)$ przy jakichkolwiek $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, byle a zostało z tych wartości wyznaczone według wzoru (2). Różniczkując zatem (4'') względem a_1, mamy

$$\varphi'(a_1 - a)\frac{d(a_1 - a)}{da_1} + \varphi'(a_2 - a)\frac{d(a_2 - a)}{da_1} + \ldots$$

$$\ldots + \varphi'(a_n - a)\frac{d(a_n - a)}{da_1} = 0,$$

skąd, ponieważ

$$\frac{da}{da_1} = \frac{1}{n}, \; \frac{da_1}{da_1} = 1, \text{ zaś } \frac{da_2}{da_1} = \frac{da_3}{da_1} = \ldots = \frac{da_n}{da_1} = 0,$$

wypada

$$\varphi'(a_1 - a) = \frac{1}{n}\left\{\varphi'(a_1 - a) + \varphi'(a_2 - a) + \varphi'(a_3 - a) + \ldots + \varphi'(a_n - a)\right\}$$

i podobnie:

$$\varphi'(a_2-a)=\frac{1}{n}\{\varphi'(a_1-a)+\varphi'(a_2-a)+\varphi'(a_3-a)+\ldots+\varphi'(a_n-a)\},$$

$$\varphi'(a_3-a)=\frac{1}{n}\{\varphi'(a_1-a)+\varphi'(a_2-a)+\varphi'(a_3-a)+\ldots+\varphi'(a_n-a)\},$$

i t. d. i t. d.

$$\varphi'(a_n-a)=\frac{1}{n}\{\varphi'(a_1-a)+\varphi'(a_2-a)+\varphi'(a_3-a)+\ldots+\varphi'(a_n-a)\},$$

$= a_1 - a$
$= a_2 - a$
$= a_n - a$

t. j. gdy za błędy rzeczywiste przyjmiemy różnice pomiędzy wartościami otrzymanemi ze spostrzeżeń a najprawdopodobniejszą wartością mierzonej wielkości, i gdy te błędy oznaczymy przez x, $\varphi'(x)$ powinno być stałe, czyli musi być

$$(7) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \varphi'(x)=C_1; \qquad = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right)$$

po zcałkowaniu

$$\varphi(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\int C_1dx+C_2=C_1x+C_2, \quad = \frac{y'}{y} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

gdzie C_1 i C_2 są dwiema stałemi. Inaczej

$$\frac{d\log_e f(x)}{dx}=C_1x+C_2, \text{ lub } d\log_e f(x)=C_1xdx+C_2dx. \quad = \frac{dy}{y}$$

Ponowne całkowanie daje

$$\log_e f(x)=C_1\int xdx+C_2\int dx+\log_e C=\tfrac{1}{2}C_1x^2+C_2x+\log_e C,$$

gdzie znów C jest trzecią stałą.

Ostatnie wyrażenie można napisać pod postacią

$$(8) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; f(x)=C\,.\,e^{\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x}.$$

To wyrażenie powinno uczynić zadość warunkowi $f(x)=f(-x)$, t. j. powinno być

$$C\,.\,e^{\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x}=C\,.\,e^{\frac{1}{2}C_1x^2-C_2x};$$

może to mieć miejsce tylko wtedy, gdy $C_2=0$.

Skutkiem tego

(8') . . . . $f(x) = C \,.\, e^{\frac{1}{2} C_1 x^2}$.

Lecz $f(x)$ maleje ze wzrostem x, więc $\frac{1}{2}C_1$ musi być ujemne; możemy je, dla uwydatnienia tej własności, oznaczyć przez $-h^2$, tak, że $\frac{1}{2}C_1 = -h^2$, co uczyniwszy, otrzymujemy   cu. c/7, 13

(8'') . . . . $f(x) = C \,.\, e^{-h^2 x^2}$.

Że zaś

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2}\, dx = 1,$$

a ze wzoru (5) w uzupełnieniu I-em mamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

przeto $C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, czyli ostatecznie, po podstawieniu powyższego wyrażenia na C w (8''), przychodzimy do formuły

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2},$$

identycznej z wzorem (21), podanym w art. 10 ym.

UZUPEŁNIENIE IV.

Przejście od błędów pojedynczych do średnich

Załóżmy, że błąd x pewnej niemierzonej wielkości ξ jest funkcyą liniową zupełnie niezależnych błędów $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$, należących do bezpośrednio spostrzeganych niewiadomych $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$, czyli, że

(1) . . . . . $x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_m x_m$,

gdzie $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_m$ są ilościami stałemi.

Po podniesieniu obu stron do kwadratu, wypada

(2) . . . . $x^2 = \Sigma C^2{}_\lambda x^2{}_\lambda + 2\Sigma C_\lambda C_\mu x_\lambda x_\mu.$

Jeżeli niewiadomych $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$ ściśle wyznaczyć nie jesteśmy w stanie, to błędom $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ możemy nadawać rozmaite wartości, z odpowiedniem dla każdej prawdopodobieństwem.

Owóż, gdy prawdopodobieństwo zejścia się danej kombinacyi błędów $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$, czyli prawdopodobieństwo zajścia odpowiedniego tej kombinacyi błędu x oznaczymy przez

(3) . . . . $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)\, dx_1 . dx_2 . dx_3 \ldots dx_m$

i gdy (2) pomnożymy przez to prawdopodobieństwo oraz iloczyn zcałkujemy względem $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$, w granicach od $-\infty$ do $+\infty$, w takim razie otrzymamy kwadrat błędu średniego wyrażenia (2), mianowicie

$$(4) \ldots\ S^2 = \Sigma \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} C^2{}_\lambda x^2{}_\lambda\, \varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)\, dx_1 . dx_2 . dx_3 \ldots dx_m$$

$$+ 2\Sigma \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} C_\lambda C_\mu x_\lambda x_\mu\, \varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)\, dx_1 . dx_2 . dx_3 \ldots dx_m.$$

Lecz, po oznaczeniu dokładności spostrzeżeń, czynionych nad $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m$, przez $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_m$, mamy

(5) . . . . $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)\, dx_1 . dx_2 . dx_3 \ldots dx_m$

$$= \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2{}_1 x^2{}_1} dx_1 . \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2{}_2 x^2{}_2} dx_2 . \frac{h_3}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2{}_3 x^2{}_3} dx_3 \ldots \frac{h_m}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2{}_m x^2{}_m} dx_m,$$

ponieważ zaś $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ są niezależne i w ogóle, według (7') w art. 4-ym oraz (21) w art. 9-ym, jest

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h_\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2{}_\lambda x^2{}_\lambda}\, dx_\lambda = 1,$$

zatem (4) przechodzi na

$$(4') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S^2 = \Sigma C^2{}_\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x^2{}_\lambda \frac{h_\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2{}_\lambda x^2{}_\lambda} dx_\lambda$$

$$+ 2\Sigma C_\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x_\lambda \frac{h_\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2{}_\lambda x^2{}_\lambda} dx_\lambda \,.\, C_\mu \int_{-\infty}^{+\infty} x_\mu \frac{h_\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2{}_\mu x^2{}_\mu} dx_\mu.$$

Wiemy jednak (z (10) w art. 6-ym i (9″) w art. 5-ym), że w ogóle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2{}_\lambda \frac{h_\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2{}_\lambda x^2{}_\lambda} dx_\lambda = S^2{}_\lambda, \text{ a } \int_{-\infty}^{+\infty} x_\lambda \frac{h_\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2{}_\lambda x^2{}_\lambda} dx_\lambda = 0,$$

skutkiem czego (4′) przybiera postać

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S^2 = \Sigma C^2{}_\lambda S^2{}_\lambda,$$

t. j., gdy pomiędzy błędami pojedynczymi zachodzi związek (1), względnie (2), to pomiędzy odpowiednimi im błędami średnimi zachodzi związek (6), jeżeli błędy $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ są zmiennemi niezależnemi, co zawsze ma miejsce, ile razy pomienione błędy pochodzą ze spostrzeżeń bezpośrednich.

UZUPEŁNIENIE V.

Tablica kwadratów oraz jej użycie.

W metodzie najmniejszych kwadratów zachodzi potrzeba podnoszenia liczb do kwadratu, obliczania iloczynów dwóch liczb i sumowania zarówno kwadratów jak i rzeczonych iloczynów. Działania te stanowią pracę bardzo mozolną i to tem mozolniejszą, im więcej mamy niewiadomych i im liczniejsze są spostrzeżenia.

Zazwyczaj działania powyższe wykonywają się za pomocą logarytmów, ale jest także inny jeszcze, podany przez Bessel'a, sposób, który posiada bardzo wiele zalet i do tego stopnia jest praktyczny, że Bessel, nawet gdy miał nie same liczby, lecz ich logarytmy, przechodził od logarytmów do liczb, aby módz zastosować sposób pomieniony.

Za podstawę do tego sposobu postępowania służy tablica kwadratów liczb, którą tu podajemy (Tab. II), jako przedruk z książki Hagena.

Znajdujemy w niej trzy kolumny: dla liczb, dla ich kwadratów i dla różnic pomiędzy kwadratami.

Jeżeli dane liczby znajdują się w tablicy, mamy w niej ich kwadraty dane bezpośrednio; gdy dana liczba nie zawiera się w tablicy, jej kwadrat można obliczyć drogą interpolacyi, tak samo jak w logarytmach.

Gdyby nam chodziło np. o kwadrat z 4,614, to ponieważ w tab. II-ej znajdujemy:

$$\left.\begin{array}{l} \text{dla } 4{,}61 \text{ kwadrat} = 21{,}252 \\ \;\;\text{„} \;\; 4{,}62 \quad \text{„} \quad\; = 21{,}344 \end{array}\right\} \text{ różnica kwadratów} = 0{,}092,$$

przeto $(4{,}614)^2 = 21{,}252 + 0{,}092 \times 0{,}4 = 21{,}252 + 0{,}037 = 21{,}289$, jak być powinno istotnie, gdy poprzestajemy na trzech cyfrach dziesiętnych. Wypada stąd:

$$(46{,}14)^2 = 2\,128{,}9$$
$$(0{,}461\,4)^2 = 0{,}212\,89 \text{ i t. d.}$$

Rozumie się, że jest to rachunek tylko przybliżony, w każdym jednak razie najczęściej wystarczający.

Za pomocą naszej tablicy można także obliczać i iloczyny dwóch liczb. Przypuśćmy np, że nam chodzi o iloczyn $a.b$.

Ponieważ $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, więc

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2},$$

skoro zaś $(a+b)^2$, a^2 i b^2 możemy obrachować z tab. II-ej, zatem i z iloczynem $a.b$ może być to samo uczynione.

Jeżeli np. $a = 2{,}36$, $b = 5{,}12$, skąd $a+b = 7{,}48$, z tab. II-ej:

$$\begin{array}{r} (2{,}36)^2 = \;\; 5{,}569\,6 \\ (5{,}12)^2 = \underline{26{,}214\;\;\;} \\ 31{,}783\,6 \\ (7{,}48)^2 = 55{,}950, \text{ czyli} \\ (a+b)^2 - a^2 - b^2 = 24{,}166\,4; \text{ wypada więc} \end{array}$$

$$ab = \frac{24{,}166\,4}{2} = 12{,}083\,2 = 2{,}36 \times 5{,}12.$$

Gdyby się na tem kończył pożytek dopiero co opisanego sposobu, w takim razie byłby niewielki, czy bowiem, dla obliczenia sumy iloczynów, składowe jej części obrachowywać będziemy tą lub inną drogą, na jedno wychodzi. Ale można też obliczać wprost sumy iloczynów, bez wyznaczania iloczynów poszczególnych, a to jest już ogromnem ułatwieniem i skróceniem pracy.

Istotnie, skoro $ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$, to oczywiście

$$\Sigma ab = \frac{\Sigma (a+b)^2 - \Sigma a^2 - \Sigma b^2}{2},$$

że zaś, tak czy inaczej, sumy kwadratów obliczyć musimy, zatem możemy obrachować i sumy iloczynów, bez uciekania się do iloczynów poszczególnych.

Dla przykładu przypuśćmy, że mamy następujące liczby:

a	b	c	$a+b$	$a+c$	$b+c$	$a+b+c$
1,05	0,17	2,05	1,22	3,10	2,22	3,27
3,24	0,74	0,16	3,98	3,40	0,90	4,14
0,63	1,12	1,43	1,75	2,06	2,55	3,18
2,14	0,48	0,98	2,62	3,12	1,46	3,60
1,82	2,10	0,85	3,92	2,67	2,95	4,77
8,88	4,61	5,47	13,49	14,35	10,08	18,96

Z tablicy kwadratów otrzymujemy:

a^2	b^2	c^2	$(a+b)^2$	$(a+c)^2$	$(b+c)^2$	$(a+b+c)^2$
1,102 5	0,028 9	4,202 5	1,488 4	9,610 0	4,928 4	10,693
10,498	0,547 6	0,025 6	15,840	11,560	0,810 0	17,140
0,396 9	1,254 4	2,044 9	3,062 5	4,243 6	6,502 5	10,112 4
4,579 6	0,230 4	0,960 4	6,864 4	9,734 4	2,131 6	12,960
3,312 4	4,410 0	0,722 5	15,366	7,128 9	8,702 5	22,753
19,889 4	6,471 3	7,955 9	42,621 3	42,276 9	23,075 0	73,658 4

Z ostatniej tabelki wypada:

$$\Sigma ab = \frac{\Sigma (a+b)^2 - \Sigma a^2 - \Sigma b^2}{2} = \frac{42,6213 - 26,3607}{2}$$

$$= \frac{16,2606}{2} = 8,1303,$$

$$\Sigma ac = \frac{\Sigma (a+c)^2 - \Sigma a^2 - \Sigma c^2}{2} = \frac{42,2769 - 27,8453}{2}$$

$$= \frac{14,4316}{2} = 7,2158,$$

$$\Sigma bc = \frac{\Sigma (b+c)^2 - \Sigma b^2 - \Sigma c^2}{2} = \frac{23,0750 - 14,4272}{2}$$

$$= \frac{8,6478}{2} = 4,3239.$$

Takim sposobem otrzymaliśmy wszystkie ilości, jakie mogą być potrzebne przy użyciu metody najmniejszych kwadratów.

Aby je sprawdzić, wyprowadźmy z otrzymanych sum kwadratów i iloczynów wartość $\Sigma (a+b+c)^2$, którą z góry, dla porównania, mamy już przygotowaną w ostatniej tabelce.

Ponieważ

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

przeto

$$\Sigma (a+b+c)^2 = 73,6584 = \Sigma a^2 + \Sigma b^2 + \Sigma c^2 + 2\Sigma ab + 2\Sigma ac + 2\Sigma bc$$

$$= \left\{ \begin{array}{r} 19,8894 \\ 6,4713 \\ 7,9559 \\ 16,2606 \\ 14,4316 \\ 8,6478 \\ \hline 73,6566 \end{array} \right.$$

t. j. prawie to samo, co być powinno, gdyż drobna różnica, jaka wypadła (0,0018), nie ma tu znaczenia i pochodzi z łatwych do zrozumienia powodów.

UZUPEŁNIENIE VI.

[illegible]

O WYZNACZNIKACH ORAZ ICH ZASTOSOWANIU DO ROZWIĄZYWANIA WIELU RÓWNAŃ STOPNIA PIERWSZEGO Z TYLUŻ NIEWIADOMEMI.

Wyobraźmy sobie n różnych przedmiotów, oznaczonych kolejno idącemi liczbami od 1 do n. Każde zestawienie tych przedmiotów w rząd dowolnego kierunku, najlepiej w rząd poziomy, nazywa się przemianą. Dwie przemiany są różne, jeżeli, po napisaniu ich pod sobą, znajdzie się chociaż jedna kolumna z przedmiotami różnymi. Jeżeli, jak to założyliśmy, pomiędzy przedmiotami są same tylko różne, to gdy się znajdzie jedna kolumna, w dwóch pod sobą napisanych przemianach, zawierająca przedmioty różne, musi się oczywiście znaleźć co najmniej i druga kolumna również z przedmiotami różnymi. Inaczej, dwie różne przemiany, utworzone z n różnych przedmiotów, muszą się od siebie różnić co najmniej dwoma przedmiotami, stojącymi na różnych miejscach w jednej i drugiej.

Różnych przemian, utworzonych z n różnych przedmiotów, nie może być nieograniczenie wiele, jeżeli n jest skończone. Zachodzi tedy pytanie, w jaki sposób oraz ile przemian różnych można ułożyć z n przedmiotów odmiennych.

Jednym ze sposobów układania przemian różnych jest tak zw. system podstawień kołowych, którego właśnie do naszego celu użyjemy.

Jeżeli wszystkie powyższe przedmioty ustawimy w porządku

(1) . . . . $1, 2, 3, 4, \ldots, n-1, n$

i następnie przesuniemy ten rząd w stronę lewą tak, żeby 2 stanęło na miejscu 1, a 1 przeniesiemy na koniec wiersza, manipulacya taka, dająca w rezultacie przemianę

(2) . . . . $2, 3, 4, 5, \ldots, n, \quad 1$

nazywa się podstawieniem kołowem; skoro bowiem przedmioty nasze oznaczymy liczbami na obwodzie koła (fig. 7) i zawsze rachunek zaczynać będziemy od stałego punktu A, wtedy, jak to pokazuje obwód wewnętrzny, przemianę (2) otrzymamy z (1), przez obrócenie zewnętrznego pierścienia z liczbami o n-tą część 360° w kierunku strzałki.

Czyniąc tę samą manipulacyę z przemianą (2), następnie tę samą z przemianą, jaka stąd wypadnie, i t. d., wrócimy za n-tym ruchem do pierwotnej przemiany (1), czyli otrzymamy tą drogą n pierwszych przemian różnych od siebie, choćby tylko dla tego, że za każdym razem na miejscu pierwszem stać będzie inny przedmiot.

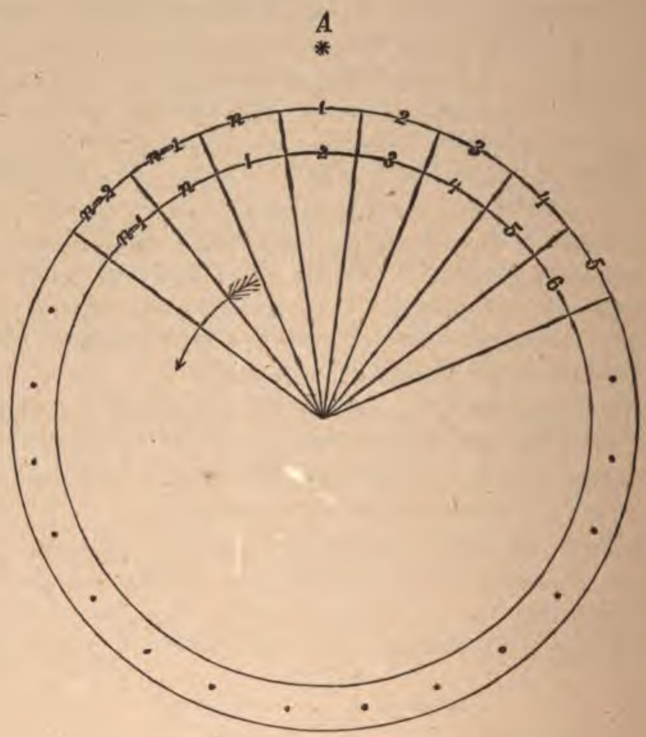

fig. 7.

Od przemiany (1) do przemiany (2) można przejść innym jeszcze sposobem, mianowicie, przestawiając 1 na miejsce 2, 2 na miejsce 1; następnie 1 na miejsce 3, 3 na miejsce 1; i t. d. póki 1 nie znajdzie się na końcu. Wzajemna zmiana miejsc dwóch przedmiotów nazywa się przestawieniem.

Z tego, cośmy powyżej powiedzieli, okazuje się, że od przemiany (1) do (2) można przejść za pomocą n—1 przestawień. Gdy n jest nieparzyste, potrzeba wykonać parzystą liczbę przestawień, aby przejść od przemiany (1) do (2) i naodwrót, gdy n parzyste od (1) do (2) przechodzi się za pomocą nieparzystej liczby przestawień.

Z przemiany (2) możemy przejść do następnej drogą podobnych przestawień, od tej nowej do następnej również, i t. d. aż do końca; albo inaczej, od przemiany (1) można przejść do każdej następnej z omawianych dotąd n przemian przez pewną liczbę przestawień. Przytem: 1) gdy n nieparzyste, od (1) do każdej następnej przemiany przechodzi się zawsze za pomocą parzystej liczby przestawień i 2) gdy n parzyste, do połowy przemian przechodzimy drogą nieparzystej, do drugiej zaś połowy drogą parzystej liczby przestawień.

Weźmy teraz np. przemianę (2) i unieruchomijmy przedmiot ostatni, czyli 1; następnie wykonajmy wszystkie podstawienia kołowe na $n—1$ przedmiotach początkowych. Powstałe stąd (łącznie z wziętą pod uwagę) $n—1$ przemiany są, widocznie, i pomiędzy sobą różne i każda z nich jest różna od każdej z poprzednio ułożonych, po wyłączeniu z takowych przemiany (2). Tak samo każdą z n przemian pierwszych rozwinąć można w $n—1$ przemian różnych pomiędzy sobą i od wszystkich innych, czyli razem mieć będziemy $n(n—1)$ przemian różnych.

Gdybyśmy te przemiany tworzyli drogą przestawień, w takim razie:

1) ponieważ przy n nieparzystem każda z n pierwszych przemian powstała z (1) przez parzystą liczbę przestawień, a z każdej z nich powstają nowe przez nieparzystą liczbę przestawień, zatem połowa wszystkich $n(n — 1)$ przemian powstaje z (1) przez parzystą, druga połowa przez nieparzystą liczbę przestawień;

2) ponieważ przy n parzystem połowa n pierwszych przemian powstała z (1) przez nieparzystą, druga połowa przez parzystą liczbę przestawień, a z tych znów każda nowa powstaje przez parzystą liczbę przestawień, więc i z pośród $n(n — 1)$ obecnie rozważanych przemian, połowa otrzymuje się z (1) przez parzystą, druga połowa przez nieparzystą liczbę przestawień.

Jeżeli w dalszym ciągu w każdej z posiadanych już $n(n—1)$ przemian, unieruchomimy dwa ostatnie przedmioty i do $n—2$ początkowych zastosujemy podstawienia kołowe, wówczas z każdej powstanie (łącznie z nią samą) po $n—2$ przemian, t. j. razem mieć będziemy $n(n—1)(n—2)$ przemian widocznie pomiędzy sobą różnych, z których również połowa powstaje z (1) przez parzystą, druga połowa przez nieparzystą liczbę przestawień.

Unieruchomiając w dalszym ciągu trzy ostatnie, cztery, pięć, i t. d. przedmiotów końcowych aż do wyczerpania wszystkich, drogą takiego samego, jak poprzednio, dowodzenia przyjdziemy do zrozumienia prawdy, że za pomocą podstawień kołowych możemy ułożyć

$$n(n-1).(n-2)\ldots 3.2.1 = n!$$

przemian różnych, z których połowa powstaje zawsze z przemiany (1) przez parzystą, druga połowa przez nieparzystą liczbę przestawień.

W taki sposób utworzone przemiany są wszystkiemi możliwemi, jakie z n różnych przedmiotów ułożyć można. Przypuśćmy bowiem, że nam dano jakąś przemianę, ułożoną z przedmiotów $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$, która pomiędzy powyżej opisanemi się nie znajduje. Przemiana ta ma jakiś przedmiot, stojący na końcu; pośród naszych n pierwszych przemian musi się znaleźć jedna, która taki sam przedmiot na ostatniem miejscu posiada. Z tej ostatniej przemiany utworzyliśmy, licząc z nią razem, $n-1$ przemian, pomiędzy któremi musi się znaleźć jedna, mająca na przedostatniem miejscu ten sam przedmiot, jaki się znajduje na przedostatniem miejscu w danej nam przemianie, gdyż system kołowy tworzenia przemian musiał tam koniecznie jeden z pomiędzy $n-1$ pozostałych przedmiotów umieścić.

Tak samo dowieść można, że musi się znaleźć pomiędzy naszemi przemianami taka, która ma na trzeciem, czwartem, i t. d. miejscu od końca te same przedmioty, jakie się znajdują na odpowiednich miejscach w danej przemianie, czyli, że dana przemiana musi się znajdować pomiędzy utworzonemi drogą podstawień kołowych.

Weźmy n^2 ilości, które oznaczmy symbolami:

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1},\ a_{1,2},\ a_{1,3},\ \ldots,\ a_{1,n} \\ a_{2,1},\ a_{2,2},\ a_{2,3},\ \ldots,\ a_{2,n} \\ a_{3,1},\ a_{3,2},\ a_{3,3},\ \ldots,\ a_{3,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1},\ a_{n,2},\ a_{n,3},\ \ldots,\ a_{n,n}. \end{array} \right.$$

Ilości te ustawiliśmy w wiersze i kolumny; wiersze są oznaczone przez pierwsze znaczki, kolumny przez drugie.

Weźmy dalej iloczyn z ilości stojących na przekątni, t. j.

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad a_{1,1} \,.\, a_{2,2} \,.\, a_{3,3} \ldots a_{n,n},$$

z których każda należy do innej kolumny i do innego, jednoimiennego z kolumną, wiersza.

Pierwsze znaczki w (4) pozostawmy bez zmiany, z drugich zaś utwórzmy wszystkie możliwe, lecz różne pomiędzy sobą przemiany i te dopiszmy kolejno, jako drugie znaczki, wykazujące z każdego wiersza tę ilość, która do danego iloczynu jako czynnik ma wchodzić.

Tym sposobem otrzymamy $n!$ iloczynów, z których każdy ma co najmniej dwa czynniki różne od wszystkich innych. Każda ilość z grupy (3) wchodzi w skład nie jednego to innego iloczynu, ale niema ani jednego takiego iloczynu, w którego skład wchodziłyby ilości, należące do tej samej kolumny lub wiersza. Iloczyny te wreszcie obejmują wszelkie możliwe ugrupowania czynników po n z pośród ilości (3), ograniczone warunkiem, aby były wyjęte z różnych kolumn i wierszy. Jakiekolwiek bowiem ugrupowanie czynników byłoby nam dane, zawsze możemy je tak poprzemieniać, żeby pierwsze znaczki szły w szeregu porządkowym $1, 2, 3, 4, \ldots, n-1, n$, wtedy zaś drugie znaczki muszą utworzyć jedną z $n!$ przemian, przez nas ułożonych, bo pomiędzy ostatniemi są wszystkie możliwe.

Połowa tych $n!$ przemian, jak wiemy, tworzy się z pierwszej, zasadniczej $(1, 2, 3, \ldots, n-1, n)$, za pośrednictwem parzystej, druga połowa za pomocą nieparzystej liczby przestawień. Gdy z iloczynem (4) połączymy: znakiem $+$ te iloczyny, któreśmy otrzymali za pomocą parzystej liczby przestawień, a znakiem — te, które wypadły z nieparzystej liczby przestawień, to powstały stąd wielomian nazywa się **wyznacznikiem** (determinantem) i symbolicznie oznacza się przez

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots, & a_{2,n} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & \ldots, & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

albo przez

(5') . . . . . $D = (a_{1,1} \, . \, a_{2,2} \, . \, a_{3,3} \dots a_{n,n})$,

lub wreszcie przez

(5'') . . . . . $D = \Sigma \pm a_{1,1} \, . \, a_{2,2} \, . \, a_{3,3} \dots a_{n,n}$.

Kształt (5) nazywa się **kwadratowym**; ilości $a_{\lambda,\mu}$ **elementami**, albo **składnikami** wyznacznika; iloczyny z tych elementów otrzymane i wchodzące w skład rozwinięcia wyznacznika zowią się jego **wyrazami**.

Jeżeli czynniki, wchodzące w skład wyrazów rozwinięcia wyznacznika (5), tak poprzestawiamy, żeby drugie znaczki tworzyły stale szereg $1, 2, 3, \dots, n$, wtedy znaczki pierwsze ułożą się w $n!$ przemian takich, jakie poprzednio tworzyły znaczki drugie; wartość poszczególnych wyrazów wyznacznika nie ulegnie, oczywiście, zmianie i znaki + oraz — pozostaną te same, t. j. wyznacznik posiadać będzie absolutnie tę samą, co i poprzednio, wartość. Lecz ustalenie porządku znaczków drugich, a uruchomienie pierwszych wychodzi na to samo, co zamiana, w kwadratowej postaci wyznacznika (5), kolumn na wiersze, a wierszy na kolumny, czyli

1) **Wartość wyznacznika nie ulega zmianie, gdy wiersze weźmiemy za kolumny, a kolumny za wiersze, przy pozostawieniu tego samego następstwa kolumn i wierszy:**

$$(6) \dots \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \dots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \dots, & a_{2,n} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & \dots, & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \dots, & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{2,1}, & a_{3,1}, & \dots, & a_{n,1} \\ a_{1,2}, & a_{2,2}, & a_{3,2}, & \dots, & a_{n,2} \\ a_{1,3}, & a_{2,3}, & a_{3,3}, & \dots, & a_{n,3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n}, & a_{2,n}, & a_{3,n}, & \dots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Jeżeli dwie jakiekolwiek kolumny wyznacznika przestawimy pomiędzy sobą i następnie rozwiniemy go na wielomian zwykłą drogą, to widocznie w tem nowem rozwinięciu muszą się znaleźć takie samy wyrazy, jak i w poprzedniem, inne bowiem pojawić się nie mogą; ale ponieważ pierwszy wyraz drugiego rozwinięcia różni się od pierwszego wyrazu poprzedniego rozwinięcia o jedno przestawienie znaczków drugich, a mimo to znaki mają jednakowe (+), przeto wszystkie wyrazy nowego rozwinięcia muszą mieć znaki przeciwne ze znakami wyrazów tej samej wartości rozwinięcia pierwszego, czyli wartość bezwzględna danego wyznacznika pozostanie ta sama, lecz znak zmieni się na przeciwny, t. j.

$$(7)\ \ldots \quad \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots, & a_{2,n} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & \ldots, & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,3}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,3}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ a_{3,1}, & a_{3,3}, & a_{3,2}, & \ldots, & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,3}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

To samo stosuje się i do przestawienia dwóch wierszy, ponieważ, według 1), wiersze można zmienić na kolumny, a kolumny na wiersze.

Gdy dwa razy przestawimy kolumny lub wiersze, wtedy każdy wyraz wyznacznika zmieni znak dwa razy, czyli nie zmieni go wcale, a temsamem wyznacznik posiadać będzie tę samą, co i poprzednio, wartość. Wynika stąd następujące prawidło ogólne:

2) *Jeżeli w danym wyznaczniku wykonamy μ przestawień kolumn i λ przestawień wierszy, wartość nowego wyznacznika będzie równa wartości wyznacznika dawnego, pomnożonej przez $(-1)^{\mu+\lambda}$.*

Jako wniosek z tej reguły wypływa bezpośrednio prawidło:

3) *Wyznacznik, posiadający dwie lub więcej kolumn, albo dwa lub więcej wierszy identycznych, równa się zeru.* Po przestawieniu bowiem dwóch kolumn (lub dwóch wierszy) identycznych z sobą, znak wyznacznika powinien się zmienić; ponieważ zaś wartość wyznacznika zmienić się nie może, skoro przestawiliśmy kolumny (lub wiersze) identyczne, zatem wyznacznik musi być równy zeru:

$$(8)\ \ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,2}, & a_{1,4}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,2}, & a_{2,4}, & \ldots, & a_{2,n} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,2}, & a_{2,4}, & \ldots, & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,2}, & a_{n,4}, & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Skoro każdy wyraz rozwiniętego wyznacznika ma zawsze jako czynnik jeden, ale tylko jeden element z jednej i tej samej kolumny i wiersza, przeto

4) Gdy wszystkie składniki tej samej kolumny lub wiersza pomnożymy przez jeden i ten sam czynnik, wartość wyznacznika będzie również przez ten czynnik pomnożoną:

$$(9)\ \ldots \quad \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \alpha . a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & \alpha . a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots, & a_{2,n} \\ a_{3,1}, & \alpha . a_{3,2}, & a_{3,3}, & \ldots, & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \alpha . a_{n,2}, & a_{n,3}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} = \alpha . \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots, & a_{2,n} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & \ldots, & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

I naodwrót: aby dany wyznacznik pomnożyć przez pewien czynnik, wystarczy przez ten czynnik pomnożyć wszystkie elementy tej samej kolumny lub tego samego wiersza.

Gdy w wyznaczniku (5) opuścimy pewną liczbę kolumn i tyleż wierszy, to utworzony z pozostałych na swych miejscach, lecz zsuniętych do siebie, składników wyznacznik nazywa się minorem danego wyznacznika takiego rzędu, ile opuściliśmy kolumn lub wierszy. Gdy np. opuścimy λ-y wiersz i μ-ą kolumnę, otrzymamy minor rzędu pierwszego

$$(10)\ \ldots \quad \left|\begin{array}{llll|lll} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,\mu-1}, & a_{1,\mu+1}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,\mu-1}, & a_{2,\mu+1}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\lambda-1,1}, & a_{\lambda-1,2}, & \ldots, & a_{\lambda-1,\mu-1}, & a_{\lambda-1,\mu+1}, & \ldots, & a_{\lambda-1,n} \\ \hline a_{\lambda+1,1}, & a_{\lambda+1,2}, & \ldots, & a_{\lambda+1,\mu-1}, & a_{\lambda+1,\mu+1}, & \ldots, & a_{\lambda+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,\mu-1}, & a_{n,\mu+1}, & \ldots, & a_{n,n} \end{array}\right| ,$$

który oznaczać będziemy symbolem $D_{\lambda,\mu}$.

W rozwinięciu wyznacznika (5) odszukajmy wyraz, który pomiędzy swymi czynnikami zawiera element $a_{\lambda,\mu}$. Wyraz ten nie może zawierać drugiego czynnika, pochodzącego z wiersza λ i z kolumny μ. Jeżeli, nienaruszając pomienionego składnika, z drugich znaczków pozostałych czynników utworzymy wszystkie możliwe przemiany, w liczbie $(n-1)!$, to otrzymamy szereg iloczynów, które muszą się znaleźć w rozwinięciu wyznacznika (5) i które, oprócz czynnika $a_{\lambda,\mu}$, nie zawierają żadnego innego składnika ani z wiersza λ, ani z kolumny μ.

Gdy wspólny ten czynnik wyrzucimy za nawias, w nawiasie mieścić się będzie minor pierwszego rzędu $D_{\lambda,\mu}$, powstały z opuszczenia wiersza λ i kolumny μ. Posiadać on będzie w rozwinięciu wyrazy (bez składników z wiersza λ i kolumny μ), którym odpowiednie można odszukać i w rozwinięciu wyznacznika (5), ale wyrazy te mogą nie mieć tych samych, co tamte, znaków. Gdybyśmy chcieli, aby miały takie same znaki, jak odpowiednie wyrazy rozwinięcia wyznacznika (5), należy minor $D_{\lambda,\mu}$ pomnożyć przez $(-1)^{\lambda+\mu-2}$, ponieważ według prawidła 2-go

$$\begin{vmatrix}
a_{1,1}, & a_{1,2}, \ldots\ldots, a_{1,\mu-1}, & a_{1,\mu}, & a_{1,\mu+1}, \ldots\ldots, a_{1,n} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
a_{\lambda-1,1}, & a_{\lambda-1,2}, \ldots, a_{\lambda-1,\mu-1}, & a_{\lambda-1,\mu}, & a_{\lambda-1,\mu+1}, \ldots, a_{\lambda-1,n} \\
a_{\lambda,1}, & a_{\lambda,2}, \ldots\ldots, a_{\lambda,\mu-1}, & a_{\lambda,\mu}, & a_{\lambda,\mu+1}, \ldots\ldots, a_{\lambda,n} \\
a_{\lambda+1,1}, & a_{\lambda+1,2}, \ldots, a_{\lambda+1,\mu-1}, & a_{\lambda+1,\mu}, & a_{\lambda+1,\mu+1}, \ldots, a_{\lambda+1,n} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
a_{n,1}, & a_{n,2}, \ldots\ldots, a_{n,\mu-1}, & a_{n,\mu}, & a_{n,\mu+1}, \ldots\ldots, a_{n,n}
\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\lambda+\mu-2}\left|\begin{array}{l|l}
a_{\lambda,\mu}, & a_{\lambda,1}, a_{\lambda,2}, \ldots\ldots\ldots, a_{\lambda,\mu-1}, a_{\lambda,\mu+1}, \ldots\ldots, a_{\lambda,n} \\
\hline
a_{1,\mu}, & a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots\ldots, a_{1,\mu-1}, a_{1,\mu+1}, \ldots\ldots, a_{1,n} \\
a_{2,\mu}, & a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots\ldots, a_{2,\mu-1}, a_{2,\mu+1}, \ldots\ldots, a_{2,n} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
a_{\lambda-1,\mu}, & a_{\lambda-1,1}, a_{\lambda-1,2}, \ldots, a_{\lambda-1,\mu-1}, a_{\lambda-1,\mu+1}, \ldots, a_{\lambda-1,n} \\
a_{\lambda+1,\mu}, & a_{\lambda+1,1}, a_{\lambda+1,2}, \ldots, a_{\lambda+1,\mu-1}, a_{\lambda+1,\mu+1}, \ldots, a_{\lambda+1,n} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
a_{n,\mu}, & a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots\ldots, a_{n,\mu-1}, a_{n,\mu+1}, \ldots\ldots, a_{n,n}
\end{array}\right|,$$

gdzie odkreślona część stanowi właśnie minor $D_{\lambda,\mu}$.

Załóżmy kolejno $\lambda=1, 2, 3, \ldots, n$, otrzymamy wtedy n wyrażeń $(-1)^{\mu-1}a_{1,\mu}D_{1,\mu}$, $(-1)^{\mu}a_{2,\mu}D_{2,\mu}$, $(-1)^{\mu+1}a_{3,\mu}D_{3,\mu}, \ldots, (-1)^{\mu+n-2}a_{n,\mu}D_{n,\mu}$, z których każde zawiera $(n-1)!$ wyrazów różnych rozwinięcia wyznacznika D. Wszystkie razem wyczerpują wszystkie wyrazy pomienionego rozwinięcia, czyli mamy

$$(11)\;.\;.(-1)^{\mu-1}a_{1,\mu}D_{1,\mu}+(-1)^{\mu}a_{2,\mu}D_{2,\mu}+(-1)^{\mu+1}a_{3,\mu}D_{3,\mu}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{\mu+n-2}a_{n,\mu}D_{n,\mu}=D,$$

albo, pozostawiając, dla niekomplikowania wzoru, znaki $(-1)^{\mu+\lambda}$ domyślności czytelnika*), jest

$$(12) \quad \ldots \quad D = a_{1,\mu}D_{1,\mu} + a_{2,\mu}D_{2,\mu} + a_{3,\mu}D_{3,\mu} + \ldots + a_{n,\mu}D_{n,\mu}.$$

I naodwrót, gdy mamy minory stopnia pierwszego: $D_{1,\mu}$, $D_{2,\mu}$, $D_{3,\mu}, \ldots, D_{n,\mu}$, każdy o $(n-1)^2$ elementach, i gdy te minory pomnożymy, z zachowaniem odpowiednich znaków, przez $a_{1,\mu}$, $a_{2,\mu}$, $a_{3,\mu}, \ldots, a_{n,\mu}$, sumy tak otrzymanych iloczynów dadzą wyznacznik o n^2 składnikach, któremu, oprócz elementów, wchodzących w skład danych minorów, przybywa jeszcze n elementów $a_{1,\mu}$, $a_{2,\mu}$, $a_{3,\mu}, \ldots, a_{n,\mu}$, stanowiących μ-tą kolumnę rzeczonego wyznacznika, t. j.

$$(12') \quad \ldots \quad a_{1,\mu}D_{1,\mu} + a_{2,\mu}D_{2,\mu} + a_{3,\mu}D_{3,\mu} + \ldots + a_{n,\mu}D_{n,\mu} = D.$$

Ponieważ w wyznaczniku można wziąć kolumny za wiersze, a wiersze za kolumny, przeto tak samo można porządkować wyznaczniki i według wyrazów tego samego wiersza, czyli można napisać

$$(13) \quad \ldots \quad D = a_{\lambda,1}D_{\lambda,1} + a_{\lambda,2}D_{\lambda,2} + a_{\lambda,3}D_{\lambda,3} + \ldots + a_{\lambda,n}D_{\lambda,n}$$

i naodwrót

$$(13') \quad \ldots \quad a_{\lambda,1}D_{\lambda,1} + a_{\lambda,2}D_{\lambda,2} + a_{\lambda,3}D_{\lambda,3} + \ldots + a_{\lambda,n}D_{\lambda,n} = D.$$

Zobaczmy teraz, czem być może wyznacznik

$$(14) \quad \ldots\ldots \quad a_{1,\nu}D_{1,\mu} + a_{2,\nu}D_{2,\mu} + a_{3,\nu}D_{3,\mu} + \ldots + a_{n,\nu}D_{n,\mu},$$

t. j. gdy w (12') za $a_{1,\mu}$, $a_{2,\mu}$, $a_{3,\mu}, \ldots, a_{n,\mu}$ podstawimy kolumnę $a_{1,\nu}$, $a_{2,\nu}$, $a_{3,\nu}, \ldots, a_{n,\nu}$, złożoną z elementów, wchodzących także w skład minorów $D_{1,\mu}$, $D_{2,\mu}$, $D_{3,\mu}, \ldots, D_{n,\mu}$.

Oczywiście, wyznacznikowi (14), zamiast kolumny, złożonej ze składników $a_{1,\mu}$, $a_{2,\mu}$, $a_{3,\mu}, \ldots, a_{n,\mu}$, przybywa obecnie kolumna, złożona z elementów $a_{1,\nu}$, $a_{2,\nu}$, $a_{3,\nu}, \ldots, a_{n,\nu}$; ponieważ zaś taka sama kolumna istnieje już w nim, jako wchodząca w skład minorów $D_{1,\mu}$, $D_{2,\mu}$, $D_{3,\mu}, \ldots, D_{n,\mu}$, zatem wyznacznik (14) posiada dwie kolumny identyczne, skutkiem czego jest równy zeru, czyli

---

*) Do oryentowania się pod tym względem mogą służyć znaczki przy D: jeżeli suma tych znaczków $(\lambda+\mu)$ jest liczbą parzystą, należy postawić znak $+$; gdy, przeciwnie, suma pomienionych znaczków jest liczbą nieparzystą, trzeba postawić znak $-$.

(15) . . . $a_{1,\nu}D_{1,\mu} + a_{2,\nu}D_{2,\mu} + a_{3,\nu}D_{3,\mu} + \ldots + a_{n,\nu}D_{n,\mu} = 0$

oraz

(15') . . . $a_{\nu,1}D_{\lambda,1} + a_{\nu,2}D_{\lambda,2} + a_{\nu,3}D_{\lambda,3} + \ldots + a_{\nu,n}D_{\lambda,n} = 0.$

Z ostatnio dowiedzionych własności można wyprowadzić wiele innych, równie ciekawych i ważnych. Że jednak chodzi nam tutaj tylko o rozwiązywanie równań, a do tego wystarczą podane wyżej własności, więc, poprzestając na nich, przechodzimy do naszego celu głównego.

Niech będzie n równań stopnia pierwszego o n niewiadomych:

$$(16) \ldots \begin{cases} a_{1,1}z_1 + a_{1,2}z_2 + a_{1,3}z_3 + \ldots + a_{1,n}z_n = k_1, \\ a_{2,1}z_1 + a_{2,2}z_2 + a_{2,3}z_3 + \ldots + a_{2,n}z_n = k_2, \\ a_{3,1}z_1 + a_{3,2}z_2 + a_{3,3}z_3 + \ldots + a_{3,n}z_n = k_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}z_1 + a_{n,2}z_2 + a_{n,3}z_3 + \ldots + a_{n,n}z_n = k_n. \end{cases}$$

Ze spółczynników przy niewiadomych z utwórzmy wyznacznik

$$(17) \ldots\ldots D = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots, & a_{2,n} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & \ldots, & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1,1}D_{1,1} + a_{2,1}D_{2,1} + a_{3,1}D_{3,1} + \ldots + a_{n,1}D_{n,1}.$$

Równanie pierwsze, z (16), pomnóżmy przez minor $D_{1,1}$, drugie przez $D_{2,1}$, trzecie przez $D_{3,1}$ i t. d., ostatnie przez $D_{n,1}$ *) i otrzymane rezultaty dodajmy do siebie, wtedy wypadnie

$$(18) \quad \left\{\begin{aligned} & (a_{1,1}D_{1,1} + a_{2,1}D_{2,1} + a_{3,1}D_{3,1} + \ldots + a_{n,1}D_{n,1})\, z_1 \\ + & (a_{1,2}D_{1,1} + a_{2,2}D_{2,1} + a_{3,2}D_{3,1} + \ldots + a_{n,2}D_{n,1})\, z_2 \\ + & (a_{1,3}D_{1,1} + a_{2,3}D_{2,1} + a_{3,3}D_{3,1} + \ldots + a_{n,3}D_{n,1})\, z_3 \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + & (a_{1,n}D_{1,1} + a_{2,n}D_{2,1} + a_{3,n}D_{3,1} + \ldots + a_{n,n}D_{n,1})\, z_n \end{aligned}\right\}$$

$$= k_1D_{1,1} + k_2D_{2,1} + k_3D_{3,1} + \ldots + k_nD_{n,1}.$$

---

*) Z zachowaniem odpowiednich znaków + lub —, zależnie od tego, czy suma znaczków przy D jest liczbą parzystą, czy nieparzystą.

W ostatniem wyrażeniu spółczynnik przy niewiadomej z_1, według (12'), równa się wyznacznikowi D, zaś spółczynniki przy wszystkich innych niewiadomych, według (15), są równe zeru. Skutkiem tego (18) sprowadza się do

$$(19) \ldots \quad Dz_1 = k_1 D_{1,1} + k_2 D_{2,1} + k_3 D_{3,1} + \ldots + k_n D_{n,1}.$$

Strona druga w (19) stanowi widocznie wyznacznik, jaki otrzymamy z D po zastąpieniu w nim kolumny pierwszej przez kolumnę złożoną ze stron drugich równań (16), jako elementów, t. j. przez kolumnę $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$. Gdy ten nowy wyznacznik oznaczymy przez D_1, czyli gdy położymy

$$(20) \quad k_1 D_{1,1} + k_2 D_{2,1} + k_3 D_{3,1} + \ldots + k_n D_{n,1} = \begin{vmatrix} k_1, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, & a_{1,n} \\ k_2, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots, & a_{2,n} \\ k_3, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & \ldots, & a_{3,n} \\ . & . & . & . & . \\ k_n, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} = D_1,$$

równanie (19) przechodzi na

$$(21) \ldots\ldots \quad Dz_1 = D_1, \text{ skąd}$$

$$(22) \ldots \quad z_1 = \frac{D_1}{D} \text{ i podobnie: } z_2 = \frac{D_2}{D},\ z_3 = \frac{D_3}{D}, \ldots, z_n = \frac{D_n}{D},$$

czyli w ogóle

$$(23) \ldots\ldots \quad z_\mu = \frac{D_\mu}{D},$$

gdzie D jest wyznacznikiem, ułożonym ze spółczynników przy niewiadomych danej grupy równań, a D_μ wyznacznikiem, jaki otrzymamy, gdy za kolumnę μ-tą w wyznaczniku D, t. j. za kolumnę, złożoną ze spółczynników przy szukanej niewiadomej, podstawimy kolumnę, utworzoną ze stron drugich danego układu równań.

UZUPEŁNIENIE VII.

определителей

Forma wyznaczników, dających się rozłożyć na sumę kwadratów.

Weźmy wyznacznik rzędu m-tego

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad D = \begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & A_{1,3}, & \ldots, & A_{1,m} \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, & A_{2,3}, & \ldots, & A_{2,m} \\ A_{3,1}, & A_{3,2}, & A_{3,3}, & \ldots, & A_{3,m} \\ . & . & . & . & . \\ A_{m,1}, & A_{m,2}, & A_{m,3}, & \ldots, & A_{m,m} \end{vmatrix}$$

i przypuśćmy, że elementy kolumny pierwszej składają się z sumy dwóch wyrazów, np. $A_{1,1} = A'_{1,1} + A''_{1,1}$, $A_{2,1} = A'_{2,1} + A''_{2,1}$, $A_{3,1} = A'_{3,1} + A''_{3,1}, \ldots, A_{m,1} = A'_{m,1} + A''_{m,1}$. Założywszy to, uporządkujmy wyznacznik (1) według elementów pierwszej kolumny, wtedy otrzymamy

$$\begin{aligned} D &= (A'_{1,1} + A''_{1,1})\, D_{1,1} + (A'_{2,1} + A''_{2,1})\, D_{2,1} \\ &+ (A'_{3,1} + A''_{3,1})\, D_{3,1} + \ldots + (A'_{m,1} + A''_{m,1})\, D_{m,1} \\ &= \{A'_{1,1} D_{1,1} + A'_{2,1} D_{2,1} + A'_{3,1} D_{3,1} + \ldots + A'_{m,1} D_{m,1}\} \\ &+ \{A''_{1,1} D_{1,1} + A''_{2,1} D_{2,1} + A''_{3,1} D_{3,1} + \ldots + A''_{m,1} D_{m,1}\}, \end{aligned}$$

czyli

$$D = \begin{vmatrix} A'_{1,1}, & A_{1,2}, & A_{1,3}, & \ldots, & A_{1,m} \\ A'_{2,1}, & A_{2,2}, & A_{2,3}, & \ldots, & A_{2,m} \\ A'_{3,1}, & A_{3,2}, & A_{3,3}, & \ldots, & A_{3,m} \\ . & . & . & . & . \\ A'_{m,1}, & A_{m,2}, & A_{m,3}, & \ldots, & A_{m,m} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A''_{1,1}, & A_{1,2}, & A_{1,3}, & \ldots, & A_{1,m} \\ A''_{2,1}, & A_{2,2}, & A_{2,3}, & \ldots, & A_{2,m} \\ A''_{3,1}, & A_{3,2}, & A_{3,3}, & \ldots, & A_{3,m} \\ . & . & . & . & . \\ A''_{m,1}, & A_{m,2}, & A_{m,3}, & \ldots, & A_{m,m} \end{vmatrix}$$

Gdyby elementy kolumny pierwszej składały się z sumy 3-ch, 4-ch, ..., n wyrazów, wyznacznik D możnaby rozłożyć na $3, 4, \ldots, n$ wyznaczników składowych, z których każdy miałby dalsze kolumny identyczne z kolumnami danego wyznacznika (1), a kolumna pierwsza byłaby zastępowaną kolejno przez wyrazy pierwsze, drugie, i t. d. n-te sum, składających elementy kolumny pierwszej w wyznaczniku D.

To samo stosuje się do każdej z m kolumn wyznacznika D, skutkiem czego, gdyby elementy kolumn wyznacznika (1) składały się kolejno z sumy: $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_m$ wyrazów, wyznacznik D możnaby rozłożyć na sumę $n_1 . n_2 . n_3 \ldots n_m$ wyznaczników, względnie na n^m wyznaczników w razie, gdyby $n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_m = n$.

Weźmy teraz układ $m . n$ ilości $(n > m)$

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1},\ a_{1,2},\ a_{1,3},\ \ldots, a_{1,m}, \\ a_{2,1},\ a_{2,2},\ a_{2,3},\ \ldots, a_{2,m}, \\ a_{3,1},\ a_{3,2},\ a_{3,3},\ \ldots, a_{3,m}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1},\ a_{n,2},\ a_{n,3},\ \ldots, a_{n,m} \end{array} \right.$$

i ułóżmy z nich sumy iloczynów

$$(3) \quad A_{\mu,\nu} = a_{1,\mu} a_{1,\nu} + a_{2,\mu} a_{2,\nu} + a_{3,\mu} a_{3,\nu} + \ldots + a_{n,\mu} a_{n,\nu} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{\lambda,\mu} a_{\lambda,\nu},$$

powstających z przemnażania kolumnami ilości (2), przyczem ilości jednej i tej samej kolumny mają być także mnożone przez siebie, t. j. w (3) obok każdego $\mu = 1, 2, 3, \ldots, m$ może i ma być brane $\nu = 1, 2, 3, \ldots, m$. Tym sposobem otrzymamy m^2 wyrażeń $A_{\mu,\nu}$, każde złożone z n dwuczynnikowych iloczynów, których więc razem jest $n . m^2$.

Z tych m^2 wyrażeń $A_{\mu,\nu}$ utwórzmy wyznacznik rzędu m-go

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad D = \left| \begin{array}{l} A_{1,1},\ A_{1,2},\ A_{1,3},\ \ldots, A_{1,m} \\ A_{2,1},\ A_{2,2},\ A_{2,3},\ \ldots, A_{2,m} \\ A_{3,1},\ A_{3,2},\ A_{3,3},\ \ldots, A_{3,m} \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_{m,1},\ A_{m,2},\ A_{m,3},\ \ldots, A_{m,m} \end{array} \right|,$$

w którym: 1) elementy, stojące na przekątni $A_{1,1}, A_{2,2}, A_{3,3}, \ldots, A_{m,m}$, są sumami kwadratów i 2) elementy, symetrycznie rozłożone względem przekątni $A_{1,1}, A_{2,2}, A_{3,3}, \ldots, A_{m,m}$, są sobie równe, t. j. $A_{\mu,\nu} = A_{\nu,\mu}$.

Jeżeli w D za wszystkie elementy $A_{\mu,\nu}$ podstawimy odpowiednie wyrażenia (3), wyznacznik D składać się będzie z kolumn, których każdy element jest sumą n wyrazów. Skutkiem tego wyznacznik D, stosownie do tego, cośmy o wyznaczniku (1) powiedzieli, można rozłożyć na n^m wyznaczników δ o dwuczynnikowych elementach $a_{\lambda,\mu}a_{\lambda,\nu}$. Wszystkie elementy wszystkich wyznaczników cząstkowych δ można otrzymać z $a_{\lambda,\mu}a_{\lambda,\nu}$, zakładając obok każdego $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n$, każde $\mu = 1, 2, 3, \ldots, m$ i obok każdego $\mu = 1, 2, 3, \ldots, m$ zakładając $\nu = 1, 2, 3, \ldots, m$. Otrzymamy takim sposobem znaną nam już powyżej liczbę $n.m^2$ elementów dwuczynnikowych.

Postacią każdego elementu w każdym wyznaczniku δ jest, jak wiemy, $a_{\lambda,\mu}a_{\lambda,\nu}$, przyczem znaczki λ w jednej i tej samej kolumnie są jednakie, a w różnych kolumnach mogą być jednakie lub różne; μ w tej samej kolumnie zawsze się zmienia w jednym i tym samym porządku od 1 do m; znaczki ν w tej samej kolumnie zawsze są jednakowe. Wynika stąd, że o ile w tym samym wyznaczniku δ są choćby dwie kolumny, mające te same znaczki λ, o tyle wyznacznik δ musi być równy zeru, gdyż wyrzuciwszy wspólny czynnik $a_{\lambda,\nu}$ w każdej z tych dwu kolumn przed wyznacznik, pozostaną w tym ostatnim dwie identyczne kolumny $a_{\lambda,\mu}$, czyniące wyznacznik $\delta = 0$. Skutkiem tego możemy brać dalej pod uwagę te tylko wyznaczniki δ, w których znaczki λ w różnych kolumnach są różne.

Otóż λ może przybierać wartości od 1 do n, a do δ wchodzi w liczbie m, czyli pozostaje nam tylko do rozważenia tyle wyznaczników δ, ile jest różnych waryacyi z n różnych przedmiotów po m, t. j. $\frac{n!}{(n-m)!}$.

Z wyznaczników δ o kolumnach z różnymi znaczkami λ weźmy pod uwagę jakikolwiek. Elementy każdej'jego kolumny posiadają wspólny czynnik $a_{\lambda,\nu}$, który więc może być wyrzucony przed wyznacznik. Czyniąc to z każdą z m kolumn, otrzymamy za wspólny czynnik wyznacznika δ iloczyn

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad a_{\lambda_1,\nu_1} \cdot a_{\lambda_2,\nu_2} \cdot a_{\lambda_3,\nu_3} \cdots a_{\lambda_m,\nu_m}$$

i za odpowiedni temu czynnikowi wyznacznik

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} a_{\lambda_1,1}, & a_{\lambda_2,1}, & a_{\lambda_3,1}, & \ldots, & a_{\lambda_m,1} \\ a_{\lambda_1,2}, & a_{\lambda_2,2}, & a_{\lambda_3,2}, & \ldots, & a_{\lambda_m,2} \\ a_{\lambda_1,3}, & a_{\lambda_2,3}, & a_{\lambda_3,3}, & \ldots, & a_{\lambda_m,3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\lambda_1,m}, & a_{\lambda_2,m}, & a_{\lambda_3,m}, & \ldots, & a_{\lambda_m,m} \end{vmatrix},$$

gdzie $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_m$ w (5) jest jedną z $m!$ przemian szeregu $1, 2, 3, \ldots, m$; zaś $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ w (5) i (6) jedną z kombinacyi szeregu $1, 2, 3, \ldots, n$ po m. Pomiędzy różnymi od zera wyznacznikami δ znajdują się wszystkie takie, które posiadają wszystkie różne przemiany tej samej kombinacyi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ w liczbie $m!$ Jeżeli z każdego z nich wyrzucimy iloczyny czynników wspólnych, podobne do (5), i gdy następnie w powstałych stąd, podobnych do (6), wyznacznikach, uporządkujemy kolumny według przemiany $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$, to wszystkie te wyznaczniki będą oczywiście bezwzględnie równe wyznacznikowi (6) i posiadają te same lub przeciwne z nim znaki, stosownie do tego, czy odnośne przemiany powstają z (6) przez parzystą, czy też przez nieparzystą liczbę przestawień; możemy zatem każdemu nadać identyczną z (6) postać, zmieniając tylko odpowiednio znaki. Gdy te znaki przypiszemy iloczynom (5) i wyznacznik (6) wyrzucimy za nawias, to w nawiasie mieć będziemy zbiór iloczynów podobnych do (5), połączonych ze sobą naprzemian znakami + i —. Jeżeli czynniki owych iloczynów w nawiasie uporządkujemy tak, aby należące do nich $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ utworzyły jedną jedyną przemianę, taką samą, jak w wyznaczniku (6), wówczas zbiór rzeczonych iloczynów (5) przedstawi wszystkie ($m!$) przemiany w znaczkach $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_m$, t. j. stanowić będzie wyznacznik identyczny z (6), czyli cała grupa, użytych przez nas powyżej $m!$ wyznaczników δ, równa się kwadratowi wyznacznika (6):

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} a_{\lambda_1,1}, & a_{\lambda_2,1}, & a_{\lambda_3,1}, & \ldots, & a_{\lambda_m,1} \\ a_{\lambda_1,2}, & a_{\lambda_2,2}, & a_{\lambda_3,2}, & \ldots, & a_{\lambda_m,2} \\ a_{\lambda_1,3}, & a_{\lambda_2,3}, & a_{\lambda_3,3}, & \ldots, & a_{\lambda_m,3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\lambda_1,m}, & a_{\lambda_2,m}, & a_{\lambda_3,m}, & \ldots, & a_{\lambda_m,m} \end{vmatrix}^2$$

Weźmy następnie jakikolwiek wyznacznik δ, którego znaczki $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \ldots, \lambda'_m$ stanowią różną od poprzedniej kombinacyę z $1, 2, 3, \ldots, n$ po m. Postępując z nim i z należącymi do tej samej grupy wyznacznikami δ tak samo, jak z grupą poprzednią, znajdziemy, że ich zbiór daje kwadrat innego wyznacznika, różniącego się od (7) odmienną kombinacyą znaczków $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \ldots, \lambda'_m$ z n po m.

Idąc tak dalej aż do wyczerpania wszystkich kombinacyi z n po m, otrzymamy $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ kwadratów wyznaczników, podobnych do (7). Że zaś każdy powstał z $m!$ wyznaczników δ, więc wyczerpaliśmy ich $\frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot m! = \frac{n!}{(n-m)!}$, t j. wszystkie, jakie (oprócz równych zeru) powstały z wyznacznika (4). Wypada stąd, że wyznacznik (4), utworzony w wiadomy sposób z systemu ilości (2), daje się rozłożyć na sumę kwadratów wyznaczników, powstających z (7) przez podstawienie na miejsce $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ wszystkich różnych kombinacyi z $1, 2, 3, \ldots, n$ po m, a temsamem, że jest ilością dodatną.

Lecz wyznacznik (4) jest utworzony z ilości (2) zupełnie tak samo, jak się tworzą wyznaczniki D i $D_{\mu,\mu}$ w art. 28-ym i dalszych ze spółczynników przy q w równaniach przybliżonych, które to zatem wyznaczniki D i $D_{\mu,\mu}$ są również ilościami dodatnemi, o dowiedzenie czego właśnie nam chodziło.

UZUPEŁNIENIE VIII.

Uogólnienie wzorów na błędy średnie i prawdopodobne.

W art. 36-ym podaliśmy sposób obliczania błędów średnich, względnie prawdopodobnych dla najprawdopodobniejszych wartości niewiadomych q w przypadku istnienia związków warunkowych pomiędzy rzeczonemi niewiadomemi. Sposób ten, bardzo łatwy do zrozumienia i prosty w użyciu, polega na kolejnem rugowaniu niewiadomych q, tak, żeby ostatecznie wszystkie weszly w skład równań normalnych Gauss'a.

Istnieje jednak inny sposób, pozwalający uniknąć kilkakrotnych rugowań i poprzestać na jednokrotnem. Można mianowicie wyprowadzić na pomienione błędy wzór ogólny, do którego wejdą same tylko ilości, znajdujące się w równaniach normalnych, utworzonych dla niewiadomych niewyrugowanych.

Wyprowadzeniem tego wzoru zajmiemy się przedewszystkiem, przy założeniu, iż spostrzeżenia są jednakowo dokładne, lub, w razie przeciwnym, zostały do takich sprowadzone, co, jak wiemy, zawsze da się uskutecznić, jeżeli ważności spostrzeżeń są nam znane.

Weźmy pod uwagę n równań przybliżonych:

$$(1) \dots \begin{cases} a'_1 q_1 + b'_1 q_2 + c'_1 q_3 + \dots + k'_1 q_m = l'_1, \\ a'_2 q_1 + b'_2 q_2 + c'_2 q_3 + \dots + k'_2 q_m = l'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_n q_1 + b'_n q_2 + c'_n q_3 + \dots + k'_n q_m = l'_n, \end{cases}$$

dla $m = m_1 + m_2$ niewiadomych q, które nadto są ze sobą związane następującemi m_2 równaniami warunkowemi:

$$(2) \dots \begin{cases} A_1 q_1 + B_1 q_2 + C_1 q_3 + \dots + K_1 q_m = N_1, \\ A_2 q_1 + B_2 q_2 + C_2 q_3 + \dots + K_2 q_m = N_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{m_2} q_1 + B_{m_2} q_2 + C_{m_2} q_3 + \dots + K_{m_2} q_m = N_{m_2}. \end{cases}$$

Z równań (2) możemy m_2 niewiadomych q wyrazić przez pozostałe m_1 pod postacią ogólną

$$(3) \dots\dots \quad q_\nu = M_\nu + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_1} v_{\nu,\lambda} q_\lambda,$$

gdzie M_ν i $v_{\nu,\lambda}$ są stałe, zaś $\nu = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_1 + m_2 = m$.

Gdy te m_2 wyrażeń na q_ν podstawimy w (1), to na ich miejsce otrzymamy n nowych równań przybliżonych:

$$(1') \dots \begin{cases} a_1 q_1 + b_1 q_2 + c_1 q_3 + \dots + k_1 q_{m_1} = l_1, \\ a_2 q_1 + b_2 q_2 + c_2 q_3 + \dots + k_2 q_{m_1} = l_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n q_1 + b_n q_2 + c_n q_3 + \dots + k_n q_{m_1} = l_n, \end{cases}$$

dla których, wiadomym sposobem, możemy wyprowadzić m_1 równań normalnych:

$$(4) \dots \begin{cases} q_1 \Sigma a^2 + q_2 \Sigma ab + q_3 \Sigma ac + \dots + q_{m_1} \Sigma ak = \Sigma al, \\ q_1 \Sigma ba + q_2 \Sigma b^2 + q_3 \Sigma bc + \dots + q_{m_1} \Sigma bk = \Sigma bl, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_1 \Sigma ka + q_2 \Sigma kb + q_3 \Sigma kc + \dots + q_{m_1} \Sigma k^2 = \Sigma kl. \end{cases}$$

Z równań (4) obliczymy najprawdopodobniejsze wartości niewiadomych $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{m_1}$ i następnie, z odpowiednich wzorów, należące do nich błędy.

Gdy obliczone tą drogą wartości niewiadomych $q_1, q_2, q_3, \ldots \ldots, q_{m_1}$ podstawimy w (3), znajdziemy najprawdopodobniejsze wartości pozostałych (wyrugowanych) m_2 niewiadomych q_{m_1+1}, $q_{m_1+2}, \ldots, q_{m_1+m_2} = q_m$, chodzi tylko jeszcze o odpowiednie tym ostatnim błędy.

Jeżeli przez $\varkappa_\nu$ oznaczymy błąd prawdziwy znalezionej na q_ν wartości, a przez $\varkappa_\lambda$ błąd znalezionej na q_λ wartości, to pomiędzy prawdziwemi wartościami niewiadomych q_ν i q_λ zachodzi podobny do (3) związek

$$(3') \quad \ldots\ldots \quad q_\nu + \varkappa_\nu = M_\nu + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_1} v_{\nu,\lambda}(q_\lambda + \varkappa_\lambda).$$

Z odjęcia (3) od (3') wypada

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \varkappa_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_1} v_{\nu,\lambda}\varkappa_\lambda,$$

po podniesieniu do kwadratu,

$$(6). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varkappa^2_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_1} \sum_{\mu=1}^{\mu=m_1} v_{\nu,\lambda} v_{\nu,\mu} \varkappa_\lambda \varkappa_\mu.$$

Ponieważ q_λ i q_μ nie otrzymujemy ze spostrzeżeń bezpośrednich, tylko wyznaczamy je pośrednio ze spostrzeżeń l'_1, l'_2, $l'_3, \ldots, l'_n$, dokonanych nad wielkością ξ, albo, co na jedno wychodzi, ponieważ wyrażamy je przez ilości $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ z równań (1'), przeto i błędy $\varkappa_\lambda$ i $\varkappa_\mu$ zależą od błędów tych spostrzeżeń, czyli od $x_1, x_2\ x_3, \ldots, x_n$. Dlatego do (6) nie możemy wprost stosować zasady, wyrażonej w uzupełnieniu IV-tem, lecz musimy wprzód $\varkappa_\lambda$ i $\varkappa_\mu$ wyrazić przez błędy niezależne $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Otóż z (4) otrzymujemy

$$(7) \quad q_\lambda = \frac{D_\lambda}{D} = \frac{1}{D}(D_{1,\lambda}\Sigma al + D_{2,\lambda}\Sigma bl + D_{3,\lambda}\Sigma cl + \ldots + D_{m_1,\lambda}\Sigma kl)$$

$$= \frac{1}{D}\left\{\begin{array}{l} (a_1 D_{1,\lambda} + b_1 D_{2,\lambda} + c_1 D_{3,\lambda} + \ldots + k_1 D_{m_1,\lambda})l_1, \\ + (a_2 D_{1,\lambda} + b_2 D_{2,\lambda} + c_2 D_{3,\lambda} + \ldots + k_2 D_{m_1,\lambda})\, l_2, \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (a_n D_{1,\lambda} + b_n D_{2,\lambda} + c_n D_{3,\lambda} + \ldots + k_n D_{m_1,\lambda}) l_n, \end{array}\right.$$

albo, jeżeli sumy w nawiasach, czyli spółczynniki przy l_1, l_2, $l_3, \ldots, l_n$ oznaczymy przez $A_{1,\lambda}$, $A_{2,\lambda}$, $A_{3,\lambda}, \ldots, A_{n,\lambda}$,

$$(7') \ldots \quad q_\lambda = \frac{1}{D}(A_{1,\lambda}l_1 + A_{2,\lambda}l_2 + A_{3,\lambda}l_3 + \ldots + A_{n,\lambda}l_n).$$

Wartość prawdziwa

$$(7'') \quad q_\lambda + \varkappa_\lambda = \frac{1}{D}\{A_{1,\lambda}(l_1+x_1) + A_{2,\lambda}(l_2+x_2) + \ldots + A_{n,\lambda}(l_n+x_n)\}.$$

Po odjęciu (7') od (7'')

$$(8) \ldots \quad \varkappa_\lambda = \frac{1}{D}(A_{1,\lambda}x_1 + A_{2,\lambda}x_2 + A_{3,\lambda}x_3 + \ldots + A_{n,\lambda}x_n).$$

W podobny sposób otrzymamy także

$$(8') \ldots \quad \varkappa_\mu = \frac{1}{D}(A_{1,\mu}x_1 + A_{2,\mu}x_2 + A_{3,\mu}x_3 + \ldots + A_{n,\mu}x_n).$$

Z pomnożenia (8) przez (8') i wprowadzenia oznaczeń skróconych, wypada

$$(9) \ldots \quad \varkappa_\lambda \varkappa_\mu = \frac{1}{D^2}\sum_{\rho=1}^{\rho=n} A_{\rho,\lambda}A_{\rho,\mu}x^2_\rho + \sum_{\rho,\sigma} A_{\rho,\lambda}A_{\sigma,\mu}x_\rho x_\sigma.$$

Gdy wyrażenie (9) na $\varkappa_\lambda \varkappa_\mu$ podstawimy w (6), otrzymamy

$$(6') \ldots \quad \varkappa^2_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_1}\sum_{\mu=1}^{\mu=m_1} v_{\nu,\lambda}v_{\nu,\mu}\frac{1}{D^2}\sum_{\rho=1}^{\rho=n} A_{\rho,\lambda}A_{\rho,\mu}x^2_\rho$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_1}\sum_{\mu=1}^{\mu=m_1} v_{\nu,\lambda}v_{\nu,\mu}\sum_{\rho,\sigma} A_{\rho,\lambda}A_{\sigma,\mu}x_\rho x_\sigma.$$

W sumach drugich, po stronie prawej, wszystkie wyrazy mieszczą w sobie iloczyny różnych od siebie błędów po dwa, ogólnego kształtu $x_\rho x_\sigma$, gdy więc w (6') przejdziemy do błędów średnich, to te drugie sumy znikną, a w pierwszych, na miejsce każdego x^2_ρ, wejdzie wspólny dla wszystkich pojedynczych spostrzeżeń błąd średni $s^2(\xi)$; skutkiem tego znajdziemy

$$(10) \ldots \quad s^2(q_\nu) = \frac{s^2(\xi)}{D^2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_1}\sum_{\mu=1}^{\mu=m_1} v_{\nu,\lambda}v_{\nu,\mu}\sum_{\rho=1}^{\rho=n} A_{\rho,\lambda}A_{\rho,\mu}.$$

Lecz

$$A_{\rho,\lambda} = a_\rho D_{1,\lambda} + b_\rho D_{2,\lambda} + c_\rho D_{3,\lambda} + \ldots + k_\rho D_{m_1,\lambda},$$
$$A_{\rho,\mu} = a_\rho D_{1,\mu} + b_\rho D_{2,\mu} + c_\rho D_{3,\mu} + \ldots + k_\rho D_{m_1,\mu},$$

po pomnożeniu

$$\begin{aligned} A_{\rho,\lambda}A_{\rho,\mu} = {} & D_{1,\mu}\,(a^2_\rho D_{1,\lambda} + b_\rho a_\rho D_{2,\lambda} + c_\rho a_\rho D_{3,\lambda} + \ldots + k_\rho a_\rho D_{m_1,\lambda}), \\ & + D_{2,\mu}\,(a_\rho b_\rho D_{1,\lambda} + b^2_\rho D_{2,\lambda} + c_\rho b_\rho D_{3,\lambda} + \ldots + k_\rho b_\rho D_{m_1,\lambda}), \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + D_{m_1,\mu}(a_\rho k_\rho D_{1,\lambda} + b_\rho k_\rho D_{2,\lambda} + c_\rho k_\rho D_{3,\lambda} + \ldots + k^2_\rho D_{m_1,\lambda}). \end{aligned}$$

Stąd

$$(11)\ \ldots \sum_{\rho=1}^{\rho=n} A_{\rho,\lambda}D_{\rho,\mu} = \begin{aligned}[t] & D_{1,\mu}\,(D_{1,\lambda}\Sigma a^2 + D_{2,\lambda}\Sigma ba + \ldots + D_{m_1,\lambda}\Sigma ka), \\ & + D_{2,\mu}\,(D_{1,\lambda}\Sigma ab + D_{2,\lambda}\Sigma b^2 + \ldots + D_{m_1,\lambda}\Sigma kb), \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + D_{m_1,\mu}(D_{1,\lambda}\Sigma ak + D_{2,\lambda}\Sigma bk + \ldots + D_{m_1,\lambda}\Sigma k^2). \end{aligned}$$

Sumy w nawiasach, po stronie prawej, są wyznacznikami, powstającymi z wyznacznika równań normalnych (4) przez podstawianie za kolumnę λ-ą kolejno kolumny pierwszej, drugiej, trzeciej, i t. d., m_1-ej; są więc, jako wyznaczniki z dwiema kolumnami identycznemi, równe zeru, oprócz jednej, w której za kolumnę λ-ą wstawiamy tę samą kolumnę λ-ą i która zatem równa się wyznacznikowi D. Z tego powodu (11) sprowadza się do

$$(11')\ \ldots\ldots\ldots \sum_{\rho=1}^{\rho=n} A_{\rho,\lambda}\,A_{\rho,\mu} = D_{\lambda,\mu}\,D,$$

co, po podstawieniu w (10), daje

$$(12)\quad s^2(q_\nu) = \frac{s^2(\xi)}{D^2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_1}\sum_{\mu=1}^{\mu=m_1} v_{\nu,\lambda}v_{\nu,\mu}D_{\lambda,\mu}D = \frac{s^2(\xi)}{D}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_1}\sum_{\mu=1}^{\mu=m_1} v_{\nu,\lambda}v_{\nu,\mu}D_{\lambda,\mu},$$

jako wzór, pozwalający obliczyć bezpośrednio błędy średnie najprawdopodobniejszych wartości niewiadomych wyrugowanych.

Stosując wzór (12) do przykładu, pomieszczonego w art. 37-ym, oraz do odpowiednich zadań w rozdz. VI-ym, otrzymamy, naturalnie, te same co i tam rezultaty, jak o tem najłatwiej przekonać się można na zadaniu 8-em. Wyrugowaliśmy tam

(α) . . . . $\varepsilon_3 = 0{,}9 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$,

dla którego

(β) . . $v_{3,1}v_{3,1} = +1,\ v_{3,1}v_{3,2} = +1,\ v_{3,2}v_{3,1} = +1,\ v_{3,2}v_{3,2} = +1.$

Po wyrugowaniu ε_3, otrzymaliśmy równania normalne

$$(\gamma) \quad \left\{ \begin{aligned} 11\,\varepsilon_1 + 6\,\varepsilon_2 &= 5{,}4, \\ 6\,\varepsilon_1 + 9\,\varepsilon_2 &= 5{,}4, \end{aligned} \right.$$

dla których

$$D = \begin{vmatrix} 11, & 6 \\ 6, & 9 \end{vmatrix} = 63$$

oraz:

$$D_{1,1} = 9,\ D_{1,2} = -6,\ D_{2,1} = -6,\ D_{2,2} = 11.$$

Zatem

$$s^2(\varepsilon_3) = \frac{s^2(\xi)}{63}(1 \times 9 - 1 \times 6 - 1 \times 6 + 1 \times 11) = s^2(\xi)\frac{8}{63},$$

t. j. $\quad s(\varepsilon_3) = s(\xi)\sqrt{\frac{8}{63}}$, że zaś $s(\xi) = \pm 1{,}076$, więc

$$s(\varepsilon_3) = \pm 1{,}076\sqrt{\frac{8}{63}} = \pm 1{,}076 \times 0{,}356 = \pm 0{,}383,$$

$$p(\varepsilon_3) = \pm 0{,}383 \times 0{,}674\,49 = \pm 0{,}258,$$

czyli to samo, co i w zadaniu 8-em.

Łatwo spostrzedz, że ten sam wzór (12) można także zastosować i do wyznaczenia błędu średniego i prawdopodobnego dla wartości funkcyi ξ, obliczonej z wyrażenia (59) w art 26-ym, gdy w takową za $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$ podstawimy ich wartości najprawdopodobniejsze. Jeżeli bowiem przez L_ν oznaczymy wartość pomienionej funkcyi przy $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_m = v_{\nu,1}, v_{\nu,2}, v_{\nu,3}, \ldots, v_{\nu,m}$, to oczywiście wyrażenie

$$L_\nu = v_{\nu,1}q_1 + v_{\nu,2}q_2 + v_{\nu,3}q_3 + \ldots + v_{\nu,m}q_m$$

posiada ten sam kształt i pozostaje w podobnych warunkach, jak wyrażenie (3) w niniejszem uzupełnieniu. Skutkiem tego można doń zastosować wzór (12), czyli

$$(12') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad s^2(L_\nu) = \frac{s^2(\xi)}{D} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \sum_{\mu=1}^{\mu=m} v_{\nu,\lambda} v_{\nu,\mu} D_{\lambda,\mu},$$

który zresztą zupełnie tak samo, jak wzór (12), można bezpośrednio z (59) wyprowadzić.

Jeżeli (12') zastosujemy do wzoru (ϑ) w zadaniu 4-em rozdziału VI-go, wtedy dla Warszawy będzie $v_{1,1} = 1$, $v_{1,2} = 0{,}624\,65$, zatem:

$$v_{1,1}v_{1,1} = 1, \; v_{1,1}v_{1,2} = 0{,}624\,65, \; v_{1,2}v_{1,1} = 0{,}624\,65, \; v_{1,2}v_{1,2} = 0{,}390\,19;$$

$$D = 25{,}947\,112\,3,$$

$$D_{1,1} = 3{,}804\,37, \; D_{1,2} = -\,4{,}848\,68, \; D_{2,1} = -\,4{,}848\,68, \; D_{2,2} = 13;$$

$$s^2(\xi) = 0{,}000\,008\,8.$$

Wypada stąd

$$s^2(L_1) = 0{,}000\,000\,956\,2 \text{ i } s(L_1) = \pm\,0{,}000\,98,$$

$$p(L_1) = \pm\,0{,}000\,98 \times 0{,}674\,49 = \pm\,0{,}000\,66,$$

t. j. błąd prawdopodobny znalezionej przez nas dla Warszawy długości wahadła sekundowego (39,141 95 c. a.) równa się $\pm 0{,}000\,66$, czyli jego długość prawdziwa, z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, zawiera się w granicach od 39,141 29 do 39,142 61,

Niedość na tem, ale wzór (12), względnie (12') może być zastosowany do każdego połączenia, w sposób liniowy, niewiadomych q, a nawet teorya, rozwinięta w niniejszem uzupełnieniu, może być zastosowaną i do liniowego połączenia bezpośrednio wymierzonych wielkości z obliczonemi drogą pośrednią za pomocą równań normalnych Gauss'a.

Załóżmy np., że mamy wyrażenie

$$(13) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad t = M + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_2} w_\lambda r_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_1} v_\lambda q_\lambda,$$

w którem M, w_λ i v_λ są stałe, r_λ są wartościami pewnych wielkości, wyznaczonemi drogą spostrzeżeń bezpośrednich, q_λ — wartościami innych wielkości, obliczonemi za pomocą równań normalnych Gauss'a.

Wartość prawdziwa

$$(13') \quad . \quad . \quad . \quad t + \tau = M + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_2} w_\lambda (r_\lambda + \rho_\lambda) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_1} v_\lambda (q_\lambda + \varkappa_\lambda).$$

Z odjęcia (13) od (13') wypada

$$(13'') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \tau = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_2} w_\lambda \rho_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_1} v_\lambda \varkappa_\lambda,$$

po podniesieniu do kwadratu

$$(14) \quad . \quad . \quad \tau^2 = \left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_2} w_\lambda \rho_\lambda\right)^2 + 2 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_2} w_\lambda \rho_\lambda \cdot \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_1} v_\lambda \varkappa_\lambda + \left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_1} v_\lambda \varkappa_\lambda\right)^2.$$

Gdy w (14) za $\varkappa_\lambda$ podstawimy wyrażenie (8) i następnie od błędów prawdziwych przejdziemy do średnich, i zważymy, że obecnie mamy już do czynienia z samymi tylko błędami niezależnymi, część pierwsza po stronie prawej przejdzie na $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_2} w^2_\lambda s^2(r_\lambda)$, część druga zniknie, do trzeciej zaś części można zastosować wzór (12), względnie (12'), czyli otrzymamy

$$(15) \quad . \quad . \quad . \quad s^2(t) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_2} w^2_\lambda s^2(r_\lambda) + \frac{s^2(\xi)}{D} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_1} \sum_{\mu=1}^{\mu=m_1} v_\lambda v_\mu D_{\lambda,\mu}.$$

Ten ostatni wzór może nam posłużyć do obrachowania błędów wartości, otrzymanych na x i y w zadaniu 8-em rozdziału VI-go. Na pozór wydawać się tam mogło, że do wyrażeń (o) w pomienionem zadaniu wystarczy zastosować wzór (XIX) z art. 23-go, tak samo, jak to uczyniliśmy w przykładzie I-ym art. 24-go. Sposób ten wszakże, w danym przypadku, nie jest właściwy, gdyż wzór (XIX) stosuje się do błędów niezależnych, względnie, do obciążających wielkości bezpośrednio wymierzone, w wyrażeżeniu zaś (o) tylko a jest wymierzone bezpośrednio. Co się bowiem tyczy kątów A, B i C, to chociaż wyznaczyliśmy je najprzód również bezpośrednio, niemniej jednak, po wprowadzeniu warunku $A + B + C = 180^\circ$, obliczyliśmy dla nich inne wartości, najprawdopodobniejsze przy danym warunku, czyli poszliśmy drogą pośrednią, skutkiem czego do wyznaczenia błędów dla wartości, otrzymanych na x i y, użyć trzeba nie wzoru (XIX) z art. 23-go, lecz wzoru (15) z niniejszego uzupełnienia.

Jeżeli związkowi błędów ilości, wchodzących do wyrażeń (o), nadamy, jakąkolwiek drogą, czy to za pomocą wzoru Taylor'a, czy też poprostu różniczkując wyrażenia (o), postać liniową, wtedy, np. z wyrażenia na x, wypadnie

$$(\delta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta x = \frac{\partial x}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial x}{\partial C} \Delta C + \frac{\partial x}{\partial A} \Delta A,$$

gdzie wartości pochodnych cząstkowych należy brać przy najprawdopodobniejszych wielkościach ilości a, C i A, z których, jak to już wiemy, a otrzymaliśmy ze spostrzeżeń bezpośrednich, zaś C i A pośrednio, z równań normalnych (ζ') w zadaniu 8-em.

Wyrażenie (δ) odpowiada zatem wyrażeniu (13″) niniejszego uzupełnienia, można więc zastosować do niego wzór (15), t. j.

$$(\eta) \quad \ldots \quad s^2(x) = \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 s^2(a) + \frac{s^2(\xi)}{D} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2} \sum_{\mu=1}^{\mu=2} v_\lambda v_\mu D_{\lambda,\mu}$$

oraz

$$(\eta') \quad \ldots \quad p^2(x) = \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 p^2(a) + \frac{p^2(\xi)}{D} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2} \sum_{\mu=1}^{\mu=2} v_\lambda v_\mu D_{\lambda,\mu}.$$

Gdy w (η') podstawimy odpowiednie wartości liczebne za $\frac{\partial x}{\partial a}$, za $v_1 v_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial C}\right)^2$, $v_1 v_2 = v_2 v_1 = \frac{\partial x}{\partial C} \cdot \frac{\partial x}{\partial A}$, $v_{2,2} = \left(\frac{\partial x}{\partial A}\right)^2$, jak również $p^2(a) = (\pm 0{,}042)^2$ i $p^2(\xi) = (\pm 0{,}726)^2$, po zamianie wielkości kątowych na linijne, wreszcie z wyznacznika, ułożonego z równań normalnych (ζ'): $D = 63$, $D_{1,1} = 9$, $D_{1,2} = D_{2,1} = -3$ i $D_{2,2} = 8$ (w zadaniu 8-em $D_{3,3}$), to otrzymamy $p(x) = \pm 0{,}029$ i w podobny sposób, z drugiego wyrażenia (o), $p(y) = \pm 0{,}050$.

Wzór (15) można bardziej jeszcze uogólnić. Wyobraźmy sobie mianowicie funkcyę, zależną od wielkości, podzielonych na m grup; każda grupa wielkości otrzymuje się (drogą pośrednią lub bezpośrednią) z odrębnego szeregu spostrzeżeń, przyczem spostrzeżenia grup różnych są całkiem od siebie niezależne.

Gdy do takiej funkcyi zastosujemy rozumowanie, podobne do użytego przy wyprowadzeniu wzoru (15), to ostatecznie przyjdziemy do wyrażeń:

$$(16) \quad \ldots \quad s^2(t) = \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{s^2(\xi_\nu)}{D^{(\nu)}} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\nu} \sum_{\mu=1}^{\mu=m_\nu} v_{\nu,\lambda} v_{\nu,\mu} D^{(\nu)}_{\lambda,\mu}$$

oraz

$$(16') \quad \ldots \quad p^2(t) = \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{p^2(\xi_\nu)}{D^{(\nu)}} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m_\nu} \sum_{\mu=1}^{\mu=m_\nu} v_{\nu,\lambda} v_{\nu,\mu} D^{(\nu)}_{\lambda,\mu},$$

gdzie m oznacza liczbę grup, m_ν liczbę wielkości w grupie ν; $s^2(\xi_\nu)$ i $p^2(\xi_\nu)$ kwadraty błędu średniego i prawdopodobnego spostrzeżeń pojedynczych, należących do grupy ν; $D^{(\nu)}$ wyznacznik zasadniczy w grupie ν, $D^{(\nu)}_{\lambda,\mu}$ minor wyznacznika zasadniczego, powstały z opuszczenia λ-go wiersza i μ-ej kolumny; $v_{\nu,\lambda}$ i $v_{\nu,\mu}$ odpowiednie spółczynniki w wyrażeniu liniowem na błąd prawdziwy danej funkcyi.

Wzory (16) i (16′) są najogólniejszą postacią wyrażeń na kwadrat błędu średniego i prawdopodobnego każdej funkcyi, począwszy od najprostszej aż do najbardziej złożonych. Wszystkie kształty, poznane przez nas w ciągu całego wykładu, są tylko szczególnymi przypadkami tych wyrażeń ogólnych.

Tak np., dla przypadku jednej wielkości (ze spółczynnikiem równym jedności), wyznaczonej bezpośrednio z n spostrzeżeń jednakowo dokładnych, wystarczy w (16) lub w (16′) założyć $m = 1$, $m_\nu = 1$, $v_{\nu,\lambda} = v_{\nu,\mu} = 1$; wtedy, według art. 39-go, będzie $D^{(1)} = n$, $D^{(1)}_{1,1} = 1$, skutkiem czego (16) przejdzie na znaną nam z art. 19-go formułę na błąd średni średniej arytmetycznej

$$s(t) = \frac{s(\xi)}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma\alpha^2_\lambda}{n(n-1)}}.$$

W podobny sposób, czyniąc odpowiednie założenia, możemy z (16) i (16′) wyprowadzić wzory, podane w art. 23-im, 30-ym i t. d., wreszcie wzory (12′) i (15) niniejszego uzupełnienia.

KONIEC.

TABLICE.

I. Tablica wartości funkcyi $\Theta(xh) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{xh} e^{-z^2} dz$.

xh	$\Theta(xh)$	xh	$\Theta(xh)$	xh	$\Theta(xh)$	xh	$\Theta(xh)$
0,00	0,000 000 0	0,50	0,520 499 9	1,00	0,842 700 8	1,50	0,966 105 2
0,01	0,011 283 3	0,51	0,529 243 7	1,01	0,846 810 5	1,51	0,967 276 8
0,02	0,022 564 4	0,52	0,537 898 7	1,02	0,850 838 0	1,52	0,968 413 5
0,03	0,033 841 0	0,53	0,546 464 1	1,03	0 854 784 2	1,53	0,969 516 2
0,04	0,045 110 9	0,54	0,554 939 2	1,04	0,858 649 9	1,54	0,970 585 7
0,05	0,056 371 8	0,55	0,563 323 3	1,05	0,862 436 0	1,55	0,971 622 7
0,06	0,067 621 5	0 56	0,571 615 7	1,06	0,866 143 5	1,56	0,972 628 1
0,07	0,078 857 7	0,57	0,579 815 8	1 07	0,869 773 2	1,57	0,973 602 6
0,08	0,090 078 1	0,58	0,587 922 9	1,08	0,873 326 1	1,58	0,974 547 0
0,09	0,101 280 6	0,59	0,595 936 5	1,09	0,876 803 0	1,59	0,975 462 0
0,10	0,112 463 0	0,60	0,603 856 1	1,10	0,880 205 0	1,60	0,976 348 4
0,11	0,123 623 0	0,61	0,611 681 2	1,11	0,883 533 0	1,61	0,977 206 9
0,12	0,134 758 4	0,62	0,619 411 4	1,12	0,886 787 9	1,62	0,978 038 1
0,13	0,145 867 1	0,63	0,627 046 3	1,13	0,889 970 7	1,63	0,978 842 9
0,14	0,156 947 0	0,64	0,634 585 7	1,14	0,893 082 3	1,64	0,979 621 8
0,15	0,167 995 9	0,65	0,642 029 2	1,15	0,896 123 8	1,65	0,980 375 6
0,16	0,179 011 7	0,66	0,649 376 5	1,16	0,899 096 2	1,66	0,981 104 9
0,17	0,189 992 3	0,67	0,656 627 5	1,17	0,902 000 4	1,67	0,981 810 4
0,18	0,200 935 7	0,68	0,663 782 0	1,18	0,904 837 4	1,68	0,982 492 8
0,19	0,211 839 8	0,69	0,670 839 9	1,19	0,907 608 3	1,69	0,983 152 6
0,20	0,222 702 5	0,70	0,677 801 0	1,20	0,910 314 0	1,70	0,983 790 4
0,21	0,233 521 8	0,71	0,684 665 4	1,21	0,912 955 5	1.71	0,984 407 0
0,22	0,244 295 8	0,72	0,691 433 0	1,22	0,915 533 9	1,72	0,985 002 8
0,23	0,255 022 5	0,73	0,698 103 8	1,23	0,918 050 1	1,73	0,985 578 5
0,24	0,265 700 0	0,74	0,704 678 0	1,24	0,920 505 2	1,74	0,986 134 6
0,25	0,276 326 3	0,75	0,711 155 6	1,25	0,922 900 1	1,75	0,986 671 7
0,26	0,286 899 7	0,76	0,717 536 7	1,26	0,925 235 9	1,76	0,987 190 3
0,27	0,297 418 2	0,77	0,723 821 6	1,27	0.927 513 6	1,77	0,987 691 0
0,28	0,307 880 0	0,78	0,730 010 4	1,28	0,929 734 2	1,78	0,988 174 2
0,29	0,318 283 4	0,79	0,736 103 5	1,29	0,931 898 7	1,79	0,988 640 6
0,30	0,328,626 7	0,80	0,742 101 0	1,30	0,934 008 0	1,80	0,989 090 5
0,31	0,338 908 1	0,81	0,748 003 3	1,31	0,936 063 2	1,81	0,989 524 5
0,32	0,349 125 9	0,82	0,753 810 8	1,32	0,938 065 2	1,82	0,989 943 1
0,33	0,359 278 5	0,83	0,759 523 8	1,33	0,940 015 0	1,83	0,990 346 7
0,34	0,369 364 4	0,84	0,765 142 7	1,34	0,941 913 7	1,84	0,990 735 9
0,35	0,379 381 9	0,85	0,770 668 0	1,35	0,943 762 2	1,85	0,991 111 0
0,36	0,389 329 6	0,86	0,776 100 2	1,36	0,945 561 4	1,86	0,991 472 5
0,37	0,399 205 9	0,87	0,781 439 8	1,37	0,947 312 4	1,87	0,991 820 7
0,38	0,409 009 3	0,88	0,786 687 3	1,38	0,949 016 0	1,88	0,992 156 2
0,39	0,418 738 5	0,89	0,791 843 2	1,39	0,950 673 3	1,89	0,992 479 3
0,40	0,428 392 2	0,90	0,796 908 2	1,40	9,952 285 1	1,90	0,992 790 4
0,41	0,437 969 0	0,91	0,801 882 8	1,41	0,953 852 4	1,91	0,993 089 9
0,42	0,447 467 6	0,92	0,806 767 7	1,42	0,955 376 2	1,92	0,993 378 2
0,43	0,456 886 7	0,93	0,811 563 5	1,43	0,956 857 3	1,93	0,993 655 7
0,44	0,466 225 1	0,94	0,816 271 0	1,44	0,958 296 6	1,94	0,993 922 6
0,45	0,475 481 8	0,95	0,820 890 8	1,45	0,959 695 0	1,95	0,994 179 4
0,46	0,484 655 5	0,96	0,825 423 6	1,46	0,961 053 5	1,96	0,994 426 3
0,47	0,493 745 2	0,97	0,829 870 3	1,47	0,962 372 9	1,97	0,994 663 7
0,48	0,502 749 8	0,98	0,834 231 5	1,48	0,963 654 1	1,98	0,994 892 0
0,49	0,511 668 3	0,99	6,838 508 1	1,49	0,964 897 9	1,99	0,995 111 4

npr. $\Theta(xh) = \frac{1}{2}$

$xh = 0.4769362762$

xh	$\Theta(xh)$	xh	$\Theta(xh)$	xh	$\Theta(xh)$	xh	$\Theta(xh)$
2,00	0,995 322 3	2,55	0,999 689 3	3,10	0,999 988 4	3,65	0,999 999 755 51
2,01	0,995 524 8	2,56	0,999 705 8	3,11	0,999 989 1	3,66	0,999 999 773 33
2,02	0,995 719 5	2,57	0,999 721 5	3,12	0,999 989 8	3,67	0,999 999 789 90
2,03	0,995 906 3	2,58	0,999 736 4	3,13	0,999 990 4	3,68	0,999 999 805 28
2,04	0,996 085 8	2,59	0,999 750 5	3,14	0,999 991 0	3,69	0,999 999 819 57
2,05	0,996 258 1	2,60	0,999 764 0	3,15	0,999 991 6	3,70	0,999 999 832 85
2,06	0,996 423 5	2,61	0,999 776 7	3,16	0,999 992 1	3,71	0,999 999 845 17
2,07	0,996 582 2	2,62	0,999 788 8	3,17	0,999 992 6	3,72	0,999 999 856 63
2,08	0,996 734 4	2,63	0,999 800 3	3,18	0,999 993 1	3,73	0,999 999 867 26
2,09	0,996 880 5	2,64	0,999 811 2	3,19	0,999 993 6	3,74	0,999 999 877 12
2,10	0,997 020 5	2,65	0,999 821 5	3,20	0,999 994 0	3,75	0,999 999 886 29
2,11	0,997 154 8	2,66	0,999 831 3	3,21	0,999 994 4	3,76	0,999 999 894 77
2,12	0,997 283 6	2,67	0,999 840 6	3,22	0,999 994 7	3,77	0,999 999 902 65
2,13	0,997 407 0	2,68	0,999 849 4	3,23	0,999 995 1	3,78	0,999 999 909 95
2,14	0,997 525 3	2,69	0,999 857 8	3,24	0,999 995 4	3,79	0,999 999 916 72
2,15	0,997 638 6	2,70	0,999 865 7	3,25	0,999 995 7	3,80	0,999 999 922 00
2,16	0,997 747 2	2,71	0,999 873 2	3,26	0,099 996 0	3,81	0,999 999 928 81
2,17	0,997 851 1	2,72	0,999 880 3	3,27	0,999 996 2	3,82	0,999 999 934 21
2,18	0,997 950 5	2,73	0,999 887 0	3,28	0,999 996 5	3,83	0,999 999 939 21
2,19	0,998 045 9	2,74	0,999 893 3	3,29	0,999 996 7	3,84	0,999 999 943 83
2,20	0,998 137 2	2,75	0,999 899 4	3,30	0,999 996 9	3,85	0,999 999 948 12
2,21	0,998 224 4	2,76	0,999 905 1	3,31	0,999 997 1	3,86	0,999 999 952 08
2,22	0,998 307 9	2,77	0,999 910 5	3,32	0,999 997 3	3,87	0,999 999 955 75
2,23	0,998 387 8	2,78	0,999 915 6	3,33	0,999 997 5	3,88	0,999 999 959 15
2,24	0,998 464 2	2,79	0,999 920 4	3,34	0,999 997 7	3,89	0,999 999 962 30
2,25	0,998 537 3	2,80	0,999 925 0	3,35	0,999 997 8	3,90	0,999 999 965 22
2,26	0,998 607 1	2,81	0,999 929 3	3,36	0,999 998 0	3,91	0,999 999 967 90
2,27	0,998 673 9	2,82	0,999 933 4	3,37	0,999 998 1	3,92	0,999 999 970 39
2,28	0,998 737 7	2,83	0,999 937 2	3,38	0,999 998 2	3,93	0,999 999 972 60
2,29	0,998 798 6	2,84	0,999 940 9	3,39	0,999 998 4	3,94	0,999 999 974 82
2,30	0,998 856 8	2,85	0,999 944 3	3,40	0,999 998 5	3,95	0,999 999 976 78
2,31	0,998 912 4	2,86	0,999 947 6	3,41	0,999 998 6	3,96	0,999 999 978 60
2,32	0,998 965 5	2,87	0,999 950 7	3,42	0,999 998 7	3,97	0,999 999 980 28
2,33	0,999 016 2	2,88	0,999 953 6	3,43	0,999 998 8	3,98	0,999 999 981 83
2,34	0,999 064 6	2,89	0,999 956 3	3,44	0,999 998 9	3,99	0,999 999 983 27
2,35	0,999 110 7	2,90	0,999 958 9	3,45	0,999 998 9	4,00	0,999 999 984 59
2,36	0,999 154 8	2,91	0,999 961 3	3,46	0,999 999 007 80	4,10	0,999 999 993 30
2,37	0,999 196 8	2,92	0,999 963 6	3,47	0,999 999 076 72	4,20	0,999 999 997 14
2,38	0,999 236 9	2,93	0,999 965 8	3,48	0,999 999 141 01	4,30	0,999 999 998 80
2,39	0,999 275 1	2,94	0,999 967 9	3,49	0,999 999 200 97	4,40	0,999 999 999 51
2,40	0,999 311 5	2,95	0,999 969 8	3,50	0,999 999 256 91	4,50	0,999 999 999 81
2,41	0,999 346 2	2,96	0,999 971 6	3,51	0,999 999 309 05	4,60	0,999 999 999 92
2,42	0,999 379 3	2,97	0,999 973 3	3,52	0,999 999 357 66	4,70	0,999 999 999 97
2,43	0,999 410 8	2,98	0,999 975 0	3,53	0,999 999 402 96	4,80	0,999 999 999 99
2,44	0,999 440 8	2,99	0,999 976 5	3,54	0,999 999 445 19	. . .	. . . .
2,45	0,999 469 4	3,00	0,999 977 9	3,55	0,999 999 484 52	. . .	. . . .
2,46	0,999 496 6	3,01	0,999 979 3	3,56	0,999 999 521 15	. . .	. . . .
2,47	0,999 522 6	3,02	0,999 980 5	3,57	0,999 999 555 27	. . .	. . . .
2,48	0,999 547 2	3,03	0,999 981 7	3,58	0,999 999 587 03	. . .	. . . .
2,49	0,999 570 7	3,04	0,999 982 9	3,59	0,999 999 616 61	. . .	. . . .
2,50	0,999 593 0	3,05	0,999 983 9	3,60	0,999 999 644 14	. . .	. . . .
2,51	0,999 614 3	3,06	0,999 984 9	3,61	0,999 999 669 75	. . .	. . . .
2,52	0,999 634 5	3,07	0,999 985 9	3,62	0,999 999 693 58	. . .	. . . .
2,53	0,999 653 7	3,08	0,999 986 7	3,63	0,999 999 715 74	. . .	. . . .
2,54	0,999 672 0	3,09	0,999 987 6	3,64	0,999 999 736 36	∞	1,000 000 000 00

II. Tablica kwadratów.

Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.
0,00	0,0000	1	0,40	0,1600	81	0,80	0,6400	161	1,20	1,4400	241
01	0001	3	41	1681	83	81	6561	163	21	4641	243
02	0004	5	42	1764	85	82	6724	165	22	4884	245
03	0009	7	43	1849	87	83	6889	167	23	5129	247
04	0016	9	44	1936	89	84	7056	169	24	5376	249
0,05	0,0025	11	0,45	0,2025	91	0,85	0,7225	171	1,25	1,5625	251
06	0036	13	46	2116	93	86	7396	173	26	5876	253
07	0049	15	47	2209	95	87	7569	175	27	6129	255
08	0064	17	48	2304	97	88	7744	177	28	6384	257
09	0081	19	49	2401	99	89	7921	179	29	6641	259
0,10	0,0100	21	0,50	0,2500	101	0,90	0,8100	181	1,30	1,6900	261
11	0121	23	51	2601	103	91	8281	183	31	7161	263
12	0144	25	52	2704	105	92	8464	185	32	7424	265
13	0169	27	53	2809	107	93	8649	187	33	7689	267
14	0196	29	54	2916	109	94	8836	189	34	7956	269
0,15	0,0225	31	0,55	0,3025	111	0,95	0,9025	191	1,35	1,8225	271
16	0256	33	56	3136	113	96	9216	193	36	8496	273
17	0289	35	57	3249	115	97	9409	195	37	8769	275
18	0324	37	58	3364	117	98	9604	197	38	9044	277
19	0361	39	59	3481	119	99	9801	199	39	9321	279
0,20	0,0400	41	0,60	0,3600	121	1,00	1,0000	201	1,40	1,9600	281
21	0441	43	61	3721	123	01	0201	203	41	9881	283
22	0484	45	62	3844	125	02	0404	205	42	2,0164	285
23	0529	47	63	3969	127	03	0609	207	43	0449	287
24	0576	49	64	4096	129	04	0816	209	44	0736	289
0,25	0,0625	51	0,65	0,4225	131	1,05	1,1025	211	1,45	2,1025	291
26	0676	53	66	4356	133	06	1236	213	46	1316	293
27	0729	55	67	4489	135	07	1449	215	47	1609	295
28	0784	57	68	4624	137	08	1664	217	48	1904	297
29	0841	59	69	4761	139	09	1881	219	49	2201	299
0,30	0,0900	61	0,70	0,4900	141	1,10	1,2100	221	1,50	2,2500	301
31	0961	63	71	5041	143	11	2321	223	51	2801	303
32	1024	65	72	5184	145	12	2544	225	52	3104	305
33	1089	67	73	5329	147	13	2769	227	53	3409	307
34	1156	69	74	5476	149	14	2996	229	54	3716	309
0,35	0,1225	71	0,75	0,5625	151	1,15	1,3225	231	1,55	2,4025	311
36	1296	73	76	5776	153	16	3456	233	56	4336	313
37	1369	75	77	5929	155	17	3689	235	57	4649	315
38	1444	77	78	6084	157	18	3924	237	58	4964	317
39	1521	79	79	6241	159	19	4161	239	59	5281	319
0,40	0,1600		0,80	0,6400		1,20	1,4400		1,60	2,5600	

Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.
1,60	2,5600	321	2,00	4,0000	401	2,40	5,7600	481	2,80	7,8400	561
61	5921	323	01	0401	403	41	8081	483	81	8961	563
62	6244	325	02	0804	405	42	8564	485	82	9524	565
63	6569	327	03	1209	407	43	9049	487	83	8,0089	567
64	6896	329	04	1616	409	44	9536	489	84	0656	569
1,65	2,7225	331	2,05	4,2025	411	2,45	6,0025	491	2,85	8,1225	571
66	7556	333	06	2436	413	46	0516	493	86	1796	573
67	7889	335	07	2849	415	47	1009	495	87	2369	575
68	8224	337	08	3264	417	48	1504	497	88	2944	577
69	8561	339	09	3681	419	49	2001	499	89	3521	579
1,70	2,8900	341	2,10	4,4100	421	2,50	6,2500	501	2,90	8,4100	581
71	9241	343	11	4521	423	51	3001	503	91	4681	583
72	9584	345	12	4944	425	52	3504	505	92	5264	585
73	9929	347	13	5369	427	53	4009	507	93	5849	587
74	3,0276	349	14	5796	429	54	4516	509	94	6436	589
1,75	3,0625	351	2,15	4,6225	431	2,55	6,5025	511	2,95	8,7025	591
76	0976	353	16	6656	433	56	5536	513	96	7616	593
77	1329	355	17	7089	435	57	6049	515	97	8209	595
78	1684	357	18	7524	437	58	6564	517	98	8804	597
79	2041	359	19	7961	439	59	7081	519	99	9401	599
1,80	3,2400	361	2,20	4,8400	441	2,60	6,7600	521	3,00	9,0000	601
81	2761	363	21	8841	443	61	8121	523	01	0601	603
82	3124	365	22	9284	445	62	8644	525	02	1204	605
83	3489	367	23	9729	447	63	9169	527	03	1809	607
84	3856	369	24	5,0176	449	64	9696	529	04	2416	609
1,85	3,4225	371	2,25	5,0625	451	2,65	7,0225	531	3,05	9,3025	611
86	4596	373	26	1076	453	66	0756	533	06	3636	613
87	4969	375	27	1529	455	67	1289	535	07	4249	615
88	5344	377	28	1984	457	68	1824	537	08	4864	617
89	5721	379	29	2441	459	69	2361	539	09	5481	619
1,90	3,6100	381	2,30	5,2900	461	2,70	7,2900	541	3,10	9,6100	621
91	6481	383	31	3361	463	71	3441	543	11	6721	623
92	6864	385	32	3824	465	72	3984	545	12	7344	625
93	7249	387	33	4289	467	73	4529	547	13	7969	627
94	7636	389	34	4756	469	74	5076	549	14	8596	629
1,95	3,8025	391	2,35	5,5225	471	2,75	7,5625	551	3,15	9,9225	631
96	8416	393	36	5696	473	76	6176	553	16	9856	633
97	8809	395	37	6169	475	77	6729	555	17	10,0489	635
98	9204	397	38	6644	477	78	7284	557	18	1124	637
99	9601	399	39	7121	479	79	7841	559	19	1761	639
2,00	4,0000		2,40	5,7600		2,80	7,8400		3,20	10,2400	

Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.
3,20	10,240	64	3,60	12,960	72	4,00	16,000	80	4,40	19,360	88
21	304	64	61	13,032	72	01	080	80	41	448	88
22	368	65	62	104	73	02	160	81	42	536	89
23	433	65	63	177	73	03	241	81	43	625	89
24	498	65	64	250	73	04	322	81	44	714	89
3,25	10,563	65	3,65	13,323	73	4,05	16,403	81	4,45	19,803	89
26	628	65	66	396	73	06	484	81	46	892	89
27	693	65	67	469	73	07	565	81	47	981	89
28	758	66	68	542	74	08	646	82	48	20,070	90
29	824	66	69	616	74	09	728	82	49	160	90
3,30	10,890	66	3,70	13,690	74	4,10	16,810	82	4,50	20,250	90
31	956	66	71	764	74	11	892	82	51	340	90
32	11,022	67	72	838	75	12	974	83	52	430	91
33	089	67	73	913	75	13	17,057	83	53	521	91
34	156	67	74	988	75	14	140	83	54	612	91
3,35	11,223	67	3,75	14,063	75	4,15	17,223	83	4,55	20,703	91
36	290	67	76	138	75	16	306	83	56	794	91
37	357	67	77	213	75	17	389	83	57	885	91
38	424	68	78	288	76	18	472	84	58	976	92
39	492	68	79	364	76	19	556	84	59	21,068	92
3,40	11,560	68	3,80	14,440	76	4,20	17,640	84	4,60	21,160	92
41	628	68	81	516	76	21	724	84	61	252	92
42	696	69	82	592	77	22	808	85	62	344	93
43	765	69	83	669	77	23	893	85	63	437	93
44	834	69	84	746	77	24	978	85	64	530	93
3,45	11,903	69	3,85	14,823	77	4,25	18,063	85	4,65	21,623	93
46	972	69	86	900	77	26	148	85	66	716	93
47	12,041	69	87	977	77	27	233	85	67	809	93
48	110	70	88	15,054	78	28	318	86	68	902	94
49	180	70	89	132	78	29	404	86	69	996	94
3,50	12,250	70	3,90	15,210	78	4,30	18,490	86	4,70	22,090	94
51	320	70	91	288	78	31	576	86	71	184	94
52	390	71	92	366	79	32	662	87	72	278	95
53	461	71	93	445	79	33	749	87	73	373	95
54	532	71	94	524	79	34	836	87	74	468	95
3,55	12,603	71	3,95	15,603	79	4,35	18,923	87	4,75	22,563	95
56	674	71	96	682	79	36	19,010	87	76	658	95
57	745	71	97	761	79	37	097	87	77	753	95
58	816	72	98	840	80	38	184	88	78	848	96
59	888	72	99	920	80	39	272	88	79	944	96
3,60	12,960		4,00	16,000		4,40	19,360		4,80	23,040	

Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.
4,80	23,040	96	5,20	27,040	104	5,60	31,360	112	6,00	36,000	120
81	136	96	21	144	104	61	472	112	01	120	120
82	232	97	22	248	105	62	584	113	02	240	121
83	329	97	23	353	105	63	697	113	03	361	121
84	426	97	24	458	105	64	810	113	04	482	121
4,85	23,523	97	5,25	27,563	105	5,65	31,923	113	6,05	36,603	121
86	620	97	26	668	105	66	32,036	113	06	724	121
87	717	97	27	773	105	67	149	113	07	845	121
88	814	98	28	878	106	68	262	114	08	966	122
89	912	98	29	984	106	69	376	114	09	37,088	122
4,90	24,010	98	5,30	28,090	106	5,70	32,490	114	6,10	37,210	122
91	108	98	31	196	106	71	604	114	11	332	122
92	206	99	32	302	107	72	718	115	12	454	123
93	305	99	33	409	107	73	833	115	13	577	123
94	404	99	34	516	107	74	948	115	14	700	123
4,95	24,503	99	5,35	28,623	107	5,75	33,063	115	6,15	37,823	123
96	602	99	36	730	107	76	178	115	16	946	123
97	701	99	37	837	107	77	293	115	17	38,069	123
98	800	100	38	944	108	78	408	116	18	192	124
99	900	100	39	29,052	108	79	524	116	19	316	124
5,00	25,000	100	5,40	29,160	108	5,80	33,640	116	6,20	38,440	124
01	100	100	41	268	108	81	756	116	21	564	124
02	200	101	42	376	109	82	872	117	22	688	125
03	301	101	43	485	109	83	989	117	23	813	125
04	402	101	44	594	109	84	34,106	117	24	938	125
5,05	25,503	101	5,45	29,703	109	5,85	34,223	117	6,25	39,063	125
06	604	101	46	812	109	86	340	117	26	188	125
07	705	101	47	921	109	87	457	117	27	313	125
08	806	102	48	30,030	110	88	574	118	28	438	126
09	908	102	49	140	110	89	692	118	29	564	126
5,10	26,010	102	5,50	30,250	110	5,90	34,810	118	6,30	39,690	126
11	112	102	51	360	110	91	928	118	31	816	126
12	214	103	52	470	111	92	35,046	119	32	942	127
13	317	103	53	581	111	93	165	119	33	40,069	127
14	420	103	54	692	111	94	284	119	34	196	127
5,15	26,523	103	5,55	30,803	111	5,95	35,403	119	6,35	40,323	127
16	626	103	56	914	111	96	522	119	36	450	127
17	729	103	57	31,025	111	97	641	119	37	577	127
18	832	104	58	136	112	98	760	120	38	704	128
19	936	104	59	248	112	99	880	120	39	832	128
5,20	27,040		5,60	31,360		6,00	36,000		6,40	40,960	

Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.
6,40	40,960	128	6,80	46,240	136	7,20	51,840	144	7,60	57,760	152
41	41,088	128	81	376	136	21	984	144	61	912	152
42	216	129	82	512	137	22	52,128	145	62	58,064	153
43	345	129	83	649	137	23	273	145	63	217	153
44	474	129	84	786	137	24	418	145	64	370	153
6,45	41,603	129	6,85	46,923	137	7,25	52,563	145	7,65	58,523	153
46	732	129	86	47,060	137	26	708	145	66	676	153
47	861	129	87	197	137	27	853	145	67	829	153
48	990	130	88	334	138	28	998	146	68	982	154
49	42,120	130	89	472	138	29	53,144	146	69	59,136	154
6,50	42,250	130	6,90	47,610	138	7,30	53,290	146	7,70	59,290	154
51	380	130	91	748	138	31	436	146	71	444	154
52	510	131	92	886	139	32	582	147	72	598	155
53	641	131	93	48,025	139	33	729	147	73	753	155
54	772	131	94	164	139	34	876	147	74	908	155
6,55	42,903	131	6,95	48,303	139	7,35	54,023	147	7,75	60,063	155
56	43,034	131	96	442	139	36	170	147	76	218	155
57	165	131	97	581	139	37	317	147	77	373	155
58	296	132	98	720	140	38	464	148	78	528	156
59	428	132	99	860	140	39	612	148	79	684	156
6,60	43,560	132	7,00	49,000	140	7,40	54,760	148	7,80	60,840	156
61	692	132	01	140	140	41	908	148	81	996	156
62	824	133	02	280	141	42	55,056	149	82	61,152	157
63	957	133	03	421	141	43	205	149	83	309	157
64	44,090	133	04	562	141	44	354	149	84	466	157
6,65	44,223	133	7,05	49,703	141	7,45	55,503	149	7,85	61,623	157
66	356	133	06	844	141	46	652	149	86	780	157
67	489	133	07	985	141	47	801	149	87	937	157
68	622	134	08	50,126	142	48	950	150	88	62,094	158
69	756	134	09	268	142	49	56,100	150	89	252	158
6,70	44,890	134	7,10	50,410	142	7,50	56,250	150	7,90	62,410	158
71	45,024	134	11	552	142	51	400	150	91	568	158
72	158	135	12	694	143	52	550	151	92	726	159
73	293	135	13	837	143	53	701	151	93	885	159
74	428	135	14	980	143	54	852	151	94	63,044	159
6,75	45,563	135	7,15	51,123	143	7,55	57,003	151	7,95	63,203	159
76	698	135	16	266	143	56	154	151	96	362	159
77	833	135	17	409	143	57	305	151	97	521	159
78	968	136	18	552	144	58	456	152	98	680	160
79	46,104	136	19	696	144	59	608	152	99	840	160
6,80	46,240		7,20	51,840		7,60	57,760		8,00	64,000	

Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.
8,00	64,000	160	8,40	70,560	168	8,80	77,440	176	9,20	84,640	184
01	160	160	41	728	168	81	616	176	21	824	184
02	320	161	42	896	169	82	792	177	22	85,008	185
03	481	161	43	71,065	169	83	969	177	23	193	185
04	642	161	44	234	169	84	78,146	177	24	378	185
8,05	64,803	161	8,45	71,403	169	8,85	78,323	177	9,25	85,563	185
06	964	161	46	572	169	86	500	177	26	748	185
07	65,125	161	47	741	169	87	677	177	27	933	185
08	286	162	48	910	170	88	854	178	28	86,118	186
09	448	162	49	72,080	170	89	79,032	178	29	304	186
8,10	65,610	162	8,50	72,250	170	8,90	79,210	178	9,30	86,490	186
11	772	162	51	420	170	91	388	178	31	676	186
12	934	163	52	590	171	92	566	179	32	862	187
13	66,097	163	53	761	171	93	745	179	33	87,049	187
14	260	163	54	932	171	94	924	179	34	236	187
8,15	66,423	163	8,55	73,103	171	8,95	80,103	179	9,35	87,423	187
16	586	163	56	274	171	96	282	179	36	610	187
17	749	163	57	445	171	97	461	179	37	797	187
18	912	164	58	616	172	98	640	180	38	984	188
19	67,076	164	59	788	172	99	820	180	39	88,172	188
8,20	67,240	164	8,60	73,960	172	9,00	81,000	180	9,40	88,360	188
21	404	164	61	74,132	172	01	180	180	41	548	188
22	568	165	62	304	173	02	360	181	42	736	189
23	733	165	63	477	173	03	541	181	43	925	189
24	898	165	64	650	173	04	722	181	44	89,114	189
8,25	68,063	165	8,65	74,823	173	9,05	81,903	181	9,45	89,303	189
26	228	165	66	996	173	06	82,084	181	46	492	189
27	393	165	67	75,169	173	07	265	181	47	681	189
28	558	166	68	342	174	08	446	182	48	870	190
29	724	166	69	516	174	09	628	182	49	90,060	190
8,30	68,890	166	8,70	75,690	174	9,10	82,810	182	9,50	90,250	190
31	69,056	166	71	864	174	11	992	182	51	440	190
32	222	167	72	76,038	175	12	83,174	183	52	630	191
33	389	167	73	213	175	13	357	183	53	821	191
34	556	167	74	388	175	14	540	183	54	91,012	191
8,35	69,723	167	8,75	76,563	175	9,15	83,723	183	9,55	91,203	191
36	890	167	76	738	175	16	906	183	56	394	191
37	70,057	167	77	913	175	17	84,089	183	57	585	191
38	224	168	78	77,088	176	18	272	184	58	776	192
39	392	168	79	264	176	19	456	184	59	968	192
8,40	70,560		8,80	77,440		9,20	84,640		9,60	92,160	

Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.	Liczba	Kwadrat	Różn. kw.
9,60	92,160	192	10,00	100,000	200	10,40	108,160	208	10,80	116,640	216
61	352	192	01	200	200	41	368	208	81	856	216
62	544	193	02	400	201	42	576	209	82	117,072	217
63	737	193	03	601	201	43	785	209	83	289	217
64	930	193	04	802	201	44	994	209	84	506	217
9,65	93,123	193	10,05	101,003	201	10,45	109,203	209	10,85	117,723	217
66	316	193	06	204	201	46	412	209	86	940	217
67	509	193	07	405	201	47	621	209	87	118,157	217
68	702	194	08	606	202	48	830	210	88	374	218
69	896	194	09	808	202	49	110,040	210	89	592	218
9,70	94,090	194	10,10	102,010	202	10,50	110,250	210	10,90	118,810	218
71	284	194	11	212	202	51	460	210	91	119,028	218
72	478	195	12	414	203	52	670	211	92	246	219
73	673	195	13	617	203	53	881	211	93	465	219
74	868	195	14	820	203	54	111,092	211	94	684	219
9,75	95,063	195	10,15	103,023	203	10,55	111,303	211	10,95	119,903	219
76	258	195	16	226	203	56	514	211	96	120,122	219
77	453	195	17	429	203	57	725	211	97	341	219
78	648	196	18	632	204	58	936	212	98	560	220
79	844	196	19	836	204	59	112,148	212	99	780	220
9,80	96,040	196	10,20	104,040	204	10,60	112,360	212	11,00	121,000	220
81	236	196	21	244	204	61	572	212	01	220	220
82	432	197	22	448	205	62	784	213	02	440	221
83	629	197	23	653	205	63	997	213	03	661	221
84	826	197	24	858	205	64	113,210	213	04	882	221
9,85	97,023	197	10,25	105,063	205	10,65	113,423	213	11,05	122,103	221
86	220	197	26	268	205	66	636	213	06	324	221
87	417	197	27	473	205	67	849	213	07	545	221
88	614	198	28	678	206	68	114,062	214	08	766	222
89	812	198	29	884	206	69	276	214	09	988	222
9,90	98,010	198	10,30	106,090	206	10,70	114.490	214	11,10	123,210	222
91	208	198	31	296	206	71	704	214	11	432	222
92	406	199	32	502	207	72	918	215	12	654	223
93	605	199	33	709	207	73	115,133	215	13	877	223
94	804	199	34	916	207	74	348	215	14	124,100	223
9,95	99,003	199	10,35	107,123	207	10,75	115,563	215	11,15	124,323	223
96	202	199	36	330	207	76	778	215	16	546	223
97	401	199	37	537	207	77	993	215	17	769	223
98	600	200	38	744	208	78	116,208	216	18	992	224
99	800	200	39	952	208	79	424	216	19	125,216	224
10,00	100,000		10,40	108,160		10,80	116,640		11,20	125,440	