Zbiory i odwzorowania	2	
Liczby zespolone	4	4
Macierze, wyznaczniki, układy równań liniowych	6	6
Algebra liniowa	2	2
Wektory w przestrzeni. Prosta i płaszczyzna w przestrzeni	6	6
Ciągi i szeregi liczbowe	4	4
Przestrzeń metryczna	2	
Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej	6	8
Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych	8	6
Całka nieoznaczona	6	6
Całka oznaczona	6	6
Równania różniczkowe zwyczajne	8	8
Prace kontrolne		4
	60	**60**

1 Zbiory i odwzorowania

1.1 Liczby naturalne i zasada indukcji zupełnej

Zbiór **liczb naturalnych**

$$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

oraz naturalne uporządkowanie tego zbioru, w którym po każdej liczbie naturalnej n następuje liczba naturalna $n+1$, są **pojęciami pierwotnymi**. Wszystkie własności liczb naturalnych wynikają z kilku własności podstawowych, które przyjmuje się bez dowodu jako aksjomaty teorii liczb naturalnych. Do aksjomatów tych należy **zasada indukcji zupełnej**, którą formułuje twierdzenie:

Twierdzenie 1.1 *Jeżeli W jest własnością określoną w zbiorze $\mathcal{N}$ i taką, że:*

1. *liczba 1 ma własność W,*
2. *dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest implikacja:*

   jeżeli n ma własność W, to $n+1$ ma własność W

to każda liczba naturalna ma własność W.

Wykażemy, że dla wszystkich liczb naturalnych i nie mniejszych od 5 zachodzi nierówność

$$2^n > n^2 \tag{1}$$

W tym celu udowodnimy, że funkcja $f(n) = 2^n - n^2$ przyjmuje wartości dodatnie dla wszystkich n naturalnych nie mniejszych od 5. Dla $n = n_0 = 5$ mamy $f(n_0) = f(n) = 32 - 25 > 0$. Mamy wykazać, że dla $n \geq 5$ prawdziwa jest implikacja

$$f(n) > 0 \Rightarrow f(n+1) > 0$$

W wyniku przekształceń otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 2^{n+1} - (n+1)^2 = 2 \cdot 2^n - n^2 - 2n - 1 = \\ &= 2 \cdot 2^n - 2n^2 + \left(n^2 - 2n - 1\right) = 2\left(2^n - n^2\right) + \left(n^2 - 2n - 1\right) = \\ &= 2f(n) + (n-3)(n+1) + 2 \end{aligned}$$

Widać stąd, że dla $n \geq 5$ spełniona jest nierówność (1).

Potęgę a^n o wykładniku n naturalnym i podstawie a dowolnej definiujemy indukcyjne za pomocą równości:

1. $a^1 = a$,
2. $a^{n+1} = a \cdot a^n$ dla dowolnego n naturalnego.

Z powyższych równości wynika, że $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$ itd. Możemy to wyrazić jednym wzorem

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Uwaga 1.1 *W zbiorze liczb naturalnych dodawanie i mnożenie są* ***działaniami wewnętrznymi*** *i każde z tych działań jest łączne. Zatem $\mathcal{N}$ jest półgrupą ze względu na dodawanie i półgrupą ze względu na mnożenie.*

1.2 Liczby całkowite i liczby wymierne

Zbiór **liczb całkowitych**

$$\mathcal{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

składa się z:

1. liczb całkowitych dodatnich $+1,\ +2,\ +3,\ \ldots$, które uważamy za identyczne z liczbami naturalnymi $1,\ 2,\ 3,\ \ldots$,

2. liczb całkowitych ujemnych $-1,\ -2,\ -3,\ \ldots$, które są liczbami przeciwnymi do liczb naturalnych,

3. liczby zero 0, która jest liczbą całkowitą neutralną (ani dodatnią, ani ujemną).

Dwie liczby nazywamy liczbami wzajemnie przeciwnymi, jeżeli ich suma jest zerem. Liczbę przeciwną do n oznaczamy $-n$, a liczbę przeciwną do $-n$ oznaczamy $-(-n) = n$. Liczbą przeciwną do zera jest zero.

Uwaga 1.2 *W zbiorze liczb całkowitych dodawanie, odejmowanie i mnożenie są* ***działaniami wewnętrznymi****.*

Liczbą wymierną nazywamy liczbę, którą można przedstawić w postaci ułamka zwykłego

$$\frac{m}{n} \qquad n \neq 0$$

którego licznik m jest dowolną liczbą całkowitą, a mianownik n jest liczbą całkowitą różną od zera. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy $\mathcal{Q}$. Zamiast $\dfrac{m}{n}$ piszemy często m/n. Liczbę całkowitą m utożsamiamy z ułamkiem $\dfrac{m}{1}$.

Przedstawienie liczby wymiernej w postaci ułamka zwykłego jest możliwe na nieskończenie wiele sposobów, bowiem

$$\frac{m}{n} = \frac{km}{kn} \qquad k \neq 0$$

Ułamek $\dfrac{m}{n}$ nazywamy skróconym, jeżeli jego licznik i mianownik nie mają wspólnego podzielnika, a mianownik jest liczbą całkowitą dodatnią.

Uwaga 1.3 *W zbiorze liczb wymiernych dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie są* ***działaniami wewnętrznymi****.*

Możemy teraz rozszerzyć definicję potęgi na wykładnik zero i wykładnik całkowity ujemny dla dowolnej podstawy niezerowej

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = 1/a^n \quad \text{dla} \quad a \neq 0$$

1.3 Liczby rzeczywiste

1.3.1 Liczby niewymierne

Wśród wielkości rozważanych w geometrii są takie, które nie dają się wyrazić za pomocą liczb wymiernych. Do wielkości tych należą:

1. pole okręgu o promieniu 1,

2. długość przekątnej kwadratu o boku jednostkowym,

3. długość krawędzi sześcianu o objętości równej 10 itp.

Dla wyrażenia tych wielkości rozszerzono pojęcie liczby wprowadzając **liczby niewymierne**. Poszczególne liczby niewymierne są dane jako pierwiastki pewnych równań, jako granice pewnych ciągów lub za pomocą innych warunków. Uważamy, że liczba niewymierna jest przez dany warunek określona, jeżeli warunek ten pozwala o każdej liczbie wymiernej rozstrzygnąć czy jest mniejsza, czy większa od danej liczby niewymiernej. Warunek ten rozdziela zbiór liczb wymiernych na dwie klasy: dolną i górną. Mówimy, że liczba niewymierna jest **przekrojem** zbioru liczb wymiernych. Jednocześnie warunek ten pozwala wyznaczyć przybliżenie wymierne danej liczby niewymiernej z dowolnie małym bdem. Zilustrujemy to opisem.

Długość x krawędzi sześcianu o objętości 10 jest liczbą wyznaczoną przez warunek $x^3 = 10$. Okazuje się, że sześcian dowolnej liczby wymiernej jest albo większy albo mniejszy od tej wartości. Wówczas zaliczamy daną liczbę wymierną do klasy górnej lub dolnej. Jest to przekrój zbioru liczb wymiernych wyznaczający liczbę $\sqrt[3]{10}$.

Sprawdzenie warunku	Klasa dolna	Przekrój	Klasa górna	Sprawdzenie warunku
$2^3 = 8$	2		3	$3^3 = 27$
$2.1^3 = 9.261$	2.1		2.2	$2.2^3 = 10.648$
$2.15^3 = 9.938375$	2.15		2.16	$2.16^3 = 10.077696$
...	...	$\sqrt[3]{10}$	...	...

Tak więc liczby wymierne 2.15 i 2.16 są przybliżeniami liczby niewymiernej $\sqrt[3]{10}$ z błędem mniejszym od 0.01. W powyższy sposób możemy wyznaczyć przybliżenie wymierne liczby $\sqrt[3]{10}$ z błędem dowolnie małym.

1.3.2 Przekrój Dedekinda

Definicja 1.1 *Podział zbioru liczb wymiernych na dwa podzbiory A, B niepuste i takie, że*

1. *każda liczba wymierna należy do A lub do B,*

2. *każda liczba wymierna należąca do A jest mniejsza od każdej liczby wymiernej należącej do B*

nazywamy ***przekrojem zbioru liczb wymiernych.***

Nie jest możliwe, aby w klasie A istniała liczba największa a i aby jednocześnie w klasie B istniała liczba najmniejsza b, gdyż wtedy średnia arytmetyczna nie mogłaby należeć do żadnej z klas A, B i warunek 1 nie byłby spełniony. Fakt ten wyrażamy wówiąc: **w zbiorze liczb wymiernych nie ma skoków**.

Jest możliwe, że w klasie A istnieje liczba największa c, a w klasie B nie ma liczby najmniejszej, lub odwrotnie, w klasie B istnieje liczba najmniejsza c, a w klasie A nie ma liczby największej. Wówczas mówimy, że **przekrój zbioru liczb wymiernych wyznacza liczbę wymierną** c.

Jeżeli w klasie A nie ma liczby największej, ani w klasie B nie ma liczby najmniejszej, to mówimy, że **przekrój ujawnia lukę** w zbiorze liczb wymiernych oraz wyznacza liczbę niewymierną, która tę lukę zapełnia.

Jednolite ujęcie liczb wymiernych i niewymiernych za pomocą przekrojów wprowadził Dedekind.

1.3.3 Liczby rzeczywiste

Wszystkie liczby wymierne i niewymierne (wszystkie przekroje Dedekinda) razem wzięte tworzą zbiór liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$. Przy wykonywaniu działań na liczbach rzeczywistych posługujemy się przybliżeniami wymiernymi tych liczb. Pokażemy to na przykładzie sumy $\sqrt[3]{10} + \sqrt{2}$. Biorąc przybliżenia dziesiętne tych liczb, dolne i górne, z błędem mniejszym od 0.01 i dodając je

$$\begin{array}{ccccc} 2.15 & < & \sqrt[3]{10} & < & 2.16 \\ 1.41 & < & \sqrt{2} & < & 1.42 \\ \hline 3.56 & < & \sqrt[3]{10}+\sqrt{2} & < & 3.58 \end{array}$$

otrzymujemy przybliżenia sumy z błędem mniejszym od 0.02.

Uwaga 1.4 *W zbiorze liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$ dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie (przez liczbę różną od zera) oraz potęgowanie przy wykładniku całkowitym są* ***działaniami wewnętrznymi****.*

Definicja 1.2 ***Pierwiastkiem arytmetycznym*** *stopnia naturalnego n liczby rzeczywistej c nazywamy liczbę rzeczywistą*

$$x = \sqrt[n]{c} \tag{2}$$

która jest rozwiązaniem równania

$$x^n = c \tag{3}$$

przy zastrzeżeniu, że jeżeli n jest liczbą parzystą, to $x \geq 0$ i $c \geq 0$.

Pierwiastek arytmetyczny stopnia parzystego liczby ujemnej **nie istnieje**, bowiem równanie (3) nie ma rozwiązania, gdy n jest parzyste, a $c < 0$. Jeżeli pierwiastek arytmetyczny istnieje, to jest określony jednoznacznie: $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{1} = 1$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[4]{-16}-$ nie istnieje.

Definicja 1.3 *Potęgę $a^{m/n}$ o wykładniku wymiernym $\frac{m}{n}$, gdzie m jest liczbą całkowitą, a n liczbą naturalną, definiujemy wzorem*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad dla \quad a > 0 \tag{4}$$

ograniczając się do przypadku, gdy podstawa a jest liczbą dodatnią.

Ograniczenie to wynika z faktu, że dla $a \leq 0$ prawa strona (4) może tracić sens lub mieć wartość zależną nie tylko od wartości wykładnika wymiernego $\frac{m}{n}$, ale i od postaci, w jakiej ten wykładnik napisano, np.

$$(-0.1)^{0.2} = \begin{cases} (-1)^{1/5} & = \sqrt[5]{-1} & = -1 \\ (-1)^{2/10} & = \sqrt[10]{(-1)^2} & = +1 \end{cases}$$

Wynika stąd, że przekształcenie

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}$$

może być stosowane, jeżeli $a > 0$.

Definiując liczby rzeczywiste za pomocą przekrojów w zbiorze liczb wymiernych, możemy teraz konstruować w analogiczny sposób przekroje w zbiorze liczb rzeczywistych. Udowadnia się, że każdy przekrój w zbiorze liczb rzeczywistych wyznacza jakąś liczbę rzeczywistą. Oznacza to, że w zbiorze liczb rzeczywistych nie ma skoków i nie ma luk. Fakt ten wyrażamy mówiąc, że **zbiór liczb rzeczywistych jest ciągły**.

1.3.4 Wartość bezwzględna (moduł)

Definicja 1.4 ***Wartość bezwzględną (moduł)*** *liczby rzeczywistej x oznaczamy symbolem $|x|$ i definiujemy następująco:*

- *moduł zera jest zerem,*
- *moduł liczby dodatniej x jest równy x,*
- *moduł liczby ujemnej x jest równy liczbie przeciwnej do liczby x, a więc*

$$|x| = \begin{cases} x & dla \quad x \geq 0 \\ -x & dla \quad x < 0 \end{cases} \tag{5}$$

Na przykład: $|a^2| = a^2$, $|-a^2| = -(-a^2) = a^2$, $|\cos^2 x - 1| = -(\cos^2 x - 1) = \sin^2 x$. Następnie mamy przykład uproszczenia wyrażenia $\sqrt{w^2}$. Z definicji pierwiastka arytmetycznego wynika, że

$$\sqrt{w^2} = w \quad \text{dla } w \geq 0$$
$$\sqrt{w^2} = -w \quad \text{dla } w < 0$$

Jeżeli nie wiemy, jaką liczbą jest w, to zgodnie z definicją (5) piszemy

$$\sqrt{w^2} = |w| \quad \text{dla} \quad w \in \mathcal{R}$$

Natomiast

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{dla} \quad x \geq -1 \\ -x-1 & \text{dla} \quad x < -1 \end{cases}$$

Twierdzenie 1.2 *Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwe są następujące związki*[1]

$\|x\| \geq 0$	*moduł dowolnej liczby jest nieujemny*
$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$	*moduł liczby jest zerem wtw, gdy liczba jest zerem*
$\|x\| = \|-x\|$	*liczby przeciwne mają moduły jednakowe*
$\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$	*moduł iloczynu jest równy iloczynowi modułów*
$\left\|\frac{x}{y}\right\| = \frac{\|x\|}{\|y\|}$	*moduł ilorazu jest równy ilorazowi modułów*
$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$	*moduł sumy jest niewiększy od sumy modułów*
$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$	*moduł różnicy jest niemniejszy do różnicy modułów*
$\|\|x\| - \|y\|\| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$	*moduł sumy lub różnicy jest niewiększy od sumy modułów i niemniejszy od różnicy modułów*

1.4 Działania na zbiorach

Zbiór jest w matematyce pojęciem pierwotnym. Przedmioty należące do pewnego zbioru nazywamy **elementami** tego zbioru. Zdanie: przedmiot a należy do zbioru A zapisujemy

$$a \in A$$

Zaprzeczenie tego zdania, że a nie należy do A (a nie jest elementem zbioru A) zapisujemy

$$a \notin A$$

Mówimy, że zbiór A zawiera się w zbiorze B i piszemy

$$A \subset B$$

gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B. Mówimy wówczas, że A jest **podzbiorem** zbioru B, a B jest **nadzbiorem** zbioru A.

Uwaga 1.5 *Każdy zbiór jest swoim własnym podzbiorem.*

Mówimy, że zbiory A i B są identyczne i piszemy $A = B$, jeżeli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B i każdy element zbioru B jest elementem zbioru A. A więc

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A) \tag{6}$$

Przestrzeń.

Zbiory rozważane w pewnym zagadnieniu są zwykle podzbiorami pewnego ustalonego zbioru X, zwanego **przestrzenią**. Przestrzenią może być zbiór punktów przestrzeni geometrycznej, zbiór liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$, zbiór wielomianów itp.

Zbiory skończone i nieskończone.

Niech n oznacza dowolną liczbę naturalną lub 0. Zbiór złożony z n elementów nazywamy **zbiorem skończonym** ($n-$elementowym). Zbiór nazywamy **nieskończonym**, jeżeli dla każdego n istnieje w tym zbiorze podzbiór złożony z n elementów. Na przykład, zbiór podzielników dowolnej liczby naturalnej jest skończony, natomiast zbiór jej wielokrotności jest nieskończony.

Jeżeli zbiór jest skończony, to można go zdefiniować wymieniając wszystkie jego elementy. Zdanie: *A jest zbiorem złożonym z elementów* $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$ zapisujemy

$$A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n\}$$

i rozumiemy przez to, że:

[1] wtw czytamy: wtedy i tylko wtedy

1. każdy z przedmiotów $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$ należy do zbioru A,
2. tylko przedmioty $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$ należą do zbioru A.

Jeżeli zbiór jest nieskończonym podzbiorem pewnej przestrzeni, to definiujemy go podając warunek, który jest spełniony przez wszystkie elementy tego zbioru. Na przykład: *A jest zbiorem złożonym z elementów przestrzeni X spełniających warunek W*

$$A = \{x \in X : W(x)\}$$

Jeżeli nie ma wątpliwości, o jaką przestrzeń chodzi, to mówimy: *A jest zbiorem tych x, które spełniają warunek W* i piszemy:

$$A = \{x : W(x)\}$$

Niech będą dane dwa zbiory $A,\ B$.

Definicja 1.5 ***Sumą zbiorów*** *nazywamy zbiór utworzony ze wszystkich elementów zbioru A i wszystkich elementów zbioru B*

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Definicja 1.6 ***Iloczynem*** *(częścią wspólną) zbiorów $A,\ B$ nazywamy zbiór tych elementów zbioru A, które są elementami zbioru B*

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Definicja 1.7 ***Różnicą*** *zbiorów $A,\ B$ nazywamy zbiór tych elementów zbioru A, które nie są elementami zbioru B*

$$A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

Definicja 1.8 *Mówimy, że zbiory $A,\ B$ są* ***rozłączne****, jeżeli ich iloczyn jest zbiorem pustym (nie istnieje element, który należy do A i do B).*

Definicja 1.9 *Jeżeli zbiór A jest podzbiorem pewnej przestrzeni X, to różnicę $X \setminus B$ nazywamy* ***dopełnieniem*** *(uzupełnieniem) zbioru A.*

1.4.1 Produkt kartezjański

Niech będą dane dwa zbiory $X,\ Y$. Nie wykluczamy możliwości, że $X,\ Y$ oznaczają jeden i ten sam zbiór. Jeżeli tak jest, to mówimy, że X i Y są dwoma egzemplarzami tego samego zbioru. Niech x oznacza dowolny element zbioru X, a y dowolny element zbioru Y. Utwórzmy parę

$$(x, y)$$

w której x jest pierwszym wyrazem, a y drugim. Zbiór takich par nazywamy **produktem kartezjańskim** zbiorów $X,\ Y$ (lub **produktem**) i oznaczamy

$$X \times Y = \{(x, y) : (x \in X) \wedge (y \in Y)\}$$

Przykład.

Na płaszczyźnie obieramy prostokątny układ kartezjański Oxy. Wówczas każdemu punktowi płaszczyzny odpowiada para (x, y) liczb rzeczywistych i każdej parze (x, y) liczb rzeczywistych odpowiada punkt płaszczyzny. Zbiór par (x, y) liczb rzeczywistych jest produktem $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$.

Produktem zbiorów $\{1, 2\}$ i $\{1, 2, 3\}$ jest zbiór par

$$\begin{array}{ccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \end{array}$$

Produktem zbiorów $\{1, 2, \ldots, m\}$ i $\{1, 2, \ldots, n\}$ jest zbiór par

$$\begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & \cdots & (2,n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (m,1) & (m,2) & \cdots & (m,n) \end{array}$$

Produkt $\mathcal{N}^2 = \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ jest to zbiór par (i, j) liczb naturalnych

$$\begin{array}{ccccc} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,j) & \cdots \\ (2,1) & (2,2) & \cdots & (2,j) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (i,1) & (i,2) & \cdots & (i,j) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

1.5 Zbiory liczb. Kres górny, kres dolny

W punkcie tym będziemy rozważać tylko podzbiory przestrzeni liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$. Litera Z będzie oznaczać podzbiór liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$. Poniżej przedstawiamy zapis ogólny zbioru liczb x spełniających warunek W

$$x : W(x)$$

oraz przykłady zbiorów

$\{x : x^2 = 9\} = \{-3, +3\}$	zbiór 2−elementowy
$\{x : x^2 = 0\} = \{0\}$	zbiór 1−elementowy
$\{x : x^2 < 0\}$	zbiór 0−elementowy, czyli pusty
$\{x : x^2 < 9\} = \{x : -3 < x < 3\}$	zbiór nieskończony

Najważniejszy rodzaj zbiorów to przedziały. Definiujemy je poniżej, zakładając, że $a \in \mathcal{R}$, $b \in \mathcal{R}$ i $a < b$.

Definicja zbioru	Symbol	Nazwa
$\{x : a \leq x \leq b\}$	$< a; b >$	przedział domknięty
$\{x : a < x < b\}$	$(a; b)$	przedział otwarty
$\{x : a \leq x < b\}$	$< a; b)$	przedział lewostronnie domknięty, prawostronnie otwarty
$\{x : a < x \leq b\}$	$(a; b >$	przedział lewostronnie otwarty, prawostronnie domknięty

O każdym z powyższych przedziałów mówimy, że ma końce a, b, długość $b-a$ (skończoną) i że jest ograniczony. Poniższe przedziały

Definicja zbioru	Symbol	Nazwa
$\{x : a \leq x\}$	$< a; +\infty)$	przedział lewostronnie domknięty, prawostronnie nieograniczony
$\{x : a < x\}$	$(a; +\infty)$	przedział otwarty, prawostronnie nieograniczony
$\{x : x \leq b\}$	$(-\infty; b >$	przedział lewostronnie nieograniczony, prawostronnie domknięty
$\{x : x < b\}$	$(-\infty; b)$	przedział otwarty, lewostronnie nieograniczony

nazywamy nieograniczonymi, mówiąc, że mają długość nieskończoną, że mają jeden koniec w skończoności, a drugi w nieskończoności. Zapis $(-\infty; +\infty)$ oznacza całą przestrzeń $\mathcal{R}$.

Definicja 1.10 ***Elementem największym*** *zbioru liczb Z nazywamy tę liczbę, która należy do zbioru Z i jest większa od każdej z pozostałych liczb należących do zbioru Z. Liczbę tę oznaczamy*

$$\max Z \qquad (\textit{maksimum } Z)$$

Definicja 1.11 ***Elementem najmniejszym*** *zbioru liczb Z nazywamy tę liczbę, która należy do zbioru Z i jest mniejsza od każdej z pozostałych liczb należących do zbioru Z. Liczbę tę oznaczamy*

$$\min Z \qquad (\textit{minimum } Z)$$

W każdym skończonym zbiorze liczb istnieje element największy i element najmniejszy, np.

$$\min\left\{0.1, \sqrt{0.1}\right\} = 0.1 \qquad \max\{x, -x\} = |x|$$

W zbiorze nieskończonym element największy i najmniejszy mogą nie istnieć, np.

$$\max \mathcal{N} - \text{ nie istnieje} \qquad \max(0;1) - \text{ nie istnieje}$$

Definicja 1.12 *Liczbę b nazywamy* ***ograniczeniem górnym*** *zbioru Z, jeżeli dla każdego x należącego do Z jest $x \leq b$*

$$\bigwedge_{x \in Z} x \leq b$$

Definicja 1.13 *Zbiór Z nazywamy* ***ograniczonym od góry***, *jeżeli istnieje ograniczenie górne zbioru Z*

$$\bigvee_{b} \bigwedge_{x \in Z} x \leq b$$

Definicja 1.14 *Liczbę a nazywamy* ***ograniczeniem dolnym*** *zbioru Z, jeżeli dla każdego x należącego do Z jest $a \leq x$*

$$\bigwedge_{x \in Z} a \leq x$$

Definicja 1.15 *Zbiór Z nazywamy* ***ograniczonym od dołu***, *jeżeli istnieje ograniczenie dolne zbioru Z*

$$\bigvee_{b} \bigwedge_{x \in Z} a \leq x$$

Definicja 1.16 *Zbiór nazywamy **ograniczonym**, jeżeli zbiór ten jest ograniczony od góry i od dołu. W przeciwnym razie zbiór nazywamy **nieograniczonym**.*

Uwaga 1.6 *Zbiór liczb naturalnych jest nieograniczony. Zbiór odwrotności liczb naturalnych jest ograniczony.*

Definicja 1.17 ***Kresem górnym** zbioru nazywamy najmniejsze z ograniczeń górnych tego zbioru. Kres górny zbioru Z oznaczamy*

$$\sup Z \qquad (\textit{supremum } Z)$$

Definicja 1.18 ***Kresem dolnym** zbioru nazywamy największe z ograniczeń dolnych tego zbioru. Kres dolny zbioru Z oznaczamy*

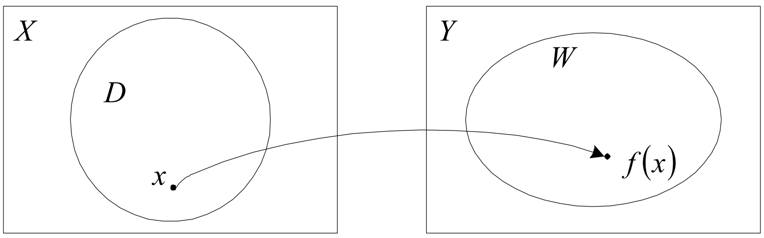
$$\inf Z \qquad (\textit{infimum } Z)$$

Uwaga 1.7 *Kresem górnym przedziału $(0;1)$ jest liczba 1. Kresem dolnym zbioru odwrotności liczb naturalnych jest liczba 0.*

Twierdzenie 1.3 *Dla każdego zbioru niepustego i ograniczonego od góry istnieje jeden kres górny. Dla każdego zbioru niepustego i ograniczonego od dołu istnieje jeden kres dolny. Dla każdego zbioru niepustego i ograniczonego istnieje dokładnie jeden kres górny i dokładnie jeden kres dolny.*

1.6 Odwzorowania (funkcje)

Definicja 1.19 ***Odwzorowanie** jest w matematyce pojęciem pierwotnym.*



Rysunek 1: Odwzorowanie $f(x)$.

Zamiast odwzorowanie mówimy też **przekształcenie** albo **funkcja**.

Niech będą dane przestrzeń X, której dowolny element oznaczamy przez x oraz przestrzeń Y, której dowolny element oznaczamy $y = f(x)$. Zakładamy, że zbiory X i Y są niepuste. Niech D będzie pewnym niepustym podzbiorem przestrzeni X, co zapiszemy $D \subset X$ (patrz rys. 1), a W pewnym niepustym podzbiorem przestrzeni Y: $W \subset Y$.

Jeżeli każdemu elementowi zbioru D został przyporządkowany dokładnie jeden element zbioru Y, to mówimy, że zostało określone **odwzorowanie zbioru D w zbiór Y** czyli **funkcja odwzorowująca zbiór D w zbiór Y**. Funkcję tę oznaczamy przez f

$$f : D \to Y$$

(czytamy: f jest funkcją odwzorowującą zbiór D w zbiór Y). Każdy element zbioru D nazywamy **argumentem** funkcji f, a zbiór $D-$ dziedziną funkcji f. Element zbioru Y, który funkcja f przyporządkowuje argumentowi x oznaczamy $f(x)$

$$x \to f(x)$$

i nazywamy **wartością funkcji** odpowiadającą argumentowi x. Pełny zapis omówionej funkcji ma postać:

$$\begin{aligned} f: \quad & D \to Y \\ & x \to f(x) \end{aligned}$$

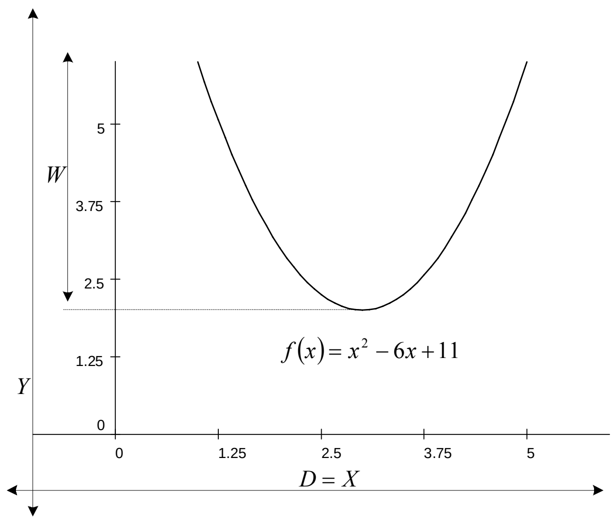
Zbiór wszystkich wartości funkcji oznaczamy W i nazywamy **przeciwdziedziną** funkcji.

Zapis

$$f: \quad \mathcal{R} \to \mathcal{R}$$
$$x \to f(x) = x^2 - 6x + 11$$

czytamy: f jest funkcją określoną na zbiorze liczb rzeczywistych i mającą wartości w zbiorze liczb rzeczywistych dane wzorem $f(x) = x^2 - 6x + 11$. Definicję tę i zapis często skracamy, mówiąc: $f(x)$ jest funkcją określoną wzorem

$$f(x) = x^2 - 6x + 11 \quad \text{dla} \quad x \in \mathcal{R}$$



Rysunek 2: Odwzorowanie $f(x) = x^2 - 6x + 11$.

W naszym przykładzie $D = X = \mathcal{R}$, $Y = \mathcal{R}$. Aby wyznaczyć przeciwdziedzinę W, zauważamy, że wartość funkcji $f(x) = x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2$ może być równa 2 i może być dowolną liczbą większą od 2. Zatem przeciwdziedzina W jest przedziałem $< 2; \infty)$ (patrz rys. 2).

Uwaga 1.8 *X i Y mogą być różnymi przestrzeniami; w szczególności może być $X = Y$. Dziedzina D jest podzbiorem przestrzeni X, przy czym jest możliwe, że $D = X$. Przeciwdziedzina W jest podzbiorem przestrzeni Y, ale może zachodzić $W = Y$.*

Jednoznaczność funkcji

Z określenia funkcji wynika, że każdemu argumentowi przyporządkowana jest tylko jedna wartość funkcji. Fakt ten wyrażamy, mówiąc, że **funkcja jest jednoznaczna**.

Funkcja różnowartościowa (odwracalna)

Jeżeli funkcja ma tę własność, że każda jej wartość jest przyporządkowana tylko jednemu argumentowi, czyli, że każdym dwom różnym argumentom odpowiadają różne wartości funkcji

$$\bigwedge_{x_1 \in D} \bigwedge_{x_2 \in D} (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

to mówimy, że funkcja jest **różnowartościowa**, czyli **odwracalna**, a także jest **wzajemnie jednoznaczna**.

Funkcja odwrotna

Niech $f(x)$ będzie funkcją różnowartościową o dziedzinie D i przeciwdziedzinie W.

Definicja 1.20 ***Funkcją odwrotną*** *do funkcji f nazywamy funkcję, której dziedziną jest W, a przeciwdziedziną D i która każdemu y należącemu do W przyporządkowuje ten element x zbioru D, któremu funkcja f przyporządkowała y. Jeżeli funkcję odwrotną do f oznaczymy φ, to*

$$\bigwedge_{y \in W} (\varphi(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y)$$

Jeżeli φ jest funkcją odwrotną do f, to także f jest funkcją odwrotną do φ

$$\bigwedge_{x \in D} (f(x) = y \Leftrightarrow \varphi(y) = x)$$

zatem f i φ są funkcjami wzajemnie odwrotnymi.

1.7 Typy odwzorowań

Definicja 1.21 *Niech $D = \mathcal{N}$, a Y będzie dowolnym zbiorem. Odwzorowanie $\mathcal{N}$ w Y nazywamy* ***ciągiem nieskończonym*** *lub krótko ciągiem.*

Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Element zbioru Y przyporządkowany liczbie n nazywamy $n-$tym wyrazem ciągu i oznaczamy a_n. Liczbom

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n,\ n+1, \ldots$$

są przyporządkowane wyrazy

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n,\ a_{n+1}, \ldots$$

Sam ciąg (czyli odwzorowanie) oznaczamy symbolem

$$(a_1,\ a_2, \ldots) \quad \text{lub} \quad (a_n)$$

W zależności od rodzaju elementów zbioru Y mamy różne rodzaje ciągów. Na przykład:

1. jeżeli $Y = \mathcal{R}$, to mamy ciąg liczb rzeczywistych;
2. jeżeli Y jest zbiorem punktów pewnej sfery, to mamy ciąg punktów na tej sferze;
3. jeżeli Y jest zbiorem sfer, to mamy ciąg sfer (ciąg sfer współśrodkowych o promieniach $1/n$);
4. jeżeli Y jest zbiorem wielomianów, to mamy ciąg wielomianów.

Definicja 1.22 *Jeżeli $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, odwzorowanie nazywamy* ***ciągiem skończonym*** *$k-$wyrazowym.*

Liczbom

$$1, 2, 3, \ldots, k$$

są przyporządkowane wyrazy

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_k$$

Ciąg skończony o powyższych wyrazach oznaczamy

$$(a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_k)$$

Jeżeli $D = \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, to odwzorowanie nazywamy **ciągiem dwuwskaźnikowym**. Dziedziną jest tu zbiór par liczb naturalnych. Niech i, j będą dowolnymi liczbami naturalnymi. Element dowolnego zbioru Y przyporządkowany parze (i, j) nazywamy wyrazem o wskaźnikach i, j i oznaczamy a_{ij} lub $a_{i,j}$. Tak więc parom liczb

$$\begin{array}{ccccc}
(1,1) & (1,2) & \cdots & (1,j) & \cdots \\
(2,1) & (2,2) & \cdots & (2,j) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(i,1) & (i,2) & \cdots & (i,j) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

są przyporządkowane wyrazy

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Ciąg dwuwskaźnikowy oznaczamy symbolem

$$(a_{ij}) \quad \text{lub} \quad (a_{i,j})$$

Jeżeli w ciągu dwuwskaźnikowym ustalimy pierwszy wskaźnik, nadając mu na przykład wartość i, to otrzymamy ciąg

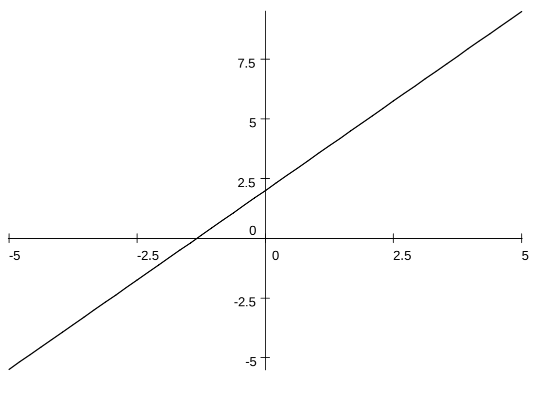
$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ij}, \ldots)$$

który nazywamy $i-$tym wierszem danego ciągu dwuwskaźnikowego. Podobnie ustalając drugi wskaźnik j, otrzymamy ciąg zwany $j-$tą kolumną.

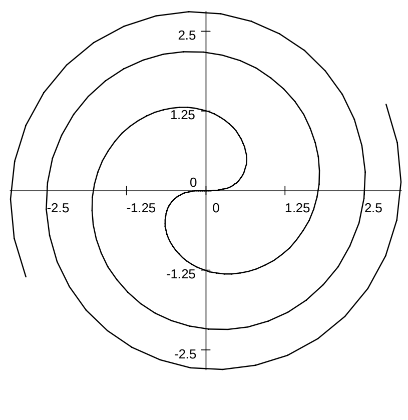
Jeżeli $D = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$, to odwzorowanie nazywamy **macierzą dwuwskaźnikową** albo macierzą prostokątną. Dziedzina jest zbiorem par liczb naturalnych (i, j), gdzie: $i \leq m,\ j \leq n$. Element pewnego zbioru Y przyporządkowany parze (i, j) nazywamy wyrazem o wskaźnikach i, j danej macierzy i oznaczamy a_{ij}. Macierz zapisujemy w postaci tablicy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad [a_{ij}]_{i \leq m, j \leq n}$$

przy czym i nazywamy wskaźnikiem wiersza, a j wskaźnikiem kolumny. Parę liczb (m, n) nazywamy **wymiarem** macierzy. Jeżeli $m = n$, macierz nazywamy **kwadratową** i mówimy o niej, że jest stopnia n.



Rysunek 3: Odwzorowanie prostokątne.



Rysunek 4: Odwzorowanie biegunowe.

Odwzorowanie nazywamy:

1. funkcją rzeczywistą, jeżeli $Y = \mathcal{R}$;
2. funkcją zmiennej rzeczywistej, jeżeli $X = \mathcal{R}$;
3. funkcją rzeczywistą, zmiennej rzeczywistej, jeżeli $X = Y = \mathcal{R}$.

Definicja 1.23 ***Wykresem*** *dowolnego odwzorowania nazywamy zbiór par (x, y), gdzie x jest dowolnym elementem dziedziny, a y przyporządkowanym mu przez odwzorowanie elementem przeciwdziedziny.*

W sensie praktycznym wykresem nazywamy obraz geometryczny, z którego w przybliżeniu można odczytać wartości funkcji i sposób, w jaki są one przyporządkowane argumentom (patrz rys. 3 i 4).

Jeżeli $X = \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, $Y = \mathcal{R}$, to odwzorowanie nazywamy **funkcją rzeczywistą dwóch zmiennych rzeczywistych**. Argumentem tej funkcji jest para liczb rzeczywistych, wartością funkcji - liczba rzeczywista:

$$y = f(x) \qquad x = (x_1, x_2)$$

lub

$$z = f(x, y)$$

Zbiór par (x, y) liczb rzeczywistych można utożsamiać ze zbiorem punktów P płaszczyzny; liczby x, y są współrzędnymi tego punktu.

Jeżeli $X = \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, $Y = \mathcal{R}$, to odwzorowanie nazywamy **funkcją rzeczywistą trzech zmiennych rzeczywistych**. Argumentem tej funkcji jest trójka liczb rzeczywistych, wartością funkcji - liczba rzeczywista:

$$y = f(x) \qquad x = (x_1, x_2, x_3)$$

lub

$$u = f(x, y, z)$$

Zbiór trójek (x, y, z) liczb rzeczywistych można utożsamiać ze zbiorem punktów P powierzchni; liczby x, y są współrzędnymi tego punktu.

Dla funkcji trzech zmiennych **nie istnieje** interpretacja geometryczna, analogiczna do tych, jakie przedstawiamy dla funkcji 1 i 2 zmiennych. Natomiast możliwa jest interpretacja geometryczno-fizyczna. Możemy uważać, że u jest pewną skalarną wielkością fizyczną (np. temperatura, gęstość) przyporządkowaną punktowi (x, y, z). Funkcja tak interpretowana nazywa się w fizyce polem skalarnym.

1.8 Symbole i wzory

Symbol sumy

Symbolem sumy jest grecka litera $\sum$ (sigma duże). Symbolem tym posługujemy się, gdy składniki sumy są wyrazami pewnego ciągu, na przykład sumę

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \qquad n > 1$$

zapisujemy w postaci

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \tag{7}$$

Zapis ten odczytujemy: suma a_k od $k = 1$ do $k = n$. Litera k jest tu wskaźnikiem sumowania, liczby 1 i n są granicami sumowania (dolną i górną).

Sumę kwadratów kolejnych liczb naturalnych od 1 do 8 zapisujemy

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = \sum_{k=1}^{8} k^2$$

Symbolem sumy posługujemy się także w ogólniejszych przypadkach. Niech będzie dany ciąg nieskończony $(a_1, a_2, \ldots)$, a granice sumowania niech będą dowolnymi liczbami naturalnymi p, q, gdzie $p < q$. Wówczas symbol sumy ma następujący sens

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q \tag{8}$$

Dodatkowo, dla przypadku, gdy $p = q$, przyjmujemy

$$\sum_{k=p}^{p} a_k = a_p \tag{9}$$

Symbol sumy można też rozszerzyć na przypadek, gdy wskaźnik sumowania przybiera wartość 0 lub wartości całkowite ujemne, o ile odpowiadające tym wartościom składniki sumy są określone, na przykład

$$\sum_{k=-2}^{2} x^k = x^{-2} + x^{-1} + x^0 + x^1 + x^2 \quad \text{dla} \quad x \neq 0$$

Własność 1.1 *Zmiana litery oznaczającej wskaźnik sumowania nie zmienia znaczenia sumy*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{10}$$

Własność 1.2 *Jeżeli wyraz stojący pod znakiem sumy jest niezależny od wskaźnika sumowania, to należy rozumieć, że wszystkie składniki sumy mają jednakową wartość i suma równa się iloczynowi tej wartości przez liczbę składników*

$$\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \ldots + c}_{n \text{ razy}} = nc \tag{11}$$

Własność 1.3 *Czynnik niezależny od wskaźnika sumowania można wyłączyć przed znak sumy (lub wprowadzić pod znak sumy)*

$$\sum_{k=1}^{n} t a_k = t \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{12}$$

Własność 1.4 *Obie granice sumowania można podwyższyć o dowolną liczbę r, jeżeli jednocześnie w wyrazie stojącym pod znakiem sumy odejmiemy od wskaźnika sumowania tę samą liczbę r*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1+r}^{n+r} a_{k-r} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{13}$$

Suma podwójna

Niech będzie dany ciąg dwuwskaźnikowy o wyrazach a_{ij}, gdzie $i = 1, 2, \ldots m;\ j = 1, 2, \ldots n$

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \tag{14}$$

Suma wyrazów $i-$tego wiersza wyraża się wzorem

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots m$$

Suma wszystkich takich sum wyraża się iterowanym znakiem sumy

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \right) \tag{15}$$

Suma wyrazów $k-$tej kolumny wyraża się symbolem

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots n$$

Suma wszystkich takich sum wyraża się również iterowanym znakiem sumy

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik} \right) \tag{16}$$

Uwaga 1.9 *Sumy iterowane (15) i (16) różnią się kolejnością sumowania, lecz **są równe**, gdyż każda z nich jest sumą wszystkich wyrazów ciągu (14)*

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik} \right) = \sum_{\substack{i=1,\ldots m \\ k=1,\ldots n}} a_{ik} \tag{17}$$

Symbol iloczynu

Do oznaczenia iloczynu posługujemy się grecką literą $\prod$ (pi duże)

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \tag{18}$$

$$\prod_{k=1}^{4} \sin kx = \sin x \;\; \sin 2x \;\; \sin 3x \;\; \sin 4x$$

$$\prod_{j=0}^{3} (z - j) = z\,(z-1)\,(z-2)\,(z-3)$$

$$\log \prod_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \log a_i \qquad\qquad a_i > 0 \quad i = 1, 2, \ldots n$$

Średnie

Niech będzie dany ciąg liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Definiujemy

$$\begin{aligned}
A(a_1,\ldots,a_n) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} && \text{średnia arytmetyczna}\\
G(a_1,\ldots,a_n) &= \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} && \text{średnia geometryczna}\\
H(a_1,\ldots,a_n) &= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}} && \text{średnia harmoniczna}\\
K(a_1,\ldots,a_n) &= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2} = \sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}} && \text{średnia kwadratowa}
\end{aligned} \tag{19}$$

Można udowodnić, że dla dowolnych dodatnich $a_1, \ldots, a_n$ zachodzi

$$\min(a_1,\ldots,a_n) \le H \le G \le A \le K \le \max(a_1,\ldots,a_n)$$

Silnia

Symbol $n!$ (czytamy: n–silnia) oznacza funkcję, którą dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ definiujemy indukcyjnie wzorami

$$0! = 1 \qquad (n+1)! = (n+1)\,n! \tag{20}$$

Mamy więc: $0! = 1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ i ogólnie dla dowolnego n naturalnego

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

Silnia podwójna

Do oznaczenia iloczynu kolejnych liczb parzystych lub kolejnych liczb nieparzystych używamy tak zwanej silnii podwójnej, oznaczanej podwójnym wykrzyknikiem

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 8!! \qquad 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 9!!$$

Symbol Newtona

Symbol Newtona $\binom{n}{k}$ (czytamy: n po k), w którym element górny n jest dowolną liczbą, a element dolny k jest liczbą naturalną, oznacza liczbę

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} \qquad n \in \mathcal{R} \quad k \in \mathcal{N}$$

w którym mianownik jest iloczynem k kolejnych liczb naturalnych od 1 do k, a licznik jest iloczynem liczby n oraz liczb otrzymywanych przez pomniejszanie liczby n o kolejne liczby naturalne, przy czym licznik ma zawierać **tyle samo** czynników co mianownik. Ponadto

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad n \in \mathcal{R}$$

Przykłady

$$\binom{4}{0} = 1 \qquad \binom{4}{1} = \frac{4}{1} = 1 \qquad \binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} = 4 \qquad \binom{4}{4} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 1 \qquad \binom{4}{5} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 0$$

$$\binom{4}{6} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0\cdot(-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 0 \qquad \binom{-2}{3} = \frac{(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)}{1\cdot 2\cdot 3} = -4$$

$$\binom{1/2}{3} = \frac{(1/2)\cdot(-1/2)\cdot(-3/2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{16} \qquad \binom{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}{1\cdot 2} \approx 0.2929$$

Jeżeli górny element symbolu Newtona $\binom{n}{k}$ jest liczbą naturalną, nie mniejszą od dolnego elementu, to zachodzą równości

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\
\binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \\
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Dwumian Newtona $(a+b)^n$

Są to kolejne potęgi dwumianu $a+b$ o wykładnikach $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a + b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{aligned}$$

Współczynniki stojące przy poszczególnych wyrazach rozwinięcia dwumianu $(a+b)^n$ tworzą tak zwany **trójkąt Pascala**:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0 & & & & & 1 & & & & \\
n=1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \quad \ldots
\end{array}$$

Wzór dwumienny Newtona

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \\
&= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots + \binom{n}{n} b^n \qquad (21)
\end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \\ &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \ldots + b^n \qquad (22)\end{aligned}$$

2 Teoria liczb zespolonych

2.1 Trochę historii

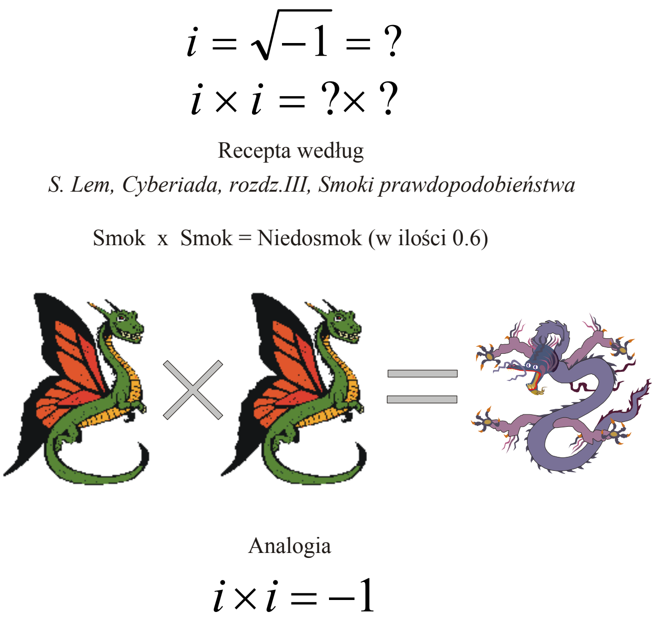
Liczby zespolone po raz pierwszy pojawiły się w XVI wieku przy rozwiązywaniu równania trzeciego stopnia (wzory Cardano). Włoscy matematycy

N. Tartoglia
S. del Ferro
G. Cardano

poszukiwali rozwiązań równania typu

$$z^3 + pz + q = 0$$

w którym niewiadoma z i współczynniki p, q są liczbami rzeczywistymi.



Rysunek 5: Smoki S. Lema a jednostka urojona.

Podczas analiz natknęli się na problem, polegający na konieczności wyciągania pierwiastków kwadratowych z liczb ujemnych. Wymienieni uczeni wprowadzili, jako **pojęcie pierwotne**, nową wielkość, nazwaną **jednością urojoną**

$$i \text{ (często również oznaczaną przez } j\text{)}$$

przyjmując jako aksjomat równość

$$i^2 = -1$$

Następnie utworzyli liczby, nazwane **liczbami zespolonymi**

$$x + iy \qquad x, y, \in \mathcal{R}$$

i wykonywali na nich działania według znanych reguł matematyki. Przy pomocy tych liczb już potrafili rozwiązać równanie

$$z^3 + pz + q = 0$$

Uzyskali wzór, zwany dziś **wzorem Cardano**. Był to sukces, choć w tamtych czasach nie było jasne, czym tak na prawdę są liczby zespolone. Wyjaśnili to później Euler, Gauss i Hamilton. Było to pierwsze zastosowanie liczb zespolonych w historii matematyki. Dzisiaj wiemy, że:

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
i^0 &=& 1 & \qquad & i^4 &=& 1 & \\
i^1 &=& i & & i^{-1} &=& -i & \\
i^2 &=& -1 & & i^{-2} &=& -1 & \\
i^3 &=& -i & & \sqrt{i} &=& ? & \text{ćwiczenia}
\end{array}$$

2.2 Liczby zespolone

Definicja 2.1 ***Liczby zepolone*** *to uporządkowane pary liczb rzeczywistych* (a, b), *dla których dodawanie i mnożenie określamy za pomocą wzorów:*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \tag{23}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \tag{24}$$

Ponadto zachodzi równość

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow (a = c) \wedge (b = d) \tag{25}$$

Tak zdefiniowane działania na liczbach zespolonych mają te same algebraiczne własności co dodawanie i mnożenie liczb rzeczywistych.

Przykład 2.1 *Obliczyć sumę i iloczyn liczb zespolonych* $(2, -1)$ *i* $(3, 7)$.

Rozwiązanie 2.1 *Zgodnie z (23) i (24) mamy:*

$$(2, -1) + (3, 7) = (2 + 3, -1 + 7) = (5, 6)$$
$$(2, -1)\,(3, 7) = (2 \cdot 3 + 1 \cdot 7, 2 \cdot 7 - 1 \cdot 3) = (13, 11)$$

Twierdzenie 2.1 *Zbiór wszystkich liczb zespolonych jest ciałem przemiennym względem dodawania i mnożenia.*

Definicja 2.2 ***Odejmowaniem*** *liczb zespolonych nazywamy działanie odwrotne do dodawania.*

Wynik odejmowania liczb zespolonych nazywamy **różnicą** liczb zespolonych. A więc

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d) \tag{26}$$

Definicja 2.3 ***Dzieleniem*** *liczb zespolonych nazywamy działanie odwrotne do mnożenia.*

Wynik dzielenia liczb zespolonych nazywamy **ilorazem** liczb zespolonych. Liczba zespolona (x, y) jest ilorazem liczby zespolonej (a, b) i liczby zespolonej (c, d), co oznaczamy $(a, b) : (c, d)$ lub $\frac{(a,b)}{(c,d)}$, gdy

$$(x, y)\,(c, d) = (a, b)$$

A więc

$$(x, y) = \frac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, -\frac{ad - bc}{c^2 + d^2}\right) \tag{27}$$

Przykład 2.2 *Obliczyć iloraz*

$$\frac{(2, -1)}{(3, 7)}$$

Rozwiązanie 2.2 *Zgodnie z (27) mamy*

$$\frac{(2, -1)}{(3, 7)} = \left(\frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 7}{3^2 + 7^2}, -\frac{2 \cdot 7 - (-1) \cdot 3}{3^2 + 7^2}\right) = \left(\frac{-1}{58}, \frac{-17}{58}\right)$$

Zbiór liczb zespolonych $(a, 0)$ można utożsamić ze zbiorem liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$, a symbol $(a, 0)$ możemy zastąpić symbolem a.

Zbiór liczb zespolonych oznaczamy $\mathcal{Z}$ lub (niekiedy) $\mathcal{C}$[2]. Ponieważ

$$(a, b) = (a, 0) \cdot (1, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot (0, 1) \tag{28}$$

więc do zapisania dowolnej liczby zespolonej wystarczają liczby rzeczywiste i liczba zespolona postaci $(0, 1)$, którą oznaczamy symbolem i

$$i = (0, 1) \tag{29}$$

oraz nazywamy **jednością urojoną**. A więc

$$(a, b) = a + bi \tag{30}$$

Prawa strona (30) jest **postacią algebraiczną** (lub kartezjańską) liczby zespolonej. Liczbę rzeczywistą a nazywamy **częścią rzeczywistą**, a liczbę rzeczywistą b - **częścią urojoną** liczby zespolonej $z = a + bi$. Zapisujemy to[3]

$$a = \mathrm{Re}\,(a + bi) \qquad b = \mathrm{Im}\,(a + bi) \tag{31}$$

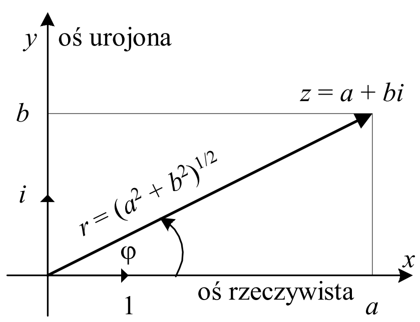
Natomiast, jak pamiętamy, jedność urojona i spełnia warunek

$$i^2 = -1 \tag{32}$$

czyli $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$. Jest to nierzeczywiste rozwiązanie równania $x^2 = -1$. Wielkość tę oznaczamy również jako $i = \sqrt{-1}$.

Uwaga 2.1 *Dwie liczby zespolone z_1 i z_2 są równe, jeżeli ich części rzeczywiste i urojone są sobie równe, tzn.* $\mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2$ *i* $\mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2$.

2.3 Płaszczyzna zespolona



Rysunek 6: Płaszczyzna zespolona.

Płaszczyzna zespolona jest płaszczyzną z prostokątnym układem współrzędnych, której punkty są rozumiane jako liczby zespolone. Liczbę zespoloną $z = a + bi$ przedstawiamy w tym układzie jako punkt o współrzędnych (a, b) lub jako wektor o współrzędnych $[a, b]$ zaczepiony w początku układu. Każdemu punktowi (a, b) płaszczyzny odpowiada wówczas dokładnie jedna liczba zespolona postaci $z = a+bi$, a liczbie zespolonej $z = a+bi$ odpowiada punkt o współrzędnych (a, b) - patrz rys. 6.

We współrzędnych biegunowych (r, φ) położenie punktu (a, b) na płaszczyźnie wyznaczamy jednoznacznie przez podanie długości r promienia wodzącego punktu (a, b) i kąta φ[4], który tworzy promień r z osią odciętych.

[2] Od łacińskiego słowa *complexus* - *zespolony*.
[3] Re od *real* (ang.); Im od *imagine* (ang.).
[4] Jest on skierowany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Modułem liczby zespolonej $z = a+bi$ nazywamy liczbę równą pierwiastkowi kwadratowemu z sumy kwadratów części rzeczywistej i urojonej

$$r = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{33}$$

Tak wię, **moduł liczby** z równa się odległości punktu z od początku układu współrzędnych, czyli długości wektora $\mathbf{z}$. **Argumentem** liczby zespolonej $z = a + bi \neq 0$ nazywa się każdą liczbę rzeczywistą φ określoną równaniami

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{|r|} = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\[2ex] \sin\varphi = \dfrac{b}{|r|} = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \tag{34}$$

Argument φ liczby z oznaczamy: $\varphi = \arg z$. Jest on miarą łukową kąta skierowanego, który tworzy oś rzeczywista $\mathbf{0x}$ z wektorem $\mathbf{z}$. Każda liczba zespolona $z \neq 0$ ma nieskończenie wiele argumentów. Jeżeli φ jest jednym z argumentów liczby z, to wszystkie inne jej argumenty wyrażają się wzorem

$$\arg z = \varphi + 2k\pi \tag{35}$$

gdzie: $k-$ liczba całkowita.

Argumentem głównym liczby zespolonej nazywa się taki argument, który zawiera się w przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$ (wartość taka jest dokładnie jedna). **Nie określa się argumentu liczby** 0.

2.4 Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Postać trygonometryczna liczby zespolonej[5] jest to przedstawienie punktu płaszczyzny odpowiadającego liczbie zespolonej z zapisanej we współrzędnych biegunowych. Ważne są tu następujące twierdzenia:

Twierdzenie 2.2 *Każdą liczbę zespoloną $z \neq 0$ można przedstawić w postaci*

$$z = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi) \tag{36}$$

zwanej postacią trygonometryczną liczby zespolonej.

Twierdzenie 2.3 *Jeżeli*

$$z = r (\cos\varphi + i \sin\varphi) \tag{37}$$

gdzie: $r \geq 0$, to r jest modułem $|z|$ liczby z, liczba φ jest jednym z argumentów liczby z.

Przykład 2.3 *Liczba zespolona w postaci algebraicznej*

$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

ma postać trygonometryczną (biegunową)

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

[5] Postać tę często nazywa się **postacią biegunową** liczby zespolonej.

Rozwiązanie 2.3 *Wykorzystamy wzory (33) i (34)*

$$z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+3}} = \dfrac{1}{2} \\[3ex] \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{stąd}} \varphi = \frac{\pi}{3}$$

A więc

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

2.5 Postać wykładnicza liczby zespolonej

Do przedstawienia liczby zespolonej w postaci wykładniczej wykorzystujemy wzór Eulera

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{38}$$

Uwaga 2.2 *Dowodzi się, że e w równaniu (38) jest liczbą niewymierną i że jest ona w przybliżeniu równa* 2.7182818284590452354... *Wprowadził ją w XVIII wieku szwajcarski matematyk Leonard Euler. Liczba e jest podstawą* ***logarytmu naturalnego****, oznaczanego symbolem* ln.

A więc

$$z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|\,e^{i\varphi} \tag{39}$$

Ponieważ

$$|z|\,e^{i(-\varphi)} = |z|\,e^{-i\varphi} = |z|\,(\cos\varphi - i\sin\varphi) \tag{40}$$

zatem

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} \tag{41}$$

2.6 Liczby zespolone, sprzężone, przeciwne i odwrotne

Jeżeli z jest liczbą zespoloną, to przez $\bar{z}$ i $(-z)$ oznaczamy liczby

$$\bar{z} = a - bi \quad , \quad -z = -a - bi \tag{42}$$

Liczbę $\bar{z}$ nazywamy sprzężoną do z (niekiedy zamiast $\bar{z}$ piszemy z^*), a $(-z)$ - przeciwną do z (rys. 7). Dla liczb z i $\bar{z}$ zachodzą relacje:

$$\operatorname{Re}\bar{z} = \operatorname{Re} z \qquad \operatorname{Im}\bar{z} = -\operatorname{Im} z \tag{43}$$

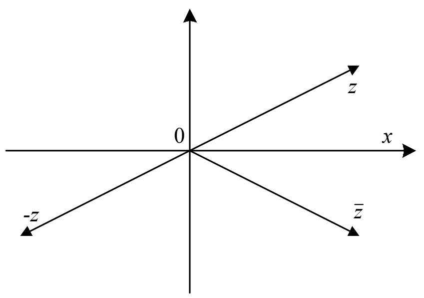
Liczbami zespolonymi sprzężonymi są

$$\overline{i} = -i \quad \overline{2+5i} = 2-5i \quad \overline{-1-7i} = -1+7i$$

Jeżeli $z \neq 0$, to przez $\frac{1}{z}$ oznaczamy liczbę zespoloną

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)\,(a-ib)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i \tag{44}$$

i nazywamy ją **liczbą odwrotną** do z.



Rysunek 7: Liczba zespolona, sprzężona i przeciwna.

Uwaga 2.3 ***Liczba*** **0** ***nie ma liczby odwrotnej.***

2.7 Działania arytmetyczne na liczbach zespolonych

Są to działania dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia liczb zespolonych:

$$\begin{aligned}
&(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i \\
&(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i \\
&(a_1 + b_1 i)\,(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i \\
&(a_1 + b_1 i) : (a_2 + b_2 i) = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \\
&= \frac{(a_1 + b_1 i)\,(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)\,(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i
\end{aligned} \tag{45}$$

Przy dzieleniu liczb zespolonych należy **uwolnić** mianownik od liczby zespolonej, mnożąc licznik i mianownik przez liczbę sprzężoną z liczbą znajdującą się w mianowniku.

Przykład 2.4 *Wykonaj działania algebraiczne:* $(2 + 3i) + (1 + 4i)$, $(4 + 3i) - (1 + 2i)$, $(2 + 3i)(-1 + 2i)$, $\frac{2+3i}{1-i}$.

Rozwiązanie 2.4

$$\begin{aligned}
&(2 + 3i) + (1 + 4i) = (2 + 1) + (3 + 4)\, i = 3 + 7i \\
&(4 + 3i) - (1 + 2i) = (4 - 1) + (3 - 2)\, i = 3 + i \\
&(2 + 3i)\,(-1 + 2i) = -2 + 6i^2 + 4i - 3i = -8 + i \\
&\frac{2 + 3i}{1 - i} = \frac{(2 + 3i)\,(1 + i)}{(1 - i)\,(1 + i)} = \frac{-1 + 5i}{2} = -0.5 + 2.5i
\end{aligned}$$

Geometryczna interpretacja liczb zespolonych na płaszczyźnie zespolonej pozwala na ilustrowanie podstawowych działań arytmetycznych wykonywanych na liczbach zespolonych (rys. 8 − 10). Interpretacja mnożenia (rys. 9) i dzielenia (rys. 10) opiera się na następujących wzorach

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= |z_1|\,(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \cdot |z_2|\,(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) = \\
&= |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))
\end{aligned} \tag{46}$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\, e^{i\varphi_1} \cdot |z_2|\, e^{i\varphi_2} = |z_1| \cdot |z_2|\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \tag{47}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\,(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)}{|z_2|\,(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \tag{48}$$

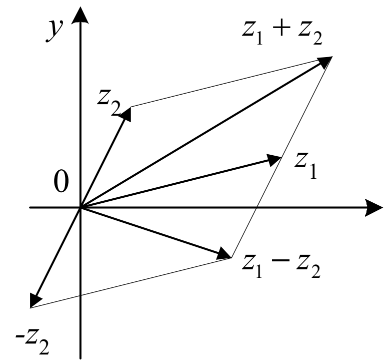
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{49}$$

(patrz przypis[6]).

[6] $(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)\,(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) =$

Twierdzenie 2.4 *Moduł iloczynu dwóch liczb zespolonych równa się iloczynowi modułów, a argument równa się sumie argumentów tych liczb.*

Twierdzenie 2.5 *Moduł ilorazu dwóch liczb zespolonych równa się ilorazowi modułów, a argument równa się różnicy argumentów tych liczb.*



Rysunek 8: Dodawanie i odejmowanie liczb zespolonych.

Twierdzenie 2.4 pozwala wyznaczyć na płaszczyźnie zespolonej położenie iloczynu $P = z_1 z_2$, gdy znamy położenie punktów $|z_1|$, $|z_2|$ oraz liczby $|1|$. Przy konstrukcji korzystamy z podobieństwa trójkątów $P0z_2$ i $z_1 01$[7].

Zachodzi tu relacja

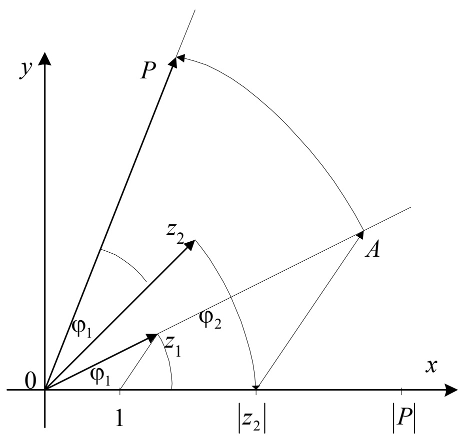
$$\frac{|P|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|1|} \tag{50}$$

Stąd

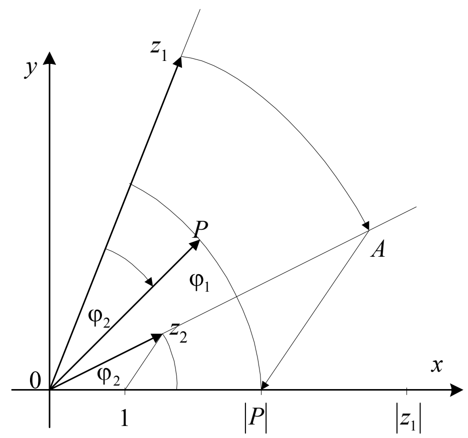
$$|P| = |z_1| \cdot |z_2| \tag{51}$$

Na podstawie Twierdzenia 2.5 wyznaczamy na płaszczyźnie zespolonej iloraz $P = \frac{z_1}{z_2}$ liczb zespolonych (patrz rys. 10). W tym przypadku zachodzi

$$\frac{|z_1|}{|P|} = \frac{|z_2|}{|1|} \quad \text{stąd} \quad |P| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{52}$$



Rysunek 9: Mnożenie liczb zespolonych.



Rysunek 10: Dzielenie liczb zespolonych.

Przykład 2.5 *Niech*

$$z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Obliczyć iloczyn $z_1 \cdot z_2$ i iloraz $\frac{z_1}{z_2}$.

$= \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) = \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)$

$\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$

$= \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2) = \cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)$

[7] Można również bezpośrednio skorzystać z twierdzenia Talesa: $\frac{|0A|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|1|}$.

Rozwiązanie 2.5 *Korzystamy z Twierdzeń 2.4 i 2.5:*

$$z_1 \cdot z_2 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$$

Przykład 2.6 *Niech*

$$\begin{aligned} z_1 &= 2.5\left(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ\right) \\ z_2 &= 0.6\left(\cos 143^\circ + i\sin 143^\circ\right) \\ z_3 &= 5.8\left(\cos 257^\circ + i\sin 257^\circ\right) \end{aligned}$$

Obliczyć iloczyn $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$.

Rozwiązanie 2.6

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = &\ 2.5 \cdot 0.6 \cdot 5.8\left[\cos\left(35^\circ + 143^\circ + 257^\circ\right) + i\sin\left(35^\circ + 143^\circ + 257^\circ\right)\right] = \\ = &\ 8.7\left(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ\right) \end{aligned}$$

2.8 Potęgowanie liczb zespolonych

Potęgę z^n o wykładniku naturalnym definiujemy indukcyjnie za pomocą równości

$$z^0 = 1 \quad , \quad z^{n+1} = z^n \cdot z \tag{53}$$

Jeżeli $z \neq 0$, to definicję uogólnia się na wykładniki całkowite

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} \tag{54}$$

Do obliczania potęgi liczb zespolonych służy **wzór de Moivre'a**:

$$z^n = \left(|z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right)^n = |z|^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right) \tag{55}$$

W postaci wykładniczej zapisujemy go następująco

$$z^n = \left(|z|\, e^{i\varphi}\right)^n = |z|^n\, e^{n\varphi i} \tag{56}$$

Przykład 2.7 *Niech* $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. *Obliczyć* z^2.

Rozwiązanie 2.7

$$z^2 = 2^2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4i$$

Przykład 2.8 *Na podstawie wzorów Newtona i de Moivre'a otrzymujemy wzory na sinus i kosinus wielokrotności kąta.*

Rozwiązanie 2.8 *Na przykład dla* $\sin 3\varphi$ *i* $\cos 3\varphi$ *mamy relacje:*

- *z wzoru Newtona*

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi =$$

$$= \left(\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi\right) + i\left(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\right)$$

- *z wzoru de Moivre'a*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$$

Z równości liczb zespolonych

$$z_1 = z_2 \quad \textit{jeżeli} \quad a_1 = a_2 \ \textit{i} \ b_1 = b_2$$

otrzymujemy wzory:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$$

2.9 Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Pierwiastkiem stopnia n z liczby zespolonej z nazywamy każdą taką liczbę zespoloną w, że $w^n = z$.

Twierdzenie 2.6 *Jeżeli*

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$$

to istnieje dokładnie n różnych pierwiastków $n-$tego stopnia liczby z (czyli rozwiązań równania $w^n = z$). Pierwiastki te otrzymujemy z wzoru

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \tag{57}$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$. Wszystkie liczby w_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ mają równe moduły, punkty odpowiadające tym liczbom leżą na okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $\sqrt[n]{|z|}$; dzielą okręg na n równych łuków.

W dziedzinie liczb zespolonych symbol $\sqrt[n]{a}$ dla $a \neq 0$, $n = 2, 3, \ldots$, nie jest jednoznaczny. Oznacza on dowolną z n liczb (57). Jedynie dla $a = 0$ symbol $\sqrt[n]{a}$ ma dokładnie jedną wartość i jest nią 0.

Wracając do rozwiązań równania $w^n = z$ otrzymujemy

$$w^n = |w|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Moduły obu stron muszą być równe, a argumenty mogą różnić się o wielokrotność 2π, więc

$$|w|^n = |z| \quad \text{i} \quad n\theta = \varphi + 2k\pi \quad , \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Stąd

$$|w| = \sqrt[n]{|z|} \quad , \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

wśród argumentów $\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$, gdzie $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, istnieje dokładnie n takich, których różnice nie są wielokrotnością liczby 2π. Są to liczby

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Mówi o tym Twierdzenie 2.6.

Przykład 2.9 *Obliczyć*

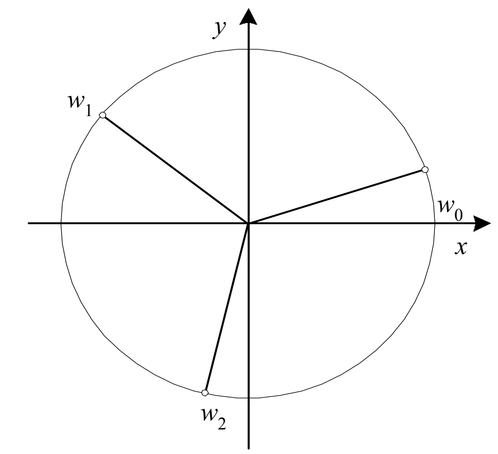
$$\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i}$$

Rozwiązanie 2.9 *Moduł liczby zespolonej* $z = 1+\sqrt{3}i$ *równa się* $\left|1+\sqrt{3}i\right| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$. *Argument spełnia równania:* $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. *Czyli* $\varphi = \frac{\pi}{3}$. *Na podstawie wzoru (57) otrzymujemy*

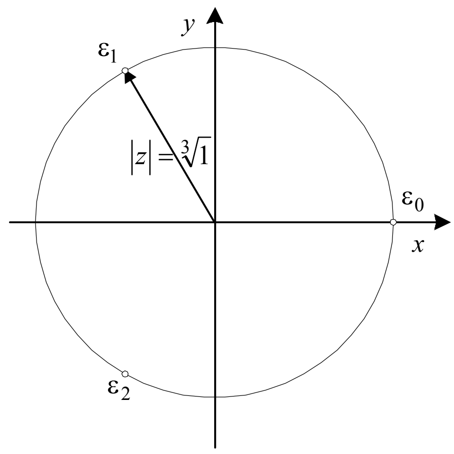
$$w_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right) \qquad , \quad k=0$$

$$w_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right) \qquad , \quad k=1$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right) \qquad , \quad k=2$$



Rysunek 11: Pierwiastki 3 stopnia z $1+\sqrt{3}i$.



Rysunek 12: Pierwiastki 3 stopnia z liczby 1.

Rozwiązanie 2.10 *Rozwiązania te są przedstawione na rysunku 11. Pierwiastkami* $n-$*tego stopnia z jedności są liczby*

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \tag{58}$$

$k = 0,1,2,\ldots,n-1$. *Otrzymujemy je podstawiając do (57)* $\varphi = 0$ *i* $|z| = 1$ $(1 = \cos 0 + i\sin 0)$. *Pierwiastki te leżą na okręgu jednostkowym i dzielą go na* $n = 3$ *równych łuków.*

Przykład 2.10 *Obliczyć* $\sqrt[3]{1}$, *czyli rozwiązać równanie* $z^3 = 1$.

Rozwiązanie 2.11 *Ponieważ* $1 = \cos 0 + i\sin 0$, *to*

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$$

$k = 0, 1, 2$. *Stąd*

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 \quad , \quad k = 0$$

$$\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad , \quad k = 1$$

$$\varepsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad , \quad k = 2$$

Przykład 2.11 *Obliczyć* $\sqrt{i}$, *tzn. rozwiązać równanie* $w^2 - i = 0$.

Rozwiązanie 2.12 *Mamy znaleźć pierwiastki* w_0 *i* w_1, *gdy* $w^2 = i$. *Ponieważ*

$$0 + 1 \cdot i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

to

$$w_k = \sqrt{i} = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}$$

dla $k = 0, 1$. *Zatem*

$$w_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i)$$

$$w_1 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i)$$

3 Macierze i wyznaczniki

3.1 Definicja macierzy. Działania na macierzach.

Definicja 3.1 ***Macierzą*** *nazywamy prostokątną tablicę liczb rzeczywistych lub zespolonych*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{59}$$

Z reguły oznaczamy ją dużymi pojedynczymi i pogrubionymi literami **A**, **B** *itd.*

W ramach wykładu będziemy omawiać wyłącznie macierze rzeczywiste. Symbole występujące w tablicy (59) nazywamy **elementami macierzy**. Zapis a_{ik} oznacza, że element a znajduje się w $i-$tym wierszu i $k-$tej kolumnie macierzy **A** lub znajduje się na przecięciu $i-$tego wiersza i $k-$tej kolumny.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & \downarrow k & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ & & a_{ik} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \longleftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \tag{60}$$

O macierzy mówimy, że jest **wymiaru** $n \times m$ (n na m lub n razy m, $n-$ liczba wierszy, $m-$ liczba kolumn). Możemy ją zapisać w postaci skróconej

$$\mathbf{A} = [a_{ik}]_{n\times m} \qquad \text{lub} \qquad \mathbf{A} = [a_{ik}] \ (i = 1, 2, \dots, n; \ \ k = 1, 2, \dots, m) \tag{61}$$

Wśród macierzy prostokątnych w szczególności wyróżniamy **macierz wierszową**

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \tag{62}$$

oraz **macierz kolumnową**

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{63}$$

Oba rodzaje powyższych macierzy nazywamy **wektorem** lub **wektorem wierszowym** i **wektorem kolumnowym**. Gdy liczba wierszy jest równa liczbie kolumn ($n = m$), to macierz (60) jest **macierzą kwadratową stopnia** n**;** liczbę n nazywamy **stopniem macierzy**.

Definicja 3.2 *Dwie macierze* $\mathbf{A} = [a_{ik}]$, $\mathbf{B} = [b_{ik}]$ *tego samego wymiaru* $n \times m$ *nazywamy równymi, jeżeli wszystkie odpowiednie elementy obu macierzy są równe, tzn.*

$$a_{ik} = b_{ik} \qquad dla \qquad i = 1, 2, \dots, n; \ \ k = 1, 2, \dots, m$$

Relacja równości macierzy jest
zwrotna, tzn. $\mathbf{A} = \mathbf{A}$
symetryczna, tzn. jeżeli $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, *to* $\mathbf{B} = \mathbf{A}$
przechodnia, tzn. jeżeli $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ *i* $\mathbf{B} = \mathbf{C}$, *to* $\mathbf{A} = \mathbf{C}$.

Definicja 3.3 ***Macierzą transponowaną*** *(przestawioną) nazywamy macierz, która powstaje z danej macierzy przez zamianę wierszy na kolumny z zachowaniem ich kolejności, tj. pierwszy wiersz staje się pierwszą kolumną, drugi wiersz - drugą kolumną itd. Oznaczamy ją symbolem* $\mathbf{A}^T$ *lub* $\mathbf{A}'$[8]. *Jeżeli* $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{n\times m}$, *to* $\mathbf{A}^T = [a_{ki}]_{m\times n} = [b_{ik}]$. *Ponadto, jeżeli* $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, *to* $\mathbf{A}$ *jest* ***macierzą symetryczną****.*

Jeżeli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \tag{64}$$

to

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} = \mathbf{A}' = \mathbf{A}^* \tag{65}$$

Transpozycją wektora wierszowego jest wektor kolumnowy (i odwrotnie).

Definicja 3.4 ***Macierzą zerową*** *nazywamy taką macierz dowolnego wymiaru, której wszystkie elementy są równe zeru, tzn.* $a_{ik} = 0$ *dla* $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, m$. *Macierz zerową wymiaru* $n \times m$ *oznacza się symbolem* $\mathbf{0}_{n\times m}$ *lub wprost symbolem* $\mathbf{0}$.

Przykłady macierzy zerowych:

$$\mathbf{0}_{1\times 1} = [0] \quad , \quad \mathbf{0}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{0}_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{66}$$

3.2 Szczególne rodzaje macierzy kwadratowych

Wśród macierzy kwadratowych wyróżniamy pewne ich charakterystyczne postacie, które pojawiają się przy rozwiązywaniu układów równań algebraicznych lub innych zagadnień fizyki matematycznej.

Definicja 3.5 ***Macierzą symetryczną*** *nazywamy macierz kwadratową, której elementy położone symetrycznie względem przekątnej głównej są równe, czyli* $a_{ik} = a_{ki}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$. *Na przykład*

$$\mathbf{A}_{sym} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & k & v & s \\ c & v & l & p \\ d & s & p & m \end{bmatrix} \tag{67}$$

Macierz symetryczna jest macierzą równą swojej transpozycji, $\mathbf{A}_{sym} = \mathbf{A}^T$.

[8] Niekiedy $\mathbf{A}^*$

Definicja 3.6 ***Macierzą diagonalną*** *nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy położone poza przekątną gwną są równe zeru, czyli* $a_{ik} = 0$ *przy* $i \neq k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$. *Na przykład*

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \tag{68}$$

W praktyce inżynierskiej bardzo często mamy do czynienia z macierzami trójdiagonalnymi

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{69}$$

lub macierzami pięciodiagonalnymi. Elementy różne od zera niekoniecznie muszą znajdować się na przekątnych głównych

$$\mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{70}$$

Ogólnie macierze takie nazywamy **macierzami wstęgowymi**.

Definicja 3.7 ***Macierzą jednostkową*** *nazywamy macierz diagonalną, której elementy położone na przekątnej głównej są równe* 1, *czyli*

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{71}$$

W zapisie ogólnym mamy

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i = k \\ 0 & \text{dla} \quad i \neq k \end{cases} \tag{72}$$

$(i, k, = 1, 2, \ldots, n)$.

Macierz jednostkową oznacza się często $[\delta_{ik}]_n$ lub $[\delta_{ik}]$, gdzie tak zwany **symbol** (lub **delta**) **Kroneckera** δ_{ik} jest zdefiniowany wzorem

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i = k \\ 0 & \text{dla} \quad i \neq k \end{cases} \tag{73}$$

Przez **macierz trójkątną** rozumiemy macierz

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{macierz trójkątna dolna} \\
\mathbf{R} = \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{macierz trójkątna górna}
\end{aligned}
\tag{74}
$$

3.3 Działania na macierzach

Dodawanie macierzy jest możliwe tylko w przypadku macierzy tego samego wymiaru. Sumę dwóch macierzy $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ i $\mathbf{B} = [b_{ik}]$ tego samego wymiaru $n \times m$ tworzymy w ten sposób, że dodajemy do siebie elementy o tych samych wskaźnikach wiersza i kolumny, tzn.

$$[a_{ik}]_{n\times m} + [b_{ik}]_{n\times m} = [a_{ik} + b_{ik}]_{n\times m} \tag{75}$$

Dodawanie macierzy tego samego wymiaru **jest łączne**

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \tag{76}$$

oraz przemienne

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \tag{77}$$

Odejmowanie macierzy jest wykonalne również tylko w przypadku macierzy tego samego wymiaru. **Różnicę macierzy** $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ i $\mathbf{B} = [b_{ik}]$ określa się za pomocą wzoru

$$[a_{ik}]_{n\times m} - [b_{ik}]_{n\times m} = [a_{ik} - b_{ik}]_{n\times m} \tag{78}$$

Iloczyn liczby α przez macierz $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ określamy jako macierz $[\alpha \cdot a_{ik}]$, którą otrzymujemy z macierzy $\mathbf{A}$ przez pomnożenie **każdego (!)** jej elementu przez liczbę α, tzn.

$$\alpha\, [a_{ik}] = [\alpha \cdot a_{ik}] \tag{79}$$

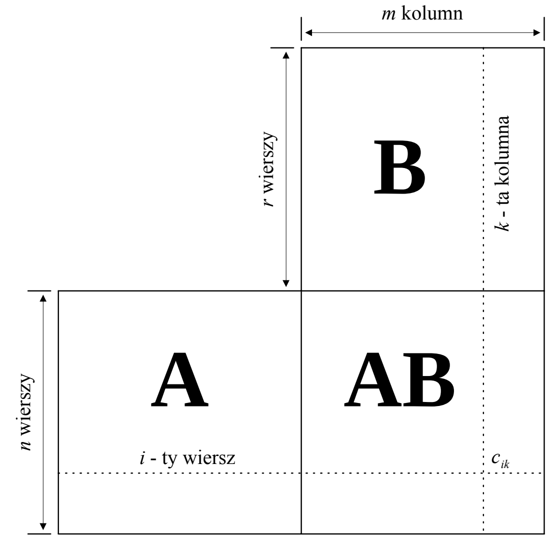
W formie przykładu obliczymy elementy macierzy

$$
\begin{aligned}
& 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 6 & -8 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -8 & 6 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -5 & 2 \\ -1 & 14 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{80}
$$

Mnożenie macierzy przez macierz jest wykonalne tylko wtedy, gdy liczba kolumn pierwszej macierzy jest równa liczbie wierszy drugiej macierzy. **Iloczynem macierzy** $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ wymiaru $n \times r$ i macierzy $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ wymiaru $r \times m$ nazywamy macierz $\mathbf{C} = [c_{ik}]$ wymiaru $n \times m$, w której element c_{ik} położony w $i-$tym wierszu i $k-$tej kolumnie macierzy $\mathbf{C}$ równy jest sumie iloczynów odpowiednich elementów $i-$tego wiersza macierzy $\mathbf{A}$ i elementów $k-$tej kolumny macierzy $\mathbf{B}$, tzn.

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{ir}b_{rk} = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}b_{jk} \tag{81}$$

Przy mnożeniu macierzy często stosuje się poniższy schemat



Rysunek 13: Schemat Falka.

Nosi on nazwę **schematu Falka**.

Przykład 3.1 *Obliczyć iloczyn macierzy*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie 3.1 *Macierz* $\mathbf{A}$ *jest wymiaru* 3×2, *a* $\mathbf{B}$ *wymiaru* 2×4; *mnożenie jest więc wykonalne. Zgodnie ze schematem Falka mamy*

$$\begin{array}{rr|rrrr} & & 3 & -1 & 2 & 0 \\ & & -2 & -3 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 & & & & \\ -1 & 4 & & & & \\ 5 & 1 & & & & \end{array}$$

Następnie obliczamy kolejne elementy macierzy $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

$$\begin{array}{rr|cccc} & & 3 & -1 & 2 & 0 \\ & & -2 & -3 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 4 & -1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & 1 & 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rr|cccc} & & 3 & -1 & 2 & 0 \\ & & -2 & -3 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 0 & -1 \cdot 2 - 3 \cdot 3 & \cdot & \cdot \\ -1 & 4 & -11 & -1 \cdot (-1) - 3 \cdot 4 & \cdot & \cdot \\ 5 & 1 & 13 & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Ostatecznie

$$
\begin{array}{rr|rrrr}
 & & 3 & -1 & 2 & 0 \\
 & & -2 & -3 & 1 & 4 \\
\hline
2 & 3 & 0 & -11 & 7 & 12 \\
-1 & 4 & -11 & -11 & 2 & 16 \\
5 & 1 & 13 & -8 & 11 & 4
\end{array}
$$

A więc

$$
\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & -11 & 7 & 12 \\ -11 & -11 & 2 & 16 \\ 13 & -8 & 11 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{C}
$$

Uwaga 3.1 *W tym przykładzie iloczyn* **BA** *nie istnieje. Macierz* **B** *ma* 4 *kolumny, a macierz* **A** *tylko* 3 *wiersze. Oznacza to, że w przypadku iloczynu dwóch macierzy* ***własność przemienności nie jest spełniona****, gdyż:*

- **AB** *nie zawsze równa się* **BA**, *a więc* $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$,
- **BA** *może nie istnieć.*

Przykład 3.2 *Obliczyć iloczyny macierzy* **AB** *i* **BA**

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie 3.2 *Mnożenie* **AB** *jest wykonalne, ponieważ* **A** *ma wymiar* 1×2, *a* **B** *wymiar* 2×1. *W tym przypadku jest również wykonalne mnożenie* **BA**, *ponieważ macierz* **B** *ma jedną kolumnę, a macierz* **A** *jeden wiersz. Mamy więc*

a) **AB** :

$$
\begin{array}{rr|r}
 & & 3 \\
 & & -2 \\
\hline
2 & 3 & 0
\end{array}
$$

czyli $\mathbf{AB} = [0]$

BA :

$$
\begin{array}{r|rr}
 & 2 & 3 \\
\hline
3 & 6 & 9 \\
-2 & -4 & -6
\end{array}
$$

czyli $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

Widzimy, że $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

b) **AB** :

$$
\begin{array}{rr|r}
 & & -1 \\
 & & -3 \\
\hline
2 & 3 & -11
\end{array}
$$

czyli $\mathbf{AB} = [-11]$

BA :

$$
\begin{array}{r|rr}
 & 2 & 3 \\
\hline
-1 & -2 & -3 \\
-3 & -6 & -9
\end{array}
$$

czyli $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$

Wniosek 3.1 *Z powyższych przykładów wnioskujemy, że jeżeli iloczyn* $\mathbf{AB}$ *istnieje, to iloczyn* $\mathbf{BA}$ *może nie istnieć, a jeżeli istnieje, to na ogół* $\mathbf{BA} \neq \mathbf{AB}$.

Przykład 3.3 *Obliczyć iloczyn macierzy* $\mathbf{A}$ *i macierzy jednostkowej* $\mathbf{I}$, *gdzie*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \tag{82}$$

Rozwiązanie 3.3 *Macierz* $\mathbf{A}$ *ma wymiar* 3×2. *Aby istniał iloczyn* $\mathbf{AI}$, *musimy jako macierz jednostkową wziąć macierz drugiego stopnia, tzn. wymiaru* 2×2. *Mamy więc*

$$\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ \hline a & b & a & b \\ c & d & c & d \\ e & f & e & f \end{array}$$

A więc $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$. *Obliczymy dodatkowo* $\mathbf{IA}$. *Zauważmy, że aby ten iloczyn był wykonalny, to macierz jednostkowa* $\mathbf{I}$ *musi być stopnia* 3. *Stosując schemat Falka otrzymujemy*

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & a & b \\ & & & c & d \\ & & & e & f \\ \hline 1 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 & e & f \end{array}$$

Oznacza to, że również $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$.

Wykazaliśmy, że dla dowolnej macierzy $\mathbf{A}$ zachodzą związki

$$\mathbf{AI} = \mathbf{A} \qquad \text{oraz} \qquad \mathbf{IA} = \mathbf{A}$$

Przykład 3.4 *Znaleźć iloczyn macierzy*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -12 & 6 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie 3.4 *Macierz* $\mathbf{A}$ *ma wymiar* 2×3, *a* $\mathbf{B}$ *wymiar* 3×2. *Ich iloczyn jest wykonalny. W wyniku otrzymamy macierz o wymiarze* 2×2. *Ponownie wykorzystamy schemat Falka*

$$\begin{array}{rrr|cc} & & & 1 & 2 \\ & & & 5 & 10 \\ & & & 6 & 12 \\ \hline 2 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & -3 & 0 & 0 \end{array}$$

Zatem $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$. *Widzimy, że iloczyn macierzy niezerowych może być równy macierzy zerowej.*

Zadanie 3.1 *Znaleźć iloczyn macierzy trójkątnych* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad$ *Odp.* $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad$ *Odp.* $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ -4 & 7 & 2 \\ 0 & -4 & 7 \end{bmatrix}$

Wniosek 3.2 *Tylko iloczyn macierzy trójkątnych tego samego typu (dolnych lub górnych) jest macierzą trójkątną. Poniżej zamieszczamy algorytm mnożenia macierzy napisany w języku Fortran.*

```
subroutine multmat(a,b,c,in)
      dimension a(2,2),b(2,2),c(2,2)
      do 1 i=1,in
      do 1 m=1,in
            s=0.0
            do 2 n=1,in
                  s=s+a(i,n)*b(n,m)
2           continue
1    c(i,m)=s
return
end
```

3.4 Wyznacznik. Definicja. Własności

Każdej **macierzy kwadratowej**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{83}$$

możemy przyporządkować liczbę, zwaną **wyznacznikiem,** którą oznaczamy jednym z poniższych symboli: $\det \mathbf{A}$, $|\mathbf{A}|$[9], A lub

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{84}$$

Wyznacznik (84) jest stopnia n.

[9] Zapis $|\cdot|$ w tym przypadku nie oznacza wartości bezwzględnej.

Jak już powiedzieliśmy, wyznacznik jest liczbą. Ogólny algorytm określania wartości (84) jest złożony i wymaga wprowadzenia dodatkowych pojęć. Na początku podamy metodę obliczania wartości wyznaczników stopnia $n = 1, 2, 3$.

1. Wyznacznik stopnia pierwszego, $n = 1$, ma wartość

$$|a| = a \tag{85}$$

2. Wartość wyznacznika stopnia drugiego, $n = 2$, obliczamy

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{86}$$

tzn. od iloczynu elementów z przekątnej głównej ad odejmujemy iloczyn elementów z drugiej przekątnej, bc.

3. Do obliczania wartości wyznacznika stopnia $n = 3$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{87}$$

najczęściej wykorzystuje się **metodę** (schemat) **Sarrusa**. Jej algorytm jest następujący. Pod wyznacznikiem (87) najpierw dopisujemy jego pierwszy wiersz

$$\begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \multicolumn{1}{c}{a_{11}} & a_{12} & \multicolumn{1}{c}{a_{13}} \end{array} \tag{88}$$

a następnie drugi

$$\begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \multicolumn{1}{c}{a_{11}} & a_{12} & \multicolumn{1}{c}{a_{13}} \\ \multicolumn{1}{c}{a_{21}} & a_{22} & \multicolumn{1}{c}{a_{23}} \end{array}$$

W dalszej kolejności tworzymy iloczyny elementów stojących na przekątnych $1, 2$ i 3 i dodajemy je do siebie.

$$\begin{array}{c|ccccc|} 1 & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ & & \searrow & & & \\ 2 & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ & & \searrow & & \searrow & \\ 3 & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \\ \multicolumn{1}{c}{} & & \searrow & & \searrow & \multicolumn{1}{c}{} \\ \multicolumn{1}{c}{} & a_{11} & & a_{12} & & \multicolumn{1}{c}{a_{13}} \\ \multicolumn{1}{c}{} & & & & \searrow & \multicolumn{1}{c}{} \\ \multicolumn{1}{c}{} & a_{21} & & a_{22} & & \multicolumn{1}{c}{a_{23}} \end{array} \tag{89}$$

Otrzymujemy wyrażenie

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

Odejmujemy od niego iloczyny elementów stojących na przekątnych $4, 5$ i 6.

$$\begin{array}{c}
\left|\begin{array}{ccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\
 & & & \swarrow & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\
 & \swarrow & & \swarrow & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33}
\end{array}\right|
\begin{array}{c} 4 \\ \\ 5 \\ \\ 6 \end{array} \\
\begin{array}{ccccc}
 & \swarrow & & \swarrow & \\
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\
 & \swarrow & & & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23}
\end{array}
\end{array} \tag{90}$$

Otrzymujemy

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

W wyniku dochodzimy do równania

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + \\ + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \end{array} \tag{91}$$

Uwaga 3.2 *Przy pomocy schematu Sarrusa obliczamy wartość wyznacznika* ***wycznie*** *trzeciego stopnia. Wykorzystywanie tej metody przy określaniu wartości wyznaczników stopnia* $n > 3$ ***jest błędne****.*

Innym sposobem obliczania wartości wyznacznika trzeciego stopnia przy pomocy metody Sarrusa jest dopisanie po jego prawej stronie dwóch kolumn (najpierw pierwszej, a następnie drugiej). Przedstawimy to na przykładzie wyznacznika (87)

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc}
\searrow 1 & & \searrow 2 & & \searrow 3 \swarrow & & \swarrow 4 & & \swarrow 5
\end{array} \\
\begin{array}{ccccc|cccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\
 & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\
 & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32}
\end{array}
\end{array} \tag{92}$$

Dodajemy do siebie iloczyny elementów stojących na przekątnej $1, 2$ i 3

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

i odejmujemy iloczyny elementów stojących na przekątnych $3, 4$ i 5 (w drugą stronę)

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

W rezultacie mamy

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array} \tag{93}$$

Łatwo sprawdzić, że wyrażenie (93) jest równoważne wyrażeniu (91).

3.5 Obliczanie wartości wyznacznika dowolnego stopnia

Na wstępie wprowadzimy kilka nowych pojęć, które są podstawowe w rachunku macierzowym.

Definicja 3.8 ***Minorem*** *(podwyznacznikiem) danej macierzy (danego wyznacznika) nazywamy każdy wyznacznik określony tablicą kwadratową powstałą z danej macierzy (wyznacznika) przez skreślenie pewnej liczby wierszy i kolumn.*

Definicja 3.9 *Minorem odpowiadającym elementowi a_{ik} macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ lub danego wyznacznika $|\mathbf{A}|$ nazywamy wyznacznik, który powstaje z elementów pozostałych po skreśleniu $i-$tego wiersza i $k-$tej kolumny. Oznaczamy go symbolem M_{ik}.*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{94}$$

$$M_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k-1} & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1k-1} & a_{i-1k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1k-1} & a_{i+1k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{95}$$

Minor (95) jest stopnia $n-1$.

Definicja 3.10 ***Dopełnieniem algebraicznym*** *A_{ik} elementu a_{ik} nazywamy liczbę równą iloczynowi minora M_{ik} odpowiadającego temu elementowi i wyrażenia $(-1)^{i+k}$:*

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik} \tag{96}$$

Definicja 3.11 *Macierz zbudowaną z dopełnień algebraicznych A_{ik} elementów a_{ik} macierzy $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ stopnia n, tj. macierz*

$$_D\mathbf{A} = [A_{ik}] \tag{97}$$

nazywamy ***macierzą dopełnień algebraicznych*** *macierzy $\mathbf{A}$.*

Twierdzenie 3.1 *W danym wyznaczniku sumy iloczynów elementów dowolnego wiersza (lub dowolnej kolumny) i ich dopełnień algebraicznych mają tę samą stałą wartość równą wartości wyznacznika*

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \text{const} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{98}$$

Powyższe twierdzenie ma duże znaczenie praktyczne. Sprawdzimy je dla $n = 2$ i $n = 3$.

1. Dla $n = 2$ mamy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}\left(-1\right)^{1+1} M_{11} + a_{12}\left(-1\right)^{1+2} M_{12} = \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned} \tag{99}$$

   Widzimy, że otrzymany wynik jest zgodny z relacją (86).

2. Dla $n = 3$ otrzymujemy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{100}$$

   Ponieważ

$$M_{11} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{22} & a_{23} \\ \cdot & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{101}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{21} & \cdot & a_{23} \\ a_{31} & \cdot & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{102}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & \cdot \\ a_{31} & a_{32} & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{103}$$

   Kontynuując obliczenia według (100) dochodzimy do wyniku

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\left(-1\right)^{1+1} M_{11} + a_{12}\left(-1\right)^{1+2} M_{12} + a_{13}\left(-1\right)^{1+3} M_{13} = \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\right) + \\ &\quad + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right) \end{aligned} \tag{104}$$

   Wynik ten jest zgodny z zależnością (91).

Definicja 3.12 *(Definicja ogólna wyznacznika)*
Przez wyznacznik stopnia n $(n \geq 2)$ rozumiemy sumę iloczynów elementów dowolnego wiersza (kolumny) i ich dopełnień algebraicznych.

Znając definicję wyznacznika możemy wprowadzić pojęcie macierzy osobliwej i nieosobliwej.

Definicja 3.13 ***Macierzą osobliwą*** *nazywamy macierz kwadratową, której wyznacznik równa się zeru.*

Na przykład, macierze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \tag{105}$$

są osobliwe, ponieważ $\det \mathbf{A} = 0$ i $\det \mathbf{B} = 0$.

Definicja 3.14 ***Macierzą nieosobliwą*** *nazywamy macierz kwadratową, której wyznacznik jest różny od zera.*

W przypadku ogólnym wzór (98) możemy zapisać

1. Według elementów pierwszego wiersza

$$\det \mathbf{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1k}A_{1k} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} \tag{106}$$

2. Według elementów $i-$tego wiersza

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{ik}A_{ik} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{107}$$

3. Według elementów pierwszej kolumny

$$\det \mathbf{A} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{k1}A_{k1} + \ldots + a_{n1}A_{n1} = \sum_{l=1}^{n} a_{l1}A_{l1} \tag{108}$$

4. Według elementów $k-$tej kolumny

$$\det \mathbf{A} = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{ik}A_{ik} + \ldots + a_{nk}A_{nk} = \sum_{l=1}^{n} a_{lk}A_{lk} \tag{109}$$

dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

Ponieważ wszystkie powyższe rozwinięcia prowadzą do tego samego wyniku, zatem najwygodniej jest obliczać wartość wyznacznika według wiersza lub kolumny z najwiekszą ilością zer.

Przykład 3.5 *Wyznaczyć wartość wyznacznika D*

$$D = \begin{vmatrix} 10 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{110}$$

Rozwiązanie 3.5 *Poszukiwaną wartość możemy wyznaczyć na podstawie rozwinięcia według drugiej kolumny*

$$D = 5\,(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 8\,(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 10 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+4\,(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 10 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 3\,(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 10 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \cdot 42 + 8 \cdot 22 - 4 \cdot 77 + 3 \cdot 420 = 918$$

ale możemy również wyznaczyć na podstawie rozwinięcia względem pierwszej kolumny

$$D = 10\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 8 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\,(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 8 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 10 \cdot 114 - 1 \cdot 222 = 918$$

lub drugiego wiersza

$$D = 8\,(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 10 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 7\,(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 10 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \cdot 22 - 7 \cdot (-106) = 918$$

Za każdym razem otrzymujemy ten sam wynik, jednak w drugim i trzecim przypadku wymaga to o połowę mniej obliczeń.

3.6 Własności wyznaczników

W punkcie tym podamy bez dowodów kilka twierdzeń pomocnych przy obliczaniu wyznaczników. Twierdzenia te odnoszą się do wyznaczników dowolnego stopnia. Dla większej przejrzystości będą one ilustrowane wyznacznikami stopnia trzeciego.

Twierdzenie 3.2 *Przestawienie dwóch kolumn zmienia wartość wyznacznika na przeciwną*

$$\textit{Jeżeli}\ \ D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \textit{to}\ \ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -D$$

Twierdzenie 3.3 *Pomnożenie kolumny przez pewną liczbę powoduje pomnożenie wartości wyznacznika przez tę liczbę*

$$\textit{Jeżeli}\ \ D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \textit{to}\ \ \begin{vmatrix} ta_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ta_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ta_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = tD$$

Twierdzenie 3.4 *Jeżeli do pewnej kolumny wyznacznika dodamy:*
- inną kolumnę tego wyznacznika lub
- inną kolumnę tego wyznacznika pomnożoną przez dowolną liczbę lub
- dowolną kombinację liniową innych kolumn tego wyznacznika,
to wartość wyznacznika nie ulegnie zmianie.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1+tb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+tb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+tb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+(kb_1+lc_1) & b_1 & c_1 \\ a_2+(kb_2+lc_2) & b_2 & c_2 \\ a_3+(kb_3+lc_3) & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D$$

Twierdzenie 3.5 *Jeżeli wyznacznik zawiera*
- kolumnę zerową lub
- dwie kolumny identyczne,
to jego wartość jest równa zero

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a & a & x \\ b & b & y \\ c & c & z \end{vmatrix} = 0$$

Zauważmy, że jeżeli $a_i = t \cdot b_i$, dla $i = 1, 2, 3$, to

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} tb_1 & b_1 & c_1 \\ tb_2 & b_2 & c_2 \\ tb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Twierdzenie 3.6 *W dowolnym wyznaczniku D*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{111}$$

suma elementów dowolnej kolumny pomnożonych przez dopełnienie algebraiczne elementów innej kolumny jest zerem

$$a_{1k}A_{1j} + \ldots + a_{nk}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ij} = \begin{cases} 0 & gdy \quad k \neq j \\ D & gdy \quad k = j \end{cases} \tag{112}$$

Twierdzenie 3.7 *Jeżeli w wyznaczniku wszystkie wyrazy stojące po jednej stronie przekątnej głównej są zerami, to wyznacznik równa się iloczynowi elementów przekątnej głównej.*

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ p & b & 0 \\ q & r & c \end{vmatrix} = abc \qquad \begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc \tag{113}$$

Twierdzenie 3.8 *Przestawienie wszystkich wierszy wyznacznika na miejsce jego kolumn i odwrotnie, bez zamiany ich kolejności, nie zmienia wartości wyznacznika*

$$\text{Jeżeli} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ p & q & r \end{bmatrix}, \quad \text{to} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a & f & p \\ b & g & q \\ c & h & r \end{bmatrix} \tag{114}$$

i zachodzi równość

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T \tag{115}$$

Wniosek 3.3 *Zastępując w Twierdzeniach 3.2 - 3.6 słowo* ***kolumna*** *słowem* ***wiersz****, otrzymujemy twierdzenia prawdziwe.*

Na zakończenie podamy kolejne ważne twierdzenie.

Twierdzenie 3.9 *(Cauchy'ego) Jeżeli macierze* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to*

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B}) \tag{116}$$

Przykład 3.6 *Wykorzystać poznane twierdzenia do obliczania wartości wyznacznika*

$$D = \begin{vmatrix} 220 & -2 & -1 \\ 330 & -3 & -5 \\ 150 & 2 & 19 \end{vmatrix} \tag{117}$$

Rozwiązanie 3.6 *Wykonujemy kolejno przekształcenia*

1. *Z pierwszej kolumny wyłączamy czynnik* 10

$$D = 10 \begin{vmatrix} 22 & -2 & -1 \\ 33 & -3 & -5 \\ 15 & 2 & 19 \end{vmatrix}$$

2. *Do pierwszej kolumny dodajemy drugą pomnożoną przez* 11 *(drugą kolumnę przepisujemy bez zmian!)*

$$D = 10 \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 37 & 2 & 19 \end{vmatrix}$$

3. *Do drugiej kolumny dodajemy trzecią pomnożoną przez* (-2) *(trzecią kolumnę przepisujemy bez zmian!)*

$$D = 10 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 37 & -36 & 19 \end{vmatrix}$$

4. *Przestawiamy pierwszą kolumnę z trzecią*

$$D = -10 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & 7 & 0 \\ 19 & -36 & 37 \end{vmatrix}$$

5. *Stosujemy Twierdzenie 3.7*

$$D = -10 \cdot (-1) \cdot 7 \cdot 37 = 2590$$

Przykład 3.7 *Obliczyć wartość wyznacznika*

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 4 \\ 7 & 6 & -3 & -7 & 12 \\ -9 & -6 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

Rozwiązanie 3.7 *Wykonujemy działania:*

1. *Mnożymy pierwszy wiersz przez* 3 *i odejmujemy od drugiego (przepisujemy go bez zmian!)*

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ -9 & -6 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

2. *Czwarty wiersz mnożymy przez* 2 *i dodajemy do trzeciego*

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

3. *Rozwijamy otrzymany wyznacznik względem elementów trzeciego wiersza*

$$D = (-1)\,(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)\,(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

4. *Rozwijamy pierwszy i drugi wyznacznik względem elementów drugiego wiersza*

$$D = (-1) \cdot 8\,(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} + (-2)\,(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

5. *Wyznaczniki stopnia trzeciego obliczamy metodą Sarrusa*

$$D = 8\,(-16 + 72 + 2 - 16 - 12 + 12) + 2\,(-16 + 72 + 2 - 16 - 12 + 12) = 420$$

3.7 Macierz dołączona, odwrotna i macierz ortogonalna

Na wstępie podamy definicję pojęcia bardzo ważnego przy rozwiązywaniu układów równań.

Definicja 3.15 ***Rzędem macierzy* A** *nazywamy najwyższy stopień różnych od zera wyznaczników (minorów) tej macierzy.*

Rząd macierzy **A** oznaczamy przez $R(\mathbf{A})$ lub $\operatorname{rank}(\mathbf{A})$[10]. Wprowadzimy zapis $\mathbf{A} \overset{R}{=} \mathbf{B}$, gdy $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B})$ $(\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{B})$.

Uwaga 3.3 *Rząd macierzy* **A** *nie ulega zmianie, jeżeli do elementów dowolnego wiersza macierzy dodamy odpowiednie elementy innego wiersza tej macierzy pomnożone przez dowolną liczbę lub jeżeli skreślimy jedną z dwóch identycznych kolumn (wierszy) macierzy.*

Przykład 3.8 *Znaleźć rząd macierzy*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie 3.8 *Najwyższy stopień wyznacznika macierzy* **A** *wynosi* 3, *a macierz posiada elementy niezerowe (wyznaczniki stopnia 1), a więc* $1 \leq R(\mathbf{A}) \leq 3$. *Ponieważ*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \\ \downarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \downarrow \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\,(-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

musimy obliczyć wyznaczniki niższych stopni. Jednym z nich może być wyznacznik drugiego stopnia $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. *Oznacza to, żę rząd macierzy* **A** *wynosi* 2*;* $\operatorname{rank}\mathbf{A} = 2$.

Przykład 3.9 *Znaleźć rząd macierzy*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & -18 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -7 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & -27 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie 3.9 *Przekształcamy macierz tak, aby najprościej obliczyć wyznacznik trzeciego stopnia*

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & -18 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -7 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & -27 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \\ \downarrow \end{matrix} \overset{R}{=} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & -18 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -7 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & -9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Obliczamy wartość wyznacznika

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\,(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot (6-1) = -15 \neq 0$$

A więc rząd macierzy **A** *wynosi* 3*;* $R(\mathbf{A}) = 3$. *Rząd macierzy mówi nam o wielu jej własnościach.*

[10] W starszych podręcznikach można spotkać symbole $r(\mathbf{A})$ lub $rz(\mathbf{A})$.

Definicja 3.16 *Rzędem macierzy* $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]$ *nazywamy maksymalną liczbę kolumn liniowo niezależnych.*

Przykład 3.10 *Macierz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & -18 \\ 3 & 0 & 1 & -7 \\ 6 & 3 & 6 & -27 \end{bmatrix}$$

ma rząd równy 3 $(R(\mathbf{A}) = 3)$, *gdyż kolumny* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, *i* $\mathbf{a}_3$ *są liniowo niezależne.*

Rozwiązanie 3.10 *Rzeczywiście*

$$\alpha \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Definicja 3.17 *Mówimy, że macierz* $\mathbf{A}$ *jest równoważna macierzy* $\mathbf{B}$ $(\mathbf{A} \overset{R}{=} \mathbf{B},\ \mathbf{A} \equiv \mathbf{B})$ *wtedy i tylko wtedy, gdy macierz* $\mathbf{A}$ *możemy otrzymać z macierzy* $\mathbf{B}$ *przez wykonanie na niej skończonej liczby operacji elementarnych (są one opisane w punkcie 3.6 i 4.5).*

Definicja 3.18 ***Macierzą dołączoną*** *macierzy kwadratowej* $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ *nazywamy macierz* $\mathbf{A}^D = [A_{ki}]$, *czyli macierz transponowaną macierzy dopełnień algebraicznych,* $\mathbf{A}^D = [A_{ik}]^T$. *Relacje między macierzami* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{A}^D$ *opisuje twierdzenie.*

Twierdzenie 3.10 *Jeżeli* $\mathbf{A}^D$ *jest macierzą dołączoną macierzy kwadratowej* $\mathbf{A}$, *to zachodzą wzory*

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^D = \mathbf{A}^D\mathbf{A} = (\det \mathbf{A})\,\mathbf{I} \tag{118}$$

Pamiętamy, że A_{ik} jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ik} macierzy $\mathbf{A}$ (patrz (96)) obliczanym z wzoru

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik} \tag{119}$$

gdzie: $M_{ik}-$ minor.

Biorąc pod uwagę Definicję 3.11 oraz wzór (97) możemy macierz dołączoną $\mathbf{A}^D$ przedstawić jako

$$\mathbf{A}^D = ({}_D\mathbf{A})^T = [A_{ik}]^T \tag{120}$$

Przykład 3.11 *Mając daną macierz* $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

zbuduj macierz dopełnień algebraicznych ${}_D\mathbf{A}$ *oraz macierz dołączoną* $\mathbf{A}^D$.

Rozwiązanie 3.11 *Skonstruujemy macierz dopełnień algebraicznych obliczając jej poszczególne elementy. Mamy więc:*

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -13 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

Zatem macierz dopełnień algebraicznych przyjmie postać

$$_D\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \\ -13 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

natomiast macierz dołączona postać

$$\mathbf{A}^D = (_D\mathbf{A})^T = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -13 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Przykład 3.12 *Na przykładzie macierzy* $\mathbf{A}$ *z Przykładu 3.11 sprawdzimy słuszność relacji (118)*

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^D = (\det \mathbf{A})\,\mathbf{I}$$

Rozwiązanie 3.12 *Wyznaczając iloczyn* $\mathbf{A}\mathbf{A}^D$ *otrzymujemy macierze*

$$\begin{array}{rrr|rrr} & & & 8 & -2 & -13 \\ & & & -1 & 1 & 2 \\ & & & -4 & 1 & 8 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

A więc

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3\mathbf{I}$$

Rzeczywiście, wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$ *jest równy* 3, *tzn.* $\det \mathbf{A} = 3$. *Zatem powyższe obliczenia potwierdzają słuszność analizowanego wzoru.*

Podamy teraz definicję **macierzy odwrotnej** macierzy $\mathbf{A}$.

Definicja 3.19 *Macierzą odwrotną macierzy nieosobliwej* $\mathbf{A}$ *nazywamy macierz* $\mathbf{A}^{-1}$ *taką, że*

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \tag{121}$$

Twierdzenie 3.11 *Jeżeli* $\mathbf{A}$ *jest macierzą nieosobliwą, to macierzą odwrotną* $\mathbf{A}$ *jest macierz dołączona macierzy* $\mathbf{A}$ *podzielona przez wartość wyznacznika macierzy* $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}^D \tag{122}$$

Uwaga 3.4 ***Macierz odwrotna macierzy diagonalnej*** $\mathbf{D}$ ***jest macierzą diagonalną, której elementy są równe odwrotnościom elementów macierzy*** $\mathbf{D}$.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 3.12 ***Operacje elementarne, które przekształcają macierz nieosobliwą*** $\mathbf{A}$ ***w macierz jednostkową*** $\mathbf{I}$***, przekształcają jednocześnie macierz*** $\mathbf{I}$ ***w macierz*** $\mathbf{A}^{-1}$.

Przykład 3.13 *Wyznaczyć macierz odwrotną macierzy*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie 3.13 *Po prawej stronie* $\mathbf{A}$ *dopiszemy macierz jednostkową* $\mathbf{I}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} w_1 - w_3 \\ . \\ . \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} . \\ . \\ w_3 - w_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} . \\ . \\ w_2 + 4w_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} . \\ 3w_2 + w_3 \\ . \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 8 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} . \\ w_2/4 \\ . \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} 3w_1 - w_3 \\ . \\ . \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix} 7 & -1 & -11 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} w_1 - w_2 \\ . \\ . \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix} 8 & -2 & -13 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix} 8 & -2 & -13 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3}$$

A więc

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 8 & -2 & -13 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Przykład 3.14 *Wyznaczyć macierz odwrotną macierzy* $\mathbf{A}$ *zdefiniowanej w Przykładzie 3.11.*

Rozwiązanie 3.14 ***Rozwiązanie*** *Macierz dołączona* $\mathbf{A}^D$ *ma postać*

$$\mathbf{A}^D = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -13 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Wartość wyznacznika macierzy $\mathbf{A}$ *jest równa*

$$\det \mathbf{A} = 3$$

Zatem macierz $\mathbf{A}^{-1}$ *będzie równa*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 8 & -2 & -13 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{13}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Sprawdzamy

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -2 & -13 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Twierdzenie 3.13 *Macierz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

nazywamy ***macierzą ortogonalną****, jeżeli macierz odwrotna* $\mathbf{A}^{-1}$ *równa się macierzy transponowanej* $\mathbf{A}^T$*, tzn.*

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \tag{123}$$

Jeżeli macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą ortogonalną, to

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{124}$$

Z równości (124) wynikają własności macierzy ortogonalnej.

1. Suma kwadratów wszystkich elementów dowolnego wiersza oraz dowolnej kolumny macierzy ortogonalnej równa się 1, tzn.

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2 = 1 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{125}$$

$$a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + \ldots + a_{nk}^2 = 1 \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{126}$$

2. Suma iloczynów wszystkich odpowiednich elementów dwóch różnych wierszy oraz dwóch różnych kolumn macierzy ortogonalnej równa się zeru, tzn.

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \ldots + a_{in}a_{jn} = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j,\ i,j = 1,2,\ldots,n \tag{127}$$

$$a_{1k}a_{1l} + a_{2k}a_{2l} + \ldots + a_{nk}a_{nl} = 0 \quad \text{dla} \quad k \neq l,\ k,l = 1,2,\ldots,n \tag{128}$$

Ponadto zauważamy, że z równań (124) wynika wartość wyznacznika macierzy ortogonalnej. Mianowicie

$$\det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{I}$$

ale $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$, $\det \mathbf{I} = 1$, więc $(\det \mathbf{A})^2 = 1$.

Stąd otrzymujemy

$$\det \mathbf{A} = \pm \mathbf{1} \tag{129}$$

Wyznacznik macierzy ortogonalnej może być równy tylko $+1$ **lub** -1.

Przykład 3.15 *Macierz pewnego przekształcenia liniowego ma postać*

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{130}$$

Sprawdzić własności (125) i (126).

Rozwiązanie 3.15 *Jest to macierz nieosobliwa, ponieważ*

$$\det \mathbf{w} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$$

Macierz transponowana jest równa

$$\mathbf{w}^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Natomiast macierz dołączona $\mathbf{w}^D$ *jest następująca*

$$\mathbf{w}^D = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Ponieważ $\det \mathbf{w} = 1$, *to*

$$\mathbf{w}^{-1} = \mathbf{w}^D = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Widzimy więc, że w tym przypadku zachodzi równość $\mathbf{w}^T = \mathbf{w}^{-1}$. *Oznacza to, że macierz* $\mathbf{w}$ *jest macierzą ortogonalną. Sprawdzimy własności (125) i (126). Rzeczywiście:*

1 wiersz: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
2 wiersz: $(-\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$
1 kolumna: $\cos^2\alpha + (-\sin\alpha)^2 = 1$
2 kolumna: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Własności (127) i (128) również są spełnione, bowiem:

1. mnożenie względem wierszy: $\cos\alpha\,(-\sin\alpha) + \sin\alpha\cos\alpha = 0$
2. mnożenie względem kolumn: $\cos\alpha\sin\alpha + (-\sin\alpha)\cos\alpha = 0$

3.8 Równanie charakterystyczne macierzy

Z danej macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ stopnia n o elementach a_{ik} $(i,k=1,2,\ldots,n)$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{131}$$

utworzymy nową macierz zgodnie z zapisem $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}=\mathbf{C}$. W rezultacie otrzymamy

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \tag{132}$$

Przyrównując do zera wyznacznik macierzy (132)

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{133}$$

otrzymamy równanie stopnia n względem λ, które nazywamy **równaniem charakterystycznym macierzy A**. Pierwiastki λ_i tego równania, różne od zera dla macierzy nieosobliwej, nazywamy **wartościami własnymi** macierzy $\mathbf{A}$. Równanie

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0 \tag{134}$$

ma dokładnie n pierwiastków rzeczywistych lub zespolonych, jeżeli każdy pierwiastek liczy się tyle razy, ile wynosi jego krotność.

Znając wszystkie wartości własne macierzy możemy obliczyć wartość jej wyznacznika

$$\det(\mathbf{A})=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i \tag{135}$$

oraz tak zwany **ślad macierzy** (ang. *trace*)

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A})=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \tag{136}$$

Wniosek 3.4 *Z relacji (135) wynika, że macierz* $\mathbf{A}$ *jest macierzą osobliwą, jeżeli co najmniej jedna wartość własna jest równa* 0.

Wniosek 3.5 *Suma wartości własnych macierzy* $\mathbf{A}$ *jest równa sumie elementów znajdujących się na przekątnej gwnej tej macierzy:* $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}=\mathrm{tr}(\mathbf{A})$.

Moduł maksymalnej wartości własnej macierzy $\mathbf{A}$ nazywamy jej **promieniem spektralnym** i oznaczamy

$$\rho(\mathbf{A})=\max_{\lambda\in\sigma(\mathbf{A})}|\lambda| \tag{137}$$

Przykład 3.16 *Wyznaczyć równanie charakterystyczne oraz wartości własne macierzy*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie 3.16 *Tworzymy równanie charakterystyczne tej macierzy*

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Stąd

$$(2-\lambda)(5-\lambda) - 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda^2 - 7\lambda + 9 = 0 \tag{138}$$

Łatwo zauważyć, że równanie charakterystyczne (138) ma dwa pierwiastki rzeczywiste

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(7 - \sqrt{13}\right) \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(7 + \sqrt{13}\right)$$

Są to wartości własne macierzy $\mathbf{A}$.

4 Równania liniowe. Układy równań liniowych

4.1 Równanie liniowe

Definicja 4.1 ***Równaniem liniowym*** *o n zmiennych (niewiadomych) nazywamy równanie otrzymane przez przyrównanie do zera funkcji liniowej n zmiennych*[11]*, tzn.*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_0 = 0 \tag{139}$$

Równanie liniowe zapisujemy

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{140}$$

Nazywamy je ***jednorodnym,*** *gdy $b = 0$ i* ***niejednorodnym****, gdy $b \neq 0$. Liczby $a_1, \ldots, a_n$ nazywamy współczynnikami równania, liczbę $b-$ wyrazem wolnym (albo prawą stroną równania), liczby te są znane. Zmienne $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy niewiadomymi. Jeżeli niewiadomych jest niewiele, zwykle oznaczamy je x, y, z, t. Ciąg niewiadomych $x_1, \ldots, x_n$ zapisujemy w skrócie $x = (x_1, \ldots, x_n)$ lub $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$.*

Rozwiązaniem równania liniowego (140) nazywamy każdy ciąg n liczb rzeczywistych

$$(c_1, c_2, \ldots, c_n) \tag{141}$$

który spełnia równanie (140), tzn. po podstawieniu za zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ liczb $c_1, c_2, \ldots, c_n$ prawdziwa jest relacja (140).

Rozwiązać równanie oznacza to samo, co podać wszystkie jego rozwiązania, względnie stwierdzić, że rozwiązań nie ma. Zbiór wszystkich rozwiązań danego równania liniowego nazywamy **rozwiązaniem ogólnym**, a każde pojedyncze rozwiązanie **rozwiązaniem szczególnym**.

4.2 Układ równań

Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = 0 \\ f_2(\mathbf{x}) = 0 \\ \cdots \\ f_m(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \tag{142}$$

Ciąg $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ nazywamy rozwiązaniem układu (142), jeżeli jest on rozwiązaniem każdego równania zawartego w tym układzie.

Gdy $m = 1$, układ (142) zawiera tylko jedno równanie liniowe

$$f_1(\mathbf{x}) = 0$$

[11] Funkcją liniową 2 zmiennych nazywamy wyrażenie spełniające warunek: $f(\gamma x + \omega y) = f(\gamma x) + f(\omega y) = \gamma f(x) + \omega f(y)$. Wykresem funkcji liniowej jest linia prosta.

4.3 Kombinacja liniowa równań

Mając dany układ równań możemy każde równanie pomnożyć przez pewną stałą i dodać je do siebie. Tak skonstruowane równanie ma postać

$$k_1 f_1(\mathbf{x}) + \ldots + k_m f_m(\mathbf{x}) = 0 \tag{143}$$

gdzie: k_i, $i = 1, 2, \ldots, m-$ stałe.

Równanie (143) nazywamy **kombinacją liniową** równań danego układu. Są one **niezależne liniowo**, jeżeli równość (143) zachodzi tylko wtedy, gdy $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$. W przeciwnym przypadku równania te nazywamy **liniowo zależnymi.**

Przykład 4.1 *Dany jest układ równań*

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = 2x + y = 0 \\ f_2(\mathbf{x}) = x + 2y = 0 \end{cases} \tag{144}$$

Utworzyć kombinację o współczynnikach $1, 1$ *oraz* $2, 2$. *Czy równania są liniowo niezależne?*

Rozwiązanie 4.1 *Tworzymy kombinację o współczynnikach* $1, 1$ *oraz kombinację o współczynnikach* $2, 2$. *Otrzymujemy układ*

$$1 \cdot f_1(\mathbf{x}) + 1 \cdot f_2(\mathbf{x}) = 0$$

$$1 \cdot 2x + 1 \cdot y + 1 \cdot x + 1 \cdot 2y = 0$$

$$3x + 3y = 0$$

$$2 \cdot f_1(\mathbf{x}) + 2 \cdot f_2(\mathbf{x}) = 0$$

$$2 \cdot 2x + 2 \cdot y + 2 \cdot x + 2 \cdot 2y = 0$$

$$6x + 6y = 0$$

Układ

$$\begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 6x + 6y = 0 \end{cases} \tag{145}$$

wynika z poprzedniego, ale nie jest mu równoważny.

Twierdzenie 4.1 *Poniższe dwa układy równań, w których* t *jest stałą dowolną*

$$A: \begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = 0 \\ f_2(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \qquad B: \begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = 0 \\ f_2(\mathbf{x}) + t f_1(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \tag{146}$$

są równoważne.

Twierdzenie 4.2 *Poniższe dwa układy równań, w których* $t_1, \ldots, t_k$ *oznaczają stałe dowolne,* $k \geq 1$

$$A: \begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = 0 \\ \ldots \\ f_k(\mathbf{x}) = 0 \\ f(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \qquad B: \begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = 0 \\ \ldots \\ f_k(\mathbf{x}) = 0 \\ f(\mathbf{x}) + t_1 f_1(\mathbf{x}) + \ldots + t_k f_k(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \tag{147}$$

są równoważne.

4.4 Układ równań liniowych. Macierz układu. Macierz rozszerzona.

Układ m równań liniowych o n niewiadomych zapisujemy

$$\left\{\begin{array}{lllllll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_{m1}x_1 & & a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \quad \text{lub} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{148}$$

Współczynniki a_{ij} układu i wyrazy wolne b_i, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ są znanymi liczbami rzeczywistymi. Określają one układ równań, a więc i jego rozwiązanie. Zapiszemy je w postaci macierzy

$$\underbrace{\mathbf{A} = \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}}^{\substack{\text{macierz} \\ \text{współczynników}}} \quad \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix} = \mathbf{b}}^{\substack{\text{macierz} \\ \text{wyrazów wolnych}}}}_{\text{macierz rozszerzona}} \tag{149}$$

Macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{150}$$

nazywamy macierzą układu, a macierz

$$[\mathbf{A}|\,\mathbf{b}] = \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{151}$$

macierzą rozszerzoną. Powstaje ona po dołączeniu kolumny wyrazów wolnych $\mathbf{b}$ do macierzy układu $\mathbf{A}$. Macierz rozszerzoną często oznacza się symbolem $[\mathbf{A}|\,\mathbf{b}]$. W niektórych podręcznikach ostatnia kolumna jest oddzielona od macierzy układu pionową linią kropkowaną lub ciągłą. Np.

$$[\mathbf{A}|\,\mathbf{b}] \;=\; \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix} \tag{152}$$

$$[\mathbf{A}|\,\mathbf{b}] \;=\; \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{153}$$

4.5 Przekształcenia elementarne i zmiana numeracji niewiadomych

Przekształceniami elementarnymi układu równań liniowych nazywamy

1. przestawienie ze sobą dwóch równań układu,
2. pomnożenie równania układu przez liczbę różną od 0,
3. pomnożenie pewnego równania układu przez dowolną liczbę i dodanie do innego równania tego układu.

Twierdzenie 4.3 *Jeżeli do danego układu równań liniowych zastosujemy przekształcenie elementarne, to otrzymamy układ równoważny danemu układowi.*

Przekształceniom elementarnym układu równań (148) odpowiadają następujące przekształcenia elementarne macierzy (149):

1. przestawienie dwóch wierszy,
2. pomnożenie wiersza przez liczbę różną od zera,
3. pomnożenie pewnego wiersza przez dowolną liczbę i dodanie do innego wiersza.

Uwaga 4.1 *Przekształcenia elementarne wykonywane są na macierzy rozszerzonej, a więc również na kolumnie wyrazów wolnych.*

Jeżeli w równaniu $5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 8$ przestawimy pierwsze dwa wyrazy, to otrzymamy $6x_2 + 5x_1 + 7x_3 = 8$. W celu uporządkowania niewiadomych zgodnie ze wzrostem wskaźnika wprowadzamy nowe niewiadome $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ takie, że

$$x_1 = \bar{x}_2 \qquad x_2 = \bar{x}_1 \qquad x_3 = \bar{x}_3 \qquad \text{(zmiana numeracji)}$$

Analizowane równanie przyjmie postać $6\bar{x}_1 + 5\bar{x}_2 + 7\bar{x}_3 = 8$.

Jeżeli z układu równań F przez zmianę numeracji niewiadomych powstaje układ równań G, to z każdego rozwiązania układu F przez analogiczne przekształcenie otrzymujemy rozwiązanie układu G. Znalezienie rozwiązań układu G jest równoważne znalezieniu rozwiązań układu F.

Zmiana numeracji niewiadomych w układzie (148) powoduje odpowiednie przestawienie kolumn w macierzy współczynników tego układu (kolumna wyrazów wolnych pozostaje na swoim miejscu).

Każdy układ równań liniowych można sprowadzić za pomocą przekształceń elementarnych i zmianę numeracji niewiadomych do tzw. **układu normalnego**. Z układu normalnego łatwo odczytać rozwiązanie lub stwierdzić, że rozwiązań nie ma.

4.6 Sprowadzanie macierzy do postaci normalnej

Twierdzenie 4.4 *Dowolną macierz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{154}$$

*w której nie wszystkie wyrazy a_{ij} są zerami, można za pomocą przekształceń elementarnych i przestawienia kolumn sprowadzić do macierzy zwanej **półnormalną***

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1r} & p_{1,r+1} & \dots & p_{1n} \\ 0 & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2r} & p_{2,r+1} & \dots & p_{2n} \\ 0 & 0 & p_{33} & \dots & p_{3r} & p_{3,r+1} & \dots & p_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{rr} & p_{r,r+1} & \dots & p_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{155}$$

gdzie: $p_{11} \neq 0, p_{22} \neq 0, \dots, p_{rr} \neq 0; r \geq 1, r \leq n, r \leq m$, *a następnie do macierzy zwanej **normalną***

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & 0 & \dots & 0 & c_{2,r+1} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & 0 & c_{3,r+1} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{156}$$

gdzie: $c_{11} \neq 0, c_{22} \neq 0, \dots, c_{rr} \neq 0; r \geq 1, r \leq n, r \leq m$.

W macierzach $\mathbf{P}$ *i* $\mathbf{C}$ *liczba* r *ma taką samą wartość.*

Dzieląc $i-$*ty wiersz macierzy* $\mathbf{C}$ *przez* c_{ii}, $i = 1, \dots, r$, *możemy uzyskać w miejscu* $c_{11}, \dots, c_{rr}$ *jedynki.*

Jeżeli $r = m$, *to w macierzach* $\mathbf{P}$ *i* $\mathbf{C}$ *nie ma u dołu wierszy wypełnionych zerami.*

Jeżeli $r = n$, *to* $r-$*ta kolumna jest ostatnią kolumną.*

Przykład 4.2 *Sprowadzić do postaci normalnej macierz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{157}$$

Rozwiązanie 4.2 *Pierwszy wiersz pomnożony przez* (-1) *dodajemy do drugiego i trzeciego wiersza. Zapisujemy to umownie następująco:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 & -1 \\ \downarrow & \\ & \downarrow \\ & \end{matrix}$$

W wyniku otrzymamy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ \downarrow \\ \end{matrix}$$

Następnie, drugi wiersz mnożymy przez (-2) *i dodajemy do trzeciego*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Czwarty wiersz mnożymy przez 2 *i dodajemy do niego wiersz drugi*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Ponieważ $a_{33} = 0, a_{34} = 0$, *a* $a_{35} \neq 0$, *to przestawiamy trzecią kolumnę z piątą*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Trzeci wiersz mnożymy przez 3, *czwarty przez* 7 *i dodajemy trzeci do czwartego*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pierwszy wiersz pomnożymy przez 7, *trzeci przez* (-3) *i do pierwszego dodamy trzeci*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 0 & 0 & -28 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Drugi wiersz pomnożymy przez 7, *trzeci przez* 5 *i do drugiego dodamy trzeci*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 0 & 0 & -28 \\ 0 & -14 & 0 & -14 & 14 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pierwszy wiersz pomnożymy przez 2 *i dodamy do niego drugi*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 & -14 & -42 \\ 0 & -14 & 0 & -14 & 14 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot 1/14 \\ \cdot(-1/14) \\ \cdot 1/7 \\ . \end{array} \tag{158}$$

Macierz (158) ma postać normalną. Jeżeli pomnożymy jej wiersze przez zaznaczone mnożniki, to otrzymamy jeszcze prostszą postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{159}$$

Metoda sprowadzania macierzy układu do postaci normalnej jest pomocna przy rozwiązywaniu układów równań liniowych. W ogólnym przypadku nosi ona nazwę **metody eliminacji Gaussa**.

Przykład 4.3 *Rozwiązać układ równań liniowych*

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 5x & + & 3y & + & 4z & = & -18 \\ 3x & & & + & z & = & -7 \\ 6x & + & 3y & + & 6z & = & -27 \end{array}\right. \tag{160}$$

sprowadzając macierz rozszerzoną układu do postaci normalnej.

Rozwiązanie 4.3 *Biorąc pod uwagę definicję macierzy rozszerzonej (patrz (149)) mamy*

$$[\mathbf{A}|\,\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & -18 \\ 3 & 0 & 1 & -7 \\ 6 & 3 & 6 & -27 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ -2w_2+w_3 \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & -18 \\ 0 & 3 & 4 & -13 \\ 6 & 3 & 6 & -27 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 5w_3-6w_1 \end{array} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & -18 \\ 0 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & -3 & 6 & -27 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ w_2+w_3 \end{array} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & -18 \\ 0 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 10 & -40 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ w_3/10 \end{array} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & -18 \\ 0 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} w_1-w_2 \\ \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} w_1/5 \\ w_2-4w_3 \\ . \end{array} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ w_2/3 \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

A więc macierz normalna $\mathbf{C}$ *ma postać*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \tag{161}$$

Czwarta kolumna tej macierzy zawiera poszukiwane rozwiązania układu (160). Są one odpowiednio równe:

$$\begin{array}{lll} x & = & -1 \\ y & = & 1 \\ z & = & -4 \end{array} \tag{162}$$

Przedstawiona metoda jest często wykorzystywana przy rozwiązywaniu układów równań z tymi samymi współczynnikami, tzn. z tą samą macierzą układu i różnymi prawymi stronami. Układ równań (160) z innymi prawymi stronami zapiszemy następująco

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 5x & + & 3y & + & 4z & = & 6 \\ 3x & & & + & z & = & 4 \\ 6x & + & 3y & + & 6z & = & 9 \end{array}\right. \tag{163}$$

lub

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 19 \\ 3x + z = 6 \\ 6x + 3y + 6z = 21 \end{cases} \tag{164}$$

W tym przypadku macierz rozszerzona (149) przyjmie postać

$$[\mathbf{A}|\,\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & -18 & 6 & 19 \\ 3 & 0 & 1 & -7 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & -27 & 9 & 21 \end{bmatrix} \tag{165}$$

a macierz normalna postać

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{166}$$

Elementy c_{i4} są rozwiązaniem układu (160), c_{i5}– układu (163), a c_{i6}– układu (164) ($i = 1, 2, 3$). Zauważmy, że zapisując układ wyjściowy w postaci

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = -18 \\ 6x + 3y + 6z = -27 \\ 3x + z = -7 \end{cases} \tag{167}$$

zmniejszamy liczbę przekształceń przy konstruowaniu macierzy normalnej; element a_{22} jest już różny od zera. Dodatkowo, dzieląc drugie równanie obustronnie przez 3, operujemy mniejszymi liczbami

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = -18 \\ 2x + y + 2z = -9 \\ 3x + z = -7 \end{cases} \tag{168}$$

4.7 Metoda eliminacji Gaussa

Twierdzenie 4.5 *Dowolny układ m równań liniowych o n niewiadomych*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{169}$$

można za pomocą przekształceń elementarnych i zmiany numeracji niewiadomych sprowadzić do układu normalnego

$$\begin{cases} c_{11}\bar{x}_1 & 0 & & 0 & + & c_{1,r+1}\bar{x}_{r+1} & + \ldots + & c_{1n}\bar{x}_n & = & q_1 \\ 0 & c_{22}\bar{x}_2 & & 0 & + & c_{2,r+1}\bar{x}_{r+1} & + \ldots + & c_{2n}\bar{x}_n & = & q_2 \\ & & \ldots & & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & & c_{rr}\bar{x}_r & + & c_{r,r+1}\bar{x}_{r+1} & + \ldots + & c_{rn}\bar{x}_n & = & q_r \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = & q_{r+1} \\ & & & & & & & & & \ldots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = & q_m \end{cases} \tag{170}$$

w którym liczby $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{rr}$ są różne od 0, a kreski nad niewiadomymi zaznaczają możliwość zmiany numeracji niewiadomych.

4.7.1 Dyskusja układu równań w postaci normalnej

Wyróżnimy dwa przypadki.

1. Jeżeli $r < m$ i wśród liczb $q_{r+1}, \ldots, q_m$ istnieje co najmniej jedna różna od 0, to układ jest sprzeczny.

2. Jeżeli $r < m$, ale $q_{r+1} = \ldots = q_m = 0$ lub jeżeli $r = m$, to układ jest rozwiązywalny. Rozróżniamy wtedy dwa przypadki:

   - $r < n$; zmienne dzielą się na dwie grupy

   $$\underbrace{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r}_{\text{zmienne bazowe}} \qquad \underbrace{\bar{x}_{r+1}, \bar{x}_{r+2}, \ldots, \bar{x}_n}_{\text{parametry}}$$

   Zmiennych bazowych jest r, parametrów $n - r$. W tym przypadku za parametry podstawiamy dowolne liczby, a następnie z równań (170) wyznaczamy wartości zmiennych bazowych. Istnieje więc nieskończenie wiele rozwiązań, tyle, ile jest różnych ciągów $n - r$ liczb podstawianych za parametry.

   - $r = n$; parametrów nie ma; układ ma postać

   $$\begin{array}{ccccc} c_{11}\bar{x}_1 & 0 & & 0 & = & q_1 \\ 0 & c_{22}\bar{x}_2 & & 0 & = & q_2 \\ & & \ddots & & & \ldots \\ 0 & 0 & & c_{rr}\bar{x}_r & = & q_r \end{array} \tag{171}$$

   i ma dokładnie jedno rozwiązanie

   $$\mathbf{x} = (q_1/c_{11}, q_2/c_{22}, \ldots, q_n/c_{nn}) \tag{172}$$

Z powyższej dyskusji wynika, że układ równań liniowych może być:

- oznaczony (zbiór rozwiązań jest jednoelementowy, jest nim wektor (172)),
- nieoznaczony (zbiór rozwiązań jest nieskończony, zależny od dowolnych wartości parametrów),
- sprzeczny (zbiór rozwiązań jest pusty).

Algorytm dochodzenia do układu półnormalnego, a następnie normalnego nosi nazwę **metody eliminacji Gaussa**. Jest to najważniejsza i najefektywniejsza metoda bezpośredniego rozwiązywania dowolnych układów równań liniowych. Jej idea polega na eliminacji niewiadomych w pewien systematyczny sposób.

Rozważmy układ równań (169) dla $m = n$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \ldots & \ddots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \ldots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right. \tag{173}$$

Zakładamy, że macierz $\mathbf{A}$ układu (173) jest nieosobliwa, tzn. $\det \mathbf{A} \neq 0$. Wówczas układ

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{174}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie.

Niech $a_{11}{\neq}0$. Przy tym założeniu z $n-1$ ostatnich równań możemy wyeliminować x_1 odejmując od $i-$tego równania pierwsze równanie pomnożone przez

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{175}$$

Przekształcone równania przybierają postać

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{22}^{(2)}x_2 & + & a_{23}^{(2)}x_3 & +\ldots+ & a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}^{(2)}x_1 & + & a_{n2}^{(2)}x_2 & +\ldots+ & a_{nn}^{(2)}x_n & = & b_n^{(2)} \end{array} \right. \tag{176}$$

gdzie:

$$\begin{array}{ll} a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - m_{i1}a_{1j} & \qquad (j = 2, \ldots, n) \\ & \\ b_i^{(2)} = b_i - m_{i1}b_1 & \qquad (i = 2, \ldots, n) \end{array} \tag{177}$$

Nowy układ składa się z $n-1$ równań i zawiera $n-1$ niewiadomych $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Jeżeli $a_{22}^{(2)} \neq 0$, to w podobny sposób możemy wyeliminować x_2 z ostatnich $n-2$ równań układu. Otrzymamy wtedy układ $n-2$ równań z niewiadomymi $x_3, \ldots, x_n$. Przyjmując

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \qquad (i = 3, \ldots, n) \tag{178}$$

otrzymamy wyrażenie na nowe współczynniki

$$\begin{array}{ll} a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2}a_{2j}^{(2)} & \qquad (j = 3, \ldots, n) \\ & \\ b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2}b_2^{(2)} & \qquad (i = 3, \ldots, n) \end{array} \tag{179}$$

Elementy $a_{11}, a_{22}^{(2)}, a_{33}^{(3)}, \ldots$ występujące w trakcie eliminacji Gaussa nazywa się **elementami głównymi**. Jeżeli każdy z nich jest różny od zera, to możemy kontynuować eliminację aż do otrzymania po $n-1$ krokach jednego równania

$$a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \quad \text{stąd} \quad x_n = b_n^{(n)}/a_{nn}^{(n)} \tag{180}$$

Wprowadzając oznaczenia $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}, b_i^{(1)} = b_i$ otrzymujemy układ w postaci **półnormalnej**

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{11}^{(1)}x_1 & + & a_{12}^{(1)}x_2 & + & a_{13}^{(1)}x_3 & +\ldots+ & a_{1n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\ & & a_{22}^{(2)}x_2 & + & a_{23}^{(2)}x_3 & +\ldots+ & a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\ & & & & a_{33}^{(3)}x_3 & +\ldots+ & a_{3n}^{(3)}x_n & = & b_3^{(3)} \\ & & & & & \ddots & \cdots & & \cdots \\ & & & & & & a_{nn}^{(n)}x_n & = & b_n^{(n)} \end{array} \right. \tag{181}$$

Zauważmy, że prawą stronę **b** układu (174) przekształca sie tak samo, jak kolumny macierzy **A**. Dlatego opis metody eliminacji Gaussa uprości się, jeżeli uznamy **b** (jak w poprzednich przykładach) za ostatnią kolumnę tej macierzy i przyjmiemy, że

$$a_{i,n+1}^{(k)} = b_i^{(k)} \qquad (1 \leq k \leq i \leq n) \tag{182}$$

Rozwiązując kilka układów równań o wspólnej macierzy **A**

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \qquad \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 \qquad \dots \qquad \mathbf{A}\mathbf{x}_p = \mathbf{b}_p \tag{183}$$

możemy przekształcić je łącznie, traktując $\mathbf{b}_j$ jako $(n+j)$ −tą kolumnę macierzy rozszerzonej.

Przykład 4.4 *Rozwiązać układ równań*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \tag{184}$$

metodą eliminacji Gaussa.

Rozwiązanie 4.4 *Tworzymy macierz rozszerzoną*

$$[\mathbf{A}|\,\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

i wykorzystujemy poznany algorytm. Wyznacznik macierzy **A** *układu jest różny od zera;* $\det \mathbf{A} = -1 \neq 0$. *Oznacza to, że macierz* **A** *jest nieosobliwa. Z drugiego i trzeciego wiersza eliminujemy* x_1 *odejmując od drugiego wiersza pierwszy wiersz pomnożony przez* $m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$ *(patrz (175)). Współczynnik ten jest równy*

$$m_{21} = \frac{1}{1} = 1$$

Podobnie

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1$$

A więc

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Widzimy, że już po pierwszym kroku jeden z elementów głównych jest równy $0 : a_{22} = 0$. *Możemy oczywiście zamienić trzeci wiersz z drugim lub trzecią kolumnę z drugą (ale to zmienia numerację niewiadomych) i kontynuować obliczenia.*

4.8 Wybór elementów głównych

1. **Metoda eliminacji Gaussa z przestawianiem wierszy.**

   Jest to metoda z tzw. częściowym wyborem elementu głównego. Wybiera się r jako najmniejszą liczbę całkowitą, dla której

   $$\left|a_{rk}^{(k)}\right| = \max_{k \leq i \leq n} \left|a_{ik}^{(k)}\right|$$

   i następnie przestawia się wiersze k i r.

2. **Metoda eliminacji Gaussa z przestawianiem wierszy i kolumn.**

   Jest to metoda z tzw. pełnym wyborem elementu głównego. Wybiera się r i s jako najmniejsze liczby całkowite, dla których
$$\left|a_{rs}^{(k)}\right| = \max_{k\leq i,j\leq n}\left|a_{ij}^{(k)}\right|$$
   a następnie przestawia się wiersze k i r oraz kolumny k i s. Drugie podejście polega na wyszukiwaniu współczynnika o największej wartości bezwzględnej w pozostałej części macierzy.

Powyżej przedstawiamy algorytm odwracania macierzy $\mathbf{A}$ metodą Gaussa z wyborem maksymalnego elementu (elementu głównego) napisany w języku Fortran.

Powrócimy do Przykładu 4.4.

Przykład 4.5 *(Ciąg dalszy Przykładu 4.4)*

Rozwiązanie 4.5 *Mamy więc (rozpatrujemy macierz rozszerzoną)*
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
Przestawimy wiersz trzeci i drugi
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{185}$$
Otrzymaliśmy macierz półnormalną (trójkątną górną), z której wynika, że
$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & & & x_3 & = & 1 \end{array} \tag{186}$$
Podstawiając ostatnie rozwiązanie do poprzedzających je równań otrzymamy poszukiwany wektor $\mathbf{x} = (1, -1, 1)$, *czyli* $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. *Układ (181) można przekształcać dalej do postaci normalnej. Mając rozwiązanie* $x_n = b_n^{(n)}/a_{nn}^{(n)}$ *będziemy je eliminować ze wszystkich równań stojących powyżej* $n-$*tego wiersza. W tym celu równania te pomnożymy przez współczynniki odpowiadające (175) np. wiersz* $n-1$ *pomnożymy przez* $m_n = \frac{a_{nn}^{(n)}}{a_{nm,n}^{n-1}}$ *i odejmiemy od niego wiersz ostatni. Procedurę powtarzamy przesuwając się od wiersza ostatniego do pierwszego. Wynikiem będzie macierz normalna, której ostatnia kolumna zawiera poszukiwane rozwiązania. Kontynuujemy rozwiązywanie Przykładu 4.4 (patrz macierz (185)). Od wiersza pierwszego i drugiego odejmujemy wiersz trzeci:*
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
Od wiersza pierwszego odejmujemy wiersz drugi:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{187}$$
Macierz (187) jest macierzą normalną z jedynkami na przekątnej głównej. Ostatnia kolumna zawiera poszukiwane rozwiązania.

```
subroutine gauss(n,eps,a,ib,jb,is)
dimension a(2,2),ib(2),jb(2)
    is=0
    do 1 i=1,n
        jb(i)=0
1   CONTINUE
    do 8 k=1,n
        gmax=0.0
        do 3 i=1,n
            if(jb(i).ne.0) GOTO 3
                do 2 j=1,n
                    if(jb(j).ne.0) GOTO 2
                    if(abs(gmax).ge.abs(a(j,i))) GOTO 2
                        gmax=a(j,i)
                        ip=i
                        jq=j
2               CONTINUE
3       CONTINUE
        jb(jq)=ip
        nq=n-k+1
        IF(k.eq.1) eps=eps*abs(gmax)
        ib(nq)=jq
        if(abs(gmax).lt.eps) GOTO 11
        gmax=1.00/gmax
        do 4 i=1,n
            tm=a(i,jq)
            sm=gmax
            IF(i.ne.jq) sm=gmax*a(i,ip)
                a(i,jq)=sm
                IF(ip.ne.jq) a(i,ip)=tm
4       CONTINUE
        do 7 i=1,n
            IF(i.eq.jq) GOTO 7
                sm=-a(jq,i)
                do 6 j=1,n
                    IF(j.eq.jq) GOTO 15
                        tm=a(j,i)+a(j,jq)*sm
                        GOTO 5
                        15 tm=gmax*sm
5                       a(j,i)=tm
6               CONTINUE
7       CONTINUE
8   CONTINUE
    do 10 k=1,n
        ip=ib(k)
        IF(jb(ip).eq.ip) GOTO 10
        iq=jb(ip)
        do 9 i=1,n
            sm=a(ip,i)
            a(ip,i)=a(jq,i)
9       a(jq,i)=sm
10  CONTINUE
return
```

4.9 Twierdzenie Kroneckera-Capelliego. Układ Cramera.

Układ równań

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{188}$$

możemy zapisać w postaci macierzowej

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{189}$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{190}$$

lub w postaci wektorowej

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 \ + \ \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 \ +\ldots+ \ \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n \ = \ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{191}$$

Przypomnienie

1. Rozwiązaniem układu (188) nazywamy układ n liczb $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, który spełnia wszystkie równania układu (188).

2. Układ (188) nazywamy sprzecznym, gdy nie posiada żadnego rozwiązania.

3. Układ (188) nazywamy oznaczonym, gdy posiada tylko jedno rozwiązanie.

4. Układ (188) nazywamy nieoznaczonym, gdy posiada nieskończenie wiele rozwiazań.

   Dodatkowo podamy, że

5. Zbiór wszystkich rozwiązań stanowi $k-$parametrową rodzinę, jeżeli każde rozwiązanie układu (188) jest postaci

$$\left(\alpha_{01} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{i1}t_i, \alpha_{02} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{i2}t_i, \ldots, \alpha_{0n} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{in}t_i\right)$$

   gdzie: $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathcal{R}$; $\alpha_{ij}-$ odpowiednio dobrane współczynniki takie, że dla ustalonego $i = 1, 2, \ldots, k$ nie wszystkie $\alpha_{ij}, j = 1, 2, \ldots, n$, są równe zero.

Twierdzenie 4.6 *(Kroneckera-Capelliego)*
Układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy* $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}|\,\mathbf{b})$, *przy czym*
układ jest sprzeczny, gdy $R(\mathbf{A}) \neq R(\mathbf{A}|\,\mathbf{b})$
układ jest oznaczony, gdy $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}|\,\mathbf{b}) = n$
układ jest nieoznaczony, gdy $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}|\,\mathbf{b}) < n$, *przy czym rozwiązania stanowią* $k-$*parametrową rodzinę, gdzie* $k = n - R(\mathbf{A})$.

Przykład 4.6 *Rozwiązać układ równań*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \tag{192}$$

Rozwiązanie 4.6 *Utworzymy macierz rozszerzoną*

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

i poddamy ją przekształceniom elementarnym

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ w_2 - w_1 \\ w_3 - 2w_1 \end{array} \overset{R}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ w_3 - w_2 \end{array} =$$

$$\overset{R}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

zaś wyznacznik najwyższego stopnia macierzy rozszerzonej

$$\det(\mathbf{A}|\,\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Wobec tego

$$R(\mathbf{A}) \neq R(\mathbf{A}|\,\mathbf{b})$$

A więc rozwiązywany układ jest sprzeczny.

Przykład 4.7 *Sprawdzić, czy układ równań niejednorodnych*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

ma rozwiązania.

Rozwiązanie 4.7 *Tworzymy macierz rozszerzoną*

$$(\mathbf{A}|\,\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

i określamy jej rząd. W tym celu obliczymy wartość wyznacznika

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

oraz wyznacznika macierzy układu

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Ponieważ $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}|\,\mathbf{b}) = 3 = n$*, możemy powiedzieć, że zgodnie z Twierdzeniem Kroneckera-Capelliego układ jest układem oznaczonym.*

Definicja 4.2 *(Układu Cramera)*
Układ (188) nazywamy układem Cramera, gdy $m = n$, $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Twierdzenie 4.7 *(Cramera)*
Układ Cramera jest oznaczony, a jedyne rozwiązanie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *wyraża się wzorami:*

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \ldots,\ x_n = \frac{D_n}{D} \tag{193}$$

gdzie: $D = \det \mathbf{A}$*, zaś* $D_k, k = 1, 2, \ldots, n$*, są wyznacznikami macierzy, które powstają z macierzy* $\mathbf{A}$ *przez zastąpienie* $k-$*tej kolumny kolumną wyrazów wolnych* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *układu.*

Twierdzenie 4.8 *Jeżeli* $D = 0$ *i co najmniej jedna z liczb* $D_1, D_2, \ldots, D_n$ *nie jest zerem, to układ Cramera (188) dla* $m = n$ *jest sprzeczny.*

Twierdzenie 4.9 *Jeżeli* $D = 0$ *oraz* $D_1 = D_2 = \ldots = D_n = 0$*, to układ Cramera (188) dla* $m = n$ *jest nieoznaczony lub sprzeczny.*

Zapisując układ (188) w postaci (189)

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{194}$$

rozwiązanie układu Cramera można otrzymać z wzoru

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \tag{195}$$

Przy czym:

1. Rozwiązanie układu (188) w przypadku, gdy jest to układ oznaczony i $m > n$ otrzymujemy w ten sposób, że odrzucamy $m - n$ równań tak, żeby zredukowany układ był układem Cramera. Znajdujemy rozwiązanie zredukowanego układu i to rozwiązanie jest w przypadku

   $$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}|\,\mathbf{b}) = n$$

   rozwiązaniem całego układu (188).

2. Jeżeli układ Cramera (188) jest nieoznaczony, $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}|\,\mathbf{b}) = r$, to odrzucamy $m-r$ równań, a w pozostałych równaniach przenosimy na prawą stronę $n-r$ niewiadomych tak, żeby macierz zredukowanego i przekształconego układu była nieosobliwa. Za niewiadome po prawej stronie układu obieramy parametry $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Przykładowa postać takiego układu jest następująca

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1r}x_r & = & b_1 & - & a_{1r+1}t_1 & +\ldots- & a_{1n}t_k \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2r}x_r & = & b_2 & - & a_{2r+1}t_1 & +\ldots- & a_{2n}t_k \\ \ldots & & \ldots & \ddots & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_{r1}x_1 & + & a_{r2}x_2 & +\ldots+ & a_{rr}x_r & = & b_r & - & a_{rr+1}t_1 & +\ldots- & a_{rn}t_k \end{array}\right. \tag{196}$$

Przykład 4.8 *Rozwiązać układ równań*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}\right. \tag{197}$$

Rozwiązanie 4.8 *Sprawdzamy, czy układ (197) jest układem Cramera. W tym celu obliczamy wyznacznik macierzy układu*

$$\det\mathbf{A} = \left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right|\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} = 4$$

A więc, $\det\mathbf{A} \neq 0$. *Układ (197) jest układem Cramera. Posiada jedno rozwiązanie definiowane wzorami*

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad , \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad , \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \tag{198}$$

gdzie: $D = \det\mathbf{A}$, *natomiast* D_1, D_2, D_3 *są równe*

$$D_1 = \left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right| = 4 \quad , \quad D_2 = \left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right| = 4 \quad , \quad D_3 = \left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right| = 4$$

Zatem $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$. *Jedynym rozwiązaniem układu (197) jest* $(1, 1, 1)$.

Przykład 4.9 *Rozwiązać układ równań*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & - & 3x_5 & = & 1 \end{array}\right. \tag{199}$$

Rozwiązanie 4.9 *Obliczamy* $\operatorname{rank}(\mathbf{A})$ *i* $\operatorname{rank}(\mathbf{C})$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C} \quad &= \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -3 & \vdots & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot \\ w_2 - w_1 \\ w_3 - w_1 \end{array} \stackrel{R}{=} \\
&\stackrel{R}{=} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & \vdots & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ w_3 - 2w_2 \end{array} \stackrel{R}{=} \\
&\stackrel{R}{=} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \frac{1}{2} w_2 \\ \\ \end{array} \stackrel{R}{=} \\
&\stackrel{R}{=} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ w_1 + w_2 \\ \\ \end{array} \stackrel{R}{=} \\
&\stackrel{R}{=} \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

Widzimy, że każdy minor stopnia 3 *macierzy* $\mathbf{C}$ *jest równy* 0, *a wyznaczniki*

$$
M_{2A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad i \quad M_{2C} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1
$$

A więc $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{C}) = 2$. *Układ (199) jest nieoznaczony, a zbiór rozwiązań jest zależny od* $n - R(\mathbf{C}) = 5 - 2 = 3$ *parametrów. Jako zmienne bazowe przyjmiemy* x_3 *i* x_4, *ponieważ występują one w minorze* $M_{2A} \neq 0$. *Jako parametry przyjmiemy* x_1, x_2 *i* x_5 *(leżą one poza minorem bazowym). Z układu (199) dochodzimy do układu Cramera (patrz macierz* $\mathbf{C}$*)*

$$
\begin{aligned}
x_3 &= -x_1 + x_2 + 1 \\
x_4 &= x_5
\end{aligned}
\tag{200}
$$

i wstawiamy

$$
x_1 = t_1 \qquad x_2 = t_2 \qquad x_5 = t_3 \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{R}
$$

stąd

$$
\begin{aligned}
x_3 &= -t_1 + t_2 + 1 \\
x_4 &= t_3
\end{aligned}
$$

Ostateczne rozwiązanie układu (199) jest następujące: $(t_1, t_2, -t_1 + t_2 + 1, t_3, t_3)$.

Przykład 4.10 *Rozwiazać za pomocą wyznaczników układ równań*

$$
\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & - & 5z & = & 0 \\ 3x & + & 4y & - & 2z & = & 11 \\ 3x & - & 2y & + & 4z & = & 11 \end{array} \right.
\tag{201}
$$

Rozwiązanie 4.10 *Obliczamy wyznacznik układu*

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 132$$

Układ jest układem Cramera, gdyż $D \neq 0$. *Obliczamy wartości wyznaczników* D_1, D_2 *i* D_3. *Mamy*

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 396 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 132 \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 132$$

Rozwiązaniem są liczby $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 1$.

Przykład 4.11 *Rozwiązać układ równań*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 10x & - & 2y & + & 8z & = & 1 \\ 5x & + & y & - & 8z & = & 0 \\ 15x & - & y & & & = & 0 \end{array} \right. \tag{202}$$

za pomocą wyznaczników.

Rozwiązanie 4.11 *Stwierdzamy, że* $D = 0$, *ale* $D_1 = -8 \neq 0$. *Oznacza to, że układ (202) jest sprzeczny.*

Przykład 4.12 *Rozwiązać układ równań*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ 4x & - & y & + & 3z & = & 1 \end{array} \right. \tag{203}$$

Rozwiązanie 4.12 *Stwierdzamy, że* $D = 0$ *oraz* $D_1 = D_2 = D_3 = 0$. *A więc układ (203) jest albo nieoznaczony albo sprzeczny. Aby określić typ układu opuścimy (na razie) trzecie równanie i rozwiążemy układ z parametrem*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 1 - z \\ x & - & y & = & -z \end{array} \right. \tag{204}$$

Jego rozwiązaniem są liczby

$$x = \frac{1 - 2z}{3} \quad y = \frac{1 + z}{3} \quad z\text{– dowolne} \tag{205}$$

Podstawiając je do trzeciego równania otrzymujemy

$$\frac{4}{3}(1 - 2z) - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}z + 3z = \frac{4}{3} - \frac{8}{3}z - \frac{1}{3} - \frac{8}{3}z = 1$$

A więc (205) spełniają również trzecie równanie. Są rozwiązaniem układu (204). Układ jest układem nieoznaczonym.

Przykład 4.13 *Rozwiązać układ równań*

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right. \tag{206}$$

Rozwiązanie 4.13 *Obliczamy wyznaczniki* D, D_1, D_2, D_3. *Są one wszystkie równe* 0. $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$. *Mamy ponownie układ sprzeczny lub nieoznaczony. Odejmując równanie trzecie od pierwszego otrzymujemy, że* $0 = 1$. *A więc układ (206) jest sprzeczny.*

4.10 Uwarunkowanie macierzy

Przy rozwiązywaniu układu równań

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{207}$$

istotne znaczenie ma tzw. **wskaźnik uwarunkowania macierzy A**.

Twierdzenie 4.10 *Jeżeli* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *są wartościami własnymi macierzy* $\mathbf{A}$ *i* $\lambda_1 < \lambda_2 \ldots < \lambda_n$*, to liczbę*

$$\mathrm{cond}(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \tag{208}$$

nazywamy wskaźnikiem uwarunkowania macierzy $\mathbf{A}$ *ze względu na zaburzenie prawej strony* $\mathbf{b}$*. Wartość* $\mathrm{cond}(\mathbf{A})$ *charakteryzuje również wrażliwość rozwiązania układu (207) na zaburzenia macierzy* $\mathbf{A}$*.*

Jeżeli $\mathrm{cond}(\mathbf{A})$ jest **duży**, to mówimy, że macierz $\mathbf{A}$ jest **źle uwarunkowana**. W takich przypadkach rozwiązania zagadnienia (207) są bardzo **czułe** na zaburzenia prawych stron.

Przykład 4.14 *Niech*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix}$$

Należy rozwiązać układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *dla prawych stron odpowiednio równych:* $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0002 \end{bmatrix}$ *i* $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0003 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie 4.14 *Przybliżone wartości własne macierzy* $\mathbf{A}$ *są równe* $\lambda_1 = 4.9999 \times 10^{-5}$ *i* $\lambda_2 = 2.0001$*, a wskaźnik uwarunkowania macierzy* $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) = 40002$*. Wartość ta sugeruje, że* $\mathbf{A}$ *jest źle uwarunkowana. Czy rzeczywiście tak jest? Otóż:*

1. *Dla* $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix}$ *konstruujemy układ równań*

$$\begin{array}{ccrl} x & + & y & = 2 \\ x & + & 1.0001y & = 2.0001 \end{array}$$

Jego rozwiązaniami są wartości: $\{x = 1.0;\ y = 1.0\}$*.*

2. *Rozwiążmy ten sam układ z nieznacznie zaburzoną prawą stroną (często nazywaną warunkiem początkowym). Dla* $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0002 \end{bmatrix}$ *mamy*

$$\begin{array}{ccrl} x & + & y & = 2 \\ x & + & 1.0001y & = 2.0002 \end{array}$$

Rozwiązaniami są liczby: $\{x = 0;\ y = 2.0\}$*. Wyraźnie inne niż w poprzednim przypadku.*

3. *Natomiast dla* $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0003 \end{bmatrix}$ *otrzymujemy*

$$\begin{array}{ccrl} x & + & y & = 2 \\ x & + & 1.0001y & = 2.0003 \end{array}$$

Powyższy układ ma rozwiązania: $\{x = -1.0;\ y = 3.0\}$*. Jak widzimy, jeszcze inne.*

Wniosek 4.1 *Układy równań ze źle uwarunkowanymi macierzami są zagadnieniami niepoprawnie postawionymi.*

Wniosek 4.2 *Mówimy, że zagadnienie jest poprawnie postawione, jeżeli małym zmianom warunków początkowych (prawym stronom) odpowiadają małe zmiany rozwiązania.*

Przykład 4.15 *Niech*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Należy rozwiązać układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *dla prawych stron z poprzedniego przykładu.*

Rozwiązanie 4.15 *Przybliżone wartości własne macierzy* $\mathbf{A}$ *są równe* $\lambda_1 = -0.61796$, $\lambda_2 = 1.6181$, *a wskaźnik uwarunkowania macierzy* $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) = 2.6184$. *Może to oznaczać, że macierz* $\mathbf{A}$ *jest dobrze uwarunkowana. Sprawdzimy to.*

1. *Dla* $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix}$ *rozwiązaniem układu*

$$\begin{aligned} 0.0001x \quad &+y = 2 \\ x \quad &+y = 2.0001 \end{aligned}$$

są liczby $\{y = 2.0;\ x = 1.0001 \times 10^{-4}\}$.

2. *Dla* $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0002 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} 0.0001x \quad &+y = 2 \\ x \quad &+y = 2.0002 \end{aligned}$$

liczby $\{y = 2.0;\ x = 2.0002 \times 10^{-4}\}$.

3. *Dla* $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0003 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} 0.0001x \quad &+y = 2 \\ x \quad &+y = 2.0003 \end{aligned}$$

rozwiązaniami są $\{y = 2.0;\ x = 3.0003 \times 10^{-4}\}$.

Analizując powyższe przykłady możemy jednoznacznie stwierdzić, że wskaźnik uwarunkowania macierzy wpływa w sposób decydujący na dokładność rozwiązania układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Poniżej przedstawiamy przykłady dowolnie wybranych macierzy i ich wskaźniki uwarunkowania:

$$\mathrm{cond}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1.0 \qquad \mathrm{cond}\begin{bmatrix} 21 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = 8.0832$$

$$\mathrm{cond}\begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} = 6.4459 \times 10^{-5} \qquad \mathrm{cond}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.000001 \end{bmatrix} = 4.0 \times 10^{6}$$

4.11 Układy jednorodne

Definicja 4.3 *Układem jednorodnym n równań liniowych o n niewiadomych nazywamy układ*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \dots & & \dots & & \ddots & & \dots & & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array}\right. \tag{209}$$

Definicja 4.4 *Układ jednorodny ma zawsze rozwiązanie zerowe*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \tag{210}$$

Istnienie rozwiązań niezerowych zależy od wyznacznika układu

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{211}$$

Twierdzenie 4.11 *Układ jednorodny (209) o wyznaczniku różnym od zera*

$$D \neq 0$$

ma jedynie zerowe rozwiązanie.

Dowód 4.1 *W przypadku $D \neq 0$ istnieje jedno rozwiązanie. Jest ono dane wzorami Cramera. Ponieważ wszystkie wyrazy wolne są zerami, to wyznaczniki $D_1, D_2, \ldots, D_n$ zawierają kolumnę zerową. Ich wartość jest więc równa 0.*

Twierdzenie 4.12 *Układ jednorodny (209) o wyznaczniku równym zero*

$$D = 0$$

ma, oprócz rozwiązań zerowych, nieskończenie wiele rozwiązań niezerowych. Rozwiązanie ogólne jest zależne od $n - r$ parametrów, gdzie n jest liczbą niewiadomych, a $r-$ rzędem macierzy współczynników.

Przykład 4.16 *Rozwiązać układ równań*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 4x & + & y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right. \tag{212}$$

Rozwiązanie 4.16 *Wyznacznik macierzy układu*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

jest równy 6. Ponieważ jest różny od zera, to układ (212) ma jedynie rozwiązania zerowe: $x = y = z = 0$.

Przykład 4.17 *Rozwiązać układ równań*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ 5x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \tag{213}$$

Rozwiązanie 4.17 *Określamy macierz* **A** *układu i obliczamy jej wyznacznik*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Ponieważ $D = 0$*, to istnieją rozwiązania niezerowe. Aby je wyznaczyć wyodrębniamy z* **A** *tzw. macierz bazową, której wyznacznik jest różny od zera. Może nią być macierz*

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \tag{214}$$

Konstruujemy układ równań z parametrem z:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & -z \\ 3x & + & 2y & = & 2z \end{array}\right. \tag{215}$$

Jego rozwiązaniem są liczby $x = \frac{4}{13}z, \quad y = \frac{7}{13}z, \quad z-$ *dowolne.*

5 Algebra liniowa

5.1 Definicja przestrzeni wektorowej

Niech będzie dany niepusty zbiór X o elementach $a, b, c, \ldots, u, v, w, x, y, \ldots$ oraz zbiór liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$ o elementach $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

Definicja 5.1 ***Przestrzenią wektorową*** *X nad ciałem K liczb rzeczywistych ($K = \mathcal{R}$) nazywamy niepusty zbiór V, którego elementy nazywamy* ***wektorami*** *i w którym są zdefiniowane dwie operacje:* ***dodawanie*** *i* ***mnożenie****, spełniające następujące własności:*

1. *dodawanie jest przemienne i łączne*

$$\begin{array}{ll} x + y = y + x & \text{- przemienność} \\ (x + y) + z = x + (y + z) & \text{- łączność} \end{array} \tag{216}$$

2. *istnieje* ***element zerowy*** $\mathbf{0} \in V$*, nazywany* ***wektorem zerowym****, taki, że* $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ *dla każdego* $\mathbf{v} \in V$[12]*,*

3. $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$*, gdzie 1 i 0 są odpowiednio* ***jednością*** *i* ***zerem*** *ciała K liczb rzeczywistych,*

4. *dla każdego elementu* $\mathbf{v} \in V$ *istnieje* ***element przeciwny*** $-\mathbf{v}$ *zawarty w V taki, że* $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$*,*

5. *rozdzielność mnożenia względem dodawania*

$$\begin{array}{ll} \forall \alpha \in K,\ \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V & \alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w} \\ \forall \alpha, \beta \in K,\ \forall \mathbf{v} \in V & (\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v} \end{array} \tag{217}$$

6. *łączność mnożenia skalarnego wektora przez liczby*

$$\forall \alpha, \beta \in K,\ \forall \mathbf{v} \in V \quad (\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v}) \tag{218}$$

Definicja 5.2 *Element $0 \cdot \mathbf{x}$ nazywamy* ***elementem zerowym*** *i oznaczamy symbolem $\mathbf{\Theta}$, tzn.* $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{\Theta}$.

Twierdzenie 5.1 *W przestrzeni wektorowej X istnieje dokładnie jeden element zerowy $\mathbf{\Theta}$.*

Zbiór V z działaniami $+$ i $\cdot$ nazywamy również **przestrzenią liniową** i oznaczamy $< V, +, \cdot >$. A więc przestrzeń wektorowa jest przykładem przestrzeni liniowej.

Przykładami przestrzeni wektorowych są:

- $V = \mathcal{R}^n$: $n-$wymiarowy zbiór liczb rzeczywistych, $n \geq 1$,
- $V = \mathcal{P}_n$: zbiór wielomianów $p_n(x) = \Sigma_{k=0}^{n} a_k x^k$ stopnia mniejszego lub równego n, $n \geq 0$, o współczynnikach a_k rzeczywistych,

[12] Element zerowy jest również oznaczany przez $\mathbf{\Theta}$.

- $V = C^p([a,b])$: zbiór funkcji zmiennej rzeczywistej, ciągłych na $[a,b]$ wraz z pochodnymi do rzędu p włącznie, $0 \leq p \leq \infty$.

Wniosek 5.1 *Układ $(X, \mathcal{R}, +, \cdot)$ złożony ze zbioru X, który jest zbiorem wektorów odpowiednio na prostej $\mathcal{R}$, na płaszczyźnie $\mathcal{R}^2$ i w przestrzeni $\mathcal{R}^3$; ciała liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$ oraz dwóch działań "+- dodawania wektorów i mnożenia "$\cdot$ "wektora przez skalar tworzy przestrzeń wektorową.*

Wniosek 5.2 *Dla dowolnej liczby całkowitej p przestrzeń $C^p([a,b])$ jest przestrzenią nieskończenie wymiarową. Przestrzeń $\mathcal{R}^n$ ma wymiar równy n, jest więc przestrzenią $n-$wymiarową.*

5.2 Liniowa zależność i niezależność układu wektorów

Definicja 5.3 *Niech w przestrzeni wektorowej X nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$ będzie dany ciąg $n-$wektorów (układ wektorów)*

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) \quad \mathbf{x}_j \in X \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{219}$$

oraz niech będzie dany ciąg n liczb z ciała $\mathcal{R}$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \quad \alpha_j \in \mathcal{R} \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{220}$$

wówczas wektor $\mathbf{w}$ określony wzorem

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{x}_j \tag{221}$$

*nazywamy **kombinacją liniową** układu **wektorów** (219). Zbiór wszystkich kombinacji liniowych (221) układu wektorów (219) nazywamy **powłoką liniową** rozpiętą na układzie (219), co oznaczamy*

$$\operatorname{lin}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = \left\{ \mathbf{w} \in X; \quad \mathbf{w} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{x}_j, \quad \alpha_j \in \mathcal{R} \right\} \tag{222}$$

Przykład 5.1 *W przestrzeni wektorowej wyznaczyć powłokę liniową generowaną przez układ wektorów będących rozwiązaniem fundamentalnym jednorodnego układu równań liniowych*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = 0 \end{array} \right. \tag{223}$$

Rozwiązanie 5.1 *Macierz układu równań (223) ma postać*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \tag{224}$$

Stosując przekształcenia elementarne macierz $\mathbf{A}$ zapiszemy w postaci równoważnej

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \end{array} \right] \tag{225}$$

Macierz $\mathbf{A}$ *ma rząd równy* $R(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}\mathbf{A} = 2$. *Zatem mamy* $n - R(\mathbf{A}) = 4 - 2 = 2$ *rozwiązania fundamentalne. Zapisując układ równań (223) w postaci równoważnej (225) otrzymujemy*

$$\begin{cases} x_1 = 5x_3 + 9x_4 \\ x_2 = 7x_3 + 14x_4 \end{cases}$$

Stąd kolejno dla:

$$\begin{array}{lll} 1^\circ & x_3 = 1, x_4 = 0 & x_1 = 5, \quad x_2 = 7 \\ 2^\circ & x_3 = 0, x_4 = 1 & x_1 = 9, \quad x_2 = 14 \end{array}$$

A więc: $\mathbf{v}_1 = [5, 7, 1, 0]^T$, $\mathbf{v}_2 = [9, 14, 0, 1]^T$. *Wobec tego mamy* $\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2$

$$W = \operatorname{lin}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 5\alpha_1 + 9\alpha_2 \\ 7\alpha_1 + 14\alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} ; \ \alpha_j \in \mathcal{R}, \ j = 1, 2 \right\}$$

Definicja 5.4 *Układ wektorów* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *przestrzeni wektorowej* V *nazywamy* ***liniowo niezależnym****, jeżeli z relacji*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{\Theta} \tag{226}$$

dla $\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n \in K$ *wynika, że* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. *W przypadku, gdy chociaż jeden współczynnik* α_i *jest różny od zera, układ nazywamy* ***układem liniowo zależnym****.*

Jeżeli istnieją takie liczby $\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n \in K$ **nie wszystkie równe zero**, że $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{\Theta}$, to wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_n$ są **liniowo zależne**.

Jeżeli wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_n$ są liniowo niezależne, to wektor $\mathbf{v}$ można przedstawić w postaci $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$ wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}$ są liniowo zależne.

Definicja 5.5 *Każdy układ liniowo niezależnych wektorów przestrzeni wektorowej* V *nazywamy* ***bazą*** *tej przestrzeni.*

Definicja 5.6 *Niech będzie dana macierz* $\mathbf{A}$ *rzędu* $R(\mathbf{A})$, $R > 0$. *W macierzy tej istnieje co najmniej jedna podmacierz kwadratowa stopnia* R, *o wyznaczniku różnym od zera. Nazywamy ją* ***macierzą bazową****. Jej wyznacznik nazywamy* ***minorem bazowym****. Jest to minor niezerowy. Wiersze i kolumny, w których leży ta macierz, nazywamy bazowymi, pozostałe wiersze i kolumny nazywamy niebazowymi.*

W przestrzeni $\mathcal{R}^n$ istnieją układy n wektorów liniowo niezależnych (baza przestrzeni), a każdy układ $n+1$ wektorów jest liniowo zależny. Najprostszą bazą przestrzeni $\mathcal{R}^n$ jest układ n wektorów w postaci:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots \qquad \mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 5.2 *Wykazać, że w przestrzeni $\mathcal{R}^3$ każde 4 wektory są liniowo zależne.*

Rozwiązanie 5.2 *Mamy pokazać, że jeżeli*

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$$

to istnieją takie α_1, α_2, α_3, α_4 nie wszystkie równe zero, że $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3\mathbf{x}_3 + \alpha_4\mathbf{x}_4 = \mathbf{\Theta}$ $\left(\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$. Otrzymujemy stąd układ równań

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + a_{14}\alpha_4 = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + a_{24}\alpha_4 = 0 \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + a_{34}\alpha_4 = 0 \end{cases} \tag{227}$$

i należy wykazać, że posiada on co najmniej jedno rozwiązanie niezerowe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.

Łatwo zauważyć, że $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{C}) \leq 3$, a ponieważ liczba niewiadomych wynosi 4, więc zbiór rozwiązań układu (227) jest co najmniej jednoparametrową rodziną, czyli oprócz rozwiązania $(0, 0, 0, 0)$ zawiera jeszcze inne rozwiązania.

Przykład 5.3 *Wyznaczyć macierz bazową macierzy*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie 5.3 *Rząd macierzy $\mathbf{A}$ jest równy 2, ponieważ wszystkie minory trzeciego stopnia są równe zeru. Wśród minorów stopnia drugiego istnieją niezerowe*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \textit{lub} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \textit{lub} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Bazą może więc być, na przykład, macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Definicja 5.7 *Jeżeli układ $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \ldots, \mathbf{u}_n\}$ jest bazą przestrzeni wektorowej V, to wyrażenie $\mathbf{v} = v_1\mathbf{u}_1 + v_2\mathbf{u}_2 + \cdots + v_n\mathbf{u}_n$ nazywamy rozkładem wektora $\mathbf{v}$ w tej bazie, a liczby $v_1, v_2, \ldots, v_n \in K$ nazywamy współrzędnymi wektora $\mathbf{v}$ w bazie $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \ldots, \mathbf{u}_n\}$.*

Twierdzenie 5.2 *Jeżeli liczba wierszy macierzy jest większa od rzędu macierzy, to każdy wiersz niebazowy jest liniową kombinacją wierszy bazowych.*

Twierdzenie 5.3 *Jeżeli liczba kolumn macierzy jest większa od rzędu macierzy, to każda kolumna niebazowa jest liniową kombinacją kolumn bazowych.*

Twierdzenie 5.4 *Każda przestrzeń wektorowa X nad ciałem $\mathcal{R}$ posiada bazę.*

Własność 5.1 *Niech bazą przestrzeni wektorowej V będzie n wektorów. Każdy układ liniowo niezależnych wektorów przestrzeni V zawiera co najwyżej n elementów. Liczbę n nazywamy* ***wymiarem przestrzeni wektorowej*** *V i oznaczamy $\dim(V) = n$.*

Własność 5.2 *Jeżeli dla każdego n zawsze istnieje n liniowo niezależnych wektorów przestrzeni V, to taką przestrzeń wektorową nazywamy przestrzenią nieskończenie wymiarową.*

Przykład 5.4 *Wykazać, że wektory*

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

są liniowo niezależne i przedstawić wektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *w postaci* $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3\mathbf{x}_3$.

Rozwiązanie 5.4 *Do wykazania liniowej niezależńości wektorów $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ wystarczy stwierdzić, że układ równań*

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \tag{228}$$

posiada jedynie rozwiązanie zerowe $(0, 0, 0)$. Tak jest istotnie, gdyż wyznacznik $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$, *a więc układ (228) jest układem Cramera.*

Aby otrzymać α_1, α_2, α_3 takie, że $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3\mathbf{x}_3$ należy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = -1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

Jego rozwiązaniem jest trójka liczb $(0, 1, -2)$. Stąd $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_3$.

Przykład 5.5 *Wykazać, że w przestrzeni $\mathcal{R}^4$ układ wektorów*

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

jest liniowo niezależny.

Rozwiązanie 5.5 *Pokażemy, że układ równań*

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

ma zerowe rozwiązanie. W tym celu przy pomocy przekształceń (operacji) elementarnych przekształcimy macierz $\mathbf{A}$ *powyższego układu równań do równoważnej postaci. Mamy więc:*

1. *wiersz pierwszy mnożymy przez* (-2) *i dodajemy do wiersza drugiego, następnie wiersz pierwszy mnożymy przez* (-1) *i dodajemy do trzeciego*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

2. *wiersz pierwszy mnożymy przez* (2), *trzeci przez* (2) *i dodajemy do wiersza czwartego*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. *wiersz trzeci mnożymy przez* (-1) *i dodajemy do pierwszego*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. *wiersz drugi mnożymy przez* (3) *i dodajemy do wiersza pierwszego, w wiersz drugi mnożymy przez* (-1) *i dodajemy do wiersza trzeciego*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. *wiersz drugi mnożymy przez* (-1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy zatem układ $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0$. *Wobec tego układ wektorów* $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ *jest liniowo niezależny.*

Przykład 5.6 *W przestrzeni wektorowej* $\mathcal{R}^3$ *wyznaczyć bazę podprzestrzeni* V *rozpiętej na wektorach*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie 5.6 *Wystarczy zbadać liniową zależność układu wektorów* $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. *W tym celu badamy za pomocą przekształceń elementarnych rząd macierzy* $\mathbf{A}$ *utworzonej z wektorów* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. *Otrzymujemy*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Stąd $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 2$. *Bazę przestrzeni* V *stanowią na przykład wektory* $\mathbf{v}_1$ *i* $\mathbf{v}_2$. *Zatem* $V = \operatorname{lin}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

Przykład 5.7 *W przestrzeni wektorowej* $\mathcal{R}^5$ *znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni* V *generowanej układem równań*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & = 0 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & - & 3x_5 & = 0 \\ & & & & 2x_3 & - & 2x_4 & - & 6x_5 & = 0 \end{array} \right. \tag{229}$$

Rozwiązanie 5.7 *Bazą podprzestrzeni* V *są wektory stanowiące fundamentalny układ rozwiązań układu równań (229). Fundamentalny układ rozwiązań wyznaczamy stosując przekształcenia elementarne macierzy* $\mathbf{A}$ *układu (229). W ich wyniku otrzymujemy*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} \frac{9}{4} & \frac{6}{4} & 2 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{2}{4} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \tag{230}$$

A więc rząd macierzy $\mathbf{A}$ *wynosi* $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 2$. *Zatem mamy* $n - \operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 5 - 2 = 3$ *wektory stanowiące fundamentalny układ rozwiązań. Aby je wyznaczyć zapiszemy układ równań (229) w postaci uwzględniającej prawą stronę (230):*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrl} \frac{9}{4}x_1 & + & \frac{6}{4}x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & = 0 \\ -\frac{3}{4}x_1 & - & \frac{2}{4}x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_4 & = & -\frac{9}{4}x_1 & - & \frac{6}{4}x_2 & - & 2x_3 \\ x_5 & = & \frac{3}{4}x_1 & + & \frac{2}{4}x_2 & + & x_3 \end{array} \right.$$

Stąd odpowiednio dla

$$\begin{array}{llllll} a) & x_1 = 1, & x_2 = 0, & x_3 = 0, & x_4 = -\frac{9}{4}, & x_5 = \frac{3}{4} \\ b) & x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = 0, & x_4 = -\frac{3}{2}, & x_5 = \frac{2}{4} \\ c) & x_1 = 0, & x_2 = 0, & x_3 = 1, & x_4 = -2, & x_5 = 1 \end{array}$$

otrzymujemy układ wektorów

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{9}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{2}{4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

które stanowią bazę podprzestrzeni V. *Zatem* $\dim V = 3$.

5.3 Macierz przejścia. Zmiana współrzędnych wektora przy zmianie bazy.

Definicja 5.8 *Niech w $n-$wymiarowej przestrzeni wektorowej X nad ciałem $\mathcal{R}$ będą dane dwie bazy*

$$\mathbf{S} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) - \ \textit{stara} \qquad \mathbf{N} = (\mathbf{v}_{1'}, \mathbf{v}_{2'}, \ldots, \mathbf{v}_{n'}) - \ \textit{nowa} \tag{231}$$

Jeżeli wektory $\mathbf{v}_{1'}, \mathbf{v}_{2'}, \ldots, \mathbf{v}_{n'}$ wyrażają się w bazie $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ wzorami

$$\begin{cases} v_{1'} = & p_{11'}v_1 + p_{21'}v_2 + \cdots + p_{n1'}v_n \\ v_{2'} = & p_{12'}v_1 + p_{22'}v_2 + \cdots + p_{n2'}v_n \\ \ldots & \ldots \\ v_{n'} = & p_{1n'}v_1 + p_{2n'}v_2 + \cdots + p_{nn'}v_n \end{cases} \tag{232}$$

*to macierz $\mathbf{P} = [p_{jj'}]$ nazywamy **macierzą przejścia** od bazy $\mathbf{S}$ do bazy $\mathbf{N}$ (od bazy starej do bazy nowej). Ostatnie wzory można zapisać w postaci macierzowej*

$$\mathbf{N} = \mathbf{SP} \quad \textit{stąd} \quad \mathbf{P} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{N} \tag{233}$$

lub w postaci indeksowanej z wykorzystaniem konwencji sumacyjnej Einsteina (sumowanie po powtarzających się indeksach od 1 do n)

$$v_{j'} = p_{jj'}v_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{234}$$

A ponieważ macierz $\mathbf{P}$ jest nieosobliwa, to mamy

$$\mathbf{S} = \mathbf{NP}^{-1} \tag{235}$$

lub

$$v_j = p_{j'j}v_{j'} \tag{236}$$

*Macierz $\mathbf{P}^{-1}$ nazywamy **macierzą przejścia** od bazy $\mathbf{N}$ do bazy $\mathbf{S}$ (od bazy nowej do bazy starej).*

Przykład 5.8 *W przestrzeni $\mathcal{R}^4$ dane są dwie bazy*

$$\mathbf{S} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4): \qquad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4): \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz przejścia z bazy $\mathbf{S}$ do bazy $\mathbf{N}$.

Rozwiązanie 5.8 *Macierze $\mathbf{S}$ i $\mathbf{N}$ mają postać*

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{237}$$

Biorąc pod uwagę wzór (235) $\mathbf{S} = \mathbf{N}\mathbf{P}^{-1}$ *mamy* $\mathbf{N}^{-1}\mathbf{S} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}$. *Stąd*

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{S} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 4 & -6 & -8 & 11 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ -3 & -2 & -7 & 8 \\ -1 & 8 & 2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{238}$$

Czyli

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Stąd

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}$ *i* $\mathbf{x}'$ *mamy*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} \quad \textit{oraz} \quad \mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}' \tag{239}$$

$$\textit{gdzie} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \xi_{1'} \\ \xi_{2'} \\ \xi_{3'} \\ \xi_{4'} \end{bmatrix} \tag{240}$$

6 Wektory w przestrzeni $\mathcal{R}^3$

6.1 Skalary i wektory

Wielkość fizyczną, którą możemy wyrazić za pomocą jednej liczby nazywamy **skalarem**, czyli **wielkością bezkierunkową**. Skalarem jest masa, temperatura, czas, praca. Jeżeli do określenia pewnej wielkości fizycznej nie wystarcza jej miara liczbowa, lecz trzeba podać kierunek i zwrot, to mówimy, że jest to **wielkość kierunkowa.** Przykładami wielkości kierunkowych są prędkość, przyspieszenie, siła. Wielkości kierunkowe przedstawia się za pomocą **wektorów** (odcinków skierowanych), a związki między tymi wielkościami za pomocą działań na wektorach. Mogą one być wykonywane metodą wykreślną lub rachunkową. Z metody wykreślnej korzysta się głównie wtedy, gdy rozważane wektory leżą w jednej płaszczyźnie. Metoda rachunkowa (analityczna) polega na wprowadzeniu odpowiedniego układu współrzędnych i wyrażeniu każdego wektora przestrzeni za pomocą trójki liczb (zwanych współrzędnymi wektora) i zamiast działań geometrycznych na wektorach wykonujemy odpowiednie działania rachunkowe na ich współrzędnych. Następnie z otrzymanych wyników odczytujemy treść geometryczną.

Definicja 6.1 *(Wektora)*
Wektorem *nazywamy uporządkowaną parę punktów. Pierwszy z tych punktów nazywamy* ***początkiem*** *wektora albo* ***punktem zaczepienia*** *wektora, a drugi -* ***końcem*** *wektora. Wektor o początku A i końcu B oznaczamy $\overrightarrow{AB}$ i przedstawiamy na rysunku w postaci odcinka AB zakończonego w punkcie B grotem strzałki.* ***Wektorem zerowym*** *nazywamy wektor, którego początek i koniec pokrywają się. Wektor zerowy oznaczamy zerem:* $\mathbf{0}$.

Definicja 6.2 *(Modułu wektora)*
Modułem *(czyli długością)* ***wektora*** *nazywamy długość odcinka czącego początek wektora z jego końcem. Moduł wektora zerowego jest zerem. Moduł wektora niezerowego jest liczbą dodatnią. Moduł wektora $\overrightarrow{AB}$ oznaczamy*

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| \quad lub \quad AB \tag{241}$$

Często oznaczamy wektor jedną literą: w pismie ręcznym literą ze strzałką, np. $\vec{v}$, w druku literą pogrubioną $\mathbf{v}$. Wówczas moduł wektora oznaczamy

$$|\vec{v}| \quad \text{lub} \quad |\mathbf{v}| \quad \text{lub} \quad v \tag{242}$$

Linia działania wektora
Jeżeli punkty A, B leżą na prostej l, to mówimy, że wektor $\overrightarrow{AB}$ leży na prostej l i że prosta l jest **linią działania** wektora $\overrightarrow{AB}$.

6.1.1 Równoległość i prostopadłość wektorów

Podamy twierdzenie:

Twierdzenie 6.1 *Dwa wektory niezerowe nazywamy* ***równoległymi****, jeżeli linie działania tych wektorów są równoległe.*

Relację tę oznaczamy znakiem $\|$. Jest ona

- zwrotna:

$$\forall_{\mathbf{a}} \mathbf{a} \parallel \mathbf{a} \tag{243}$$

- symetryczna

$$\forall_{\mathbf{a}}\forall_{\mathbf{b}} (\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{b} \parallel \mathbf{a}) \tag{244}$$

- przechodnia (jeżeli wektor pośredniczący jest niezerowy):

$$\forall_{\mathbf{a}}\forall_{\mathbf{b}}\forall_{\mathbf{c}}((\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \wedge \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \wedge \mathbf{b} \parallel \mathbf{c}) \Rightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{c}) \tag{245}$$

Wektor zerowy jest równoległy do wektora niezerowego.

Twierdzenie 6.2 *Dwa wektory niezerowe nazywamy **prostopadłymi**, jeżeli linie działania tych wektorów są prostopadłe.*

Linie te mogą się przecinać lub nie mieć punktu wspólnego. Relację tę oznaczamy $\perp$. Jest ona symetryczna. Wektor zerowy jest prostopadły do wektora niezerowego.

6.1.2 Kierunek i zwrot wektora

Pojęcia te opisują definicje:

Definicja 6.3 ***Kierunkiem** wektora niezerowego nazywamy kierunek prostej, na której leży wektor.*

Definicja 6.4 ***Zwrotem** wektora niezerowego $\overrightarrow{AB}$ nazywamy ten zwrot prostej AB, w którym punkt A poprzedza punkt B.*

Dwa niezerowe wektory równoległe mają ten sam kierunek, ich zwroty mogą być zgodne lub przeciwne. Rozróżniamy więc: wektory zgodnie równoległe i wektory przeciwnie równoległe.

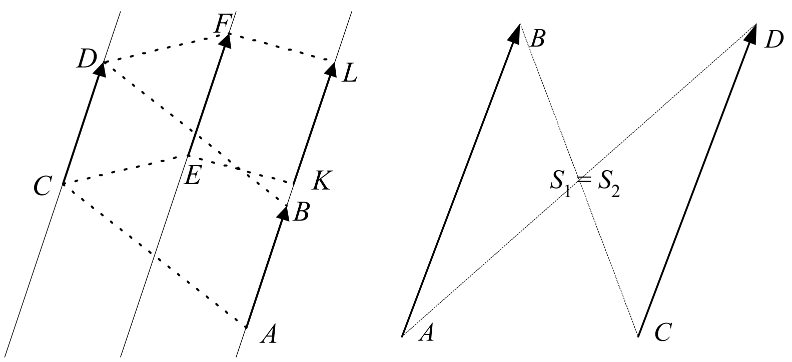
Wektor zerowy nie ma kierunku ani zwrotu.

Wniosek 6.1 *Wektor niezerowy jest określony, jeżeli znamy jego początek, kierunek, zwrot i moduł.*

6.1.3 Równość wektorów

Dwa wektory niezerowe nazywamy równymi, jeżeli mają ten sam kierunek, ten sam zwrot i równe moduły (rys. 14). Każde dwa wektory zerowe są równe.

Wektory **AB** i **CD** są równe wtedy i tylko wtedy, gdy środek S_1 odcinka AD pokrywa się ze środkiem S_2 odcinka BC. Termin **równość** w odniesieniu do wektorów nie oznacza identyczności, bowiem dwa wektory równe mogą mieć różne punkty zaczepienia, a wówczas nie są identyczne.

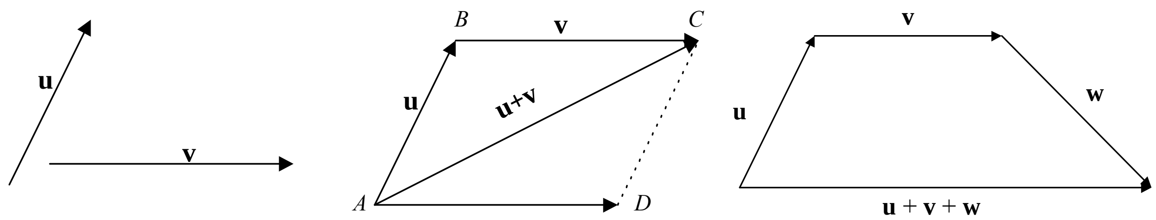


Rysunek 14: Wektory równe.

6.2 Dodawanie wektorów

Niech będą dane dwa wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Jeżeli w dowolnie obranym punkcie A zaczepimy wektor $\mathbf{AB} = \mathbf{u}$, a następnie w punkcie B zaczepimy wektor $\mathbf{BC} = \mathbf{v}$, to wektor $\mathbf{AC}$ nazywamy sumą wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ zaczepioną w punkcie A i piszemy

$$\mathbf{AC} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \tag{246}$$



Rysunek 15: Dodawanie wektorów. Suma trzech wektorów.

W mechanice dodawane wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ nazywamy **składowymi** lub **składnikami**, wynik dodawania $\mathbf{u}+\mathbf{v}-$ **wektorem wypadkowym**, figurę utworzoną z odcinków $AB, BC-$ **łańcuchem wektorów**, punkt $A-$ początkiem łańcucha, punkt $C-$ końcem łańcucha, a wektor $\mathbf{AC}-$ wektorem zamykającym.

Twierdzenie 6.3 *Suma dowolnych wektorów* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *zaczepiona w pewnym punkcie i suma tych samych wektorów zaczepiona w dowolnym innym punkcie są wektorami równymi. Mówimy więc, że suma wektorów nie zależy od jej punktu zaczepienia.*

Twierdzenie 6.4 *Dla dowolnych wektorów* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *zachodzi równość*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \tag{247}$$

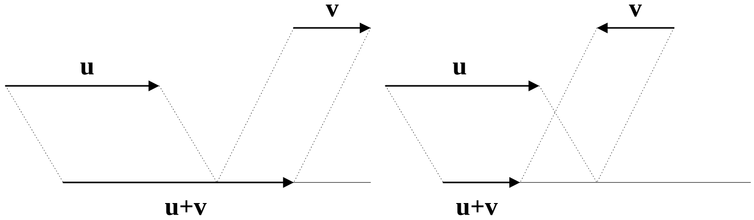
Dodawanie wektorów jest przemienne.

Twierdzenie 6.5 *Dla dowolnych trzech wektorów* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *zachodzi równość*

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \tag{248}$$

Dodawanie wektorów jest łączne.

Twierdzenie 6.6 *Suma wektorów równoległych jest wektorem równoległym do tych wektorów*



Rysunek 16: Suma wektorów równoległych.

6.2.1 Moduł sumy wektorów

Przedstawimy twierdzenia:

Twierdzenie 6.7 *Jeżeli dwa wektory są zgodnie równoległe (rys. 16), to moduł ich sumy równa się sumie modułów tych wektorów*

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \tag{249}$$

Twierdzenie 6.8 *Jeżeli dwa wektory są przeciwnie równoległe (rys. 16), to moduł ich sumy równa się modułowi różnicy moduw tych wektorów*

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = ||\mathbf{u}| - |\mathbf{v}|| \tag{250}$$

Twierdzenie 6.9 *Jeżeli dwa wektory są niezerowe i nierównoległe (patrz rys. 15), to moduł ich sumy jest mniejszy od sumy modułów tych wektorów, a większy od modułu różnicy modułów tych wektorów*

$$||\mathbf{u}| - |\mathbf{v}|| < |\mathbf{u} + \mathbf{v}| < |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \tag{251}$$

Wzór (251) nosi nazwę reguły (lub prawa) trójkąta.

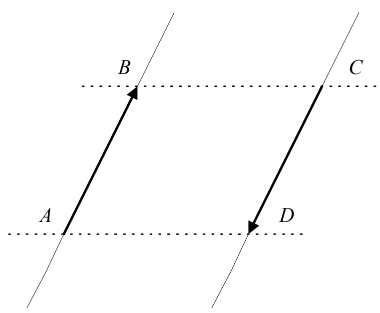
Twierdzenie 6.10 *Moduł sumy dowolnych dwóch wektorów jest nie większy od sumy modułów tych wektorów i nie mniejszy od modułu różnicy modułów tych wektorów*

$$||\mathbf{u}| - |\mathbf{v}|| \leq |\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \tag{252}$$

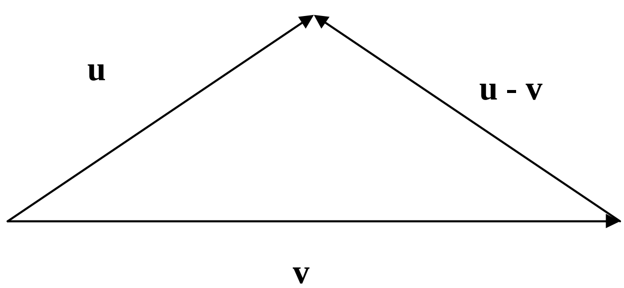
Jest to uogólnione prawo trójkąta.

6.2.2 Wektory przeciwne

Dwa wektory niezerowe nazywamy wzajemnie przeciwnymi, gdy mają równe moduły i są przeciwnie równoległe (patrz rys. 17). Wektorem przeciwnym do wektora zerowego jest wektor zerowy.



Rysunek 17: Wektory przeciwne.



Rysunek 18: Różnica wektorów.

6.3 Odejmowanie wektorów

Odejmowanie definiujemy jako działanie odwrotne do dodawania. **Różnicą** dwóch wektorów, z których pierwszy nazywamy **odjemną**, a drugi **odjemnikiem**, nazywamy wektor, który dodany do odjemnika daje w wyniku odjemną:

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{w} \quad \text{oznacza, że} \quad \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{u} \tag{253}$$

Twierdzenie 6.11 *Jeżeli odjemna i odjemnik mają wspólny punkt zaczepienia, to różnicą jest wektor poprowadzony od końca odjemnika do końca odjemnej (rys. 17).*

Twierdzenie 6.12 *Różnica dwóch wektorów jest sumą odjemnej i wektora przeciwnego do odjemnika (rys. 19). Różnica wektorów równoległych jest wektorem równoległym do tych wektorów. Dla modułu różnicy dowolnych dwóch wektorów zachodzi nierówność*

$$||\mathbf{u}| - |\mathbf{w}|| \leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \tag{254}$$

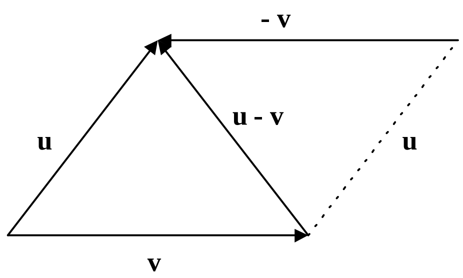
(uogólnione prawo trójkąta).

Mnożenie wektora przez liczbę
Iloczynem wektora $\mathbf{u}$ i liczby k nazywamy wektor, który:

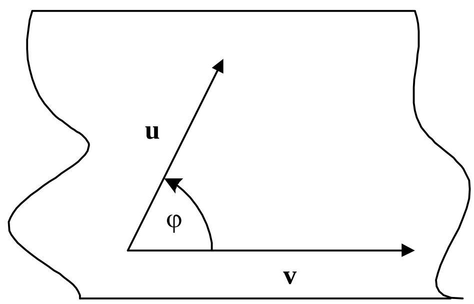
- jest równoległy do wektora $\mathbf{u}$,
- ma długość równą $|k|\,u$,
- ma zwrot wektora $\mathbf{u}$, jeżeli $k > 0$, $u \neq 0$, względnie zwrot wektora $-\mathbf{u}$, jeżeli $k < 0, u \neq 0$.

Wektor ten oznaczamy[13]

$$k\mathbf{u} \quad \text{lub} \quad \mathbf{u}k \tag{255}$$



Rysunek 19: Różnica wektorów.



Rysunek 20: Kąt między wektorami.

6.4 Wersory

Definicja 6.5 *Wektor o module równym* 1 *nazywamy* ***wersorem****.*

Wersorem osi nazywamy wersor zgodnie równoległy z tą osią. Wersor osi x (odciętej) oznaczamy $\mathbf{x}^0$. **Osią wersora** lub **osią wersora niezerowego** nazywamy oś zgodnie równoległą do wektora.

Wersorem wektora niezerowego $\mathbf{u}$ nazywamy wektor $\mathbf{u}/u$, który oznaczamy $\mathbf{u}^0$. Zatem

$$\mathbf{u}^0 = \frac{\mathbf{u}}{u} \tag{256}$$

[13]Bardzo często występują pojęcia: kolinearność i komplanarność. Wektory nazywamy kolinearnymi, jeśli po zaczepieniu ich we wspólnym początku leżą na jednej prostej. Dla dowolnego wektora $\mathbf{u}$ i dowolnej liczby k wektor $k\mathbf{u}$ jest kolinearny z wektorem $\mathbf{u}$. Wektory nazywamy komplanarnymi, jeśli po zaczepieniu we wspólnym początku leżą w jednej płaszczyźnie. Dla dowolnych wektorów $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ i dowolnych liczb t i s wektor $t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ jest komplanarny z wektorami $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$.

6.5 Iloczyn skalarny wektorów

Definicja 6.6 ***Iloczynem skalarnym*** *dwóch wektorów* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *nazywamy liczbę, którą oznaczamy symbolem* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ *i która w przypadku, gdy oba wektory* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *są niezerowe, jest równa iloczynowi modułów tych wektorów pomnożonemu przez kosinus kąta między nimi (rys. 19)*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = uv\cos\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \tag{257}$$

i która jest zerem w przypadku, gdy co najmniej jeden z tych wektorów jest zerowy lub wektory $\mathbf{u}$ *i* $\mathbf{v}$ *są prostopadłe.*

6.5.1 Własności iloczynu skalarnego

Z definicji iloczynu skalarnego wynikają poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 6.13 *Iloczyn skalarny dwóch wektorów* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy wektory te są prostopadłe*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v} \tag{258}$$

Iloczyn skalarny dowolnego wektora $\mathbf{u}$ z tym samym wektorem jest równy kwadratowi modułu tego wektora

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = u^2 \tag{259}$$

Twierdzenie 6.14 *Dla dowolnych wektorów* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ *i dowolnej liczby* k *zachodzą równości*

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$	*przemienność mnożenia skalarnego*
$(k\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = k\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot(k\mathbf{v})$	*łączność mnożenia skalarnego i mnożenia wektora przez liczbę*
$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{b}$	*rozdzielność mnożenia skalarnego względem dodawania wektorów*

(260)

Wniosek 6.2 ***Praca****. Jeżeli pod działaniem niezmiennej siły* $\mathbf{F}$ *punkt materialny przesuwa się o wektor* $\mathbf{s}$*, to iloczyn skalarny siły* $\mathbf{F}$ *i przesunięcia* $\mathbf{s}$

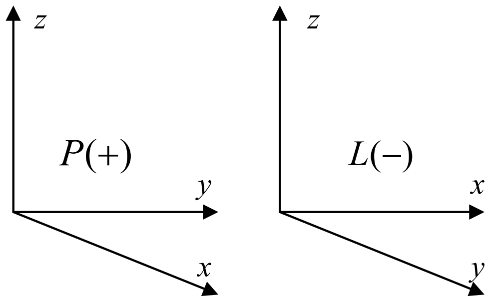
$$L = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} \tag{261}$$

nazywamy ***pracą*** *siły* $\mathbf{F}$ *wzdłuż przesunięcia* $\mathbf{s}$*.*

Przestawienie cykliczne. Przestawieniem cyklicznym (kołowym) ciągu $n-$ wyrazowego nazywamy przekształcenie, w którym pierwszy wyraz staje się drugim, drugi - trzecim, itd., ostatni - pierwszym. Stosując przestawienie cykliczne do trójki wektorów otrzymujemy kolejno

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \to (\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \to (\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) \to (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \tag{262}$$

6.6 Orientacja przestrzeni



Rysunek 21: Orientacja przestrzeni.

Przestrzenny prostoliniowy układ współrzędnych nazywamy prawoskrętnym, jeżeli trzema palcami prawej ręki możemy pokazać osie tego układu:

- oś **x** - wyprostowanym kciukiem;
- oś **y** - wyprostowanym palcem wskazującym;
- oś **z** - palcem środkowym zgiętym prostopadle do płaszczyzny dłoni.

Mówimy wówczas, że przestrzeń została zorientowana.

Jeżeli w przestrzeni zorientowanej trójka wektorów jest zgodnie skrętna z obranym układem współrzędnych, to mówimy, że ma orientację dodatnią. W fizyce przyjęto, że prawoskrętne trójki mają orientację dodatnią.

6.7 Iloczyn wektorowy

Definicja 6.7 ***Iloczynem wektorowym*** *pary wektorów* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *w przestrzeni zorientowanej nazywamy wektor, który oznaczamy symbolem*

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \quad \textit{lub} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

i który w przypadku, gdy $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ *jest wektorem zerowym, natomiast, jeżeli* $\mathbf{u} \nparallel \mathbf{v}$, *to wektor* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *ma:*

- *moduł równy* $uv \sin\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$,
- *kierunek prostopadły do* $\mathbf{u}$ *i prostopadły do* $\mathbf{v}$,
- *zwrot taki, aby trójka wektorów* $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ *miała orientację dodatnią.*

6.7.1 Własności iloczynu wektorowego

Są one opisane w poniższych twierdzeniach:

Twierdzenie 6.15 *Iloczyn wektorowy pary wektorów* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *jest wektorem zerowym wtedy i tylko wtedy, gdy wektory te są równoległe*

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \tag{263}$$

Iloczyn wektorowy dowolnego wektora $\mathbf{u}$ *i tego samego wektora jest wektorem zerowym*

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{264}$$

Iloczyn wektorowy pary wektorów nierównoległych ma moduł równy polu równoległoboku zbudowanego na tych wektorach (po przeniesieniu ich do wspólnego początku).

Twierdzenie 6.16 *Dla dowolnych wektorów* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *i dowolnej liczby* k *zachodzą następujące równości*

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u} && \textit{antyprzemienność mnożenia wektorowego} \\ &(k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v}) && \textit{łączność mnożenia z mnożeniem przez liczbę} \\ &(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} && \textit{rozdzielność mnożenia względem dodawania} \end{aligned} \tag{265}$$

Przykład 6.1 *Niech* $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ *będzie ortogonalną trójką wersorów o orientacji dodatniej. Wyznaczyć iloczyny skalarne i wektorowe wersorów.*

Rozwiązanie 6.1 *Mamy*

$$\begin{array}{llll} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 & \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0 & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 & & & \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 & & & \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 & & & \end{array} \tag{266}$$

oraz

$$(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad (\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 2\mathbf{k} \tag{267}$$

6.8 Iloczyn mieszany

Definicja 6.8 ***Iloczynem mieszanym*** *trójki wektorów* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *nazywamy liczbę*

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \tag{268}$$

którą otrzymujemy mnożąc iloczyn wektorowy $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *skalarnie przez* $\mathbf{w}$*. Iloczyn mieszany oznaczamy też symbolem*

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] \tag{269}$$

Twierdzenie 6.17 *Iloczyn mieszany* $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ *trójki wektorów równa się objętości równoległościanu zbudowanego na tych wektorach (po zaczepieniu ich we wspólnym początku) wziętej ze znakiem* $+$*, jeżeli orientacja trójki jest dodatnia:*

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = V$$

Twierdzenie 6.18 *Iloczyn mieszany* $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ *jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy wektory* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *leżą w jednej płaszczyźnie.*

$$\begin{aligned} &[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = 0 \iff \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} && \textit{leżą w jednej płaszczyźnie} \\ &[\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w}] = 0 && \textit{ponieważ } (\mathbf{u} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{270}$$

Twierdzenie 6.19 *Iloczyn mieszany* $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ *nie zmienia wartości, jeżeli zachowując kolejność wektorów przestawiamy mnożenie wektorowe z mnożeniem skalarnym*

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = (\mathbf{u} \times \mathbf{v})\, \mathbf{w} = \mathbf{u}\, (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \tag{271}$$

lub jeżeli zmienimy kolejność wektorów, przestawiając je cyklicznie

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] = [\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}] \tag{272}$$

Iloczyn mieszany zmienia wartość na przeciwną, jeżeli w nim przestawimy ze sobą którekolwiek dwa wektory

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}] = -[\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}] \tag{273}$$

6.9 Podwójny iloczyn wektorowy

Definicja 6.9 *Podwójnym iloczynem wektorowym nazywamy każde z wyrażeń*

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \qquad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

Są to dwa wektory, na ogół różne. Mianowicie:

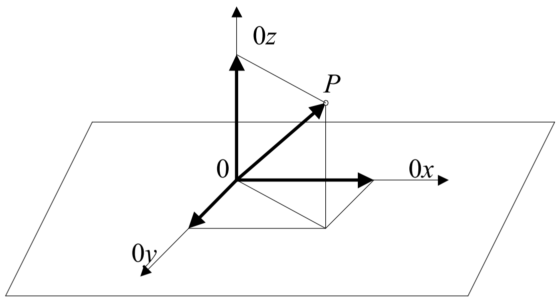
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{274}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \tag{275}$$

6.10 Działania na wektorach w prostokątnym układzie współrzędnych

Prostokątnym kartezjańskim układem współrzędnych w przestrzeni nazywamy układ trzech wzajemnie prostopadłych osi, mających wspólny początek i wspólną jednostkę długości. Oznaczamy go $0xyz$. Przestrzeń, w której wprowadzono układ $0xyz$ nazywamy przestrzenią $0xyz$. Każdemu punktowi przestrzeni odpowiada wzajemnie jednoznacznie uporządkowana trójka liczb będących współrzędnymi tego punktu. Zapisujemy to następująco

$$P = (x, y, z)$$



Rysunek 22: Położenie punktu P w przestrzeni $0xyz$.

Niech $\mathbf{u}$ będzie dowolnym wektorem przestrzeni $0xyz$. Jego rzuty na osie układu oznaczamy

$$\mathrm{rzut}_x\,\mathbf{u} \qquad \mathrm{rzut}_y\,\mathbf{u} \qquad \mathrm{rzut}_z\,\mathbf{u} \tag{276}$$

Są to wektory **składowe** wektora $\mathbf{u}$, który jest ich sumą

$$\mathbf{u} = \mathrm{rzut}_x\,\mathbf{u} + \mathrm{rzut}_y\,\mathbf{u} + \mathrm{rzut}_z\,\mathbf{u} \tag{277}$$

Miary tych rzutów są liczbami, które nazywamy **współrzędnymi** wektora $\mathbf{u}$ na osiach układu. Oznaczamy je

$$u_x \qquad u_y \qquad u_z$$

Wprowadzając wersory osi układu

$$\mathbf{i} \qquad \mathbf{j} \qquad \mathbf{k}$$

otrzymujemy związki

$$\mathrm{rzut}_x\,\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} \qquad \mathrm{rzut}_y\,\mathbf{u} = u_y\mathbf{j} \qquad \mathrm{rzut}_z\,\mathbf{u} = u_z\mathbf{k} \tag{278}$$

Uwzględniając (277) dochodzimy do relacji

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k} \tag{279}$$

Każdemu wektorowi przestrzeni odpowiada uporządkowana trójka liczb będących jego współrzędnymi w danym układzie

$$\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z] \tag{280}$$

Twierdzenie 6.20 *Dwa wektory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie współrzędne tych wektorów są równe.*

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} L_x = P_x \\ L_y = P_y \\ L_z = P_z \end{array} \right\} \tag{281}$$

6.10.1 Analityczne wyrażenie działań na wektorach w przestrzeni

Twierdzenie 6.21 *Niech będą dane w przestrzeni* $0xyz$ *dowolne wektory*

$$\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z] \quad , \quad \mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z] \quad , \quad \mathbf{w} = [w_x, w_y, w_z] \tag{282}$$

oraz liczby rzeczywiste a, b, c. *Działania na tych wektorach wyrażają się za pomocą współrzędnych*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z] \tag{283}$$
$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = [u_x - v_x, u_y - v_y, u_z - v_z] \tag{284}$$
$$c\mathbf{u} = [cu_x, cu_y, cu_z] \tag{285}$$
$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = [au_x + bv_x, au_y + bv_y, au_z + bv_z] \tag{286}$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z \quad \textit{dowód na ćwiczeniach} \tag{287}$$

Iloczyn wektorowy zapisujemy w postaci wyznacznikowej

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_z & u_x \\ v_z & v_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \right] = \tag{288}$$

$$= [u_yv_z - u_zv_y, v_xu_z - u_xv_z, u_xv_y - u_yv_x] \quad \text{(dowód na ćwiczeniach)}$$

Iloczyn mieszany

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \tag{289}$$

(dowód na ćwiczeniach)

6.10.2 Moduł wektora

Mówi o nim twierdzenie:

Twierdzenie 6.22 *Moduł wektora jest równy pierwiastkowi sumy kwadratów współrzędnych wektora. Jeżeli* $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]$, *to*

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \tag{290}$$

6.11 Warunek prostopadłości i warunek równoległości 2 wektorów

Twierdzenie 6.23 *Niech będą dane dwa wektory*

$$\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z] \quad , \quad \mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z] \tag{291}$$

Wektory te są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn skalarny jest zerem

$$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0 \tag{292}$$

Wektory te są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn wektorowy jest wektorem zerowym

$$u_y v_z - u_z v_y = 0 \qquad u_z v_x - u_x v_z = 0 \qquad u_x v_y - u_y v_x = 0 \tag{293}$$

Kąt między tymi wektorami wyznaczamy z zależności

$$\cos\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \frac{1}{uv}\left(u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z\right) \tag{294}$$

jeżeli $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

6.12 Przykłady

Przykład 6.2 *Wykazać słuszność zależności* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$.

Rozwiązanie 6.2 *Wykonujemy mnożenie*

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \left(\mathbf{i}u_x + \mathbf{j}u_y + \mathbf{k}u_z\right)\left(\mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z\right) = \\
&= \mathbf{ii}u_x v_x + \mathbf{ij}u_y v_x + \mathbf{ik}u_z v_x + \mathbf{ij}u_x v_y + \mathbf{jj}u_y v_y + \\
&\quad + \mathbf{kj}u_z v_y + \mathbf{ik}u_x v_z + \mathbf{jk}u_y v_z + \mathbf{kk}u_z v_z
\end{aligned}$$

Ponieważ $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$, *a pozostałe iloczyny mieszane* $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0$, *zatem pozostają wyrażenia* $u_x v_x, u_y v_y, u_z v_z$. *Stąd* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$.

Przykład 6.3 *Wyprowadzić wzór na iloczyn wektorowy* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Rozwiązanie 6.3 *Mnożymy wektorowo dwie sumy (ważna jest kolejność wektorów - nie ma przemienności mnożenia wektorów)*

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \left(\mathbf{i}u_x + \mathbf{j}u_y + \mathbf{k}u_z\right) \times \left(\mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z\right) = \\
&= \left(\mathbf{i} \times \mathbf{i}\right) u_x v_x + \left(\mathbf{j} \times \mathbf{i}\right) u_y v_x + \left(\mathbf{k} \times \mathbf{i}\right) u_z v_x + \left(\mathbf{i} \times \mathbf{j}\right) u_x v_y + \left(\mathbf{j} \times \mathbf{j}\right) u_y v_y + \\
&\quad + \left(\mathbf{k} \times \mathbf{j}\right) u_z v_y + \left(\mathbf{i} \times \mathbf{k}\right) u_x v_z + \left(\mathbf{j} \times \mathbf{k}\right) u_y v_z + \left(\mathbf{k} \times \mathbf{k}\right) u_z v_z
\end{aligned}$$

Pamiętamy (patrz (288)) zasadę mnożenia wektorowego wersorów. Otrzymamy zatem:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= 0 - \mathbf{k}u_y v_x + \mathbf{j}u_z v_x + \mathbf{k}u_x v_y + 0 - \mathbf{i}u_z v_y - \mathbf{j}u_x v_z + \mathbf{i}u_y v_z + 0 = \\
&= \mathbf{i}\left(u_y v_z - u_z v_y\right) + \mathbf{j}\left(u_z v_x - u_x v_z\right) + \mathbf{k}\left(u_x v_y - u_y v_x\right) = \\
&= \mathbf{i}\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Przykład 6.4 *Wyprowadzić wzór wyznacznikowy na iloczyn mieszany.*

Rozwiązanie 6.4 *Ponieważ* $[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}] = (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$, *to korzystając z wyprowadzeń z poprzedniego zadania otrzymujemy*

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\,\mathbf{w} &= \left(\mathbf{i}\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}\right)(\mathbf{i}w_x + \mathbf{j}w_y + \mathbf{k}w_z) = \\
&= w_x\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - w_y\begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + w_z\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Przykład 6.5 *Wyprowadzić wzór na podwójny iloczyn wektorowy.*

Rozwiązanie 6.5 *Mamy wykazać tożsamość*

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

Zapiszemy iloczyn $\mathbf{a}\times\mathbf{d}$ *(gdzie:* $\mathbf{d} = \mathbf{b}\times\mathbf{c}$*) w postaci wyznacznikowej*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L} = \mathbf{a}\times\mathbf{d} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_yc_z - b_zc_y & b_zc_x - b_xc_z & b_xc_y - b_yc_x \end{vmatrix} = \\
&= \mathbf{i}\left[a_y\left(b_xc_y - b_yc_x\right) - a_z\left(b_zc_x - b_xc_z\right)\right] - \\
&\quad -\mathbf{j}\left[a_x\left(b_xc_y - b_yc_x\right) - a_z\left(b_yc_z - b_zc_y\right)\right] + \\
&\quad +\mathbf{k}\left[a_x\left(b_zc_x - b_xc_z\right) - a_y\left(b_yc_z - b_zc_y\right)\right]
\end{aligned}
$$

Przeanalizujemy każdą ze składowych oddzielnie. W tym celu wyprowadzimy składowe wektora prawej strony. Kolejno otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \mathbf{i}\left[b_x\left(a_xc_x + a_yc_y + a_zc_z\right) - c_x\left(a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z\right)\right] + \\
&\quad +\mathbf{j}\left[b_y\left(a_xc_x + a_yc_y + a_zc_z\right) - c_y\left(a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z\right)\right] + \\
&\quad +\mathbf{k}\left[b_z\left(a_xc_x + a_yc_y + a_zc_z\right) - c_z\left(a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z\right)\right]
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że w powyższym wyrażeniu eliminuje się iloczyny $(a_\alpha b_\alpha c_\alpha - a_\alpha b_\alpha c_\alpha)$ *dla* $\alpha = x, y, z$. *A więc*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \mathbf{i}\left[a_y\left(b_xc_y - b_yc_x\right) - a_z\left(b_zc_x - b_xc_z\right)\right] - \\
&\quad -\mathbf{j}\left[a_x\left(b_xc_y - b_yc_x\right) - a_z\left(b_yc_z - b_zc_y\right)\right] + \\
&\quad +\mathbf{k}\left[a_x\left(b_zc_x - b_xc_z\right) - a_y\left(b_yc_z - b_zc_y\right)\right]
\end{aligned}
$$

Widzimy, że $\mathbf{L} = \mathbf{R}$, *co należało wykazać.*

Przykład 6.6 *Obliczyć iloczyn skalarny dwóch wektorów* $\mathbf{a}$ *i* $\mathbf{b}$, *jeżeli:* $\mathbf{a} = [1,2,3]$, $\mathbf{b} = [3,2,1]$.

Rozwiązanie 6.6 *Korzystamy z wyniku przedstawionego w Przykładzie 6.2 i otrzymujemy*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [1,2,3] \cdot [3,2,1] = 10$$

Przykład 6.7 *Obliczyć iloczyn skalarny dwóch wektorów* $\mathbf{a}$ *i* $\mathbf{b}$*, jeżeli:* $\mathbf{a} = [u,v,w]$, $\mathbf{b} = [x,y,z]$.

Rozwiązanie 6.7 *Po prostych przekształceniach otrzymujemy*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [u,v,w] \cdot [x,y,z] = ux + vy + wz$$

Przykład 6.8 *Obliczyć iloczyn wektorowy dwóch wektorów* $\mathbf{a}$ *i* $\mathbf{b}$*, jeżeli:* $\mathbf{a} = [1,2,3]$, $\mathbf{b} = [3,2,1]$.

Rozwiązanie 6.8 *Biorąc pod uwagę Przykład 6.3, otrzymujemy*

$$[1,2,3] \times [3,2,1] = [-4,8,-4]$$

Przykład 6.9 *Obliczyć podwójny iloczyn wektorowy wektorów* $\mathbf{a} = [1,2,3]$, $\mathbf{b} = [3,2,1]$, $\mathbf{c} = [1,0,1]$.

Rozwiązanie 6.9 *Bazując na Przykładzie 6.5 obliczamy*

$$[1,2,3] \times [3,2,1] \times [1,0,1] = [8,0,-8]$$

Przykład 6.10 *Obliczyć iloczyny mieszane wektorów:* $\mathbf{a} = [1,2,3]$, $\mathbf{b} = [3,2,1]$, $\mathbf{c} = [1,0,1]$.

Rozwiązanie 6.10 *Jak pamiętamy (patrz (268)), iloczyn mieszany to:* $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$. *Jednak mogą to być również iloczyny, np.* $(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}$ *lub* $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$. *Obliczymy je*

$$\begin{gathered}([1,2,3] \times [3,2,1]) \cdot [1,0,1] = -8 \\ ([1,2,3] \times [1,0,1]) \cdot [3,2,1] = 8 \\ ([3,2,1] \times [1,0,1]) \cdot [3,2,1] = 0\end{gathered}$$

Należy pamiętać, że wyjątkową rolę pełnią w tych obliczeniach nawiasy. Bowiem iloczyny $[1,0,1] \times [1,2,3] \cdot [3,2,1] = -8$ *oraz* $[1,0,1] \cdot [1,2,3] \times [3,2,1] = 4\,[3,2,1]$ *są całkowicie różne. Pierwszy jest iloczynem skalarnym, czyli liczbą, drugi jest iloczynem wektorowym, czyli wektorem.*

Przykład 6.11 *Wykazać, że dla dowolnych trzech wektorów* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *wektor* $\mathbf{p} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{v}\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{u}\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ *jest albo zerowy albo prostopadły do wektora* $\mathbf{w}$.

Rozwiązanie 6.11 *Pomnożymy wyrażenie* $\mathbf{p} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{v}\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{u}\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ *prawostronnie przez* $\mathbf{w}$. *Otrzymamy* $\mathbf{p} \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = 0$. *A więc* $\mathbf{p} \cdot \mathbf{w} = 0$. *Oznacza to, że* $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ *lub* $\mathbf{p} \perp \mathbf{w}$.

Przykład 6.12 *Równoległobok zbudowany na wektorach* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *ma pole równe* 10. *Obliczyć pole równoległoboku zbudowanego na wektorach* $3\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

Rozwiązanie 6.12 *Korzystamy z wzoru na pole równoległoboku*

$$P = |\mathbf{p} \times \mathbf{q}| = |(3\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} - 2\mathbf{v})| = |3\mathbf{u} \times \mathbf{u} + \mathbf{v} \times \mathbf{u} - 6\mathbf{u} \times \mathbf{v} - 2\mathbf{v} \times \mathbf{v}| =$$

$$= |0 + \mathbf{v} \times \mathbf{u} - 6\mathbf{u} \times \mathbf{v} - 0| = |\mathbf{v} \times \mathbf{u} + 6\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 7\,|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 70$$

Przykład 6.13 *Dane są dwa wzajemnie prostopadłe wersory* $\mathbf{p}, \mathbf{q}$. *Obliczyć:*

a) pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\mathbf{u} = 3\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{p} + 2\mathbf{q}$ *oraz obie wysokości tego równoległoboku;*

b) pole trójkąta zbudowanego na wektorach $\mathbf{u} = 3\mathbf{p}$, $\mathbf{v} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$ *oraz wszystkie jego wysokości.*

Rozwiązanie 6.13 *a)*

$$P = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |(3\mathbf{p} - \mathbf{q}) \times (5\mathbf{p} + 2\mathbf{q})| = |15\mathbf{p} \times \mathbf{p} - 5\mathbf{q} \times \mathbf{p} + 6\mathbf{p} \times \mathbf{q} - 2\mathbf{q} \times \mathbf{q}| =$$

$$= |0 - 5\mathbf{q} \times \mathbf{p} + 6\mathbf{p} \times \mathbf{q} + 0| = |5\mathbf{p} \times \mathbf{q} + 6\mathbf{p} \times \mathbf{q}| = 11\,|\mathbf{p} \times \mathbf{q}| = 11$$

$$\begin{aligned}
P &= uv\sin\varphi = u \cdot h_1 = v \cdot h_2 = 11 \\
|u| &= \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \\
|v| &= \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \\
h_1 &= 11/\sqrt{10},\ h_2 = 11/\sqrt{29}
\end{aligned}$$

b)

$$P_\triangle = \frac{1}{2}\,|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \frac{1}{2}\,|3\mathbf{p} \times (\mathbf{p} - 2\mathbf{q})| = 3$$

Obliczamy wysokości. Skorzystamy z wzoru na pole równoległoboku utworzonego przez wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$*:* $P = uv\sin\varphi = uh_1 = uh_2 = 6$ *Stąd* $h_1 = \frac{6}{|u|} = \frac{6}{3} = 2$, $h_2 = \frac{6}{|v|} = \frac{6}{\sqrt{5}}$. *Trzeci bok trójkąta to różnica wektorów* $\mathbf{u}$ *i* $\mathbf{v}$, *czyli* $3\mathbf{p} - (\mathbf{p} - 2\mathbf{q}) = 2\mathbf{p} + 2\mathbf{q}$. *Jego moduł jest równy* $2\sqrt{2}$. *Stąd* $P_\triangle = \frac{1}{2}2\sqrt{2} \cdot h_3 = 3$. *Czyli* $h_3 = 3/\sqrt{2}$.

Przykład 6.14 *Objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *i* $\mathbf{w}$ *wynosi* 24. *Obliczyć objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach* $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{w}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}$.

Rozwiązanie 6.14 *Objętość równoległościanu zbudowanego na wektotach* **a, b** *i* **c** *jest równa modułowi iloczynu mieszanego*

$$V = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c}|$$

Jeżeli $\mathbf{a} = \mathbf{u} + 2\mathbf{v}$, $\mathbf{b} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$, $\mathbf{c} = \mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}$, *to*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c} = [(\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) \times (\mathbf{v} - \mathbf{w})]\,(\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}) =$$

$$= (\mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{w} + 2\mathbf{v} \times \mathbf{v} - 2\mathbf{v} \times \mathbf{w})\,(\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}) =$$

$$= (\mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{w} - 2\mathbf{v} \times \mathbf{w})\,(\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}) =$$

$$= (\mathbf{u} \times \mathbf{v})\,\mathbf{u} - (\mathbf{u} \times \mathbf{w})\,\mathbf{u} - 2\,(\mathbf{v} \times \mathbf{w})\,\mathbf{u} + (\mathbf{u} \times \mathbf{v})\,\mathbf{v} - (\mathbf{u} \times \mathbf{w})\,\mathbf{v} -$$

$$-2\,(\mathbf{v} \times \mathbf{w})\,\mathbf{v} - 2\,(\mathbf{u} \times \mathbf{v})\,\mathbf{w} + 2\,(\mathbf{u} \times \mathbf{w})\,\mathbf{w} + 4\,(\mathbf{v} \times \mathbf{w})\,\mathbf{w}$$

Ponieważ

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}=(\mathbf{u}\times\mathbf{w})\,\mathbf{u}=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\,\mathbf{v}=(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\,\mathbf{v}=(\mathbf{u}\times\mathbf{w})\,\mathbf{w}=0$$

to

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=-2\,(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{u}-(\mathbf{u}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{v}-2\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$$

Ale

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{u}=[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]\quad i\quad(\mathbf{u}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{v}=-\,[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]$$

Zatem

$$\begin{array}{l}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=-3\,[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]\\ i\\ |(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|=3\cdot 24=72\end{array}$$

Przykład 6.15 *Dane są trzy wzajemnie prostopadłe wersory* $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}$. *Obliczyć objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach* $\mathbf{u}=\mathbf{p}+\mathbf{q}$, $\mathbf{v}=\mathbf{p}-2\mathbf{q}$, $\mathbf{w}=\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}$.

Rozwiązanie 6.15 *Korzystamy z wzoru na objętość równoległościanu*

$$V=|[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]|=|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}|$$

$$[(\mathbf{p}+\mathbf{q})\times(\mathbf{p}-2\mathbf{q})]\cdot(\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r})=$$

$$=(\mathbf{p}\times\mathbf{p}+\mathbf{q}\times\mathbf{p}-2\mathbf{p}\times\mathbf{q}-2\mathbf{q}\times\mathbf{q})\cdot(\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r})=$$

$$3\,(\mathbf{q}\times\mathbf{p})\cdot(\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r})=3\,(\mathbf{q}\times\mathbf{p})\cdot\mathbf{p}+3\,(\mathbf{q}\times\mathbf{p})\cdot\mathbf{q}+3\,(\mathbf{q}\times\mathbf{p})\cdot\mathbf{r}=$$

$$=3\,(\mathbf{q}\times\mathbf{p})\cdot\mathbf{r}=-3\,(\mathbf{p}\times\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}$$

A więc

$$V=|-3\,(\mathbf{p}\times\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}|=3$$

7 Prosta i płaszczyzna w przestrzeni $\mathcal{R}^3$

7.1 Równanie prostej

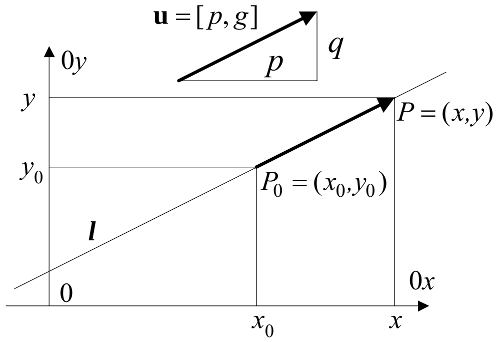
Wyznaczanie prostej na płaszczyźnie $0xy$ sprowadza się do wskazania punktu, przez który prosta ma przechodzić i kierunku prostej. Kierunek prostej wyznacza się za pomocą:

- wektora, do którego prosta ma być równoległa lub
- wektora, do którego prosta ma być prostopadła lub
- współczynnika kierunkowego prostej.

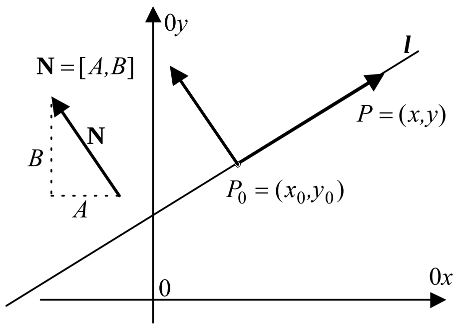
Twierdzenie 7.1 *Prosta l przechodząca przez dany punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ i równoległa do danego niezerowego wektora $\mathbf{u} = [p, q]$ ma równanie*

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{u}, \quad t \in \mathcal{R} \tag{295}$$

Równanie to przedstawia **postać wektorową prostej.**



Rysunek 23: Prosta równoległa do wektora $\mathbf{u}$.



Rysunek 24: Prosta prostopadła do wektora $\mathbf{N}$.

Może być ona zapisana w następujących postaciach

$$\begin{array}{ll} x - x_0 = tp \qquad y - y_0 = tq & \textbf{postać parametryczna} \quad t \in \mathcal{R} \\[2ex] \dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q} & \textbf{postać proporcji} \\[2ex] \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ p & q \end{vmatrix} = 0 & \textbf{postać wyznacznikowa} \end{array} \tag{296}$$

Punkt $P = (x, y)$ leży na prostej l wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{P_0P} \parallel \mathbf{u}$.

Uwzględniając Twierdzenie 6.23 i warunek (293) zapisany na płaszczyźnie, czyli $\mathbf{u} = [u_x, u_y]$, $\mathbf{v} = [v_x, v_y]$ mamy

$$u_x v_y - u_y v_x = 0 \tag{297}$$

gdzie: $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P} = [x - x_0, y - y_0]$; $\mathbf{u} = [p, q]$, stąd

$$\overrightarrow{P_0P} \parallel \mathbf{u} \Longleftrightarrow (x - x_0)\, q - (y - y_0)\, p = 0 \tag{298}$$

czyli (296).

Twierdzenie 7.2 *Prosta l przechodząca przez dany punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ i prostopadła do danego niezerowego wektora $\mathbf{N} = [A, B]$ ma równanie*

$$\mathbf{N} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \qquad \textbf{\textit{postać wektorowa}} \tag{299}$$

W zapisie analitycznym równanie to ma postać

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \tag{300}$$

Jest to równanie ogólne prostej przechodzącej przez jeden punkt.

Wprowadzając stałą $C = -Ax_0 - By_0$ otrzymujemy **równanie prostej w postaci ogólnej**

$$Ax + By + C = 0 \tag{301}$$

Definicja 7.1 ***Kątem nachylenia*** *prostej l do osi $0x$ nazywamy kąt między osią $0x$ a dowolnym wektorem niezerowym leżącym na tej prostej, czyli $\sphericalangle(x, l)$.* ***Tangens*** *tego kąta*

$$m = \operatorname{tg}(x, l) \tag{302}$$

nazywamy ***współczynnikiem kierunkowym prostej*** *l na płaszczyźnie $0xy$. Jeżeli $\mathbf{u} = [p, q] \neq \mathbf{0}$ i $\mathbf{u} \parallel \overrightarrow{P_0P}$, to*

$$m = \operatorname{tg}(x, l) = \operatorname{tg}(x, \mathbf{u}) = \frac{q}{p} \tag{303}$$

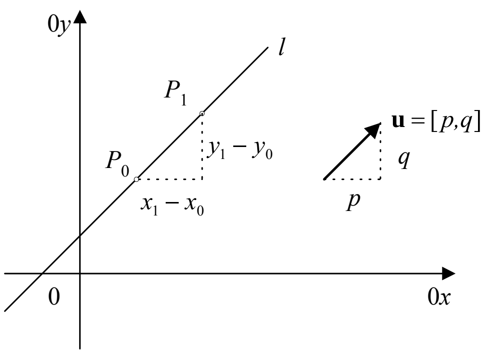
lub jeżeli $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$ oraz $P_0 \subset l$, $P_1 \subset l$, to

$$m = \operatorname{tg}(x, l) = \operatorname{tg}\left(x, \overrightarrow{P_0P_1}\right) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{304}$$

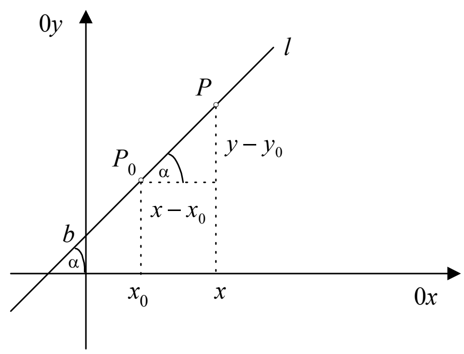
Każda prosta, która nie jest prostopadła do $0x$ ma jednoznacznie określony współczynnik kierunkowy (rys. 25).

Twierdzenie 7.3 *Prosta l o danym współczynniku kierunkowym m, przechodząca przez dany punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ ma równanie*

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad \textit{postać kierunkowa prostej} \tag{305}$$



Rysunek 25: Współczynnik kierunkowy m.



Rysunek 26: Przesunięcie b prostej l.

Wprowadzając stałą $b = y_0 - mx_0$ nazywaną **przesunięciem**, otrzymamy **postać kierunkową** prostej (patrz rys. 25)

$$y = mx + b \tag{306}$$

gdzie: $b-$ rzędna punktu, w którym prosta l przecina oś $0y$.

Twierdzenie 7.4 *Prosta przechodząca przez dane dwa różne punkty $P_0 = (x_0, y_0)$ i $P_1 = (x_1, y_1)$ ma równanie*

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \tag{307}$$

Twierdzenie 7.5 *Dwie proste l_1, l_2 dane równaniami*

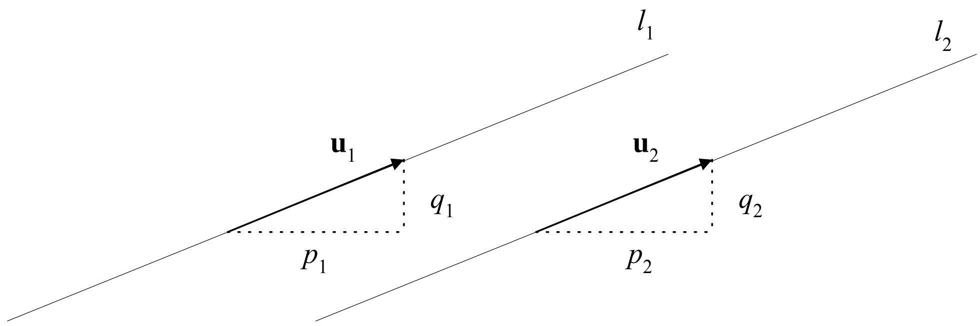
$$l_1 : \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} \qquad l_2 : \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2} \tag{308}$$

są wzajemnie równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\mathbf{u}_1 = [p_1, q_1] \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{u}_2 = [p_2, q_2] \neq \mathbf{0}$ równoległe odpowiednio do prostych l_1, l_2 są wzajemnie równoległe, tj. gdy zachodzi proporcja

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} \tag{309}$$

równoważna równości

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{310}$$



Rysunek 27: Dwie proste równoległe.

Twierdzenie 7.6 *Dwie proste l_1, l_2 dane równaniami*

$$l_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \qquad l_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \tag{311}$$

są wzajemnie równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\mathbf{N}_1 = [A_1, B_1] \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{N}_2 = [A_2, B_2] \neq \mathbf{0}$ prostopadłe odpowiednio do prostych l_1, l_2 są wzajemnie równoległe, tj. gdy

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \tag{312}$$

czyli

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{313}$$

Rozróżniamy tu dwa przypadki

1. *Pełna proporcja współczynników równań (311)*

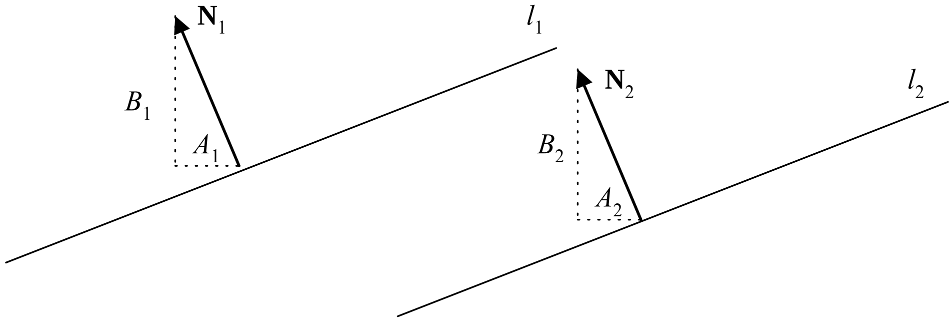
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{314}$$

tzn.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{315}$$

Wówczas proste l_1 i l_2 pokrywają się.

2. *Zachodzi tylko proporcja (312) (proporcja (314) nie zachodzi). Wówczas proste l_1 i l_2 są równoległe, lecz nie pokrywają się.*



Rysunek 28: Dwie proste równoległe.

Twierdzenie 7.7 *Dwie proste l_1 i l_2 dane równaniami*

$$l_1 : y = m_1x + b_1 \qquad l_2 : y = m_2x + b_2 \tag{316}$$

są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam współczynnik kierunkowy

$$m_1 = m_2$$

Ponadto, jeżeli $b_1 = b_2$, to proste te pokrywają się.

Przykład 7.1 *Zbadać równoległość następujących prostych*

$$a)\ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 5y & + & 7 & = & 0 \\ 4x & + & 10y & + & 15 & = & 0 \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array}$$

$$c)\ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & + & 1 & = & 0 \\ -2x & + & 6y & - & 2 & = & 0 \end{array} \qquad d)\ \begin{array}{rcl} y & = & 3x + 5 \\ \dfrac{x-1}{2} & = & \dfrac{y+7}{6} \end{array}$$

Rozwiązanie 7.1

a. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 10 & 15 \end{bmatrix}$, $\quad \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{2} \quad \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} \quad \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{1}{2}$

- proste równoległe, nie pokrywają się

b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ *- proste przecinają się*

c. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \quad \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ *- proste pokrywają się*

Twierdzenie 7.8 *Dwie proste l_1, l_2 dane równościami*

$$l_1 : \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} \qquad l_2 : \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2} \tag{317}$$

są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\mathbf{u}_1 = [p_1, q_1]$, $\mathbf{u}_2 = [p_2, q_2]$ są prostopadłe

$$p_1p_2 + q_1q_2 = 0 \tag{318}$$

Twierdzenie 7.9 *Dwie proste l_1, l_2 dane równaniami*

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0 \tag{319}$$

są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\mathbf{N}_1 = [A_1, B_1]$, $\mathbf{N}_2 = [A_2, B_2]$ są prostopadłe, czyli

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \tag{320}$$

Twierdzenie 7.10 *Dwie proste l_1, l_2 dane równościami*

$$l_1 : y = m_1x + b_1 \qquad l_2 : y = m_2x + b_2 \tag{321}$$

są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki kierunkowe spełniają związek

$$1 + m_1m_2 = 0 \tag{322}$$

7.2 Kąt dwóch prostych na płaszczyźnie

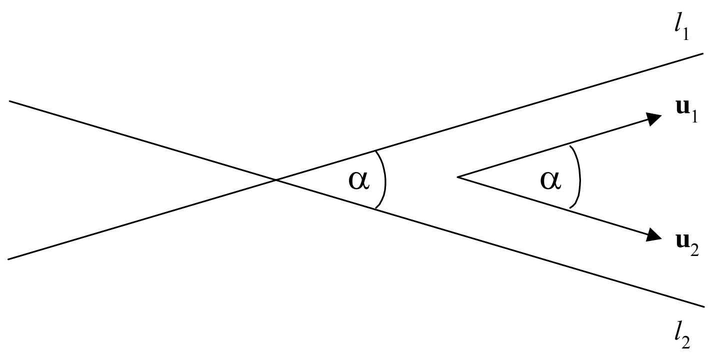
Definicja 7.2 *Mówiąc o kącie dwóch prostych zawsze mamy na myśli kąt ostry, którego miara $\alpha = \{l_1, l_2\} \leq \pi/2$. Oznaczamy go $\sphericalangle \{l_1, l_2\}$. Kąt dwóch prostych równoległych (lub pokrywających się) jest zerowy.*

Twierdzenie 7.11 *Jeżeli mamy dwie proste l_1, l_2 opisane dowolnymi równaniami (ale tego samego rodzaju), to*

$$\cos\{l_1, l_2\} = \frac{|p_1p_2 + q_1q_2|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2}\sqrt{p_2^2 + q_2^2}} \tag{323}$$

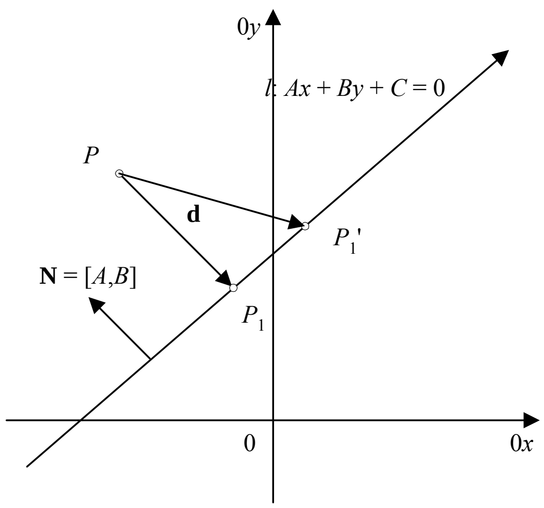
$$\cos\{l_1, l_2\} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{324}$$

$$\operatorname{tg}\{l_1, l_2\} = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right| \tag{325}$$



Rysunek 29: Kąt pomiędzy dwiema prostymi.

7.3 Odległość punktu od prostej



Rysunek 30: Odległość punktu od prostej.

Mówi o niej poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 7.12 *Najmniejszą odległość punktu $M = (x_M, y_M)$ od prostej l danej równaniem w postaci ogólnej*

$$l: \quad Ax + By + C = 0$$

wyraża się wzorem

$$d = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Dowód 7.1 *Niech $P_1 = (x_P, y_P)$ jest dowolnym punktem prostej l (patrz rys. 30), a $P = (x_M, y_M)$ punktem poza prostą. Jeżeli P_1 jest punktem na l, dla którego odległość $|PP_1|$ jest najmniejsza, to wówczas możemy zapisać, że (wektory $\mathbf{N}$ i $\overrightarrow{PP_1}$ są równoległe)*

$$\overrightarrow{PP_1} = \lambda \cdot \mathbf{N} = \mathbf{d}$$

gdzie: $|\lambda| = \frac{|\overrightarrow{PP_1}|}{|\mathbf{N}|}$; $\mathbf{d} = [x_P - x_M, y_P - y_M]$. Zatem

$$\mathbf{d} = \frac{|\mathbf{d}|}{|\mathbf{N}|} \cdot \mathbf{N} \tag{326}$$

Mnożąc (326) obustronnie przez $\mathbf{N}$ mamy

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{N} = \frac{|\mathbf{d}|}{|\mathbf{N}|} \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}$$

Korzystamy z własności iloczynu skalarnego

$$(x_P - y_M)\, A + (y_P - y_M)\, B = \frac{|\mathbf{d}|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \left(A^2 + B^2\right)$$

Następnie mamy[14]

$$Ax_P - Ax_M + By_P - By_M = |\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{N}| \tag{327}$$

Ponieważ punkt P leży na prostej, to musi spełniać jej równanie

$$Ax_P + By_P + C = 0$$

Stąd

$$Ax_P + By_P = -C \tag{328}$$

Czyli

$$-Ax_M - By_M - C = |\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{N}|$$

Ostatecznie więc

$$|\mathbf{d}| = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{|\mathbf{N}|} \tag{329}$$

[14] $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = |\mathbf{N}|^2$, czyli $\frac{1}{|\mathbf{N}|} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = |\mathbf{N}|$.

7.4 Dwusieczne kątów dwóch przecinających się prostych

Twierdzenie 7.13 *Jeżeli proste l_1, l_2 dane równaniem*

$$\begin{aligned} l_1 :&\quad A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad [A_1, B_1] \neq \mathbf{0} \\ l_2 :&\quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad [A_2, B_2] \neq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{330}$$

przecinają się, to równanie

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{331}$$

przedstawia sumę dwusiecznych d_1, d_2 prostych l_1, l_2. Równanie to rozpisuje się na dwa, opisujące każdą z dwusiecznych

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{332}$$

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{333}$$

Jeżeli analizowane proste są równoległe i różne, to jedno z powyższych równań przedstawia prostą równolegdo l_1 i l_2 i jednakowo odległą od l_1 i l_2, a drugie z tych równań jest sprzeczne.

Jeżeli proste pokrywają się $l = l_1 = l_2$, to jedno z powyższych równań przedstawia prostą l, a drugie ma postać $0x + 0y = 0$ i jest spełnione przez dowolny punkt płaszczyzny $0xy$.

7.5 Pęk prostych

Definicja 7.3 ***Pękiem prostych*** *nazywamy rodzinę prostych przechodzących przez pewien wspólny punkt, zwany* ***wierzchołkiem pęku****, a także rodzinę prostych równoległych do pewnej prostej, zwanej* ***kierunkiem peku****. Pęk prostych jest wyznaczany, jeżeli są dane dwie różne proste tego pęku.*

Niech będą dane dwie proste

$$\begin{aligned} l_1 :&\quad A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ l_2 :&\quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{aligned}$$

Utworzymy kombinację liniową tych równań

$$\lambda\left(A_1x + B_1y + C_1\right) + \mu\left(A_2x + B_2y + C_2\right) = 0 \tag{334}$$

Stąd mamy

$$\left(\lambda A_1 + \mu A_2\right)x + \left(\lambda B_1 + \mu B_2\right)y + \left(\lambda C_1 + \mu C_2\right) = 0 \tag{335}$$

7.6 Prosta w przestrzeni

Wyznaczenie prostej w przestrzeni jest możliwe na kilka sposobów. W punkcie tym przedstawimy sposób, który polega na wskazaniu jednego punktu tej prostej oraz jej kierunku. Kierunek prostej określamy definiując wektor niezerowy, do którego prosta ma być równoległa.

7.6.1 Prosta przechodząca przez dany punkt i równoległa do danego wektora

Prosta l przechodząca przez dany punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i równoległa do danego niezerowego wektora $\mathbf{u} = [a, b, c]$ (rys. 31) ma równanie

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{u}, \quad t \in \mathcal{R} \qquad \text{- postać wektorowa}$$

$$x - x_0 = aty - y_0 = btz - z_0 = ct \qquad \text{- postać parametryczna}$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \qquad \text{- postać podwójnej proporcji}$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y - y_0 & z - z_0 \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_0 & z - z_0 \\ a & c \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{- postać wyznacznikowa}$$

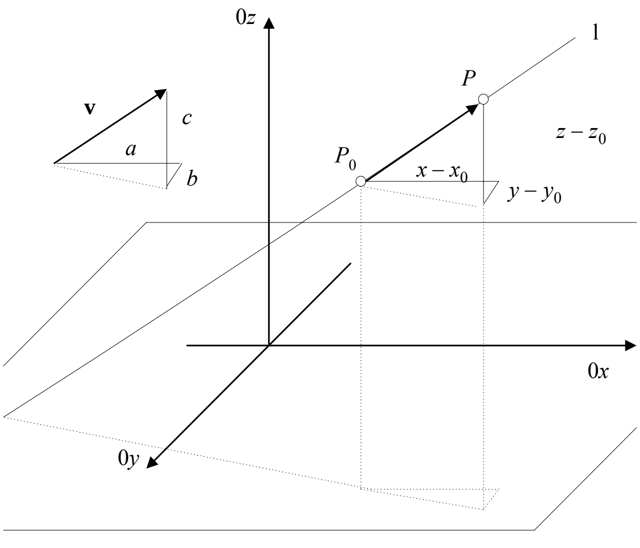
$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a & b & c \end{bmatrix} = 1 \qquad \text{- postać macierzowa} \tag{336}$$

Przykład 7.2 *Wyznaczyć prostą przechodzącą przez punkt* $(2, 5, 7)$ *i równoległą do wektora* $[4, 3, 8]$.

Rozwiązanie 7.2 *Najwygodniej jest wyznaczyć równanie w postaci proporcji podwójnej (336). Podstawiając odpowiednie dane otrzymujemy*

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 5}{3} = \frac{z - 7}{8}$$

7.6.2 Prosta przechodząca przez dwa różne punkty



Rysunek 31: Prosta przechodząca przez P_0 i równoległa do wektora $\mathbf{v}$.

Zagadnienie to omawia twierdzenie:

Twierdzenie 7.14 *Prosta przechodząca przez dane dwa różne punkty* $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *i* $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *jest opisana równaniami*

$$\overrightarrow{P_0P} = t\overrightarrow{P_0P_1} \qquad t \in \mathcal{R} \tag{337}$$

$$\begin{aligned} x - x_0 &= t\,(x_1 - x_0) \\ y - y_0 &= t\,(y_1 - y_0) \\ z - z_0 &= t\,(z_1 - z_0) \end{aligned} \tag{338}$$

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \tag{339}$$

7.7 Płaszczyzna w przestrzeni

Twierdzenie 7.15 *Płaszczyzna* G *przechodząca przez dany punkt* $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *i prostopadła do danego niezerowego wektora*

$\mathbf{N} = [A, B, C]$ *(rys. 32) jest opisana równaniami*

$$\begin{array}{ll} \mathbf{N} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 & \text{- postać wektorowa} \\ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 & \text{- postać szczególna} \\ Ax + By + Cz + D = 0 & \text{- postać ogólna} \end{array} \tag{340}$$

Przykład 7.3 *Wyznaczyć równanie płaszczyzny G symetralnej odcinka M_1M_2 o końcach $M_1 = (-2, 1, 7)$, $M_2 = (4, 5, 3)$.*

Rozwiązanie 7.3 *Płaszczyzna G jest prostopadła do wektora $\overrightarrow{M_1M_2}$ i przechodzi przez punkt*

$$P_0 = \left(\frac{M_{1x} + M_{2x}}{2}, \frac{M_{1y} + M_{2y}}{2}, \frac{M_{1z} + M_{2z}}{2} \right) = (1, 3, 5)$$

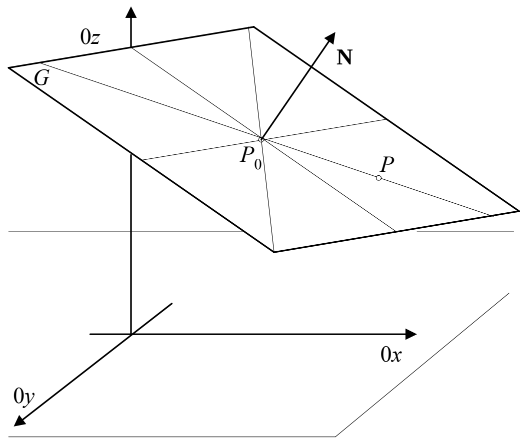
Wektor $\overrightarrow{M_1M_2} = [6, 4, -4]$. Zgodnie z równaniem (340) mamy

$$6(x - 1) + 4(y - 3) - 4(z - 5) = 0$$

Stąd otrzymujemy

$$3x + 2y - 2z + 1 = 0$$

Przedstawimy teraz równania płaszczyzny przechodzącej przez dany punkt w przestrzeni i równoległej do danych dwóch różnych wektorów.



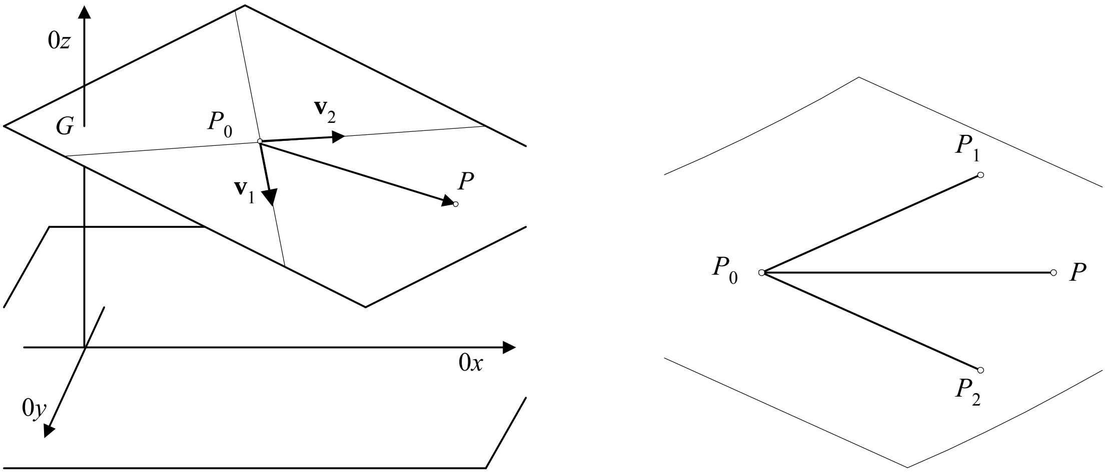
Rysunek 32: Płaszczyzna przechodząca przez P_0 i prostopadła do wektora $\mathbf{N}$.

Twierdzenie 7.16 *Płaszczyzna G przechodząca przez dany punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i równoległa do danych dwóch wektorów nierównoległych $\mathbf{v}_1 = [a_1, b_1, c_1]$, $\mathbf{v}_2 = [a_2, b_2, c_2]$ (patrz rys. 33) jest opisana równaniami*

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \quad t, s \in \mathcal{R} & \text{postać wektorowa} \\ \begin{cases} x - x_0 = a_1t + a_2s \\ y - y_0 = b_1t + b_2s \\ z - z_0 = c_1t + c_2s \end{cases} & \text{postać parametryczna} \\ \begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & a_2 \\ y - y_0 & b_1 & b_2 \\ z - z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 & \text{postać wyznacznikowa} \end{array} \tag{341}$$

Twierdzenie 7.17 *Płaszczyzna G przechodząca przez trzy dane punkty (patrz rys. 33), które nie leżą na jednej prostej $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ jest opisana równaniem wyznacznikowym*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \tag{342}$$



Rysunek 33: Płaszczyzna przechodząca przez punkt i równoległa do wektorów i płaszczyzna przechodząca przez trzy punkty.

które jest równoważne równaniu

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{343}$$

Twierdzenie 7.18 *Płaszczyzna G zawierająca dwie proste l_1, l_2 równoległe i różne*

$$l_1 : \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

$$l_2 : \frac{x - x_2}{a} = \frac{y - y_2}{b} = \frac{z - z_2}{c}$$

jest opisana równaniem

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & a & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & b & y_2 - y_1 \\ z - z_1 & c & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{344}$$

7.7.1 Postać kierunkowa płaszczyzny

Podamy twierdzenie:

Twierdzenie 7.19 *Dowolną płaszczyznę nierównoległą do osi $0z$ można przedstawić równaniem kierunkowym*

$$z = ax + by + c \qquad \textbf{\textit{postać kierunkowa płaszczyzny}} \tag{345}$$

i na odwrót, dla dowolnie obranych wartości a, b, c równanie to przedstawia pewną płaszczyznę nierównoległą do osi $0z$.

7.8 Przykłady

Przykład 7.4 *Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt* $(4,2)$ *i*

a) *równoległej do wektora* $[3,5]$*;*
b) *prostopadłej do wektora* $[3,5]$*;*
c) *równoległej do wektora* $[1,0]$*;*
d) *prostopadłej do wektora* $[1,0]$*;*
e) *przechodzącej przez punkt* $(1,-1)$*;*
f) *tworzącej z osią* $0x$ *kąt* 60^0*;*
g) *tworzącej z osią* $0y$ *kąt* -45^0*.*

Rozwiązanie 7.4 *Przedstawimy kilka postaci rozwiązań:*

a) *Mamy* $x_0 = 4,\ y_0 = 2, \mathbf{u} = [3,5]$*. Postać ogólna* $\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{u}$*.*

$$x - 4 = 3t \qquad y - 2 = 5t$$ *- postać parametryczna*

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-2}{5}$$ *- postać proporcji*

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$ *- postać wyznacznikowa*

Z postaci tej dochodzimy do zapisu ogólnego

$$5(x-4) - 3(y-2) = 0 \quad \rightarrow \quad 5(x-4) = 3(y-2)$$

$$y - 2 = \frac{5}{3}(x-4)$$

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{14}{3}$$ *- postać kierunkowa*

Czyli

$$5x - 3y - 14 = 0$$

b) $\mathbf{N} = [3,5]$*. Zgodnie z Twierdzeniem 7.2 otrzymujemy*

$$\mathbf{N} \cdot \overrightarrow{P_0P} = A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Stąd

$$3(x-4) + 5(y-2) = 0.$$

$$3x + 5y - 22 = 0 \qquad \rightarrow$$ *postać ogólna*

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{22}{5} \qquad \rightarrow$$ *postać kierunkowa*

c) $x_0 = 4$*,* $y_0 = 2$*,* $\mathbf{u} = [1,0]$, $\overrightarrow{P_0P} = t \cdot \mathbf{u}$ *czyli* $x - x_0 = t \quad y - y_0 = 0 \quad \rightarrow y = 2$

d) $\mathbf{N} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$*,* $\mathbf{N} = [1,0]$ *czyli* $1 \cdot (x-4) + 0(y-2) = 0 \rightarrow x = 4$

e) $x_1 = 4$*,* $y_1 = 2$*;* $x_2 = 1$*,* $y_2 = -1 \rightarrow \dfrac{y-2}{x-4} = \dfrac{-1-2}{1-4}$*. Stąd* $y = x - 2$ *lub* $x - y - 2 = 0$*.*

$\alpha = 60^0$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3} = m \rightarrow y = mx + b \rightarrow 2 = \sqrt{3} \cdot 4 + b \rightarrow b = 2\left(1 - 2\sqrt{3}\right)$*. Stąd* $y = \sqrt{3}x + 2\left(1 - 2\sqrt{3}\right)$ *lub* $y - 2 = \sqrt{3}(x-4)$

f) $\alpha = -45^0$, $\operatorname{tg}\alpha = -1 = m$, $y = -x + b$, $2 = -4 + b, b = 6$, $y = -x + 6$

Przykład 7.5 *Napisać w postaci ogólnej równanie prostej, która przechodzi przez punkt* $(1, 3)$ *i*

a) *jest równoległa do wektora* $[4, -1]$,
b) *jest prostopadła do wektora* $[4, -1]$,
c) *przechodzi przez punkt* $(2, 5)$,
d) *przechodzi przez punkt* $(2, 3)$,
e) *przechodzi przez punkt* $(1, 5)$.

Rozwiązanie 7.5 *Analizujemy kolejno:*

a) *Wychodzimy z postaci wyznacznikowej*

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -(x-1) - 4(y-3) = 0$$

Stąd $x + 4y - 13 = 0$.

b) $\mathbf{N} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 4(x-1) - (y-3) = 0$. *Stąd* $4x - y - 1 = 0$.

c) $\dfrac{x-1}{2-1} = \dfrac{y-3}{5-3} \to 2x - 2 - y + 3 = 0 \to 2x - y + 1 = 0.$

d) $\dfrac{x-1}{2-1} = \dfrac{y-3}{3-3}$ *A więc* $0(x-1) = y - 3$ *czyli* $y = 3$

e) $\dfrac{x-1}{1-1} = \dfrac{y-3}{5-3}$ *Czyli* $2(x-1) = 0(y-3)$. *A więc* $x = 1$.

Przykład 7.6 *Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt* $(-1, 4)$ *i prostopadłej do prostej*

a) $2x - 5y - 7 = 0$,
b) $x - 3y = 0$,
c) $y = x$,
d) $y = 3$,
e) $x = 3$.

Rozwiązanie 7.6 *1. Mamy* $2x - 5y - 7 = 0 \to A_1 = 2, B_1 = -5$. *Z Twierdzenia 7.9 wiemy, że dwie proste są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

A więc $2A_2 - 5B_2 = 0$. *Jeżeli przyjmiemy, że* $A_2 = 5$, *to* $B_2 = 2$. *Stąd* $5(x+1) + 2(y-4) = 0$ *czyli* $5x + 2y - 3 = 0$.

2. Na mocy Twierdzenia 7.10 mamy $1 + m_1m_2 = 0$. *Współczynnik kierunkowy prostej* $2x - 5y - 7 = 0$ *jest równy* $m_1 = \frac{2}{5}$ $\left(y = \frac{2}{5}x - \frac{7}{5}\right)$. *Współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej jest równy* $m_2 = -\frac{5}{2}$. *A więc*

$$y = -\frac{5}{2}x + b$$

Prosta ta ma przechodzić przez $P_0 = (-1, 4)$. *Stąd* b *przyjmuje wartość*

$$4 = \frac{5}{2} + b \to b = \frac{3}{2}$$

Czyli $2y = -5x + 3$. *A więc* $5x + 2y - 3 = 0$.

Przykład 7.7 *Obliczyć współczynnik kierunkowy prostej p, która z prostą l o równaniu $y = 2x$ tworzy kąt skierowany o mierze $\{l, p\}$ równej*

$$\begin{array}{llll} a) & \pi/4 & c) & \pi/3 \\ b) & -\pi/4 & d) & -\pi/3 \end{array}$$

Rozwiązanie 7.7 *Analizujemy kolejno:*

a) Korzystamy z wzoru

$$\operatorname{tg}\{l, p\} = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$m_1 = 2, \{l, p\} = \pi/4, \operatorname{tg}\{l, p\} = 1$. *Stąd* $1 = \left|\frac{2 - m_2}{1 + 2m_2}\right|$

Przypadek 7.1

$$1 = -\frac{2 - m_2}{1 + 2m_2} \rightarrow m_2 = -3$$

Przypadek 7.2

$$1 = \frac{2 - m_2}{1 + 2m_2} \rightarrow m_2 = \frac{1}{3}$$

Rozwiązaniem jest tylko wartość $m_2 = -3$.

b) $m_1 = 2$, $\operatorname{tg}(-\pi/4) = -1$

$$-1 = \left|\frac{2 - m_2}{1 + 2m_2}\right|$$

Przypadek 7.3

$$-1 = -\frac{2 - m_2}{1 + 2m_2} \rightarrow m_2 = \frac{1}{3}$$

Przypadek 7.4

$$-1 = \frac{2 - m_2}{1 + 2m_2} \rightarrow m_2 = -3$$

Rozwiązaniem jest tylko wartość $m_2 = \frac{1}{3}$.

Przykład 7.8 *Wyznaczyć punkt wspólny* $P(x_0, y_0)$ *dwóch prostych*

$$\begin{array}{lll} a) & l_1 : 3x + 2y - 6 = 0 & l_2 : 2x - 3y + 6 = 0 \\ b) & l_1 : x + y - 10 = 0 & l_2 : x = t,\ y = 2t + 1 \\ c) & l_1 : x\cos\alpha + y\sin\alpha = a & l_2 : x\cos\beta + y\sin\beta = b \\ d) & l_1 : y = m_1 x + b_1 & l_2 : y = m_2 x + b_2,\ m_1 \neq m_2 \end{array}$$

Rozwiązanie 7.8

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13 \\ D_x &= \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = -18 + 12 = -6 \\ D_y &= \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -18 - 12 = -30 \end{aligned}$$

A więc $x_0 = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{13}$ *oraz* $y_0 = \frac{D_y}{D} = \frac{30}{13}$. *Stąd* $P_0 = \left(\frac{6}{13}, \frac{30}{13}\right)$.

Przykład 7.9 *Obliczyć odległość punktu P od prostej l mając dane*

a)	$P=(5,7)$	$l:\ 3x+4y+12=0$
b)	$P=(-1,-2)$	$l:\ 2x-y-10=0$
c)	$P=(4,-2)$	$l:\ y=-x+5$
d)	$P=(0,0)$	$l:\ x=at+b,\ y=ct+d,\ \vert a\vert+\vert c\vert>0$

Rozwiązanie 7.9

$$d\left(P,l\right)=\frac{|Ax_p+By_p+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

a)

$$d\left(P,l\right)=\frac{|3\cdot 5+4\cdot 7+12|}{\sqrt{9+16}}=\frac{15+28+12}{5}=11$$

Przykład 7.10 *W pęku prostych wyznaczonych przez proste $l_1\ :\ 2x+3y+4=0$ i $l_2\ :\ 5x+6y+7=0$ znaleźć prostą l*

a) przechodzącą przez początek układu,

b) równoległą do prostej $8x+9y+10=0$,

c) prostopadłej do prostej $8x+9y+10=0$.

Rozwiązanie 7.10 *Równanie pęku prostych ma postać*

$$\lambda\left(2x+3y+4\right)+\mu\left(5x+6y+7\right)=0$$

lub

$$\left(2x+3y+4\right)+k\left(5x+6y+7\right)=0,\quad k=\frac{\mu}{\lambda},\quad \lambda\neq 0$$

Wstawiając współrzędne punktu $P=(0,0)$ do powyższego równania otrzymujemy

$$4\lambda+7\mu=0\quad lub\quad 4+7k=0$$

Czyli $k=-\frac{4}{7}$. A więc, poszukiwane równanie ma postać

$$\left(2x+3y+4\right)-\frac{4}{7}\left(5x+6y+7\right)=0\quad lub\quad 2x+y=0$$

Suma współczynników stojących przy x i y w pęku prostych ma być równa współczynnikom stojącym przy x i y w równaniu danej prostej $8x+9y+10=0$. A więc

$$\lambda\left(2x+3y+4\right)+\mu\left(5x+6y+7\right)=0$$

Czyli równanie

$$\left(2\lambda+5\mu\right)x+\left(3\lambda+6\mu\right)y+\left(4\lambda+7\mu\right)=0$$

ma odpowiadać

$$8x+9y+10=0$$

Stąd

$$2\lambda+5\mu=8\qquad 3\lambda+6\mu=9$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3, \quad D_\lambda = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 3, \quad D_\mu = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6$$

$$\lambda = -1, \quad \mu = 2, \quad k = -2$$

Poszukiwana prosta jest opisana równaniem

$$(2x + 3y + 4) - 2\,(5x + 6y + 7) = 0 \quad \textit{lub} \quad 8x + 9y + 10 = 0$$

A więc, jest to prosta z pęku.

Szukamy współrzędnych wierzchołka pęku prostych. W tym celu rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 5x + 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3, \quad D_x = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} = -3, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 6$$

A więc $P_0 = (1, -2)$. *Musimy teraz wyznaczyć prostą przechodzącą przez punkt* P_0 *i prostopadłą do prostej* $8x + 9y + 10 = 0$. *Z warunku prostopadłości mamy*

$$\begin{aligned} &A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \\ &8A_2 + 9B_2 = 0 \end{aligned}$$

Można np. przyjąć, że $A_2 = 9$, $B_2 = -8$. *Wartość* C_2 *wyznaczamy korzystając ze współrzędnych* P_0. *A więc*

$$\begin{aligned} &A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad \textit{czyli} \\ &9x - 8y + C_2 = 0 \\ &9 \cdot 1 - 8 \cdot (-2) + C_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad 9 + 16 + C_2 = 0,\ C_2 = -25 \end{aligned}$$

Prosta jest opisana równaniem

$$9x - 8y - 25 = 0$$

lub

$$(2x + 3y + 4) - \frac{43}{94}\,(5x + 6y + 7) = 0$$

Przykład 7.11 *Dane są punkty* $A = (3, 0)$, $B = (11, 0)$, $C = (3, 6)$. *Wyznaczyć proste zawierające dwusieczne kątów trójkąta* ABC.

Rozwiązanie 7.11 $x - y - 3 = 0, \quad x + 3y - 11 = 0, \quad 2x + y - 12 = 0$

Przykład 7.12 *Napisać w postaci proporcji podwójnej równanie prostej przechodzącej przez punkt* P_0 *i równoległej do wektora* $\mathbf{u}$, *mając dane*

a)	$P_0 = (1, -3, 0)$,	$\mathbf{u} = [3, -2, 5]$
b)	$P_0 = (2, 3, 4)$,	$\mathbf{u} = [1, 1, 0]$
c)	$P_0 = (2, 3, 4)$,	$\mathbf{u} = [0, 1, 0]$
d)	$P_0 = (2, 3, 4)$,	$\mathbf{u} = [1, 0, 0]$

Rozwiązanie 7.12 *Na podstawie definicji mamy*

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$$

Stąd

$$\begin{array}{ll}
a) & \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{2}{5}\\
b) & \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2-4}{0},\ \textit{tzn. } x-2=y-3,\ z-4=0\\
c) & \dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2-4}{0},\ x=2,\ z=4,\ y-\ \textit{dowolne}\\
d) & \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{2-4}{0},\ y=3,\ z=4,\ x-\ \textit{dowolne}
\end{array}$$

Przykład 7.13 *Napisać w postaci parametrycznej równania prostej*

$$\begin{array}{ll}
a) & \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{2-5}{6}\\
b) & 2x+3=4y+5=8z
\end{array}$$

Rozwiązanie 7.13 *Przyjmując*

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{2-5}{6}=t$$

otrzymujemy

$$x=1+2t \qquad y=3+4t \qquad z=5+6t$$

Przyjmując

$$2x+3=4y+5=8z=t$$

otrzymujemy

$$x=-\frac{3}{2}+\frac{t}{2} \qquad y=-\frac{5}{4}+\frac{t}{4} \qquad z=\frac{t}{8}$$

Przykład 7.14 *Napisać równanie płaszczyzny, która przechodzi przez:*

a) *punkt* $(1,-2,-1)$ *i jest prostopadła do wektora* $[1,-3,2]$,
b) *punkt* $(0,2,5)$ *i jest równoległa do wektorów* $[1,0,0]$ *i* $[2,1,-3]$,
c) *punkty* $(1,0,5)$, $(-1,2,2)$, $(0,3,4)$,
d) *dwie proste równoległe* $l_1:\dfrac{x}{2}=y-1=\dfrac{x+2}{3}$, $l_2:\dfrac{x-3}{2}=y=2/3$.

Rozwiązanie 7.14 *Zgodnie z Twierdzeniem 7.15 mamy* $\mathbf{N}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$. *A więc*

$$1\,(x-1)-3\,(y+2)+2\,(z+1)=0$$

Stąd

$$x-3y+2z-5=0$$

Zgodnie z Twierdzeniem 7.16

$$\overrightarrow{P_0P}=t\mathbf{u}_1+s\mathbf{u}_2$$

A więc

$$\begin{vmatrix} x-0 & 1 & 2 \\ y-2 & 0 & 1 \\ z-5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Czyli

$$x\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + (z-5)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$3\,(y-2) + (z-5) = 0$$

$$3y + z - 11 = 0$$

Zgodnie z Twierdzeniem 7.17 mamy

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1-1 & -1 \\ y-0 & 2 & 3 \\ z-2 & 2-2 & 2 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z-2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\,(x-1) + 4y - 4\,(z-2) = 0$$

$$4x + 4y - 4z + 4 = 0, \quad \longrightarrow \quad x + y - z + 1 = 0$$

Patrz Twierdzenie 7.18, $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$

$$\begin{vmatrix} x-0 & 2 & 3 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z+2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Stąd

$$x + y - z - 3 = 0$$

8 Ciągi i szeregi liczbowe

8.1 Ciąg liczbowy i jego granica

Liczby naturalne

$$(1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots) \tag{346}$$

liczby parzyste dodatnie

$$(2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots) \tag{347}$$

liczby nieparzyste dodatnie

$$(1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, \ldots) \tag{348}$$

odwrotności liczb naturalnych

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right) \tag{349}$$

są przykładami ciągów.

Definicja 8.1 *Funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych $\mathcal{N}$ w zbiór liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$*

$$f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{R} \tag{350}$$

nazywamy ***ciągiem nieskończonym o wyrazach rzeczywistych*** *lub* ***ciągiem liczbowym*** *albo krótko:* ***ciągiem*** *i oznaczamy*

$$(a_n) \quad lub \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \tag{351}$$

Symbol n nazywamy **wskaźnikiem,** a a_n **wyrazem o wskaźniku** n albo $n-$ **tym wyrazem** ciągu liczbowego. Do zdefiniowania ciągu liczbowego wystarczy więc podać wzór na jego $n-$ ty wyraz.

Uwaga 8.1 *Mając na uwadze informacje uzyskane w szkole średniej, zauważamy, że odwzorowanie (350) charakteryzuje się tym, że jego argumentami są kolejne liczby naturalne. Nie jest więc odwzorowaniem, które ogólnie nazywamy* ***odwzorowaniem ciągłym****. Funkcję zależną od argumentu zmieniającego się skokowo nazywamy* ***funkcją dyskretną****. Jej wartości są* ***punktami*** *o współrzędnych $(n, f(n))$ lub (n, a_n) (patrz rysunki w dalszej części wykładu).*

Ciąg arytmetyczny ($p-$ pierwszy wyraz, $d-$ różnica ciągu)

$$(p, p+d, p+2d, p+3d, \ldots, p+(n-1)\,d, \ldots) \tag{352}$$

oraz ciąg geometryczny ($p-$ pierwszy wyraz, $q-$ iloraz ciągu)

$$\left(p, pq, pq^2, pq^3, \ldots, pq^{n-1}, \ldots\right) \tag{353}$$

są przykładami ciągów bardziej złożonych.

Szczególnym przypadkiem ciągu jest ciąg o takich samych wyrazach - ciąg stały ($c-$ dowolna liczba)

$$(c, c, c, \ldots, c, \ldots) \tag{354}$$

który jest jednocześnie ciągiem geometrycznym ($q = 1$) i arytmetycznym ($d = 0$).

Innymi przykładami ciągów są odwzorowania

$$(-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots) \tag{355}$$

$$\left(2, 2\frac{1}{4}, 2\frac{10}{27}, 2\frac{113}{256}, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ldots\right) \tag{356}$$

$$\left(c, \sqrt{c}, \sqrt[3]{c}, \sqrt[4]{c}, \ldots, \sqrt[n]{c}, \ldots\right) \tag{357}$$

$$\left(1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots, \sqrt[n]{n}, \ldots\right) \tag{358}$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right) \tag{359}$$

W ciągu liczbowym bardzo ważne jest uporządkowanie wyrazów. Ciągi

$$(1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \ldots) \tag{360}$$

i

$$(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots) \tag{361}$$

pomimo tej samej liczby zer i jedynek są różne, ponieważ ich wyrazy są inaczej uporządkowane.

Definicja 8.2 *Mówimy, że ciąg (a_n) jest:*

1. ***rosnący** (silnie rosnący), jeżeli*[15]

$$\forall n \in \mathcal{N} \quad a_n < a_{n+1} \tag{362}$$

2. ***niemalejący** (słabo rosnący), jeżeli*

$$\forall n \in \mathcal{N} \quad a_n \leq a_{n+1} \tag{363}$$

3. ***malejący** (silnie malejący), jeżeli*

$$\forall n \in \mathcal{N} \quad a_n > a_{n+1} \tag{364}$$

4. ***nierosnący** (słabo malejący), jeżeli*

$$\forall n \in \mathcal{N} \quad a_n \geq a_{n+1} \tag{365}$$

5. ***monotoniczny**, jeżeli jest niemalejący lub nierosnący,*

6. ***silnie monotoniczny**, jeżeli jest rosnący lub malejący.*

Przykład 8.1 *Wykazać, że ciąg określony wzorem*

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

jest rosnący.

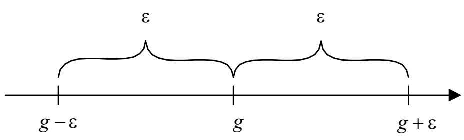
[15] Zapis $\forall n \in \mathcal{N}$ czytamy: dla każdego n należącego do zbioru liczb naturalnych.

Rozwiązanie 8.1 *Należy wykazać, że różnica $a_{n+1} - a_n$ jest dodatnia dla każdego $n \in \mathcal{N}$. Otóż dla $n = m \in \mathcal{N}$ zachodzi*

$$\begin{aligned} a_{m+1} - a_m &= \frac{m+1}{m+2} - \frac{m}{m+1} = \frac{(m+1)^2 - m(m+2)}{(m+1)(m+2)} = \\ &= \frac{1}{(m+1)(m+2)} > 0 \end{aligned}$$

Ponieważ m jest dowolne, zatem ciąg jest rosnący.

Definicja 8.3 *Otoczeniem $U(g, \varepsilon)$ liczby g o promieniu ε $(\varepsilon > 0)$ nazywamy przedział otwarty $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$.*[16]



Rysunek 34: Otoczenie liczby g.

Mówimy, że liczba y różni się od liczby g mniej niż o ε, jeżeli należy do otoczenia g. Zapisujemy to

$$y \in U(g, \varepsilon) \Longleftrightarrow |y - g| < \varepsilon \tag{366}$$

Wiemy, że

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

Zatem liczby 1.41 i 1.42 różnią się od $\sqrt{2}$ mniej niż o 0.01, czyli należą do $U\left(\sqrt{2},\ 0.01\right)$.

Powiedzenie **prawie wszystkie wyrazy ciągu** oznacza - **wszystkie wyrazy ciągu z wyjątkiem co najwyżej skończenie wielu**.

Przykład 8.2 *Weźmy pod uwagę ciąg o wyrazie ogólnym*

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Możemy powiedzieć, że prawie wszystkie wyrazy tego ciągu należą do otoczenia liczby 0 o promieniu 0.02.

Rozwiązanie 8.2 *Rzeczywiście, odrzucając 50 początkowych wyrazów tego ciągu widzimy, że stwierdzenie to jest prawdziwe. Wyraz $a_{51} = \frac{1}{51}$ i wszystkie po nim następujące należą do rozpatrywanego otoczenia. Łatwo wykazać, że dla dowolnego otoczenia liczby 0 zawsze znajdziemy taką liczbę naturalną M, że po skreśleniu M początkowych wyrazów ciągu wszystkie następne wyrazy o wskaźniku $n > M$ będą do tego otoczenia należały. Niech $\varepsilon > 0$ będzie promieniem dowolnego otoczenia liczby 0. Otrzymujemy nierówność*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Za M wystarczy przyjąć dowolną liczbę naturalną nie mniejszą od $1/\varepsilon$.

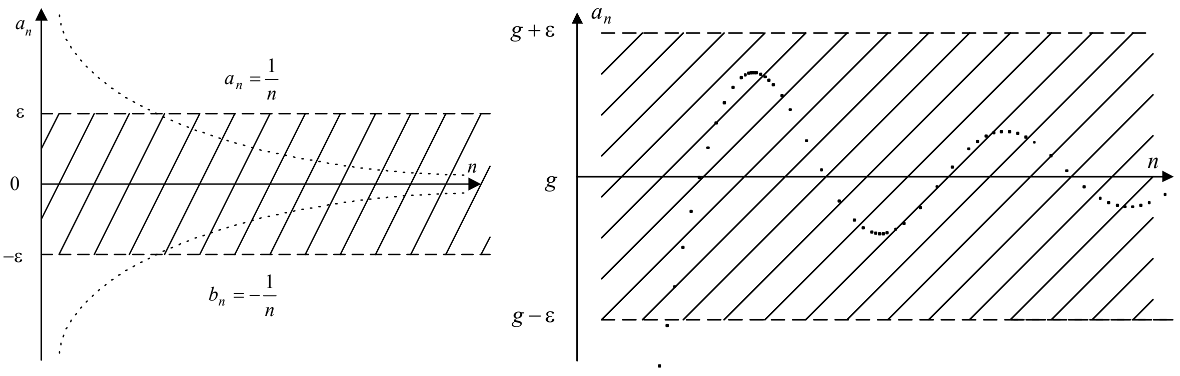
Rozwiązanie 8.3 *Gdy $\varepsilon = 0.02$, to $M = 50$. Dla $\varepsilon = 0.00001$ wartość $M = 100000$. Mówimy, że liczba 0 jest granicą ciągu $\left(\frac{1}{n}\right)$. Jest ona również granicą ciągu $\left(-\frac{1}{n}\right)$.*

Definicja 8.4 ***Ciąg*** *(a_n) jest* ***ograniczony****, jeżeli istnieje liczba M taka, że*

$$\forall n \in \mathcal{N} \quad |a_n| \leq M \tag{367}$$

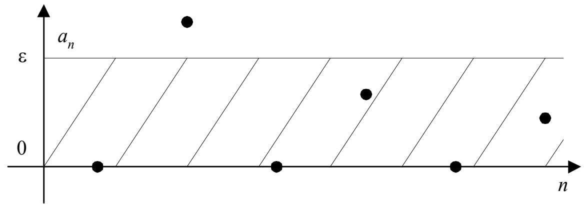
Oznacza to, że istnieje przedział ograniczony, w którym znajdują się wszystkie wyrazy tego ciągu.

[16] Przedział domknięty $\langle g - \varepsilon, g + \varepsilon \rangle$ nazywamy otoczeniem domkniętym liczby g o promieniu ε.



Rysunek 35: Zbieżność ciągów.

Przykładem ciągu ograniczonego jest ciąg $a_n = \frac{n}{n+1}$. Przykładem ciągu nieograniczonego jest ciąg arytmetyczny o niezerowej różnicy d.



Rysunek 36: Wartości wyrazów ciągu (a_n).

Definicja 8.5 *Liczbę g nazywamy **granicą ciągu** (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy*[17]

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall n > \delta \quad |a_n - g| < \varepsilon \tag{368}$$

co zapisujemy

$$g = \lim_{n \to \infty} a_n \quad lub \quad g = \lim a_n$$

Definicję 8.5 wypowiadamy również następująco:

Definicja 8.6 *Liczba g jest **granicą ciągu** (a_n), jeżeli w jej dowolnym otoczeniu znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n).*

Przykład 8.3 *Wykazać, że*

$$\lim \frac{1 + (-1)^n}{n} = 0$$

Rozwiązanie 8.4 *Wypiszemy kilka początkowych wyrazów ciągu $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$: $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \ldots$. Wartości wyrazów ciągu przedstawione są na rysunku 36.*

Zadanie rozwiążemy oddzielnie dla wskaźników parzystych i nieparzystych.

Wyrazy o wskaźniku nieparzystym: $a_{2k-1} = 0$ dla każdego $k \in \mathcal{N}$ $(\forall k \in \mathcal{N})$, więc dla każdego $\varepsilon > 0$ i $k \in \mathcal{N}$ prawdą jest, że

$$a_{2k-1} \in U(0, \varepsilon)$$

Wyrazy o wskaźniku parzystym : $a_{2k} = \frac{1+1}{2k} = \frac{2}{2k} = \frac{1}{k}$ dla każdego $k \in \mathcal{N}$. Zatem

$$|a_{2k} - 0| < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{k} < \varepsilon \Longleftrightarrow 2k > \frac{2}{\varepsilon}$$

Przyjmijmy, że $M = \frac{2}{\varepsilon}$ i $\varepsilon = \frac{1}{50}$, stąd $M = 100$. Wówczas

$$a_{101} = 0, \quad a_{102} = \frac{1}{51} < \frac{1}{50}, \quad a_{103} = 0, \quad a_{104} = \frac{1}{52} < \frac{1}{50}$$

Widzimy, że dla $n > M$ liczba 0 jest granicą ciągu, bo $|a_n - 0| < \varepsilon$.

[17] Zapis ten czytamy: Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka $\delta > 0$, że dla każdego $n > \delta$ wyrażenie $|a_n - g| < \varepsilon$.

Definicja 8.7 *Ciąg, który ma granicę nazywamy **zbieżnym**, a ciąg, który nie ma granicy - **rozbieżnym**.*

Twierdzenie 8.1 ***Ciąg zbieżny jest ograniczony.***

Z ograniczoności ciągu nie wynika jego zbieżność. Ciąg ograniczony może być rozbieżny, np.

$$(-1,+1,-1,+1,\ldots,(-1)^n,\ldots)$$

Przykład 8.4 *Udowodnić na podstawie definicji, że*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

Rozwiązanie 8.5 *Ciąg jest zbieżny do granicy skończonej, jeżeli $|a_n-g|<\varepsilon$. A więc mamy wykazać, że*

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$$

tzn. dla dowolnej liczby dodatniej ε istnieje liczba δ taka, że dla $n>\delta$ zachodzi powyższa nierówność. Ponieważ

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\left|\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+1}\right|=\left|\frac{-1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1} \tag{369}$$

to na mocy

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$$

otrzymujemy, że

$$\frac{1}{n+1}<\varepsilon \tag{370}$$

Rozwiązując ostatnią nierówność ze względu na n dochodzimy do oszacowania

$$n>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \tag{371}$$

Teraz możemy wyznaczyć liczbę δ. Mianowicie, przyjmujemy

$$\delta=\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \tag{372}$$

i stwierdzamy, że dla $n>\delta$ zachodzi nierówność

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon \tag{373}$$

Przykład 8.5 *Udowodnić na podstawie definicji, że:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad i \quad \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0 \tag{374}$$

Rozwiązanie 8.6 *Nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$ występująca w definicji granicy ciągu w obu rozważanych przypadkach przybiera postać*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \tag{375}$$

Zakładamy, że $\varepsilon > 0$. Nierówność (375) jest równoważna nierówności

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \tag{376}$$

Przyjmując $\delta = 1/\varepsilon$ stwierdzamy, że dla $n > \delta$ zachodzi (374). Stwierdzenie: ciąg (a_n) jest zbieżny - oznacza, że ciąg ten ma pewną granicę (skończoną). Zbieżność ciągu oznacza istnienie granicy (skończonej) tego ciągu.

Twierdzenie 8.2 *Jeżeli ciąg jest zbieżny, to ma dokładnie jedną granicę.*

Definicja 8.8 *Mówimy, że ciąg (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$ (czyt.: do plus nieskończoności) albo, że ciąg (a_n) ma granicę (niewłaściwą) $+\infty$ i piszemy*

$$a_n \to +\infty \qquad \text{albo} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \tag{377}$$

jeżeli dla dowolnej liczby A istnieje liczba δ taka, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o wskaźnikach n większych od δ są większe od A

$$\forall A \quad \exists \delta \quad \forall n > \delta \quad a_n > A \tag{378}$$

Definicja 8.9 *Mówimy, że ciąg (a_n) jest rozbieżny do $-\infty$ albo, że ciąg (a_n) ma granicę (niewłaściwą) $-\infty$, co zapisujemy*

$$a_n \to -\infty \qquad \text{albo} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \tag{379}$$

jeżeli dla dowolnej liczby A istnieje liczba δ taka, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o wskaźnikach n większych od δ są mniejsze od A

$$\forall A \quad \exists \delta \quad \forall n > \delta \quad a_n < A \tag{380}$$

Definicja 8.10 *(Otoczenia $\pm\infty$)*

1. *Otoczeniem plus nieskończoności nazywamy każdy przedział $(A, +\infty)$, gdzie A jest dowolną liczbą.*
2. *Otoczeniem minus nieskończoności nazywamy każdy przedział $(-\infty, A)$, gdzie A jest dowolną liczbą.*

Posługując się powyższymi pojęciami możemy powiedzieć, że

1. Ciąg (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$, jeżeli w każdym otoczeniu plus nieskończoności znajdują się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.
2. Ciąg (a_n) jest rozbieżny do $-\infty$, jeżeli w każdym otoczeniu minus nieskończoności znajdują się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

Wniosek 8.1 *Każdy ciąg arytmetyczny o różnicy dodatniej jest rozbieżny do $+\infty$; każdy ciąg arytmetyczny o różnicy ujemnej jest rozbieżny do $-\infty$.*

Twierdzenie 8.3 *Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*

8.2 Własności ciągu geometrycznego

Twierdzenie 8.4 *Własności ciągu geometrycznego* (q^n) *zależą od wartości ilorazu ciągu* q, *a mianowicie:*

- *Jeżeli* $q > 1$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$
- *Jeżeli* $q = 1$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$
- *Jeżeli* $|q| < 1$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$
- *Jeżeli* $q \leq -1$, *to ciąg* (q^n) *jest rozbieżny.*

Twierdzenie 8.5 *(O znaku wyrazów ciągu)*
Jeżeli granica ciągu jest liczbą dodatnią, to prawie wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie.
Jeżeli granica ciągu jest liczbą ujemną, to prawie wszystkie wyrazy ciągu są ujemne.

Twierdzenie 8.6 *(O znaku granicy ciągu)*
Jeżeli ciąg jest zbieżny i ma nieskończenie wiele wyrazów nieujemnych, to granica tego ciągu jest liczbą nieujemną.
Jeżeli ciąg jest zbieżny i ma nieskończenie wiele wyrazów niedodatnich, to granica tego ciągu jest liczbą niedodatnią.

Twierdzenie 8.7 *(O relacjach między granicami ciągów)*
Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *oraz* $a < b$, *to istnieje liczba* δ *taka, że* $a_n < b_m$ *dla* $n > \delta$ *i* $m > \delta$.
Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *oraz* $a_n < b_n$ *dla prawie wszystkich* n, *to* $a \leq b$.

8.3 Działania na ciągach i ich granicach. Symbole nieoznaczone

Definicja 8.11 *Niech będą dane dwa ciągi* (a_n) *i* (b_n). *Ciągi* (A_n), (B_n), (C_n) *określone wzorami:*

$$A_n = a_n + b_n \tag{381}$$
$$B_n = a_n - b_n \tag{382}$$
$$C_n = a_n \cdot b_n \tag{383}$$

nazywamy odpowiednio: sumą, różnicą i iloczynem ciągów (a_n) *i* (b_n). *Jeżeli* $b_n \neq 0$ *dla* $\forall n \in \mathcal{N}$, *to ciąg* (D_n) *określony wzorem:*

$$D_n = \frac{a_n}{b_n} \tag{384}$$

nazywamy ilorazem ciągów (a_n) *i* (b_n).

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) **są zbieżne**, to działaniom na tych ciągach odpowiadają analogiczne działania na granicach tych ciągów. Mówi o tym następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.8 *(O działaniach na ciągach)*

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciągi $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$ i $(a_n \cdot b_n)$ też są zbieżne i między ich granicami zachodzą związki[18]

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}a_n + \lim_{n\to\infty}b_n \tag{385}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty}a_n - \lim_{n\to\infty}b_n \tag{386}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}b_n\right) \tag{387}$$

***Jeżeli ciągi** (a_n) i (b_n) **są zbieżne** oraz dla dowolnego n naturalnego $b_n \neq 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest zbieżny i jego granica spełnia równość:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n} \tag{388}$$

Przykład 8.6 *Obliczyć granicę*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{3n^2+8} \tag{389}$$

Rozwiązanie 8.7 *Zauważmy, że oba ciągi $(2n^2+n)$ i $(3n^2+8)$ są rozbieżne, czyli*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{3n^2+8} = \frac{\infty}{\infty}$$

Oznacza to, że nie możemy stosować do nich wzoru (388). Przekształcimy więc wyraz ogólny ciągu liczbowego (389) dzieląc licznik i mianownik przez n w najwyższej potędze, czyli przez n^2:

$$\frac{2n^2+n}{3n^2+8} = \frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{8}{n^2}} = \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{8}{n^2}} \tag{390}$$

Granica ciągu $\left(2+\frac{1}{n}\right)$ jest równa 2, a ciągu $\left(3+\frac{8}{n^2}\right)$ jest równa 3. Ponieważ tak przekształcone wyrażenie (390) zawiera w liczniku i mianowniku ciągi zbieżne, zatem na mocy (384) otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{3n^2+8} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2+n}{n^2}}{\frac{3n^2+8}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\boxed{\frac{1}{n}}^{\nearrow 0}}{3+\boxed{\frac{8}{n^2}}^{\nearrow 0}} = \frac{2}{3} \tag{391}$$

Zapis $\boxed{\frac{1}{n}}^{\nearrow 0}$ oznacza, że wyrażenie w owalu przy $n\to\infty$ zdąża do zera.

***Odpowiedź:** Granica jest równa $\frac{2}{3}$.*

Uwaga 8.2 *Wyrażenie $\frac{\infty}{\infty}$ nazywamy nieoznaczonością typu $\frac{\infty}{\infty}$ (**symbolem nieoznaczonym** typu $\frac{\infty}{\infty}$)*[19].

[18] Poniższe relacje odczytujemy: granica sumy (różnicy, iloczynu) dwóch ciągów jest równa sumie (różnicy, iloczynowi) granic tych ciągów.

[19] Czytamy: *nieskończoność nad nieskończoność.*

Twierdzenie 8.9 *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 0$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Twierdzenie 8.10 *(O rachunku granic nieskończonych)*

1. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *oraz* $\forall n\ a_n > 0$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$

2. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *oraz* $\forall n\ a_n < 0$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$

3. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *oraz* $\forall n\ a_n \neq 0$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = +\infty$

4. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *albo* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

5. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b > 0$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$

6. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b < 0$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$

7. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$

8. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *oraz ciąg* (b_n) *jest ograniczony, to* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$

Uwaga 8.3 *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, *to granicę* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = |\infty \cdot 0|$ *można wyznaczyć po szczegółowej analizie ciągów* (a_n), (b_n). *Jest to tzw. nieoznaczoność typu* $|\infty \cdot 0|$[20] *(**symbol nieoznaczony** typu* $|\infty \cdot 0|$*).*

Wniosek 8.2 *(za [4])*

a_n	b_n	$(a_n \cdot b_n)$	$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$
n	c/n	c	c
n	$1/n^2$	$1/n$	0
n^2	$1/n$	n	$+\infty$
n^2	$-1/n$	$-n$	$-\infty$
n^2	$(-1)^n/n$	$(-1)^n n$	*nie istnieje*

Uwaga 8.4 *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, *to granicę* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = |\infty - \infty|$ *można wyznaczyć po szczegółowej analizie ciągów* (a_n) *i* (b_n). *Jest to nieoznaczoność typu* $|\infty - \infty|$[21] *(**symbol nieoznaczony** typu* $|\infty - \infty|$*).*

Przykład 8.7 *Obliczyć* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$.

[20] Czytamy: *nieskończoność razy zero.*
[21] Czytamy: *nieskończoność minus nieskończoność.*

Rozwiązanie 8.8 *Stwierdzamy, że jest to ciąg typu* $|\infty - \infty|$. *Mnożąc i dzieląc różnicę* $\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$ *przez sumę* $\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)$ *dochodzimy do*

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n}$$

A więc otrzymujemy ciąg typu $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$ *(nieoznaczoność typu* $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$*). Dzieląc licznik i mianownik przez* n *sprowadzamy dany ciąg do postaci*

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \boxed{\frac{n}{n^2}}^{\nearrow 0}} + \frac{n}{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \boxed{\frac{1}{n}}^{\nearrow 0}} + 1}$$

Stąd $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$. *Odp. Granica równa się* $\frac{1}{2}$.

8.4 Warunki zbieżności ciągu

Przy wykazywaniu zbieżności ciągu liczbowego na podstawie definicji (np. Definicji 8.6) wymagana jest znajomość jego granicy. Może być tak, że liczba ta nie jest wcześniej znana, lecz dany ciąg, o ile jest zbieżny, wyznacza ją. Wówczas wyrazy tego ciągu są jej przybliżeniami.

Poniżej przedstawimy twierdzenia orzekające o zbieżności ciągu. Opisują one **warunki zbieżności ciągu liczbowego**.

Twierdzenie 8.11 *Jeżeli ciąg jest rosnący i ograniczony, to jest zbieżny, a granica tego ciągu jest liczbą większą od dowolnego wyrazu ciągu.*

Twierdzenie 8.12 *Jeżeli ciąg jest rosnący i nieograniczony, to jest rozbieżny do* $+\infty$.

Twierdzenie 8.13 *Jeżeli ciąg jest monotoniczny i nieograniczony, to jest rozbieżny do* $+\infty$ *albo* $-\infty$.

Twierdzenie 8.14 *(O trzech ciągach)*

Jeżeli dwa ciągi (a_n) *i* (b_n) *są zbieżne do wspólnej granicy i jeżeli wyrazy trzeciego ciągu* (c_n) *poczynając od pewnego* $n_0 \in \mathcal{N}$ *są zawarte między odpowiednimi wyrazami tamtych ciągów, tzn.*

$$a_n \le c_n \le b_n \qquad \text{lub} \quad b_n \le c_n \le a_n$$

to ciąg (c_n) *jest zbieżny do tej samej granicy co ciągi* (a_n) *i* (b_n).

Przykład 8.8 *Wykazać, że*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \tag{392}$$

Rozwiązanie 8.9 *Korzystamy z nierówności*

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n} \tag{393}$$

oraz z Twierdzenia 8.14.

Przykład 8.9 *Udowodnić, że jeżeli $c > 0$, to*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1 \tag{394}$$

Rozwiązanie 8.10 *Jeżeli $c = 1$, to wzór (394) jest prawdziwy. Jeżeli $c > 1$, to $\sqrt[n]{c} > 1$. Można wówczas przyjąć, że*

$$\sqrt[n]{c} = 1 + x_n \tag{395}$$

gdzie $x_n > 0$. Mamy zatem

$$c = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2!}x_n^2 + \ldots + x_n^n \tag{396}$$

Stąd$c > 1 + nx_n$, a $x_n < \frac{c-1}{n}$. Otrzymujemy podwójną nierówność

$$0 < x_n < \frac{c-1}{n} \tag{397}$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c-1}{n} = 0$, to na mocy twierdzenia o trzech ciągach mamy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \tag{398}$$

Z (398) po uwzględnieniu (395) wynika (394). Jeżeli $c < 1$, to $\frac{1}{c} > 1$ i wzór $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{c}} = 1$ jest prawdziwy na podstawie poprzedniej części dowodu, gdyż

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1/c}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/c}} = \frac{1}{1} = 1 \tag{399}$$

Przykład 8.10 *Udowodnić, że*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \tag{400}$$

Rozwiązanie 8.11 *Jest to ciąg typu $|\infty^0|$ (nieoznaczoność typu $|\infty^0|$). Skorzystamy z dowodu przedstawionego w poprzednim przykładzie. Możemy przyjąć, że*

$$\sqrt[n]{n} = 1 + x_n \tag{401}$$

gdzie $x_n > 0$, zatem dla $n = 2, 3, \ldots$ mamy:

$$n = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2!}x_n^2 + \ldots + x_n^n \tag{402}$$

Stąd $n > \frac{n(n-1)}{2!}x_n^2$ oraz

$$0 < x_n^2 < \frac{2}{n-1} \tag{403}$$

Wykorzystujemy twierdzenie o trzech ciągach i stwierdzamy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n-1} = 0 \tag{404}$$

Wobec (404) otrzymujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = 0 \tag{405}$$

Na podstawie Twierdzenia 8.9 wiemy, że jeżeli zachodzi (405), to również zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \tag{406}$$

Uwzględniając (406) w (401) dochodzimy do (400).

Przykład 8.11 *Obliczyć* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{8^n + 3^n + 11^n}$.

Rozwiązanie 8.12 *Zauważmy, że*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{11^n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{8^n + 3^n + 11^n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3 \cdot 11^n}$$

Ponieważ $\sqrt[n]{11^n} = 11$, *a* $\sqrt[n]{3 \cdot 11^n} = 11 \cdot \sqrt[n]{3}$, *zatem otrzymujemy*

$$11 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{8^n + 3^n + 11^n} \leq 11 \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$$

to

$$11 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{8^n + 3^n + 11^n} \leq 11$$

Stąd otrzymujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{8^n + 3^n + 11^n} = 11$$

Twierdzenie 8.15 *(O warunku koniecznym i wystarczającym Cauchy'ego zbieżności ciągu)*
Warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności ciągu liczbowego (a_n) *(do granicy skończonej) jest, aby dla dowolnej liczby dodatniej* ε *istniała liczba* δ *taka, że wyrazy ciągu o wskaźnikach większych od* δ *różnią się między sobą o mniej niż o* ε. *Zapisujemy to*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall n, m > \delta \quad |a_m - a_n| < \varepsilon \tag{407}$$

8.5 Liczba $e = 2,718281\ldots$

Twierdzenie 8.16 *Ciąg o wyrazie ogólnym*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{408}$$

jest rosnący.

Dowód 8.1 *Stosując wzór dwumienny Newtona, mamy:*

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{n!}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n = \\ &= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3!} + \ldots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{n!} \end{aligned} \tag{409}$$

Analogicznie mamy

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)}{3!} + \ldots + \\ &+ \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)}{n!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!} \end{aligned} \tag{410}$$

Każdy ze składników wyznaczających sumę (409) dla a_n *jest nie większy od odpowiedniego składnika (410). Zatem* $a_n \leq a_{n+1}$.

Twierdzenie 8.17 *Ciąg*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{411}$$

jest ograniczony.

Dowód 8.2

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2} + \frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^n <$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

Twierdzenie 8.18 *Ciąg*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

jest zbieżny.

Definicja 8.12 *(Liczby e)*
Liczbę e definiujemy wzorem:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{412}$$

Uwaga 8.5 *Dowodzi się, że e jest liczbą niewymierną i jest ona w przybliżeniu równa*

$$e = 2.718281828459045235\ldots$$

Liczba e jest podstawą ***logarytmu naturalnego****, oznaczanego* ln.

Twierdzenie 8.19

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \tag{413}$$

Dowód 8.3 *Dla $n > 1$ mamy*

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} \tag{414}$$

Wobec tego

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}$$

Stąd[22],[23]

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{e}$$

Przykład 8.12 *Obliczyć wartość granicy ciągu*

$$a_n = \sqrt[3]{n^3+7n^2} - n \tag{415}$$

Rozwiązanie 8.13 *Na początku przekształcimy powyższe wyrażenie zgodnie z wzorem*

$$\left(a^2+ab+b^2\right) = \left(a^3-b^3\right)/\left(a-b\right)$$

Mamy więc $a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$. *Czyli*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+7n^2}-n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+7n^2-n^3}{\sqrt[3]{\left(n^3+7n^2\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+7n^2}+n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{7n^2}{\sqrt[3]{n^6+14n^5+49n^4}+n\sqrt[3]{n^3+7n^2}+n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\sqrt[3]{\frac{n^6}{n^6}+\boxed{14\frac{n^5}{n^6}}^{\nearrow 0}+\boxed{49\frac{n^4}{n^6}}^{\nearrow 0}}+\sqrt[3]{\frac{n^3}{n^3}+\boxed{\frac{7n^2}{n^3}}^{\nearrow 0}}} = \frac{7}{3}$$

Przykład 8.13 *Obliczyć granicę ciągu*

$$\frac{1+5+9+\ldots+(4n-3)}{1+2+3+\ldots+n} \tag{416}$$

Rozwiązanie 8.14 *W liczniku i w mianowniku mamy ciągi arytmetyczne: pierwszy z różnicą $d=4$, drugi z różnicą $d=1$. W obu przypadkach pierwszy wyraz ciągu $p=1$. Wyznaczymy sumy obu ciągów:*

$$1+5+9+\ldots+(4n-3) = \frac{1+(4n-3)}{2}\cdot n$$

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{1+n}{2}\cdot n$$

Oba ciągi są rozbieżne do $+\infty$. Ale

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[1+(4n-3)\right]\frac{n}{2}}{(1+n)\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n-2}{1+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4-\boxed{\frac{2}{n}}^{\nearrow 0}}{1+\boxed{\frac{1}{n}}^{\nearrow 0}} = 4$$

[22]Wykorzystano tu twierdzenie $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ oraz granicę $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n-1}=0$.

[23]Ogólnie mamy: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n/a}\right]^a = e^a$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n/a}\right]^a = e^{-a}$.

Przykład 8.14 *Obliczyć granicę ciągu*

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \tag{417}$$

Rozwiązanie 8.15 *Ponieważ*

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Zatem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\cdot e = 1\end{aligned}$$

Przykład 8.15 *Obliczyć granicę ciągów*

a) $a_n = \left(1-\frac{1}{3n}\right)^{2n}$ *b)* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$ *c)* $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Rozwiązanie 8.16 *Odpowiednio przekształcamy*

a) $\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{2n} = \left[\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{2n}\right]^{3/2\cdot 2/3} = \left[\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{2/3}$. *Stąd*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{2/3} = \left(\frac{1}{e}\right)^{2/3} = e^{-2/3}$$

b) Rozwijamy wyrażenie

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot e\cdot 1 = e^2$$

c) $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$. *Stąd*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e}\cdot 1 = e^{-1}$$

8.6 Sumowanie wyrazów ciągu

Definicja 8.13 *Jeżeli dany jest ciąg (a_n), to suma n kolejnych wyrazów tego ciągu (poczynając od pierwszego)*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = s_n \qquad n \in \mathcal{N} \tag{418}$$

jest określoną funkcją zmiennej n[24].

Poniżej podamy przykłady ciągów, dla których istnieją wzory wyrażające s_n w zależności od n:

- ciąg arytmetyczny ($p-$ wyraz pierwszy, $d-$ różnica)

$$p + (p + d) + (p + 2d) + \ldots + [p + (n-1)\,d] = \frac{n}{2}\,[2p + (n-1)\,d] \tag{419}$$

- ciąg geometryczny ($p-$ wyraz pierwszy, $q-$ iloraz, $q \neq 1$)

$$p + pq + pq^2 + \ldots + pq^{n-1} = p\frac{1-q^n}{1-q} \tag{420}$$

- ciąg liczb naturalnych

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1)}{2} \tag{421}$$

- ciąg kwadratów liczb naturalnych

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6}\,(2n+1)\,(n+1) \tag{422}$$

- ciąg liczb nieparzystych

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2 \tag{423}$$

- ciąg kwadratów liczb nieparzystych

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n}{3}\left(4n^2 - 1\right) \tag{424}$$

8.7 Szereg liczbowy i jego suma

Definicja 8.14 *Jeżeli jest dany ciąg liczbowy*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \tag{425}$$

to ciąg sum

$$\begin{array}{l} s_1 = a_1 \\ s_2 = a_1 + a_2 \\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{426}$$

[24] Dla $n = 1$ przyjmujemy, że $s_1 = a_1$.

nazywamy ***szeregiem*** *o wyrazach* a_n *i oznaczamy symbolem*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \quad \textit{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{427}$$

Sumy (426) nazywamy ***sumami częściowymi*** *szeregu (427).* ***Szereg jest więc ciągiem sum częściowych****.*

Definicja 8.15 *Szereg (427) nazywamy zbieżnym, gdy istnieje skończona granica*

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n \tag{428}$$

natomiast rozbieżny w przeciwnym przypadku.

Liczbę S *nazywamy sumą szeregu. Szereg zbieżny ma sumę; szereg rozbieżny sumy nie ma.*

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad \textit{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \tag{429}$$

Wniosek 8.3 *Szereg* $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$ *jest zbieżny, bo jego sumy częściowe*

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

tworzą ciąg zbieżny do granicy 1*. Liczba* 1 *jest sumą tego szeregu*

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = 1 = S \tag{430}$$

Wniosek 8.4 *Szereg* $1+1+1+\ldots$ *jest rozbieżny, bo ciąg sum częściowych* $(s_n) = (1, 2, 3, \ldots)$ *jest rozbieżny.*

Wniosek 8.5 *Szereg* $(1 - 1 + 1 - 1 + \ldots)$ *jest rozbieżny, bo ciąg sum częściowych* $(s_n) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$ *jest rozbieżny.*

Uwaga 8.6 *Symbol* $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ *oznacza szereg (czyli ciąg sum częściowych), ale jeżeli szereg jest zbieżny, to symbol ten oznacza również sumę szeregu (czyli liczbę). W praktyce ta dwuznaczność wymaga upewnienia się, czy dany szereg jest zbieżny.*

Twierdzenie 8.20 *(Warunek konieczny zbieżności szeregu liczbowego)*

Jeżeli szereg $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *jest zbieżny, to ciąg wyrazów tego szeregu dąży do zera*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{431}$$

Uwaga 8.7 *Nie jest słuszne (!) stwierdzenie odwrotne, czyli:*

$$\textit{Jeżeli } \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \textit{ to szereg jest zbieżny.}$$

Uwaga 8.8 *Jeżeli warunek (431) nie zachodzi, to szereg jest rozbieżny!*

Przykład 8.16 *Szereg*

$$\frac{101}{1000} + \frac{102}{2000} + \frac{103}{3000} + \ldots + \frac{100+n}{1000n} + \ldots$$

jest rozbieżny, bo ciąg jego wyrazów nie dąży do 0.

Rozwiązanie 8.17 *Rzeczywiście*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{100+n}{1000n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{100}{n}+1}{1000} = \frac{1}{1000} \neq 0$$

Definicja 8.16 *(Szeregu geometrycznego)*
Szeregiem geometrycznym nazywamy szereg

$$p + pq + pq^2 + \ldots + pq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} pq^n \tag{432}$$

w którym wyraz początkowy p i iloraz q są liczbami dowolnymi.
Jeżeli $p = 0$, to szereg jest zbieżny i ma sumę równą 0.
Jeżeli $p \neq 0$ i $|q| \geq 1$, to ciąg wyrazów nie dąży do 0 i szereg jest rozbieżny.
Jeżeli $|q| < 1$, to

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(p + pq + pq^2 + \ldots + pq^{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} p\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{p}{1-q}$$

Twierdzenie 8.21 *Szereg geometryczny o ilorazie bezwzględnie mniejszym od 1 jest zbieżny*

$$p + pq + pq^2 + \ldots + pq^{n-1} + \ldots = \frac{p}{1-q} \qquad \textit{dla} \qquad |q| < 1$$

Wniosek 8.6 *Szeregi geometryczne zbieżne*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x} \qquad \textit{dla} \quad |x| < 1$$

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1}{1+x} \qquad \textit{dla} \quad |x| < 1$$

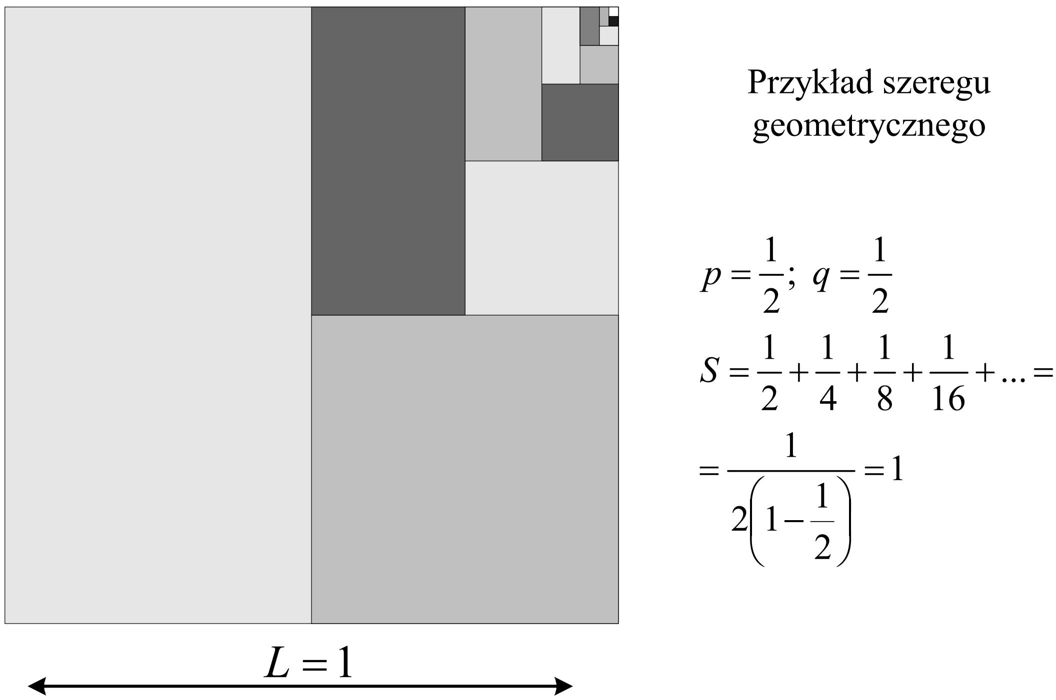
$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots = \frac{1}{1-x^2} \qquad \textit{dla} \quad |x| < 1$$

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots = \frac{1}{1+x^2} \qquad \textit{dla} \quad |x| < 1$$

Definicja 8.17 *(Szeregu harmonicznego)*
Szeregiem harmonicznym *nazywamy szereg, którego wyrazy są odwrotnościami liczb naturalnych*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \tag{433}$$

Twierdzenie 8.22 *Szereg harmoniczny jest rozbieżny, a ciąg jego sum częściowych rośnie do* $+\infty$



Rysunek 37: Szereg geometryczny i jego suma.

Definicja 8.18 *Szeregiem harmonicznym rzędu* r *nazywamy szereg, którego wyrazy są odwrotnościami* $r-$*tych potęg liczb naturalnych*

$$1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\ldots+\frac{1}{n^r}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r} \tag{434}$$

Twierdzenie 8.23 *Szereg harmoniczny rzędu* $r>1$ *jest zbieżny, a rzędu* $r<1$ *jest rozbieżny.*

Uwaga 8.9 *Szereg harmoniczny (433) jest szeregiem rzędu* $r=1$.

Przykład 8.17 *Pokażemy, że ciąg sum częściowych szeregu harmonicznego (433) jest nieograniczony.*

Rozwiązanie 8.18 *W tym celu pogrupujemy jego wyrazy*

$$1+\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{10}\right)}_{9\ wyraz\acute{o}w}+\underbrace{\left(\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{100}\right)}_{90\ wyraz\acute{o}w}+\underbrace{\left(\frac{1}{101}+\ldots+\frac{1}{1000}\right)}_{900\ wyraz\acute{o}w}+\ldots$$

Zauważmy, że każda wydzielona grupa ma wartość większą od 0.9. *Uwzględniając dostatecznie wiele takich grup, otrzymamy sumę częściową większą od wybranej liczby* A.

Przykład 8.18 *Pokażemy, że ciąg sum częściowych* (s_n) *szeregu harmonicznego rzędu* $r > 1$ *jest rosnący, ale ograniczony.*

Rozwiązanie 8.19 *W tym celu pogrupujemy wyrazy*

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{2^r}+\ldots+\frac{1}{9^r}\right)}_{9 \text{ wyrazów}}+\underbrace{\left(\frac{1}{10^r}+\ldots+\frac{1}{99^r}\right)}_{90 \text{ wyrazów}}+\underbrace{\left(\frac{1}{100^r}+\ldots+\frac{1}{999^r}\right)}_{900 \text{ wyrazów}}+\ldots$$

Stwierdzamy, że pierwsza grupa obejmuje 9 wyrazów, wśród których największy ma wartość 1. *Wartość tej grupy nie przekracza* 9. *Druga grupa zawiera* 90 *wyrazów. Największy wśród nich ma wartość* $1/10^r$, *suma nie przekracza* $90/10^r = 9 \cdot (10/10^r)$. *Wartość trzeciej grupy nie przekracza* $900/100^r = 9 \cdot (100/100^r) = 9 \cdot (10/10^r)^2$. *Otrzymane ograniczenia górne kolejnych grup są wyrazami szeregu geometrycznego o ilorazie* $10/10^r < 1$. *A więc*

$$s_n < 9\left[1+\frac{10}{10^r}+\left(\frac{10}{10^r}\right)^2+\ldots\right]=\frac{9}{1-\frac{10}{10^r}}$$

Oznacza to, że ciąg (s_n) *jest ograniczony.*

Wniosek 8.7 *Szereg harmoniczny rzędu* 2 *jest zbieżny i jego suma jest równa*

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6} \tag{435}$$

Wniosek 8.8 *Szereg harmoniczny rzędu* $r = 1/2$ *jest rozbieżny*

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots=+\infty \tag{436}$$

8.8 Kryteria zbieżności szeregów

Definicja 8.19 *(odcinka sumowego szeregu)*
Różnicę

$$S_M - S_N = a_{N+1}+\ldots+a_M=\sum_{n=N+1}^{M} a_n \tag{437}$$

sum częściowych

$$S_M = a_1+\ldots+a_M \qquad S_N = a_1+\ldots+a_N \tag{438}$$

$(M > N)$ *szeregu* $a_1+a_2+\ldots+a_N+\ldots+a_M+\ldots$ *nazywamy odcinkiem sumowym danego szeregu.*

Twierdzenie 8.24 *(Warunek konieczny i wystarczający Cauchy'ego zbieżności szeregu)*
Szereg $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby* $\varepsilon > 0$ *istnieje* δ *taka, że dla dowolnych liczb naturalnych* M, N *spełniających warunek* $M > N > \delta$ *odcinek sumowy* $a_{N+1}+\ldots+a_M$ *jest bezwzględnie mniejszy od* ε

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall M > N > \delta \qquad \left|\sum_{n=N+1}^{M} a_n\right| < \varepsilon \tag{439}$$

Twierdzenie 8.25 *(Szeregi o wyrazach dodatnich)*
Szereg o wyrazach dodatnich i sumach częściowych ograniczonych jest zbieżny.

Definicja 8.20 *(Majoranty, minoranty)*
Jeżeli mając dany szereg o wyrazach dodatnich

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{440}$$

utworzymy szereg

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots \tag{441}$$

o wyrazach $M_n \geq a_n$, to szereg ten nazywamy ***majorantą*** *danego szeregu, a jeżeli utworzymy szereg*

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n + \ldots \tag{442}$$

o wyrazach $0 < m_n \leq a_n$, to szereg ten nazywamy ***minorantą*** *danego szeregu.*

Twierdzenie 8.26 *(Kryteria porównawcze)*
Jeżeli majoranta danego szeregu jest zbieżna, to i dany szereg jest zbieżny.
Jeżeli minoranta danego szeregu jest rozbieżna, to i dany szereg jest rozbieżny.

Wniosek 8.9 *Szereg*

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

jest zbieżny, gdyż ma majorantę

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \ldots$$

która jest szeregiem geometrycznym zbieżnym.

Wniosek 8.10 *Szereg*

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$$

jest rozbieżny, gdyż ma minorantę

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\right)$$

która jest szeregiem harmonicznym pomnożonym przez $1/2$, a więc rozbieżnym.

Twierdzenie 8.27 *(Kryterium ilorazowe d'Alemberta)*
Jeżeli w szeregu o wyrazach dodatnich $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ ciąg ilorazów a_{n+1}/a_n ma granicę mniejszą od 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g < 1 \tag{443}$$

to szereg ten jest zbieżny. Jeżeli zaś granica ta jest większa od 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g > 1 \tag{444}$$

to szereg ten jest rozbieżny.

Uwaga 8.10 *Kryterium d'Alemberta nie orzeka o zbieżności szeregu, gdy* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ *lub gdy granica ta nie istnieje.*

Wniosek 8.11 *Szereg* $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ *jest zbieżny dla dowolnej dodatniej wartości* x*, gdyż*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{x^n}{n!}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n+1}=0<1$$

Wniosek 8.12 *Szereg* $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$ *jest zbieżny, gdyż*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}:\frac{n!}{n^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

Przykład 8.19 *Zbadaj szereg* $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$*, gdzie* $x>0$.

Rozwiązanie 8.20 *Mamy*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)\,x^n}{nx^{n-1}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,x}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x=x$$

Zatem szereg ten jest zbieżny dla $0<x<1$*, a rozbieżny dla* $x>1$*. W przypadku* $x=1$ *kryterium ilorazowe nie orzeka o zbieżności, ale bezpośrednio widać, że szereg jest rozbieżny, gdyż nie spełnia warunku (431)*

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0 \tag{445}$$

Wniosek 8.13 *W przypadku szeregu harmonicznego dowolnego rzędu*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^r}:\frac{1}{n^r}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^r=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\right)^r=1 \tag{446}$$

Kryterium ilorazowe nie orzeka o zbieżności. Mówimy, że szeregi harmoniczne nie reagują na kryterium ilorazowe.

Twierdzenie 8.28 *(Kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego)*

Jeżeli w szeregu o wyrazach dodatnich $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ *ciąg pierwiastków* $\sqrt[n]{a_n}$ *ma granicę mniejszą od* 1

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=g<1 \tag{447}$$

to szereg ten jest zbieżny. Jeżeli $g>1$*, to szereg jest rozbieżny*

Uwaga 8.11 *Kryterium Cauchy'ego nie orzeka o zbieżności szeregu, gdy* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$ *lub gdy granica ta nie istnieje.*

Przykład 8.20 *Zbadaj szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^c/c^n$*, gdzie* $c>1$.

Rozwiązanie 8.21 *Mamy*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^c}{c^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^c}{c}=\frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)^c}{c}=\frac{1}{c}<1$$

Szereg jest zbieżny.

Wniosek 8.14 *Szeregi harmoniczne nie reagują na kryterium pierwiastkowe, bowiem*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^r}} = 1$$

Definicja 8.21 *(Szereg naprzemienny)*
Szereg, którego wyrazy są naprzemian dodatnie i ujemne

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \tag{448}$$

przy czym wszystkie liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ są dodatnie, nazywamy ***szeregiem naprzemiennym****.*

Uwaga 8.12 *Szereg (448) możemy również zapisać*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad a_n > 0 \tag{449}$$

Twierdzenie 8.29 *(Kryterium Leibniza)*
Jeżeli ciąg (a_n) jest nierosnący i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to szereg naprzemienny jest zbieżny, suma częściowa s_n różni się od sumy S szeregu mniej niż o a_{n+1}

$$|s_n - S| < a_{n+1}$$

Wniosek 8.15 *Poniższe szeregi naprzemienne*[25]

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots = \ln 2 \tag{450}$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots = \frac{\pi}{4} \tag{451}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots = \frac{2}{3} \tag{452}$$

są zbieżne na podstawie kryterium Leibniza. Natomiast szeregi

$$1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{20} + \frac{1}{4} - \frac{1}{40} + \ldots = \frac{9}{5} \tag{453}$$

$$1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{20} + \frac{1}{3} - \frac{1}{30} + \ldots = +\infty \ - \text{rozbieżny} \tag{454}$$

nie spełniają założeń kryterium Leibniza.

8.9 Zbieżność bezwzględna i zbieżność warunkowa

Twierdzenie 8.30 *(Zbieżność bezwzględna i zbieżność warunkowa)*
Niech będzie dany szereg (o wyrazach dowolnych)

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{455}$$

[25] Szereg (450) nazywamy szeregiem anharmonicznym.

oraz szereg modułów wyrazów danego szeregu

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{456}$$

Jeżeli szereg (455) jest zbieżny, a szereg (456) jest rozbieżny, to mówimy, że szereg (455) jest zbieżny ***warunkowo****. Jeżeli szereg (456) jest zbieżny, to szereg (455) jest zbieżny* ***bezwzględnie*** *(implikacja odwrotna nie zachodzi)*[26]

Przykład 8.21 *Szeregi (452) i (453) są bezwzględnie zbieżne. Szeregi (450) i (451) są warunkowo zbieżne.*

Rozwiązanie 8.22 *Udowodnimy to.*

Szereg utworzony z modułów (452) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots$ *jest szeregiem geometrycznym o ilorazie* $q = \frac{1}{2}$. *Jego granicę podaliśmy we Wniosku 8.6 (patrz również Definicja 8.21 i Twierdzenie 8.21).*

Szereg utworzony z modułów (453)

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{20} + \frac{1}{4} + \frac{1}{40} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots + \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots\right) =$$

$$= 2 + \frac{1}{10} \cdot 2 = \frac{11}{5}$$

jest sumą dwóch szeregów geometrycznych o ilorazie $q = \frac{1}{2}$.

Szereg utworzony z modułów wyrazów szeregu (450) jest szeregiem harmonicznym rozbieżnym

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Szereg utworzony z modułów wyrazów szeregu (451)

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots$$

jest szeregiem rozbieżnym[27].

---

[26] Szereg anharmoniczny jest zbieżny, a szereg modułów jego wyrazów (szereg harmoniczny) jest rozbieżny.

[27] Bowiem

1. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right)$

2. Analizowany szereg ma minorantę $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\right)$, która jest rozbieżna.

8.10 Przykłady

Przykład 8.22 *Obliczając* s_n *i* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$*, stwierdzić, czy dany szereg jest zbieżny i jaką ma sumę*

a) $\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{100}$

b) $\frac{1}{400}+\frac{1}{200}+\frac{1}{100}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{400}\cdot 2^n$

c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(n+1)}$

d) $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{5\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)\,(2n+1)}$

Rozwiązanie 8.23 *Sprawdzimy warunki zbieżności szeregów.*

a) $s_n=\frac{n}{100}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{100}=\frac{1}{100}\neq 0\longrightarrow$ *ciąg wyrazów nie zdąża do zera; szereg rozbieżny.*

b) $S=\lim\limits_{n\to\infty} s_n=+\infty$. *Jest to szereg geometryczny rozbieżny z* $p=\frac{1}{400}, q=2$. *Zatem* $s_n=p\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{400}\left(2^n-1\right)$ *oraz*

$$S=\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{400}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{400}\left(2^n-1\right)=+\infty$$

c) Rozkładając każdy wyraz a_n *na różnicę dwóch ułamków* $a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ *i tworząc sumę częściową otrzymujemy* $s_n=1-\frac{1}{n+1}$. *Zauważmy, że* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}=0$. *Zatem ciąg wyrazów tego szeregu zdąża do zera. Jest więc spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu. Następnie mamy* $s_n=1-\frac{1}{n+1}$ *oraz* $S=\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$. *A więc szereg jest zbieżny i ma sumę* $S=1$.

d) Mamy $a_n=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}\longrightarrow\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=0$. *Spełniony jest warunek konieczny zbieżności szeregu. Następnie mamy* $a_n=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$. *W wyniku otrzymujemy*

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=1-\frac{1}{2n+1}=s_n$$

$$S=\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$$

Przykład 8.23 *Zbadać, czy poniższy szereg spełnia warunek konieczny zbieżności, a jeżeli spełnia, to obliczyć* $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ *oraz stwierdzić, czy szereg jest zbieżny i jaką ma sumę.*

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n} \quad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$$

Rozwiązanie 8.24 *Przekształcimy poszczególne wyrażenia.*

a) *Rozłożymy wyraz* $a_n = \frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$. *Stąd* $a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = s_n$. *A więc* $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{3}{2}$. *Ponieważ* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2-1} = 0$, *to spełniony jest warunek zbieżności szeregu; szereg jest zbieżny; jego suma jest równa* $\frac{3}{2}$.

b) *Zauważmy, że* $a_n = \frac{2^n+3^n}{6^n} = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}$. *Ponieważ* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}\right) = 0$, *to spełniony jest warunek konieczny zbieżności szeregu. Widzimy, że szereg jest sumą szeregów geometrycznych*

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Stąd

$$S = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

c) *Przekształcimy wyrażenie*

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

Stąd $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$, *czyli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Szereg spełnia warunek konieczny zbieżności szeregu. Następnie mamy*

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{m=1}^{n}\left(\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\right) = \\ &= \sqrt{1}-\sqrt{0}+\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2}+\sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \sqrt{n} \end{aligned}$$

A więc $s_n = \sqrt{n}$, *czyli* $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n} = +\infty$. *Analizowany szereg jest rozbieżny* ***(pomimo spełnienia warunku koniecznego zbieżności!)****.*

d) *Szereg spełnia warunek konieczny zbieżności:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$. *Ale ponieważ*

$$\sum_{m=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{m}\right) = \log(1+1) + \log\left(1+\frac{1}{2}\right) + \log\left(1+\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \log\left[\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{(n-1)}\cdot\frac{(n+1)}{n}\right] = \log(n+1)$$

czyli $s_n = \log(n+1)$, *a* $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \log(n+1) = +\infty$, *to szereg jest rozbieżny* ***(pomimo spełnienia warunku koniecznego zbieżności!)****.*

e) *Szereg spełnia warunek konieczny zbieżności:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} = 0$

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{2+(-1)^m}{2^m} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2n-1}} + 3\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) + \frac{3}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{4}\cdot\frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \frac{5}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \frac{5}{3}$$

A więc szereg jest zbieżny.

f) *Szereg spełnia warunek konieczny zbieżności:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+4n+3} = 0$. *Rozłożymy wyrażenie wymierne na ułamki proste. W tym celu przyjmiemy*

$$\frac{1}{n^2+4n+3} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+3} = \frac{1}{(n+1)(n+3)}$$

A więc

$$\frac{1}{n^2+4n+3} = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+3)}$$

Czyli

$$s_n = \sum_{m=1}^{n}\left[\frac{1}{2(m+1)} - \frac{1}{2(m+3)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{5}{12} - \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+3)}$$

Stąd $s_n = \frac{5}{12} - \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+3)}$ *oraz* $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{5}{12} - \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+3)}\right] = \frac{5}{12}$.

9 Przestrzeń metryczna

Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Zbiór wszystkich $n-$wyrazowych ciągów

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{457}$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, nazywamy $n-$wymiarową **przestrzenią arytmetyczną**. Każdy ciąg (457) nazywamy **punktem** tej przestrzeni, a liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **współrzędnymi** tego punktu.

Definicja 9.1 ***Przestrzenią metryczną*** *nazywamy zbiór X, w którym każdej parze elementów x, y przyporządkowana została liczba $\rho(x, y)$, zwana* ***odległością*** *punktu x od punktu y, spełniająca następujące warunki:*

1°	$\rho(x, y) \geq 0$	*oraz* $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$	*czyli* $\rho(x, x) = 0$
2°	$\rho(x, y) = \rho(y, x)$		***warunek symetrii***
3°	$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$		***nierówność trójkąta***

Elementy $x, y, z, \ldots$ przestrzeni metrycznej nazywamy punktami. Zamiast odległość mówimy też ***metryka****.*

Często zamiast wyrażenia $\rho(\cdot, \cdot)$ używamy symbolu $d(\cdot, \cdot)$ od łacińskiego słowa *distantia - odległość*. Zamiast $d(x, y)$ piszemy także $\operatorname{dist}(x, y)$.

Wniosek 9.1 *Przestrzeń arytmetyczna $2-$wymiarowa punktów $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$ z odległością zdefiniowaną wzorem*

$$\rho(p, q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$$

jest przestrzenią metryczną.

Wniosek 9.2 *Zbiór funkcji $f(x)$, $g(x)$, $\ldots$ ciągłych w przedziale $< 0, 1 >$ z odległością określoną wzorem*

$$\rho(f, g) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - q(x)| \tag{458}$$

stanowi przestrzeń metryczną.

Definicja 9.2 *Przestrzeń arytmetyczną $n-$wymiarową z odległością wyrażoną wzorem*

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \tag{459}$$

nazywamy $n-$wymiarową ***przestrzenią euklidesową*** *i oznaczamy $\mathcal{E}^n$ lub tradycyjnie przez $\mathcal{R}^n$.*

9.0.1 Iloczyn skalarny

Definicja 9.3 ***Iloczynem skalarnym*** *w przestrzeni wektorowej V zdefiniowanym nad ciałem K liczb rzeczywistych nazywamy* ***funkcję****, która każdej parze elementów $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y} \in V$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ i spełnia następujące warunki:*

1. *jest liniowa ze względu na wektory przestrzeni* V

$$(\gamma\mathbf{x} + \lambda\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V,\ \forall \gamma, \lambda \in K$$

2. $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y})},\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,$

3. *jest dodatnio określona, to znaczy* $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ *dla* $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *oraz* $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ *dla* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

W przypadku, gdy $V \in \mathcal{R}^n$ iloczyn skalarny jest równy

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\mathbf{y}^T, \mathbf{x}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Ponadto, dla każdej macierzy kwadratowej stopnia n i dowolnych dwóch wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ zachodzi relacja

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\mathbf{x}, \mathbf{A}^T\mathbf{y}\right)$$

Przestrzeń liniową (wektorową) V, w której określony jest iloczyn skalarny $(\cdot, \cdot)$ nazywamy **przestrzenią unitarną**.

9.0.2 Norma wektora

Definicja 9.4 *Niech* V *będzie przestrzenią wektorową nad ciałem* K *liczb rzeczywistych. Mówimy, że funkcja* $\|\cdot\|$ *przyporządkowująca każdemu elementowi* $\mathbf{v} \in V$ *liczbę rzeczywistą* $\|\mathbf{v}\| \in \mathcal{R}$ *jest* ***normą*** *w przestrzeni* V*, jeżeli spełnia następujące aksjomaty:*

1. *(i)* $\|\mathbf{v}\| \geq 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in V$

   (ii) $\|\mathbf{v}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{v} = 0$

2. $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{v}\| \qquad \forall \alpha \in K,\ \forall \mathbf{v} \in V$

3. $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \qquad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ *(nierówność trójkąta)*

gdzie $|\alpha|$ *oznacza wartość bezwzględną liczby* α *dla* $K = \mathcal{R}$.

Przestrzeń liniową V z określoną w niej normą $\|\cdot\|$, czyli parę $(V, \|\cdot\|)$ nazywamy **przestrzenią unormowaną**. Przykładem przestrzeni unormowanej jest przestrzeń $\mathcal{R}^n$ z tak zwaną $p-$**normą** (lub **normą wektorową Höldera**).

Normę wektora $\mathbf{x}$ o składowych $\{x_i\}$ definiujemy

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{dla} \quad 1 \leq p < \infty \tag{460}$$

Każda przestrzeń unitarna jest przestrzenią unormowaną, jeżeli za normę przyjmiemy

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \tag{461}$$

Każdy wektor przestrzeni V charakteryzujący się normą równą 1 nazywamy **wektorem jednostkowym**. Należy zapamiętać, że przy $p \to \infty$ norma wektora $\|\mathbf{x}\|_p$ istnieje, jest skończona i równa się maksymalnej wartości bezwzględnej składowej wektora $\mathbf{x}$. Normę taką nazywamy **normą nieskończoną** lub **normą maksimum** (niekiedy normą maksymalną)

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \tag{462}$$

np. $\| [a, b, c] \|_{\infty} = \max (|a|, |b|, |c|)$. Jeżeli $p \to \infty$, to słuszna jest relacja

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}\|_n = \|\mathbf{x}\|_{\infty}$$

Przykład 9.1 *Obliczyć normę maksimum wektora* $[8, -10, 2]$.

Rozwiązanie 9.1 *Na podstawie definicji normy maksimum wektora (462) otrzymujemy*

$$\|[8, -10, 2]\|_{\infty} = \max_{1\leq i\leq 3} (|8|, |-10|, |2|) = 10$$

Jeżeli $p = 1$, to definiujemy tak zwaną **normę pierwszą**

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{463}$$

która jest sumą bezwzględnych wartości współrzędnych wektor $\mathbf{x}$, np. $\| [a, b, c] \|_1 = |a| + |b| + |c|$.

Przykład 9.2 *Obliczyć normę pierwszą wektora* $[8, -10, 2]$.

Rozwiązanie 9.2 *Na podstawie definicji normy pierwszej (463) otrzymujemy*

$$\| [8, -10, 2] \|_1 = |8| + |-10| + |2| = 20$$

Gdy $p = 2$, to na podstawie definicji (460) otrzymujemy tak zwaną **normę drugą** wektora lub **normę euklidesową** wektora

$$\|\mathbf{x}\|_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = \left(\mathbf{x}^T\mathbf{x}\right)^{1/2} \tag{464}$$

np. $\left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\left(|a|^2 + |b|^2\right)}$. Norma druga wektora jest często nazywana euklidesową długością wektora.

Zauważmy, że w przestrzeni unitarnej zdefiniowana jest norma druga, ponieważ pojawia się tu iloczyn skalarny wektorów.

Własność 9.1 ***(Nierówność Cauchy-Schwarza)***
Dla każdej pary wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$ *zachodzi nierówność*

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = \left|\mathbf{y}^T\mathbf{x}\right| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \tag{465}$$

Jeżeli $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$, *to dla dowolnej liczby* $\alpha \in \mathcal{R}$ *wyrażenie (465) staje się równością.*

Przykład 9.3 *Sprawdzić nierówność (465) dla wektorów:* $\mathbf{x} = [2, -1, 4]$, $\mathbf{y} = [1, 1, 3]$.

Rozwiązanie 9.3 *Obliczamy iloczyn skalarny* $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 4\cdot 3 = 13$. *Następnie obliczamy wartości normy drugiej poszczególnych wektorów:* $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{2^2+(-1)^2+4^2} = \sqrt{21}$; $\|\mathbf{y}\|_2 = \sqrt{1^2+1^1+3^2} = \sqrt{11}$. *Stąd* $\|\mathbf{x}\|_2\,\|\mathbf{y}\|_2 = \sqrt{21\cdot 11} = \sqrt{231} > 13$.

Iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathcal{R}^n$ może być powiązany z $p-$normą w $\mathcal{R}^n$ przy pomocy **nierówności Höldera**

$$|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|_p\,\|\mathbf{y}\|_q \quad \text{dla} \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \tag{466}$$

Przykład 9.4 *Obliczyć normy wektorów* $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -0.61541 \\ -0.78821 \end{bmatrix}$ *i* $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.31052 \\ 0.79954 \\ -0.51411 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie 9.4 *Wykorzystujemy definicje norm wektora dla* $p = 1,\ 2,\ \infty$. *Kolejno otrzymujemy:*

norma	$\mathbf{x}_1$	$\|\mathbf{x}_1\|_p$	$\mathbf{x}_2$	$\|\mathbf{x}_2\|_p$
$p=1$	$\left\|\begin{bmatrix} -0.61541 \\ -0.78821 \end{bmatrix}\right\|_1$	$=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\| = 1.40362$	$\left\|\begin{bmatrix} 0.31052 \\ 0.79954 \\ -0.51411 \end{bmatrix}\right\|_1$	$= 1.62417$
$p=2$	$\left\|\begin{bmatrix} -0.61541 \\ -0.78821 \end{bmatrix}\right\|_2$	$=\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\right)^{1/2} = 1.00000$	$\left\|\begin{bmatrix} 0.31052 \\ 0.79954 \\ -0.51411 \end{bmatrix}\right\|_2$	$= 1.00000$
$p=\infty$	$\left\|\begin{bmatrix} -0.61541 \\ -0.78821 \end{bmatrix}\right\|_\infty$	$=\max_{1\leq i\leq n}\|x_i\| = 0.78821$	$\left\|\begin{bmatrix} 0.31052 \\ 0.79954 \\ -0.51411 \end{bmatrix}\right\|_\infty$	$= 0.79954$

(467)

9.0.3 Norma macierzy

Własność 9.2 *Niech* $\|\cdot\|$ *będzie normą w przestrzeni* $\mathcal{R}^n$, *a* $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n\times n}$ *będzie macierzą z* n *liniowo niezależnymi kolumnami. Wówczas funkcja* $\|\cdot\|_{\mathbf{A}^2}$ *o własności*

$$\|\mathbf{A}\|_{\mathbf{A}^2} = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$$

jest normą macierzy w $\mathcal{R}^n$.

Definicja 9.5 ***Norma macierzy*** $\|\cdot\|$ *jest funkcją przekształcającą* $\mathcal{R}^{m\times n}$ *w* $\mathcal{R}$ *o poniższych własnościach*[28]*:*

1. $\|\mathbf{A}\| \geq 0 \qquad \forall \mathbf{A} \in \mathcal{R}^{m\times n} i\ \|\mathbf{A}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$
2. $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{A}\| \qquad \forall \alpha \in \mathcal{R}, \quad \forall \mathbf{A} \in \mathcal{R}^{m\times n}$
3. $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \qquad \forall \mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{m\times n}$ *(nierówność trójkąta)*
4. $\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{B}\| \qquad \forall \mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{m\times n}$

[28] Do opisu normy wektora i normy macierzy używamy tego samego symbolu: $\|\cdot\|$.

Definicja 9.6 *Mówimy, że norma macierzy $\|\cdot\|$ jest* ***zgodna*** *lub* ***spójna*** *z normą wektora $\|\cdot\|$, jeżeli*

$$\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{x}\| \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \tag{468}$$

Twierdzenie 9.1 *Niech $\|\cdot\|$ jest normą wektora. Funkcję*

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\| \tag{469}$$

nazywamy ***normą*** *macierzy* ***indukowaną*** *przez normę wektora. Zapis* $\sup(A)$ *oznacza* ***kres górny*** *zbioru A. Wzór (469) można zapisać używając dotychchczasowej notacji*

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \tag{470}$$

Często zapis

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

nazywamy **normą euklidesową macierzy A**. Jest ona równa największej wartości wynikającej z operacji $\frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}$.

Wyrażenie (470) jest równoważne równaniu

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sup_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|\mathbf{Ax}\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|\mathbf{Ax}\|_p \tag{471}$$

Ostatni zapis oznacza, że istnieje wektor $\mathbf{x}$ spełniający warunek $\|\mathbf{x}\|_p = 1$, dla którego norma $\|\mathbf{Ax}\|_p$ osiąga maksimum.

Przykład 9.5 *Wyznaczyć na podstawie powyższego twierdzenia normy p ($p = 1, 2, \infty$) macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, jeżeli $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

Rozwiązanie 9.5 *Na wstępie obliczymy normy wektora $\|\mathbf{x}\|$. Norma pierwsza wektora jest równa: $\|\mathbf{x}\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_1 = 1$, norma druga $\|\mathbf{x}\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2 = 1$, a norma maksimum $\|\mathbf{x}\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 1$. Następnie obliczamy iloczyn: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. W związku z powyższym norma pierwsza iloczynu $\|\mathbf{Ax}\|_1$ jest równa $\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|_1 = 4$; norma druga $\|\mathbf{Ax}\|_2$ równa $\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{10} = 3.162$, a norma maksimum równa $\|\mathbf{Ax}\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 3$. To, czy wektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ jest tym wektorem, dla którego norma macierzy $\|\mathbf{A}\|$ osiąga kres górny wymaga dalszej analizy. Jeżeli zamiast wektora $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ weźmiemy wektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, którego norma p również jest równa 1, to iloczyn $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, a poszczególne normy mają wartości: $\|\mathbf{Ax}\|_1 = 3$, $\|\mathbf{Ax}\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{5}$ i $\|\mathbf{Ax}\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 2$.*

Skąd te różnice i czy któraś z otrzymanych wartości jest rzeczywiście równa normie p macierzy $\mathbf{A}$? Otóż pamiętajmy, że $\|\mathbf{A}\|_p = \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p$ i norma macierzy przyjmuje wartość kresu górnego normy iloczynu macierzy $\mathbf{A}$ i wektora $\mathbf{x}$, którego norma p jest równa 1, $\|\mathbf{x}\|_p = 1$. Istnieje nieskończenie wiele takich wektorów. Na przykład, **normy pierwsze** wektorów $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix}$ i $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}$ są równe jedności dla każdego $t \in < 0; 1 >$, tj. $\|\mathbf{x}\|_1 = \left\|\begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix}\right\|_1 = \left\|\begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}\right\|_1 = |t| + |1-t|$, a ponieważ t jest dodatnie, to $\left\|\begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix}\right\|_1 = \left\|\begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}\right\|_1 = t + 1 - t = 1$. Podobnie jest z wektorami, których **norma maksimum** jest równa jedności, tj. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ lub $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$ dla każdego $t \in < 0; 1 >$, czyli $\|\mathbf{x}\|_\infty = \left\|\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}\right\|_\infty = \left\|\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}\right\|_\infty = 1$. Analogicznie wyznaczamy wektory, których **norma druga** równa się 1: $\|\mathbf{x}\|_2 = \left\|\begin{bmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{bmatrix}\right\|_2 = \sqrt{t^2 + (1-t^2)} = 1$ lub $\|\mathbf{x}\|_2 = \left\|\begin{bmatrix} \sqrt{1-t^2} \\ t \end{bmatrix}\right\|_2 = \sqrt{t^2 + (1-t^2)} = 1$ dla każdego $t \in < 0; 1 >$.

W ten sposób norma maksimum wektora $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$ indukuje **normę maksimum macierzy**

$$\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{472}$$

Jest to maksymalna suma bezwzględnych wartości elementów stojących w $i-$tym wierszu macierzy $\mathbf{A}$. Oznacza to, że kresem górnym iloczynu

$$\sup_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{t \in <0;1>} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \right) = \sup_{t \in <0;1>} \begin{bmatrix} 1+2t \\ 3+t \end{bmatrix}$$

oraz iloczynu

$$\sup_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{t \in <0;1>} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \sup_{t \in <0;1>} \begin{bmatrix} t+2 \\ 3t+1 \end{bmatrix}$$

są wartości $\left\|\begin{bmatrix} 1+2t \\ 3+t \end{bmatrix}\right\|_\infty \overset{t=1}{=} 4$ oraz $\left\|\begin{bmatrix} t+2 \\ 3t+1 \end{bmatrix}\right\|_\infty \overset{t=1}{=} 4$. Zobaczmy, że zgodnie z (472) $\|\mathbf{A}\|_\infty$ równa się dokładnie 4, $\|\mathbf{A}\|_\infty = \left\|\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right\|_\infty = 4$.

A więc, jeżeli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

to

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \sup_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \left\| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 4$$

Pokazaliśmy, że rzeczywiście norma maksimum wektora indukuje normę maksimum macierzy.

Przykład 9.6 *Wyznaczyć normę maksimum macierzy* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \\ 12 & 5 & 4 \end{bmatrix}$. *Sprawdzić, ile wynosi norma* $\|\mathbf{Ax}\|_\infty$*, jeżeli* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Rozwiązanie 9.6 *Norma maksimum macierzy* **A** *zgodnie z (472) jest równa*

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 5 & -7 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \\ 12 & 5 & 4 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max(13, 11, 21) = 21$$

Wykonujemy mnożenie $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \\ 12 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 21 \end{bmatrix}$. *A więc* $\|\mathbf{Ax}\|_\infty = 21$.

Przejdźmy teraz do wyznaczenia normy pierwszej macierzy **A**. Obliczamy ją na podstawie relacji

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \tag{473}$$

Jest to maksymalna suma bezwzględnych wartości elementów stojących w $j-$tej kolumnie macierzy **A**. A więc, jeżeli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

to zgodnie z (473) norma $\|\mathbf{A}\|_1 = 4$. Sprawdzimy, czy norma pierwsza wektora indukuje normę pierwszą macierzy. Przypominamy, że

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \sup_{\|\mathbf{x}\|_1 = 1} \|\mathbf{Ax}\|_1 = \max_{\|\mathbf{x}\|_1 = 1} \|\mathbf{Ax}\|_1$$

oraz $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix}$ lub $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}$. Jak pamiętamy, normy pierwsze tych wektorów dla $t \in < 0, 1 >$ są równe 1. W związku z tym

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t+2 \\ 1+2t \end{bmatrix}$$

lub

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t \\ 3-2t \end{bmatrix}$$

i normy pierwsze wektora **Ax**

$$\left\| \begin{bmatrix} -t+2 \\ 1+2t \end{bmatrix} \right\|_1 = |t-2| + |1+2t| = 2 - t + 1 + 2t = 3 + t \stackrel{t=1}{=} 4$$

lub

$$\left\| \begin{bmatrix} 1+t \\ 3-2t \end{bmatrix} \right\|_1 = |1+t| + |-3+2t| = 1 + t + 3 - 2t = 4 - t \stackrel{t=0}{=} 4$$

Odpowiednie wektory mają postać

$$t = 1 \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$t = 0 \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rzeczywiście, norma pierwsza wektora indukuje normę pierwszą macierzy.

Przykład 9.7 *Obliczyć normę pierwszą macierzy* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \\ 12 & 5 & 4 \end{bmatrix}$. *Wyznaczyć normy pierwsze iloczynów* $\mathbf{Ax}_i$, *jeżeli* $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ *i* $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Rozwiązanie 9.7 *Norma pierwsza macierzy* $\mathbf{A}$ *zgodnie z (473) jest równa*

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} 5 & -7 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \\ 12 & 5 & 4 \end{bmatrix} \right\|_1 = \max(20, 15, 10) = 20$$

a $\|\mathbf{Ax}_1\|_1 = 20$, $\|\mathbf{Ax}_2\|_1 = 15$ *i* $\|\mathbf{Ax}_3\|_1 = 10$.

Jeżeli macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą symetryczną, to $\|\mathbf{A}\|_1 = \|\mathbf{A}\|_\infty$.

Przykład 9.8 *Obliczyć normy dla* $p = 1$ *i* $p = \infty$ *macierzy symetrycznej*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 1 \\ -7 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie 9.8 *Norma pierwsza równa się:* $\|\mathbf{A}\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} 5 & -7 & 1 \\ -7 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \right\|_1 = 15$ *i jest to maksymalna suma wartości bezwzględnych elementów drugiej kolumny, natomiast norma maksimum jest równa:* $\|\mathbf{A}\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 5 & -7 & 1 \\ -7 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 15$ *i jest to maksymalna suma wartości bezwzględnych elementów drugiego wiersza. A więc:* $\|\mathbf{A}\|_1 = \|\mathbf{A}\|_\infty$.

Na zakończenie sprawdzimy, czy norma druga wektora indukuje normę drugą macierzy. Jest to norma, która przy obliczaniu stwarza najwięcej trudności. Często nazywana jest **normą spektralną** macierzy.

Wychodząc z definicji normy indukowanej (469), otrzymujemy

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sup_{\|\mathbf{x}\|_2 = 1} \|\mathbf{Ax}\|_2$$

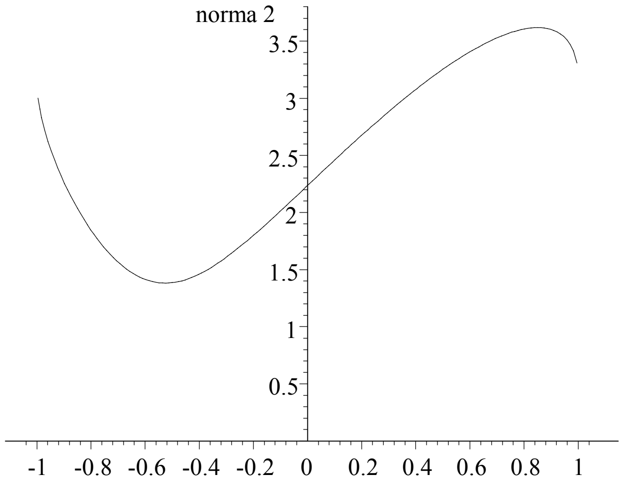
Pomijając złożone przekształcenia możemy również napisać, że

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{\lambda \in Spect(\mathbf{A}^T\mathbf{A})} \sqrt{\lambda(\mathbf{A}^T\mathbf{A})} \qquad (474)$$

gdzie przez $Spect(\mathbf{B})$ rozumiemy zbiór wartości własnych macierzy $\mathbf{B}$.

Biorąc pod uwagę (474) otrzymujemy dla macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\|_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 3.618$$



Rysunek 38: Norma druga macierzy $\mathbf{Ax}_1$.

Pamiętamy również postacie wektorów, których norma druga jest równa 1. Są to:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{1-t^2} \\ t \end{bmatrix}$$

Tak więc:

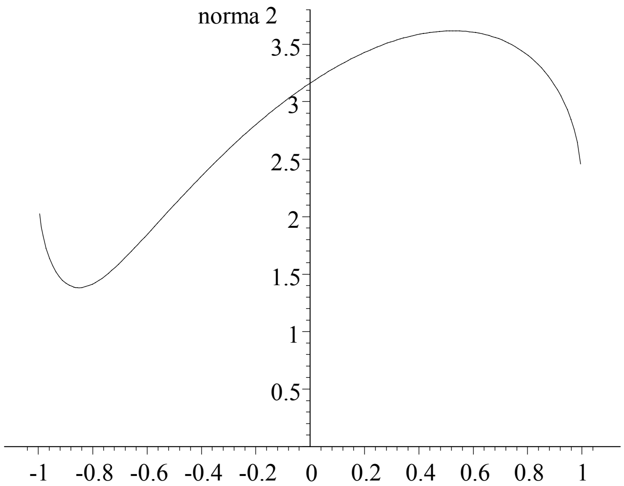
$$\mathbf{Ax}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} t + 2\sqrt{1-t^2} \\ 3t + \sqrt{1-t^2} \end{bmatrix}$$

i

$$\mathbf{Ax}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1-t^2} \\ t \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2t + \sqrt{1-t^2} \\ t + 3\sqrt{1-t^2} \end{bmatrix}$$



Rysunek 39: Norma druga macierzy $\mathbf{Ax}_2$.

Stąd

$$\|\mathbf{Ax}_1\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} t + 2\sqrt{1-t^2} \\ 3t + \sqrt{1-t^2} \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{5t^2 + 10t\sqrt{1-t^2} + 5} \qquad (475)$$

oraz

$$\|\mathbf{Ax}_2\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} 2t + \sqrt{1-t^2} \\ t + 3\sqrt{1-t^2} \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{-5t^2 + 10t\sqrt{1-t^2} + 10} \qquad (476)$$

Funkcja (475) osiąga maksimum równe $\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 3.618$ dla $t_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5}} = 0.85065$. Jej przebieg jest przedstawiony na rysunku 38.

Funkcja (476) osiąga maksimum również równe $\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ ale dla $t_2 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5}} = 0.52573$. Jej przebieg jest przedstawiony na rysunku 39.

A więc wektory $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ mają współrzędne

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} t_1 \\ \sqrt{1-t_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5}} \\ \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.85065 \\ 0.52573 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{Ax}_1\|_2 = \sqrt{5t_1^2 + 10t_1\sqrt{1-t_1^2} + 5} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

i

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{1-t_2^2} \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5}} \\ \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.52573 \\ 0.85065 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}_2\|_2 = \sqrt{-5t_2^2 + 10t_2\sqrt{1-t_2^2} + 10} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Ponieważ $\|\mathbf{x}_1\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5}} \\ \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\|_2 = 1$ i $\|\mathbf{x}_2\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5}} \\ \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\|_2 = 1$ oraz $\|\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{A}\mathbf{x}_1\|_2 = \|\mathbf{A}\mathbf{x}_2\|_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 3.618$, to norma druga wektora indukuje normę drugą macierzy.

Przykład 9.9 *Obliczyć normę drugą macierzy symetrycznej:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 1 \\ -7 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie 9.9 *Ponieważ w przypadku macierzy symetrycznych macierz transponowana jest równa macierzy wyjściowej $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, to wystarczy wyznaczyć maksymalną wartość własną macierzy $\mathbf{A}$. Wielomian charakterystyczny ma postać: $\lambda^3 - 12\lambda^2 - 28\lambda + 334 = 0$. Stąd Spect$(\mathbf{A}) = \{-5.2806,\ 5.2634,\ 12.017\}$. A więc:*

$$\|\mathbf{A}\|_2 = 12.017$$

9.0.4 Szczególne przypadki normy drugiej macierzy

Do szczególnych przypadków normy drugiej macierzy zaliczamy:

1. $\left\|\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2^2$
2. $\left\|\mathbf{A}^T\right\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2$
3. Jeżeli $\mathbf{A}$ jest rzeczywistą macierzą symetryczną, to $\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A})$
4. Ponadto: $\|\mathbf{A}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{A}\|_\infty$.

Przykład 9.10 *Obliczyć normę drugą niesymetrycznej macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \\ 12 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie 9.10 *Ponieważ macierz $\mathbf{A}$ nie jest macierzą symetryczną, to zgodnie z (39) musimy skonstruować macierz transponowaną $\mathbf{A}^T$ i następnie wykonać mnożenie $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$:*

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 12 \\ -7 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 12 \\ -7 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -7 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \\ 12 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 178 & 16 & 38 \\ 16 & 83 & 28 \\ 38 & 28 & 42 \end{bmatrix}$$

Otrzymaliśmy macierz symetryczną. Obliczymy jej wartości własne na podstawie wielomianu charakterystycznego macierzy:

$$\lambda^3 - 303\lambda^2 + 23252\lambda - 384400 = 0$$

Stąd: $\lambda_1 = 22.792$, $\lambda_2 = 87.534$ *i* $\lambda_3 = 192.67$. *Ponieważ* $\|\mathbf{A}\|_2 = \max\limits_{\lambda_i \in Spect(\mathbf{A}^T\mathbf{A})} \sqrt{\lambda_i} = \sqrt{192.67} = 13.881$, *zatem* $\|\mathbf{A}\|_2 = 13.881$. *Zauważmy ponadto, że zachodzi tu nierówność* $\|\mathbf{A}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{A}\|_\infty$. *Mianowicie:* $13.881^2 = 192.68 < 20 \cdot 21 = 420$.

9.0.5 Norma Frobeniusa

Zamiast normy spektralnej (normy drugiej) macierzy w praktyce często wykorzystuje się tak zwaną **normę Frobeniusa**

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)} \tag{477}$$

lub **normę Hilberta-Schmidta** (niekiedy nazywaną również **normą euklidesową** macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n^2}$, $\mathbb{C}-$ przestrzeń zespolona) definiowaną dla $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{m \times n}$ podobnie jak norma Frobeniusa

$$\|\mathbf{A}\|_{HS} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Funkcja określona wyrażeniem (477) jest zgodna z euklidesową normą drugą wektora. Rzeczywiście

$$\|\mathbf{Ax}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right) = \|\mathbf{A}\|_F^2 \|\mathbf{x}\|_2^2$$

Norma Frobeniusa macierzy jednostkowej $\mathbf{I}_n$ jest równa: $\|\mathbf{I}_n\|_F = \sqrt{n}$.

9.0.6 Przykłady

Przykład 9.11 *Obliczyć normę Frobeniusa macierzy* $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 12 \\ -7 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie 9.11 *Zgodnie z (40) otrzymujemy*

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left\| \begin{bmatrix} 5 & -3 & 12 \\ -7 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \right\|_F = \sqrt{303}$$

Sprawdzimy, czy druga relacja opisująca normę Frobeniusa (40) jest prawdziwa. Otóż

$$\mathbf{AA}^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 12 \\ -7 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 & 12 \\ -7 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 178 & 16 & 38 \\ 16 & 83 & 28 \\ 38 & 28 & 42 \end{bmatrix}$$

Ślad macierzy $\mathbf{AA}^T$ *przyjmuje wartość*

$$\operatorname{tr}(\mathbf{AA}^T) = 303$$

Stąd

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(\mathbf{AA}^T)} = \sqrt{303}$$

Przykład 9.12 *Obliczyć normy macierzy niesymetrycznej*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie 9.12 *Poznaliśmy normę pierwszą, drugą, maksimum i Frobeniusa, zatem otrzymujemy*

$$\|\mathbf{A}\|_1 = 6 \qquad \|\mathbf{A}\|_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{65} + \tfrac{1}{2}\sqrt{13} = 5.8339 \qquad \|\mathbf{A}\|_\infty = 7 \qquad \|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{39}$$

9.1 Określoność macierzy i określoność formy kwadratowej

Definicja 9.7 *Mówimy, że macierz* $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n\times n}$ *jest* ***dodatnio określona*** *w* $\mathcal{R}^n$*, jeżeli*

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{Ax} > 0 \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \tag{478}$$

Jeżeli nierówność ostrą zastąpimy nierównością słabą ($\geq$)*, to mówimy, że macierz* $\mathbf{A}$ *jest macierzą* ***dodatnio półokreśloną****.*

Niech $\mathbf{A}$ jest macierzą symetryczną. Wyrażenie $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ w $\mathcal{R}^2$ i dla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ rozpisujemy następująco:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ bx_1 + cx_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \tag{479}$$

gdzie $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$.

Wyrażenie $\Phi(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2$ nazywamy **formą kwadratową** macierzy $\mathbf{A}$ w $\mathcal{R}^2$.

Na przykład, niech

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

to

$$\underline{x^2 + 4xy - 2xz - 3y^2 + 7z^2} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

jest formą kwadratową macierzy **A**. **Formą kwadratową** pewnej macierzy **B** w $\mathcal{R}^3$ jest np. wyrażenie: $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_1x_2 - \frac{1}{7}x_1x_3 + \sqrt{7}x_2x_3 - \frac{1}{2}x_2^2 - 9x_2^2$.

Na podstawie znaku prawej strony wyrażenia (479) możemy wyznaczyć **określoność macierzy A** dla wszystkich wektorów $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. I tak:

Definicja 9.8 *Macierz* $\mathbf{A}_{2\times2}$ *jest dodatnio określona, jeżeli* $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \qquad \forall\mathbf{x} \in \mathcal{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$

Definicja 9.9 *Macierz* $\mathbf{A}_{2\times2}$ *jest dodatnio półokreślona, jeżeli* $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0 \qquad \forall\mathbf{x} \in \mathcal{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$

Definicja 9.10 *Macierz* $\mathbf{A}_{2\times2}$ *jest* ***ujemnie określona****, jeżeli* $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} < 0 \qquad \forall\mathbf{x} \in \mathcal{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$

Definicja 9.11 *Macierz* $\mathbf{A}_{2\times2}$ *jest* ***ujemnie półokreślona****, jeżeli* $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0 \qquad \forall\mathbf{x} \in \mathcal{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$.

O macierzach spełniających warunek $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 0 \qquad \forall\mathbf{x} \in \mathcal{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ **mówimy** również, **że są nieokreślone**.

Powyższe definicje są prawdziwe dla macierzy symetrycznych dowolnego stopnia $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n\times n}$. Jeżeli któryś z elementów stojących na przekątnej głównej macierzy **A**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

jest ujemny lub równy zeru ($a_{ii} \leq 0$), to macierz **A** nie jest macierzą dodatnio określoną. Podobnie, jeżeli któryś z elementów stojących na przekątnej gwnej macierzy **A** jest dodatni lub równy zeru ($a_{ii} \geq 0$), to macierz **A** nie jest macierzą ujemnie określoną.

Wniosek 9.3 *Jeżeli elementy stojące na przekątnej głównej macierzy* **A** *przyjmują różne znaki, to taka macierz jest macierzą nieokreśloną.*

Twierdzenie 9.2 *(Kryterium elementów głównych) Macierz* $\mathbf{A}_{n\times n}$ *jest ujemnie określona, jeżeli wartości głównych minorów zmieniają znak naprzemiennie, począwszy od* $D_1 < 0$*, to znaczy*

$$D_1 < 0 \qquad D_2 > 0 \qquad D_3 < 0 \qquad D_4 > 0 \text{ itd.}$$

Uwaga 9.1 ***Określoność formy kwadratowej jest równoważna określoności macierzy.***

Przykład 9.13 *Sprawdzić określoność formy kwadratowej*

$$q(x, y, z) = -4x^2 - 2y^2 - z^2 + 4xy + 2xz$$

Rozwiązanie 9.13 *Macierz odpowiadająca powyższej formie kwadratowej ma postać*

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Poszczególne wyznaczniki główne przyjmują wartości

$$\begin{aligned} D_1 &= |a_{11}| = |-4| = -4 < 0 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \end{aligned}$$

A więc, macierz jest macierzą ujemnie określoną, czyli forma kwadratowa jest formą ujemnie określoną.

Wróćmy do zapisu (479)

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

Dodajmy i odejmijmy od prawej strony (479) wyrażenie $\frac{b^2}{a}x_2^2$. W rezultacie otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} &= ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + \boxed{\frac{b^2}{a}x_2^2 - \frac{b^2}{a}x_2^2} = \\ &= a\left(x_1^2 + \frac{2b}{a}x_1x_2 + \frac{b^2}{a}x_2^2\right) - \frac{b^2}{a}x_2^2 + cx_2^2 = \\ &= a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 + \frac{(ac-b^2)}{a}x_2^2 \end{aligned} \tag{480}$$

Ponieważ $\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2$ i x_2^2 są dodatnie, to określoność macierzy $\mathbf{A}$ wynika ze znaku elementu a i znaku ułamka $\frac{\left(ac-b^2\right)}{a}$.

1. Jeżeli $a > 0$ i $ac - b^2 > 0$, to forma kwadratowa (480), a tym samym macierz $\mathbf{A}$ jest dodatnio określona, np. macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ jest macierzą dodatnio określoną.

2. Jeżeli $a > 0$ i $ac - b^2 \geq 0$, to macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą dodatnio półokreśloną, np. macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ jest macierzą dodatnio półokreśloną (w tym przypadku $ac - b^2 = 0$).

3. Jeżeli $a \geq 0$ i $ac - b^2 \geq 0$, to macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą dodatnio półokreśloną, np. macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest macierzą dodatnio półokreśloną (w tym przypadku $a = 0$ i $ac - b^2 = 0$).

4. Jeżeli $a \leq 0$ i $ac - b^2 \leq 0$, to macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą ujemnie półokreśloną, np. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

5. Jeżeli $a < 0$ i $ac - b^2 > 0$, to macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą ujemnie określoną, np. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

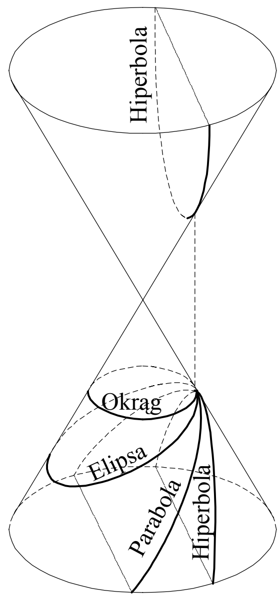
6. Jeżeli $a \leq 0$ i $ac - b^2 < 0$, to macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą nieokreśloną, np. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Na zakończenie przedstawimy kilka wniosków.

Wniosek 9.4 *Jeżeli macierz* **A** *nie jest macierzą ani ujemnie półokreśloną, ani dodatnio półokreśloną, to jest macierzą nieokreśloną.*

Wniosek 9.5 *Macierz jednostkowa* **I** *jest macierzą dodatnio określoną.*

Wniosek 9.6 *Każdej macierzy dowolnie określonej odpowiada forma kwadratowa o określoności danej macierzy.*



Rysunek 40: Stożkowe.

Jeżeli $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$, to

$$\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= -2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 = x_2^2 - 2(x_1 - x_2)^2$$

- forma kwadratowa jest nieokreślona (różnica kwadratów), bo macierz **A** jest macierzą nieokreśloną itd.

Jeżeli przyjmiemy, że macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, to $\frac{1}{2}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ i forma kwadratowa $\mathbf{x}^T\frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{x}$ jest równa $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = \frac{1}{2}\left[x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2\right]$ i jest zawsze dodatnia (suma trzech kwadratów), z wyjątkiem $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ostatnią formę kwadratową możemy również zapisać w postaci sumy dwóch kwadratów: $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2$. Formę kwadratową $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$ przedstawimy w innej postaci, mianowicie $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 3\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}\right)^2$. Łatwo sprawdzić, że współczynniki 3 i 1 są wartościami własnymi macierzy **A**, a wektory $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ i $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ są wektorami własnymi tej macierzy.

Jeżeli macierz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, to odpowiadająca jej forma kwadratowa ma postać $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$, która przyjmuje wartości dodatnie lub zero. A więc w tym przypadku macierz **B** jest macierzą dodatnio półokreśloną. Natomiast macierz symetryczna $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ generuje dodatnią lub ujemną formę kwadratową, zależną od współrzędnych wektora $\mathbf{x}$. Mianowicie: $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - 3x_2)^2 - 8x_2^2$ - różnica kwadratów. Macierz **C** jest macierzą nieokreśloną.

10 Funkcje jednej zmiennej

10.1 Otoczenie i sąsiedztwo. Punkt skupienia. Definicja funkcji zmiennej x.

Niech c oznacza dowolną liczbę rzeczywistą, a δ dowolną liczbę rzeczywistą dodatnią

$$\begin{array}{l} c \in \mathcal{R} \\ \delta > 0,\ \delta \in \mathcal{R} \end{array} \tag{481}$$

Definicja 10.1 *(Otoczenia)*
Przedział $(c-\delta; c+\delta)$ nazywamy ***otoczeniem*** *obustronnym punktu c o promieniu δ i oznaczamy*

$$U(c;\delta) \tag{482}$$

Otoczenia jednostronne definiujemy następująco:

- *otoczenie prawostronne punktu c o promieniu δ: przedział*

$$< c; c+\delta) \tag{483}$$

- *otoczenie lewostronne punktu c o promieniu δ: przedział*

$$(c-\delta; c > \tag{484}$$

Definicja 10.2 *(Sąsiedztwa)*
Przedział $(c; c+\delta)$ nazywamy sąsiedztwem prawostronnym punktu c o promieniu δ.
Przedział $(c-\delta; c)$ nazywamy sąsiedztwem lewostronnym punktu c o promieniu δ.
Sumę sąsiedztw jednostronnych nazywamy ***sąsiedztwem*** *punktu c o promieniu δ i oznaczamy*

$$S(c;\delta) \Longleftrightarrow (c-\delta; c+\delta) - \{c\} \tag{485}$$

z powyższych definicji wynikają następujące wnioski:

1. $x \in U(c;\delta) \Longleftrightarrow |x-c| < \delta$
2. $x \in S(c;\delta) \Longleftrightarrow 0 < |x-c| < \delta$
3. *Punkt c należy do każdego ze swych otoczeń*
4. *Punkt c nie należy do żadnego ze swych sąsiedztw.*

Przedział $(\delta; +\infty)$ nazywamy otoczeniem (lub sąsiedztwem) plus nieskończoności.
Przedział $(-\infty; -\delta)$ nazywamy otoczeniem minus nieskończoności.
Symbole $+\infty$ i $-\infty$ nie oznaczają ani liczb, ani punktów na osi liczbowej. Nazywamy je liczbami nieskończonymi lub punktami niewłaściwymi. W odniesieniu do punktów niewłaściwych terminy otoczenia i sąsiedztwo są równoważne.

Niech $X \subset \mathcal{R}$ i $Y \subset \mathcal{R}$[29]

[29] Zapis ten czytamy: zbiór $\mathcal{X}$ jest podzbiorem zbioru $\mathcal{R}$.

Definicja 10.3 *(Funkcji)*
Odwzorowanie *$f : X \to Y$ nazywamy funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej*[30].

Uwaga 10.1 *Zwykle stosujemy oznaczenie $y = f(x)$ dla $x \in X$.*

Definicja 10.4 *(Dziedziny i przeciwdziedziny)*

1. *Zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji f i oznaczamy Df.*

2. *Zbiór $\mathcal{R}f = \{y : y = f(x) \wedge x \in Df\}$ nazywamy **przeciwdziedziną** funkcji f.*

3. *Jeżeli $\mathcal{R}f \neq Y$, to mówimy, że f odwzorowuje X w Y.*

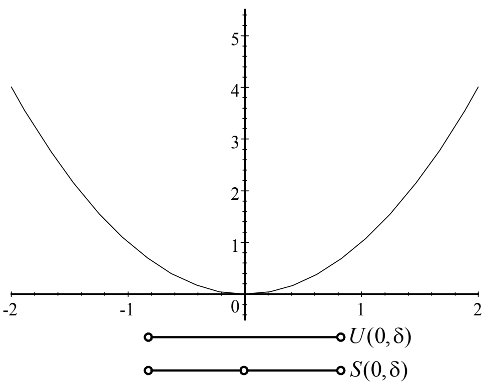
4. *Jeżeli $\mathcal{R}f = Y$, to mówimy, że f odwzorowuje X na Y.*

5. *Jeżeli funkcja rzeczywista jednej zmiennej rzeczywistej jest określona za pomocą wzoru $y = f(x)$, to zbiór $\{x : f(x) \in \mathcal{R}\}$ nazywamy **dziedziną naturalną** tej funkcji.*

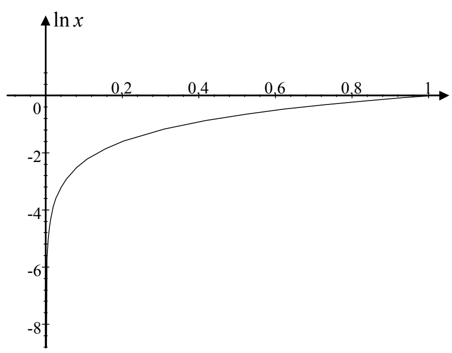
Definicja 10.5 *(Wykresu)*
*Zbiór $\{(x, y) : x \in Df \wedge y = f(x)\}$ nazywamy **wykresem** funkcji $f(x)$.*

Przykład 10.1 *Funkcja $y = x^2$ jest nieujemna w każdym otoczeniu 0 oraz dodatnia w każdym sąsiedztwie 0 (rys. 41), a funkcja $y = \ln x$ jest ujemna w prawostronnym sąsiedztwie 0 oraz dodatnia w pewnym sąsiedztwie $+\infty$ (rys. 42).*

Rozwiązanie 10.1 *Wystarczy przedyskutować rysunki 41 i 42.*



Rysunek 41: Otoczenie i sąsiedztwo punktu 0.



Rysunek 42: Prawostronne otoczenie i sąsiedztwo punktu 0.

Definicja 10.6 *(Punktu skupienia)*
*Punkt c nazywamy **punktem skupienia** zbioru $D \subset \mathcal{R}$, jeżeli w każdym sąsiedztwie punktu c znajduje się przynajmniej jeden punkt zbioru D.*

Punkt c jest więc punktem skupienia zbioru D wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg punktów $(x_1, x_2, \ldots)$ takich, że dla wszystkich $n \in \mathcal{N}$

$$x_n \in D \quad , \quad x_n \neq c \quad , \quad \lim_{n\to\infty} x_n = c \tag{486}$$

Wniosek 10.1 *Liczba 1 jest punktem skupienia zbioru liczb $\frac{n}{n+1}$, gdzie $n \in \mathcal{N}$.*

[30] Jest to odwzorowanie f zbioru $\mathcal{X}$ w zbiór $\mathcal{Y}$.

10.2 Rodzaje funkcji

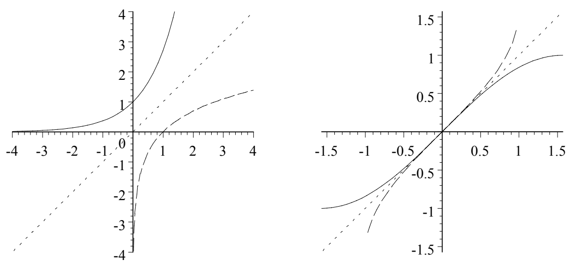
W punkcie tym omówimy podstawowe typy funkcji zmiennej x.

10.2.1 Określanie funkcji jednej zmiennej

Funkcje jednej zmiennej mogą być określane:

1. w postaci jawnej, wówczas y jest wyrażone przez x za pomocą wzoru $y = f(x)$;
2. w postaci uwikłanej, gdy x i y są w relacji $F(x, y) = 0$, np. $y^2 - x^2 - \sqrt{2} = 0$ lub $xe^y - ye^x - 2 = 0$;
3. w postaci parametrycznej, gdy wartości x i y są wyrażone przez trzecią zmienną t (parametr) za pomocą równań $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, np. $x = r\sin t, y = r\cos t$.

10.2.2 Funkcje wzajemnie odwrotne



Rysunek 43: Funkcje $y = e^x$, $y = \ln x$, $y = \sin x$ i $y = \arcsin x$.

Dwie funkcje $y = f(x)$ i $x = \varphi(y)$ nazywamy *wzajemnie odwrotnymi*, jeżeli każda para wartości a, b spełniająca warunek $b = f(a)$ spełnia też warunek $a = \varphi(b)$ i odwrotnie: każda para wartości b, a spełniająca warunek $a = \varphi(b)$ spełnia też warunek $b = f(a)$.

Uwaga 10.2 *Aby funkcja $y = f(x)$ była odwracalna, musi być jednoznaczna (tj. różnym wartościom y odpowiadają różne wartości x) i jednokrotna (tzn. różnym wartościom x odpowiadają różne wartości y). Funkcja odwrotna jest również jednoznaczna i jednokrotna. Funkcję odwrotną zapisujemy jako funkcję zmiennej x; zamiast $x = \varphi(y)$ piszemy $y = \varphi(x)$. Wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = \varphi(x)$ są symetryczne względem prostej $y = x$.*

Poniżej przedstawione są przykłady funkcji odwrotnych. Zostały one zapisane zgodnie z regułą przytoczoną w powyższej uwadze: w drugiej kolumnie $x = \varphi(y)$, w następnej $y = \varphi(x)$.

$$y = x^2 \qquad x = \sqrt{y} \qquad y = \sqrt{x}$$

$$y = e^x \qquad x = \ln y \qquad y = \ln x$$

$$y = \frac{x+1}{2-x} \quad x = \frac{2y-1}{y+1} \quad y = \frac{2x-1}{x+1}$$

10.2.3 Funkcje elementarne

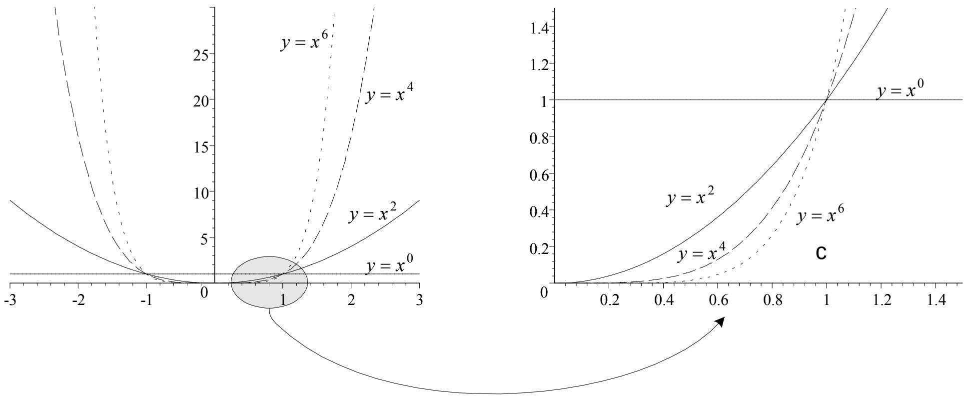
Definicja 10.7 *Funkcje elementarne są to funkcje określone wzorami zawierającymi skończoną liczbę operacji algebraicznych wykonanych na zmiennej niezależnej, na funkcji oraz na pewnych stałych.*

Funkcje elementarne dzielimy na *funkcje algebraiczne* i *funkcje przestępne*. W funkcjach algebraicznych zmienna x i funkcja y są związane równaniem algebraicznym:

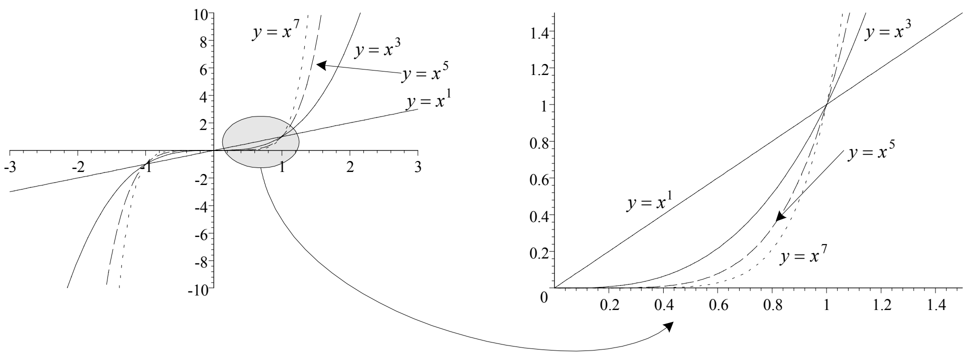
$$\sum a_i y^k = 0$$

w której współczynniki a_i są wielomianami zmiennej x, np. $(x-1)y^2 + xy - x^2 - 1 = 0$. Jeżeli równanie takie rozwiążemy względem y, to wśród rozwiązań znajdą się funkcje wymienione poniżej.

1. **Funkcja całkowita wymierna**: $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$; w szczególności może to być funkcja stała $y = a$, liniowa $y = ax+b$, funkcja kwadratowa $y = ax^2+bx+c$ (są to **funkcje potęgowe**).



Rysunek 44: Funkcje potęgowe z wykładnikiem parzystym.

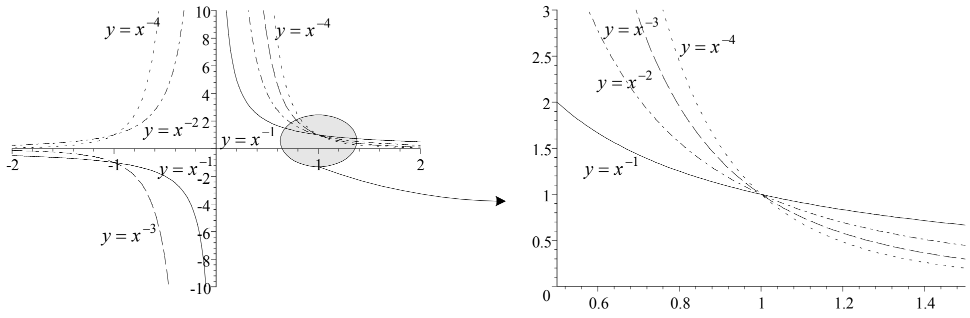


Rysunek 45: Funkcje potęgowe z wykładnikiem nieparzystym.

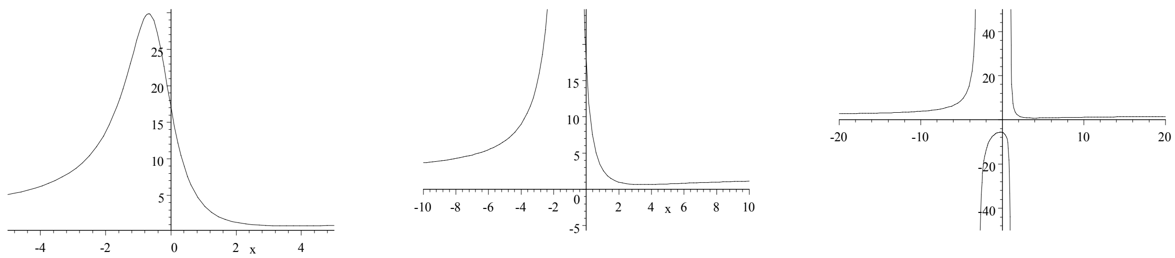
2. **Funkcja wymierna ułamkowa**, czyli iloraz dwóch wielomanów

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}$$

przy czym licznik nie dzieli się przez mianownik. Na rysunku 47 przedstawiamy przykładowe wykresy funkcji y, z mianownikiem w postaci funkcji kwadratowej. W szczególności może to być **funkcja homograficzna** $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, w której $c \neq 0$ oraz $ad - bc \neq 0$.

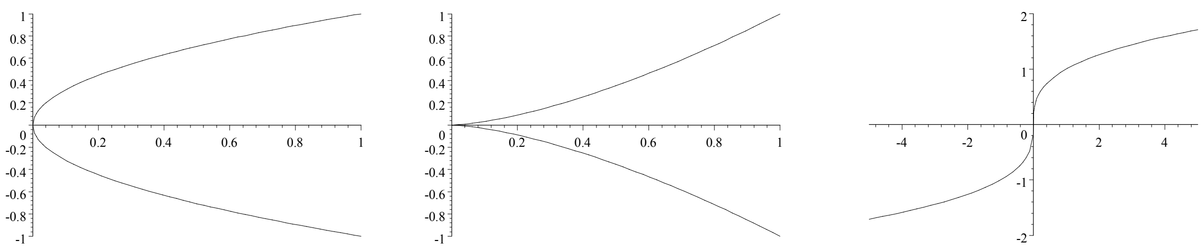


Rysunek 46: Funkcje potęgowe z wykładnikiem ujemnym.



Rysunek 47: Funkcje wymierne ułamkowe: $\Delta_{mianownika} < 0$. $\Delta_{mianownika} = 0$. $\Delta_{mianownika} > 0$.

3. **Funkcja niewymierna**, czyli taka, w której występuje pierwiastkowanie zmiennej niezależnej, np. $y = \sqrt{x+8}$, $y = \sqrt[3]{x^2+1}$.



Rysunek 48: Funkcje pierwiastkowe: $y = x^{1/2}$, $y = x^{3/2}$ i $y = x^{1/3}$.

Definicja 10.8 *Funkcją przestępną jest funkcja, której nie można wyrazić równaniem* $\sum a_i y^k = 0$*, gdzie* a_i *są wielomianami zmiennej* x*.*

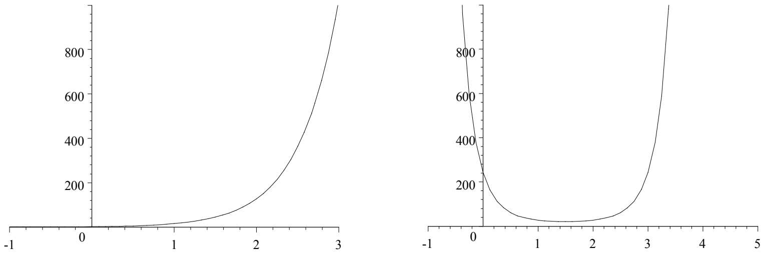
Najprostszymi funkcjami przestępnymi są:

1. **Funkcje wykładnicze**: $y = a^{bx+c}$, $y = e^x$, $y = 3^{x^2-3x+5}$

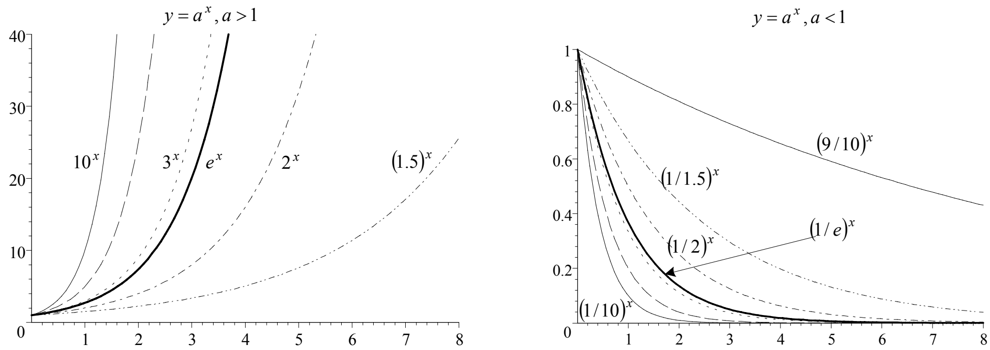
2. **Funkcje logarytmiczne**: $y = \log_a \varphi(x)$, $y = \ln(2x+1)$, $y = \log_3 (x^2 - 2x)$ (patrz rys. 51).

3. **Funkcje trygonometryczne**: $y = \sin(2x+1)$, $y = \cos x$, $y = \tan \frac{x}{2}$ (patrz rys. 53)[31].

[31] Funkcje *tangens* i *cotangens* często zapisywane są jako tg i ctg. W wykładzie będziemy posługiwać się zapisem: tan = tg i cot = ctg.

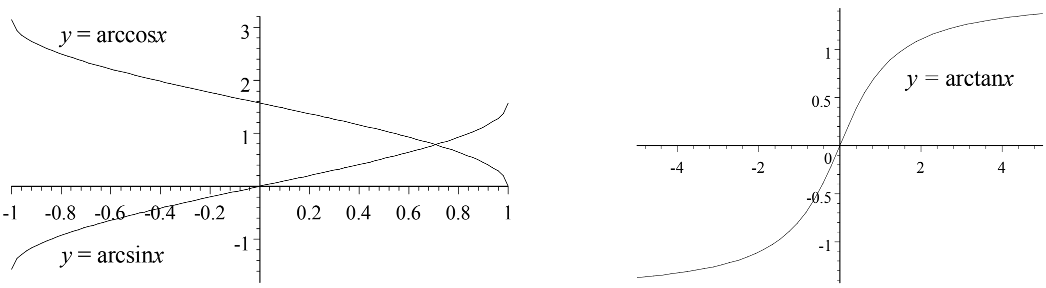


Rysunek 49: Funkcje wykładnicze: $y = a^{bx+c}$ i $y = 3^{x^2-3x+5}$.



Rysunek 50: Funkcje wykładnicze z $a > 1$ i $0 < a < 1$.

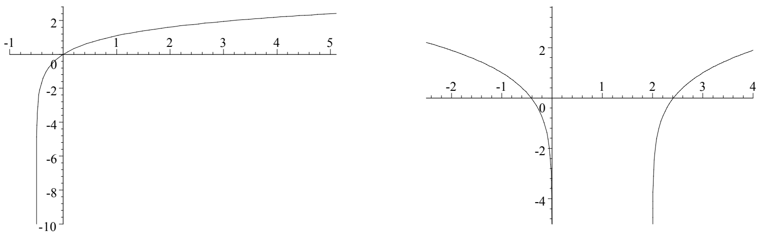
4. **Funkcje cyklometryczne**: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$ (czytamy *arkus sinus, kosinus, tangens, kotangens* x). Są to funkcje odwrotne względem funkcji trygonometrycznych, przy czym uwzględnia się tylko jeden półokres funkcji (patrz Uwaga 10.2, str. 165).



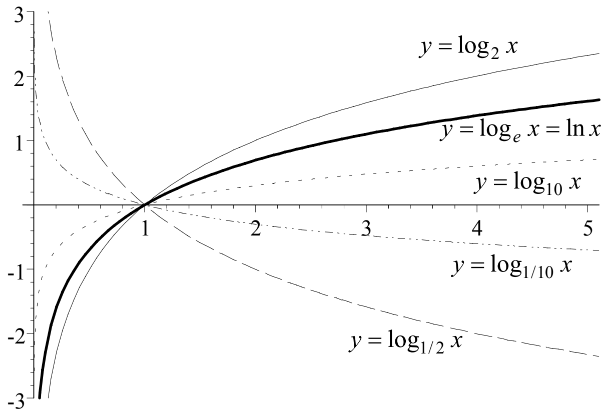
Rysunek 54: Funkcje cyklometryczne: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ oraz $y = \arctan x$.

Funkcje cyklometryczne często opisujemy następująco: $\arcsin x = \sin^{-1} x$, $\arccos x = \cos^{-1} x$, $\arctan x = \tan^{-1} x$, $\operatorname{arccot} x = \cot^{-1} x$. Zapisu tego nie wolno utożsamiać z operacją dzielenia: 1 podzielone przez funkcję, tzn. $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$.

$$
\begin{array}{llll}
y = \arcsin x & \Longleftrightarrow & x = \sin y & |y| \le \pi/2 \\
y = \arccos x & \Longleftrightarrow & x = \cos y & 0 \le y \le \pi \\
y = \arctan x & \Longleftrightarrow & x = \tan y & |y| < \pi/2 \\
y = \operatorname{arccot} x & \Longleftrightarrow & x = \cot y & 0 < y < \pi
\end{array}
$$



Rysunek 51: Funkcje logarytmiczne: $y = \ln(2x+1)$ i $y = \log_3\left(x^2 - 2x\right)$.



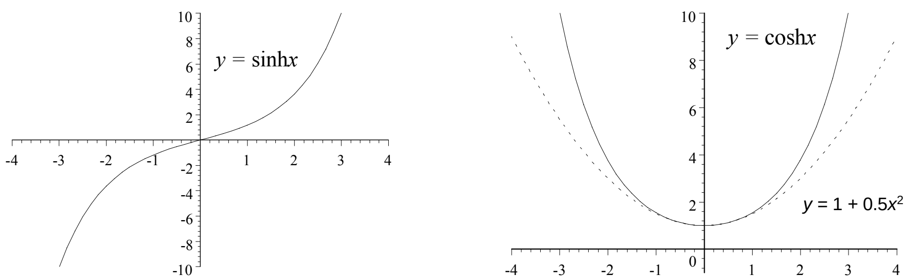
Rysunek 52: Funkcje logarytmiczne z różnymi podstawami.

5. **Funkcje hiperboliczne**: $y = \sinh x$, $y = \cosh x$, $y = \tanh x$, $y = \coth x$ (czytamy *sinus hiperboliczny x, kosinus, tangens i kotangens hiperboliczny x).* Są to funkcje pola określane na hiperboli równoosiowej o równaniu $x^2 - y^2 = 1$ (następne wykłady). Funkcje te można również opisać następująco:

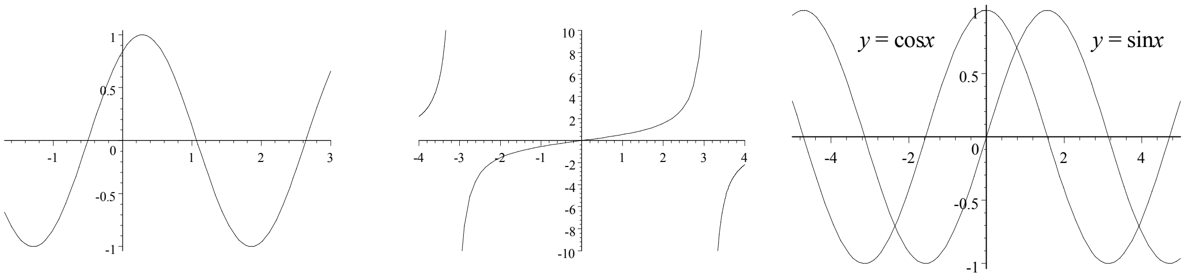
$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \qquad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh x \qquad \coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

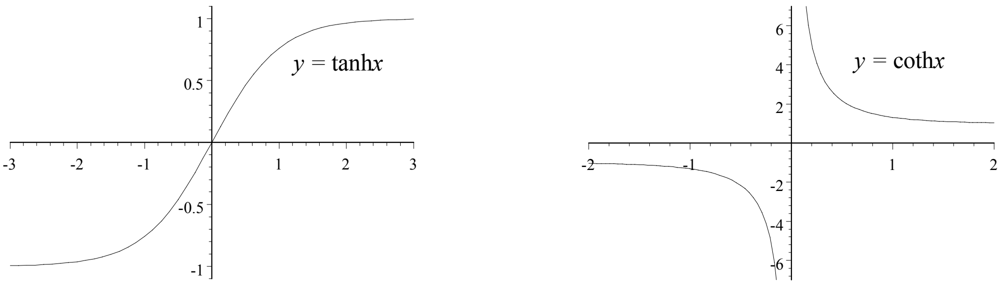
Funkcje $\sinh x$, $\tanh x$, $\coth x$ są dobrymi przykładami funkcji nieparzystych (patrz podpunkt 10.2.5, str. 172). Funkcję $\cosh x$ często nazywamy *linią łańcuchową*. Jest to funkcja parzysta. Jej wykres leży powyżej wykresu paraboli $y = 1 + 0.5x^2$.



Rysunek 55: Funkcje hiperboliczne: $y = \sinh x$ i $y = \cosh x$.



Rysunek 53: Funkcje trygonometryczne: $y = \sin(2x+1)$, $y = \tan(x/2)$ oraz $y = \sin x$ i $y = \cos x$.



Rysunek 56: Funkcje hiperboliczne: $y = \tanh x$ i $y = \coth x$.

Do podstawowych tożsamości zachodzących między funkcjami hiperbolicznymi zaliczamy

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1 \qquad \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

6. **Funkcje odwrotne względem funkcji hiperbolicznych**: $\operatorname{arsinh} x$, $\operatorname{arcosh} x$, $\operatorname{artanh} x$, $\operatorname{arcoth} x$ (czytamy *area sinus, kosinus, tangens, kotangens x*). Wymienione funkcje można również opisać następująco:

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right),\ x \geq 1$$

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ |x| < 1 \qquad \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},\ |x| > 1$$

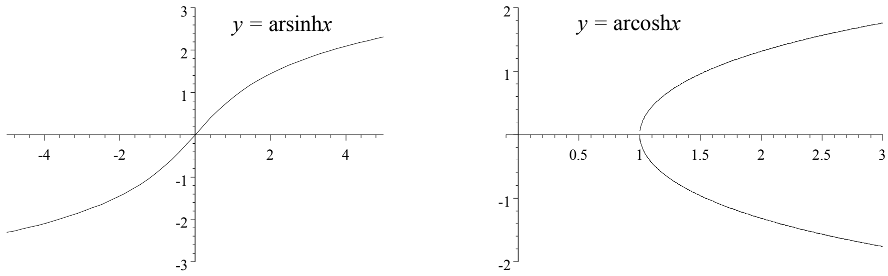
Funkcje *area* często opisujemy następująco: $\operatorname{arsinh} x = \sinh^{-1} x$, $\operatorname{arcosh} x = \cosh^{-1} x$, $\operatorname{artanh} x = \tanh^{-1} x$, $\operatorname{arcoth} x = \coth^{-1} x$. Zapisu tego nie wolno utożsamiać z operacją dzielenia: 1 podzielone przez funkcję, tzn. $\sinh^{-1} x \neq \frac{1}{\sinh x}$.

10.2.4 Funkcje nieelementarne

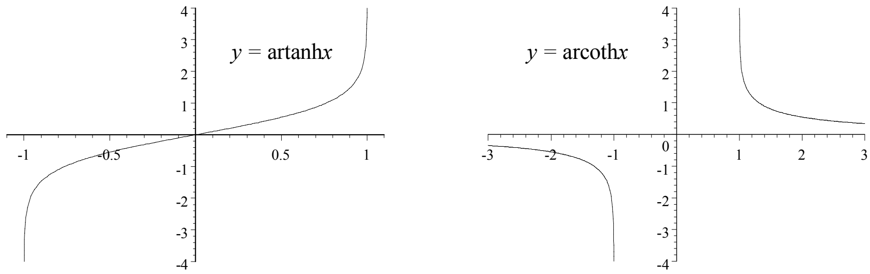
Funkcje, które nie są funkcjami elementarnymi nazywamy *funkcjami nieelementarnymi*. Funkcje takie określamy następująco.

1. Przy pomocy kilku wzorów dla różnych przedziałów, np.

$$y = \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad x < 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \\ 1 & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$



Rysunek 57: Funkcje (odwrotne): $y = \sinh^{-1} x$ i $y = \cosh^{-1} x$.



Rysunek 58: Funkcje (odwrotne): $y = \tanh^{-1} x$ i $y = \coth^{-1} x$.

2. Przy pomocy przejścia granicznego, np.

$$y = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{4n}}$$

3. Przy pomocy równań różniczkowych, których rozwiązań nie można wyrazić w skończonej postaci.

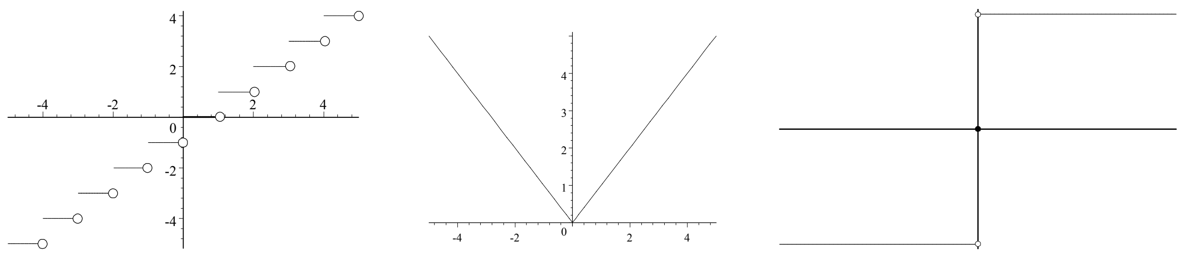
4. Przy pomocy równań funkcyjnych.

Prostymi przykładami funkcji nieelementarnych są:

1. *Część całkowita liczby* x, zwana *entier* x: funkcja y jest największą liczbą całkowitą, która nie przewyższa zmiennej x. Oznaczamy ją $y = E(x)$ lub $y = [x]$ (rys. 485).

2. *Wartość bezwzględna* lub *moduł liczby* $x : y = \begin{cases} -x & \text{dla} \quad x < 0 \\ x & \text{dla} \quad x \geq 0 \end{cases}$ (rys. 59).

3. *Znak liczby* x zwany *signum* x : $y = \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad x < 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \\ 1 & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$. Funkcję tę oznaczamy $y =$ $\operatorname{sgn} x$ (rys. 59).



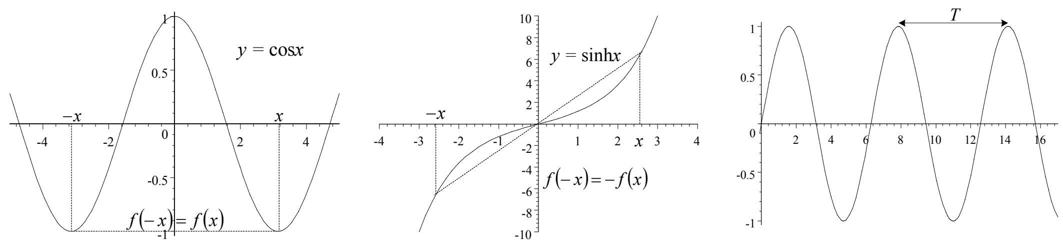
Rysunek 59: Funkcje nieelementarne: $y = E(x)$, $y = |x|$ i $y = \text{sign}\ x$.

10.2.5 Funkcje parzyste, nieparzyste i okresowe

1. **Funkcje parzyste**. Mówimy, że funkcja $f(x)$ jest funkcją parzystą, jeżeli dla każdego x z przedziału oznaczoności funkcji zachodzi równość

$$f(-x) = f(x)$$

Funkcją parzystą jest: $y = \cos x$; $y = x^4 - 5x^2 - 1$



Rysunek 60: Funkcja parzysta $y = \cos x$, funkcja nieparzysta $y = \sinh x$ i funkcja okresowa $y = \cos x$.

Z poznanych wcześniej funkcji funkcją parzystą jest funkcja $y = \cosh x$, bowiem

$$y(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = y(x)$$

2. **Funkcje nieparzyste**. Mówimy, że funkcja $f(x)$ jest funkcją nieparzystą, jeżeli dla każdego x z przedziału oznaczoności funkcji zachodzi równość

$$f(-x) = -f(x)$$

Funkcjami nieparzystymi są np. funkcje: $y = \sin x$; $y = x^3$. Również funkcja $y = \sinh x$ jest funkcją nieparzystą, bowiem

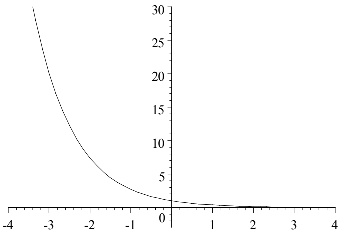
$$y(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -y(x)$$

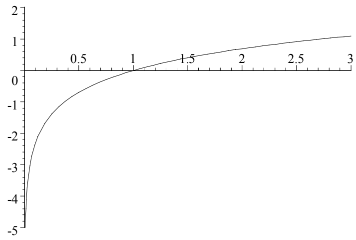
3. **Funkcje okresowe**. Mówimy, że funkcja $f(x)$ jest funkcją okresową, jeżeli dla każdego x z przedziału oznaczoności funkcji zachodzi równość

$$f(x + T) = f(x)$$

Liczbę T nazywamy okresem funkcji. Funkcjami okresowymi są funkcje trygonometryczne: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$; $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

4. **Funkcje monotoniczne**. Jeżeli funkcja $f(x)$ ma na przedziale (a, b) tę własność, że dla każdych dwóch wartości x_1, x_2 spełniającej warunek $a < x_1 < x_2 < b$ zachodzi nierówność $f(x_1) \leq f(x_2)$, to taką funkcję nazywamy monotonicznie rosnącą na przedziale (a, b). Jeżeli przy spełnieniu warunku $a < x_1 < x_2 < b$ zachodzi nierówność $f(x_1) \geq f(x_2)$, to funkcję tę nazywamy monotonicznie malejącą na przedziale (a, b)





Rysunek 61: Funkcja malejąca i rosnąca.

5. **Funkcje ograniczone**. Funkcję nazywamy *ograniczoną od góry*, jeżeli jej wartości nie przewyższają pewnej liczby M i *ograniczoną od dołu*, jeżeli jej wartości nie są mniejsze od pewnej liczby m. Funkcję ograniczoną od góry i od dołu nazywamy **funkcją ograniczoną**.

11 Granica funkcji

Wypowiadając definicję granicy funkcji będziemy stosować za [4] następujące oznaczenia: $f-$ funkcja jednej zmiennej; $D-$ dziedzina funkcji; $x-$ argument; $c, g-$ liczby (skończone). Rozróżniamy dziewięć przypadków, których numerację przedstawia tabela

	$f(x) \longrightarrow g$	$f(x) \longrightarrow +\infty$	$f(x) \longrightarrow -\infty$
$x \longrightarrow c$	1	2	3
$x \longrightarrow \infty$	4	6	7
$x \longrightarrow -\infty$	5	8	9

Tablica 1: Typy granic funkcji

Przypadkom tym nadajemy nazwy: $1-$ granica skończona w skończoności; $2,3-$ granica nieskończona w skończoności; $4,5-$ granica skończona w nieskończoności; $6,7,8,9-$ granica nieskończona w nieskończoności. Zamiast granica skończona mówimy też **granica właściwa**; zamiast granica nieskończona - **granica niewłaściwa**.

Rozważając granicę funkcji dla

1. $x \longrightarrow c$
2. $x \longrightarrow +\infty$
3. $x \longrightarrow -\infty$

Zakładamy, że

1. c jest punktem skupienia dziedziny funkcji
2. $+\infty$ jest punktem skupienia dziedziny funkcji
3. $-\infty$ jest punktem skupienia dziedziny funkcji.

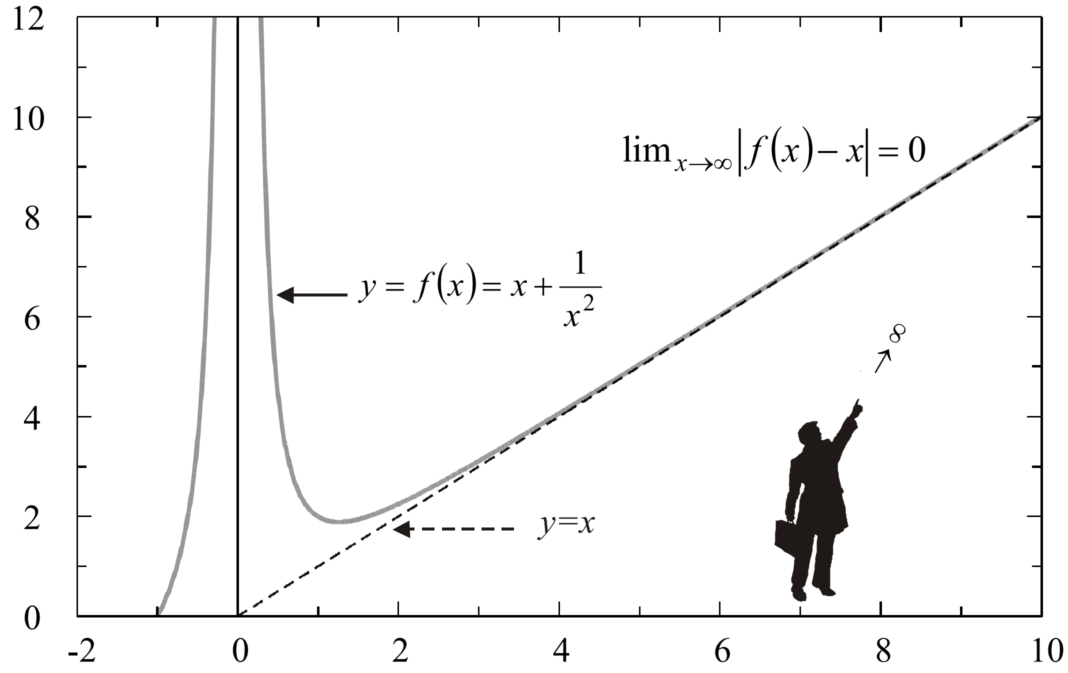
Podamy dwie definicje granicy - według Heinego i Cauchy'ego.

Definicja 11.1 *(Granicy funkcji według Heinego)*
*Liczbę g nazywamy **granicą funkcji** $f(x)$ w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in S$, zbieżnego do x_0, ciąg wartości funkcji $(f(x_n))$ jest zbieżny do g, co zapisujemy*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) &= g \\ &\mathit{lub} \\ f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g &\iff \forall (x_n)\ \forall n \in \mathcal{N}, x_n \in S\ \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g \end{aligned} \tag{487}$$

Definicja 11.2 *(Granicy funkcji według Cauchy'ego)*
Liczbę g nazywamy granicą funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla każdego argumentu x spełniającego nierówność $0 < |x - x_0| < \delta$ zachodzi nierówność $|f(x) - g| < \varepsilon$, co zapisujemy

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) &= g \iff \\ &\iff (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x\, (0 < |x - x_0| < \delta)) \Longrightarrow (|f(x) - g| < \varepsilon) \end{aligned} \tag{488}$$



Rysunek 62: Granica funkcji w nieskończoności oraz asymptota ukośna funkcji.

Uwaga 11.1 *Definicja Heinego jest równoważna Definicji Cauchy'ego. Granicę $g \in \mathcal{R}$ nazywamy **granicą właściwą**.*

Twierdzenie 11.1 *Jeżeli*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \quad i \quad \lim_{x\to x_0} h(x) = p, \; to$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm h(x)] = g \pm p$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot h(x)] = g \cdot p \tag{489}$$

oraz przy dodatkowym założeniu, że $p \neq 0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{g}{p} \tag{490}$$

Twierdzenie 11.2 *(O granicy funkcji złożonej)*

Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ i $\lim\limits_{y\to y_0} h(y) = g$ oraz $f(x) \neq y_0$ dla każdego x z pewnego sąsiedztwa punktu x_0, to

$$\lim_{x\to x_0} h(f(x)) = \lim_{y\to y_0} h(y) = g \tag{491}$$

Definicja 11.3 *(Granicy niewłaściwej w punkcie według Heinego)*

1. *Mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in S$ i zbieżnego do x_0, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do $+\infty$*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{lub} \quad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty \tag{492}$$

2. *Mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in S$ i zbieżnego do x_0, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do $-\infty$*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad \text{lub} \quad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\infty \tag{493}$$

Definicja 11.4 *(Granicy niewłaściwej w punkcie według Cauchy'ego)*

1. *Mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby M istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla każdego argumentu x spełniającego nierówność $0 < |x - x_0| < \delta$ zachodzi nierówność $f(x) > M$*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall M \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \, (0 < |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow (f(x) > M) \tag{494}$$

2. *Mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby M istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla każdego argumentu x spełniającego nierówność $0 < |x - x_0| < \delta$ zachodzi nierówność $f(x) < M$*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall M \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \, (0 < |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow (f(x) < M) \tag{495}$$

Uwaga 11.2 *Jeżeli w określeniu granicy (właściwej lub niewłaściwej) funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 zastąpimy sąsiedztwo S tego punktu przez sąsiedztwo lewostronne $(x_0 - \delta; x_0)$ lub prawostronne $(x; x_0 + \delta)$, to otrzymamy określenie tzw. granicy jednostronnej*

- *lewostronnej* $\lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x)$
- *prawostronnej* $\lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x)$.

Twierdzenie 11.3 *Funkcja $f(x)$ ma granicę (właściwą lub niewłaściwą) w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = \lim_{x \to x_{0+}} f(x) \tag{496}$$

Niech funkcja $f(x)$ jest określona na przedziale $(a; \infty)$.

Definicja 11.5 *(Granicy według Cauchy'ego w $+\infty$)*

Mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w punkcie niewłaściwym $+\infty$ granicę g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba δ taka, że dla każdego argumentu $x > \delta$ zachodzi nierówność: $|f(x) - g| < \varepsilon$, co zapisujemy

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = g \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall x > \delta \Longrightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \tag{497}$$

Definicja 11.6 *(Granicy według Heinego w $+\infty$)*
Mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w punkcie niewłaściwym $+\infty$ granicę g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in (a;\infty)$, rozbieżnego do $+\infty$, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g, co zapisujemy

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = g \quad \textit{lub} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} g \tag{498}$$

Niech funkcja $f(x)$ jest określona na przedziale $(-\infty; a)$.

Definicja 11.7 *(Granicy według Heinego w $-\infty$)*
Mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w punkcie niewłaściwym $-\infty$ granicę g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in (-\infty; a)$, rozbieżnego do $-\infty$, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g, co zapisujemy

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = g \quad \textit{lub} \quad f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} g \tag{499}$$

Definicja 11.8 *(Granicy według Cauchy'ego w $-\infty$)*
Mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w punkcie niewłaściwym $-\infty$ granicę g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba δ taka, że dla każdego argumentu $x < \delta$ zachodzi nierówność $|f(x) - g| < \varepsilon$, co zapisujemy

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = g \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta \quad \forall x < \delta \Longrightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \tag{500}$$

Uwaga 11.3 *Podobnie określamy granice niewłaściwe $-\infty$ oraz $+\infty$ funkcji w punktach niewłaściwych $-\infty$ i $+\infty$.*

Przykład 11.1 *Obliczyć $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, jeżeli*

$$f(x) = \frac{x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 16x + 12}{x^3 + 16x^2 + 52x + 48}$$

Rozwiązanie 11.1 *Podstawiamy za x wartość 0. W efekcie otrzymujemy*

$$\lim_{x\to0} \frac{x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 16x + 12}{x^3 + 16x^2 + 52x + 48} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

Odp. Wartość granicy $= 1/4$.

Przykład 11.2 *Obliczyć $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$, gdy $f(x)$ jest funkcją z Przykładu 11.1.*

Rozwiązanie 11.2 $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \frac{0}{0}$. *Sprawdzamy, czy licznik i mianownik $f(x)$ możemy podzielić przez $(x+2)$ $(x \neq -2)$. Okazuje się, że możemy, zatem*

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 16x + 12}{x^3 + 16x^2 + 52x + 48} = \lim_{x\to-2} \frac{(x+2)(x^3 + 3x^2 + 5x + 6)}{(x+2)(x^2 + 14x + 24)} =$$

$$= \lim_{x\to-2} \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 6}{x^2 + 14x + 24} = \frac{0}{0}$$

Ponownie sprawdzamy, czy możemy wydzielić z licznika i mianownika czynnik $(x+2)$ $(x \neq -2)$. Widzimy, że jest to możliwe, zatem

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 6}{x^2 + 14x + 24} = \lim_{x\to-2} \frac{(x+2)(x^2 + x + 3)}{(x+2)(x+12)} = \lim_{x\to-2} \frac{x^2 + x + 3}{x + 12} = \frac{1}{2}$$

Odp. Granica jest równa $1/2$.

Uwaga 11.4 *Przy rozwiązywaniu zadań można korzystać z następujących granic*

$$\lim_{x\to a}\sin x = \sin a \tag{501}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \tag{502}$$

$$\lim_{x\to 0}a^x = 1, \quad a>0 \tag{503}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a, \quad a>0 \tag{504}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{505}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{x} = m \tag{506}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x} = m \tag{507}$$

Definicja 11.9 *(Liczby e)*
Liczbę e określamy wzorem:

$$e = \lim_{|x|\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \tag{508}$$

11.1 Warunki istnienia granicy. Rachunek granic niewłaściwych

Na wstępie przytoczymy podstawowe twierdzenia.

Twierdzenie 11.4 *(O granicy lewostronnej)*
Jeżeli funkcja $f(x)$ jest rosnąca i ograniczona w pewnym lewostronnym sąsiedztwie S punktu x_0, to istnieje skończona granica lewostronna funkcji w punkcie x_0

$$\lim_{x\to x_{0-}} f(x) = g \tag{509}$$

i granica ta jest większa od wszystkich wartości, które $f(x)$ przyjmuje w S.

Twierdzenie 11.5 *(O granicy prawostronnej)*
Jeżeli funkcja $f(x)$ jest rosnąca i ograniczona w pewnym prawostronnym sąsiedztwie S punktu x_0, to istnieje skończona granica prawostronna funkcji w punkcie x_0

$$\lim_{x\to x_{0+}} f(x) = g \tag{510}$$

i granica ta jest mniejsza od wartości, które $f(x)$ przyjmuje dla dowolnego $x\in S$.

Twierdzenie 11.6 *(O trzech funkcjach)*
Załóżmy, że funkcja $f(x)$ oraz dwie funkcje $g(x)$ i $G(x)$ są określone w pewnym sąsiedztwie S punktu x_0. Jeżeli dla każdego $x\in S$ jest

$$g(x)\le f(x)\le G(x)$$

i jeżeli $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} G(x) = l$, to $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

Uwaga 11.5 *Analogiczne twierdzenie można sformułować dla granic jednostronnych, dla granic w nieskończoności oraz dla granic niewłaściwych.*

Twierdzenie 11.7 *(O warunku nieistnienia granicy skończonej)*

Jeżeli funkcja $f(x)$ określona w pewnym sąsiedztwie S punktu x_0 nie ma granicy skończonej w punkcie x_0, to istnieje ciąg $(x_n), x_n \in S, x_n \to x_0$ taki, że odpowiadający mu ciąg wartości funkcji $(f(x_n))$ jest rozbieżny.

Twierdzenie 11.8 *Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym sąsiedztwie S punktu x_0 i dla pewnego ciągu $(x_n), x_n \in S, x_n \to x_0$, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny, to funkcja $f(x)$ nie ma w punkcie x_0 granicy skończonej.*

Twierdzenie 11.9 *(O warunkach Cauchy'ego istnienia granicy skończonej)*

Niech x_0 oznacza liczbę skończoną albo $+\infty$ albo $-\infty$ i załóżmy, że $f(x)$ jest funkcją określoną w pewnym sąsiedztwie punktu x_0. Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia granicy skończonej $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ jest, aby dla $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists S(x_0; \delta)$ takie, że dla każdych dwóch punktów x', x'' należących do $S(x_0, \delta)$ zachodzi nierówność

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \tag{511}$$

Twierdzenie 11.10 *Jeżeli funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 granicę skończoną, to istnieje sąsiedztwo punktu x_0, w którym funkcja $f(x)$ jest ograniczona.*

Uwaga 11.6 *Z istnienia granicy skończonej wynika ograniczoność funkcji. Natomiast z ograniczoności funkcji nie wynika istnienie granicy. Na przykład funkcja $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ jest ograniczona, ale $\lim\limits_{x \to x_0} \sin\frac{1}{x}$ nie istnieje (dla $x_0 = 0$). Podobnie funkcja $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ jest ograniczona, ale $\lim_{x \to 0} \cos\frac{1}{x}$ nie istnieje.*

Twierdzenie 11.11 *(O granicach funkcji)*

Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0^+$, to $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0^-$, to $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ i $f(x) \neq 0$ dla $x \in S(x_0; \delta)$, to $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{|f(x)|} = +\infty$

Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ albo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, to $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{|f(x)|} = 0$

Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = G > 0$, to $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = +\infty$

Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = G < 0$, to $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = -\infty$

Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ i funkcja $g(x)$ jest ograniczona w sąsiedztwie punktu x_0, to $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) g(x) = +\infty$

Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, to $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$

Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, to granicę $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x)$ można wyznaczyć po szczegółowej analizie funkcji $f(x)$ i $g(x)$[32].

Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, to granicę $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)]$ można wyznaczyć po szczegółowej analizie funkcji $f(x)$ i $g(x)$[33].

[32] Czytamy: *nieskończoność razy zero.*

[33] Czytamy: *nieskończoność minus nieskończoność.*

11.2 Symbole nieoznaczone

Dla funkcji argumentu rzeczywistego określamy następujące symbole nieoznaczone

$$\infty \cdot 0; \quad \infty - \infty; \quad \frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \infty^0; \quad 1^\infty; \quad 0^0$$

(z niektórymi z nich spotkamy się przy ciągach liczbowych).

Definicja 11.10 *Jeżeli funkcja $u(x)$ określona w sąsiedztwie $S(x;\delta)$ jest zapisana w postaci ilorazu $u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, przy czym $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$, to mówimy, że $u(x)$ jest dla x dążącego do x_0 funkcją typu $\frac{\infty}{\infty}$ lub nieoznaczonością typu $\frac{\infty}{\infty}$.*

Definicja 11.11 *Jeżeli funkcja $u(x)$ określona w sąsiedztwie $S(x;\delta)$ jest zapisana w postaci ilorazu $u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, przy czym $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, to mówimy, że $u(x)$ jest dla x dążącego do x_0 funkcją typu $\frac{0}{0}$ lub nieoznaczonością typu $\frac{0}{0}$.*

Definicja 11.12 *Jeżeli funkcja $u(x)$ określona w sąsiedztwie $S(x;\delta)$ jest zapisana w postaci iloczynu $u(x) = f(x) \cdot g(x)$, przy czym $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, to mówimy, że $u(x)$ jest dla x dążącego do x_0 funkcją typu $\infty \cdot 0$ lub nieoznaczonością typu $\infty \cdot 0$.*

Przekształcając funkcję $u(x)$ do postaci $u(x) = f(x)/1/g(x)$ lub $u(x) = g(x)/1/f(x)$, sprowadzamy to zagadnienie do przypadku nieoznaczoności typu $\frac{\infty}{\infty}$ lub $\frac{0}{0}$.

Definicja 11.13 *Jeżeli funkcja $u(x)$ określona w sąsiedztwie $S(x;\delta)$ jest dana w postaci różnicy $u(x) = f(x) - g(x)$, przy czym $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$, to mówimy, że $u(x)$ jest dla x dążącego do x_0 funkcją typu $\infty - \infty$ lub nieoznaczonością typu $\infty - \infty$.*

Przekształcając różnicę $f(x) - g(x) = \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}\right) : \frac{1}{f(x)g(x)}$, nieoznaczoność typu $f(x) - g(x)$ sprowadzamy do postaci $\frac{\infty}{\infty}$ lub $\frac{0}{0}$.

Definicja 11.14 *Jeżeli $u(x) = f(x)^{g(x)}$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (nieoznaczoność typu 0^0), to w pierwszej kolejności znajdujemy granicę A funkcji $\ln u(x) = g(x)\cdot \ln f(x)$, prowadzącej do nieoznaczoności typu $0 \cdot \infty$, a następnie delogarytmujemy ją i obliczamy granicę e^A.*

W przypadku nieoznaczoności typu 1^∞ i ∞^0 postępujemy analogicznie.

Przykład 11.3 *Obliczyć granice funkcji*

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (2x+1)\sin\frac{1}{x}$ *b)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{1+x} - \sqrt{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to c} \frac{x-c}{x^2-c^2}$ *d)* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ *f)* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x(2+\sin x)}{e^x}$

Rozwiązanie 11.3 • *Przekształcimy wyrażenie*

$$(2x+1)\sin\frac{1}{x} = (2x+1)\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{2x+1}{x}\cdot\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Następnie obliczymy granicę iloczynu funkcji $\dfrac{2x+1}{x}$ *i* $\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}\cdot\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1}\cdot 1 = 2$$

- *W tym przypadku różnicę* $\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)$ *pomnożymy i podzielimy przez sumę* $\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)$. *Otrzymamy*

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{x} = \left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1+x-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$

A więc

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} = 0$$

- *Przekształcamy*

$$\frac{x-c}{x^2-c^2} = \frac{x-c}{(x-c)(x+c)} \overset{x\neq c}{=} \frac{1}{x+c}$$

Zatem

$$\lim_{x\to c}\frac{x-c}{x^2-c^2} = \lim_{x\to c}\frac{1}{x+c} = \frac{1}{2c} \quad (c\neq 0)$$

- *Podzielimy licznik i mianownik przez* x : $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1} = 2$

- *Porównaj definicję liczby* e *oraz przykłady z nią związane*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

- *Ponieważ* $e^x\neq 0$, *to*

$$\frac{e^x(2+\sin x)}{e^x} = 2+\sin x$$

Zatem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x(2+\sin x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty}(2+\sin x) \quad \text{- granica nie istnieje}$$

12 Ciągłość funkcji

Niech funkcja $f(x)$ będzie określona na pewnym otoczeniu U punktu x_0, czyli na zbiorze $U(x_0;\delta) = (x_0-\delta; x_0+\delta)$, gdzie δ jest pewną liczbą dodatnią.

Definicja 12.1 *Funkcję $f(x)$ nazywamy ciągłą w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{512}$$

Uwaga 12.1 *Ponieważ istnieją dwie równoważne definicje granicy funkcji, więc z uwagi na (512) istnieją dwie równoważne definicje ciągłości funkcji - Definicja Heinego i Cauchy'ego. Warunek (512) odpowiada warunkowi*

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) \tag{513}$$

gdzie: $h-$ przyrost argumentu funkcji; często oznaczany również jako Δx[34]:

$$\Delta x = x - x_0 \tag{514}$$

Różnicę wartości funkcji w punktach x i x_0 oznaczamy

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \tag{515}$$

i nazywamy przyrostem wartości funkcji odpowiadającym w punkcie x_0 przyrostowi argumentu Δx.

Używając tych oznaczeń i terminów możemy Definicję 12.1 ciągłości funkcji zapisać

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0 \tag{516}$$

i wypowiedzieć następująco: Funkcję $f(x)$ nazywamy ciągłą w punkcie x_0, jeżeli nieskończenie małemu przyrostowi argumentu odpowiada w punkcie x_0 nieskończenie mały przyrost wartości funkcji[35]*.*

Uwaga 12.2 *(Działania na funkcjach)*

1. *Suma, różnica oraz iloczyn funkcji ciągłych w punkcie x_0 jest funkcją ciągłą w tym punkcie.*

[34] Δx traktujemy jako jeden znak. Zapis Δx^2 oznacza kwadrat przyrostu Δx, czyli jest równoważny $(\Delta x)^2$, a nie przyrost kwadratu argumentu x, czyli x^2.

[35] **Definicja ciągłości funkcji według Heinego i Cauchy'ego**.
Funkcję $f(x)$, określoną w otoczeniu x_0, nazywamy ciągłą w punkcie x_0, jeśli:

- Heine: Każdemu ciągowi (x_n) argumentów, zbieżnemu do x_0 odpowiada ciąg wartości funkcji $(f(x_n))$ zbieżny do $f(x_0)$

$$\forall (x_n)_{n\in\mathcal{N}} \left(\forall n\ x_n \in Df \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\right) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

- Cauchy: Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego x różniącego się od x_0 mniej niż o δ wartość funkcji $f(x)$ różni się od wartości $f(x_0)$ mniej niż o ε

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \left(\forall x \in Df\ \ |x-x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right)$$

2. *Iloraz funkcji ciągłych w punkcie x_0 jest funkcją ciągłą w tym punkcie przy założeniu, że dzielnik jest różny od zera w punkcie x_0.*

3. *Dowolny wielomian $W(x)$ jest funkcją ciągłą w każdym punkcie zbioru $\mathcal{R}$.*

4. *Dowolna funkcja wymierna (iloraz dwóch wielomianów) jest ciągła w każdym punkcie swej dziedziny naturalnej*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \tag{517}$$

$$\mathcal{R} - \{x : Q(x) = 0\} \tag{518}$$

5. *Funkcje* $\sin x, \cos x, a^x, a > 0$ *są ciągłe w swojej dziedzinie naturalnej.*

Definicja 12.2 *Funkcję nazywamy ciągłą na przedziale otwartym (skończonym lub nieskończonym) wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona ciągła w każdym punkcie tego przedziału.*

Definicja 12.3 *Funkcję nazywamy prawostronnie (albo lewostronnie) ciągłą w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = f(x_0) \tag{519}$$

lub odpowiednio

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = f(x_0) \tag{520}$$

Definicja 12.4 *Funkcja jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy jest w tym punkcie jednocześnie prawostronnie i lewostronnie ciągła.*

Definicja 12.5 *Funkcję nazywamy ciągłą na przedziale domkniętym $\langle a; b\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in (a; b)$, prawostronnie ciągła w punkcie a oraz lewostronnie ciągła w punkcie b.*

12.1 Własności funkcji ciągłych

W pierwszej kolejności przytoczymy twierdzenia o **ciągłości funkcji złożonej** w punkcie.

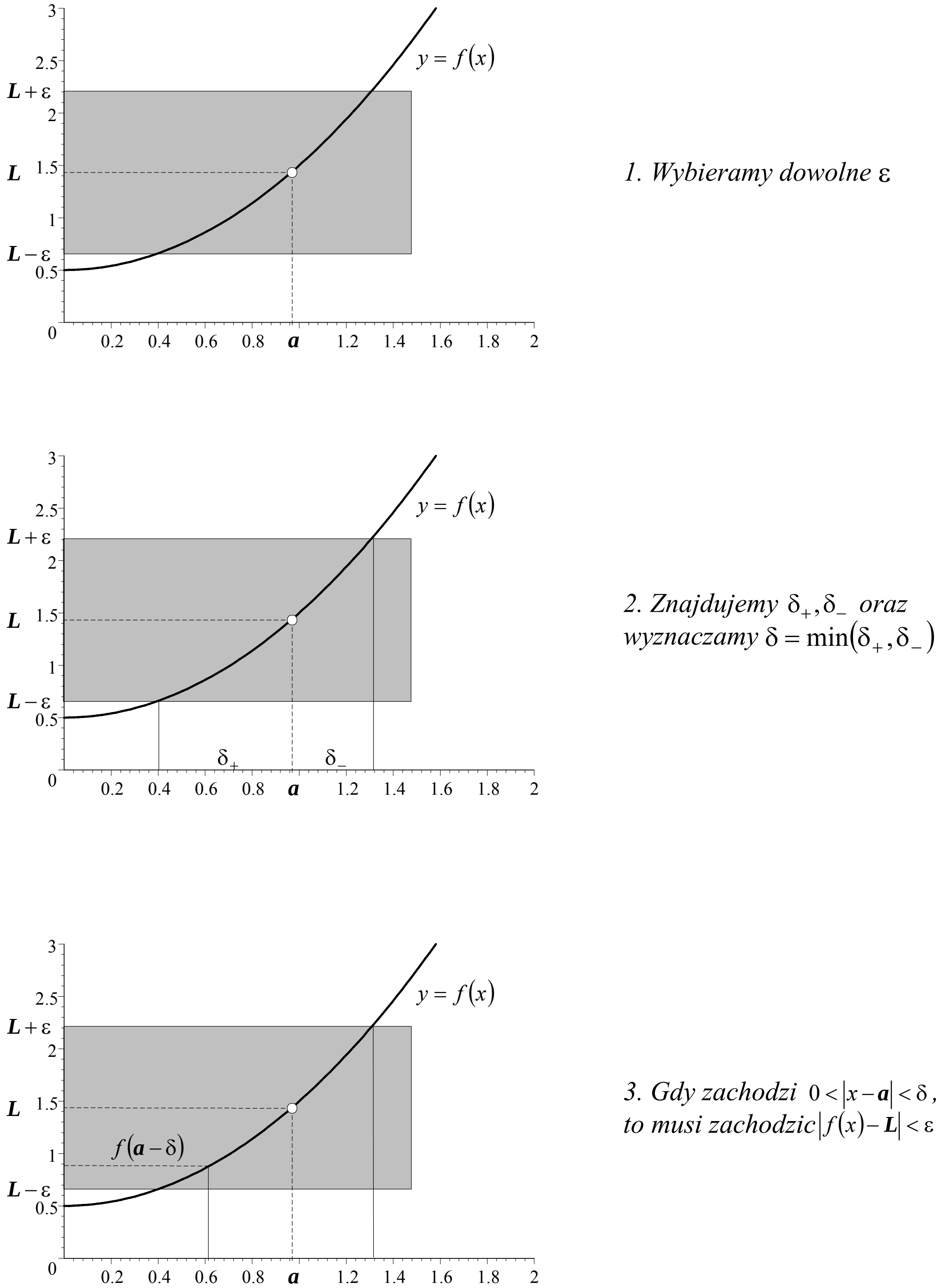
Twierdzenie 12.1 *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0 i funkcja $h(u)$ jest ciągła w punkcie $u_0 = f(x_0)$, to funkcja złożona $h[f(x)]$ jest ciągła w punkcie x_0.*

Twierdzenie 12.2 *Jeżeli istnieje granica właściwa $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$ i funkcja $h(u)$ jest ciągła w punkcie $u_0 = g$, to*

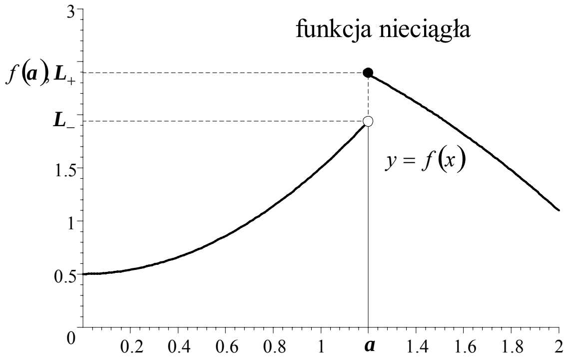
$$\lim_{x \to x_0} h[f(x)] = h\left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right] = h(g) \tag{521}$$

Przykład 12.1 *Obliczyć*

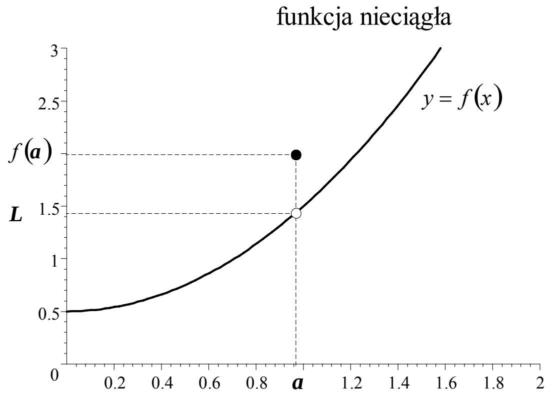
$$\lim_{x \to 0} \cosh^2\left(\frac{\sin x}{x}\right) \tag{522}$$



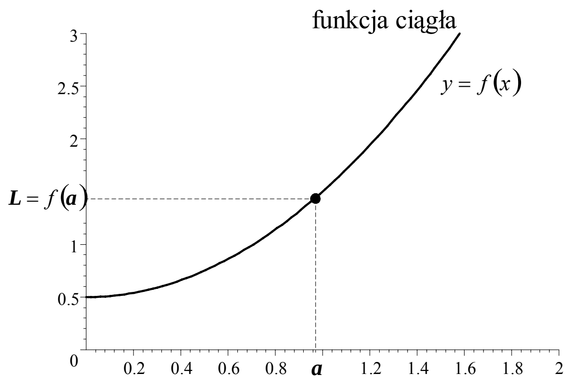
Rysunek 63: Ciągłość funkcji.



Funkcja $f(x)$ jest ciągła
w punkcie wewnętrznym $x=\boldsymbol{a}$
swojej dziedziny, gdy



1. *Istnieje* $\lim_{x\to a} f(x) = \boldsymbol{L}$
2. *Istnieje wartość funkcji* $f(\boldsymbol{a})$
3. $\boldsymbol{L} = f(\boldsymbol{a})$



Rysunek 64: Funkcja ciągła i nieciągła.

Rozwiązanie 12.1 *Ponieważ* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ *i funkcja* $\cosh^2 u$ *jest ciągła w punkcie* $u_0=1$, *to*

$$\lim_{x\to 0}\cosh^2\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\cosh^2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)=\cosh^2 1 \tag{523}$$

Odp. $\cosh^2 1=\left(\dfrac{e^1+e^{-1}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(e^2+e^{-2}+2\right).$

Twierdzenie 12.3 *(O własności Darboux)*
Jeżeli funkcja $f(x)$ *jest ciągła na przedziale domkniętym* $\langle a;b\rangle$ *oraz* $f(a)\neq f(b)$ *i istnieje liczba* q *zawarta miedzy* $f(a)$ *i* $f(b)$, *to istnieje również taki punkt* $c\in(a;b)$, *że* $f(c)=q$.

Definicja 12.6 *Funkcję* $f(x)$ *nazywamy jednostajnie ciągłą na przedziale* x *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x_1;x_2\in X\ \ \left(|x_1-x_2|<\delta\Longrightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon\right) \tag{524}$$

Każda funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest na tym przedziale jednostajnie ciągła.

12.2 Przykłady

Przykład 12.2 *Obliczyć granicę*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$$

Rozwiązanie 12.2 *Przyjmijmy, że* $5x=y=f(x)$. *Zatem*

$$\frac{\sin 5x}{x}=5\frac{\sin y}{y}=h(y)$$

Stąd

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}5\frac{\sin 5x}{5x}=\lim_{y\to 0}5\frac{\sin y}{y}=5\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=5$$

Przykład 12.3 *Obliczyć granicę*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}$$

Rozwiązanie 12.3 *Wykonamy podstawienie* $y=2x-\pi$. *Stąd* $\cos x=\cos\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{y}{2}$. *Jeżeli* $x\to\frac{\pi}{2}$, *to* $y\to 0$. *Czyli*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}=\lim_{y\to 0}\left(-\frac{\sin\frac{y}{2}}{y}\right)=-\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{y}{2}}{2\frac{y}{2}}=-\frac{1}{2}$$

Przykład 12.4 *Obliczyć granicę*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

Rozwiązanie 12.4 *Mamy tu do czynienia z nieoznaczonością typu* $\frac{0}{0}$. *Pomnożymy licznik i mianownik przez* $\sqrt{x+1}+1$. *Otrzymamy*

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$$

$$=\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

A więc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Przykład 12.5 *Obliczyć granicę* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{\sqrt{16+x^4}}$

Rozwiązanie 12.5

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{\sqrt{16+x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^2+1}{x^2}}{\frac{\sqrt{16+x^4}}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{16}{x^4}+\frac{x^4}{x^4}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\boxed{\frac{1}{x^2}}^{\nearrow 0}}{\sqrt{1+\boxed{\frac{16}{x^4}}^{\nearrow 0}}}=\frac{3}{1}=3$$

Zapis $\boxed{\frac{1}{x^2}}^{\nearrow 0}$ *oznacza, że wyrażenie w owalu przy* $x\to\infty$ *zdąża do zera.*

Przykład 12.6 *Obliczyć granicę* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{1+x^2}$

Rozwiązanie 12.6

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{1+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\boxed{\frac{1}{x^2}}^{\nearrow 0}+1}=-\infty$$

Przykład 12.7 *Dane jest równanie* $m^2x^2-\left(2+3m^2\right)x+6=0$ *z niewiadomą* x *i parametrem* m. *Do jakich granic dążą pierwiastki tego równania, gdy*

a) $m\to-\infty$; *b)* $m\to 0$; *c)* $m\to+\infty$

Rozwiązanie 12.7 *Obliczamy wartość pierwiastków równania. W tym celu wyznaczamy wartość* δ:

$$\delta=\left(2+3m^2\right)^2-4\cdot 6\cdot m^2=\left(2+3m^2\right)^2-24m^2=$$

$$=4+12m^2+9m^4-24m^2=4-12m^2+9m^4=$$

$$=\left(2-3m^2\right)^2$$

a następnie obliczamy pierwiastki

$$x_1 = \frac{2+3m^2+(2-3m^2)}{2m^2} = \frac{2}{m^2} \qquad x_2 = \frac{2+3m^2-2+3m^2}{2m^2} = 3$$

$m \to +\infty \Longrightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$
$m \to 0 \Longrightarrow x_1 = +\infty, x_2 = 3$
$m \to -\infty \Longrightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$

Przykład 12.8 *Obliczyć granice*

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$c)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \qquad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}$$

Odp. a) e^3; *b)* $\frac{1}{2}$; *c)* 1; *d)* 1

Rozwiązanie 12.8 *b) Przekształcamy wyrażenie* $\frac{1-\cos x}{x^2}$. *Z trygonometrii znamy tożsamość dla funkcji kąta połówkowego*

$$\frac{1-\cos x}{2} = \sin^2\frac{x}{2}$$

Stąd

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

A więc

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

c) Przyjmijmy, że

$$P = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{\sqrt{x}}} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Logarytmując obustronnie powyższe wyrażenie, otrzymujemy

$$\ln P = \ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Stąd

$$\ln P = \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

Przechodząc do granicy mamy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln e = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Zatem

$$\ln P = 0$$

A więc $P = 1$. *Odp.* $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} = 1.$

13 Pochodne funkcji jednej zmiennej

13.1 Pochodna funkcji

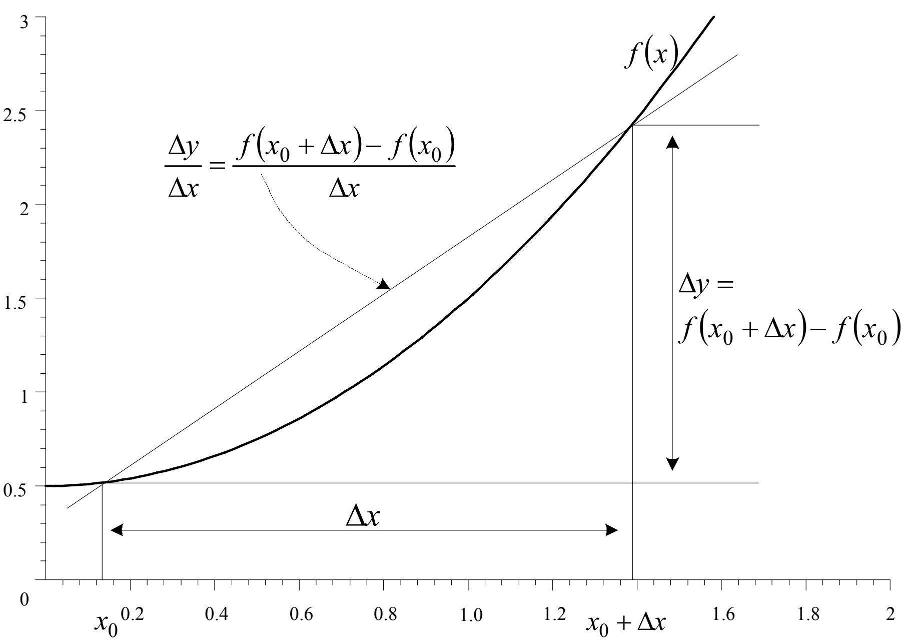
Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest określona na pewnym otoczeniu U punktu x_0. Symbolem Δx oznaczamy przyrost zmiennej x, który może być dodatni albo ujemny, lecz różny od zera i taki, że $x_0 + \Delta x \in U$.

Definicja 13.1 *(Ilorazu różnicowego)*
Iloraz

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{525}$$

nazywamy ***ilorazem różnicowym*** *funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 i dla przyrostu Δx zmiennej x.*

Uwaga 13.1 *Nazwa ilorazu różnicowego pochodzi stąd, że w liczniku mamy różnicę wartości funkcji, zaś w mianowniku różnicę wartości argumentu, gdyż $\Delta x = x_0 + \Delta x - x_0$ (patrz rys. 65).*



Rysunek 65: Iloraz różnicowy.

Definicja 13.2 *Jeżeli iloraz różnicowy (525) ma granicę właściwą, gdy Δx dąży do zera (patrz 66), to tę granicę nazywamy* ***pochodną funkcji*** *f* ***w punkcie*** *x_0 i oznaczamy symbolem $f'(x_0)$*[36] *tzn.*

$$f'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{526}$$

Uwaga 13.2 *Jeżeli* ***granica*** *(526)* ***istnieje****, to mówimy, że* ***funkcja*** *f* ***ma pochodną*** *w punkcie x_0 lub, że* ***jest różniczkowalna*** *w tym punkcie. Jeżeli* ***granica*** *(526)* ***nie istnieje, to*** *mówimy, że* ***pochodna*** *$f'(x_0)$* ***nie istnieje****.*

[36] Często, w przypadku funkcji jednej zmiennej, również stosujemy zapis $\frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x}$.

Przykład 13.1 *Obliczyć pochodną funkcji* $f(x) = x^2$ *w punkcie* $x_0 = 2$.

Rozwiązanie 13.1 *Tworzymy iloraz różnicowy funkcji* $f(x) = x^2$ *w punkcie* $x_0 = 2$ *dla przyrostu* Δx *i obliczamy jego wartość*

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = \\ &= \frac{1}{\Delta x}\left(4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 4\right) = 4 + \Delta x\end{aligned}$$

Zatem $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x) = 4$. *Odp.* 4

Przykład 13.2 *Obliczyć pochodną funkcji* $f(x) = x^3$ *w punkcie* x_0.

Rozwiązanie 13.2 *Tworzymy iloraz różnicowy funkcji i obliczamy jego wartość:*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}(x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3 - x_0^3) =$$
$$= 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2$$

Stąd $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2) = 3x_0^2$. *Odp.* $f'(x_0) = 3x_0^2$

Przykład 13.3 *Obliczyć pochodną funkcji* $f(x) = \frac{1}{x}$ *w punkcie* $x_0\,(x_0 \neq 0)$.

Rozwiązanie 13.3

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

Odp. $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}, \quad x_0 \neq 0$.

Twierdzenie 13.1 *(O różniczkowalności i ciągłości funkcji)*
Jeżeli funkcja f *jest różniczkowalna w punkcie* x_0, *to jest w tym punkcie ciągła.*

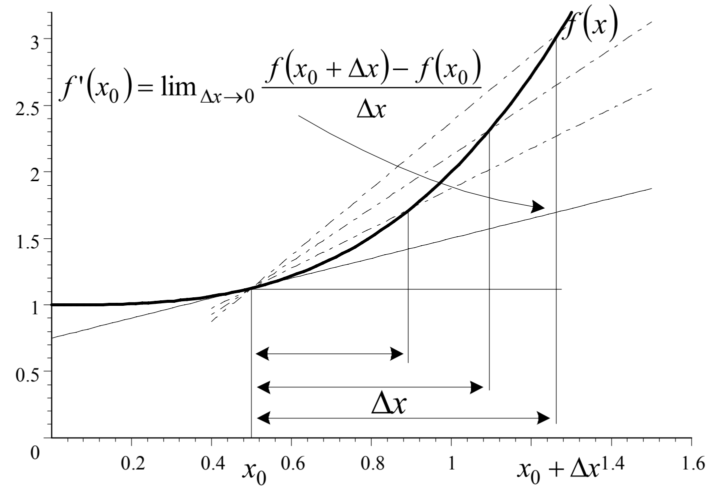
Dowód 13.1 *Istotnie, ponieważ*

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\cdot\Delta x$$

więc, gdy $\Delta x \to 0$, *to różnica* $f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ *dąży do iloczynu* $f'(x_0)\cdot 0$, *czyli do* 0. *Podstawiając* $x = x_0 + \Delta x$, *mamy* $x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0 \quad \text{czyli} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{527}$$

co świadczy o ciągłości funkcji f *w punkcie* x_0.



Rysunek 66: Pochodna jako granica funkcji.

Uwaga 13.3 ***Ciągłość*** *funkcji* ***jest*** *zatem* ***warunkiem koniecznym*** *istnienia pochodnej, choć* ***nie jest warunkiem wystarczającym****. Świadczy o tym przykład funkcji $|x|$ ciągłej w punkcie 0 i nie mającej w tym punkcie pochodnej. Z definicji funkcji $|x|$ mamy:*

$$y(x) = |x| = \begin{cases} -x & \textit{jeżeli} \quad x < 0 \\ \\ x & \textit{jeżeli} \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{528}$$

Wówczas ilorazy różnicowe są następujące

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \begin{cases} \dfrac{-(x_0 + \Delta x) - (-x_0)}{\Delta x} = -\dfrac{\Delta x}{\Delta x} = -1 & \textit{jeżeli} \quad x_0 < 0 \\ \\ \dfrac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1 & \textit{jeżeli} \quad x_0 > 0 \end{cases}$$

Zatem

$$f'(x_0) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-(x_0 + \Delta x) - (-x_0)}{\Delta x} = -\dfrac{\Delta x}{\Delta x} = -1 & \textit{jeżeli} \quad x_0 < 0 \\ \\ \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1 & \textit{jeżeli} \quad x_0 > 0 \end{cases}$$

nie ma granicy, gdy $\Delta x \to 0$.

Definicja 13.3 *Jeżeli pochodna $f'(x_0)$ istnieje w każdym punkcie x_0 zbioru X, to funkcję $f'(x)$ określoną na zbiorze X nazywamy pochodną funkcji $f(x)$ - krótko: "pochodną $f(x)$".*

Uwaga 13.4 *Jeżeli $y = f(x)$, to zamiast $f'(x)$ piszemy także y'.*

Twierdzenie 13.2 *Jeżeli istnieją pochodne $f'(x)$, $g'(x)$, to:*

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x) \tag{529}$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x) \tag{530}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2} \tag{531}$$

Twierdzenie 13.3 *Jeżeli funkcje u, v, w są różniczkowalne w pewnym punkcie, to pochodna iloczynu tych funkcji uvw dana jest wzorem*

$$(u(x)\, v(x)\, w(x))' = u(x)'\, v(x)\, w(x) + u(x)\, v(x)'\, w(x) + u(x)\, v(x)\, w(x)' \tag{532}$$

W poniższej tabeli podane są pochodne wybranych funkcji jednej zmiennej.

$f(x)$	$f'(x)$	Uwagi, ograniczenia
c	0	funkcja stała
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\forall x$, gdy $\alpha \in \mathcal{N}$ $\forall x \neq 0$, gdy $\alpha \in \mathcal{Z}$[37] $\forall x > 0$, gdy $\alpha \in \mathcal{R}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\forall x > 0$, gdy $n = 2, 4, 6, \ldots$ $\forall x \neq 0$, gdy $n = 3, 5, 7, \ldots$
a^x	$a^x \ln a$	$\forall x$, gdy $a > 0$
e^x	e^x	$e = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
$\sin x$	$\cos x$	$\forall x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\forall x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \quad a \neq 1$ $\forall x > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\forall x > 0$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\forall x \in (-1, 1)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\forall x \in (-1, 1)$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\forall x$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\forall x$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\forall x$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\forall x$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\forall x$
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$|x| > 1$

Tablica 2: Pochodne wybranych funkcji

13.1.1 Pochodna funkcji odwrotnej

Twierdzenie 13.4 *Jeżeli funkcja $x = f(y)$ jest **silnie monotoniczna** i ma pochodną $f'(y) \neq 0$ na przedziale Y, to **funkcja odwrotna** $y = f^{-1}(x) = \varphi(x)$ ma pochodną*

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]} \tag{533}$$

na przedziale $f(Y)$.

Jeżeli funkcje $f(x)$ i $\varphi(y)$ są wzajemnie odwrotne, to

$$\begin{array}{lcl} y = f(x) & \Longleftrightarrow & x = \varphi(y) \\ y + \Delta y = f(x + \Delta x) & \Longleftrightarrow & x + \Delta x = \varphi(y + \Delta y) \\ \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) & \Longleftrightarrow & \Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y) \end{array}$$

a ponieważ funkcja jest silnie monotoniczna, to $\Delta x \neq 0 \Longleftrightarrow \Delta y \neq 0$ i

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

A więc

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \tag{534}$$

Przykład 13.4 *Obliczyć pochodną funkcji $y = \arcsin x \ \ (-1 < x < 1)$, przy czym $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.*

Rozwiązanie 13.4 *Jest to funkcja odwrotna względem funkcji $x = \sin y$. Funkcja ta ma pochodną $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} = \cos y$. Na mocy twierdzenia 13.4 istnieje pochodna $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$*

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\arcsin x) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{535}$$

Wyłączyliśmy wartości $x = \pm 1$, ponieważ dla wartości $y = \pm\frac{\pi}{2}$ pochodna $\cos y = 0$.

Przykład 13.5 *Obliczyć pochodną funkcji $y = \arccos x \ \ (-1 < x < 1)$, przy czym $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.*

Rozwiązanie 13.5 *Jest to funkcja odwrotna względem funkcji $x = \cos y$. Funkcja ta ma pochodną $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} = -\sin y$. Korzystając z twierdzenia 13.4 mamy dla $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$*

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\arccos x) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{536}$$

Przykład 13.6 *Obliczyć pochodną funkcji $y = \arctan x \ \ (-\infty < x < \infty)$.*

Rozwiązanie 13.6 *Funkcja $x = \tan y$ ma pochodną równą $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} = \frac{1}{\cos^2 y}$. Postępują jak powyżej mamy:*

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(\arctan x) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2} \tag{537}$$

Przykład 13.7 *Obliczyć pochodną funkcji odwrotnej do funkcji $y = e^x$.*

Rozwiązanie 13.7 *Funkcją odwrotną do funkcji $y = e^x$ jest funkcja $x = \ln y$. Na mocy (534) mamy*

$$x' = (\ln y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

13.1.2 Pochodna funkcji złożonej

Twierdzenie 13.5 *Jeżeli funkcja $u = h(x)$ ma pochodną $h'(x)$ oraz funkcja $y = f(u)$ ma pochodną $f'(u)$, to funkcja złożona $y = f[h(x)]$ ma pochodną*

$$y' = f'[h(x)] \cdot h'(x) \tag{538}$$

Ze wzoru tego wynika, że pochodna funkcji złożonej jest równa iloczynowi pochodnej funkcji zewnętrznej i pochodnej funkcji wewnętrznej. W symbolice Leibniza wzór ten ma postać:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,u} \cdot \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}$$

Jeżeli funkcja jest złożona według schematu

$$y(u(v(x))) \tag{539}$$

to jej pochodna wyraża się wzorem

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,u} \cdot \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,v} \cdot \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,x} \tag{540}$$

Przykład 13.8 *Obliczyć pochodną funkcji* $y = \arctan \dfrac{1}{1 - \ln x}$.

Rozwiązanie 13.8 *Mamy:* $y = \arctan u$; $\qquad u = 1/v$, $\qquad v = 1 - \ln x$, *zatem (patrz Tabela 2):*

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{1+u^2} \cdot \left(-\frac{1}{v^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1-\ln x}\right)^2} \cdot \left(\frac{-1}{(1-\ln x)^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\left(2 - 2\ln x + \ln^2 x\right)}$$

Przykład 13.9 *Obliczyć pochodną funkcji* $f(x) = \ln \sin x$ *(patrz (538)).*

Rozwiązanie 13.9 *Mamy* $\ln \sin x = \ln u \,|_{u=\sin x}$. *Zatem*

$$(\ln \sin x)' = (\ln u)' \Big|_{u=\sin x} \cdot u' = \frac{1}{u} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{u} \,|_{u=\sin x} \cdot \cos x =$$

$$= \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x$$

Przykład 13.10 *Obliczyć pochodną funkcji* $f(x) = e^{kx}$.

Rozwiązanie 13.10 *Podstawmy* $e^{kx} = e^u \,|_{u=kx}$, *zatem*

$$\left(e^{kx}\right)' = (e^u)'\big|_{u=kx} \cdot u' = e^u \cdot (kx)' = e^u\big|_{u=kx} \cdot k = e^{kx} \cdot k = ke^{kx}$$

Przykład 13.11 *Obliczyć pochodną funkcji* $y = \sqrt{1+x^2}$.

Rozwiązanie 13.11 *Ponieważ* $y = \sqrt{u}$, $u = 1 + x^2$, *zatem*

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \left(\sqrt{u}\right)'\Big|_{u=1+x^2} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Pochodną tę możemy również wyznaczyć posługując się innym zapisem

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,u} \cdot \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

13.1.3 Pochodna funkcji wyznaczonej w postaci parametrycznej

Niech funkcja $y = f(x)$ będzie zdefiniowana równaniami parametrycznymi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t-$parametr. Wówczas jej pochodne obliczamy z poniższych wzorów

$$\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t}}{\frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\, t}} \tag{541}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\, y}{\mathrm{d}\, x^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^2}$$

przy czym różniczkowanie zachodzi względem parametru t, tj. $y' = \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t}$, $x' = \frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\, t}$ oraz $x' \neq 0$.

Przykład 13.12 *Obliczyć* $\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x}$*, jeżeli* $x(t) = t^3 + 3t + 1$, $y(t) = 3t^5 + 5t^3 + 1$.

Rozwiązanie 13.12 *Mamy*

$$y'_t = \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t} = 15t^4 + 15t^2$$

$$x'_t = \frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\, t} = 3t^2 + 3$$

stąd
$$\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2$$

13.1.4 Pochodne jednostronne

Niekiedy interesują nas wartości pochodnych na krańcach przedziału, w którym analizujemy daną funkcję. Wówczas mamy do czynienia z pochodnymi jednostronnymi.

Definicja 13.4 *Pochodną lewostronną funkcji* $f(x)$ *w punkcie* x_0 *(symbol* $f'_-(x_0)$ *lub* $f'(x_{0^-})$*) oraz pochodną prawostronną funkcji* $f(x)$ *w punkcie* x_0 *(symbol* $f'_+(x_0)$ *lub* $f'(x_{0^+})$ *określamy następująco:*

$$f'(x_{0^-}) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{542}$$

$$f'(x_{0^+}) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{543}$$

Szczególnym przypadkiem funkcji, która ma pochodne jednostronne jest funkcja $y = |x|$

$$f'(x_0) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-(x_0 + \Delta x) - (-x_0)}{\Delta x} = -\dfrac{\Delta x}{\Delta x} = -1 & \text{jeżeli} \quad x_0 < 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1 & \text{jeżeli} \quad x_0 > 0 \end{cases}$$

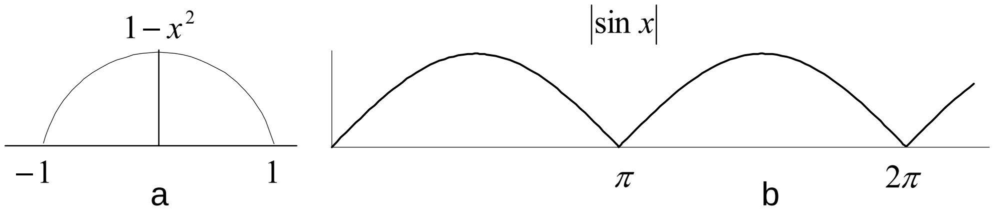
Pochodna funkcji istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy obie pochodne jednostronne istnieją i są sobie równe:

$$f'(x) = f'(x_{0^-}) = f'(x_{0^+})$$

1. Funkcja $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ jest ciągła w przedziale $< -1; 1 >$ oraz różniczkowalna we wnętrzu tego przedziału. Istnieją pochodne jednostronne $f'(x = -1^+)$ oraz $f'(x = 1^-)$.

2. Funkcja $|\sin x|$ jest ciągła w przedziale $(-\infty; \infty)$ i różniczkowalna w każdym przedziale, którego wnętrze nie zawiera punktów $k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ (patrz rys. 67 b).

13.1.5 Pochodne nieskończone w punkcie



Rysunek 67: Pochodne jednostronne i nieskończone.

Jeżeli granica (ewentualnie granica jednostronna) ilorazu różnicowego jest równa $+\infty$ lub $-\infty$, to mówimy, że funkcja ma w danym punkcie **pochodną** (ewentualnie pochodną jednostronną) **nieskończoną**, równą $+\infty$ lub $-\infty$.

1. Funkcja $\sqrt[3]{x}$ ma w punkcie $x = 0$ pochodną równą $+\infty$, bowiem $\dfrac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} \to +\infty$ dla $\Delta x \to 0$. Funkcja ta jest ciągła, a jej wykres ma w odpowiednim punkcie styczną pionową.

2. Funkcja $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ma pochodną równą $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. W prawostronnym otoczeniu punktu $x = -1 + \Delta x$ pochodna przyjmuje wartość $+\infty$, a w lewostronnym otoczeniu punktu $x = +1 - \Delta x$ przyjmuje wartość $-\infty$ (patrz rys. 67 a).

Uwaga 13.5 *(O istnieniu pochodnych)*

1. *Istnienie $f'(x_0)$ zapewnia istnienie $f'(x_{0-})$ i $f'(x_{0+})$, ale nie na odwrót.*

2. *Jeżeli funkcja $f(x)$ ma pochodną na przedziale $(a;b)$ oraz istnieją $f'(a^+)$ i $f'(b^-)$, to mówimy, że istnieje $f'(x)$ na przedziale domkniętym $\langle a;b\rangle$.*

3. *Niekiedy piszemy $f^{(0)}(x)$ zamiast $f(x)$ oraz $f^{(1)}(x)$ zamiast $f'(x) : f^{(1)}(x) \equiv f'(x)$. Ogólnie pochodną rzędu n ($n-$tą pochodną funkcji $f(x)$) oznaczamy symbolem $f^{(n)}(x)$ i określamy następująco:*
$$f^{(n)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left[f^{(n-1)}(x)\right]' \tag{544}$$
Zamiast $f^{(2)}(x), f^{(3)}(x), \ldots$ używamy także symboli $f''(x)$, $f'''(x)$.

13.2 Przykłady

Przykład 13.13 *Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \sin x$.*

Rozwiązanie 13.13 *Ponieważ*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x} =$$
$$= \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Zatem

$$\frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x} = f^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x \tag{545}$$

czyli $(\sin x)' = \cos x$.

Przykład 13.14 *Wykorzystując wzór (544) wyznacz drugą pochodną funkcji* $f(x) = \sin x$.

Rozwiązanie 13.14 *Ponieważ* $f(x) = f^{(0)} = \sin x$, *a* $f'(x) = f^{(1)} = \cos x$, *to*

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = (f'(x))' = (\cos x)' = -\sin x$$

Odp. Druga pochodna funkcji $f(x) = \sin x$ *ma postać* $f''(x) = -\sin x$.

Przykład 13.15 *Oblicz drugą pochodną wielomianu* $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 8$.

Rozwiązanie 13.15

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 1 = 9x^2 - 4x + 1 \\ f''(x) &= [f'(x)]' = 2 \cdot 9x - 4 = 18x - 4 \end{aligned}$$

Odp. Druga pochodna funkcji $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 8$ *ma postać* $f''(x) = 18x - 4$.

Przykład 13.16 *Wyznacz drugą pochodną funkcji* $f(x) = \tan x$.

Rozwiązanie 13.16 *Ponieważ*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x} &= f'(x) = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \\ &= 1 + \tan^2 x \quad \textit{zatem} \\ \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\, x^2} &= f''(x) = (1 + \tan^2 x)' = 2 \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \end{aligned}$$

Odp. Druga pochodna funkcji $f(x) = \tan x$ *ma postać* $f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$.

Przykład 13.17 *Obliczyć pochodną funkcji* $f(x) = \sqrt{x}$ *dla* $x > 0$.

Rozwiązanie 13.17 *Niech* $x > 0$ *oraz* $x + \Delta x > 0$. *Zatem*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

Stąd

$$f^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{546}$$

Przykład 13.18 *Obliczyć pochodną funkcji* $f(x) = \log_a x$, $x > 0$

Rozwiązanie 13.18 *Załóżmy, że* $\Delta x > 0$. *Zatem*

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

Przyjmując, że $z=\frac{x}{\Delta x}$ *otrzymujemy*

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot z\log_a\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{1}{z}\right)^z$$

Jeżeli $\Delta x\to 0$, *to* $z=\frac{x}{\Delta x}\to\infty$, *a więc na mocy Definicji 11.9 mamy*

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=e \tag{547}$$

Dzięki ciągłości funkcji logarytmicznej otrzymujemy[38]

$$\lim_{z\to\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=\log_a e=\frac{1}{\log_e a}=\frac{1}{\ln a}$$

Zatem

$$f'(x)=(\log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$$

Czyli

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a} \tag{548}$$

Jeżeli $a=e$, *to* $\log_e x=\ln x$ *i*

$$(\ln x)'=\frac{1}{x} \tag{549}$$

Przykład 13.19 *Obliczyć pochodną funkcji wykładniczej* $y=a^x,\ a>0$.

Rozwiązanie 13.19 *Na podstawie definicji pochodnej mamy*

$$\begin{aligned}(a^x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\lim_{z\to 0}\frac{z}{\frac{\ln(1+z)}{\ln a}}=\\ &= a^x\ln a\lim_{z\to 0}\frac{z}{\ln(1+z)}=a^x\ln a\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{1}{z}\ln(1+z)}=a^x\ln a\lim_{z\to 0}\frac{1}{\ln(1+z)^{1/z}}=\\ &= a^x\ln a\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}=a^x\ln a\frac{1}{\ln\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}=a^x\ln a\frac{1}{\ln e}=a^x\ln a\end{aligned} \tag{550}$$

W szczególności dla $a=e$ *mamy*

$$(e^x)'=e^x \tag{551}$$

[38]Korzystamy ze znanego wzoru: $\log_a b\cdot\log_b a=1$.

13.3 Geometryczny sens pochodnej

Interpretacja geometryczna pochodnej przedstawiona jest na rysunku 68.

Iloraz różnicowy $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ jest równy tangensowi kąta nachylenia β siecznej do osi $0x$, czyli współczynnikowi kierunkowemu tej siecznej. Na rysunku 68 przedstawiona jest funkcja $f(x) = 0.5x^2 - 0.1x$ oraz sieczna przecinająca krzywą $f(x)$ w punktach $x_0 = 2.0$ i $x_1 = 3.9$. Jej współczynnik kierunkowy jest równy[39]

$$\tan\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(3.9) - f(2)}{3.9 - 2} = \frac{7.215 - 1.8}{1.9} = \frac{5.415}{1.9} = 2.85 \tag{552}$$

Przyjmijmy, że $x_1 = x_0 + \Delta x$. Jeżeli $\Delta x \to 0$, to $x_1 \to x_0$. Pochodna $f'(x_0)$, a więc granica ilorazu różnicowego, jest równa współczynnikowi kierunkowemu stycznej (linia przerywana) do krzywej $y = f(x)$ w punkcie o odciętej x_0[40]

$$\tan\alpha = f'(x_0) = x_0 - 0.1 = 2 - 0.1 = 1.9 \tag{553}$$

gdzie α oznacza kąt nachylenia tej stycznej do osi $0x$.

Uwaga 13.6 *Styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P(x_0, f(x_0))$ ma równanie*

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \tag{554}$$

Przykład 13.20 *Napisać równanie stycznej do paraboli $y = x^2$ w punkcie $P(2, 4)$.*

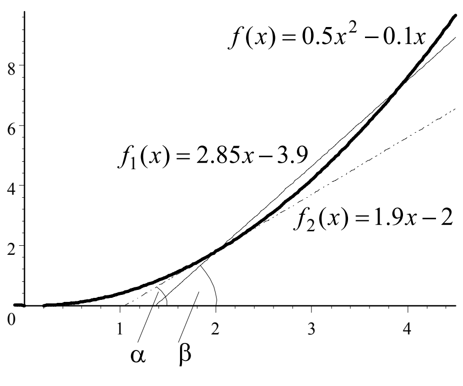
Rozwiązanie 13.20 *Mamy tu $f(x) = x^2$, więc $f'(2) = 4$. Równanie stycznej ma postać*

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

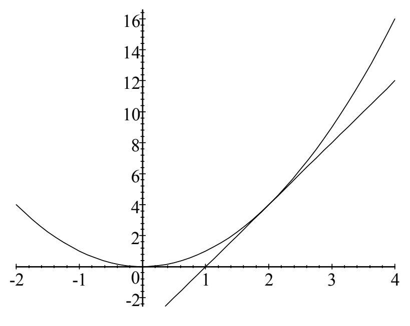
stąd

$$y = 4x - 4$$

Odp. $y = 4x - 4$ (patrz rys. 69).



Rysunek 68: Funkcja $y = 0.5x^2 - 0.1x$, sieczna i styczna.



Rysunek 69: Parabola $y = x^2$ i styczna do niej w punkcie $x_0 = 2$.

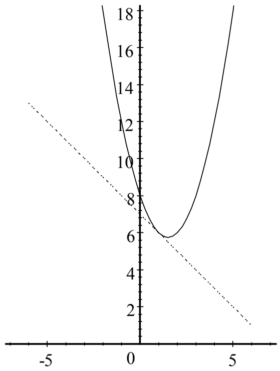
---

[39] Skrót tan oznacza w całym wykładzie funkcję tangens, tg.

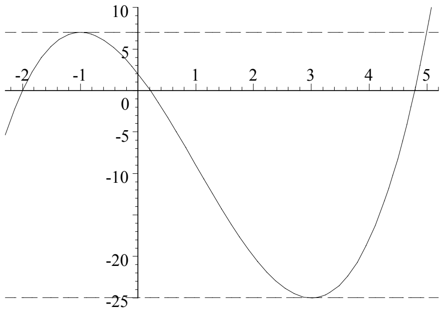
[40] $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0.5(2+\Delta x)^2 - 0.1(2+\Delta x) - 1.8}{\Delta x} = \frac{0.5(4+4\Delta x+\Delta x^2) - 0.2 - 0.1\Delta x - 1.8}{\Delta x} = \frac{1.8 + 1.9\Delta x + 0.5\Delta x^2 - 1.8}{\Delta x} = 1.9 + 0.5\Delta x$. Przechodząc do granicy $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(1.9 + 0.5\Delta x) = 1.9$.

Przykład 13.21 *Obliczyć, jaki kąt z osią* $0x$ *tworzy styczna do paraboli* $y = x^2 - 3x + 8$ *w punkcie* $x = 1$.

Rozwiązanie 13.21 *Jeżeli* α *oznacza kąt między osią* x *i styczną do krzywej* $y = f(x)$ *w punkcie* $x = x_0$, *to zachodzi związek* $\tan\alpha = f'(x_0)$. *Obliczamy pochodną* $y' = f'(x) = 2x - 3$. *W punkcie* $x = 1$ *pochodna ta przybiera wartość* $f'(1) = -1$. *A więc* $\tan\alpha = -1$. *Stąd* $\alpha = 135^\circ$ $(\alpha = \frac{3}{4}\pi)$ *(patrz rys. 70).*



Rysunek 70: Parabola $y = x^2 - 3x + 8$ i styczna.



Rysunek 71: Funkcja $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ i styczne.

Przykład 13.22 *Obliczyć, w jakim punkcie styczna do krzywej* $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ *jest równoległa do osi* $0x$.

Rozwiązanie 13.22 *Styczna jest równoległa do osi* $0x$, *jeżeli* $y' = \tan\alpha = 0$. *Obliczając pochodną i przyrównując ją do zera otrzymujemy*

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

Rozwiązaniami są pierwiastki: $x_1 = -1,\ x_2 = 3$. *Wartości funkcji w tych punktach są równe:* $y(-1) = 7,\ y(3) = -25$. *Odp. Styczna jest równoległa do osi* $0x$ *w dwóch punktach* $P_1(-1, 7)$ *i* $P_2(3, -25)$ *(rys. 71).*

13.4 Fizyczny sens pochodnej

13.4.1 Prędkość w ruchu prostoliniowym

Załóżmy, że punkt materialny M porusza się po osi **0x** w ten sposób, że jego współrzędna x (położenie) w dowolnej chwili t jest równa wartości pewnej funkcji $x(t)$

$$x = x(t) \quad - \quad \text{równanie ruchu} \tag{555}$$

Ustalmy chwilę t i niech przyrost czasu Δt będzie różny od 0. Chwilom t i $t + \Delta t$ odpowiadają pozycje $x(t)$ i $x(t + \Delta t)$ oraz przesunięcie $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$. Stosunek $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ jest **prędkością średnią**, a granica tego stosunku dla $\Delta t \to 0$ jest **prędkością chwilową** punktu M w chwili t. Oznaczamy ją $\dot{x}(t)$

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{556}$$

Z drugiej strony, granica ta jest pochodną funkcji $x(t)$ w chwili t, zatem

$$\dot{x}(t) = x'(t) \tag{557}$$

W ruchu prostoliniowym prędkość jest pochodną funkcji określającej położenie.

13.4.2 Pojemność cieplna

Niech T oznacza temperaturę pewnego ciała (w °C), a W ilość ciepła (w cal), które ciało musi pobrać, aby jego temperatura wzrosła od 0 °C do T. Załóżmy, że W jest funkcją T

$$W = W(T)$$

Jeżeli ustalimy T oraz ΔT, to iloraz różnicowy

$$\frac{\Delta W}{\Delta T} = \frac{W(T+\Delta T) - W(T)}{\Delta T} \tag{558}$$

jest średnią pojemnością cieplną ciała w przedziale temperatur od T do $T+\Delta T$. Granica tego ilorazu dla $\Delta T \to 0$, czyli pochodna

$$W'(T) = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}T}(T) \tag{559}$$

jest **pojemnością cieplną** ciała w temperaturze T.

13.5 Pochodna logarytmiczna

Przykład 13.23 *Obliczyć pochodną funkcji $y = x^x$.*

Rozwiązanie 13.23 *Aby obliczyć pochodną funkcji*

$$y(x) = [p(x)]^{w(x)} \tag{560}$$

poddajemy ją najpierw obustronnemu logarytmowaniu

$$\ln y(x) = w(x) \cdot \ln p(x) \tag{561}$$

a następnie różniczkujemy jej logarytm

$$[\ln y(x)]' = \frac{y'(x)}{y(x)} = w'(x)\ln p(x) + w(x)\frac{p'(x)}{p(x)} \tag{562}$$

Wyrażenie

$$[\ln y(x)]' = \frac{y'(x)}{y(x)} \tag{563}$$

nazywamy ***pochodną logarytmiczną*** *funkcji $y(x)$. Znając pochodną logarytmiczną łatwo obliczyć zwykłą pochodną, mianowicie*

$$y'(x) = y(x)\left[w'(x)\ln p(x) + w(x)\frac{p'(x)}{p(x)}\right] \tag{564}$$

Przechodząc do polecenia otrzymujemy

$$\ln y = x \ln x$$

Stąd

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Ostatecznie

$$y'(x) = (x^x)' = y(x)(\ln x + 1) = x^x (1 + \ln x)$$

Zadanie to możemy rozwiązać inną metodą, wykorzystując znane tożsamości logarytmiczne. Mamy

$$z = a^{\log_a z} \tag{565}$$

Jeżeli $z = x^x$, *a* $a = e$, *to*

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

Stąd

$$(x^x)' = \left(e^{\ln x^x}\right)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = e^{x \ln x}(\ln x + 1)$$

A więc

$$(x^x)' = x^x (1 + \ln x) \tag{566}$$

Przykład 13.24 *Obliczyć pochodną funkcji* $y(x) = (\sin x)^{\tan x}$ *w przedziale* $0 < x < \pi/2$.

Rozwiązanie 13.24 *Ponieważ* $e^{\ln u} = u$, *to* $\sin x = e^{\ln \sin x}$. *Podnosząc obie strony do potęgi* $\tan x$ *otrzymujemy*

$$y = (\sin x)^{\tan x} = e^{\tan x \ln \sin x}$$

Jest to funkcja $e^{f(x)}$, *której pochodna jest równa* $e^{f(x)} \cdot f'(x)$. *Ponieważ wykładnik jest iloczynem, to*

$$y'(x) = e^{\tan x \ln \sin x}\left(\frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} + \tan x \frac{1}{\sin x}\cos x\right) = e^{\tan x \ln \sin x}\left(\frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} + 1\right)$$

Odp. Pochodna funkcji $y(x) = (\sin x)^{\tan x}$ *ma postać* $y'(x) = e^{\tan x \ln \sin x}\left(\frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} + 1\right)$.

Przykład 13.25 *Obliczyć pochodną funkcji* $y(x) = \log_x \sin x$ $(x > 0,\ x \neq 1,\ \sin x > 0)$.

Rozwiązanie 13.25 *Z definicji logarytmu wiemy, że wyrażenie* $y(x) = \log_x \sin x$ *jest równoważne równaniu* $\sin x = x^{y(x)}$. *Logarytmując je obustronnie otrzymamy*

$$\ln \sin x = y \ln x$$

Stąd

$$y = \frac{\ln \sin x}{\ln x}$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\ln \sin x}{\ln x}\right)' = \frac{(\ln \sin x)' \cdot \ln x - (\ln x)' \cdot \ln \sin x}{\ln^2 x} = \\ &= \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln x - \frac{1}{x}\ln \sin x}{\ln^2 x} = \frac{x \ln x \cdot \cot x - \ln \sin x}{x \ln^2 x} \end{aligned}$$

Przykład 13.26 *Obliczyć pochodną funkcji* $y = \log_x 2$ $(x > 0, x \neq 1)$.

Rozwiązanie 13.26 *Ponieważ* [41] $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, *to* $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$. *Więc*

$$(y)' = \left(\frac{1}{\log_2 x}\right)' = -\frac{1}{\log_2^2 x} \cdot (\log_2 x)'$$

Biorąc pod uwagę wzór (548), otrzymujemy

$$y' = -\frac{1}{\log_2^2 x} \cdot \frac{1}{x \ln 2}$$

13.6 Różniczka funkcji

Definicja 13.5 *(Funkcji nieskończenie małej)*
Jeżeli

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{567}$$

przy czym lim *oznacza granicę, gdy* $x \to x_0$, $x \to \pm\infty$ *albo granicę jednostronną w punkcie* $x_0 \in (-\infty; \infty)$, *to mówimy, że funkcja* $f(x)$ *jest w danym przejściu granicznym nieskończenie mała w porównaniu z* $g(x)$ *i piszemy* $f(x) = o(g(x))$.

Definicja 13.6 *Jeżeli funkcja* $f(x)$ *ma pochodną* $f'(x)$ *oraz* $\mathrm{d}\,x$ *oznacza przyrost zmiennej* x, *dostatecznie bliski zeru, to*

$$f(x_0 + \mathrm{d}\,x) - f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}\,x + o(\mathrm{d}\,x) \tag{568}$$

gdzie $o(\mathrm{d}\,x)$ *jest przy* $\mathrm{d}\,x \to 0$ *nieskończenie małą w porównaniu z* $\mathrm{d}\,x$. *Iloczyn* $f'(x_0)\,\mathrm{d}\,x$, *w przybliżeniu równy przyrostowi funkcji* $\Delta f = f(x_0 + \mathrm{d}\,x) - f(x_0)$, *nazywamy* ***różniczką funkcji*** $f(x)$ *w punkcie* x_0 *dla przyrostu* $\mathrm{d}\,x$ *zmiennej* x *i oznaczamy ją symbolem* $\mathrm{d}\,f(x_0)$.

Wyrażenie (568) można zapisać następująco

$$f(x_0 + \mathrm{d}\,x) - f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}\,x + \mathrm{d}\,x \cdot \alpha(\mathrm{d}\,x) \tag{569}$$

przy czym funkcja $\alpha(\mathrm{d}\,x)$ spełnia warunki

$$\lim_{\mathrm{d}\,x \to 0} \alpha(\mathrm{d}\,x) = 0 \qquad \alpha(0) = 0$$

Przykład 13.27 *Obliczyć różniczkę funkcji* $f(x) = x^3$.

Rozwiązanie 13.27 *Mamy*

$$f(x + \mathrm{d}\,x) - f(x) = (x + \mathrm{d}\,x)^3 - x^3 = 3x^2\,\mathrm{d}\,x + \mathrm{d}\,x\left(3x\,\mathrm{d}\,x + \mathrm{d}\,x^2\right)$$

gdzie: $3x^2\,\mathrm{d}\,x-$ *różniczka funkcji, równa iloczynowi pochodnej funkcji i przyrostu argumentu,* $\alpha(\mathrm{d}\,x) = 3x\,\mathrm{d}\,x + \mathrm{d}\,x^2$, $\alpha(0) = 0$.

[41] Przypomnienie: Wzór na zamianę podstawy logarytmu ma postać $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

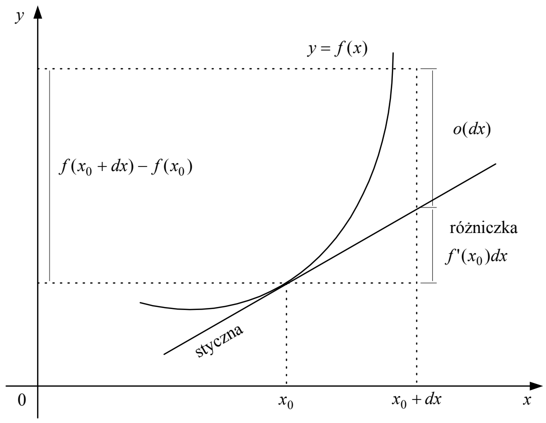
Mamy więc

$$\mathrm{d} f(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} f'(x_0) \cdot \mathrm{d} x \tag{570}$$

Na rysunku 72 przedstawiono interpretację geometryczną różniczki. Pomijając we wzorze (568) składnik $o(\mathrm{d} x)$, dostajemy wzór przybliżony:

$$f(x_0 + \mathrm{d} x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \mathrm{d} x \tag{571}$$

z którego można korzystać, gdy $\mathrm{d} x$ jest dostatecznie bliski zeru.



Rysunek 72: Różniczka funkcji $f(x)$.

Definicja 13.7 *Różniczką rzędu* n $(n \in \mathcal{N})$ *funkcji* $f(x)$ *w punkcie* x_0 *i dla przyrostu* $\mathrm{d} x$ *zmiennej* x *nazywamy liczbę*

$$\mathrm{d}^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0) \mathrm{d} x^n \tag{572}$$

przy czym $\mathrm{d} x^n \equiv (\mathrm{d} x)^n$. *Zamiast* $\mathrm{d}^n f(x_0)$ *piszemy krótko* $\mathrm{d}^n f$. *Jeżeli* $y = f(x)$, *to zamiast* $\mathrm{d}^n f(x)$ *piszemy także* $\mathrm{d}^n y$. *Stąd*

$$f^{(n)} \equiv \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d} x^n} \equiv \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d} x^n} \tag{573}$$

Przykład 13.28 *Obliczyć w przybliżeniu* $\ln 1.02$.

Rozwiązanie 13.28 *Korzystamy z wzoru (571) przyjmując* $f(x) = \ln x$, $x = 1$, $\mathrm{d} x = 0.02$. *Mamy zatem* $f'(1) = 1$, $f(1) = 0$. *Stąd* $\ln 1.02 \approx 0 + 1 \cdot 0.02 = 0.02$.

Przykład 13.29 *Dwa oporniki o oporach* R_1 *i* R_2 *połączono równolegle. Jak w przybliżeniu zmieni się opór zastępczy* R *tego układu, jeżeli opór* R_2 *zmieni się o* $\mathrm{d} R_2$*?*

Rozwiązanie 13.29 *Wartość oporu zastępczego obliczamy na podstawie wzoru*

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Stąd

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Jego zmiana jest równa

$$\Delta R = \frac{R_1 (R_2 + \mathrm{d} R_2)}{R_1 + R_2 + \mathrm{d} R_2} - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1^2 \mathrm{d} R_2}{(R_1 + R_2 + \mathrm{d} R_2)(R_1 + R_2)}$$

Zatem przybliżona zmiana oporu zastępczego będzie równa

$$\Delta R \approx \frac{R_1^2 \mathrm{d} R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

13.7 Twierdzenie Rolle'a i Lagrange'a.

Twierdzenie 13.6 *(Rolle'a)*
Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą na przedziale $\langle a; b\rangle$ i istnieje $f'(x)$ na przedziale $(a; b)$ oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a; b)$, że $f'(c) = 0$.

Oznacza to, że na łuku, którego końce mają te same rzędne (rys. 73), znajduje się co najmniej jeden punkt, w którym styczna jest równoległa do osi odciętych.

Przykład 13.30 *Sprawdzić, że funkcja $f(x) = \sin^3 x + \frac{3}{4}\cos^2 x$ spełnia na przedziale $\langle 0, \pi\rangle$ założenie Twierdzenia Rolle'a i obliczyć wartość c.*

Rozwiązanie 13.30 *Funkcja $f(x)$ jest ciągłą na przedziale jako suma iloczynów funkcji ciągłych. Ponadto dla każdego $x \in (0; \pi)$ istnieje pochodna*

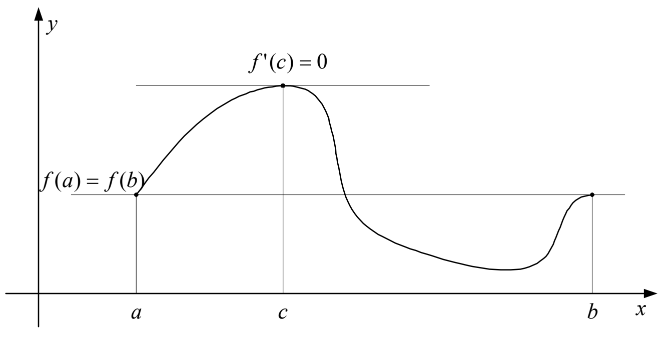
$$f'(x) = 3\sin x \cos x \left(\sin x - \frac{1}{2}\right) \quad \textit{oraz} \quad f(0) = f(\pi) = \frac{3}{4}$$

Liczba $c \in (0; \pi)$ spełnia równanie $f'(c) = 0$, czyli $3\sin c \cdot \cos c \cdot \left(\sin c - \frac{1}{2}\right) = 0$. Stąd $c_1 = \pi/6$, $c_2 = \pi/2$, $c_3 = \frac{5}{6}\pi$.

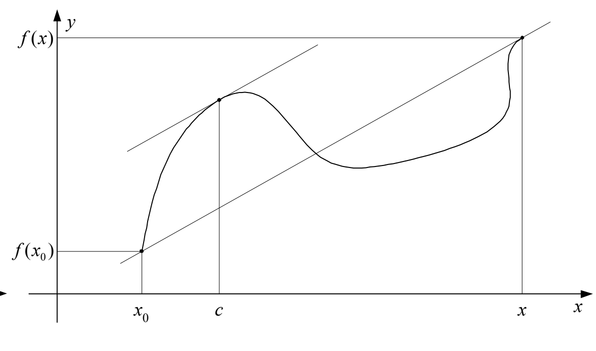
Twierdzenie 13.7 *(Lagrange'a o przyrostach)*
Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale domkniętym o końcach x_0 i x wraz z pierwszą pochodną wewnątrz tego przedziału, to istnieje taki punkt c leżący między x_0 i x, że

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \tag{574}$$

Oznacza to, że na łuku znajduje się co najmniej jeden punkt, w którym styczna jest równoległa do cięciwy łączącej końce łuku (rys. 74).



Rysunek 73: Twierdzenie Rolle'a.



Rysunek 74: Twierdzenie Lagrange'a.

13.8 Twierdzenie Taylora

Twierdzenie 13.8 *(Taylora)*
Jeżeli funkcja $f(x)$ ma ciągłe pochodne do rzędu $(n-1)$ włącznie na przedziale domkniętym o końcach x_0 i x oraz ma pochodną rzędu n wewnątrz tego przedziału, to istnieje taki punkt c, leżący między x_0 i x, że

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n \tag{575}$$

gdzie: $f^{(k)}(x)$– patrz wzór (544).

Uwaga 13.7 *(O szeregu (575))*

1. *Wzór (575) nazywamy* ***wzorem Taylora*** *z $n-$tą pochodną dla funkcji f w punkcie x_0; ostatni składnik po prawej stronie nazywamy* ***resztą wzoru Taylora*** *i oznaczamy symbolem R_n, $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n = R_n$.*

2. *W przypadku, gdy $x_0 = 0$, wzór (575) nazywa się* ***wzorem Maclaurina*** *z $n-$tą pochodną:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n \tag{576}$$

3. *Jeżeli reszta wzoru Taylora spełnia warunek*

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \qquad \text{dla każdego}^{42} \quad x \in U(x_0, \varepsilon) \tag{577}$$

to dla każdego $x \in U$ otrzymujemy równość

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{578}$$

Prawa strona ostatniej równości nosi nazwę ***szeregu Taylora*** *o środku x_0 dla funkcji $f(x)$, a o funkcji mówimy, że jest rozwijalna w szereg Taylora o środku x_0. Równość (577) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby szereg Taylora był zbieżny i aby zachodziła równość (578).*

4. *W szczególnym przypadku, gdy $x_0 = 0$ szereg Taylora przybiera prostszą postać*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \tag{579}$$

zwaną ***szeregiem Maclaurina*** *funkcji $f(x)$.*

5. *Rozwinięcie funkcji $(1+x)^p$ w szereg Maclaurina ma postać*

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \ldots + \binom{p}{n}x^n + \ldots \tag{580}$$

Szereg (580) nosi nazwę ***szeregu dwumiennego Newtona****, w którym*

$$\begin{array}{rlrl}
f(x) = & (1+x)^p & f(0) = & 1 \\
f'(x) = & p(1+x)^{p-1} & f'(0) = & p \\
f''(0) = & p(p-1)(1+x)^{p-2} & f''(0) = & p(p-1) \\
f'''(0) = & p(p-1)(p-2)(1+x)^{p-3} & f'''(0) = & p(p-1)(p-2) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Przykład 13.31 *Sprawdzić, że funkcja $f(x) = \sin^3 x + \frac{3}{4}\cos^2 x$ spełnia na przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ założenie Twierdzenia Rolle'a i obliczyć wartość c.*

[42] Dla każdego x z otoczenia punktu x_0.

Rozwiązanie 13.31 *Funkcja $f(x)$ jest ciągłą na przedziale jako suma iloczynów funkcji ciągłych. Ponadto dla każdego $x \in (0;\pi)$ istnieje pochodna*

$$f'(x) = 3\sin x \cos x \left(\sin x - \frac{1}{2}\right) \quad \textit{oraz} \quad f(0) = f(\pi) = \frac{3}{4}$$

Liczba $c \in (0;\pi)$ spełnia równanie $f'(c) = 0$, czyli $3\sin c \cdot \cos c \cdot \left(\sin c - \frac{1}{2}\right) = 0$. Stąd $c_1 = \pi/6$, $c_2 = \pi/2$, $c_3 = \frac{5}{6}\pi$.

Przykład 13.32 *Przedstawić funkcję $f(x) = 3x^5+2x+3$ w postaci wzoru Taylora przyjmując, że $x_0 = -2$.*

Rozwiązanie 13.32 *Skorzystamy z wzoru (575) dla $x_0 = -2$. Ponieważ $f(x)$ jest wielomianem piątego stopnia, to przyjmując $n = 6$ otrzymamy resztę we wzorze Taylora równą zeru. Mamy*

$$\begin{array}{ll}
f(-2) = -99 & \\
f'(x) = 15x^4 + 2 & f'(-2) = 242 \\
f''(x) = 60x^3 & f''(-2) = -480 \\
f'''(x) = 180x^2 & f'''(-2) = 720 \\
f^{IV}(x) = 360x & f^{IV}(-2) = -720 \\
f^{V}(x) = 360 & f^{V}(-2) = 360 \\
f^{VI}(x) = 0 = f^{VI}(c) &
\end{array}$$

Na podstawie wzoru Taylora z szóstą pochodną dostajemy

$$3x^5 + 2x + 3 = -99 + 242(x+2) - \frac{480}{2}(x+2)^2 + \frac{720}{6}(x+2)^3 -$$

$$-\frac{720}{24}(x+2)^4 + \frac{360}{120}(x+2)^5$$

Odp.

$$3x^5 + 2x + 3 = -99 + 242(x+2) - 240(x+2)^2 + 120(x+2)^3 - 30(x+2)^4 + 3(x+2)^5$$

Przykład 13.33 *Napisać wzór Maclaurina z piątą pochodną dla funkcji $f(x) = \sin x$.*

Rozwiązanie 13.33 *Obliczamy kolejne pochodne i ich wartości dla $x = 0$*

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\
f^{IV}(x) = \sin x & f^{IV}(0) = 0 \\
f^{V}(x) = \cos x &
\end{array}$$

Stąd otrzymujemy

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos c}{5!}x^5 \tag{581}$$

Odp. Wzór Maclaurina z piątą pochodną dla funkcji $f(x) = \sin x$ ma postać (581).

Na zakończenie podamy rozwinięcia w szereg Maclaurina funkcji trygonometrycznych, hiperbolicznych i wykładniczej:

$$\begin{array}{rll}
\sin x = & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots & x - \text{ dowolne} \\
\cos x = & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots & x - \text{ dowolne} \\
\sinh x = & x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots & x - \text{ dowolne} \\
\cosh x = & 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots & x - \text{ dowolne} \\
e^x = & 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots & x - \text{ dowolne} \\
e^{-x} = & 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots & x - \text{ dowolne}
\end{array}$$

Poniżej przedstawiamy szeregi dwumienne Newtona dla $p = -1,\ p = 1/2$:

$$\begin{array}{rll}
\frac{1}{1+x} = & 1 - x + x^2 - \ldots + (-x)^n + \ldots & -1 < x < 1 \\
\frac{1}{1-x} = & 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots & -1 < x < 1 \\
\sqrt{1+x} = & 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots & -1 < x < 1 \\
\sqrt{1-x} = & 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \ldots & -1 < x < 1
\end{array}$$

13.9 Twierdzenie de l'Hospitala

Twierdzenie 13.9 *(de l'Hospitala)*
Jeżeli

1. *funkcje* $\frac{f(x)}{h(x)}$ *oraz* $\frac{f'(x)}{h'(x)}$ *są określone w pewnym sąsiedztwie* S *punktu* x_0
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 0$ *albo* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \pm\infty$
3. *istnieje granica* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{h'(x)}$ *(właściwa albo niewłaściwa),*

to istnieje także $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)}$, *przy czym*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{h'(x)} \tag{582}$$

Uwaga 13.8 *Twierdzenie de l'Hospitala*[43] *(lub krótko: Twierdzenie H) jest także prawdziwe dla granic jednostronnych, dla granicy, gdy* $x \to -\infty$ *oraz dla granicy, gdy* $x \to \infty$. *Przez* S *należy wówczas rozumieć opowiednio: sąsiedztwo lewostronne lub prawostronne, przedział* $(-\infty, a)$ *albo* $(a, +\infty)$, *gdzie* a *jest liczbą dodatnią.*

Uwaga 13.9 *Z Twierdzenia de l'Hospitala korzystamy często przy obliczaniu:*

1. *granicy ilorazu* $\frac{f(x)}{h(x)}$, *gdy dzielna i dzielnik dążą do zera albo do nieskończoności (nieoznaczoność*[44] *typu* $\frac{0}{0}$ *i* $\frac{\infty}{\infty}$*),*

[43] W praktyce częściej posługujemy się terminem **reguła de l'Hospitala**.

[44] Nieoznaczoności występujące w Twierdzeniu de l'Hospitala często nazywane są **zagadnieniami typu** $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \ldots$.

2. *granicy różnicy $f(x) - h(x)$, gdy odjemna i odjemnik dążą do nieskończoności (nieoznaczoność typu $\infty - \infty$),*

3. *granicy iloczynu $f(x) \cdot h(x)$, gdy jeden czynnik dąży do zera, a drugi do $+\infty$ lub $-\infty$ (nieoznaczoność typu $0 \cdot \infty$),*

4. *granicy potęgi $[f(x)]^{h(x)}$, gdy $f(x) \to 0$ i $h(x) \to \infty$ albo $f(x) \to \infty$ i $h(x) \to 0$ albo $f(x) \to 1$ i $h(x) \to \infty$ (nieoznaczoności typu $0^0, \infty^0$ oraz 1^∞).*

Przykład 13.34 *Obliczyć* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos^2 x}{\sin^2 x}$.

Rozwiązanie 13.34 *Niech* $f(x) = \ln\cos^2 x, h(x) = \sin^2 x$. *Ponieważ* $f(x) \to 0$ *i* $h(x) \to 0$, *gdy* $x \to 0$, *więc mamy do czynienia z zagadnieniem typu* $\frac{0}{0}$. *Ponieważ* $f'(x) = 2\cos x(-\sin x)\frac{1}{\cos^2 x} = -2\frac{\sin x}{\cos x} = -2\tan x$, $h'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$, *to* $\frac{f'(x)}{h'(x)} = -\frac{1}{\cos^2 x}$. *Zarówno* $\frac{f(x)}{h(x)}$, *jak i* $\frac{f'(x)}{h'(x)}$ *są określone w pewnym sąsiedztwie punktu* 0. *Ponadto istnieje* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{h'(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right) = -1$. *Spełnione są więc założenia Twierdzenia 13.9 i na podstawie wzoru (582) mamy*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos^2 x}{\sin^2 x} \underset{H}{=} \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right) = -1$$

Odp. -1.

Uwaga 13.10 *Jeżeli stosując Twierdzenie de l'Hospital'a otrzymamy stosunek pochodnych* $\frac{f'(x)}{h'(x)}$, *którego granica nie istnieje, to nie można niczego wnioskować o granicy stosunku funkcji* $\frac{f(x)}{h(x)}$. *Wykorzystując regułę H w poniższym przykładzie:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \underset{H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$$

otrzymujemy stosunek pochodnych, którego granica nie istnieje. Natomiast zwykłe przekształcenia pokazują, że granica stosunku funkcji istnieje, bowiem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1+0 = 1$$

Wobec tego znak $\underset{H}{=}$ *nabiera znaczenia zwykłego znaku równości wtedy, gdy następująca po nim granica stosunku pochodnych istnieje.*

Przykład 13.35 *Obliczyć* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$.

Rozwiązanie 13.35 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \left|\frac{0}{0}\right| \underset{H}{=} \lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$. *Odp.* 1.

Przykład 13.36 *Obliczyć* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$.

Rozwiązanie 13.36 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \underset{H}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$. *Odp.* 0.

Przykład 13.37 *Obliczyć* $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\ln x \cdot \tan\frac{\pi x}{2}\right)$.

Rozwiązanie 13.37 *W tym przypadku mamy do czynienia z nieoznaczonością typu* $0 \cdot \infty$. *Możemy sprowadzić je do nieoznaczoności typu* $\frac{0}{0}$ *za pomocą przekształcenia* $\ln x \cdot \tan\frac{\pi x}{2} = \dfrac{\ln x}{\cot\frac{\pi x}{2}}$. *A więc*

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\ln x\cdot\tan\frac{\pi x}{2}\right) = \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{\cot\frac{\pi x}{2}} \underset{H}{=} \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2}\frac{-1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}}\right) = \lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{x}\right) = -\frac{2}{\pi}$$

Odp. $-\frac{2}{\pi}$.

Przykład 13.38 *Obliczyć* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

Rozwiązanie 13.38 *Jest to nieoznaczoność typu* 0^0. *Sprowadzamy je do nieoznaczoności typu* $\frac{\infty}{\infty}$*:*

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \left|0^0\right| = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}} \underset{H}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}} = e^0 = 1$$

Odp. 1.

Przykład 13.39 *Wykorzystując Twierdzenie de l'Hospital'a obliczyć granicę* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$.

Rozwiązanie 13.39 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x} = \left|\frac{0}{0}\right| \underset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-3}{5\sin 10x} = \left|\frac{0}{0}\right|$. *Otrzymaliśmy ponownie nieoznaczoność typu* $\frac{0}{0}$. *Ponieważ warunki Twierdzenia 13.9 są spełnione, to funkcje* $f'(x)$ *i* $h'(x)$ *traktujemy jako pewne nowe funkcje* $f_1(x)$ *i* $h_1(x)$ *i stosujemy do nich Twierdzenie de l'Hospital'a. W efekcie dochodzimy do wyrażenia*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x} = \left|\frac{0}{0}\right| \underset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-3}{5\sin 10x} = \left|\frac{0}{0}\right| \underset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{9e^{3x}}{50\cos 10x} = \frac{9}{50}$$

Obliczenia przedstawione w Przykładzie 13.39 zapiszemy w postaci symbolicznej

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{h'(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{h''(x)} \tag{583}$$

Przykład 13.40 *Obliczyć granicę funkcji* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^2\sin^2 x}$.

Rozwiązanie 13.40 *Również tutaj Twierdzenie de l'Hospital'a należy stosować kilka razy. Mianowicie*

$$\begin{aligned}
g &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^2\sin^2 x} = \left|\frac{0}{0}\right| \underset{H}{=} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{h'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x+2x}{2x\sin^2 x+x^2\sin 2x} = \left|\frac{0}{0}\right| \underset{H}{=} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{h''(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x+2}{2\sin^2 x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x} = \left|\frac{0}{0}\right| \underset{H}{=} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{h'''(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{6\sin 2x+12x\cos 2x-4x^2\sin 2x} = \left|\frac{0}{0}\right| \underset{H}{=} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f^{(4)}(x)}{h^{(4)}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{24\cos 2x-32x\sin 2x-8x^2\cos 2x} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

A więc regułę de l'Hospitala musieliśmy stosować aż czterokrotnie. Odp. $\frac{1}{12}$.

Przykład 13.41 *Wyznaczyć* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

Rozwiązanie 13.41 *Mamy tu do czynienia z nieoznacznością typu* $\infty-\infty$. *Jeżeli* $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-h(x)]$[45] *prowadzi do nieoznaczoności typu* $\infty-\infty$, *to możemy zastosować podstawienia* $u(x)=\frac{1}{f(x)}$ *oraz* $v(x)=\frac{1}{h(x)}$. *Wówczas przy* $x\to a$ *zachodzi* $u(x)\to 0$ *i* $v(x)\to 0$. *A więc*

$$f(x)-h(x)=\frac{1}{u(x)}-\frac{1}{v(x)}=\frac{v(x)-u(x)}{u(x)v(x)} \tag{584}$$

W ten sposób zagadnienie $\infty-\infty$ *zostało sprowadzone do postaci* $\frac{0}{0}$. *Zastosujemy do niego poznaną regułę*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left|\frac{0}{0}\right| \underset{H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\left|\frac{0}{0}\right| \underset{H}{=}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Przykład 13.42 *Wyznaczyć* $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-}(\tan x)^{\tan 2x}$.

Rozwiązanie 13.42 *Jest to nieoznaczoność typu* ∞^0. *Ograniczymy się do przypadku* $\pi/4<x<\pi/2$. *Wówczas* $\tan x>0$, *a* $\tan 2x$ *przyjmuje wartość skończoną. Ponieważ* $(\tan x)^{\tan 2x}=e^{\tan 2x\ln\tan x}=e^{\frac{\ln\tan x}{\cot 2x}}$, *a*

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} e^{\frac{\ln\tan x}{\cot 2x}}=e^{\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\ln\tan x}{\cot 2x}}=e^A$$

gdzie

$$\begin{aligned}A &= \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\ln\tan x}{\cot 2x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right| \underset{H}{=} \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-2}{\sin^2 2x}}=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(-\frac{1}{2}\frac{\sin^2 2x}{\tan x\cos^2 x}\right)=\\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x}=-2\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x}=\\ &= -2\lim_{x\to(\pi/2)^-}\sin x\cos x=0\end{aligned}$$

Zatem $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-}(\tan x)^{\tan 2x}=e^0=1$. *Odp.* 1.

Przykład 13.43 *Wyznaczyć* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$.

Rozwiązanie 13.43 *Jest to nieoznaczoność typu* 1^∞. *Zakładamy, że* $1+\frac{a}{x}>0$. *Warunek ten zachodzi, gdy* $x>|a|$. *Zlogarytmujemy funkcję* $f(x)=\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ *i poszukamy jej granicy*

$$\begin{aligned}A &= \lim_{x\to\infty}\ln f(x)=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right]=|\infty\cdot 0|=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+a}{x}}{\frac{1}{x}}=\left|\frac{0}{0}\right| \underset{H}{=}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x+a}\frac{-a}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{x+a}=a\end{aligned}$$

Stąd $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$. *Odp.* e^a.

[45] Mogą zachodzić przypadki: $f(x)\to\infty$ oraz $h(x)\to\infty$ lub $f(x)\to-\infty$ oraz $h(x)\to-\infty$.

13.10 Ekstrema funkcji

Zakładamy, że funkcja $f(x)$ jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0.

Definicja 13.8 *Mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0:*

1. ***maksimum lokalne właściwe*** *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie sąsiedztwo S punktu x_0, że dla każdego $x \in S$ spełniona jest nierówność:*

$$f(x) < f(x_0) \tag{585}$$

2. ***maksimum lokalne*** *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie otoczenie U punktu x_0, że dla każdego $x \in U$ spełniona jest nierówność:*

$$f(x) \leq f(x_0) \tag{586}$$

3. ***minimum lokalne*** *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie otoczenie U punktu x_0, że dla każdego $x \in U$ spełniona jest nierówność:*

$$f(x) \geq f(x_0) \tag{587}$$

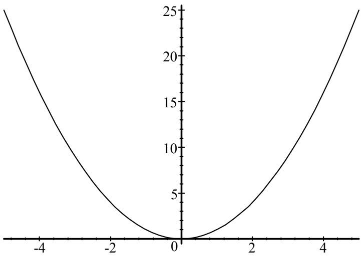
4. ***minimum lokalne właściwe*** *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie sąsiedztwo S punktu x_0, że dla każdego $x \in S$ spełniona jest nierówność:*

$$f(x) > f(x_0) \tag{588}$$

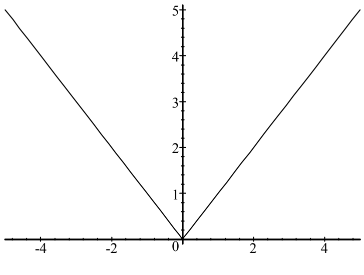
Uwaga 13.11 *Maksimum i minimum nazywamy **ekstremami**. Zamiast maksimum (minimum) lokalne mówimy krótko: maksimum (minimum).*

Twierdzenie 13.10 *(Fermata - warunek konieczny ekstremum)*
Jeżeli funkcja $f(x)$ ma ekstremum w punkcie x_0 i ma w tym punkcie pierwszą pochodną, to $f'(x_0) = 0$.

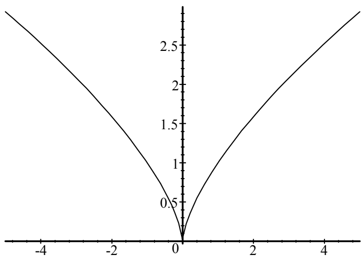
Uwaga 13.12 *Funkcja może mieć ekstremum tylko w tych punktach, w których **pochodna nie istnieje**, bądź **jest równa zeru**.*



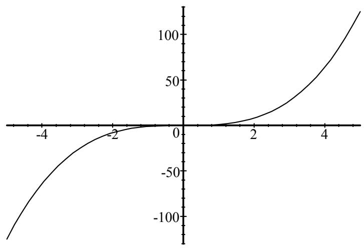
Rysunek 75: Funkcja $y = x^2$.



Rysunek 76: Funkcja $y = |x|$.



Rysunek 77: Funkcja $y = x^{2/3}$.



Rysunek 78: Funkcja $y = x^3$.

Każda z funkcji $x^2, |x|, \sqrt[3]{x^2}$ ma w punkcie $x = 0$ minimum lokalne właściwe, ale tylko pierwsza z nich jest różniczkowalna w tym punkcie.

Uwaga 13.13 *Twierdzenie odwrotne do Twierdzenia 13.10 nie zachodzi. Pochodna funkcji $y = x^3$ przyjmuje w punkcie $x = 0$ wartość równą 0, ale funkcja w tym punkcie nie ma ekstremum (rys. 78).*

Twierdzenie 13.11 *(Pierwszy warunek wystarczający ekstremum)*

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x_0 i posiada pochodną $f'(x)$ na pewnym sąsiedztwie $S(x_0;\delta)$, przy czym

$$f'(x) < 0 \quad \text{dla} \quad x_0 - \delta < x < x_0 \quad \text{i} \quad f'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x_0 < x < x_0 + \delta \tag{589}$$

to funkcja ta ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe; jeżeli natomiast zamiast warunku (589) spełniony jest warunek

$$f'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x_0 - \delta < x < x_0 \quad \text{i} \quad f'(x) < 0 \quad \text{dla} \quad x_0 < x < x_0 + \delta \tag{590}$$

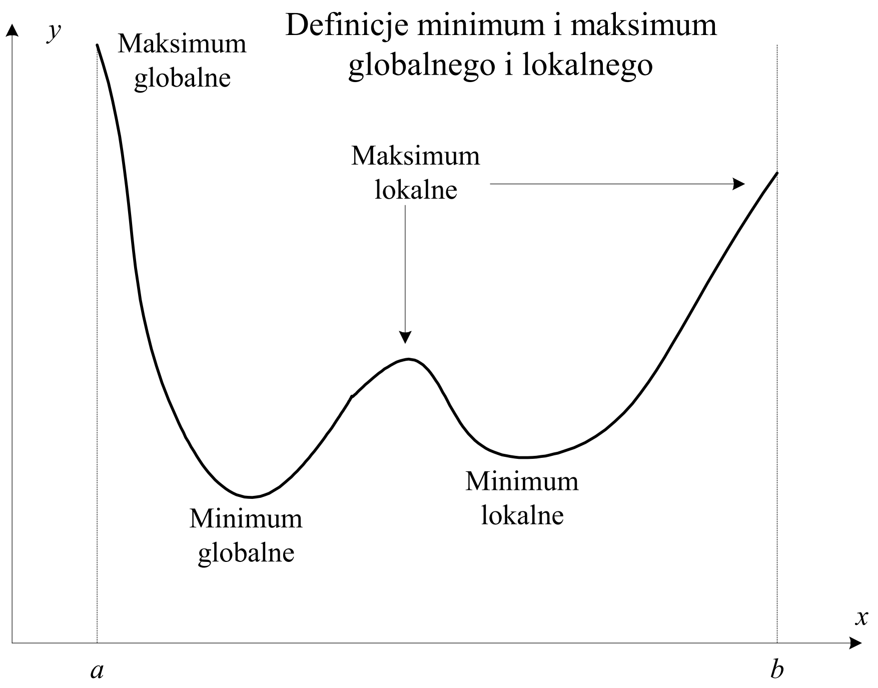
to funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 maksimum lokalne właściwe.

Wniosek 13.1 *Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i spełniony jest warunek (589), to funkcja $f(x)$ ma w punkcie $x = x_0$ minimum lokalne właściwe; jeżeli $f'(x_0) = 0$ i spełniony jest warunek (590), to funkcja $f(x)$ ma w punkcie $x = x_0$ maksimum lokalne właściwe.*

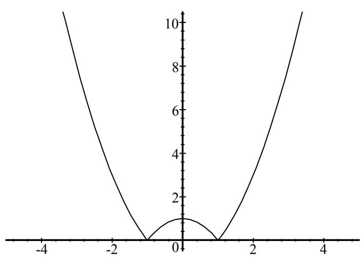
Twierdzenie 13.12 *(Drugi warunek wystarczający ekstremum)*

Jeżeli funkcja $f(x)$ ma na pewnym otoczeniu punktu x_0 pochodne do rzędu n włącznie, pochodna $f^{(n)}(x)$ jest ciągła w punkcie x_0, n jest liczbą parzystą, a ponadto $f^{(k)}(x_0) = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n-1$ oraz $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, to funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 maksimum właściwe, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$, natomiast minimum lokalne właściwe, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$.

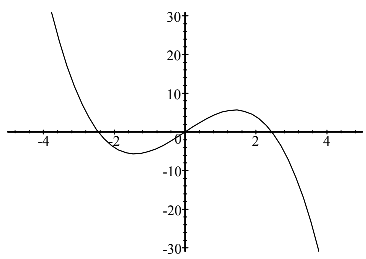
Twierdzenie 13.13 *Jeżeli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a;b)$, to funkcja $f(x)$ jest rosnąca na przedziale $(a;b)$; jeżeli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a;b)$, to funkcja $f(x)$ jest malejąca na przedziale $(a;b)$.*



Rysunek 79: Ekstrema lokalne i globalne.



Rysunek 80: Funkcja $y = |x^2 - 1|$.



Rysunek 81: Funkcja $y = -x^3 + 6x$.

Uwaga 13.14 *Funkcja określona na przedziale otwartym może mieć wartość największą (najmniejszą) tylko w takim punkcie, w którym ma maksimum (minimum). Funkcja określona na przedziale domkniętym (jednostronnie domkniętym) może mieć wartość największą (najmniejszą) tylko w takim punkcie, w którym ma ekstremum lub na końcu tego przedziału.*

Przykład 13.44 *Znaleźć ekstremum funkcji* $y = |x^2 - 1|$.

Rozwiązanie 13.44 *Ponieważ* $|x^2 - 1| \geq 0$, *to funkcja ma w punkcie* $x = -1$ *oraz* $x = 1$ *minimum równe* 0. *W tych dwóch punktach pochodna nie istnieje (nie ma stycznej do wykresu funkcji). Dla* $x < -1$ *lub* $x > 1$ *mamy* $y(x) = x^2 - 1$, *więc pochodna istnieje i jest równa* $y' = 2x \neq 0$ *i ekstremum nie ma. Dla* $-1 < x < 1$ *otrzymujemy* $y = 1 - x^2$, *stąd* $y' = -2x$, *więc dla* $x = 0$ *pochodna jest równa* 0. *W tym punkcie jest maksimum* $f(0) = 1$ *(patrz rys. 80). Odp. Dwa minima:* $y(-1) = y(1) = 0$ *i maksimum* $y(0) = 1$.

Przykład 13.45 *Znaleźć ekstremum funkcji* $y = -x^3 + 6x$.

Rozwiązanie 13.45 *Obliczamy pochodną $y' = -3x^2 + 6 = 3(2 - x^2)$, a następnie znajdujemy jej miejsca zerowe $2 - x^2 = 0$. Stąd $x_1 = -\sqrt{2}$ i $x_2 = \sqrt{2}$. Tylko w tych dwóch punktach analizowana funkcja może mieć ekstremum. Ponieważ w dostatecznie małym sąsiedztwie punktu $-\sqrt{2}$ mamy $y' < 0$ dla $x < -\sqrt{2}$ i $y' > 0$ dla $x > -\sqrt{2}$, więc w tym punkcie funkcja ma minimum: $y\left(-\sqrt{2}\right) = -\left(-\sqrt{2}\right)^3 + 6\left(-\sqrt{2}\right) = -4\sqrt{2}$. Ponieważ w dostatecznie małym sąsiedztwie punktu $\sqrt{2}$ mamy $y' > 0$ dla $x < \sqrt{2}$ i $y' < 0$ dla $x > \sqrt{2}$, to w punkcie $\sqrt{2}$ funkcja ma maksimum $y\left(\sqrt{2}\right) = -\left(\sqrt{2}\right)^3 + 6\left(-\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}$ (patrz rys. 81).*

Odp. Minimum $y\left(-\sqrt{2}\right) = -4\sqrt{2}$, maksimum $y\left(\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}$.

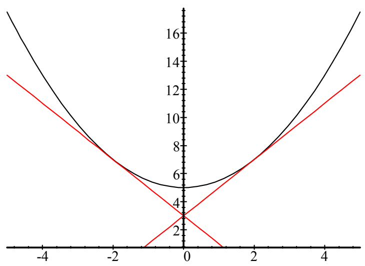
13.11 Wklęsłość, wypukłość i punkt przegięcia funkcji

Zakładamy, że funkcja $y = f(x)$ ma pochodną na przedziale $(a; b)$.

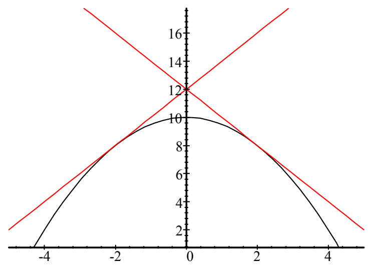
Definicja 13.9 *Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest:*

1. ***wypukła** na przedziale $(a; b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x_0 \in (a; b)$ styczna poprowadzona do tej krzywej w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest położona **pod** tą **krzywą** - patrz rysunek 82;*

2. ***wklęsła** na przedziale $(a; b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x_0 \in (a; b)$ styczna poprowadzona do tej krzywej w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest położona **nad** tą **krzywą** - patrz rysunek 83.*



Rysunek 82: Funkcja wypukła.



Rysunek 83: Funkcja wklęsła.

Twierdzenie 13.14 *Jeżeli $\forall x \in (a; b)$ $\underline{f''(x) < 0}$, to krzywa $y = f(x)$ jest **wklęsła** na przedziale $(a; b)$.*

Twierdzenie 13.15 *Jeżeli $\forall x \in (a; b)$ $\underline{f''(x) > 0}$, to krzywa $y = f(x)$ jest **wypukła** na przedziale $(a; b)$.*

Definicja 13.10 *Punkt $P_0(x_0, f(x_0))$ nazywamy **punktem przegięcia** krzywej $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:*

1. *istnieje styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie P_0,*

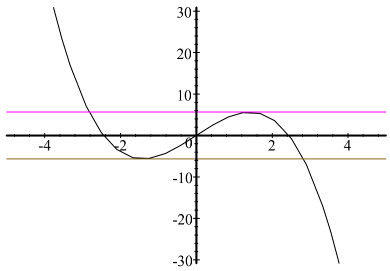
2. *krzywa $y = f(x)$ jest wypukła na lewostronnym sąsiedztwie punktu x_0 i wklęsła na pewnym prawostronnym sąsiedztwie tego punktu albo na odwrót.*

Jeżeli funkcja $f(x)$ ma na pewnym otoczeniu punktu x_0 drugą pochodną, która jest ciągła w punkcie x_0, to prawdziwe są następujące twierdzenia:

Twierdzenie 13.16 *(Warunek konieczny istnienia punktu przegięcia)*
Jeżeli $P_0(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$, to $f''(x_0) = 0$.

Twierdzenie 13.17 *(Warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia)*
Jeżeli $f''(x)$ zmienia znak w punkcie x_0, to $P_0(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$.

Jeżeli w punkcie x_0 $f'(x_0) = 0$, a $f''(x_0) < 0$, to funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 maksimum lokalne, natomiast, gdy przy $f'(x_0) = 0$ zachodzi $f''(x_0) > 0$, to funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 minimum lokalne. Z analizy Przykładu 13.45 wiemy, że dla $x = \sqrt[3]{2}$ funkcja $y(x) = -x^3 + 6x$ osiąga maksimum; wartość jej drugiej pochodnej w tym punkcie jest równa $y''\left(\sqrt[3]{2}\right) = -6\sqrt[3]{2}$, a więc jest mniejsza od zera. Funkcja $y(x) = -x^3 + 6x$ osiąga minimum dla $x = -\sqrt[3]{2}$; wartość drugiej pochodnej w tym punkcie jest równa $y''\left(-\sqrt[3]{2}\right) = 6\sqrt[3]{2}$, a więc jest większa od zera.

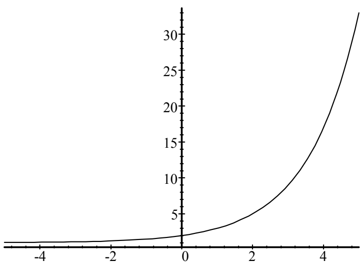


Rysunek 84: Ekstrema funkcji $y = -x^3 + 6x$.

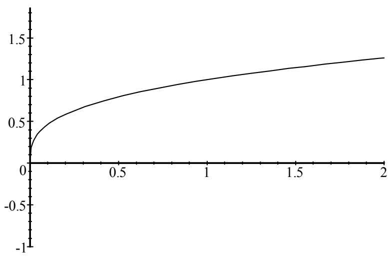
Pojęć **wklęsłość** i **wypukłość** funkcji używamy do analizy tak zwanego **tempa zmian wartości funkcji**:

1. jeżeli funkcja jest rosnąca i wypukła w przedziale $(a; b)$, to mówimy, że rośnie coraz szybciej w tym przedziale,
2. jeżeli funkcja jest rosnąca i wklęsła w przedziale $(a; b)$, to mówimy, że rośnie coraz wolniej w tym przedziale,
3. jeżeli funkcja jest malejąca i wypykła w przedziale $(a; b)$, to mówimy, że maleje coraz wolniej w tym przedziale,
4. jeżeli funkcja jest malejąca i wklęsła w przedziale $(a; b)$, to mówimy, że maleje coraz szybciej w tym przedziale.

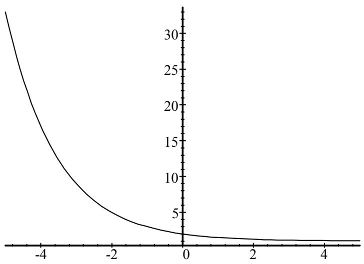
Na rysunkach 85 - 88 przedstawiono wykresy funkcji o różnych tempach zmian wartości.



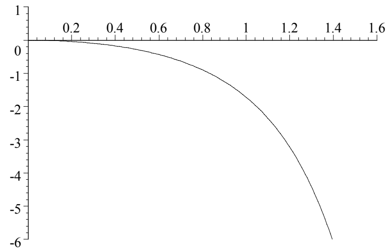
Rysunek 85: Funkcja rośnie coraz szybciej.



Rysunek 86: Funkcja rośnie coraz wolniej.



Rysunek 87: Funkcja maleje coraz wolniej.



Rysunek 88: Funkcja maleje coraz szybciej.

Twierdzenie 13.18 *Jeżeli dla każdego $x \in (a; b)$:*
$f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$, to funkcja $f(x)$ rośnie coraz szybciej w przedziale $(a; b)$,
$f'(x) > 0$ i $f''(x) < 0$, to funkcja $f(x)$ rośnie coraz wolniej w przedziale $(a; b)$,
$f'(x) < 0$ i $f''(x) > 0$, to funkcja $f(x)$ maleje coraz wolniej w przedziale $(a; b)$,
$f'(x) < 0$ i $f''(x) < 0$, to funkcja $f(x)$ maleje coraz szybciej w przedziale $(a; b)$.

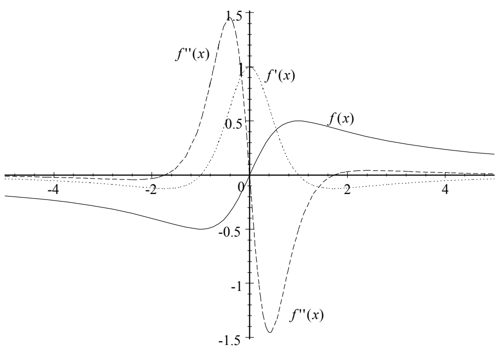
Przykład 13.46 *Zbadać tempo zmian funkcji $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.*

Rozwiązanie 13.46 *Mamy $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, a $f''(x) = \frac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$. Otrzymujemy stąd, że (patrz rys. 89)*

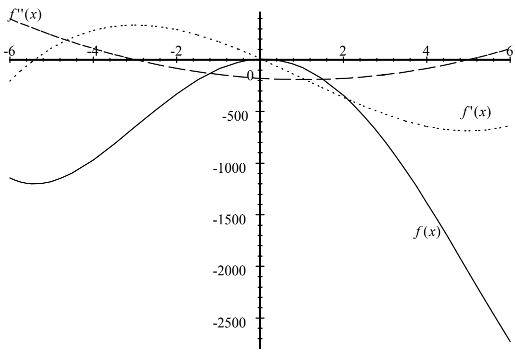
$$\begin{array}{lcl} f''(x) = 0 & \Longleftrightarrow & x_1 = 0;\ x_2 = -\sqrt{3};\ x_3 = \sqrt{3} \\ f''(x) > 0 & \Longleftrightarrow & x \in \left(-\sqrt{3}; 0\right) \cup \left(\sqrt{3}; \infty\right) \\ f''(x) < 0 & \Longleftrightarrow & x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(0; \sqrt{3}\right) \end{array}$$

Zestawienie znaków pierwszej i drugiej pochodnej przedstawiamy w poniższej tabeli. Porównując je stwierdzamy, że funkcja maleje coraz szybciej w przedziałach $(-\infty; -\sqrt{3})$ i $(1; \sqrt{3})$, maleje coraz wolniej w przedziałach $(-\sqrt{3}; -1)$ i $(\sqrt{3}; \infty)$, rośnie coraz szybciej w przedziale $(-1; 0)$, rośnie coraz wolniej w przedziale $(0; 1)$.

x	...	$-\sqrt{3}$	...	-1	...	0	...	1	...	$\sqrt{3}$	...
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$



Rysunek 89: Funkcja $y = \frac{x}{1+x^2}$ i jej 1 i 2 pochodna.



Rysunek 90: Funkcja $y = x^4 - 4x^3 - 90x^2 + 12x + 7$ i jej 1 i 2 pochodna.

Przykład 13.47 *Znaleźć przedziały, na których wykres funkcji $y = x^4 - 4x^3 - 90x^2 + 12x + 7$ jest: a) wypukły, b) wklęsły oraz wyznaczyć punkty przegięcia tego wykresu.*

Rozwiązanie 13.47 *Obliczamy kolejno:*
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 180x + 12$; $f''(x) = 12x^2 - 24x - 180 = 12(x+3)(x-5)$. *Warunek $f''(x) = 0$ jest więc spełniony tylko w punktach $x_1 = -3$ i $x_2 = 5$. W każdym z tych punktów druga pochodna zmienia znak, więc na podstawie Twierdzenia 13.16 są to odcięte punktów przegięcia. Mamy więc $y = 650$ dla $x = -3$ oraz $y = -2058$ dla $x = 5$. Ponadto $f''(x) > 0$ na przedziale $(-\infty; -3)$ oraz na przedziale $(5; \infty)$, a zatem są to przedziały, na których wykres funkcji jest wypukły. Na przedziale $(-3; 5)$ wykres jest wklęsły, ponieważ $f''(x) < 0$ (patrz Twierdzenia 13.13 i 13.14).*

13.12 Asymptoty

Definicja 13.11 *(Asymptot)*

1. *Prostą o równaniu $x = c$ nazywamy **asymptotą pionową lewostronną** krzywej $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f(x)$ jest określona na pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu c oraz $\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$ albo $\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty$.*

2. *Prostą o równaniu $x = c$ nazywamy **asymptotą pionową prawostronną** krzywej $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f(x)$ jest określona na pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu c oraz $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$ albo $\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$.*

3. *Jeżeli prosta $x = c$ jest jednocześnie asymptotą lewostronną i prawostronną krzywej $y = f(x)$, to nazywamy ją **asymptotą pionową dwustronną** (krótko: **asymptotą pionową**) tej krzywej.*

4. *Prostą o równaniu $y = mx + k$ nazywamy **asymptotą ukośną** (gdy $m \neq 0$) albo **asymptotą poziomą** (gdy $m = 0$) **lewostronną** krzywej $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f(x)$ jest określona na pewnym przedziale $(-\infty; a)$ oraz $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + k)] = 0$ (patrz 62).*

5. *Prostą o równaniu $y = mx + k$ nazywamy **asymptotą ukośną** (gdy $m \neq 0$) albo **asymptotą poziomą** (gdy $m = 0$) **prawostronną** krzywej $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f(x)$ jest określona na pewnym przedziale $(a; \infty)$ oraz $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + k)] = 0$.*

6. *Jeżeli prosta $y = mx + k$ jest jednocześnie asymptotą ukośną (poziomą, gdy $m = 0$) lewostronną i prawostronną krzywej $y = f(x)$, to nazywamy ją asymptotą ukośną dwustronną (krótko: asymptotą ukośną) tej krzywej.*

Zamiast asymptota ukośna mówimy też asymptota pochyła.

Twierdzenie 13.19 *Prosta $y = mx + k$ jest asymptotą ukośną (poziomą, gdy $m = 0$) lewostronną krzywej $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice skończone*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad i \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = k \tag{591}$$

Twierdzenie 13.20 *Prosta $y = mx + k$ jest asymptotą ukośną (poziomą, gdy $m = 0$) prawostronną krzywej $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice skończone*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad i \quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = k \tag{592}$$

Przykład 13.48 *Znaleźć asymptoty krzywej $y = e^{1/x}$.*

Rozwiązanie 13.48 *Prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową prawostronną, ponieważ $\lim\limits_{x\to 0^+} y = \infty$, nie jest to asymptota obustronna, gdyż $\lim\limits_{x\to 0^-} y = 0$. Obliczamy $m = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{e^{1/x}}{x} = 0$ oraz $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(e^{1/x} - 0\right) = 1$. Prosta $y = 1$ jest asymptotą lewostronną. Obliczymy teraz granice:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}}{x} = 0 \quad oraz \quad \lim_{x\to\infty} \left(e^{1/x} - 0\right) = 1 \tag{593}$$

Prosta $y = 1$ jest asymptotą poziomą prawostronną, jest to asymptota pozioma obustronna.
Odp. $x = 0$ asymptota pionowa prawostronna; $y = 1$ asymptota pozioma obustronna.

13.13 Badanie funkcji

W celu zbadania funkcji określonej wzorem wykonujemy następujące operacje matematyczne:

1. Znajdujemy dziedzinę naturalną (jeżeli inna dziedzina nie jest podana), obliczamy granice na końcach dziedziny oraz badamy, czy funkcja ma szczególne cechy, np. parzystość, nieparzystość, okresowość, miejsca zerowe, wartość dla $x = 0$.
2. Badamy istnienie asymptot wykresu funkcji oraz, jeżeli istnieją, piszemy ich równania.
3. Znajdujemy przedziały, na których funkcja jest rosnąca i takie, na których jest malejąca. Badamy istnienie ekstremów oraz, jeżeli istnieją, wyznaczamy je.
4. Znajdujemy przedziały, na których wykres jest wklęsły i takie, na których jest wypukły. Badamy istnienie punktów przegięcia, jeżeli istnieją, wyznaczamy je.
5. Zapisujemy uzyskane dane o funkcji w tzw. **tabeli zmienności funkcji**.
6. Sporządzamy wykres funkcji.

Przykład 13.49 *Zbadać przebieg funkcji $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 2$.*

Rozwiązanie 13.49 *$Df = (-\infty; +\infty)$. Dla każdego $x \neq 0$ mamy*

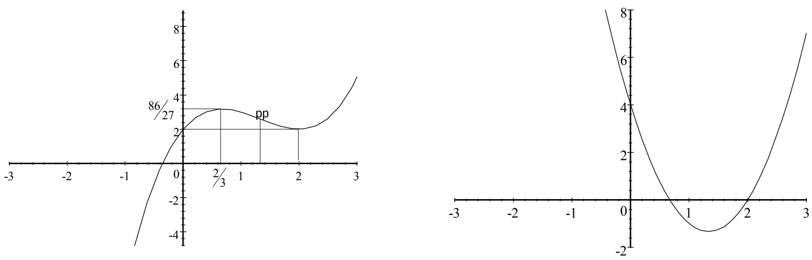
$$y = x^3 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) \tag{594}$$

Jeżeli $x \to -\infty$, to $x^3 \to -\infty$, a wyrażenie w nawiasie dąży do 1. Zatem $\lim\limits_{x\to -\infty} y = -\infty$. Jeżeli $x \to \infty$, to $x^3 \to \infty$, a wyrażenie w nawiasie, jak poprzednio, dąży do 1, więc $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$. Obliczamy pierwszą pochodną:

$$y' = 3x^2 - 8x + 4 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 2) \tag{595}$$

Pochodna jest dodatnia, więc funkcja jest rosnąca w przedziale $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ *i w przedziale* $(2, \infty)$. *Pierwsza pochodna jest ujemna w przedziale* $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ *- funkcja jest w nim malejąca. Pochodna przyjmuje wartość* 0 *w punktach* $x = \frac{2}{3}$ *oraz* $x = 2$. *Na podstawie Twierdzenia 13.11 stwierdzamy, że funkcja ma w punkcie* $x = \frac{2}{3}$ *maksimum,* $y(\frac{2}{3}) = \frac{86}{27}$, *a minimum w punkcie* $x = 2$ *równe* $y(2) = 2$. *Obliczamy drugą pochodną:* $y'' = 6x - 8$. *Ponieważ* $y'' = 0 \iff x = \frac{4}{3}$, *to druga pochodna zmienia znak w punkcie* $x = \frac{4}{3}$. *Wykres funkcji ma punkt przegięcia w punkcie* $P\left(\frac{4}{3}, \frac{70}{27}\right)$. *Na przedziale* $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$ *wykres funkcji jest wklęsły, zaś na przedziale* $\left(\frac{4}{3}; \infty\right)$ *- wypukły. Na podstawie uzyskanych wyników sporządzamy tabelę zmienności funkcji*[46] *oraz tworzymy jej wykres.*

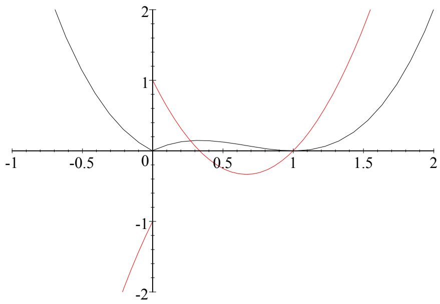
x	$-\infty$	$\dots$	$\frac{2}{3}$	$\dots$	$\frac{4}{3}$	$\dots$	2	$\dots$	∞
$y'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$y''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$y(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\max = \frac{86}{27}$	$\searrow$	$\text{pp} = \frac{70}{27}$	$\searrow$	$\min = 2$	$\nearrow$	∞



Rysunek 91: Wykresy funkcji $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 2$ i $y' = 3x^2 - 8x + 4$.

[46] pp oznacza punkt przegięcia.

13.14 Przykłady



Rysunek 92: Funkcja $y = |x|(x-1)^2$ i jej pochodna.

W punkcie tym szczegółowo omówimy badanie przebiegu pewnych funkcji - elementarnych i nieelementarnych.

Przykład 13.50 *Znaleźć ekstrema i naszkicować wykres funkcji* $y = |x|\,(x-1)^2$.

Rozwiązanie 13.50 *Funkcję* $y(x)$ *i jej pochodną* $y'(x)$ *musimy analizować w dwóch przedziałach: dla* $x < 0$ *oraz dla* $x > 0$. *Pochodna ma postać:*

$$y'(x) = \begin{cases} [x(x-1)^2]' = & 3x^2 - 4x + 1 \quad \text{dla } x > 0 \\ [-x(x-1)^2]' = & -3x^2 + 4x - 1 \quad \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

W punkcie $x = 0$ *pochodna nie istnieje, ponieważ* $y'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+}(3x^2 - 4x + 1) = 1$, *a* $y'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-3x^2 + 4x - 1) = -1$. *Stwierdzamy, że funkcja* $y(x)$ *jest ciągła w punkcie* $x = 0$, *gdyż* $y(0) = \lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$. *Znajdujemy punkty zerowe pochodnej rozwiązując równanie* $y'(x) = 0$. *Dla* $x \in (0;\infty)$ *otrzymujemy* $x_1 = \frac{1}{3}$ *i* $x_2 = 1$, *natomiast dla* $x \in (-\infty;0)$ *równanie* $y'(x) = 0$ *nie ma rozwiązań rzeczywistych. Funkcja może mieć ekstrema tylko w punktach:* $0, \frac{1}{3}$ *i* 1. *W punkcie* $x = 0$ *funkcja ma minimum lokalne właściwe równe* 0, *gdyż funkcja* $y(x)$ *jest w tym punkcie ciągła oraz dla każdego* x *należącego do sąsiedztwa punktu* 0 *o dostatecznie małym promieniu* $(0 < r < 1)$ *mamy* $y'(x) < 0$, *gdy* $x < 0$ *i* $y'(x) > 0$, *gdy* $x > 0$. *W punkcie* $x = \frac{1}{3}$ *występuje maksimum lokalne właściwe równe* $\frac{4}{27}$, *ponieważ pochodna* $y'(x)$ *zmienia w tym punkcie znak z dodatniego na ujemny. Podobnie stwierdzamy, że w punkcie* $x = 1$ *jest minimum lokalne właściwe, równe* 1.

Odp. $y_{\min} = 0$ *dla* $x = 0$ *i* $x = 1$; $y_{\max} = \frac{4}{27}$ *dla* $x = \frac{1}{3}$. *Wykresy przedstawia rysunek 92* $(y'(x)-$ *linia przerywana).*

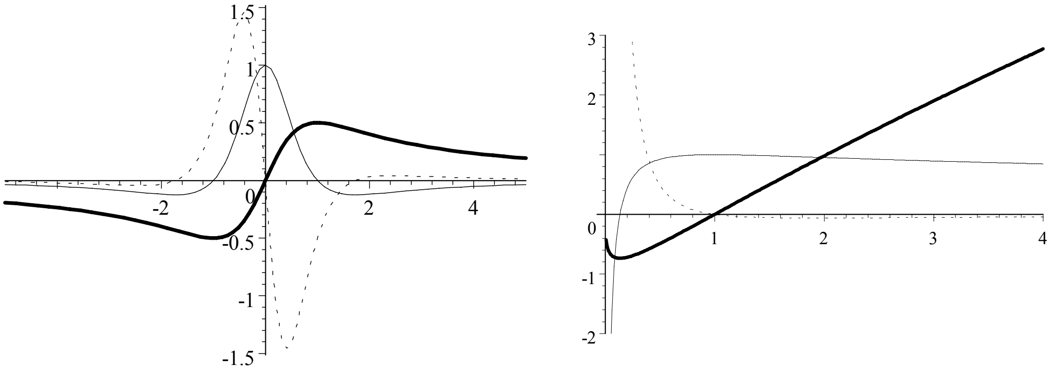
Przykład 13.51 *Wyznaczyć przedziały monotoniczności poniższych funkcji i podać rodzaj monotoniczności:*

$$\begin{aligned} &a)\ y_1(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad && b)\ y_2(x) = \sqrt{x}\ln x \\ &c)\ y_3(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3 \qquad && d)\ y_4(x) = x^2\left(x^2-9\right)^3 \end{aligned} \tag{596}$$

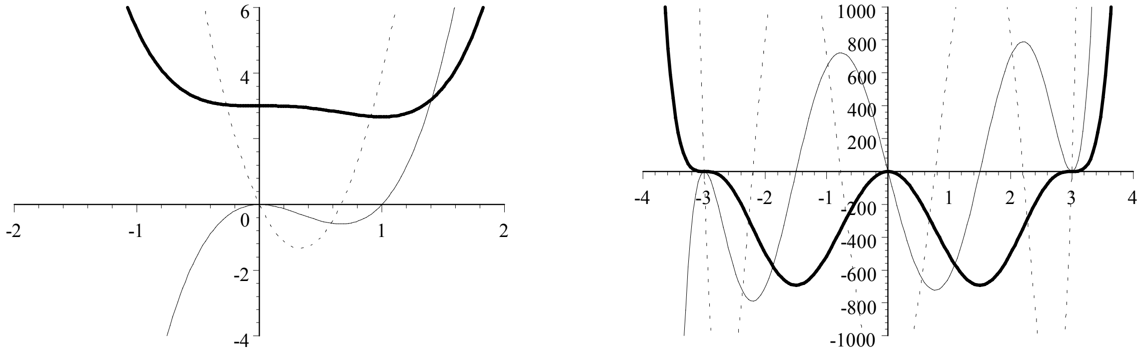
Rozwiązanie 13.51 *Na rysunkach 93 i 94 przedstawiono przebiegi funkcji (linia ciągła pogrubiona) oraz ich pierwszych (linia ciągła cienka) i drugich (linia przerywana) pochodnych. Na podstawie miejsc zerowych pochodnych (o ile istnieją) można lokalizować ekstrema i punkty przegięcia badanych funkcji.*

$$y_1(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad y_1'(x) = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \qquad y_1''(x) = \frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$$

$$y_2(x) = \sqrt{x}\ln x \qquad y_2'(x) = \frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}} \qquad y_2''(x) = -\frac{\ln x}{4\left(\sqrt{x}\right)^3}$$



Rysunek 93: Funkcje $y_1 = \frac{x}{1+x^2}$ i $y_2 = \sqrt{x}\ln x$.



Rysunek 94: Funkcje $y_3 = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3$ i $y_4 = x^2\left(x^2-9\right)^3$.

$y_3(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3 \qquad y_3'(x) = 4x^3 - 4x^2 \qquad y_3''(x) = 12x^2 - 8x$

$y_4 = x^2\left(x^2-9\right)^3 \qquad y_4' = 8x^7 - 162x^5 + 972x^3 - 1458x \qquad y_4'' = 56x^6 - 810x^4 + 2916x^2 - 1458$

1.

$$y_1' = -\frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} \qquad y_1' = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 1 \quad y_{1\,\min}(-1) = -\frac{1}{2} \quad y_{1\,\max}(1) = \frac{1}{2} \tag{597}$$

Funkcja jest malejąca w przedziałach: $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$; rosnąca w przedziale $x \in (-1; 1)$.

2.

$$y_2' = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} \qquad y_2' = 0 \Longleftrightarrow x = e^{-2} \quad y_{2\,\min}(e^{-2}) = -2e^{-1} \tag{598}$$

Funkcja jest malejąca w przedziale: $x \in (0; e^{-2})$; rosnąca w przedziale $x \in (e^{-2}; \infty)$.

3.

$$y_3' = 4x^3 - 4x^2 \qquad y_3' = 0 \Longleftrightarrow x_{1,2} = 0, x_3 = 1 \quad y_{3\,\min}(1) = \frac{17}{3} \tag{599}$$

Funkcja jest malejąca w przedziale: $x \in (-\infty; 1)$; rosnąca w przedziale $x \in (1; \infty)$.

4.

$$y_4' = 8x^7 - 162x^5 + 972x^3 - 1458x$$

$$y_4' = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = -3, x_{4,5} = 3, x_6 = -\tfrac{3}{2}, x_7 = \tfrac{3}{2} \tag{600}$$

$$y_{4\,\max}(0) = 0 \qquad y_{4\,\min}\left(-\tfrac{3}{2}\right) = -\tfrac{177147}{256} \qquad y_{4\,\min}\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{177147}{256}$$

Funkcja jest malejąca w przedziałach: $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(0; \frac{3}{2}\right)$*; rosnąca w przedziałach* $x \in \left(-\frac{3}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$.

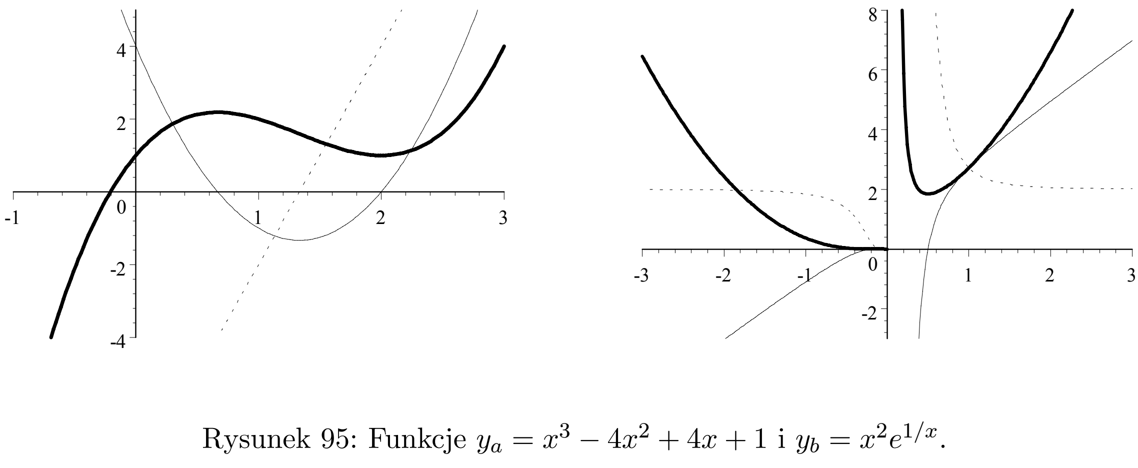
Przykład 13.52 *Zbadać funkcje i sporządzić ich wykresy.*

$$\begin{array}{lll} y_a = x^3 - 4x^2 + 4x + 1 & y_b = x^2 e^{1/x} & y_c = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2} \\ y_d = x e^{-x^2/2} & y_e = x e^{-x} & y_f = x - \ln(x+1) \\ y_g = x e^{1/x} & y_h = \frac{2x-1}{(x-1)^2} & y_i = x + \frac{\ln x}{x} \\ y_j = x + \sin x & y_k = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} & y_l = x - \frac{4}{x^2} \end{array} \tag{601}$$

Rozwiązanie 13.52 *(Wykresy, ekstrema, punkty przegięcia, asymptoty)*[47]

a) (patrz rysunek 95)

	Funkcja	*1 pochodna*	*2 pochodna*
	$y_a = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$	$y_a' = 3x^2 - 8x + 4$	$y_a'' = 6x - 8$
Asymptoty	–	–	–
	$y_b = x^2 e^{1/x}$	$y_b' = (2x-1)e^{1/x}$	$y_b'' = \frac{2x^2-2x+1}{x^2} e^{1/x}$
Asymptoty	–	$y = 2x - 1$	$y = 2$

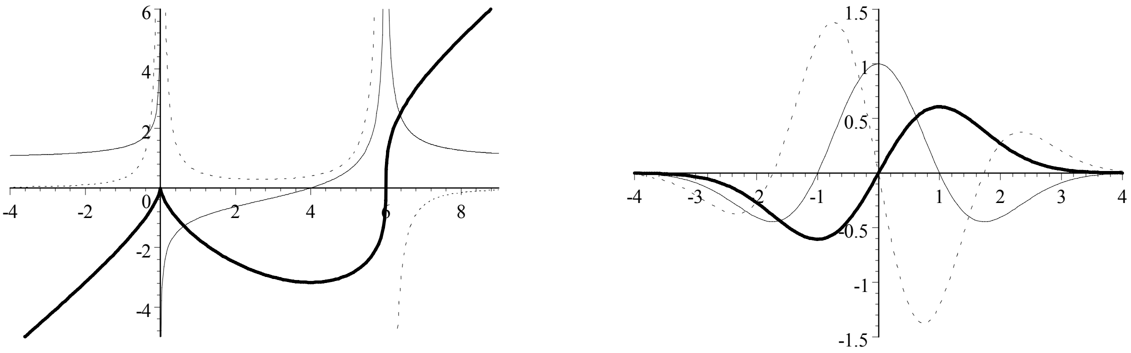


Rysunek 95: Funkcje $y_a = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ i $y_b = x^2 e^{1/x}$.

[47] Podobnie, jak w poprzednim przykładzie przedstawiono przebiegi funkcji (linia ciągła pogrubiona) oraz ich pierwszych (linia ciągła cienka) i drugich (linia przerywana) pochodnych.

b) (patrz rysunek 96)

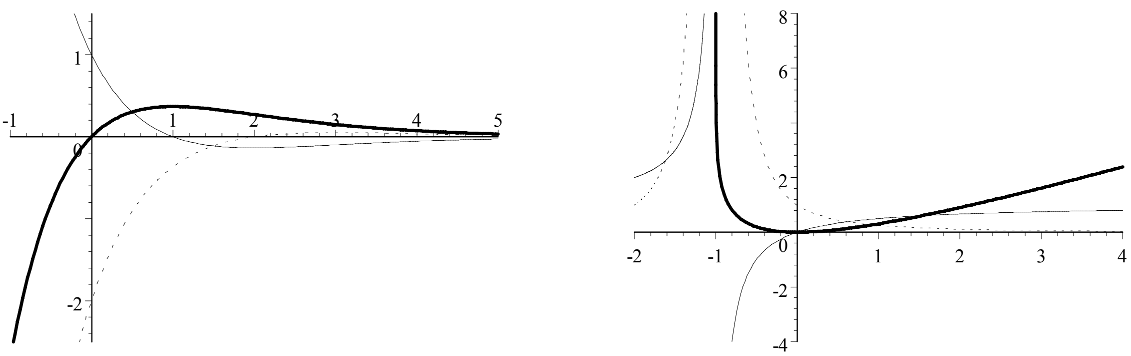
	Funkcja	1 *pochodna*	2 *pochodna*
	$y_c = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$	$y_c' = \frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}}$	$y_c'' = -\frac{8}{\sqrt[3]{x^4(x-6)^5}}$
Asymptoty	$y = x - 2$	$y = 1,\ x = 0,\ x = 6$	$y = 0,\ x = 0,\ x = 6$
	$y_d = xe^{-x^2/2}$	$y_d' = (1 - x^2)\, e^{-x^2/2}$	$y_d'' = x(x^2 - 3)e^{-x^2/2}$
Asymptoty	$y = 0$	$y = 0$	$y = 0$



Rysunek 96: Funkcje $y_c = \left(x^3 - 6x^2\right)^{1/3}$ i $y_d = xe^{-x^2/2}$.

c) (patrz rysunek 97)

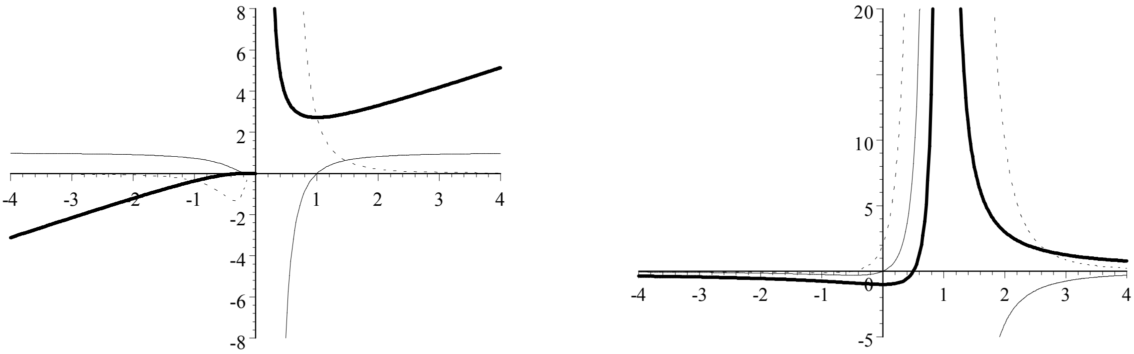
	Funkcja	1 *pochodna*	2 *pochodna*
	$y_e = xe^{-x}$	$y_e' = (1 - x)\, e^{-x}$	$y_e'' = (x - 2)e^{-x}$
Asymptoty	$y = 0^+$	$y = 0^+$	$y = 0^+$
	$y_f = x - \ln(x + 1)$	$y_f' = \frac{x}{x+1}$	$y_f'' = \frac{1}{(x+1)^2}$
Asymptoty	$x = -1$	$y = 1,\ x = -1$	$y = 0,\ x = -1$



Rysunek 97: Funkcje $y_e = xe^{-x}$ i $y_f = x - \ln(x + 1)$.

d) (patrz rysunek 98)

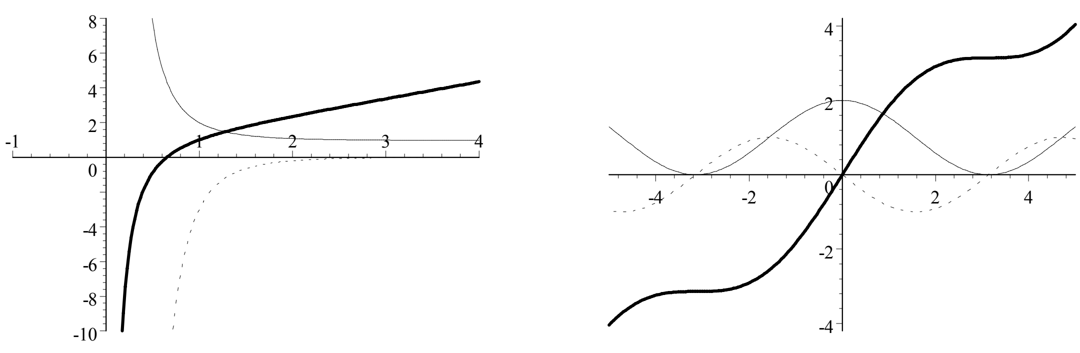
	Funkcja	*1 pochodna*	*2 pochodna*
	$y_g = xe^{1/x}$	$y_g' = e^{1/x}\frac{x-1}{x}$	$y_g'' = e^{1/x}x^{-3}$
Asymptoty	$y = x+1,\ x = 0$	$y = 1,\ x = 0$	$y = 0,\ x = 0$
	$y_h = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$	$y_h' = -\frac{2x}{(x-1)^3}$	$y_h'' = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$
Asymptoty	$y = 0,\ x = 1$	$y = 0,\ x = 1$	$y = 0,\ x = 1$



Rysunek 98: Funkcje $y_g = xe^{1/x}$ i $y_h = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

e) (patrz rysunek 99)

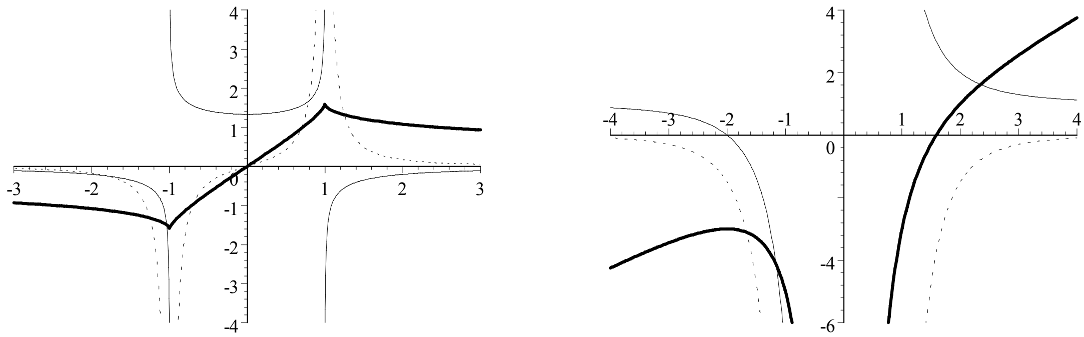
	Funkcja	*1 pochodna*	*2 pochodna*
	$y_i = x + \frac{\ln x}{x}$	$y_i' = \frac{x^2+1-\ln x}{x^2}$	$y_i'' = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$
Asymptoty	$y = x$	$y = 1,\ x = 0$	$y = 0,\ x = 0$
	$y_j = x + \sin x$	$y_j' = 1 + \cos x$	$y_j'' = -\sin x$
Ograniczenia	$y = x \pm 1;\ y_{\mathrm{pp}} = x$		



Rysunek 99: Funkcje $y_i = x + \frac{\ln x}{x}$ i $y_j = x + \sin x$.

f) (patrz rysunek 100)

	Funkcja	*1 pochodna*	*2 pochodna*
	$y_k = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$	$y_k' = \frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x+1}}$	$y_k'' = \frac{\frac{2}{9}}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} - \frac{\frac{2}{9}}{\sqrt[3]{(x+1)^4}}$
Asymptoty		$y = 0,\ x = \pm 1$	$y = 0,\ x = \pm 1$
	$y_l = x - 4/x^2$	$y_l' = \frac{x^3+8}{x^3}$	$y_l'' = -\frac{24}{x^4}$
Ograniczenia	$y = x$	$y = 1$	$y = 0,\ x = 0$



Rysunek 100: Funkcje $y_k = (x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3}$ i $y_l = x - \frac{4}{x^2}$.

Funkcja	**Ekstrema**	**Wartość** y
$y_a = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$	$x_{\max} = \frac{2}{3}$ $\quad x_{\min} = 2$	$y(x_{\max}) = \frac{59}{27}$ $\quad y(x_{\min}) = 1$
$y_b = x^2 e^{1/x}$	$x_{\min} = \frac{1}{2}$	$y(x_{\min}) = \frac{1}{4}e^2$
$y_c = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$	$x_{\max} = 0$ $\quad x_{\min} = 4$	$y(x_{\max}) = 0$ $\quad y(x_{\min}) = -\sqrt[3]{32}$
$y_d = xe^{-x^2/2}$	$x_{\max} = 1$ $\quad x_{\min} = -1$	$y(x_{\max}) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ $\quad y(x_{\min}) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$
$y_e = xe^{-x}$	$x_{\max} = 1$	$y(x_{\max}) = \frac{1}{e}$
$y_f = x - \ln(x+1)$	$x_{\min} = 0$	$y(x_{\min}) = 0$
$y_g = xe^{1/x}$	$x_{\min} = 1$	$y(x_{\min}) = e$
$y_h = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$	$x_{\min} = 0$	$y(x_{\min}) = -1$
$y_i = x + \frac{\ln x}{x}$	nie ma	
$y_j = x + \sin x$	$x_{\min} = \pi$ – lokalne	$y(x_{\min}) = \pi$
$y_k = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$	$x_{\max} = 1$ $\quad x_{\min} = -1$	$y(x_{\max}) = \sqrt[3]{4}$ $\quad y(x_{\min}) = -\sqrt[3]{4}$
$y_l = x - \frac{4}{x^2}$	$x_{\max} = -2$	$y(x_{\max}) = -3$

Tablica 3: Funkcje i ich ekstrema.

Funkcja	**Pierwsza pochodna**	$y' = 0$
$y_a = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$	$y'_a = 3x^2 - 8x + 4$	$x_1 = \frac{2}{3} \quad x_2 = 2$
$y_b = x^2 e^{1/x}$	$y'_b = (2x-1)e^{1/x}$	$x = \frac{1}{2}$
$y_c = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$	$y'_c = \frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}}$	$x = 4$
$y_d = xe^{-x^2/2}$	$y'_d = \left(1 - x^2\right) e^{-x^2/2}$	$x_1 = -1 \quad x_2 = 1$
$y_e = xe^{-x}$	$y'_e = (1-x)e^{-x}$	$x = 1$
$y_f = x - \ln(x+1)$	$y'_f = \frac{x}{x+1}$	$x = 0$
$y_g = xe^{1/x}$	$y'_g = e^{1/x}\frac{x-1}{x}$	$x = 1$
$y_h = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$	$y'_h = -\frac{2x}{(x-1)^3}$	$x = 0$
$y_i = x + \frac{\ln x}{x}$	$y'_i = \frac{x^2+1-\ln x}{x^2}$	nie ma $y' \neq 0$
$y_j = x + \sin x$	$y'_j = 1 + \cos x$	$x = \pm(2k-1)\pi$
$y_k = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$	$y'_k = \dfrac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x+1}}$	nie ma $y' \neq 0$
$y_l = x - \dfrac{4}{x^2}$	$y'_l = \frac{x^3+8}{x^3}$	$x = -2$

Tablica 4: Funkcje i miejsca zerowe pierwszych pochodnych.

Funkcja	**Druga pochodna**	$y'' = 0 \quad y(x_{\mathrm{pp}})$
$y_a = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$	$y''_a = 6x - 8$	$x = \frac{4}{3} \quad y = \frac{43}{27}$
$y_b = x^2 e^{1/x}$	$y''_b = \frac{2x^2-2x+1}{x^2}e^{1/x}$	nie ma $y'' \neq 0$
$y_c = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$	$y''_c = -\frac{8}{\sqrt[3]{(x-6)^5}\sqrt[3]{x^4}}$	nie ma $y'' \neq 0$
$y_d = xe^{-x^2/2}$	$y''_d = x(x^2 - 3)e^{-x^2/2}$	$x_1 = -\sqrt{3}$ $x_2 = \sqrt{3}$ $x_3 = 0$
$y_e = xe^{-x}$	$y''_e = (x-2)e^{-x}$	$x = 2$
$y_f = x - \ln(x+1)$	$y''_f = \frac{1}{(x+1)^2}$	nie ma $y'' \neq 0$
$y_g = xe^{1/x}$	$y''_g = e^{1/x}x^{-3}$	nie ma $y'' \neq 0$
$y_h = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$	$y''_h = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$	$x = -\frac{1}{2}$
$y_i = x + \frac{\ln x}{x}$	$y''_i = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$	$x = e^{3/2}$
$y_j = x + \sin x$	$y''_j = -\sin x$	$x = \pm k\pi$ [48]
$y_k = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$	$y''_k = \frac{\frac{2}{9}}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} - \frac{\frac{2}{9}}{\sqrt[3]{(x+1)^4}}$	$x = 0 \quad y = 0$
$y_l = x - \dfrac{4}{x^2}$	$y''_l = -\frac{24}{x^4}$	nie ma $y'' \neq 0$

Tablica 5: Funkcje i miejsca zerowe drugich pochodnych.

Funkcja	**Punkty nieciągłości pochodnych**
$y_b(x)$	$x = 0$
$y_c(x)$	$x_1 = 0, x_2 = 6$
$y_f(x)$	$x = -1$
$y_g(x)$	$x = 0$
$y_h(x)$	$x = 1$
$y_i(x)$	$x = 0$
$y_k(x)$	$x_1 = -1, x_2 = 1$
$y_l(x)$	$x = 0$

Tablica 6: Punkty nieciągłości pochodnych.

W ostatniej tabeli wymieniono punkty, w których nie istnieją pochodne rozważanych funkcji.

13.15 Tabele zmienności funkcji analizowanych w Przykładzie 13.52

Zmienność funkcji $y_a(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$

$y_a(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 1 \to Df = \mathcal{R}$										
x	$-\infty$	$\dots$	$\frac{2}{3}$	$\dots$	$\frac{4}{3}$	$\dots$	2	$\dots$	∞
$y_a'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$y_a''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$y_a(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\max = \frac{59}{27}$	$\searrow$	$\text{pp} = \frac{43}{27}$	$\searrow$	$\min = 1$	$\nearrow$	∞
	funkcja wklęsła				pp	funkcja wypukła			

Tablica 7: Tabela zmienności funkcji $y_a = x^3 - 4x^2 + 4x + 1$.

Zmienność funkcji $y_b(x) = x^2 e^{1/x}$

$y_b(x) = x^2 e^{1/x} \to Df = \mathcal{R} - \{0\}$										
x	$-\infty$	$\dots$	0		$\dots$	$\frac{1}{2}$	$\dots$	∞	Asymptoty
$y_b'(x)$	$-$	$-$	0	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$	$y = 2x + 1$
$y_b''(x)$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$x = 0^+$
$y_b(x)$	∞	$\searrow$	0	∞	$\searrow$	$\min = \frac{1}{4}e^2$	$\nearrow$	∞	$x = 0^+$
	f. wypukła			funkcja wypukła					

Tablica 8: Tabela zmienności funkcji $y_b = x^2 e^{1/x}$.

[49][50]

[49] Zapis $\mathcal{R}- \{0\}$ jest równoważny zapisowi $\mathcal{R}\setminus \{0\}$.

[50] W punkcie $x = 0$ pierwsza i druga pochodna funkcji $y_b(x) = x^2 e^{1/x}$ nie istnieje. Funkcje opisujące te pochodne nie są ciągłe w $x = 0$.

Zmienność funkcji $y_c(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$

$y_c(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2} \to Df = \mathcal{R}$												
x	$-\infty$	$\dots$	0		$\dots$	4	$\dots$	6		$\dots$	∞	Asymptoty
$y'_c(x)$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$x = 0 \quad x = 6$
$y''_c(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$x = 0 \quad x = 6$
$y_c(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0		$\searrow$	min $-\sqrt[3]{32}$	$\nearrow$	0		$\nearrow$	∞	$y = x - 2$
	funkcja wypukła								f. wklęsła			

Tablica 9: Tabela zmienności funkcji $y_c = \left(x^3 - 6x^2\right)^{1/3}$.

[51]

Zmienność funkcji $y_d(x) = xe^{-x^2/2}$

$y_d(x) = xe^{-x^2/2} \to Df = \mathcal{R}$													
x	$-\infty$	$\dots$	$-\sqrt{3}$	$\dots$	-1	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$	$\sqrt{3}$	$\dots$	∞
$y'_d(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$y''_d(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$y_d(x)$	0	$\searrow$	pp $-\frac{\sqrt{3}}{e^{3/2}}$	$\searrow$	min $-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	pp 0	$\nearrow$	max $\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	pp $\frac{\sqrt{3}}{e^{3/2}}$	$\searrow$	0
	wklęsła		pp	f. wypukła			pp	f. wklęsła			pp	f. wyp.	

Tablica 10: Tabela zmienności funkcji $y_d = xe^{-x^2/2}$.

Zmienność funkcji $y_e(x) = xe^{-x}$

$y_e(x) = xe^{-x} \to Df = \mathcal{R}$										
x	$-\infty$	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$	2	$\dots$	∞	Asymptoty
$y'_e(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0^-	$y = 0$
$y''_e(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$y = 0$
$y_e(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	max $= e^{-1}$	$\searrow$	pp $= 2e^{-2}$	$\searrow$	0	$y = 0$
	funkcja wklęsła						pp	f. wypukła		

Tablica 11: Tabela zmienności funkcji $y_e = xe^{-x}$.

Zmienność funkcji $y_f(x) = x - \ln(x+1)$

$y_f(x) = x - \ln(x+1) \to Df = (-1; \infty)$						
x	-1^+	$\dots$	0	$\dots$	∞	Asymptoty
$y'_f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$x = -1^+ \quad y = 1^-$
$y''_f(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$x = -1^+ \quad y = 0^+$
$y_f(x)$	∞	$\searrow$	$\min = 0$	$\nearrow$	∞	$x = -1^+$
	funkcja wypukła					

Tablica 12: Tabela zmienności funkcji $y_f = x - \ln(x+1)$.

[51] W punktach $x = 0$ i $x = 6$ pierwsza i druga pochodna funkcji $y_c(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$ nie istnieje. Funkcje opisujące te pochodne nie są w nich ciągłe.

Zmienność funkcji $y_g(x) = xe^{1/x}$

$y_g(x) = xe^{1/x} \to Df = \mathcal{R} - \{0\}$										
x	$-\infty$	$\dots$	0		$\dots$	1	$\dots$	∞	Asymptoty
$y_g'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$x = 0^+ \quad y = 1^-$
$y_g''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$x = 0^+ \quad y = 0^+$
$y_g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	∞	$\searrow$	$\min = e$	$\nearrow$	∞	$y = x + 1$
	f. wklęsła			funkcja wypukła					

Tablica 13: Tabela zmienności funkcji $y_g = xe^{1/x}$.

52

Zmienność funkcji $y_h(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$

$y_h(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2} \to Df = \mathcal{R} - \{1\}$												
x	$-\infty$	$\dots$	$-\frac{1}{2}$	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{1}{2}$	$\dots$	1		$\dots$	∞	Asymp.
$y_h'(x)$	0^-	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	0^-	$x = 1 \quad y = 0^-$
$y_h''(x)$	0^-	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0^+	$x = 1 \quad y = 0$
$y_h(x)$	0^-	$-$	pp $-\frac{8}{9}$	$\searrow$	min -1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	0^+	$x = 1 \quad y = 0$
	wklęsła		pp	funkcja wypukła						f. wypukła			

Tablica 14: Tabela zmienności funkcji $y_h = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

53

Zmienność funkcji $y_i(x) = x + \frac{\ln x}{x}$

$y_i(x) = x + \frac{\ln x}{x} \to Df = \mathcal{R}^+ = (0; \infty)$										
x	0^+	$\dots$	0.6529	$\dots$	1	$\dots$	$e^{3/2}$	$\dots$	∞	Asymp.
$y_i'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	2	$+$	$+$	$+$	$+$	$x = 0^+ \quad y = 1$
$y_i''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	-3	$-$	0	$+$	$+$	$x = 0^+ \quad y = 0$
$y_i(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	4.82	$\nearrow$	∞	$x = 0^+ \quad y = x$
	funkcja wklęsła						pp	f. wypukła		

Tablica 15: Tabela zmienności funkcji $y_i = x + \frac{\ln x}{x}$.

[52] W punkcie $x = 0$ pierwsza i druga pochodna funkcji $y_g(x) = xe^{1/x}$ nie istnieje. Funkcje opisujące te pochodne nie są w nim ciągłe.

[53] W punkcie $x = 1$ pierwsza i druga pochodna funkcji $y_h(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ nie istnieje. Funkcje opisujące te pochodne nie są w nim ciągłe.

Zmienność funkcji $y_j(x) = x + \sin x$

$y_j(x) = x + \sin x \rightarrow Df = \mathcal{R}$											
x	$-\infty$	$\ldots$	$-\pi$	$\ldots$	0	$\ldots$	π	$\ldots$	∞	Asymp.
$y_j'(x)$	$\cdots$	$+$	0	$+$	2	$+$	0	$+$	$\cdots$	
$y_j''(x)$	$\cdots$	$\pm$	0	$+$	0	$-$	0	$\pm$	$\cdots$	
$y_j(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	pp min $-\pi$ $-\pi$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	pp max π π	$\nearrow$	∞	$y = x + 1$ $y = x - 1$ $y_{\text{pp}} = x$
			f. wypukła			f. wklęsła				

Tablica 16: Tabela zmienności funkcji $y_j = x + \sin x$.

Asymptot nie ma. Można jednak wyznaczyć funkcje, pomiędzy którymi znajduje się $y_j(x)$. Są to: $y = x + 1, y = x - 1$. Punkty przegięcia leżą na $y_{\text{pp}} = x$.

Zmienność funkcji $y_k = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$

$y_k = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \rightarrow Df = \mathcal{R}$										
x	$-\infty$	$\ldots$	-1	$\ldots$	0	$\ldots$	1	$\ldots$	∞	Asymp.
$y_k'(x)$	0^-	$-$	$\rightsquigarrow$	$+$	$\frac{4}{3}$	$+$	$\rightsquigarrow$	$-$	0^-	$x = -1 \quad x = 1$
$y_k''(x)$	0^-	$-$	$\rightsquigarrow$	$-$	0	$+$	$\rightsquigarrow$	$+$	0^+	$x = -1 \quad x = 1$
$y_k(x)$	0^-	$\searrow$	min $-\sqrt[3]{4}$	$\nearrow$	pp 0	$\nearrow$	max $\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0^+	$y = 0$
	funkcja wklęsła					funkcja wypukła				

Tablica 17: Tabela zmienności funkcji $y_k = (x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3}$.

[54]

Zmienność funkcji $y_l = x - 4/x^2$

$y_l = x - 4/x^2 \rightarrow Df = \mathcal{R} - \{0\}$										
x	$-\infty$	$\ldots$	-2	$\ldots$	0	$\ldots$	$\sqrt[3]{4}$	$\ldots$	∞	Asymp.
$y_l'(x)$	1^-	$+$	0	$-$	$\rightsquigarrow$	$+$	$+$	$+$	1^+	$y = 1 \quad x = 0$
$y_l''(x)$	0^-	$-$	$-$	$-$	$\rightsquigarrow$	$-$	$-$	$-$	0^-	$y = 0 \quad x = 0$
$y_l(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	max -3	$\searrow$	$\searrow_{-\infty} \quad {}_{-\infty}\nearrow$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞	$x = 0$
	funkcja wklęsła				$\rightsquigarrow$	funkcja wklęsła				

Tablica 18: Tabela zmienności funkcji $y_l = x - \frac{4}{x^2}$.

[55]

[54]W punktach $x = -1$ i $x = 1$ pierwsza i druga pochodna funkcji $y_k = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ nie istnieje. Funkcje opisujące te pochodne nie są w nich ciągłe.

[55]W punkcie $x = 0$ pierwsza i druga pochodna funkcji $y_l = x - 4/x^2$ nie istnieje. Funkcje opisujące te pochodne nie są w nim ciągłe.

14 Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych.

14.1 Definicja funkcji dwóch zmiennych i $n-$ zmiennych

Na wstępie podamy definicję funkcji dwóch zmiennych.

Definicja 14.1 *(Funkcji dwóch zmiennych)*

1. *Funkcja f dwóch zmiennych x_1, x_2 odwzorowująca zbiór $X \subset \mathcal{R}^2$ w zbiór $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}$ jest przyporządkowaniem każdemu punktowi $P(x_1, x_2) \in X$ dokładnie jednej liczby $z \in \mathcal{U}$. Piszemy przy tym*
$$f : X \to \mathcal{U}$$
lub $z = f(x_1, x_2)$ dla $(x_1, x_2) \in X$ lub $z = f(P)$ dla $P \in X$.

2. *Zbiór X jest dziedziną funkcji f (symbol Df). Jeżeli funkcja f jest określona wzorem i jej dziedzina nie jest podana, to przyjmujemy, że jest nią zbiór wszystkich punktów $P(x_1, x_2)$, dla których wzór ten ma sens liczbowy. Jest to tak zwana **dziedzina naturalna** funkcji f.*

3. *Zbiór wszystkich wartości, jakie przyjmuje funkcja f w swojej dziedzinie jest **przeciwdziedziną** tej funkcji (symbol $\mathcal{R}f$).*

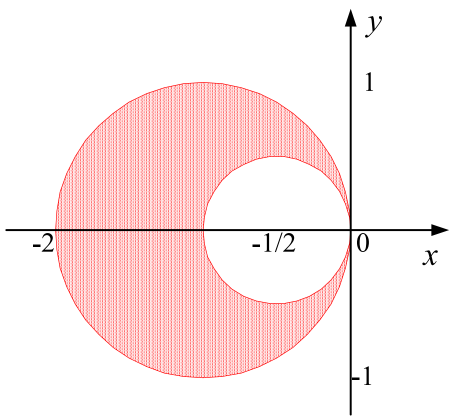
Uwaga 14.1 *Symbole x_1, x_2 oznaczają **zmienne niezależne**, zaś $z-$ **zmienną zależną**. W przypadku rozpatrywanej funkcji dwóch zmiennych, zmienne niezależne oznaczać będziemy literami x i y.*

Przeanalizujemy poniższy przykład.

Przykład 14.1 *Wyznaczyć dziedzinę naturalną funkcji* $z = \sqrt{\frac{x}{x^2+y^2+2x} - 1}$.

Rozwiązanie 14.1 *Mamy tu* $f(x,y) = \sqrt{\frac{x}{x^2+y^2+2x} - 1}$. *A więc* $(x,y) \in Df \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+y^2+2x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+x^2+y^2}{x^2+y^2+2x} \leq 0 \Leftrightarrow x+x^2+y^2 \geq 0 \wedge x^2+y^2+2x < 0$. *Zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy* $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{4} \wedge (x+1)^2 + y^2 < 1$. *Oznacza to, że do dziedziny naturalnej Df analizowanej funkcji należą wszystkie te i tylko te punkty płaszczyzny (x,y), które nie należą do wnętrza koła o środku w punkcie $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ i promieniu $\frac{1}{2}$ i jednocześnie są punktami wewnętrznymi koła o środku w punkcie $(-1,0)$ i promieniu 1 (patrz rys. 101).*

Odp. $\left\{(x,y) : \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{4} \wedge (x+1)^2 + y^2 < 1\right\}$.



Rysunek 101: Rozwiązanie przykładu.

Definicja 14.2 *(Odległości w $\mathcal{R}^2$)*

Odległość ρ_{AB} punktów $A(a_1, a_2)$ i $B(b_1, b_2)$ w przestrzeni $\mathcal{R}^2$ określamy wzorem

$$AB = \rho_{AB} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \tag{602}$$

Definicja 14.3 *(Otoczenia w $\mathcal{R}^2$)*
Otoczeniem kołowym (otoczeniem) $U(P_0; r)$ punktu $P_0 \in \mathcal{R}^2$ o promieniu $r > 0$ jest zbiór wszystkich punktów $P \in \mathcal{R}^2$, dla których

$$\rho_{P_0P} < r \tag{603}$$

Definicja 14.4 *Otoczeniem prostokątnym punktu P_0 o bokach $2p$ i $2q$, $p > 0$, $q > 0$, nazywamy zbiór punktów $P = (x, y)$ spełniających nierówności*

$$|x - x_0| < p \qquad |y - y_0| < q \tag{604}$$

Definicja 14.5 *(Sąsiedztwa w $\mathcal{R}^2$)*
Sąsiedztwem kołowym (sąsiedztwem) $S(P_0; r)$ punktu $P_0 \in \mathcal{R}^2$ o promieniu $r > 0$ jest zbiór wszystkich punktów $P \in \mathcal{R}^2$, dla których

$$0 < \rho_{P_0P} < r \tag{605}$$

Definicja 14.6 *Sąsiedztwem prostokątnym punktu P_0 o bokach $2p$ i $2q$, $p > 0$, $q > 0$, nazywamy zbiór punktów $P = (x, y)$ spełniających nierówności*

$$0 < |x - x_0| < p \qquad 0 < |y - y_0| < q \tag{606}$$

Definicja 14.7 *Punkt P nazywamy **punktem wewnętrznym** zbioru $\mathcal{E}$, jeżeli pewne otoczenie punktu P zawiera się w $\mathcal{E}$. Zbiór punktów wewnętrznych zbioru $\mathcal{E}$ nazywamy **wnętrzem** zbioru $\mathcal{E}$.*

Definicja 14.8 *Punkt P nazywamy **punktem zewnętrznym** zbioru $\mathcal{E}$, jeżeli otoczenie zbioru P jest rozłączne ze zbiorem $\mathcal{E}$. Zbiór punktów zewnętrznym względem zbioru $\mathcal{E}$ nazywamy **zewnętrzem** zbioru $\mathcal{E}$.*

Definicja 14.9 *(Funkcji ograniczonej)*
*Funkcję $f(P)$ nazywamy **ograniczoną** w zbiorze X, jeżeli istnieje taka liczba M, że dla każdego $P(x, y) \in X$ spełniona jest nierówność: $|f(P)| \leq M$.*

Jeżeli $n = 3$, to zmienne niezależne x_1, x_2, x_3 najczęściej oznaczamy literami x, y, z, natomiast zmienną zależną opisujemy inną literą, np. u, v lub f. Zachodzi wówczas $P(x, y, z) \in X$, $X \in \mathcal{R}^3$ oraz $u, v, f \in \mathcal{U}$.

Przestrzeń $\mathcal{R}^2$ z odległością (602) nazywamy $2-$*wymiarową przestrzenią euklidesową.*

Definicja 14.10 *(Funkcji n zmiennych)*
Funkcja f, n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, odwzorowująca zbiór $X \subset \mathcal{R}^n$ w zbiór $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}$ jest przyporządkowaniem każdemu punktowi $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ dokładnie jednej liczby $f \in \mathcal{U}$. Piszemy przy tym

$$f : X \to \mathcal{U} \tag{607}$$

lub $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dla $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ lub $u = f(P)$ dla $P \in X$.

Definicja 14.11 *(Odległości w $\mathcal{R}^n$)*
Odległość ρ_{AB} punktów $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ w przestrzeni $\mathcal{R}^n$ określamy wzorem

$$\rho_{AB} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2} \tag{608}$$

Definicja 14.12 *(Otoczenia w $\mathcal{R}^n$)*

Otoczeniem $U(P_0; r)$ punktu $P_0 \in \mathcal{R}^n$ o promieniu $r > 0$ jest zbiór wszystkich punktów $P \in \mathcal{R}^n$, dla których

$$\rho_{P_0 P} < r \tag{609}$$

Definicja 14.13 *(Sąsiedztwa w $\mathcal{R}^n$)*

Sąsiedztwem $S(P_0; r)$ punktu $P_0 \in \mathcal{R}^n$ o promieniu $r > 0$ jest zbiór wszystkich punktów $P \in \mathcal{R}^n$, dla których

$$0 < \rho_{P_0 P} < r \tag{610}$$

14.2 Granica funkcji dwóch zmiennych

Niech będzie dany ciąg (P_n), $n = 1, 2, \ldots$ punktów przestrzeni $\mathcal{R}^2$ i niech P_0 będzie punktem tej przestrzeni.

Definicja 14.14 *(Granicy)*

Mówimy, że ciąg (P_n) punktów jest zbieżny do punktu P_0, albo, że granicą ciągu (P_n) jest P_0, co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \tag{611}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg odległości punktów P_n od punktu P_0 jest zbieżny do 0, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{P_n P_0} = 0 \tag{612}$$

Twierdzenie 14.1 *Jeżeli $P_n(x_n, y_n)$ i $P_0(a, b)$ dla $n \in \mathcal{N}$, to $P_n \to P_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy*[56]

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad i \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b \tag{613}$$

Niech funkcja f będzie funkcją określoną w zbiorze $\mathcal{Z}$ i niech P_0 będzie punktem skupienia tego zbioru.

Definicja 14.15 *(Heinego granicy funkcji dwóch zmiennych)*

Liczbę g nazywamy granicą funkcji $f(P)$ w punkcie P_0 i piszemy

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = g \quad lub \quad \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = g \tag{614}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu punktów (P_n), $P_n \in \mathcal{Z}, P_n \neq P_0$ zbieżnego do P_0 ciąg $(f(P_n))$ jest zbieżny do g.

Z definicji granicy w sensie Heinego wynika, że funkcja $f(x, y)$ określona w pewnym sąsiedztwie punktu (a, b) **ma w tym punkcie granicę** równą liczbie g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu punktów (x_n, y_n) z sąsiedztwa (a, b) i takiego, że $x_n \to a$, $y_n \to b$, ciąg $f(x_n, y_n) \to g$.

[56] Zapis $P_n \to P_0$ oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$.

Definicja 14.16 *(Cauchy'ego granicy funkcji dwóch zmiennych)*

Liczbę g nazywamy granicą funkcji $f(P)$ w punkcie P_0, co zapisujemy $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba δ, że dla każdego punktu $P \in S(P_0;\delta)$ wartości funkcji $f(P)$ różnią się od liczby g mniej niż o ε, tzn.

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = g \Leftrightarrow \forall\varepsilon\ \exists\delta > 0\ \forall P \in S\ (0 < \rho_{PP_0} < \delta) \Rightarrow (|f(P) - g| < \varepsilon \tag{615}$$

Z definicji granicy w sensie Cauchy'ego wynika, że funkcja $f(x, y)$ określona w pewnym otoczeniu punktu (a, b) **jest w tym punkcie ciągła**, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdego punktu (x, y) z tego otoczenia z zachodzenia nierówności $|x - a| < \delta$ oraz $|y - b| < \delta$ wynika, że $|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$. Oczywiście powyższy warunek jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Uwaga 14.2 *(O równoważności definicji granic funkcji dwóch zmiennych)*

1. *Definicje Cauchy'ego i Heinego granicy funkcji dwóch zmiennych są równoważne.*
2. *Granicę funkcji dwóch zmiennych nazywamy także **granicą** 2− **krotną** lub **granicą podwójną**.*

Definicja 14.17 *(Granic niewłaściwych funkcji dwóch zmiennych według Heinego)*

Jeżeli dla każdego ciągu (P_n) punktów, spełniających warunki podane w Definicji Heinego, odpowiadający mu ciąg wartości $(f(P_n))$ jest rozbieżny do $+\infty$ $(-\infty)$, to mówimy, że rozważana funkcja ma w punkcie P_0 granicę niewłaściwą $+\infty$ $(-\infty)$ i piszemy

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = +\infty \quad lub \quad \lim_{P\to P_0} f(P) = -\infty \tag{616}$$

Definicja 14.18 *(Granicy niewłaściwej $+\infty$ według Cauchy'ego)*

Liczba g jest granicą niewłaściwą $+\infty$ funkcji f w punkcie P_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall A\ \exists\delta > 0\ \forall P \in S\ \big(0 < \rho_{PP_0} < \delta\big) \Rightarrow (f(P) > A) \tag{617}$$

Definicja 14.19 *(Granicy niewłaściwej $-\infty$ według Cauchy'ego)*

Liczba g jest granicą niewłaściwą $-\infty$ funkcji f w punkcie P_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall A\ \exists\delta > 0\ \forall P \in S\ \big(0 < \rho_{PP_0} < \delta\big) \Rightarrow (f(P) < A) \tag{618}$$

Definicja 14.20 *(Granicy iterowanej)*

Jeżeli istnieje liczba

$$\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x, y)\right] \quad lub \quad \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x, y)\right] \tag{619}$$

*to nazywamy ją **granicą iterowaną** funkcji $f(x, y)$, gdy najpierw $y \to y_0$, a następnie $x \to x_0$ (lub odwrotnie).*

Uwaga 14.3 ***Z istnienia granic iterowanych nie wynika istnienie granicy podwójnej.***

Przykład 14.2 *Obliczyć* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4-y^4}{x+y}$.

Rozwiązanie 14.2 *Dziedziną naturalną* Df *funkcji* $f(x,y)=\frac{x^4-y^4}{x+y}$ *jest suma dwóch półpłaszczyzn:* $x+y<0$ *i* $x+y>0$. *Punkt* $P_0(0,0)$ *jest punktem skupienia zbioru* Df. *Rozważmy dowolny ciąg* $(P_k)=((x_k,y_k))$ *punktów zbioru* Df, *zbieżny do punktu* $P_0(0,0)$, *tzn. taki, że* $x_k\to 0$ *i* $y_k\to 0$. *Ponieważ* $f(P_k)=\frac{x_k^4-y_k^4}{x_k+y_k}=(x_k-y_k)(x_k^2+y_k^2)$, *więc na mocy Definicji 14.15 (Heinego) mamy*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4-y^4}{x+y}=\lim_{k\to\infty}(x_k-y_k)\left(x_k^2+y_k^2\right)=0 \tag{620}$$

Odp. Granica jest równa 0.

Przykład 14.3 *Wykazać, że granica podwójna*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2} \tag{621}$$

nie istnieje.

Rozwiązanie 14.3 *Rozważmy dwa ciągi punktów:*

$$(P_k^1)=\left(\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\right) \quad i \quad (P_k^2)=\left(\left(0,\frac{1}{k}\right)\right) \tag{622}$$

zbieżne do punktu $P_0(0,0)$. *Ponieważ* $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}$, *to po podstawieniu (622) mamy:*

$$\begin{aligned} f\left(P_k^1\right) &= \frac{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}}=\frac{\frac{2}{k^2}}{\frac{1}{k^2}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 2 \\ f\left(P_k^2\right) &= \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned} \tag{623}$$

Przykład 14.4 *Wyznaczyć granice iterowane funkcji z Przykładu 14.3.*

Rozwiązanie 14.4 *Mamy*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}\right] &= \lim_{x\to 0} 1 = 1 \\ \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}\right] &= \lim_{y\to 0} 1 = 1 \end{aligned} \tag{624}$$

Przykład 14.5 *Wyznaczyć granice iterowane funkcji*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2-xy+y^2} \tag{625}$$

Rozwiązanie 14.5 *Mamy*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2-xy+y^2}\right] &= \lim_{x\to 0} 1 = 1 \\ \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2-xy+y^2}\right] &= \lim_{y\to 0}(-1) = -1 \end{aligned} \tag{626}$$

Przykład 14.6 *Dana jest funkcja*

$$f(x,y) = \left[x^2+(y-1)^2\right]\cos\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y-1} \tag{627}$$

Zbadać istnienie granicy podwójnej w punkcie $P_0(0,1)$ oraz granic iterowanych

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 1} f(x,y)\right] \quad i \quad \lim_{y\to 1}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right] \tag{628}$$

Rozwiązanie 14.6 *Zbiór $Df = \{(x,y) : x \neq 0 \wedge y \neq 1\}$ jest dziedziną naturalną funkcji (627). Punkt $P_0(0,1)$ jest punktem skupienia tego zbioru. Weźmy dowolny ciąg $(P_k) = ((x_k, y_k))$ punktów zbioru Df, zbieżny do punktu $P_0(0,1)$, tzn. taki, że $x_k \to 0$ i $y_k \to 1$. Ponieważ*

$$0 \leq \left|\left[x^2+(y-1)^2\right]\cos\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y-1}\right| \leq |x|^2 + |y-1|^2$$

więc

$$0 \leq |f(x_k,y_k)| \leq |x_k|^2 + |y_k-1|^2$$

Stąd na mocy twierdzenia o trzech ciągach mamy:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\left[x^2+(y-1)^2\right]\cos\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y-1} = 0$$

Natomiast zauważmy, że dla funkcji

$$f(x,y) = x^2\cos\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y-1} + (y-1)^2\cos\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y-1}$$

przy ustalonym x nie istnieje granica $\lim\limits_{y\to 1} f(x,y)$, ponieważ $\lim\limits_{y\to 1}\cos\frac{1}{y-1}$ nie istnieje. Oznacza to, że pierwsza z granic iterowanych nie istnieje. Podobnie przy ustalonym y nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, ponieważ $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ nie istnieje. Stąd wynika, że druga z granic iterowanych również nie istnieje.

Odp. Granica podwójna istnieje i wynosi 0. Granice iterowane nie istnieją.

14.3 Ciągłość funkcji dwóch zmiennych

Definicję ciągłości funkcji dwóch zmiennych zapisujemy następująco:

Definicja 14.21 *(Ciągłości funkcji dwóch zmiennych)*
Funkcja $f(P)$ dwóch zmiennych jest ciągła w punkcie P_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0) \tag{629}$$

Definicja 14.22 *(Ciągłości na zbiorze)*
Funkcja $f(P)$ dwóch zmiennych jest ciągła na pewnym zbiorze $\mathcal{Z} \subset \mathcal{R}^2$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Twierdzenie 14.2 *(O lokalnym zachowaniu znaku)*
Jeżeli funkcja $f(P)$ określona na pewnym otoczeniu punktu P_0 jest w tym punkcie ciągła i

$$\begin{aligned} &f(P_0) > 0 \quad to \quad \exists\delta > 0\, \forall P \in S(P_0;\delta)\ f(P) > 0 \\ &oraz,\ je\dot{z}eli \\ &f(P_0) < 0 \quad to \quad \exists\delta > 0\, \forall P \in S(P_0;\delta)\ f(P) < 0 \end{aligned} \tag{630}$$

Twierdzenie 14.3 *(O ograniczoności funkcji)*
Jeżeli funkcja $f(P)$ jest ciągła na obszarze domkniętym i ograniczonym $\overline{D}$, to $f(P)$ jest ograniczona na obszarze $\overline{D}$.

Twierdzenie 14.4 *(Weierstrassa o osiąganiu kresów)*
Jeżeli funkcja $f(P)$ jest ciągła na obszarze domkniętym i ograniczonym $\overline{D}$, to

$$\begin{aligned} &\exists P_1 \in \overline{D} \quad f(P_1) = \sup_{P\in\overline{D}} f(P) \\ &\exists P_2 \in \overline{D} \quad f(P_2) = \inf_{P\in\overline{D}} f(P) \end{aligned} \tag{631}$$

Twierdzenie 14.5 *(Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich)*
Jeżeli funkcja $f(P)$ jest ciągła na obszarze domkniętym i ograniczonym $\overline{D}$ i

$$\mu \in \left\langle \inf_{P\in\overline{D}} f(P); \sup_{P\in\overline{D}} f(P) \right\rangle \tag{632}$$

to

$$\exists P_0 \in \overline{D} \quad f(P_0) = \mu \tag{633}$$

Twierdzenie 14.6 *(Cantora o ciągłości jednostajnej)*
Jeżeli funkcja $f(P)$ jest ciągła na obszarze domkniętym i ograniczonym $\overline{D}$, to

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \quad \forall P_1, P_2 \in \overline{D} \quad 0 < \rho_{P_1P_2} < \delta \Rightarrow |f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon \tag{634}$$

Uwaga 14.4 *Funkcję $f(P)$, dla której spełniona jest teza Twierdzenia 14.6 nazywamy funkcją* ***jednostajnie ciągłą*** *na obszarze $\overline{D}$.*

Przykład 14.7 *Wyznaczyć zbiór wszystkich punktów, w których funkcja*

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & gdy \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & gdy \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{635}$$

jest ciągła.

Rozwiązanie 14.7 *Weźmy dowolny punkt $P_0(0,0) \neq (0,0)$ oraz sąsiedztwo S punktu P_0 o promieniu na tyle małym, że punkt $(0,0) \notin S$. Niech $(P_k) = ((x_k, y_k))$ będzie dowolnym ciągiem punktów $P_k \in S$ zbieżnym do punktu $P_0(x_0, y_0)$. Ponieważ*

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = \lim_{k\to\infty} f(P_k) = \lim_{k\to\infty} \cos\frac{1}{x_k^2+y_k^2} = \cos\left[\lim_{k\to\infty}\frac{1}{x_k^2+y_k^2}\right] = \cos\frac{1}{x_0^2+y_0^2} \tag{636}$$

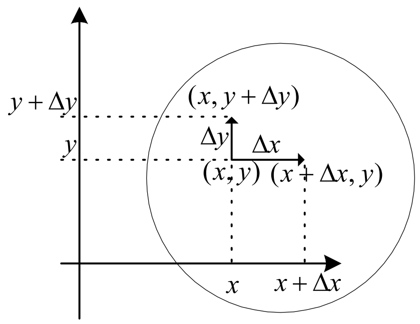
oraz

$$f(P_0) = \cos\frac{1}{x_0^2+y_0^2} \tag{637}$$

więc funkcja $f(x,y)$ jest ciągła w każdym punkcie $(x,y) \neq (0,0)$. W punkcie $P_0(0,0)$ funkcja nie jest ciągła. Dla ciągu $(P_k) = \left(\left(\frac{1}{k}, 0\right)\right)$ zbieżnego do punktu $P_0(0,0)$, ciąg $(f(P_k)) = (\cos k^2)$ nie ma granicy. Oznacza to, że $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} f(x,y)$ nie istnieje, a więc funkcja nie może być ciągła w punkcie $P_0(0,0)$.

Odp. Funkcja jest ciągła na zbiorze $\{(x,y) : x^2+y^2 > 0\}$.

14.4 Pochodne cząstkowe funkcji dwóch zmiennych



Rysunek 102: Położenie punktów w kole.

Niech f będzie funkcją określoną na pewnym kole zawartym w przestrzeni $\mathcal{R}^2$ i niech (x,y), $(x+\Delta x, y)$, $(x, y+\Delta y)$ będą punktami tego koła (patrz rys. 102). Różnice

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \quad \text{oraz} \quad f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \tag{638}$$

nazywamy **przyrostami** wartości funkcji f w punkcie (x,y) odpowiadającymi przyrostowi Δx pierwszej zmiennej, względnie przyrostowi Δy drugiej zmiennej. Ponadto, niech $\Delta x \neq 0$ oraz $\Delta y \neq 0$. Wówczas ilorazy

$$\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \quad \text{oraz} \quad \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \tag{639}$$

nazywamy **ilorazami różnicowymi** funkcji f odpowiadającymi przyrostowi Δx pierwszej zmiennej, względnie przyrostowi Δy drugiej zmiennej.

Definicja 14.23 *(Pochodnych cząstkowych)*

1. *Granicę ilorazu różnicowego*

$$\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \tag{640}$$

*gdy $\Delta x \to 0$ nazywamy **pochodną cząstkową** funkcji f w punkcie (x,y) względem zmiennej x i oznaczamy symbolem $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, tzn.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \tag{641}$$

2. *Granicę ilorazu różnicowego*

$$\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \tag{642}$$

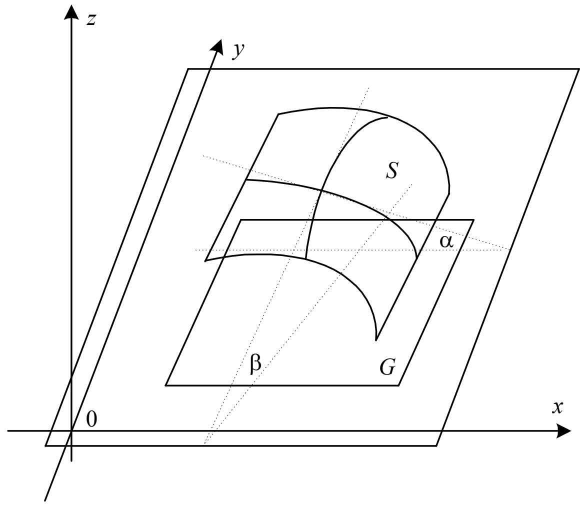
gdy $\Delta y \to 0$ *nazywamy* ***pochodną cząstkową*** *funkcji* f *w punkcie* (x,y) *względem zmiennej* y *i oznaczamy symbolem* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, *tzn.*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \tag{643}$$

Poniżej podamy kilka informacji uzupełniających.

Uwaga 14.5 *Zapis* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *i* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *został wprowadzony przez Leibniza. Symbol* ∂ *oznacza, że mamy do czynienia z funkcją wielu zmiennych, a obliczana jest pochodna względem jednej z nich. W praktyce, do przedstawiania pochodnych cząstkowych względem zmiennych niezależnych używane są też symbole wprowadzone przez Lagrange'a*

$$f_x(x,y) \qquad f_y(x,y)$$



Rysunek 103: Geometryczny sens pochodnych cząstkowych.

Uwaga 14.6 *Pochodna cząstkowa* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *jest pochodną funkcji* $f(x,y)|_{y=\text{const}}$ *będącej zawężeniem funkcji* f *przez ustalenie drugiej zmiennej. Analogicznie, pochodna cząstkowa* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *jest pochodną funkcji* $f(x,y)|_{x=\text{const}}$ *będącej zawężeniem funkcji* f *przez ustalenie pierwszej zmiennej*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(f(x,y)|_{y=\text{const}}\right) \tag{644}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}\left(f(x,y)|_{x=\text{const}}\right) \tag{645}$$

Wynika stąd, że obliczanie pochodnych cząstkowych, zwane też ***różniczkowaniem cząstkowym****, należy wykonywać według znanych reguł, z tym, że przy różniczkowaniu cząstkowym względem* x *należy uważać* y *za stałą, a przy różniczkowaniu względem* y *należy* x *uważać za stałą.*

Przykład 14.8 *Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji* $f(x,y) = x^3y^2$.

Rozwiązanie 14.8

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y$$

Przykład 14.9 *Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji* $f(x,y) = \frac{x^2}{y} + \frac{y}{x}$.

Rozwiązanie 14.9

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{y} - \frac{y}{x^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{x}$$

Przykład 14.10 *Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji $f(x,y) = e^{-x/y}$.*

Rozwiązanie 14.10

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{y}e^{-x/y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{y^2}e^{-x/y}$$

14.5 Geometryczny sens pochodnych cząstkowych

Niech G będzie pewnym prostokątem, a S wykresem funkcji $z = f(x,y)$ dla $(x,y) \in G$. Wówczas

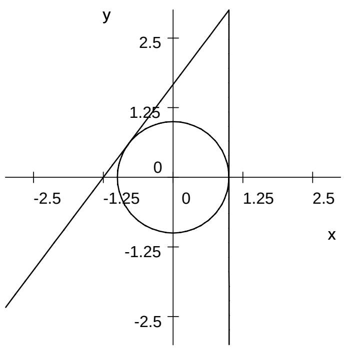
$$f_x(x,y) = \tan\alpha \qquad f_y(x,y) = \tan\beta \tag{646}$$

gdzie: α i β są kątami, które styczne do krzywych

$$z = f(x,y)|_{y=\text{const}} \qquad z = f(x,y)|_{x=\text{const}}$$

tworzą odpowiednio z osiami $0x$ i $0y$ (patrz rys. 103).

14.5.1 Styczna i normalna do krzywej



Rysunek 104: Styczne do okręgu.

Pochodne cząstkowe mogą być wykorzystywane do wyznaczania stycznej i normalnej do krzywej danej równaniem $f(x,y) = 0$.

Twierdzenie 14.7 *Jeżeli krzywa K jest dana równaniem ogólnym $f(x,y) = 0$ klasy C^1 i punkt $M = (x,y)$ leży na tej krzywej, to wektor o współrzędnych $[f_x(M), f_y(M)]$ jest wektorem normalnym (czyli prostopadłym) do krzywej K w punkcie M i oznaczamy go*

$$\operatorname{grad} f(M) = [f_x(M), f_y(M)] \tag{647}$$

Wniosek 14.1 *Jeżeli krzywa K jest dana równaniem ogólnym $f(x,y) = 0$ klasy C^1 i punkt $M = (x,y)$ leży na tej krzywej, to styczna do krzywej K w punkcie M ma równanie*

$$f_x(M)(X - x) + f_y(M)(Y - y) = 0 \tag{648}$$

a normalna do krzywej K w punkcie M ma równanie

$$\frac{X - x}{f_x(M)} = \frac{Y - y}{f_y(M)} \tag{649}$$

Przykład 14.11 *Napisać równanie stycznej do okręgu*

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{650}$$

przechodzącą przez punkt $(1, 3)$.

Rozwiązanie 14.11 *Niech* (x, y) *będzie punktem styczności. Zgodnie z (648) równanie stycznej do okręgu w punkcie* (x, y) *ma postać*

$$2x(X - x) + 2y(Y - y) = 0 \tag{651}$$

przy czym (X, Y) *jest dowolnym punktem płaszczyzny. Powyższe równanie powinno być spełnione przez parę liczb* $X = 1,\ Y = 3$. *A więc*

$$2x(1 - x) + 2y(3 - y) = 0 \tag{652}$$

Zauważmy, że punkt styczności (x, y) *należy do okręgu, a więc spełnia równanie (650). Rozwiązując układ równań (652) i (650) otrzymujemy dwa punkty:* $(1, 0)$ *i* $(-4/5, 3/5)$. *Wstawiając te wartości do (651) dostajemy dwie proste:* $X = 1$ *i* $4X - 3Y + 5 = 0$. *Są to styczne do okręgu (650) przechodzące przez punkt* $(1, 3)$*(rysunek 104).*

14.6 Pochodne cząstkowe drugiego rzędu

Jeżeli funkcja f ma w każdym punkcie prostokąta G pochodną cząstkową $f_x(f_y)$, to $f_x(f_y)$ jest funkcją określoną w prostokącie G.

Definicja 14.24 *Pochodną cząstkową pierwszego rzędu pochodnych cząstkowych* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ *względem zmiennych* x, y *oznaczamy jednym z symboli*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{653}$$

i nazywamy pochodnymi cząstkowymi ***rzędu drugiego*** *funkcji* $f(x, y)$.

Uwaga 14.7 *Pochodne* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$ *nazywamy* ***czystymi***, *a pochodne* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$ ***mieszanymi*** *drugiego rzędu.*

Uwaga 14.8 *Rozpisując symbol* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ *otrzymujemy:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_x(x + \Delta x, y) - f_x(x, y)}{\Delta x} \tag{654}$$

Podobnie interpretuje się pozostałe wyrażenia (653).

Twierdzenie 14.8 *(Schwarza)*
Jeżeli funkcja $f(x, y)$ *ma na pewnym prostokącie* G *(obszarze) ciągłe pochodne mieszane rzędu drugiego, to w każdym punkcie prostokąta* G *(obszaru) są one sobie równe*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{lub} \quad f_{xy} = f_{yx} \tag{655}$$

Przykład 14.12 *Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji* $f(x,y) = x^3y^2$.

Rozwiązanie 14.12 *Pochodne pierwszego rzędu wyznaczyliśmy w Przykładzie 14.8. Są one równe*

$$f_x = 3x^2y^2 \qquad f_y = 2x^3y$$

Teraz możemy wyznaczyć wszystkie pochodne drugiego rzędu

$$f_{xx} = 6xy^2 \qquad f_{yy} = 2x^3 \qquad f_{xy} = 6x^2y \qquad f_{yx} = 6x^2y$$

Widzimy, że $f_{xy} = 6x^2y = f_{yx}$.

Przykład 14.13 *Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji* $f(x,y) = \frac{x^2}{y} + \frac{y}{x}$.

Rozwiązanie 14.13 *Pochodne pierwszego rzędu obliczyliśmy w Przykładzie 14.9. Były one odpowiednio równe*

$$f_x = \frac{2x}{y} - \frac{y}{x^2} \qquad f_y = -\frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{x}$$

Wyznaczymy pochodne rzędu drugiego.

$$f_{xx} = \frac{2}{y} + \frac{2y}{x^3} \qquad f_{yy} = \frac{2x^2}{y^3} \qquad f_{xy} = -\frac{2x}{y^2} - \frac{1}{x^2} \qquad f_{yx} = -\frac{2x}{y^2} - \frac{1}{x^2}$$

14.7 Różniczkowalność funkcji. Różniczka zupełna

O różniczkowalności funkcji mówi definicja:

Definicja 14.25 *Funkcja* $f(x,y)$ *jest różniczkowalna w punkcie* $P(x,y)$, *jeżeli jest określona na pewnym otoczeniu* U *tego punktu i istnieją takie liczby* A_1 *i* A_2, *że w dostatecznie małym otoczeniu punktu* P *(takim, że* $(x+\Delta x, y+\Delta y) \in U$*) przyrost wartości funkcji*

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = A_1\Delta x + A_2\Delta y + \rho\alpha \tag{656}$$

gdzie: $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ *i* $\lim\limits_{\rho\to 0} \alpha = 0$ *(*α *zależy od* ρ*).*

Twierdzenie 14.9 *Jeżeli funkcja* f *ma na pewnym otoczeniu punktu* P *pochodne cząstkowe* f_x *i* f_y, *które są w tym punkcie ciągłe, to jest w tym punkcie różniczkowalna.*

Twierdzenie 14.10 *Różniczkowalność funkcji* f *w punkcie* P *zapewnia jej ciągłość w tym punkcie.*

Twierdzenie 14.11 *Różniczkowalność funkcji* f *w punkcie* P *zapewnia istnienie pochodnych cząstkowych* f_x *i* f_y *w tym punkcie, przy czym* $A_1 = f_x(P), A_2 = f_y(P)$.

Definicja 14.26 *Jeżeli funkcja* $f(x,y)$ *jest różniczkowalna w punkcie* $P_0(x_0,y_0)$, *to*

$$\mathrm{d}\, f = \lim_{\rho\to 0} \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\,\mathrm{d}\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\,\mathrm{d}\, y \tag{657}$$

nazywamy ***różniczką zupełną*** *funkcji* f *w punkcie* P_0. *Wielkości* $\mathrm{d}\, x$ *i* $\mathrm{d}\, y$ *nazywamy* ***różniczkami zmiennych niezależnych****.*

Uwaga 14.9 *Zachodzi wzór przybliżony*

$$\Delta f \approx \mathrm{d}\, f \tag{658}$$

gdzie: $\Delta f -$ *przyrost wartości funkcji;* $\mathrm{d}\, f -$ *różniczka zupełna funkcji, ale należy pamiętać, że jednak* $\Delta f \neq \mathrm{d}\, f$ *i*

$$\Delta f = \mathrm{d}\, f + \rho\alpha \tag{659}$$

gdzie

$$\alpha = \frac{\Delta f - \mathrm{d}\, f}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \tag{660}$$

Przykład 14.14 *Oszacować przyrost* ΔV *objętości walca* $V = \pi r^2 h$ *odpowiadający przyrostowi promienia* $\mathrm{d}\, r$ *i przyrostowi wysokości* $\mathrm{d}\, h$ *walca.*

Rozwiązanie 14.14 *Przyrost* ΔV*, którego moduł jest zwany błędem bezwzględnym objętości, szacujemy za pomocą różniczki objętości*

$$\Delta V \approx \mathrm{d}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}\, r + \frac{\partial V}{\partial h}\,\mathrm{d}\, h = 2\pi r h\,\mathrm{d}\, r + \pi r^2\,\mathrm{d}\, h$$

Aby oszacować $\dfrac{\Delta V}{V}$*, czyli błąd względny objętości, dzielimy powyższą równość przez* $V = \pi r^2 h$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\mathrm{d}\, V}{V} = \frac{2\pi r h\,\mathrm{d}\, r + \pi r^2\,\mathrm{d}\, h}{\pi r^2 h} = 2\frac{\mathrm{d}\, r}{r} + \frac{\mathrm{d}\, h}{h}$$

Przykład 14.15 *Obliczyć różniczkę objętości prostopadłościanu o bokach* a, b, c*.*

Rozwiązanie 14.15 *Objętość prostopadłościanu wyraża się wzorem*

$$V = abc$$

Jak widzimy, jest to funkcja trzech zmiennych niezależnych: $V = V(a, b, c)$*. Korzystając z wzoru (657) zastosowanego do funkcji trzech zmiennych, otrzymujemy:*

$$\frac{\partial V}{\partial a} = bc \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = ac \qquad \frac{\partial V}{\partial c} = ab$$

A więc różniczkę objętości prostopadłościanu zapiszemy

$$\mathrm{d}\, V = \frac{\partial V}{\partial a}\,\mathrm{d}\, a + \frac{\partial V}{\partial b}\,\mathrm{d}\, b + \frac{\partial V}{\partial c}\,\mathrm{d}\, c = bc\,\mathrm{d}\, a + ac\,\mathrm{d}\, b + ab\,\mathrm{d}\, c$$

Stąd

$$\frac{\mathrm{d}\, V}{V} = \frac{\mathrm{d}\, a}{a} + \frac{\mathrm{d}\, b}{b} + \frac{\mathrm{d}\, c}{c}$$

Niech $f(x, y)$ będzie funkcją klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu $P(x, y)$.

Definicja 14.27 ***Różniczką drugiego rzędu funkcji*** $f(x, y)$ *w punkcie* P *(lub **drugą różniczką funkcji**) nazywamy wyrażenie*

$$\mathrm{d}^2 f(x, y) = f_{xx}(x, y)\,\mathrm{d}\, x^2 + 2f_{xy}(x, y)\,\mathrm{d}\, x\,\mathrm{d}\, y + f_{yy}(x, y)\,\mathrm{d}\, y^2 \tag{661}$$

w którym $\mathrm{d}\, x$, $\mathrm{d}\, y$ *oznaczają dowolne przyrosty zmiennych* x, y*. Druga różniczka jest formą kwadratową przyrostów* $\mathrm{d}\, x$, $\mathrm{d}\, y$*. Współczynnikami tej formy są drugie pochodne cząstkowe funkcji* $f(x, y)$*.*

14.8 Pochodna funkcji złożonej

Twierdzenie 14.12 *Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest określona w obszarze D, a para funkcji $x = g(t)$, $y = h(t)$ odwzorowuje przedział (α,β) w obszar D, to funkcja złożona*

$$F(t) = f(x,y)\Big|_{\substack{x=g(t)\\ y=h(t)}} \tag{662}$$

jest określona w przedziale (α,β). Jeżeli dodatkowo funkcje $g(t)$ i $h(t)$ są różniczkowalne dla pewnego argumentu $t \in (\alpha,\beta)$, a funkcja jest różniczkowalna w punkcie $(x,y) = (g(t), h(t))$, to funkcja złożona (662) ma dla argumentu t pochodną

$$F'(t) = f_x(x,y)\Big|_{\substack{x=g(t)\\ y=h(t)}} g'(t) + f_y(x,y)\Big|_{\substack{x=g(t)\\ y=h(t)}} h'(t) \tag{663}$$

14.8.1 Pierwsza pochodna funkcji $F(g(t), h(t))$

Wzór (663) zapiszemy w symbolice Leibniza

$$\frac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial F}{\partial g}\frac{\mathrm{d}\,g}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial F}{\partial h}\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,t} \tag{664}$$

Jest to wzór na pierwszą pochodną funkcji złożonej.

14.8.2 Druga pochodna funkcji $F(g(t), h(t))$

Jak pamiętamy, druga pochodna jest pochodną pierwszej pochodnej. Zatem

$$\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}\,t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial F}{\partial g}\frac{\mathrm{d}\,g}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial F}{\partial h}\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,t}\right)$$

Stąd

$$\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}\,t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial g^2}\left(\frac{\mathrm{d}\,g}{\mathrm{d}\,t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial g \partial h}\frac{\mathrm{d}\,g}{\mathrm{d}\,t}\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial^2 F}{\partial h^2}\left(\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,t}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial g}\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}\,t^2} + \frac{\partial F}{\partial h}\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}\,t^2} \tag{665}$$

14.8.3 Wzór Taylora dla funkcji dwóch zmiennych

Na wstępie podamy twierdzenie o przyrostach funkcji dwóch zmiennych.

Twierdzenie 14.13 *Jeżeli $f(x,y)$ jest funkcją klasy C^1 w otoczeniu U punktu $P_0 = (x_0, y_0)$ i jeżeli punkt $P_1 = (x_0 + h, y_0 + k) \in U$, $P_0 \neq P_1$, to przyrost funkcji odpowiadający punktom P_0 i P_1 wyraża się wzorem*

$$f(P_1) - f(P_0) = f_x\left(\widetilde{P}\right)h + f_y\left(\widetilde{P}\right)k \tag{666}$$

w którym $\widetilde{P}$ jest pewnym punktem odcinka P_0P_1 różnym od końców tego odcinka.

Twierdzenie 14.14 *Jeżeli $f(x,y)$ jest funkcją klasy C^2 w otoczeniu U punktu $P_0 = (x_0, y_0)$ i jeżeli punkt $P_1 = (x_0 + h, y_0 + k) \in U$, $P_0 \neq P_1$, to przyrost funkcji odpowiadający punktom P_0 i P_1 wyraża się wzorem*

$$f(P_1) - f(P_0) = f_x(P_0)h + f_y(P_0) + \frac{1}{2}\left[f_{xx}\left(\widetilde{P}\right)h^2 + 2f_{xy}\left(\widetilde{P}\right)hk + f_{yy}\left(\widetilde{P}\right)k^2\right] \tag{667}$$

w którym $\widetilde{P}$ jest pewnym punktem odcinka P_0P_1 między P_0 i P_1. Jest to wzór Taylora z drugimi pochodnymi.

Przyjmując oznaczenia $P_0\,(x,y)$ i $P_1\,(x+\mathrm{d}\,x, y+\mathrm{d}\,y)$ zapiszemy wzór Taylora w postaci różniczkowej

$$f\,(x+\mathrm{d}\,x, y+\mathrm{d}\,y) - f\,(x,y) = f_x\,\mathrm{d}\,x + f_y\,\mathrm{d}\,y + \frac{1}{2}\left[\widetilde{f}_{xx}\,\mathrm{d}\,x^2 + 2\widetilde{f}_{xy}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + \widetilde{f}_{yy}\,\mathrm{d}\,y^2\right] \quad (668)$$

14.9 Ekstremum funkcji dwóch zmiennych

14.9.1 Definicja ekstremum

Definicja 14.28 *Powiedzenie, że funkcja f ma w punkcie P_0* ***maksimum*** *oznacza, że P_0 jest punktem wewnętrznym dziedziny funkcji i że istnieje otoczenie punktu P_0, w którym największą wartością funkcji f jest $f(P_0)$, co zapisujemy symbolicznie*

$$\bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{PP_0<\delta} f(P) \leq f(P_0) \quad (669)$$

Jeżeli we wszystkich punktach sąsiedztwa funkcja f przyjmuje wartości mniejsze niż w punkcie P_0, czyli

$$\bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{0<PP_0<\delta} f(P) < f(P_0) \quad (670)$$

to mówimy, że funkcja f ma w punkcie P_0 ***maksimum właściwe****.*

Definicja **minimum** i **minimum właściwego** różni się od powyższej tylko kierunkiem nierówności między $f(P)$ i $f(P_0)$.

Ekstremum jest nazwą obejmującą maksimum i minimum. Ekstremum jest lokalną własnością funkcji, charakteryzującą rozkład wartości funkcji w dowolnie małym otoczeniu danego punktu.

14.9.2 Formy liniowe i kwadratowe dwóch zmiennych

Twierdzenie 14.15 *Forma liniowa dwóch zmiennych niezerowa*

$$\varphi\,(x,y) = Ax + By \quad (671)$$

nie ma ekstremum.

Oznacza to, że w dowolnym otoczeniu pewnego punktu P_0 istnieje punkt w którym funkcja ma wartość większą niż w P_0 oraz punkt, w którym funkcja ma wartość mniejszą niż w P_0.

Wykresem formy liniowej są tak zwane **linie ekwiskalarne**. Są to linie, wzdłuż których funkcja przyjmuje te same wartości. W przestrzeni $\mathcal{R}^2$ liniami ekwiskalarnymi są proste o równaniach $Ax + By = \text{const}$, a w przestrzeni $\mathcal{R}^3-$ płaszczyzny.

Definicja 14.29 ***Formą kwadratową dwóch zmiennych*** *nazywamy funkcję postaci*

$$\Phi\,(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \quad (672)$$

jeżeli co najmniej jedna ze stałych A, B, C, zwanych współczynnikami formy nie jest zerem.

Definicja 14.30 ***Wyróżnikiem*** *formy kwadratowej nazywamy liczbę*

$$w = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \quad (673)$$

Zauważmy, że jeżeli $w > 0$, to $AC > B^2 \geq 0$ i liczby A, C są tego samego znaku.

Klasyfikacja form kwadratowych

1. Każda forma kwadratowa ma w początku układu wartość 0.

2. Formę kwadratową nazywamy **określoną**, jeżeli wszędzie poza początkiem układu ma wartości różne od zera i stałego znaku. Przy tym nazywamy ją **określoną dodatnio** (np. $\Phi(x,y) = x^2 + y^2$) lub **określoną ujemnie** (np. $\Phi(x,y) = -x^2 - y^2$) zależnie od tego, czy wartości tej formy są dodatnie czy ujemne.

3. Formę kwadratową nazywamy **półokreśloną**, jeżeli w pewnych punktach poza początkiem układu przyjmuje wartość 0, ale nie przyjmuje wartości różnych znaków. Przy tym nazywamy ją **półokreśloną dodatnio** (np. $\Phi(x,y) = (x+y)^2$) lub **półokreśloną ujemnie** (np. $\Phi(x,y) = -(x+y)^2$) zależnie od tego, czy forma przyjmuje wartości dodatnie czy ujemne.

4. Formę kwadratową nazywamy **nieokreśloną** lub **znakozmienną** (np. $\Phi(x,y) = x^2 - y^2$), jeżeli w pewnych punktach przyjmuje wartości dodatnie, a w innych ujemne.

Twierdzenie 14.16 *Forma kwadratowa $\Phi(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ o wyróżniku $w = AC - B^2$ jest:*

1. ***określona**, jeżeli $w > 0$, przy czym jest określona dodatnio, gdy $A > 0$ i $C > 0$, względnie określona ujemnie, gdy $A < 0$ i $C < 0$ (elipsy).*

2. ***półokreślona**, jeżeli $w = 0$, i wówczas zeruje się na pewnej prostej przechodzącej przez początek układu, a poza nią przyjmuje wartości dodatnie, gdy $A > 0$ lub $C > 0$, względnie wartości ujemne, gdy $A < 0$ lub $C < 0$ (prosta).*

3. ***nieokreślona**, jeżeli $w < 0$, i wówczas zeruje się na dwóch prostych przecinających się w początku układu, a we wnętrzach czterech kątów między tymi prostymi jest na przemian dodatnia i ujemna (dwie proste prostopadłe oraz hiperbole).*

14.9.3 Warunek konieczny ekstremum funkcji dwóch zmiennych

Przedstawimy podstawowe twierdzenie.

Twierdzenie 14.17 *Jeżeli funkcja $f(x,y)$ ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum i jest w tym punkcie różniczkowalna, to obie pochodne cząstkowe 1 rzędu w tym punkcie są równe zeru*

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \tag{674}$$

Przykład 14.16 *Czy funkcja $z = x^2y + ye^x$ ma ekstremum?*

Rozwiązanie 14.16 *Funkcja $z = x^2y + ye^x$ jest różniczkowalna na całej płaszczyźnie. Pochodna $z_y = x^2 + e^x$ jest wszędzie dodatnia, zatem funkcja nie ma ekstremum.*

Przykład 14.17 *Czy funkcja $z = x^4 + y^2$ ma ekstremum?*

Rozwiązanie 14.17 *Pochodne cząstkowe funkcji z są równe: $z_x = 4x^3$, $z_y = 2y$. Przyrównując je do zera otrzymujemy układ równań $4x^3 = 0,\ 2y = 0$, którego jedynym rozwiązaniem jest punkt $(0,0)$. Poza tym punktem nie ma ekstremum. W punkcie $(0,0)$ jest minimum właściwe.*

Przykład 14.18 *Czy funkcja $z = x^2y$ ma ekstremum?*

Rozwiązanie 14.18 *Pochodne cząstkowe opisywane są równaniami: $z_x = 2xy$, $z_y = x^2$. Przyjmują wartość zero we wszystkich punktach osi $0y$. Funkcja nie ma jednak ekstremum, ponieważ w sąsiedztwie punktu $(0,0)$ dla $y = x > 0$ jest $z > 0$, a dla $y = x < 0$ jest $z < 0$.*

14.9.4 Warunek wystarczający ekstremum funkcji dwóch zmiennych

Mówi o tym twierdzenie.

Twierdzenie 14.18 *Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest klasy C^2 w otoczeniu punktu $P_0(x_0,y_0)$ i ma obie pochodne cząstkowe 1 rzędu w tym punkcie równe zeru*

$$f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0 \tag{675}$$

a wyznacznik pochodnych cząstkowych 2 rzędu, tzw. ***Hessian***[57] *(lub wyznacznik Hessa), funkcji f jest w tym punkcie dodatni*

$$W(P_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{xy}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{vmatrix} > 0 \tag{676}$$

to funkcja ta ma w punkcie P_0 ekstremum właściwe. Charakter tego ekstremum zależy od znaku drugich pochodnych czystych w punkcie P_0

$$f_{xx}(P_0) \qquad f_{yy}(P_0) \tag{677}$$

Jeżeli są one dodatnie, to funkcja ma w punkcie P_0 minimum właściwe, jeżeli ujemne, to maksimum właściwe.

Przykład 14.19 *Wyznaczyć ekstremum funkcji $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.*

Rozwiązanie 14.19 *Obliczamy pierwsze pochodne i przyrównujemy je do zera*

$$\begin{array}{l} f_x(x,y) = 2x + y - 2 = 0 \\ f_y(x,y) = x + 2y - 1 = 0 \end{array} \quad \textit{stąd } x = 1,\ y = 0$$

Jest to jedyny punkt, w którym $f_x = f_y = 0$. Ekstremum może wystąpić tylko w tym punkcie. W celu zbadania, czy w wyznaczonym punkcie występuje ekstremum i jakie, obliczymy wartości drugich pochodnych w tym punkcie. Są one równe: $f_{xx} = f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 1$, a wyznacznik $W = 3$. Oznacza to, że w punkcie $(1,0)$ jest minimum właściwe.

14.9.5 Warunek wykluczający ekstremum funkcji dwóch zmiennych

Jeżeli co najmniej jedna z pochodnych $f_x(P_0)$, $f_y(P_0)$ jest różna od zera, to na mocy Twierdzenia 14.17 funkcja f nie ma ekstremum w punkcie P_0. Jeżeli $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$, to możemy korzystać z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 14.19 *Jeżeli funkcja $f(x,y)$, klasy C^2 w otoczeniu punktu P_0, ma w tym punkcie obie pochodne cząstkowe 1 rzędu równe zeru, ale wyznacznik drugich pochodnych jest w tym punkcie ujemny*

$$f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0 \qquad W(P_0) < 0 \tag{678}$$

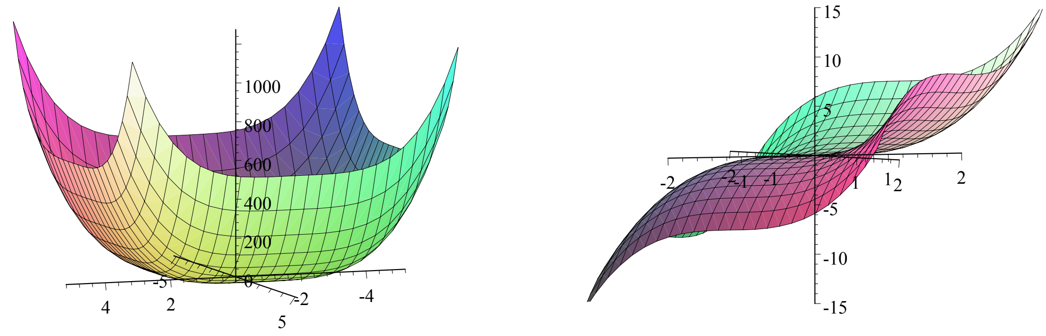
to funkcja nie ma ekstremum w tym punkcie.

Uwaga 14.10 *Jeżeli w punkcie P_0*

$$f_x(P_0) = f_y(P_0) = W(P_0) = 0 \tag{679}$$

to niczego nie możemy powiedzieć o istnieniu lub braku ekstremum. Weźmy, na przykład dwie funkcje $z = x^4 + y^4$ i $z = x^3 + y^3$. W obu przypadkach w punkcie $P_0 = (0,0)$ zachodzi warunek (679), jednak pierwsza funkcja ma w nim ekstremum właściwe, a druga nie ma ekstremum (patrz poniższe rysunki).

[57] czyt. hesjan.



Rysunek 105: Przebiegi funkcji: $z = x^4 + y^4$ i $z = x^3 + y^3$.

14.10 Ekstremum warunkowe funkcji dwóch zmiennych

Niech funkcje $f(x, y)$ i $g(x, y)$ są określone i ciągłe w pewnym obszarze płaskim D. Mówimy, że funkcja $f(x, y)$ osiąga w punkcie $(x_0, y_0) \in D$ maksimum (minimum) warunkowe, przy warunku

$$g(x, y) = c \tag{680}$$

jeżeli punkt (x_0, y_0) spełnia równanie (680) oraz istnieje takie otoczenie U punktu (x_0, y_0), że dla każdego punktu $(x, y) \in U$ spełniającego warunek (680) zachodzi nierówność

$$\begin{aligned} f(x, y) &\leq f(x_0, y_0) \quad - \quad \text{maksimum} \\ f(x, y) &\geq f(x_0, y_0) \quad - \quad \text{minimum} \end{aligned} \tag{681}$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum warunkowego funkcji dwóch zmiennych $z = f(x, y)$ przy warunku ograniczającym $g(x, y) = c$ można sformułować za pomocą różniczki funkcji. Niech funkcje $f(x, y)$ i $g(x, y)$ są klasy C^1 w obszarze D. Funkcja $f(x, y)$ może mieć ekstrema w tych punktach, dla których zeruje się różniczka funkcji

$$\mathrm{d}\, z = \mathrm{d}\, f = f_x \,\mathrm{d}\, x + f_y \,\mathrm{d}\, y = 0 \tag{682}$$

przy czym z warunku ograniczającego (680) wynika, że różniczki $\mathrm{d}\, x$ i $\mathrm{d}\, y$ są od siebie zależne i spełniają równanie

$$\mathrm{d}\, g = g_x \,\mathrm{d}\, x + g_y \,\mathrm{d}\, y = 0 \qquad \mathrm{d}\, c = 0 \tag{683}$$

Wyznaczając z równania (683) $\mathrm{d}\, y = -\frac{g_x}{g_y} \mathrm{d}\, x$ i podstawiając do równania (682) otrzymujemy

$$\mathrm{d}\, z = \mathrm{d}\, f = \left(f_x - \frac{g_x}{g_y} f_y \right) \mathrm{d}\, x = 0 \tag{684}$$

gdzie $\mathrm{d}\, x$ jest dowolnym przyrostem. Z ostatniego równania wynika, że aby różniczka $\mathrm{d}\, z$ była równa zeru przy dowolnym przyroście $\mathrm{d}\, x$ musi być spełniony warunek

$$f_x - \frac{g_x}{g_y} f_y = 0 \tag{685}$$

który można zapisać w postaci wyznacznikowej

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = 0$$

Zatem punkty stacjonarne, w których funkcja $f(x, y)$ może osiągać ekstrema warunkowe spełniają układ równań

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} & = 0 \\ g(x, y) & = c \end{cases} \tag{686}$$

Praktycznie **warunek konieczny na ekstremum** otrzymujemy wprowadzając tzw. **metodę mnożnika Lagrange'a**. Polega ona na wprowadzeniu pomocniczej **funkcji Lagrange'a** w postaci:

$$L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda(c - g(x, y)) \tag{687}$$

i znalezieniu dla niej warunku koniecznego na istnienie **ekstremum bezwarunkowego** tej funkcji rozpatrywanej jako funkcji trzech zmiennych:

$$\begin{cases} L_\lambda = & c - g(x, y) = 0 \\ L_x = & f_x - \lambda g_x = 0 \\ L_y = & f_y - \lambda g_y = 0 \end{cases} \tag{688}$$

Eliminując z układu równań czynnik nieoznaczony $\lambda = \frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}$ otrzymujemy warunek konieczny na ekstremum zapisany w postaci (686).

Warunek dostateczny istnienia ekstremum warunkowego dla funkcji $z = f(x, y)$ przy warunku $g(x, y) = c$ dotyczy znaku różniczki drugiego rzędu $\mathrm{d}^2 z$ w punkcie stacjonarnym. Przyjmijmy założenie, że funkcje $f(x, y)$ i $g(x, y)$ są klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu stacjonarnego. Wtedy

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 z &= \mathrm{d}(\mathrm{d}\, z) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{d}\, z)\,\mathrm{d}\, x + \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{d}\, z)\,\mathrm{d}\, y = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(f_x \,\mathrm{d}\, x + f_y \,\mathrm{d}\, y)\,\mathrm{d}\, x + \frac{\partial}{\partial y}(f_x \,\mathrm{d}\, x + f_y \,\mathrm{d}\, y)\,\mathrm{d}\, y = \\ &= f_{xx}\,\mathrm{d}\, x^2 + f_{xy}\,\mathrm{d}\, y\,\mathrm{d}\, x + f_{xy}\,\mathrm{d}\, y\,\mathrm{d}\, x + f_{yy}\,\mathrm{d}\, y^2 + f_y\,\mathrm{d}^2 y = \\ &= f_{xx}\,\mathrm{d}\, x^2 + 2f_{xy}\,\mathrm{d}\, y\,\mathrm{d}\, x + f_{yy}\,\mathrm{d}\, y^2 + f_y\,\mathrm{d}^2 y \end{aligned} \tag{689}$$

Biorąc pod uwagę ograniczenie

$$g(x, y) = c \quad \text{mamy} \quad \mathrm{d}\, g = 0 \text{ i } \mathrm{d}^2 g = \mathrm{d}(\mathrm{d}\, g) = 0 \tag{690}$$

czyli

$$\mathrm{d}^2 g = g_{xx}\,\mathrm{d}\, x^2 + 2g_{xy}\,\mathrm{d}\, y\,\mathrm{d}\, x + g_{yy}\,\mathrm{d}\, y^2 + g_y\,\mathrm{d}^2 y = 0$$

Eliminując $\mathrm{d}^2 y$ z ostatniego równania i wstawiając do (689) mamy

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 z &= \left(f_{xx} - \frac{f_y}{g_y} g_{xx}\right)\mathrm{d}\, x^2 + 2\left(f_{xy} - \frac{f_y}{g_y} g_{xy}\right)\mathrm{d}\, y\,\mathrm{d}\, x + \left(f_{yy} - \frac{f_y}{g_y} g_{yy}\right) = \\ &= (f_{xx} - \lambda g_{xx})\,\mathrm{d}\, x^2 + 2(f_{xy} - \lambda g_{xy})\,\mathrm{d}\, x\,\mathrm{d}\, y + (f_{yy} - \lambda g_{yy})\,\mathrm{d}^2 y \end{aligned}$$

Obliczając pochodne drugiego rzędu funkcji Lagrange'a

$$\begin{aligned} L_{xx} = & \; f_{xx} - \lambda g_{xx} \\ L_{xy} = & \; f_{xy} - \lambda g_{xy} \quad = L_{yx} \\ L_{yy} = & \; f_{yy} - \lambda g_{yy} \end{aligned} \tag{691}$$

i wstawiając je do $\mathrm{d}^2 z$ otrzymujemy formę kwadratową

$$\mathrm{d}^2 z = L_{xx}\,\mathrm{d}\,x^2 + 2L_{xy}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + L_{yy}\,\mathrm{d}^2\,y$$

Biorąc pod uwagę (683) otrzymujemy

$$\mathrm{d}\,y = -\frac{g_x}{g_y}\,\mathrm{d}\,x$$

i dochodzimy do relacji

$$\mathrm{d}^2 z = \left[L_{xx}g_y^2 - 2L_{xy}g_xg_y + L_{yy}g_x^2\right]\frac{\mathrm{d}\,x^2}{g_y^2} \tag{692}$$

A więc warunki dostateczne na ekstremum warunkowe funkcji $z = f(x,y)$ w punkcie stacjonarnym są następujące:

1. dla minimum: forma kwadratowa $\mathrm{d}^2 z$ dodatnio określona przy warunku $\mathrm{d}\,g = 0$;
2. dla maksimum: forma kwadratowa $\mathrm{d}^2 z$ ujemnie określona przy warunku $\mathrm{d}\,g = 0$.

Łatwo zauważyć, że druga różniczka jest dodatnio (ujemnie) określona w punkcie stacjonarnym, gdy wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest dodatnie (ujemne). Wyrażenie to ze znakiem ujemnym zapiszemy za pomocą wyznacznika, zwanego **Hessianem obrzeżonym**

$$\left|\bar{\mathbf{H}}\right| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = -\left[g_y^2L_{xx} - 2g_xg_yL_{xy} + g_x^2L_{yy}\right] \tag{693}$$

Zatem

$$\mathrm{d}^2 z \text{ jest } \begin{cases} \text{dodatnio określona} \\ \\ \text{ujemnie określona} \end{cases} \text{przy warunku } \mathrm{d}\,g = 0 \Longleftrightarrow \begin{matrix} \left|\bar{\mathbf{H}}\right| < 0 \\ \\ \left|\bar{\mathbf{H}}\right| > 0 \end{matrix} \tag{694}$$

Wniosek 14.2 *Dla każdej wartości stacjonarnej funkcji*

$$z = f(x,y) \quad \textit{lub} \quad L(\lambda, x, y) = f(x,y) + \lambda\left[c - g(x,y)\right]$$

dodatnia wartość $\left|\bar{\mathbf{H}}\right|$ *wystarcza, aby stwierdzić względne maksimum funkcji* $z(x,y)$*, zaś ujemna wartość* $\left|\bar{\mathbf{H}}\right|$ *wystarcza, aby stwierdzić względne minimum funkcji* $z(x,y)$.

Test wyznacznikowy dla względnego ekstremum warunkowego funkcji $z = f(x,y)$ *przy warunku* $g(x,y) = c$ *dla*

$$L(\lambda, x, y) = f(x,y) + \lambda\left[c - g(x,y)\right]$$

ma postać

Warunek	***Maksimum***	***Minimum***
warunek konieczny	$L_\lambda = L_x = L_y = 0$	$L_\lambda = L_x = L_y = 0$
warunek dostateczny	$\left|\bar{\mathbf{H}}\right| > 0$	$\left|\bar{\mathbf{H}}\right| < 0$

Przykład 14.20 *Znaleźć ekstremum funkcji* $z(x,y) = xy$ *przy warunku* $x + y = 6$.

Rozwiązanie 14.20 *Zauważamy, że $g(x,y)$ ma postać:*

$$g(x,y) = x + y$$

a $c = 6$. Stąd funkcja Lagrange'a przyjmie postać

$$L(\lambda, x, y) = xy + \lambda(6 - x - y)$$

Warunki konieczne dla tej wartości stacjonarnej $g(x,y)$ są równe:

$$\begin{cases} L_\lambda = & 6 - x - y = 0 \\ L_x = & y - \lambda = 0 \\ L_y = & x - \lambda = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = & 6 \\ -\lambda + y = & 0 \\ -\lambda + x = & 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniami powyższego układu są wartości: $\bar{\lambda} = 3$, $\bar{x} = 3$ i $\bar{y} = 3$. Badamy warunek dostateczny:

$$\begin{array}{rlrl} g_x = & 1 & g_y = & 1 \\ L_{xx} = & 0 & L_{xy} = & 1 \\ L_{xy} = & 1 & L_{yy} = & 0 \end{array}$$

Zatem

$$\left|\bar{\mathbf{H}}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

W punkcie $\bar{x} = 3$, $\bar{y} = 3$ funkcja $z(x,y) = xy$ osiąga przy warunku $x + y = 6$ maksimum równe $z(3,3) = 9$.

Przykład 14.21 *Znaleźć ekstremum funkcji $z(x,y) = x^2 + y^2$ przy warunku $x + 4y = 2$.*

Rozwiązanie 14.21 *Funkcja Lagrange'a ma postać*

$$L(\lambda, x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(2 - x - 4y)$$

zaś funkcja

$$g(x,y) = x + 4y$$

Piszemy warunki konieczne dla tej wartości stacjonarnej $g(x,y)$

$$\begin{cases} L_\lambda = & 2 - x - 4y = 0 \\ L_x = & 2x - \lambda = 0 \\ L_y = & 2y - 4\lambda = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 4y = & 2 \\ -\lambda + 2x = & 0 \\ -4\lambda + 2y = & 0 \end{cases}$$

Wartość stacjonarna $z(x,y)$ zdefiniowana jest przez rozwiązanie

$$\bar{\lambda} = \frac{4}{17} \quad \bar{x} = \frac{2}{17} \quad \bar{y} = \frac{4}{17}$$

Badamy warunek dostateczny:

$$\begin{array}{rlrl} g_x = & 1 & g_y = & 4 \\ L_{xx} = & 2 & L_{xy} = & 0 \\ L_{xy} = & 0 & L_{yy} = & 2 \end{array}$$

Stąd

$$\left|\bar{\mathbf{H}}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -34 < 0$$

A więc w punkcie $\bar{x} = \frac{2}{17}$, $\bar{y} = \frac{4}{17}$ funkcja $z(x,y)$ osiąga minimum.

14.11 Pochodna kierunkowa i gradient funkcji dwóch zmiennych

14.11.1 Pochodna kierunkowa

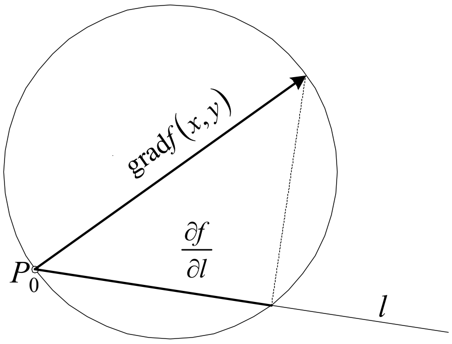
Niech $f(x,y)$ będzie funkcją określoną w otoczeniu punktu $P_0 = (x_0, y_0)$, a l niech będzie półprostą o początku P_0.

Definicja 14.31 *Granicę*

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in l}} \frac{f(P) - f(P_0)}{PP_0} \tag{695}$$

nazywamy ***pochodną kierunkową*** *funkcji $f(x,y)$ w punkcie P_0 w kierunku l i oznaczamy symbolem*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial l}(P_0) \tag{696}$$



Rysunek 106: Gradient funkcji $f(x,y)$ i pochodna kierunkowa.

Jeżeli półprosta l jest równoległa do osi Ox i zgodnie z nią skierowana, to $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}$, w przeciwnym przypadku $\frac{\partial f}{\partial l} = -\frac{\partial f}{\partial x}$. Gdy l jest równoległa do osi Oy, to $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial y}$ lub $\frac{\partial f}{\partial l} = -\frac{\partial f}{\partial y}$.

Niech $\alpha = (x, l)$ będzie miarą kąta skierowanego między osią Ox i półprostą l. Półprosta l ma wówczas równania

$$x = x_0 + t\cos\alpha \qquad y = y_0 + t\sin\alpha \tag{697}$$

W tym przypadku granica (695) może być zapisana

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t} \tag{698}$$

Twierdzenie 14.20 *Jeżeli $f(x,y)$ jest funkcją różniczkowalną w punkcie P_0, to*

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\sin\alpha \tag{699}$$

gdzie α jest miarą skierowanego kąta kierunkowego półprostej l.

14.11.2 Gradient

Niech $f(x,y)$ będzie funkcją różniczkowalną w punkcie P_0.

Definicja 14.32 ***Gradientem*** *funkcji $f(x,y)$ w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$ nazywamy wektor, którego współrzędnymi są pochodne cząstkowe funkcji $f(x,y)$ w punkcie P_0*

$$\operatorname{grad} f(P_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right] \tag{700}$$

Z dwóch ostatnich relacji wynika, że:

1. pochodna kierunkowa w kierunku l jest iloczynem skalarnym gradientu i wersora osi l;

2. pochodna kierunkowa w kierunku l jest miarą rzutu gradientu na oś l (patrz rysunek 106).

Ponadto, jeżeli $\operatorname{grad} f(P_0) \neq 0$, to

1. pochodna kierunkowa w punkcie P_0 przyjmuje największą wartość, gdy jest obliczana w kierunku gradientu;
2. gradient jest wektorem, którego moduł jest równy maksymalnej wartości pochodnej kierunkowej w danym punkcie;
3. gradient ma kierunek i zwrot półprostej, na której pochodna kierunkowa osiąga w danym punkcie największą wartość.

Twierdzenie 14.21 *Jeżeli $f(x, y)$ jest funkcją klasy C^1 w otoczeniu punktu P_0 i jeżeli $\operatorname{grad} f(P_0) \neq 0$, to $\operatorname{grad} f(P_0)$ jest wektorem prostopadłym do linii ekwiskalarnej funkcji $f(x, y)$ w punkcie P_0.*

14.12 Funkcje trzech zmiennych

Zbiór wszystkich uporządkowanych trójek liczb rzeczywistych nazywamy 3−wymiarową przestrzenią rzeczywistą i oznaczamy $\mathcal{R}^3$. Poszczególne trójki liczb nazywamy punktami tej przestrzeni i oznaczamy $P = (x, y, z)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ itp.

Odległość dwóch dowolnych punktów P, P_0 tej przestrzeni oznaczamy $\rho(P, P_0)$ i definiujemy wzorem

$$\rho(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \tag{701}$$

Przestrzeń $\mathcal{R}^3$ z tak określoną odległością nazywamy 3−wymiarową przestrzenią euklidesową.

Definicja 14.33 ***Otoczeniem kulistym*** *(otoczeniem) punktu P_0 o promieniu δ, $\delta > 0$ nazywamy zbiór punktów P, których odległość od punktu P_0 jest mniejsza od δ*

$$U(P_0, \delta) = \{P : PP_0 < \delta\} \tag{702}$$

Definicja 14.34 *Sąsiedztwem kulistym (sąsiedztwem) punktu P_0 o promieniu δ, $\delta > 0$ nazywamy zbiór punktów P, których odległość od punktu P_0 jest dodatnia i mniejsza od δ*

$$S(P_0, \delta) = \{P : 0 < PP_0 < \delta\} \tag{703}$$

Mówimy, że ciąg punktów $P_n(x_n, y_n, z_n)$ jest zbieżny do punktu $P_0(x_0, y_0, z_0)$, jeżeli $P_nP_0 \to 0$ lub, co jest równoważne, jeżeli jednocześnie $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, $z_n \to z_0$

Funkcję, której dziedzina D zawiera się w $\mathcal{R}^3$, a przeciwdziedzina w $\mathcal{R}$ nazywamy **funkcją rzeczywistą trzech zmiennych rzeczywistych**. Zapisujemy to równością

$$u = f(P) \quad \text{lub} \quad u = f(x, y, z) \tag{704}$$

dla $P = (x, y, z) \in D$. Argumentem tej funkcji jest trójka liczb, a poszczególne liczby w tej trójce są współrzędnymi argumentu. Mówimy o nich, że są to wartości pierwszej, drugiej, trzeciej zmiennej w danej funkcji.

Wykres funkcji $f(x, y, z)$ trzech zmiennych istnieje tylko jako pojęcie abstrakcyjne, tzn. jako zbiór czwórek liczb (x, y, z, u), gdzie $(x, y, z) \in D$, zaś $u = f(x, y, z)$, ale nie może być przedstawiony rysunkiem. Możliwa jest natomiast geometryczno-fizyczna interpretacja funkcji trzech zmiennych w postaci pola skalarnego, jakim jest na przykład temperatura lub gęstość w pewnej bryle fizycznej, potencjał grawitacyjny w przestrzeni otaczającej planetę itp. Zbiór punktów przestrzeni $Oxyz$, w których funkcja $f(x, y, z)$ ma tę samą wartość $f(x, y, z) = \text{const} = c$ jest na ogół pewną powierzchnią. Nazywamy ją **powierzchnią ekwiskalarną**.

Przykładem funkcji trzech zmiennych jest objętość stożka ściętego wyrażona wzorem

$$V = \frac{\pi}{3} h \left(R^2 + rR + r^2\right)$$

dla $R,\ r,\ h$ dodatnich.

14.12.1 Formy liniowe i kwadratowe trzech zmiennych

Definicja 14.35 ***Forma liniowa trzech zmiennych*** *niezerowa jest to funkcja*

$$\varphi(x, y, z) = Ax + By + Cz \qquad [A, B, C] \neq \mathbf{0} \tag{705}$$

Powierzchniami ekwiskalarnymi tej funkcji są płaszczyzny wzajemnie równoległe i prostopadłe do wektora $[A, B, C]$.

Definicja 14.36 ***Forma kwadratowa trzech zmiennych*** *jest to funkcja postaci*

$$\Phi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy \tag{706}$$

przy założeniu, że co najmniej jedna ze stałych $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$, zwanych współczynnikami formy, nie jest zerem.

Każda forma ma w początku układu wartość 0.

Zapiszemy formę kwadratową (706) w postaci

$$\Phi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \tag{707}$$

i założymy symetrię współczynników, tzn. $a_{12} = a_{21},\ a_{13} = a_{31},\ a_{23} = a_{32}$.

Twierdzenie 14.22 *(Sylvestra) Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby forma kwadratowa (707) była dodatnio określona, jest koniunkcja nierówności*

$$a_{11} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0 \tag{708}$$

Twierdzenie 14.23 *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby forma kwadratowa (707) była ujemnie określona, jest*

$$a_{11} < 0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0 \tag{709}$$

14.13 Pochodne cząstkowe i różniczki funkcji trzech zmiennych

Niech $f(x,y,z)$ będzie funkcją trzech zmiennych określoną w pewnej kuli i niech punkt $P=(x,y,z)$ oraz punkty $(x+\Delta x,y,z)$, $(x,y+\Delta y,x)$, $(x,y,z+\Delta z)$ należą do tej kuli.

Definicja 14.37 ***Pochodną cząstkową*** *pierwszego rzędu funkcji $f(x,y,z)$ w punkcie P odpowiednio względem x, y i z nazywamy granice*

$$\begin{aligned} f_x(P) &= \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x} \\ f_y(P) &= \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y} \\ f_z(P) &= \frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z} \end{aligned} \tag{710}$$

Jeżeli pochodne cząstkowe pierwszego rzędu są określone w pewnej kuli, to różniczkując je powtórnie otrzymujemy dziewięć pochodnych cząstkowych drugiego rzędu, które można przedstawić w postaci **macierzy Hessa**

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} \tag{711}$$

Pochodne f_{xx}, f_{yy}, f_{zz} nazywamy pochodnymi czystymi, pozostałe - pochodnymi mieszanymi. Jeżeli pochodne te są ciągłe, to na mocy Twierdzenia Schwarza (patrz Twierdzenie 14.8, str. 242) spełnione są równości

$$f_{xy}=f_{yx} \qquad f_{yz}=f_{zy} \qquad f_{xz}=f_{zx} \tag{712}$$

14.13.1 Różniczkowalność funkcji trzech zmiennych

Niech $f(x,y,z)$ będzie funkcją trzech zmiennych określoną w pewnym otoczeniu U punktu (x,y,z). Jeżeli istnieją liczby A, B, C takie, że dla dowolnego punktu

$$(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)\in U$$

zachodzi równość

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z+\rho\alpha \tag{713}$$

przy czym

$$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2} \qquad \lim_{\rho\to 0}\alpha=0 \tag{714}$$

to mówimy, że funkcja $f(x,y,z)$ jest **różniczkowalna** w punkcie (x,y,z), wyrażenie $A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z$ nazywamy **różniczką zupełną** funkcji $f(x,y,z)$ w punkcie (x,y,z), a wyraz $\rho\alpha-$ resztą.

Twierdzenie 14.24 *Jeżeli funkcja $f(x,y,z)$ jest różniczkowalna w punkcie $P=(x,y,z)$, to jest w tym punkcie ciągła i ma w tym punkcie pochodne cząstkowe, które są równe współczynnikom różniczki*

$$f_x(P)=A \quad f_y(P)=B \quad f_z(P)=C \tag{715}$$

i jeżeli punkt $P_1 = (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ *należy do dziedziny funkcji* $f(x, y, z)$*, to zachodzi równość*

$$f(P_1) - f(P) = f_x(P)\,\Delta x + f_y(P)\,\Delta y + f_z(P)\,\Delta z + \rho\alpha \tag{716}$$

przy czym

$$\rho = PP_1 \qquad \lim_{\rho\to 0} \alpha = 0 \tag{717}$$

Drugą różniczką funkcji trzech zmiennych $f(x, y, z)$ w punkcie P nazywamy formę kwadratową przyrostów $\mathrm{d}\,x$, $\mathrm{d}\,y$, $\mathrm{d}\,z$, której współczynnikami są drugie pochodne funkcji $f(x, y, z)$ w punkcie P

$$\mathrm{d}^2 f = f_{xx}\,\mathrm{d}\,x^2 + f_{yy}\,\mathrm{d}\,y^2 + f_{zz}\,\mathrm{d}\,z^2 + 2f_{xy}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y + 2f_{xz}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z + 2f_{yz}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z \tag{718}$$

14.14 Ekstremum funkcji trzech zmiennych

14.14.1 Warunek konieczny ekstremum funkcji trzech zmiennych

Twierdzenie 14.25 *Jeżeli funkcja* $f(x, y, z)$ *ma w punkcie* P_0 *ekstremum i jest w tym punkcie różniczkowalna, to wszystkie trzy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji* $f(x, y, z)$ *w punkcie* P_0 *są równe zeru*

$$f_x(P_0) = f_y(P_0) = f_z(P_0) = 0 \tag{719}$$

Uwaga 14.11 *Nie zawsze funkcja, której pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w danym punkcie są równe zeru ma w tym punkcie ekstremum. Weźmy na przykład funkcję* $u = x^2 + y^2 - z^2$*. Ma ona pochodne* $u_x = 2x,\ u_y = 2y,\ u_z = -2z$*. Jedynym punktem, w którym* $u_x = u_y = u_z = 0$ *jest punkt* $(0, 0, 0)$*. W tym przypadku nie jest to jednak ekstremum.*

14.14.2 Warunek wystarczający ekstremum funkcji trzech zmiennych

Twierdzenie 14.26 *Jeżeli funkcja* $f(x, y, z)$ *jest klasy* C^2 *w otoczeniu punktu* P_0 *i jeżeli w punkcie* P_0 *pierwsza różniczka funkcji* $f(x, y, z)$ *znika*

$$f_x(P_0) = f_y(P_0) = f_z(P_0) = 0$$

a druga różniczka jest formą dodatnio określoną, czyli drugie pochodne funkcji $f(x, y, z)$ *w punkcie* P_0 *spełniają nierówności*

$$f_{xx} > 0 \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} > 0 \tag{720}$$

to funkcja $f(x, y, z)$ *ma w punkcie* P_0 ***minimum właściwe****.*

Twierdzenie 14.27 *Jeżeli funkcja* $f(x, y, z)$ *jest klasy* C^2 *w otoczeniu punktu* P_0 *i jeżeli w punkcie* P_0 *pierwsza różniczka funkcji* $f(x, y, z)$ *znika*

$$f_x(P_0) = f_y(P_0) = f_z(P_0) = 0$$

a druga różniczka jest formą ujemnie określoną, czyli drugie pochodne funkcji $f(x, y, z)$ *w punkcie* P_0 *spełniają nierówności*

$$f_{xx} < 0 \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} < 0 \tag{721}$$

to funkcja $f(x, y, z)$ *ma w punkcie* P_0 ***maksimum właściwe****.*

14.14.3 Warunek wykluczający ekstremum funkcji trzech zmiennych

Twierdzenie 14.28 *Jeżeli funkcja $f(x,y,z)$ jest klasy C^2 w otoczeniu punktu P_0 i jeżeli w punkcie P_0 pierwsza różniczka funkcji $f(x,y,z)$ znika a druga jest formą nieokreśloną, to funkcja $f(x,y,z)$ nie ma ekstremum w punkcie P_0.*

14.15 Pochodna kierunkowa i gradient funkcji trzech zmiennych

14.15.1 Pochodna kierunkowa

Niech $f(x,y,z)$ będzie funkcją trzech zmiennych określoną w otoczeniu punktu P_0, a $l-$ półprostą o początku P_0. Granicę

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0) = \lim_{\substack{P\to P_0 \\ P\in l}} \frac{f(P) - f(P_0)}{PP_0} \tag{722}$$

nazywamy **pochodną kierunkową** funkcji $f(x,y,z)$ w punkcie P_0 w kierunku l.

Twierdzenie 14.29 *Jeżeli $f(x,y,z)$ jest funkcją trzech zmiennych, różniczkowalną w punkcie P_0, to*

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(P)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(P)\cos\gamma \tag{723}$$

gdzie α, β, γ są miarami kątów kierunkowych półprostej l względem układu $Oxyz$.

14.15.2 Gradient

Niech $f(x,y,z)$ jest funkcją trzech zmiennych, różniczkowalną w punkcie P_0. Gradientem funkcji $f(x,y,z)$ w punkcie P nazywamy wektor

$$\operatorname{grad} f(P) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P)\right] \tag{724}$$

Twierdzenie 14.30 *Jeżeli $f(x,y,z)$ jest funkcją trzech zmiennych klasy C^1 w otoczeniu punktu P i jeżeli $\operatorname{grad} f(P) \neq 0$, to $\operatorname{grad} f(P)$ jest wektorem prostopadłym do powierzchni ekwiskalarnej funkcji $f(x,y,z)$ w punkcie P.*

14.15.3 Nabla - operator różniczkowy Hamiltona

Definicja 14.38 ***Nablą*** *nazywamy znak ∇, którym Hamilton oznaczył wektorowy operator różniczkowy*

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \tag{725}$$

Działanie tego operatora na funkcję skalarną $f(x,y,z)$ definiujemy równością

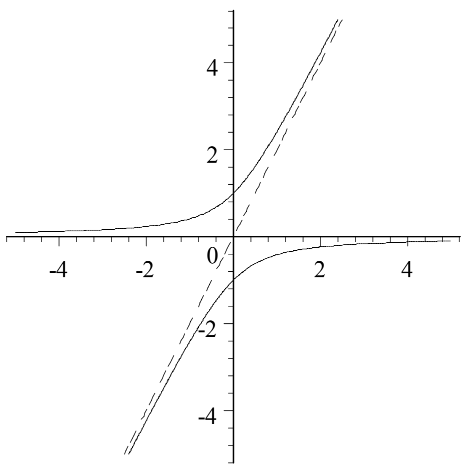
$$\nabla f = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right]$$

Zauważmy, że

$$\nabla f = \operatorname{grad} f \tag{726}$$

15 Funkcje uwikłane

15.1 Funkcje uwikłane jednej zmiennej



Rysunek 107: Funkcja $y^2-2xy-1=0$.

Jeżeli jest dany wzór określający funkcję dwóch zmiennych x i y, który dla dowolnie obranego x należy rozwiązać względem y, aby wyznaczyć wartość tej funkcji, to mówimy, że funkcja jest dana w sposób **uwikłany**, jest **funkcją uwikłaną**.

Równanie

$$x^2y+y-x=0 \tag{727}$$

ma dla dowolnego $x \in \mathcal{R}$ dokładnie jedno rozwiązanie

$$y=\frac{x}{x^2+1}$$

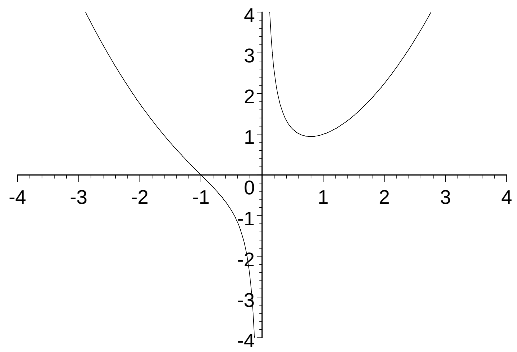
Równanie

$$y^2-2xy-1=0 \tag{728}$$

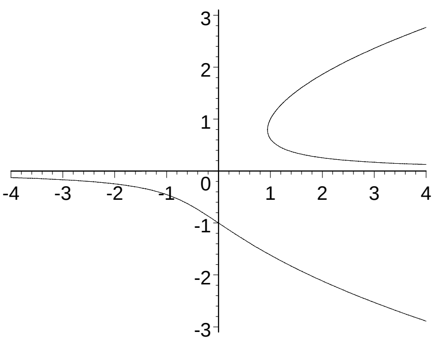
ma dla dowolnego $x \in \mathcal{R}$ dwa rozwiązania

$$y=x+\sqrt{x^2+1} \qquad y=x-\sqrt{x^2+1}$$

Istnieją więc dwie funkcje ciągłe, określone w $\mathcal{R}$ i spełniające te równania (patrz rysunek 107). Prosta przerywana obrazuje asymptotę obu gałęzi.



Rysunek 108: Funkcja $x=\frac{1}{2}\left(y^2+\frac{1}{y}\right)$.



Rysunek 109: Funkcja uwikłana $y^3-2xy+1=0$.

Weźmy funkcję

$$y^3-2xy+1=0 \tag{729}$$

Jest to równanie trzeciego stopnia względem y. Uzyskanie wzoru algebraicznego określającego $y=f(x)$ w sposób jawny jest trudne. Możemy do niego dojść w sposób pośredni. Zamienimy role zmiennych i rozwiążemy to równanie względem x. Funkcja $x=\varphi(y)$ otrzymana w ten sposób będzie funkcją odwrotną do szukanej funkcji $y=f(x)$.

Mamy więc

$$x=\frac{1}{2}\left(y^2+\frac{1}{y}\right) \tag{730}$$

Wykres tej funkcji (patrz rysunek 108) jest jednocześnie wykresem funkcji odwrotnych po zamianie miejscami osi układu współrzędnych.

Na podstawie twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej (Twierdzenie 13.4, str. 193) obliczamy

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\frac{2y^3-1}{2y^2}} = \frac{2y^2}{2y^3-1} \tag{731}$$

Twierdzenie 15.1 *Jeżeli lewa strona równania*

$$F(x,y) = 0 \tag{732}$$

jest funkcją klasy C^1 w pewnym otoczeniu U punktu (x_0, y_0) i jeżeli

$$F(x_0,y_0) = 0 \qquad F_y(x_0,y_0) \neq 0 \tag{733}$$

to istnieje przedział $H = (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, w którym istnieje dokładnie jedna funkcja

$$y = f(x) \tag{734}$$

taka, że

$$\bigwedge_{x\in H} F(x, f(x)) = 0$$

oraz przyjmująca dla argumentu x_0 wartość y_0

$$y_0 = f(x_0)$$

Funkcja ta ma w przedziale H ciągłą pochodną daną wzorem

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \tag{735}$$

Jest to wzór na ***pochodną funkcji uwikłanej****. Otrzymujemy go z relacji*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} F(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} F(x, f(x)) = F_x + F_y f' = 0$$

Funkcję (734) nazywamy ***elementem funkcji uwikłanej zmiennej*** **x** *danej równaniem (732) w otoczeniu punktu (x_0, y_0). Jest to również rozwiązanie równania (732) względem y w otoczeniu punktu (x_0, y_0).*

Twierdzenie 15.2 *Jeżeli lewa strona równania*

$$F(x,y) = 0 \tag{736}$$

jest funkcją klasy C^2 w pewnym otoczeniu U punktu (x_0, y_0) i jeżeli

$$F(x_0,y_0) = 0 \qquad F_y(x_0,y_0) \neq 0$$

to funkcja uwikłana $y = f(x)$ dana równaniem (736) w otoczeniu punktu (x_0, y_0) jest funkcją klasy C^2 i zachodzą związki

$$f' = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \qquad f'' = \frac{-F_y^2 F_{xx} + 2F_{xy}F_xF_y - F_x^2 F_{yy}}{F_y^3} \tag{737}$$

Twierdzenie 15.3 *Warunkiem wystarczającym na to, aby funkcja uwikłana* $y = f(x)$ *dana równaniem* $F(x, y) = 0,\ F \in C^2$*, miała w punkcie* (x, y) *ekstremum właściwe jest, aby*

$$F(x, y) = 0 \qquad F_x(x, y) = 0 \tag{738}$$

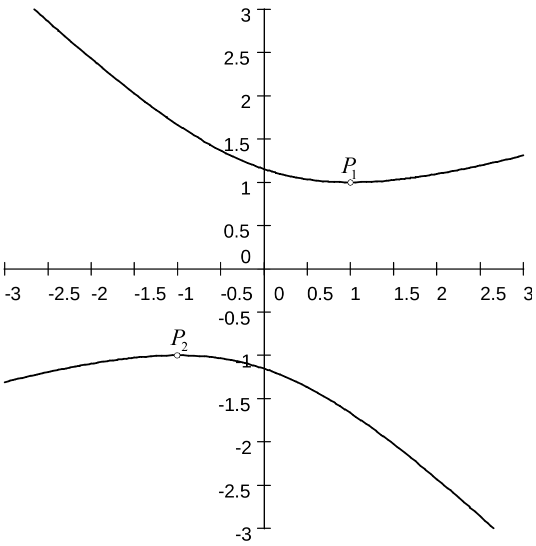
oraz

$$F_y(x, y) \neq 0 \qquad F_{xx}(x, y) \neq 0 \tag{739}$$

Jeżeli warunki te są spełnione, to charakter ekstremum zależy od znaku f''*, mianowicie*

$$f'' = -\frac{F_{xx}}{F_y} \begin{cases} > 0 & \textit{minimum} \\ < 0 & \textit{maksimum} \end{cases}$$

Przedstawioną teorię zilustrujemy przykładami.



Rysunek 110: Ekstrema funkcji $F(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2 + 4 = 0$.

Przykład 15.1 *Zbadać funkcję uwikłaną zmiennej* x *daną równaniem*

$$F(x, y) = x^2y^3 + y - 3 \tag{740}$$

w otoczeniu punktu $x_0 = 0,\ y_0 = 3$.

Rozwiązanie 15.1 *Funkcja* $F(x, y)$ *jest funkcją klasy* C^2*. Stwierdzamy, że* $F(0, 3) = 0$ *oraz*

$$\begin{array}{lcl lcl} F_x(x, y) & = & 2xy^3 & F_x(0, 3) & = & 0 \\ F_y(x, y) & = & 3x^2y^2 + 1 & F_y(0, 3) & = & 1 \neq 0 \\ F_{xx}(x, y) & = & 2y^3 & F_{xx}(0, 3) & = & 54 \neq 0 \end{array}$$

$$f''(0) = -\frac{F_{xx}(0, 3)}{F_y(0, 3)} = -54$$

Funkcja uwikłana $y = f(x)$ *dana równaniem (740) ma dla argumentu* $x = 0$ *w otoczeniu punktu* $(0, 3)$ *maksimum właściwe.*

Przykład 15.2 *Wyznaczyć ekstremum funkcji uwikłanej zmiennej* x *danej równaniem*

$$F(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2 + 4 = 0 \tag{741}$$

Rozwiązanie 15.2 *Warunkiem koniecznym ekstremum funkcji* $y = f(x)$ *jest* $f' = -\frac{F_x}{F_y} = 0$*, a więc*

$$F_x(x, y) = 2x - 2y \tag{742}$$

Rozwiązując układ równań (741) i (742), otrzymujemy dwa punkty $P_1 = (1, 1)$ *i* $P_2 = (-1, -1)$*. Stwierdzamy, że w obu tych punktach spełniony jest warunek (739) oraz że* $f''(1) > 0,\ f''(-1) < 0$*. Element funkcji uwikłanej danej równaniem (741) ma w punkcie* P_1 *minimum. Element funkcji uwikłanej danej równaniem (741) ma w punkcie* P_2 *maksimum (patrz rysunek 110).*

16 Całka nieoznaczona

16.1 Pojęcie funkcji pierwotnej i całki nieoznaczonej

Na wstępie podamy definicję funkcji pierwotnej.

Definicja 16.1 *Mówimy, że funkcja $F(x)$ jest* ***funkcją pierwotną*** *funkcji $f(x)$ na przedziale $\mathcal{E}$, gdy dla każdego $x \in \mathcal{E}$ wartość pochodnej funkcji $F(x)$ jest równa wartości funkcji $f(x)$, tzn. gdy*

$$F'(x) = f(x) \quad dla \quad x \in \mathcal{E} \tag{743}$$

Twierdzenie 16.1 *(O funkcji pierwotnej)*
Jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ na przedziale $x \in \mathcal{E}$, a symbol const *oznacza dowolną funkcję stałą na przedziale $\mathcal{E}$, to funkcja $\Phi(x)$ określona wzorem*

$$\Phi(x) = F(x) + \mathrm{const} \quad dla \quad x \in \mathcal{E} \tag{744}$$

jest również funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ na przedziale $\mathcal{E}$.

Dowód 16.1 $\Phi'(x) = F'(x) + (\mathrm{const})' = F'(x) = f(x)$ *dla* $x \in \mathcal{E}$.

Twierdzenie 16.2 *(O różnicy funkcji pierwotnych)*
Jeżeli $F(x)$ i $\Phi(x)$ są funkcjami pierwotnymi funkcji $f(x)$ na przedziale $\mathcal{E}$, to różnica tych funkcji jest stałą na przedziale $\mathcal{E}$

$$\Phi(x) - F(x) = \mathrm{const} \quad dla \quad x \in \mathcal{E} \tag{745}$$

Dowód 16.2 *Ponieważ* $F'(x) = f(x)$, $\Phi'(x) = f(x)$ *dla* $x \in \mathcal{E}$, *więc* $[\Phi(x) - F(x)]' = 0 = (\mathrm{const})'$ *dla* $x \in \mathcal{E}$.

Wniosek 16.1 *Jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ na przedziale $\mathcal{E}$, to wyrażenie $F(x) + \mathrm{const}$ dla $x \in \mathcal{E}$ przedstawia dowolną funkcję pierwotną funkcji $f(x)$ na przedziale $\mathcal{E}$.*

Uwaga 16.1 *Funkcję stałą nazywamy krótko:* ***stałą*** *i oznaczamy C lub C_1, C_2, a także C', C'' itp.*

Twierdzenie 16.3 *(O całce nieoznaczonej)*
Jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ na przedziale $\mathcal{E}$, a C dowolną stałą, to wyrażenie

$$F(x) + C \quad dla \quad x \in \mathcal{E} \tag{746}$$

nazywamy ***całką nieoznaczoną*** *funkcji $f(x)$ na przedziale $\mathcal{E}$, oznaczamy symbolem $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$*[58] *i piszemy*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(x) + C \tag{747}$$

Uwaga 16.2 *Używane są następujące terminy:*

$f(x)$	–	*funkcja podcałkowa*
x	–	*zmienna całkowania*
$\mathrm{d}\,x$	–	*różniczka zmiennej całkowania*
$f(x)\,\mathrm{d}\,x$	–	*wyrażenie podcałkowe*
C	–	*stała całkowania*

[58] Czytamy: całka f od x $\mathrm{d}\,x$.

Funkcje potęgowe	**Funkcje wykładnicze**
$\displaystyle\int x^n \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$	$\displaystyle\int e^x \,\mathrm{d}\, x = e^x + C$
$\displaystyle\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x = \ln\lvert x\rvert + C$	$\displaystyle\int a^x \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad a > 0, \quad a \neq 1$
Funkcje trygonometryczne	**Funkcje hiperboliczne**
$\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}\, x = -\cos x + C$	$\displaystyle\int \sinh x \,\mathrm{d}\, x = \cosh x + C$
$\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}\, x = \sin x + C$	$\displaystyle\int \cosh x \,\mathrm{d}\, x = \sinh x + C$
$\displaystyle\int \tan x \,\mathrm{d}\, x = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\displaystyle\int \tanh x \,\mathrm{d}\, x = \ln\cosh x + C$
$\displaystyle\int \cot x \,\mathrm{d}\, x = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\displaystyle\int \coth x \,\mathrm{d}\, x = \ln\lvert\sinh x\rvert + C$
$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}\, x = \tan x + C$	$\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x} \,\mathrm{d}\, x = \tanh x + C$
$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}\, x = -\cot x + C$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x} \,\mathrm{d}\, x = -\coth x + C$

Tablica 19: Całki elementarne: funkcje potęgowe, wykładnicze, trygonometryczne i hiperboliczne.

Wniosek 16.2 *Całka nieoznaczona jest to wyrażenie, które przedstawia dowolną funkcję pierwotną funkcji podcałkowej. Wyznaczenie całki nieoznaczonej polega na wskazaniu funkcji, której pochodna jest równa funkcji podcałkowej. Równość (747) jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zależność (743). A więc*

$$\int f(x) \,\mathrm{d}\, x = F(x) + C \text{ dla } x \in \mathcal{E} \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x) \text{ dla } x \in \mathcal{E} \tag{748}$$

Ze znanych wzorów na pochodne wynikają bezpośrednio podstawowe wzory na tzw. **całki elementarne**. Są one zebrane w tabelach 19 i 20.

W następnych dwóch tabelach zamieszczone są tożsamości trygonometryczne oraz pochodne funkcji cyklometrycznych i hiperbolicznych.

Uwaga 16.3 *Symbol całki nieoznaczonej składa się ze znaku całki $\int$ i ze znaku różniczki $\mathrm{d}\, x$. Znak różniczki wskazuje, która ze zmiennych jest zmienną całkowania.*

Wniosek 16.3

$$\int x^n \,\mathrm{d}\, x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{ponieważ} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = x^n$$

$$\int x^r \,\mathrm{d}\, r = \frac{x^r}{\ln x} + C \qquad \text{ponieważ} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, r}\left(\frac{x^r}{\ln x} + C\right) = x^r$$

Funkcje wymierne $(a > 0)$	**Funkcje niewymierne** $(a > 0)$
$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctan} \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} =$ $= \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$
$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{artanh} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a + x}{a - x} + C$ $\lvert x\rvert < a$	$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ $a > \lvert x\rvert$
$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arcoth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x - a}{x + a} + C$ $\lvert x\rvert > a$	$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} =$ $= \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + C$ $\lvert x\rvert > a$

Tablica 20: Całki elementarne: funkcje wymierne i niewymierne.

Wniosek 16.4

$$\int p \cos t \,\mathrm{d}\, t = p \sin t + C \qquad \textit{ponieważ} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}(p \sin t + C) = p \cos t$$

$$\int p \cos t \,\mathrm{d}\, p = \frac{1}{2} p^2 \cos t + C \quad \textit{ponieważ} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, p}\left(\frac{1}{2} p^2 \cos t + C\right) = p \cos t$$

Uwaga 16.4 *Całka z zera jest równa stałej*

$$\int 0 \,\mathrm{d}\, x = C$$

Uwaga 16.5 *Całka ze stałej jest równa zmiennej całkowania pomnożonej przez stałą*

$$\int 1 \,\mathrm{d}\, x = x + C \qquad \int a \,\mathrm{d}\, x = a \int \mathrm{d}\, x = ax + C$$

Przykład 16.1 *Czy równość*

$$\int x \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2} x^2 + C \quad \textit{dla} \quad x \in \mathcal{R} \tag{749}$$

jest prawdziwa?

Rozwiązanie 16.1 *Tak, ponieważ*

$$\left(\frac{1}{2} x^2 + C\right)' = x \quad \textit{dla} \quad x \in \mathcal{R} \tag{750}$$

$\sin \arcsin x = x$	$\tan \arctan x = x$	$\cos \arccos x = x$
$\sin \arccos x = \sqrt{1-x^2}$	$\tan \arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos \arcsin x = \sqrt{1-x^2}$
$\sin \arctan x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\tan \arccos x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\cos \arctan x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\sin \operatorname{arccot} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\tan \operatorname{arccot} x = \frac{1}{x}$	$\cos \operatorname{arccot} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cot \operatorname{arccot} x = x$	$\cot \arcsin x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\cot \arccos x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\cot \arctan x = \frac{1}{x}$	

Tablica 21: Tożsamości trygonometryczne - funkcje trygonometryczne i cyklometryczne.

funkcje trygonometryczne	**funkcje hiperboliczne**
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \operatorname{arsinh} x = \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \operatorname{arcosh} x = \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \operatorname{artanh} x = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]' = \frac{1}{1-x^2}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \operatorname{arcoth} x = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]' = \frac{1}{x^2-1}$

Tablica 22: Pochodne funkcji odwrotnych - funkcje cyklometryczne i hiperboliczne.

Przykład 16.2 *Czy równość*

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \ln x + C \quad dla \quad x > 0 \tag{751}$$

jest prawdziwa?

Rozwiązanie 16.2 *Tak, ponieważ*

$$(\ln x + C)' = \frac{1}{x} \tag{752}$$

Równość

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \ln(-x) + C \quad dla \quad x < 0 \tag{753}$$

jest prawdziwa, gdyż dla $x < 0$ *mamy* $[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$. *Równości (751) i (753) zapisujemy*

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \ln|x| + C \quad dla \quad x \neq 0 \tag{754}$$

przy czym C oznacza dowolną stałą z przedziału $(0;\infty)$ oraz dowolną stałą z przedziału $(-\infty;0)$.

16.2 Całkowanie

Wyznaczanie funkcji pierwotnej nazywamy **całkowaniem**. Jest to proces odwrotny do różniczkowania, lecz znacznie trudniejszy. Na przykład, dla pewnych, nawet dość prostych funkcji

$$e^{x^2} \qquad e^{-x^2} \qquad \frac{e^x}{x} \qquad \frac{1}{\ln x} \qquad \frac{\sin x}{x} \qquad \frac{\cos x}{x} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \tag{755}$$

nie umiemy funkcji pierwotnej wyrazić przy pomocy skończenie wielu znanych funkcji elementarnych. O takich funkcjach mówimy, że są to funkcje **niecałkowalne elementarnie**, a ich całki nazywamy **całkami nieelementarnymi**. Najprostsza metoda wyznaczania całek nieelementarnych polega na całkowaniu kolejnych wyrazów nieskończonych szeregów potęgowych, które są przybliżoną postacią funkcji podcałkowych. Na przykład, funkcję e^{x^2} można rozwinąć w szereg potęgowy

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 + \frac{1}{5!}x^{10} + \frac{1}{6!}x^{12} + O\left(x^{13}\right)$$

i następnie całkować kolejno wyraz po wyrazie

$$\int e^{x^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots\right)\mathrm{d}\,x = C + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} + \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \cdots \tag{756}$$

16.3 Twierdzenia o całce nieoznaczonej

16.3.1 Podstawowe tożsamości

Podstawą naszych rozważań jest równoważność

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(x) + C \quad \text{dla} \quad x \in \mathcal{E}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}F(x) = f(x) \quad \text{dla} \quad x \in \mathcal{E}\right) \tag{757}$$

Załóżmy, że $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}F(x) = f(x)$ dla $x \in \mathcal{E}$. Wówczas obie strony tej równości są prawdziwe. Jeżeli w miejsce $F(x)$ wstawimy funkcję $f(x)$, to otrzymamy tożsamość

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\int f(x)\,\mathrm{d}\,x = f(x) \quad \text{dla} \quad x \in \mathcal{E} \tag{758}$$

Jeżeli zaś w (757) wstawimy funkcję $F(x)$, to otrzymamy tożsamość

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}F(x)\,\mathrm{d}\,x = F(x) + C \quad \text{dla} \quad x \in \mathcal{E} \tag{759}$$

Mówimy, że **całkowanie jest działaniem odwrotnym do różniczkowania**, a **różniczkowanie jest działaniem odwrotnym do całkowania**.

Całka sumy lub różnicy jest równa sumie lub różnicy całek.

Twierdzenie 16.4 *Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są ciągłe na przedziale $\mathcal{E}$, to*

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}\,x = \int f(x)\,\mathrm{d}\,x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{760}$$

Dowód 16.3 *Wystarczy wykazać, że pochodna prawej strony jest funkcją podcałkową po lewej stronie.*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}\,x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}\,x\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\int f(x)\,\mathrm{d}\,x \pm \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\int g(x)\,\mathrm{d}\,x = f(x) \pm g(x) \tag{761}$$

Stałe współczynniki można wynieść przed znak całki.

Twierdzenie 16.5 *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale $\mathcal{E}$, a stała k jest różna od zera, to*

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}\,x = k\int f(x)\,\mathrm{d}\,x \quad dla \quad x \in \mathcal{E} \tag{762}$$

Uwaga 16.6 *Dla $k = 0$ równość (762) nie jest spełniona, gdyż lewa strona jest stałą dowolną, a prawa strona jest zerem.*

Uwaga 16.7 *Jeżeli przy wzorze na całkę nieoznaczoną nie podano przedziału, to należy rozumieć, że wzór ten jest prawdziwy w każdym przedziale otwartym, w którym funkcja podcałkowa jest ciągła.*

Przykład 16.3 *Oblicz całkę nieoznaczoną*

$$I_1 = \int \frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}\,x \tag{763}$$

Rozwiązanie 16.3 *Przekształcimy wyrażenie podcałkowe*

$$\int \frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \int \left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\,x \tag{764}$$

a następnie wyznaczymy wartości całek

$$I_1 = \int \mathrm{d}\,x + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = x + \ln|x| + C \tag{765}$$

Przykład 16.4 *(Wyłączanie współczynnika stałego przed znak całki)*
Oblicz całki

$$I_1 = \int (ax+b)\,\mathrm{d}\,x \tag{766}$$

$$I_2 = \int e^{a+x}\,\mathrm{d}\,x \tag{767}$$

$$I_3 = \int k\frac{Mm}{x^2}\,\mathrm{d}\,x \tag{768}$$

Rozwiązanie 16.4

$$\begin{aligned}
I_1 &= \textstyle\int (ax+b)\,\mathrm{d}\,x = a\int x\,\mathrm{d}\,x + b\int \mathrm{d}\,x = \frac{a}{2}x^2 + bx + C \\
I_2 &= \textstyle\int e^{a+x}\,\mathrm{d}\,x = \int e^a e^x\,\mathrm{d}\,x = e^a\int e^x\,\mathrm{d}\,x = e^a e^x + C = e^{a+x} + C \\
I_3 &= \textstyle\int k\frac{Mm}{x^2}\,\mathrm{d}\,x = kMm\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x = kMm\frac{x^{-1}}{-1} + C = C - \frac{kMm}{x}
\end{aligned}$$

16.4 Całkowanie przez części

Na wstępie przypomnimy sobie wzór na wyznaczanie pochodnej iloczynu dwóch funkcji $u(x)$ i $v(x)$ i obustronnie scałkujemy go:

$$\begin{aligned} (u\cdot v)' &= u'\cdot v + u\cdot v' \\ \int (u\cdot v)'\,\mathrm{d}\,x &= \int u'\cdot v\,\mathrm{d}\,x + \int u\cdot v'\,\mathrm{d}\,x \\ u\cdot v &= \int u'\cdot v\,\mathrm{d}\,x + \int u\cdot v'\,\mathrm{d}\,x \end{aligned} \tag{769}$$

Następnie podamy twierdzenie.:

Twierdzenie 16.6 *Jeżeli funkcje u, v są klasy C^1 na przedziale $\mathcal{E}$, to*[59]

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}\,x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{770}$$

Jest to **wzór na całkowanie przez części**. Można go zapisać krócej

$$\int uv'\,\mathrm{d}\,x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}\,x \tag{771}$$

lub jeszcze krócej

$$\int u\,\mathrm{d}\,v = uv - \int v\,\mathrm{d}\,u \tag{772}$$

Uwaga 16.8 *Jeżeli jest znana całka $\int f\,\mathrm{d}\,x$, to żeby zastosować wzór na całkowanie przez części, należy funkcję podcałkową f przedstawić w postaci iloczynu uv':*

$$\int f\,\mathrm{d}\,x = \int uv'\,\mathrm{d}\,x \tag{773}$$

Jest to możliwe na wiele sposobów. Jednak nie każdy prowadzi do pożądanego wyniku. W prezentowanych przykładach omówimy to zagadnienie. W dalszych rozważaniach obliczenia pomocnicze będziemy umieszczać między nawiasami $\langle(\cdot)\rangle$. Po osiągnięciu pewnej wprawy pominiemy je.

Przykład 16.5 *Obliczyć całki*

$$I_1 = \int x\cos x\,\mathrm{d}\,x \qquad I_2 = \int xe^x\,\mathrm{d}\,x \tag{774}$$

Rozwiązanie 16.5

$$I_1 = \int x\cos x\,\mathrm{d}\,x = \left\langle \left(\begin{array}{ccc} & \boxed{f = u\cdot v' = x\cdot\cos x} & \\ u = x & & v' = \cos x \\ \boxed{\downarrow \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}} & \searrow & \boxed{\downarrow \int v'\,\mathrm{d}\,x} \\ u' = 1 & & v = \sin x \\ & \boxed{-\int u'\cdot v\,\mathrm{d}\,x} & \\ \longleftarrow & & \end{array} \right) \right\rangle = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}\,x \tag{775}$$

[59] Termin: *funkcja klasy C^1* oznacza, że funkcja jest ciągła i jej pierwsza pochodna jest również ciągła.

Jak należy czytać wyrażenie w nawiasie $\langle(\cdot)\rangle$? Otóż, lewy górny element (u) należy pomnożyć przez prawy dolny (v) (strzałka $\searrow$), a następnie odjąć od tego iloczynu $(u\cdot v)$ całkę z iloczynu elementów lewego i prawego dolnego $\left(\underleftarrow{\int u'\cdot v\,\mathrm{d}\,x}\right)$ - o odejmowaniu mówi zwrot strzałki pod wyrażeniem w nawiasie. Na górze lewej kolumny mamy funkcję u, którą należy zróżniczkować (wyrażenie $\boxed{\downarrow \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}}$), natomiast na górze prawej kolumny znajduje się pochodna v', którą należy scałkować (wyrażenie $\boxed{\downarrow \int v'\cdot \mathrm{d}\,x}$).

Stąd

$$I_1=\left\{\begin{array}{rll}\int u\cdot v'\,\mathrm{d}\,x= & u\cdot v & -\int u'\cdot v\,\mathrm{d}\,x\\ \int x\cos x\,\mathrm{d}\,x= & x\sin x & -\int 1\cdot \sin x\,\mathrm{d}\,x\\ \int x\cos x\,\mathrm{d}\,x= & x\sin x & +\cos x+C\end{array}\right. \tag{776}$$

W tym przypadku możemy również zastosować inne podstawienie

$$I_1=\int x\cos x\,\mathrm{d}\,x=\left\langle\left(\begin{array}{ccc}u=\cos x & & v'=x\\ \boxed{\downarrow \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}} & \searrow & \boxed{\downarrow \int v'\,\mathrm{d}\,x}\\ u'=-\sin x & & v=\frac{1}{2}x^2\\ & \boxed{-\int u'\cdot v\,\mathrm{d}\,x} & \end{array}\right)\right\rangle=\frac{1}{2}x^2\cos x+\frac{1}{2}\int x^2\sin x\,\mathrm{d}\,x \tag{777}$$

które znacznie komplikuje (lub wręcz uniemożliwia) rozwiązanie. Oznacza to, że za pochodną v' nie należy podstawiać wyrażenia wielomianowego, ponieważ całkowanie zawsze podwyższa o 1 potęgę zmiennej x.

Przejdziemy do rozwiązania drugiej całki $I_2=\int xe^x\,\mathrm{d}\,x$. Mamy więc

$$I_2=\int xe^x\,\mathrm{d}\,x=\left\langle\left(\begin{array}{ccc}u=x & & v'=e^x\\ \boxed{\downarrow \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}} & \searrow & \boxed{\downarrow \int v'\,\mathrm{d}\,x}\\ u'=1 & & v=e^x\end{array}\right)\right\rangle=xe^x-\int e^x\,\mathrm{d}\,x=(x-1)e^x+C \tag{778}$$

Przykład 16.6 *(Dwukrotne całkowanie przez części)*

Obliczyć całkę

$$I_1=\int x^2e^x\,\mathrm{d}\,x \tag{779}$$

Rozwiązanie 16.6 *Obliczamy kolejno*

$$\begin{aligned}I_1 &= \int x^2e^x\,\mathrm{d}\,x=\left\langle\left(\begin{array}{ccc}u=x^2 & & v'=e^x\\ & \searrow & \\ u'=2x & & v=e^x\end{array}\right)\right\rangle=x^2e^x-2\int xe^x\,\mathrm{d}\,x=\\ &= x^2e^x-2\cdot[\mathit{Przykład\ 16.5}]=x^2e^x-2\cdot\left\langle\left(\begin{array}{ccc}u=x & & v'=e^x\\ & \searrow & \\ u'=1 & & v=e^x\end{array}\right)\right\rangle=\\ &= x^2e^x-2\left[(x-1)e^x+C_1\right]+C_2=x^2e^x-2xe^x+2e^x-2C_1+C_2=\\ &= (x^2-2x+2)e^x+C\end{aligned} \tag{780}$$

Przykład 16.7 *(Trzykrotne całkowanie przez części)*
Oblicz całkę

$$I_1 = \int x^3 e^x \,\mathrm{d}\, x \tag{781}$$

Rozwiązanie 16.7 *Podamy tu wynik, obliczenia mogą być przeprowadzone z wykorzystaniem poprzednich przykładów. Mamy*

$$I_1 = \int x^3 e^x \,\mathrm{d}\, x = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C \tag{782}$$

Przykład 16.8 *Obliczyć całki*

$$\begin{array}{ll} I_1 = \displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}\, x & I_2 = \displaystyle\int x^n \ln x \,\mathrm{d}\, x \\ I_3 = \displaystyle\int \frac{1}{x} \ln x \,\mathrm{d}\, x & I_4 = \displaystyle\int x \ln^2 x \,\mathrm{d}\, x \\ I_5 = \displaystyle\int \ln^2 x \,\mathrm{d}\, x & I_6 = \displaystyle\int \ln^3 x \,\mathrm{d}\, x \end{array} \tag{783}$$

Rozwiązanie 16.8 *Otrzymujemy kolejno*

1.

$$I_1 = \int \ln x \,\mathrm{d}\, x = \left\langle \begin{pmatrix} u = \ln x & & v' = 1 \\ & \searrow & \\ u' = \dfrac{1}{x} & & v = x \end{pmatrix} \right\rangle = x \ln x - \int \frac{1}{x} x \,\mathrm{d}\, x = x \ln x - x + C \tag{784}$$

2. *Jeżeli $n \neq 1$, to otrzymujemy*

$$\begin{aligned} I_2 &= \int x^n \ln x \,\mathrm{d}\, x = \left\langle \begin{pmatrix} u = \ln x & & v' = x^n \\ & \searrow & \\ u' = \dfrac{1}{x} & & v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{x^{n+1}}{n+1} \,\mathrm{d}\, x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C \quad n \neq -1 \end{aligned} \tag{785}$$

3. *Jeżeli $n = -1$, to dochodzimy do równania*

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{1}{x} \ln x \,\mathrm{d}\, x = \left\langle \begin{pmatrix} u = \ln x & & v' = \dfrac{1}{x} \\ & \searrow & \\ u' = \dfrac{1}{x} & & v = \ln x \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= \ln^2 x - \int \frac{1}{x} \ln x \,\mathrm{d}\, x + C_1 \end{aligned} \tag{786}$$

Stąd

$$2\int \frac{1}{x}\ln x \,\mathrm{d}\, x = \ln^2 x + C_1$$

Czyli

$$\int \frac{1}{x}\ln x \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{2}C_1 = \frac{1}{2}\ln^2 x + C \tag{787}$$

4.

$$I_4 = \int x\ln^2 x \,\mathrm{d}\, x = \left\langle \begin{pmatrix} u = \ln^2 x & & v' = x \\ & \searrow & \\ u' = \dfrac{2\ln x}{x} & & v = \dfrac{x^2}{2} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x\ln x \,\mathrm{d}\, x =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \left\langle \begin{pmatrix} u = \ln x & & v' = x \\ & \searrow & \\ u' = \dfrac{1}{x} & & v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right) + C = \frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + C \tag{788}$$

5.

$$I_5 = \int \ln^2 x \,\mathrm{d}\, x = \left\langle \begin{pmatrix} u = \ln^2 x & & v' = 1 \\ & \searrow & \\ u' = \dfrac{2}{x}\ln x & & v = x \end{pmatrix} \right\rangle = \tag{789}$$

$$= x\ln^2 x - 2\int \ln x \,\mathrm{d}\, x = x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - x + C\right) =$$

$$= x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + C'$$

6.

$$I_6 = \int \ln^3 x \,\mathrm{d}\, x = x\left(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6\right) + C \tag{790}$$

Przykład 16.9 *Obliczyć całkę*

$$I = \int e^x \cos x \,\mathrm{d}\, x \tag{791}$$

Rozwiązanie 16.9 *Całkując dwukrotnie przez części dochodzimy do dwóch równości*

$$I_1 = \int e^x \cos x \,\mathrm{d}\, x = \left\langle \begin{pmatrix} u = e^x & & v' = \cos x \\ & \searrow & \\ u' = e^x & & v = \sin x \end{pmatrix} \right\rangle = e^x \sin x - \int e^x \sin x \,\mathrm{d}\, x + C' \tag{792}$$

$$I_2 = \int e^x \sin x \,\mathrm{d}\, x = \left\langle \begin{pmatrix} u = e^x & & v' = \sin x \\ & \searrow & \\ u' = e^x & & v = -\cos x \end{pmatrix} \right\rangle = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \,\mathrm{d}\, x + C'' \tag{793}$$

Relacje te możemy uznać za układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi. Są nimi $I_1 = \int e^x \cos x \,\mathrm{d}\, x$ *i* $I_2 = \int e^x \sin x \,\mathrm{d}\, x$*. Po rozwiązaniu dochodzimy do*

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = e^x \sin x + C_1 \\ \\ I_1 - I_2 = e^x \cos x + C_2 \end{cases} \tag{794}$$

Po rozwiązaniu dochodzimy do wyników

$$\begin{aligned} I_1 &= \int e^x \cos x \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2} e^x \left(\sin x + \cos x\right) + C_1 \\ I_2 &= \int e^x \sin x \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2} e^x \left(\sin x - \cos x\right) + C_2 \end{aligned} \tag{795}$$

gdzie stałe C_1 *i* C_2 *są dowolne.*

Przykład 16.10 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \cos^2 x \,\mathrm{d}\, x \tag{796}$$

Rozwiązanie 16.10

$$\begin{aligned} I = \int \cos^2 x \,\mathrm{d}\, x &= \left\langle \begin{pmatrix} u = \cos x & & v' = \cos x \\ & \searrow & \\ u' = -\sin x & & v = \sin x \end{pmatrix} \right\rangle = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \,\mathrm{d}\, x = \\ &= \sin x \cos x + \int \left(1 - \cos^2 x\right) \mathrm{d}\, x = \sin x \cos x + x + C' - \int \cos^2 x \,\mathrm{d}\, x \end{aligned} \tag{797}$$

Otrzymaliśmy równanie z jedną niewiadomą. Jest nią poszukiwana całka I*. A więc*

$$2I = \sin x \cos x + x + C \tag{798}$$

Stąd

$$I = \int \cos^2 x \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2} \left(x + \sin x \cos x\right) + C \tag{799}$$

Przykład 16.11 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \sin^2 x \,\mathrm{d}\, x$$

Rozwiązanie 16.11 *Korzystamy z rozwiązania otrzymanego w poprzednim przykładzie.*

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \,\mathrm{d}\, x &= \int \left(1 - \cos^2 x\right) \mathrm{d}\, x = x - \frac{1}{2} \left(x + \sin x \cos x\right) + C = \\ &= \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + C \end{aligned}$$

Przykład 16.12 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \cosh^2 x \,\mathrm{d}\, x \tag{800}$$

Rozwiązanie 16.12

$$\begin{aligned}
\int \cosh^2 x \,\mathrm{d}\, x &= \left\langle \begin{pmatrix} u = \cosh x & & v' = \cosh x \\ & & \\ u' = \sinh x & & v = \sinh x \end{pmatrix} \right\rangle = \\
&= \cosh x \sinh x - \int \left(\cosh^2 x - 1\right) \mathrm{d}\, x = \\
&= x + \cosh x \sinh x + C' - \int \cosh^2 x \,\mathrm{d}\, x
\end{aligned}$$

Przenosząc całkę $\int \cosh^2 x \,\mathrm{d}\, x$ *na lewą stronę otrzymujemy* $2\int \cosh^2 x \,\mathrm{d}\, x = x + \cosh x \sinh x + C'$. *Stąd*

$$\int \cosh^2 x \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}\left(x + \cosh x \sinh x\right) + C \tag{801}$$

16.5 Całkowanie przez podstawienie

O całkowaniu przez podstawienie mówi twierdzenie.

Twierdzenie 16.7 *Niech* $f(x)$ *będzie funkcją ciągłą na przedziale* $\mathcal{E}$. *Wówczas całka*

$$\int f(x) \,\mathrm{d}\, x \tag{802}$$

istnieje na przedziale $\mathcal{E}$ *i na każdym podprzedziale tego przedziału. Jeżeli funkcja*

$$x = g(t) \quad t \in \mathcal{T} \tag{803}$$

jest klasy C^1 *na przedziale* $\mathcal{T}$ *i zbiór* G *wartości tej funkcji na przedziale* $\mathcal{T}$ *jest podprzedziałem przedziału* $\mathcal{E}$, *to zachodzi równość*

$$\int f(x) \,\mathrm{d}\, x_{|x=g(t)} = \int f\left[g(t)\right] g'(t) \,\mathrm{d}\, t \quad t \in \mathcal{T} \tag{804}$$

Jeżeli dodatkowo funkcja $g(t)$ *jest odwracalna na przedziale* $\mathcal{T}$ *i funkcją odwrotną jest*

$$t = \gamma(x) \quad x \in \mathcal{G} \tag{805}$$

to zachodzi równość

$$\int f(x) \,\mathrm{d}\, x = \int f\left[g(t)\right] g'(t) \,\mathrm{d}\, t_{|t=\gamma(x)} \quad x \in \mathcal{G} \tag{806}$$

Uwaga 16.9 *Całkowanie przez podstawienie odbywa się według poniższej procedury:*

1. *wybór podstawienia* $x = g(t)$, *obliczenie różniczki* $\mathrm{d}\, x$,
2. *wykonanie podstawienia i obliczenie całki jako funkcji zmiennej* t

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\,x\big|_{x=g(t)} = \int f[g(t)]g'(t)\,\mathrm{d}\,t = \phi(t) + C \tag{807}$$

3. *powrót do zmiennej x przez podstawienie odwrotne* $\boxed{t = \gamma(x)}$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\,x = \phi(t) + C\big|_{t=\gamma(x)} = F(x) + C \tag{808}$$

W praktyce stosujemy zapis umowny (**wzór na całkowanie przez podstawienie**):

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}\,x &= \left\langle\left(\begin{array}{l} x = g(t) \\ \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = g'(t) \\ \mathrm{d}\,x = g'(t)\,\mathrm{d}\,t \end{array}\right)\right\rangle = \int f\,[g(t)]\,g'(t)\,\mathrm{d}\,t = \\ &= \phi(t) + C = \boxed{\langle(t = \gamma(x))\rangle} = F(x) + C\end{aligned} \tag{809}$$

Przykład 16.13 *Scałkować przez podstawienie funkcję e^{5x}.*

Rozwiązanie 16.13

$$\begin{aligned}\int e^{5x}\,\mathrm{d}\,x &= \left\langle\left(\begin{array}{l} 5x = t \\ \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{1}{5} \\ \mathrm{d}\,x = \frac{1}{5}\,\mathrm{d}\,t \end{array}\right)\right\rangle = \frac{1}{5}\int e^t\,\mathrm{d}\,t = \\ &= \frac{e^t}{5} + C = \langle(t = 5x)\rangle = \frac{e^{5x}}{5} + C\end{aligned} \tag{810}$$

Przykład 16.14 *Scałkować przez podstawienie funkcję xe^{5x}.*

Rozwiązanie 16.14

$$\begin{aligned}\int xe^{5x}\,\mathrm{d}\,x &= \left\langle\left(\begin{array}{l} 5x = t \\ x = \frac{1}{5}t,\ \ \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{1}{5} \\ \mathrm{d}\,x = \frac{1}{5}\,\mathrm{d}\,t \end{array}\right)\right\rangle = \int \frac{t}{5}e^t\frac{1}{5}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{25}\int te^t\,\mathrm{d}\,t = \\ &= \textit{(patrz Przykład 16.5, str. 268)} = \frac{1}{25}(t-1)e^t + C = \\ &= \langle(t = 5x)\rangle = \frac{1}{25}(5x-1)e^{5x} + C\end{aligned} \tag{811}$$

Przykład 16.15 *Scałkować przez podstawienie funkcję $\left.\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\right|_{a>0}$.*

Rozwiązanie 16.15

$$\begin{aligned}\int \left.\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right|_{a>0} &= \frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \left\langle\left(\begin{array}{l} x/a = t \\ x = at \\ \mathrm{d}\,x = a\,\mathrm{d}\,t \end{array}\right)\right\rangle = \int\frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{1-t^2}} = \\ &= \textit{(patrz Tabela 19 dla } a = 1\textit{)} = \\ &= \arcsin t + C = \left\langle\left(t = \frac{x}{a}\right)\right\rangle = \arcsin\frac{x}{a} + C\end{aligned} \tag{812}$$

Przykład 16.16 *Scałkować przez podstawienie funkcję* $\sqrt{1-x^2}$; $|x| \le 1$.

Rozwiązanie 16.16

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x &= \left\langle \begin{pmatrix} |x|<1 \\ x=\sin t \\ |t|<\pi/2 \\ \mathrm{d}\,x = \cos t\,\mathrm{d}\,t \end{pmatrix} \right\rangle = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}\,t = \rangle \textit{Przyk. 16.10, str. 272} \langle = \\
&= \frac{1}{2}(t + \cos t \sin t) + C = \left\langle \begin{pmatrix} t = \arcsin x \\ \sin t = x \\ \cos t = \sqrt{1-x^2} \end{pmatrix} \right\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C
\end{aligned} \tag{813}$$

Przykład 16.17 *Scałkować przez podstawienie funkcję* $\sqrt{a^2-x^2}$; $a>0$; $|x| \le a$.

Rozwiązanie 16.17

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2-x^2}\Big|_{a>0}\,\mathrm{d}\,x &= a\int \sqrt{1-(x/a)^2}\,\mathrm{d}\,x = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{x}{a} = t \\ x = at \\ \mathrm{d}\,x = a\,\mathrm{d}\,t \end{pmatrix} \right\rangle = \\
&= a^2 \int \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}\,t = \rangle \textit{poprzedni przykład} \langle = \\
&= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}\right) + C = \\
&= \left\langle \left(t = \frac{x}{a}\right) \right\rangle = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) + C = \\
&= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C
\end{aligned} \tag{814}$$

Przykład 16.18 *Scałkować przez podstawienie funkcję* $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Rozwiązanie 16.18

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,x &= \left\langle \begin{pmatrix} x = \sinh t \\ \mathrm{d}\,x = \cosh t\,\mathrm{d}\,t \end{pmatrix} \right\rangle = \int \frac{\cosh t\,\mathrm{d}\,t}{\sqrt{1+\sinh^2 t}} = \\
&= \int \frac{\cosh t}{\cosh t}\,\mathrm{d}\,t = \int \mathrm{d}\,t = t + C = \operatorname{arsinh} x + C = \\
&= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C
\end{aligned} \tag{815}$$

Przykład 16.19 *Scałkować przez podstawienie funkcję* $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$; $a>0$.

Rozwiązanie 16.19

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{a^2+x^2}}\bigg|_{a>0} &= \left\langle\!\!\left(\begin{array}{c} x = at \\ \mathrm{d}\,x = a\,\mathrm{d}\,t\end{array}\right)\!\!\right\rangle = \int \frac{a\,\mathrm{d}\,t}{\sqrt{a^2+a^2t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{1+t^2}} = \\ &= \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) + C = \ln\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2}\right) + C\end{aligned} \tag{816}$$

Ale $\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2}\right) = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) - \ln a$ *(przypis 60 na stronie 276).*

Przykład 16.20 *Scałkować przez podstawienie funkcję* $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$*;* $x>1$*.*

Rozwiązanie 16.20

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x^2-1}}\bigg|_{x>1} &= \left\langle\!\!\left(\begin{array}{c} x = \cosh t \\ \mathrm{d}\,x = \sinh t\,\mathrm{d}\,t\end{array}\right)\!\!\right\rangle = \int \frac{\sinh t\,\mathrm{d}\,t}{\sqrt{t^2-1}} = \int \frac{\sinh t}{\sinh t}\,\mathrm{d}\,t = \\ &= t + C = \langle (t = \operatorname{arcosh} x)\rangle = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + C\end{aligned} \tag{817}$$

Przykład 16.21 *Scałkować przez podstawienie funkcję* $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$*;* $a>0$*;* $x>a$*.*

Rozwiązanie 16.21 [60]

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x^2-a^2}}\bigg|_{a>0} &= \left\langle\!\!\left(\begin{array}{c} x = az \\ \mathrm{d}\,x = a\,\mathrm{d}\,z\end{array}\right)\!\!\right\rangle = \int \frac{\mathrm{d}\,z}{\sqrt{z^2-1}} = \rangle \textit{patrz (817)} \langle = \\ &= \ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right) + C' = \left\langle\!\left(z = \frac{x}{a}\right)\!\right\rangle = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C\end{aligned} \tag{818}$$

Przykład 16.22 *Scałkować przez podstawienie funkcję* $\sqrt{x^2+1}$*.*

Rozwiązanie 16.22 [61]

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x &= \left\langle\!\!\left(\begin{array}{c} x = \sinh t \\ \mathrm{d}\,x = \cosh t\,\mathrm{d}\,t\end{array}\right)\!\!\right\rangle = \int \sqrt{1+\sinh^2 t}\cosh t\,\mathrm{d}\,t = \\ &= \int \cosh^2 t\,\mathrm{d}\,t = \rangle \textit{Przyk. 16.12, str. 273} \langle = \\ &= \frac{1}{2}\left(\cosh t \sinh t + t\right) + C = \langle (t = \operatorname{arsinh} x)\rangle = \\ &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arsinh} x\right) = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right] + C\end{aligned} \tag{819}$$

---

[60] $\ln\left(z+\sqrt{z^2-a^2}\right) + C' = \ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right) + C' = \ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} + C' = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) - \ln a + C' = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C;\quad C = C' - \ln a$

[61] Jeśli $t = \operatorname{arsinh} x$, to $x = \sinh t$ oraz $1+x^2 = 1+\sinh^2 t = \cosh^2 t$. Stąd mamy $\cosh t = \sqrt{1+x^2}$. Ponadto, $\sinh(\operatorname{arsinh} x) = x$. Zatem $\cosh t \sinh t = x\sqrt{1+x^2}$.

Przykład 16.23 *Scałkować przez podstawienie funkcję* $\sqrt{x^2+a^2}$.

Rozwiązanie 16.23

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}\,x &= \left\langle\!\left(\begin{array}{c} x = az \\ \mathrm{d}\,x = a\,\mathrm{d}\,z \end{array} \right)\!\right\rangle = a^2 \int \sqrt{1+z^2}\,\mathrm{d}\,z = a^2 \,\rangle \textit{Przykład 16.22}\langle = \\
&= \frac{a^2}{2}\left[z\sqrt{1+z^2} + \ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right) + C\right] = \left\langle\!\left(z = \frac{x}{a}\right)\!\right\rangle = \\
&= \frac{a^2}{2}\left[\frac{x}{a}\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} + \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)\right] = \\
&= \frac{a^2}{2}\left[\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2+x^2} + \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right] + C'
\end{aligned} \tag{820}$$

Przykład 16.24 *Oblicz całkę nieoznaczoną*

$$I_2 = \int 2\cos\frac{a+b}{2}x\cdot\cos\frac{a-b}{2}x\,\mathrm{d}\,x \tag{821}$$

Rozwiązanie 16.24 *Wykorzystując znaną tożsamość trygonometryczną:*

$$2\cos\frac{a+b}{2}x\cdot\cos\frac{a-b}{2}x = \cos ax + \cos bx \tag{822}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int 2\cos\frac{a+b}{2}x\cdot\cos\frac{a-b}{2}x\,\mathrm{d}\,x = \int(\cos ax+\cos bx)\,\mathrm{d}\,x = \\
&= \frac{\sin ax}{a} + \frac{\sin bx}{b} + C \qquad a\neq 0, \quad b\neq 0
\end{aligned} \tag{823}$$

16.6 Całkowanie przez włączenie pod symbol różniczki

Należy zapamiętać następujące reguły:

Reguła 16.1 *Jeżeli w funkcji podcałkowej licznik jest pochodną mianownika, to funkcją pierwotną jest* ***logarytm naturalny*** *z modułu mianownika:*

$$\int\frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}\,x = \int\frac{\mathrm{d}\,y(x)}{y(x)} = \ln|y(x)| + C \tag{824}$$

Przykład 16.25 *Obliczyć całkę*

$$I = \int\frac{x}{x^2+r^2}\,\mathrm{d}\,x \tag{825}$$

Rozwiązanie 16.25

$$\int \frac{x}{x^2+r^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+r^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+r^2\right| + C \tag{826}$$

Przykład 16.26 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \cot x \,\mathrm{d}\,x \tag{827}$$

Rozwiązanie 16.26

$$\int \cot x\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}\,x = \ln|\sin x| + C \tag{828}$$

Reguła 16.2 *Jeżeli funkcja podcałkowa ma postać*

$$f(x) = y'(x)e^{y(x)} \tag{829}$$

to funkcją pierwotną jest

$$F(x) = e^{y(x)} + C \tag{830}$$

Przykład 16.27 *Obliczyć całkę*

$$I = \int xe^{x^2}\,\mathrm{d}\,x \tag{831}$$

Rozwiązanie 16.27

$$\begin{aligned} \int xe^{x^2}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}\,x = \left\langle \begin{pmatrix} y = x^2 \\ \mathrm{d}\,y = 2x\,\mathrm{d}\,x \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}\int e^y\,\mathrm{d}\,y = \\ &= \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C \end{aligned} \tag{832}$$

Przykład 16.28 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \cos x e^{\sin x}\,\mathrm{d}\,x \tag{833}$$

Rozwiązanie 16.28

$$\int \cos x e^{\sin x}\,\mathrm{d}\,x = \left\langle \begin{pmatrix} y = \sin x \\ \mathrm{d}\,y = \cos x\,\mathrm{d}\,x \end{pmatrix} \right\rangle = \int e^y\,\mathrm{d}\,y = e^y + C = e^{\sin x} + C \tag{834}$$

Reguła 16.3 *Jeżeli funkcja podcałkowa ma postać*

$$f(x) = y'(x)\,[y(x)]^p \tag{835}$$

to funkcją pierwotną jest

$$F(x) = \frac{y^{p+1}}{p+1} + C \tag{836}$$

Przykład 16.29 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \frac{x\,\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{837}$$

Rozwiązanie 16.29

$$\begin{aligned}\int \frac{x\,\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1-x^2}} &= -\int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x = \left\langle\begin{pmatrix} y = 1-x^2 \\ \mathrm{d}\,y = -2x\,\mathrm{d}\,x\end{pmatrix}\right\rangle = -\int \frac{\mathrm{d}\,y}{2\sqrt{y}} = \\ &= -\frac{1}{2}\int y^{-1/2}\,\mathrm{d}\,y = -\sqrt{y} + C = -\sqrt{1-x^2} + C\end{aligned} \tag{838}$$

Przykład 16.30 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{2+3x} \tag{839}$$

Rozwiązanie 16.30

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{2+3x} = \left\langle\begin{pmatrix} y = 2+3x \\ \mathrm{d}\,y = 3\,\mathrm{d}\,x\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}\,y}{y} = \frac{1}{3}\ln|y| + C = \frac{1}{3}\ln|2+3x| + C \tag{840}$$

Przykład 16.31 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}\,x \tag{841}$$

Rozwiązanie 16.31

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}\,x = \\ &= \ln\left|x^2+2x+2\right| + \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}\,x = \left\langle\begin{pmatrix} t = x+1 \\ \mathrm{d}\,t = \mathrm{d}\,x\end{pmatrix}\right\rangle = \\ &= \ln\left|x^2+2x+2\right| + \int \frac{\mathrm{d}\,t}{1+t^2} = \\ &= \ln\left|x^2+2x+2\right| + \rangle\,\textit{Tabela 19}\,\langle = \\ &= \ln\left|x^2+2x+2\right| + \arctan t + C = \\ &= \ln\left|x^2+2x+2\right| + \arctan(x+1) + C\end{aligned} \tag{842}$$

Przykład 16.32 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{1+(ax+b)^2}\bigg|_{a\neq 0} \tag{843}$$

Rozwiązanie 16.32

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}\,x}{1+(ax+b)^2}\bigg|_{a\neq 0} &= \left\langle\begin{pmatrix} y = ax+b \\ \mathrm{d}\,y = a\,\mathrm{d}\,x\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\,y}{1+y^2} = \frac{1}{a}\arctan y + C = \\ &= \frac{1}{a}\arctan(ax+b) + C\end{aligned} \tag{844}$$

Przykład 16.33 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \frac{3x+4}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}\,x \tag{845}$$

Rozwiązanie 16.33

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+4}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{8}{3}}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{3}{2}\int \frac{2x-2+\frac{14}{3}}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}\,x = \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}\,x + 7\int \frac{\mathrm{d}\,x}{(x-1)^2+1} = \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-2x+2\right| + \left\langle\left(\begin{array}{c} t = x-1 \\ \mathrm{d}\,t = \mathrm{d}\,x \end{array}\right)\right\rangle + 7\int \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2+1} = \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-2x+2\right| + 7\arctan t + C = \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-2x+2\right| + 7\arctan(x-1) + C
\end{aligned} \tag{846}$$

Przykład 16.34 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{(ax+b)^2+r^2} \tag{847}$$

Rozwiązanie 16.34

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{(ax+b)^2+r^2} = \frac{1}{r^2}\int \frac{\mathrm{d}\,x}{1+\left(\frac{ax+b}{r}\right)^2} = \frac{1}{ar}\arctan\frac{ax+b}{r} + C \tag{848}$$

Przykład 16.35 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \frac{e^x}{e^x+k}\,\mathrm{d}\,x \tag{849}$$

Rozwiązanie 16.35

$$\int \frac{e^x\,\mathrm{d}\,x}{e^x+k} = \left\langle\left(\begin{array}{c} y = e^x+k \\ \mathrm{d}\,y = e^x\,\mathrm{d}\,x \end{array}\right)\right\rangle = \int \frac{\mathrm{d}\,y}{y} = \ln|y| + C = \ln|e^x+k| + C \tag{850}$$

Przykład 16.36 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}\,x \tag{851}$$

Rozwiązanie 16.36

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}\,x = \left\langle\left(\begin{array}{c} y = e^x \\ \mathrm{d}\,y = e^x\,\mathrm{d}\,x \end{array}\right)\right\rangle = \int \frac{\mathrm{d}\,y}{y^2+1} = \arctan y + C = \arctan e^x + C \tag{852}$$

Przykład 16.37 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \tanh x \, \mathrm{d}\, x \tag{853}$$

Rozwiązanie 16.37

$$\int \tanh x \, \mathrm{d}\, x = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} \, \mathrm{d}\, x = \ln |\cosh x| + C = \ln \cosh x + C \tag{854}$$

Przykład 16.38 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \arctan x \, \mathrm{d}\, x \tag{855}$$

Rozwiązanie 16.38

$$\begin{aligned} \int \arctan x \, \mathrm{d}\, x &= \left\langle \left(\begin{array}{ccc} u = \arctan x & & v' = 1 \\ \boxed{\downarrow \frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, x}} & \searrow & \boxed{\downarrow \int v' \, \mathrm{d}\, x} \\ u' = \dfrac{1}{1+x^2} & & v = x \end{array} \right) \right\rangle = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}\, x = \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} + C \end{aligned} \tag{856}$$

Przykład 16.39 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \arcsin x \, \mathrm{d}\, x \tag{857}$$

Rozwiązanie 16.39

$$\begin{aligned} \int \arcsin x \, \mathrm{d}\, x &= \left\langle \left(\begin{array}{ccc} u = \arcsin x & & v' = 1 \\ \boxed{\downarrow \frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, x}} & \searrow & \boxed{\downarrow \int v' \, \mathrm{d}\, x} \\ u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & & v = x \end{array} \right) \right\rangle = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}\, x = \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned} \tag{858}$$

16.7 Całkowanie funkcji wymiernych

16.7.1 Funkcja wymierna

Na początku zdefiniujemy funkcję wymierną.

Definicja 16.2 *(Funkcji wymiernej)*
Funkcją wymierną *nazywamy iloraz dwóch wielomianów, przy czym zakładamy, że wielomian będący dzielnikiem nie jest wielomianem zerowym.*

Oznacza to, że funkcję wymierną można przedstawić w postaci ułamka

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)} \tag{859}$$

gdzie: $P(x), Q(x)-$ wielomiany niezerowe. Wielomian $Q(x)$ **jest wielomianem co najmniej pierwszego stopnia**. Jeżeli wielomiany te mają wspólny podzielnik, to funkcję wymierną $R(x)$ będziemy sprowadzać do postaci[62]

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{p(x)(x-\alpha)}{q(x)(x-\alpha)}=\frac{p(x)}{q(x)} \tag{860}$$

Jest to tzw. **metoda usuwania osobliwości pozornych**. Po tej operacji wyrażenia $p(x), q(x)$ są **wzajemnie pierwsze**: nie mają już wspólnego podzielnika różnego od stałej. Wyrażenie

$$\frac{x^2-1}{x^3+1}$$

ma osobliwość w punkcie $x=-1$. Natomiast ułamek

$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{x-1}{x^2-x+1}$$

już jej nie ma.

Jeżeli licznik $P(x)$ jest stopnia równego lub wyższego niż mianownik, to wykonując dzielenie otrzymujemy

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=W(x)+\frac{S(x)}{Q(x)} \tag{861}$$

gdzie: $W(x)$ jest pewnym wielomianem, a $S(x)$ jest wielomianem stopnia niższego niż $Q(x)$.

Przykład 16.40 *Sprowadzić ułamek niewłaściwy*

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}$$

do postaci (861).

Rozwiązanie 16.40 *Wykonujemy dzielenie*

$$\begin{array}{rlll} P(x):Q(x)= & (x^3+x+1):(x^2+1)= & x= & W(x) \\ & \underline{x^3+x\qquad\quad} & & \\ & \qquad\qquad 1=S(x) & & \end{array}$$

Stąd

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}$$

Przykład 16.41 *Sprowadzić ułamek niewłaściwy*

$$\frac{x^5+x^3+1}{x^3-1}$$

do postaci (861).

[62] Wielomian $q(x)$ jest wielomianem co najmniej pierwszego stopnia.

Rozwiązanie 16.41 *Wykonujemy dzielenie*

$$
\begin{array}{rlll}
P(x):Q(x)= & (x^5+x^3+1):(x^3-1)= & x^2+1= & W(x)\\
& \underline{x^5-x^2} & & \\
& \quad x^3-x^2+1 & & \\
& \quad \underline{x^3-1} & & \\
& \qquad\quad x^2+2=S(x) & &
\end{array}
$$

Stąs

$$\frac{x^5+x^3+1}{x^3-1}=x^2+1+\frac{x^2+2}{x^3-1}$$

16.7.2 Niektóre wielomiany i ich rozkłady

1. $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$
2. x^2+a^2 suma kwadratów nierozkładalna, jeżeli $a\neq 0$
3. $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$
4. $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$
5. $x^4-a^4=(x^2-a^2)(x^2+a^2)$
6. $x^4+a^4=x^4+2a^2x^2+a^4-2a^2x^2=(x^2+a^2)^2-2a^2x^2=$
   $=\left(x^2-\sqrt{2}ax+a^2\right)\left(x^2+\sqrt{2}ax+a^2\right)$
7. $x^6-a^6=(x^3-a^3)(x^3+a^3)$ $\rangle$ patrz punkty 3 i 4 $\langle$
8. $x^6+a^6=(x^2+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)$
9. $x^8-a^8=(x^4-a^4)(x^4+a^4)$
10. $x^8+a^8=\left(x^4-\sqrt{2}a^2x^2+a^4\right)\left(x^4+\sqrt{2}a^2x^2+a^4\right)$

16.7.3 Rozkład funkcji wymiernych na ułamki proste

Procedurę tę omawia twierdzenie:

Twierdzenie 16.8 *Jeżeli licznik funkcji wymiernej $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ jest stopnia niższego niż mianownik, to funkcję tę można przedstawić w postaci*

$$
\begin{aligned}
R(x)= &\ \frac{A}{(x-\alpha)^r}+\frac{B}{(x-\alpha)^{r-1}}+\cdots+\frac{C}{(x-\alpha)^2}+\frac{D}{x-\alpha}+\\
&+\frac{A_1}{(x-\beta)^s}+\frac{B_1}{(x-\beta)^{s-1}}+\cdots+\frac{C_1}{(x-\beta)^2}+\frac{D_1}{x-\beta}+\cdots+\\
&+\frac{Gx+H}{(ax^2+bx+c)^t}+\frac{Kx+L}{(ax^2+bx+c)^{t-1}}+\cdots+\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}+\\
&+\frac{Px+Q}{(ex^2+fx+g)^u}+\frac{Rx+S}{(ex^2+fx+g)^{u-1}}+\cdots+\frac{Tx+U}{ex^2+fx+g}+\cdots
\end{aligned}
\tag{862}
$$

W rozkładzie tym $A, B, C, \ldots$ są liczbami stałymi - tzw. **stałymi rozkładu**. Są one w każdym przypadku jednoznacznie określone i wyznacza się je za pomocą **metody współczynników nieoznaczonych**. Rozkład taki nosi nazwę **rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste**.

Rozróżniamy dwa typy ułamków prostych.

1. **typ I**: mianownikiem jest czynnik liniowy w dowolnej potędze naturalnej; licznik jest stałą
$$\frac{A}{(x-\alpha)^n} \tag{863}$$

2. **typ II**: mianownikiem jest czynnik kwadratowy, nierozkładalny w zbiorze $\mathcal{R}$, w dowolnej potędze naturalnej; licznik jest funkcją liniową
$$\frac{Gx+H}{(x^2+px+g)^n}, \qquad \Delta = p^2-4q<0 \tag{864}$$

Przykład 16.42 *Rozłożyć funkcję wymierną*
$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} \tag{865}$$
na ułamki proste.

Rozwiązanie 16.42 *Ponieważ* $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, *to*
$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$
Stąd
$$2x-1 = A(x-3)+B(x-2)$$
Czyli
$$2x-1 = x(A+B)-(3A+2B)$$
Oznacza to, że
$$2 = A+B \qquad -1 = -(3A+2B)$$
Ostatecznie otrzymujemy
$$A=-3 \qquad B=5$$
A więc
$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{-3}{x-2}+\frac{5}{x-3} \tag{866}$$

Przykład 16.43 *Rozłożyć funkcję wymierną*
$$\frac{3x^2+3x+12}{x(x-1)(x+2)} \tag{867}$$
na ułamki proste.

Rozwiązanie 16.43 *Zastosujemy tu inną metodę, która może być stosowana, gdy mianownik ma* ***tylko pierwiastki rzeczywiste jednokrotne****. Przyjmijmy*

$$\frac{3x^2+3x+12}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x}$$

Stąd

$$\frac{3x^2+3x+12}{x(x-1)(x+2)} = \frac{Ax(x+2)+Bx(x-1)+C(x-1)(x+2)}{x(x-1)(x+2)}$$

Czyli

$$3x^2+3x+12 = Ax(x+2)+Bx(x-1)+C(x-1)(x+2)$$

Podstawiając za x pierwiastki mianownika, czyli $x = 0, \quad 1, \quad -2$ otrzymujemy

$$12 = -2C \qquad 18 = 3A \qquad 18 = 6B$$

Zatem

$$A = 6 \qquad B = 3 \qquad C = -6$$

Ostatecznie

$$\frac{3x^2+3x+12}{x(x-1)(x+2)} = \frac{6}{x-1} + \frac{3}{x+2} - \frac{6}{x} \tag{868}$$

Wniosek 16.5 *Jeżeli $\frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$, $P(x)$ jest stopnia niższego niż 3, a α, β, γ są różne, to*

$$A = \frac{P(\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \qquad B = \frac{P(\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} \qquad C = \frac{P(\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \tag{869}$$

Przykład 16.44 *Rozłożyć funkcję wymierną*

$$\frac{3x^2+x+2}{(x+1)(x-1)^2} \tag{870}$$

na ułamki proste.

Rozwiązanie 16.44 *Niech*

$$\frac{3x^2+x+2}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}$$

Stąd

$$3x^2+x+2 = A(x-1)^2+B(x+1)+C(x-1)(x+1) \tag{871}$$

Czyli

$$3x^2+x+2 = x^2(A+C)+x(-2A+B)+(A+B-C)$$

A więc

$$A+C = 3 \qquad -2A+B = 1 \qquad A+B-C = 2$$

Zatem

$$A = 1 \qquad B = 3 \qquad C = 2$$

Współczynniki A, B, C możemy wyznaczyć w inny sposób. Przyjmując za x pierwiastki mianownika, czyli $x = -1, \quad +1$ otrzymujemy

$$4 = 4A \qquad 6 = 2B$$

Więc

$$A = 1 \qquad B = 3$$

W celu wyznaczenia współczynnika C zróżniczkujemy obustronnie wyrażenie (871)

$$6x + 1 = 2A(x-1) + B + C \cdot 2x$$

Podstawiając $x = 1$ dochodzimy do

$$7 = B + 2C \qquad \textit{skąd} \qquad C = 2$$

Z metody tej możemy korzystać w przypadku, gdy mianownik funkcji wymiernej posiada ***pierwiastki rzeczywiste wielokrotne****. Ostatecznie mamy*

$$\frac{3x^2 + x + 2}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} \tag{872}$$

Przykład 16.45 *Rozłożyć funkcję wymierną*

$$\frac{x^4 + 1}{x^2(x-1)(x+1)^2} \tag{873}$$

na ułamki proste.

Rozwiązanie 16.45 *Ponieważ stopień wielomianu licznika jest mniejszy od stopnia wielomianu mianownika, to możemy przyjąć, że*

$$\frac{x^4 + 1}{x^2(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x+1}$$

Więc

$$\begin{aligned} x^4 + 1 = \; & Ax(x-1)(x+1)^2 + B(x-1)(x+1)^2 + Cx^2(x+1)^2 + \\ & + Dx^2(x-1) + Ex^2(x-1)(x+1) \end{aligned} \tag{874}$$

Podstawiając kolejno: $x = 0, \quad 1, \quad -1$ otrzymujemy

x		L	$=$	P
$x = 0$	$\longrightarrow$	1	$=$	$-B$
$x = 1$	$\longrightarrow$	2	$=$	$4C$
$x = -1$	$\longrightarrow$	2	$=$	$-2D$

Stąd mamy

$$B = -1 \qquad C = \frac{1}{2} \qquad D = -1$$

Podstawimy te wartości do (874)

$$\begin{aligned} x^4 + 1 = \; & Ax(x-1)(x+1)^2 - (x-1)(x+1)^2 + \frac{1}{2}x^2(x+1)^2 + \\ & -x^2(x-1) + Ex^2(x-1)(x+1) \end{aligned} \tag{875}$$

a następnie zróżniczkujemy obustronnie relację (875)

$$4x^3 = A\left[(x+1)\left(4x^2-x-1\right)\right] - (x+1)(3x-1) + x(x+1)(2x+1) +$$
$$-x(3x-2) + E\left[2x\left(2x^2-1\right)\right]$$

Przyjmując $x = 0$ i $x = -1$ otrzymujemy

x		L	$=$	P
$x = 0$	$\longrightarrow$	0	$=$	$-A + 1$
$x = -1$	$\longrightarrow$	-4	$=$	$-5 - 2E$

Stąd

$$A = 1 \qquad E = -\frac{1}{2}$$

Czyli

$$\frac{x^4+1}{x^2(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2(x+1)} \tag{876}$$

Przykład 16.46 *Rozłożyć funkcję wymierną*

$$\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)} \tag{877}$$

na ułamki proste.

Rozwiązanie 16.46 *Niech*

$$\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Zatem

$$x^2+2x-1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

Podstawiając $x = 1$ otrzymujemy

$$2 = 2A \qquad \text{czyli} \qquad A = 1$$

Wykonując mnożenia i przyrównując odpowiednie współczynniki dochodzimy do relacji

$$x^2+2x-1 = x^2(A+B) + x(C-B) + (A-C)$$

Skąd

$$1 = A+B \qquad 2 = C-B \qquad -1 = A-C$$

A więc

$$B = 0 \qquad C = 2$$

Czyli

$$\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2+1} \tag{878}$$

Przykład 16.47 *Rozłożyć funkcję wymierną*

$$\frac{3x^2+1}{(x+1)(x^2+1)^2} \tag{879}$$

na ułamki proste.

Rozwiązanie 16.47 *Niech*

$$\frac{3x^2+1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

Zatem

$$3x^2+1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+1) + (Dx+E)(x+1)(x^2+1)$$

Stąd

$$\begin{aligned} 3x^2+1 = \ & x^4(A+D) + x^3(D+E) + x^2(2A+B+D+E) \\ & +x(B+C+D+E) + (A+C+E) \end{aligned} \tag{880}$$

Zauważmy, że po prawej stronie (880) pojawiają się niewiadome w potędze wyższej niż po lewej. Równanie $3x^2+1$ *możemy, oczywiście, zapisać* $3x^2+1 = 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 3x^2 + 0 \cdot x + 1$. *W efekcie dochodzimy do układu równań*

$$\begin{array}{rcrrrrrcrcrrrrr} 0 & = & A & +0B & +0C & +D & +0E & & 0 & = & A & & & +D & \\ 0 & = & 0A & +0B & +0C & +D & +E & & 0 & = & & & & D & +E \\ 3 & = & 2A & +B & +0C & +D & +E & \textit{lub} & 3 & = & 2A & +B & & +D & +E \\ 0 & = & 0A & +B & +C & +D & +E & & 0 & = & & B & +C & +D & +E \\ 1 & = & A & +0B & +C & +0D & +E & & 1 & = & A & & +C & & +E \end{array} \tag{881}$$

Pierwiastkiem mianownika jest $x = -1$. *Wykorzystamy tę wartość do wyznaczenia jednej z niewiadomych. Mamy więc*

$$\begin{array}{ccrcl} x & & L & = & P \\ x=-1 & \longrightarrow & 4 & = & 4A \end{array}$$

Stąd mamy

$$A = 1$$

Następnie wstawiamy tę wartość do (881) i otrzymujemy:

$$D=-1 \qquad E=1 \qquad B=1 \qquad C=-1$$

Ostatecznie

$$\frac{3x^2+1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{x-1}{(x^2+1)^2} + \frac{-x+1}{x^2+1} \tag{882}$$

16.7.4 Całkowanie ułamków prostych typu I

Całki ułamków prostych typu I mają następującą postać ogólną

$$\begin{aligned} &\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}\,x = A\ln|x-a| + C \\ &\int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}\,x = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \quad n=2,3,\ldots \end{aligned} \tag{883}$$

Wniosek 16.6 *Najczęściej występujące postacie ułamków typu I:*

$$\begin{aligned}
\int \frac{A}{x+1}\,\mathrm{d}\,x &= A\ln|x+1| + C \\
\int \frac{A}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{-A}{x+1} + C \\
\int \frac{A}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{-A}{2(x+1)^2} + C \\
\int \frac{A}{(x+1)^4}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{-A}{3(x+1)^3} + C
\end{aligned} \tag{884}$$

16.7.5 Całkowanie ułamków prostych typu II

Ułamki proste typu II mają następującą postać ogólną

$$\int \frac{Gx+H}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}\,x \tag{885}$$

1. Gdy $n = 1$ podstawiając $x + p/2 = s$ sprowadzamy mianownik do postaci $s^2 + r^2$, gdzie $r^2 = -\Delta/4$. Jednocześnie licznik przybiera postać $Gx + K$, gdzie K jest pewną stałą. Zapisujemy to kolejno

$$\begin{aligned}
\int \frac{Gx+H}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{Gx+K}{s^2+r^2}\,\mathrm{d}\,s = G\int \frac{s\,\mathrm{d}\,s}{s^2+r^2} + K\int \frac{\mathrm{d}\,s}{s^2+r^2} &= \\
= \frac{G}{2}\ln(s^2+r^2) + \frac{K}{r}\arctan\frac{s}{r} + C &= \\
= \frac{G}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2K}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C &
\end{aligned} \tag{886}$$

2. Gdy $n = 2, 3, \ldots$ podstawiając $x + p/2 = s$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\int \frac{Gx+H}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{Gx+K}{(s^2+r^2)^n}\,\mathrm{d}\,s = \int \frac{Gs\,\mathrm{d}\,s}{(s^2+r^2)^n} + \int \frac{K\,\mathrm{d}\,s}{(s^2+r^2)^n} &= \\
= \frac{G}{2}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(s^2+r^2)^{n-1}} + K\int \frac{\mathrm{d}\,s}{(s^2+r^2)^n} + C &
\end{aligned} \tag{887}$$

Ostatnią całkę obliczamy według następujących wzorów redukcyjnych

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}\,s}{(s^2+r^2)^2} &= \frac{1}{2r^2}\frac{s}{s^2+r^2} + \frac{1}{2r^3}\arctan\frac{s}{r} + C \\
\int \frac{\mathrm{d}\,s}{(s^2+r^2)^n} &= \frac{1}{2n-2}\frac{s}{r^2\,(s^2+r^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\frac{1}{r^2}\int \frac{\mathrm{d}\,s}{(s^2+r^2)^{n-1}}
\end{aligned} \tag{888}$$

Przykład 16.48 *Wyznaczyć całkę funkcji wymiernej*

$$\int \frac{4x+3}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}\,x \tag{889}$$

Rozwiązanie 16.48

$$\begin{aligned}\int \frac{4x+3}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}\,x &= \int \frac{4x+3}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}\,x = \left\langle \left(\begin{array}{c} x+1=s \\ \mathrm{d}\,x=\mathrm{d}\,s \\ x=s-1 \end{array} \right) \right\rangle = \int \frac{4s-1}{s^2+1}\,\mathrm{d}\,s = \\ &= 2\int \frac{2s}{s^2+1}\,\mathrm{d}\,s - \int \frac{1}{s^2+1}\,\mathrm{d}\,s = 2\ln(s^2+1) - \arctan s + C = \\ &= \rangle s = x+1 \langle = 2\ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1) + C\end{aligned} \tag{890}$$

Przykład 16.49 *Wyznaczyć całkę funkcji wymiernej*

$$I = \int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}\,x$$

Rozwiązanie 16.49 *Wykonamy przekształcenia mianownika*

$$x^2-2x+5 = (x-1)^2+4$$

Następnie podstawimy

$$\begin{array}{ll} x-1=z & \textit{czyli} \quad x=1+z \\ x^2-2x+5=(x-1)^2+4=z^2+4 & \mathrm{d}\,x=\mathrm{d}\,z \end{array}$$

Otrzymamy więc

$$\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{5z+8}{(z^2+4)^2}\,\mathrm{d}\,z$$

Przekształcimy podcałkową funkcję wymierną

$$\frac{5z+8}{(z^2+4)^2} = \frac{5z}{(z^2+4)^2} + \frac{8}{(z^2+4)^2}$$

Jej całki są równe

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{5z}{(z^2+4)^2}\,\mathrm{d}\,z = \left\langle \left(\begin{array}{c} z^2+1=t \\ 2z\,\mathrm{d}\,z=\mathrm{d}\,t \end{array} \right) \right\rangle = \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2} = -\frac{5}{2}\frac{1}{t} + C = \\ &= -\frac{5}{2}\frac{1}{z^2+4} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{8}{(z^2+4)^2}\,\mathrm{d}\,z = \rangle \textit{wzór redukcyjny (888)} \langle = \\ &= 8\left[\frac{1}{2\cdot 4}\frac{z}{z^2+4} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 4}\arctan\frac{x-1}{2}\right] + C = \\ &= \frac{z}{z^2+4} + \frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + C \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$I_1 + I_2 = -\frac{5}{2}\frac{1}{z^2+4} + \frac{z}{z^2+4} + \frac{1}{2}\arctan\frac{z}{2} + C = \frac{2z-5}{2\,(z^2+4)} + \frac{1}{2}\arctan\frac{z}{2} + C$$

A więc

$$\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{2x-7}{2\,(x^2-2x+5)} + \frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + C \tag{891}$$

16.8 Całkowanie funkcji niewymiernych

Uwaga 16.10 *Symbol $R(x,y)$ oznacza dowolną funkcję wymierną zmiennych x, y. Jeżeli w funkcji $R(x,y)$ podstawimy $y = \varphi(x)$, gdzie φ jest funkcją niewymierną, to otrzymana w ten sposób funkcja $R(x,\varphi(x))$ może być niecałkowalna elementarnie. Istnieją dwa typy funkcji niewymiernej φ, dla których funkcja $R(x,\varphi(x))$ jest całkowalna elementarnie i jej całka sprowadza się do całki funkcji wymiernej.*

16.8.1 Pierwiastek dowolnego stopnia funkcji homograficznej

Całkę z funkcji zawierającej funkcję homograficzną $y = \dfrac{ax+b}{px+q}$

$$\int R(x,y)\,\mathrm{d}\,x \quad y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{px+q}}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} \neq 0 \tag{892}$$

można sprowadzić do całki funkcji wymiernej zmiennej y za pomocą podstawienia

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{px+q}} \tag{893}$$

Przykład 16.50 *Obliczyć całkę*

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,\mathrm{d}\,x \tag{894}$$

Rozwiązanie 16.50 *Stosujemy podstawienie*

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$

Wynikają z niego następujące relacje

$$x = \frac{1}{y^2-1} \qquad \mathrm{d}\,x = -\frac{2y}{(y^2-1)^2}\,\mathrm{d}\,y$$

Mamy więc

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,\mathrm{d}\,x &= \int (y^2-1)y\frac{-2y}{(y^2-1)^2}\,\mathrm{d}\,y = \\
&= -2\int \frac{y^2}{y^2-1}\,\mathrm{d}\,y = -2\int \frac{y^2-1+1}{y^2-1}\,\mathrm{d}\,y = \\
&= -2\int \left(1 + \frac{1}{y^2-1}\right)\mathrm{d}\,y = -2y - 2\int \frac{1}{y^2-1}\,\mathrm{d}\,y + C
\end{aligned}$$

Funkcję

$$\frac{1}{y^2-1}$$

rozłożymy na ułamki proste

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1} = \frac{A(y+1)+B(y-1)}{(y-1)(y+1)}$$

Stąd

$$1 = A(x+1) + B(x-1)$$

Czyli

$$A = \frac{1}{2} \qquad B = -\frac{1}{2}$$

Zatem

$$2\int \frac{1}{y^2-1}\,\mathrm{d}\,y = \int \frac{1}{y-1}\,\mathrm{d}\,y - \int \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}\,y = \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,\mathrm{d}\,x &= -2y - \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C = \\ &= -2\sqrt{\frac{x+1}{x}} - \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}+1}\right| + C \end{aligned} \tag{895}$$

16.8.2 Pierwiastek kwadratowy trójmianu kwadratowego

Całkę

$$\int R(x,y)\,\mathrm{d}\,x \quad y = \sqrt{ax^2+bx+c}, \quad \Delta = b^2 - 4ac \neq 0 \tag{896}$$

możemy przy pomocy jednego z trzech *podstawień Eulera*

$$\begin{array}{lll} 1. & \sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} - t & \text{gdy } a > 0 \\ 2. & \sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c} & \text{gdy } c > 0 \\ 3. & \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1) & \text{gdy } \Delta > 0 \end{array} \tag{897}$$

sprowadzić do całki funkcji wymiernej zmiennej t.

Przykład 16.51 *Obliczyć całkę*

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x^2+k}}, \quad k > 0 \tag{898}$$

Rozwiązanie 16.51 *Zastosujemy pierwsze podstawienie Eulera*

$$\sqrt{x^2+k} = x - t$$

Stąd

$$t = x - \sqrt{x^2+k}$$

$$x^2 + k = x^2 - 2xt + t^2$$

$$2xt = t^2 - k$$

$$x = \frac{t^2-k}{2t}$$

$$\mathrm{d}\,x = \frac{t^2+k}{2t^2}\,\mathrm{d}\,t$$

oraz

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x^2+k}} = \int \frac{\frac{t^2+k}{2t^2}\,\mathrm{d}\,t}{-\frac{t^2+k}{2t}} = -\int \frac{\mathrm{d}\,t}{t} = -\ln|t| + C = -\ln\left|x - \sqrt{x^2+k}\right| + C \tag{899}$$

Przykład 16.52 *Obliczyć całkę*

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x \tag{900}$$

Rozwiązanie 16.52 *Do obliczenia powyższej całki zastosujemy drugie podstawienie Eulera*

$$y = \sqrt{1-x^2} = xt + 1 \qquad \textit{stąd} \quad t = \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

$$1 - x^2 = x^2t^2 + 2xt + 1$$

$$-x^2 = x^2t^2 + 2xt$$

$$-x = xt^2 + 2t$$

$$x = \frac{-2t}{t^2+1} \qquad\qquad \textit{stąd} \quad y = xt + 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}\,x = 2\frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,t$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x &= -2\int \frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{t^2+1}{1-t^2}\cdot\frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,t = \int\frac{\mathrm{d}\,t}{t} = \\ &= \ln|t| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\right| + C \end{aligned} \tag{901}$$

Przykład 16.53 *Obliczyć całkę*

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{-x^2+3x-2}} \tag{902}$$

Rozwiązanie 16.53 *W tym przypadku zastosujemy trzecie podstawienie Eulera*

$$y = \sqrt{-x^2+3x-2} = \sqrt{-(x-1)(x-2)} = t(x-1) \quad \textit{stąd} \quad t = \sqrt{\frac{2-x}{x-1}}$$

$$-(x-1)(x-2) = t^2(x-1)^2$$
$$-(x-2) = t^2(x-1)$$

$$x = \frac{t^2+2}{t^2+1} \qquad \textit{stąd} \quad y = t(x-1) = \frac{t}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}\,x = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,t$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{-x^2+3x-2}} &= -2\int \frac{t^2+1}{t}\frac{t\,\mathrm{d}\,t}{(t^2+1)^2} = -2\int \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2+1} = \\ &= -2\arctan t + C = -2\arctan\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} + C\end{aligned} \tag{903}$$

16.8.3 Całkowanie różniczek dwumiennych

Podamy definicję różniczki dwumiennej.

Definicja 16.3 *(Różniczki dwumiennej)*
Różniczką dwumienną *nazywamy wyrażenie*

$$x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}\,x \tag{904}$$

gdzie: a, b są liczbami rzeczywistymi, a $m, n, p-$ dowolnymi liczbami wymiernymi (dodatnimi lub ujemnymi).

Twierdzenie 16.9 *(Czebyszewa)*
Całka

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}\,x \tag{905}$$

może być wyrażona za pomocą funkcji elementarnych tylko w trzech następujących przypadkach:

1. *p jest liczbą całkowitą; wyrażenie $(a+bx^n)^p$ rozwija się według wzoru na dwumian Newtona i funkcja podcałkowa jest sumą składników cx^k;*
2. *$\dfrac{m+1}{n}$ jest liczbą całkowitą; całkę (905) sprowadza się do całki funkcji wymiernej przez podstawienie $t = \sqrt[r]{a+bx^n}$, gdzie r jest mianownikiem ułamka p;*
3. *$\dfrac{m+1}{n} + p$ jest liczbą całkowitą; całkę (905) sprowadza się do całki funkcji wymiernej przez podstawienie $t = \sqrt[r]{\dfrac{a+bx^n}{x^n}}$, gdzie r jest mianownikiem ułamka p.*

Przykład 16.54 *Sprowadzić do różniczki dwumiennej funkcję podcałkową*

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$$

Rozwiązanie 16.54 *Wykonamy działania na wykładnikach*

$$\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}\left(1+x^{1/4}\right)^{1/3}$$

Przykład 16.55 *Sprawdzić, czy całka*

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$$

może być wyrażona za pomocą funkcji elementarnych.

Rozwiązanie 16.55 *W tym przypadku mamy*

$$m=-\frac{1}{2} \qquad n=\frac{1}{4} \qquad p=\frac{1}{3} \qquad \frac{m+1}{n}=2$$

A więc zachodzi przypadek 2 Twierdzenia 16.9 Czebyszewa.

Przykład 16.56 *Sprawdzić, czy całka*

$$\int \frac{x^3}{\sqrt[4]{1+x^3}}\,\mathrm{d}\,x$$

może być wyrażona za pomocą funkcji elementarnych.

Rozwiązanie 16.56 *Przekształcimy wyrażenie podcałkowe*

$$\frac{x^3}{\sqrt[4]{1+x^3}}\,\mathrm{d}\,x = x^3(1+x^3)^{-1/4}\,\mathrm{d}\,x$$

Otrzymujemy

$$m=3 \qquad n=3 \qquad p=-\frac{1}{4} \qquad \frac{m+1}{n}=\frac{4}{3} \qquad \frac{m+1}{n}+p=\frac{13}{12}$$

Nie jest spełniony żaden warunek Twierdzenia 16.9 Czebyszewa.

16.9 Całkowanie funkcji trygonometrycznych

Całkę

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}\,x \tag{906}$$

można zawsze sprowadzić do całki funkcji wymiernej za pomocą **podstawienia uniwersalnego**, w szczególnych zaś przypadkach również i prostszymi metodami.

Podstawienie uniwersalne ma postać

$$t=\tan\frac{x}{2} \tag{907}$$

Wynikają z niego relacje

$$\mathrm{d}\,x = \frac{2\,\mathrm{d}\,t}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{908}$$

Wykorzystując je obliczymy całkę $\int \frac{(1+\sin x)}{\sin x(1+\cos x)}\,\mathrm{d}\,x$

$$\begin{aligned}\int \frac{(1+\sin x)\,\mathrm{d}\,x}{\sin x(1+\cos x)} &= \int \frac{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}\,t = \\ &= \frac{1}{4}t^2+t+\frac{1}{2}\ln|t|+C = \frac{\tan^2\frac{x}{2}}{4}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C\end{aligned}$$

Uproszczone podstawienia stosowane w niektórych przypadkach:

1. $\displaystyle\int R(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}\,x-$ podstawienie $t=\sin x, \quad \cos x\,\mathrm{d}\,x = \mathrm{d}\,t$

2. $\displaystyle\int R(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}\,x-$ podstawienie $t=\cos x, \quad \sin x\,\mathrm{d}\,x = -\,\mathrm{d}\,t$

3. $\displaystyle\int \sin^n x\,\mathrm{d}\,x.$

   - Jeżeli n jest nieparzyste $(n=2m+1)$, to mamy

   $$\int \sin^{2m+1} x\,\mathrm{d}\,x = \int(1-\cos^2 x)^m \sin x\,\mathrm{d}\,x = -\int(1-t^2)^m\,\mathrm{d}\,t$$

   - Jeżeli n jest parzyste $(n=2m)$, to

   $$\int \sin^{2m} x\,\mathrm{d}\,x = \int\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^m \mathrm{d}\,x = \frac{1}{2^{m+1}}\int(1-\cos t)^m\,\mathrm{d}\,t$$

4. $\displaystyle\int \cos^n x\,\mathrm{d}\,x.$

   - Jeżeli n jest nieparzyste $(n=2m+1)$, to mamy

   $$\int \cos^{2m+1} x\,\mathrm{d}\,x = \int(1-\sin^2 x)^m \cos x\,\mathrm{d}\,x = \int(1-t^2)^m\,\mathrm{d}\,t$$

   gdzie $t=\sin x$.

   - Jeżeli n jest parzyste $(n=2m)$, to mamy

   $$\int \cos^{2m} x\,\mathrm{d}\,x = \int\left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^m \mathrm{d}\,x = \frac{1}{2^{m+1}}\int(1+\cos t)^m\,\mathrm{d}\,t$$

   gdzie $t=2x$.

5. Całki postaci $\int \sin^n x \cos^m x \, \mathrm{d}\, x$ sprowadza się do przypadków 1 lub 2, jeżeli przynajmniej jedna z liczb m i n jest nieparzysta. Na przykład

$$\int \sin^2 x \cos^5 x \, \mathrm{d}\, x = \int \sin^2 x \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \cos x \, \mathrm{d}\, x = \int t^2 \left(1 - t^2\right)^2 \mathrm{d}\, t$$

gdzie $t = \sin x$. Jeżeli m i n są parzyste, to potęgi mogą być obniżone dwukrotnie, podobnie jak w przypadkach 3 i 4. Wykorzystuje się przy tym wzory $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Na przykład

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, \mathrm{d}\, x = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) \, \mathrm{d}\, x =$$

$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, \mathrm{d}\, x + \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{48} \sin^3 2x + \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + C$$

6. $\int \tan^n x \, \mathrm{d}\, x$.

$$\begin{aligned} \int \tan^n x \, \mathrm{d}\, x &= \int \tan^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \mathrm{d}\, x = \int \tan^{n-2} x \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d} \tan x - \\ &- \int \tan^{n-2} x \, \mathrm{d}\, x = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, \mathrm{d}\, x \end{aligned}$$

itd. Iterując powyższą procedurę sprowadzamy całkę $\int \tan^n x \, \mathrm{d}\, x$ do całki $\int \mathrm{d}\, x = x + C$, jeżeli n jest parzyste, albo do całki $\int \tan x \, \mathrm{d}\, x = -\ln|\cos x| + C$, jeżeli n jest nieparzyste.

7. $\int \cot^n x \, \mathrm{d}\, x-$ całkuje się podobnie, jak przypadek 6.

Przykład 16.57 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \sin^3 x \, \mathrm{d}\, x \tag{909}$$

Rozwiązanie 16.57 *Podstawiamy* $t = \cos x$. *Stąd* $\sin x \, \mathrm{d}\, x = -\, \mathrm{d}\, t$. *Następnie*

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \, \mathrm{d}\, x = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, \mathrm{d}\, x = -\int (1 - t^2) \, \mathrm{d}\, t = -t + \frac{1}{3} t^3 + C = \\ = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C \end{aligned}$$

Przykład 16.58 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \cos^3 x \, \mathrm{d}\, x \tag{910}$$

Rozwiązanie 16.58 *Podstawiamy* $t = \sin x$. *Stąd* $\cos x \, \mathrm{d}\, x = \mathrm{d}\, t$. *Następnie mamy*

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \, \mathrm{d}\, x &= \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, \mathrm{d}\, x = \int (1 - t^2) \, \mathrm{d}\, t = t - \frac{1}{3} t^3 + C = \\ &= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C \end{aligned}$$

Przykład 16.59 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \cos^4 x \, \mathrm{d}\, x \tag{911}$$

Rozwiązanie 16.59 *Podstawiamy* $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x \, \mathrm{d}\, x &= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \mathrm{d}\, x = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2 \, \mathrm{d}\, x = \left\langle \begin{pmatrix} t = 2x \\ \mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\, t \end{pmatrix} \right\rangle = \\
&= \frac{1}{8}\int (1 + 2\cos t + \cos^2 t) \, \mathrm{d}\, t = \rangle \textit{Przykład 16.10} \langle = \\
&= \frac{1}{8}\left[t + 2\sin t + \frac{1}{2}\left(t + \sin t \cos t\right)\right] + C = \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{3}{2}t + 2\sin t + \frac{1}{2}\sin t \cos t\right) + C = \\
&= \frac{3}{16}t + \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{16}\sin t \cos t + C = \\
&= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 2x \cos 2x + C = \\
&= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C
\end{aligned}$$

Przykład 16.60 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \sin^4 x \, \mathrm{d}\, x \tag{912}$$

Rozwiązanie 16.60 *Podstawiamy* $\cos^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x \, \mathrm{d}\, x &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \mathrm{d}\, x = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 \, \mathrm{d}\, x = \left\langle \begin{pmatrix} t = 2x \\ \mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\, t \end{pmatrix} \right\rangle = \\
&= \frac{1}{8}\int (1 - 2\cos t + \cos^2 t) \, \mathrm{d}\, t = \rangle \textit{Przykład 16.10} \langle = \\
&= \frac{1}{8}\left[t - 2\sin t + \frac{1}{2}\left(t + \sin t \cos t\right)\right] + C = \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{2}\sin t \cos t\right] + C = \\
&= \frac{3}{16}t - \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{16}\sin t \cos t + C = \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 2x \cos 2x + C = \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C
\end{aligned}$$

Przykład 16.61 *Obliczyć całkę*

$$I = \int \frac{1}{\sin x} \,\mathrm{d}\, x \tag{913}$$

Rozwiązanie 16.61 *Mamy*

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x} \,\mathrm{d}\, x &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}\, x = \int \frac{-\,\mathrm{d}(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \rangle \cos x = v \langle = \int \frac{\mathrm{d}\, v}{v^2-1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v-1}{v+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C\end{aligned}$$

17 Całka oznaczona

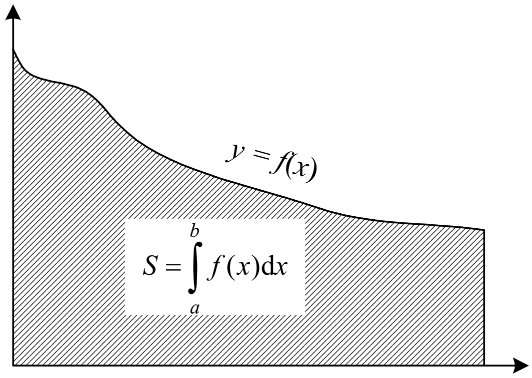
Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest ograniczona na przedziale $< a; b >$.

Definicja 17.1 ***Całka oznaczona*** *funkcji $f(x)$ na przedziale $< a; b >$*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{914}$$

jest pewną liczbą przyporządkowaną funkcji $f(x)$ i przedziałowi $< a; b >$. Liczbą tą jest różnica wartości funkcji pierwotnej $F(x)$ w punktach b i a, tzn.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) - F(a) \tag{915}$$



Rysunek 111: Pole powierzchni pod krzywą $y = f(x)$.

Zapisujemy to następująco

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(x)|_a^b \tag{916}$$

Liczby a i b występujące w całce

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

nazywamy **granicami** tej całki bez względu na to, czy $a < b$, czy $a > b$. Liczbę a nazywamy **granicą dolną**, a liczbę $b-$ **granicą górną**.

Podzielimy przedział $< a; b >$ na n odcinków (niekoniecznie równych) o długościach Δx_1, $\Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Niech $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ oznaczają dowolnie wybrane punkty, po jednym z każdego odcinka. Utwórzmy sumę

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_j\right)\Delta x_j \tag{917}$$

Jej znaczenie geometryczne jest proste, gdy funkcja $f(x)$ jest na przedziale $< a; b >$ nieujemna. W tym przypadku iloczyny $f(\xi_i)\Delta x_i$ są równe polu prostokątów o podstawach Δx_i i wysokościach $f(\xi_i)$. Suma S_n przedstawia więc łączne pole tych prostokątów, czyli w przybliżeniu pole obszaru ograniczonego osią $0x$, krzywą $f(x)$ oraz prostymi $x = a$ i $x = b$.

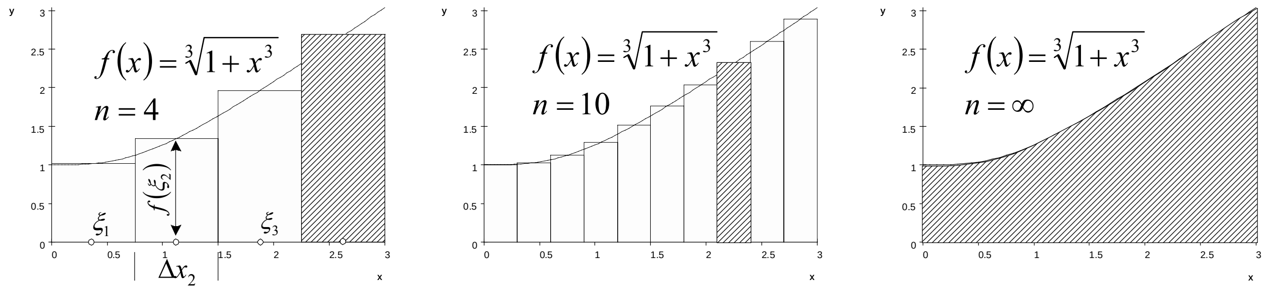
Zbiór odcinków $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ nazywamy **podziałem** δ. Długość największego odcinka δ_i podziału oznaczymy $|\delta|$ i nazywamy **średnicą podziału**.

Ciąg podziałów (δ_n) nazywamy **ciągiem normalnym**, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} |\delta_n| = 0 \tag{918}$$

a więc, jeżeli długość największego odcinka podziału δ_n zdąża do zera, gdy n dąży do nieskończoności.

Dzieląc przedział $< a; b >$ na dwa, trzy, cztery, pięć itd. równych odcinków otrzymujemy ciąg normalny podziałów. Każdy z nich prowadzi do innego wyniku, przy czym:



Rysunek 112: Ciąg normalny.

Reguła 17.1 *Jeżeli funkcja $f(x)$ ma tę własność, że przy każdym ciągu normalnym podziałów (δ_n) ciąg sum (S_n) jest zbieżny, to mówimy, że funkcja $f(x)$ jest* ***całkowalna w sensie Riemanna*** *na przedziale $< a; b >$ i ciągi sum (S_n) zdążają zawsze do tej samej granicy. Granicą tą jest wartość całki oznaczonej $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \lim_{|\delta|\to 0}\sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_j\right)\Delta x_j \tag{919}$$

Twierdzenie 17.1 *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna, to dla każdego ciągu normalnego podziałów (δ_n) odpowiednie ciągi sum (S_n) zdążają do tej samej granicy.*

17.1 Twierdzenia o całce oznaczonej i własności całki oznaczonej

Na wstępie podamy kilka twierdzeń przydatnych w dalszej analizie.

Twierdzenie 17.2 *Funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest na tym przedziale całkowalna (w sensie Riemanna).*

Twierdzenie 17.3 *Funkcja monotoniczna na przedziale domkniętym jest na tym przedziale całkowalna (w sensie Riemanna).*

Twierdzenie 17.4 *Funkcja nieograniczona na przedziale domkniętym jest na tym przedziale niecałkowalna (w sensie Riemanna).*

Twierdzenie 17.5 *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna na przedziałach $< a, b >$ i $< b, c >$, to jest całkowalna na przedziale $< a, c >$ i zachodzi równość*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{920}$$

Na odwrót, jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna na przedziale $< a, c >$ i jeżeli $a < b < c$, to jest całkowalna na przedziałach $< a, b >$ i $< b, c >$ i zachodzi równość (920).

Twierdzenie 17.6 *Jeżeli $k = \mathrm{const}$, to zachodzi równość*

$$\int_a^b k\,\mathrm{d}\,x = k(b-a) \tag{921}$$

Jeżeli $f(x)$ jest funkcją całkowalną na przedziale $< a, b >$ i k jest stałą, to $kf(x)$ jest funkcją całkowalną na przedziale $< a, b >$ i zachodzi równość

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}\,x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{922}$$

Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są całkowalne na przedziale $< a, b >$, to ich suma jest całkowalna na tym przedziale i zachodzi równość

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{923}$$

Twierdzenie 17.7 *Jeżeli dwie funkcje są całkowalne na pewnym przedziale, to ich iloczyn jest całkowalny na tym przedziale.*

Twierdzenie 17.8 *Jeżeli $f(x)$ jest funkcją całkowalną na przedziale $< a, b >$, to moduł funkcji $f(x)$ jest całkowalny na przedziale $< a, b >$ i zachodzi nierówność*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,x \tag{924}$$

Definicja 17.2 *Jeżeli $f(x)$ jest funkcją całkowalną na przedziale $< a, b >$, to liczbę*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{925}$$

nazywamy ***średnią całkową*** *funkcji $f(x)$ na przedziale $< a, b >$.*

Twierdzenie 17.9 *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale $< a, b >$, to wewnątrz tego przedziału istnieje punkt $c, a < c < b$, w którym wartość funkcji $f(x)$ jest równa średniej całkowej tej funkcji w tym przedziale*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{926}$$

Twierdzenie 17.10 *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale $< a, b >$, to funkcja*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t, \quad x \in < a, b > \tag{927}$$

jest funkcją pierwotną $f(x)$ na przedziale $< a, b >$.

Twierdzenie 17.11 *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale $< a, b >$, a $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ na tym przedziale, to zachodzi równość*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) - F(a) \tag{928}$$

(Porównaj Definicję 17.1, str. 300).

Różnicę $F(b)-F(a)$ zapisujemy $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$ lub $F(x)|_{x=a}^{x=b}$, natomiast wzór (928) niekiedy zapisuje się następująco:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \left[\int f(x)\,\mathrm{d}\,x\right]_{x=a}^{x=b}$$

Twierdzenie 17.12 *Jeżeli $f(x)$ jest funkcją parzystą, to*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{929}$$

Twierdzenie 17.13 *Jeżeli $f(x)$ jest funkcją nieparzystą, to*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0 \tag{930}$$

Twierdzenie 17.14 *Jeżeli $f(x) > 0$ dla $a \le x \le b$, to*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x > 0 \tag{931}$$

Twierdzenie 17.15 *Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są całkowalne w przedziale $< a, b >$, to*

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{932}$$

*Jest to **nierówność Schwarza-Buniakowskiego**.*

Przykład 17.1 *Wyznaczyć wartość całki $\int_a^b kx\,\mathrm{d}\,x$.*

Rozwiązanie 17.1 *Obliczamy*

$$\int_a^b kx\,\mathrm{d}\,x = \left[\int kx\,\mathrm{d}\,x\right]_{x=a}^{x=b} = \left[\frac{kx^2}{2}+C\right]_{x=a}^{x=b} = \left(\frac{kb^2}{2}+C\right) - \left(\frac{ka^2}{2}+C\right) = k\frac{b^2-a^2}{2}$$

Przykład 17.2 *Wyznaczyć wartość całki $\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x$.*

Rozwiązanie 17.2 *Obliczamy*

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \ln|x|\big|_{x=a}^{x=b} = \ln|b| - \ln|a| = \ln\left|\frac{b}{a}\right| \overset{\mathrm{sgn}(b)=\mathrm{sgn}(a)}{=} \ln\frac{b}{a}$$

Przykład 17.3 *Wyznaczyć wartość całki $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}\,x$.*

Rozwiązanie 17.3 *Rozkładamy funkcję wymierną na ułamki proste, a następnie wyznaczamy funkcję pierwotną i obliczamy wartość całki oznaczonej*

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}\,x = \left[\ln\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}\right]_{x=2}^{x=3} = \ln\sqrt{\frac{1}{2}} - \ln\sqrt{\frac{1}{3}} = \ln\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Przykład 17.4 *Wyznaczyć wartość całki $\int_0^6 \sqrt{1+4x}\,\mathrm{d}\,x$.*

Rozwiązanie 17.4 *Wyznaczamy całkę nieoznaczoną*

$$\int \sqrt{1+4x}\,\mathrm{d}\,x = \left\langle \begin{pmatrix} 1+4x=t \\ 4\,\mathrm{d}\,x = \mathrm{d}\,t \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{4}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{6}t^{3/2} = \frac{1}{6}(1+4x)^{3/2}$$

a następnie obliczamy wartości całki na obu granicach całkowania

$$\int_0^6 \sqrt{1+4x}\,\mathrm{d}\,x = \left[\frac{1}{6}(1+4x)^{3/2}\right]_{x=0}^{x=6} = \frac{125}{6} - \frac{1}{6} = \frac{124}{6}$$

17.2 Całka oznaczona i całkowanie przez podstawienie

O zamianie zmiennej w całce oznaczonej mówi twierdzenie:

Twierdzenie 17.16 *Jeżeli*

1. *funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale $\mathcal{E}$, $a \in \mathcal{E}$, $b \in \mathcal{E}$,*
2. *funkcja $g(x)$ jest klasy C^1 na przedziale $\mathcal{T}$, $\alpha \in \mathcal{T}$, $\beta \in \mathcal{T}$,*
3. *$g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ oraz $g(t) \in \mathcal{E}$ dla każdej wartości t pomiędzy α i β,*

to

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)\,\mathrm{d}\,t \tag{933}$$

Reguła 17.2 *Zamianę zmiennej w całce oznaczonej przeprowadzamy:*

1. *w funkcji podcałkowej, podstawiając $x = g(t)$,*
2. *w różniczce zmiennej całkowania, podstawiając $\mathrm{d}\,x = g'(t)\,\mathrm{d}\,t$,*
3. *w granicach całkowania, zastępując liczby a, b liczbami α, β.*

Reguła 17.3 *(Zapis umowny zamiany zmiennych w całce oznaczonej)*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \left\langle\!\!\left(\begin{array}{c} x = g(t) \\ \mathrm{d}\,x = g'(t)\,\mathrm{d}\,t \\ x|_a^b \quad \Longrightarrow \quad t|_\alpha^\beta \end{array} \right)\!\!\right\rangle = \int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)\,\mathrm{d}\,t \tag{934}$$

17.3 Geometryczne zastosowania całki oznaczonej

17.3.1 Pole figury płaskiej w układzie kartezjańskim

Przytoczymy twierdzenie:

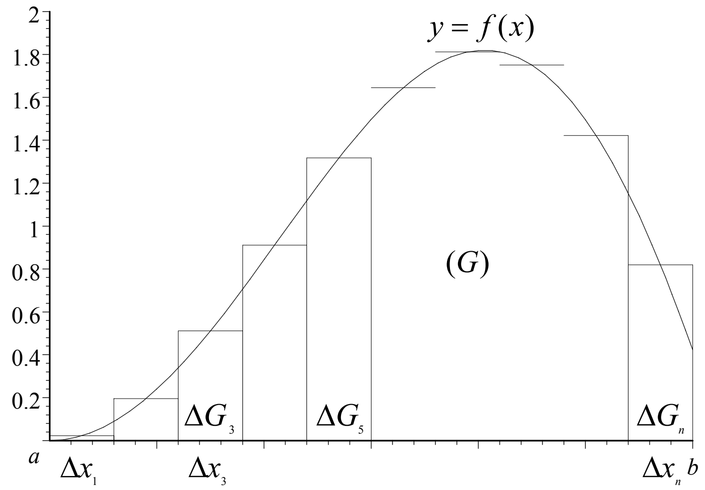
Twierdzenie 17.17 *Jeżeli funkcja f jest ciągła w $< a, b >$ i dodatnia w (a, b), to obszar domknięty (G) rozciągający się od wykresu funkcji f na przedziale $< a, b >$ do osi $0x$ (patrz rys. 113)*

$$(G) = \{(x, y) : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\} \tag{935}$$

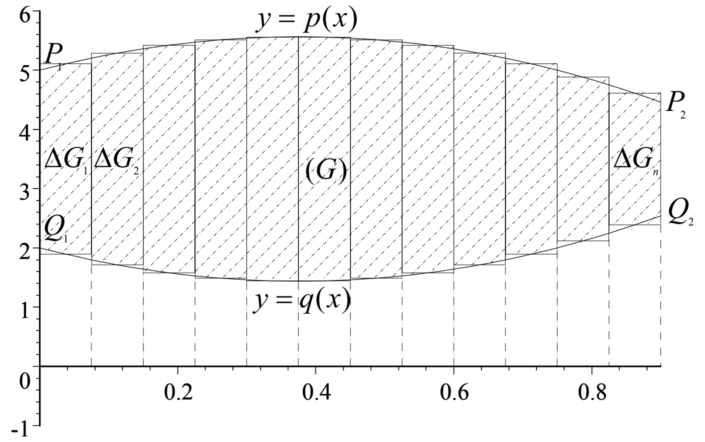
ma pole

$$G = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{936}$$

Uwaga 17.1 *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w $< a, b >$ i ujemna w (a, b), to całka tej funkcji w $< a, b >$ jest równa polu odpowiedniego obszaru* ***wziętemu ze znakiem minus****.*



Rysunek 113: Pole zawarte między krzywą płaską i osią $0x$.



Rysunek 114: Pole zawarte między dwiema krzywymi płaskimi.

Twierdzenie 17.18 *Jeżeli funkcje p, q są ciągłe w $< a, b >$ oraz $p(x) < q(x)$ dla $a < x < b$, to obszar domknięty rozciągający się między wykresami tych funkcji na przedziale $< a, b >$ (patrz rys. 114)*

$$(G) = \{(x, y) : a \leq x \leq b, q(x) \leq y \leq p(x)\} \tag{937}$$

ma pole

$$G = \int_a^b [p(x) - q(x)] \, \mathrm{d}\, x \tag{938}$$

Przykład 17.5 *Obliczyć pole (P) ćwiartki elipsy $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$ (patrz rys. 115).*

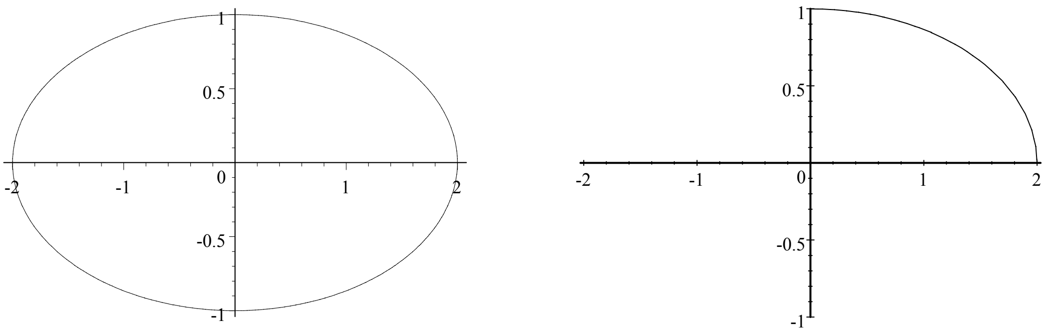
Rozwiązanie 17.5 *Ćwiartka elipsy ograniczona jest prostymi $x = 0, x = a$, osią x i krzywą $y = 0.5\sqrt{4 - x^2}$ dla $0 \leq x \leq 2$ (patrz rys. 115). Biorąc pod uwagę Twierdzenie 17.17, otrzymujemy*

$$(P) = \int_0^2 y(x) \, \mathrm{d}\, x = 0.5 \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \, \mathrm{d}\, x \tag{939}$$

Całkując (939) przez podstawienie (patrz 814) dochodzimy do

$$\begin{aligned}(P) &= 0.5\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}\,x = 0.5\cdot 2\int_0^2 \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\,x = \\ &= \left\langle \left(\begin{array}{l|l} \frac{x}{2}=t & \textit{dla } x=0 \to t=0 \\ x=2t & \\ \mathrm{d}\,x = 2\,\mathrm{d}\,t & \textit{dla } x=2 \to t=1 \end{array} \right) \right\rangle = \\ &= 2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}\,t = \rangle \textit{Przyk. 16.16, str. 275}\langle = \arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}\Big|_0^2 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}\end{aligned} \tag{940}$$

Odp. Pole ćwiartki elipsy jest równe $(P)=\pi/2$. *Natomiast pole elipsy* $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$ *jest równe* $4\cdot\pi/2 = 2\pi$.



Rysunek 115: Elipsa i dowolna ćwiartka elipsy.

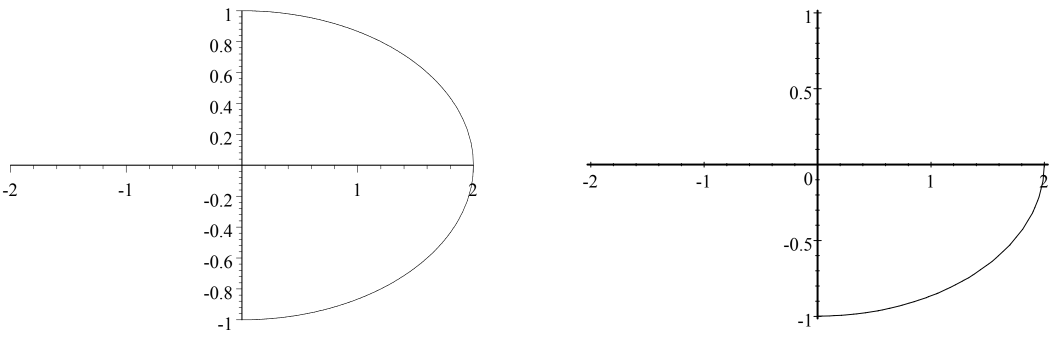
Przykład 17.6 *Obliczyć pole* (P) *ćwiartki elipsy* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Rozwiązanie 17.6 *Jest to przypadek ogólny. Należy obliczyć wartość całki, dla której* $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} = b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$.

$$\begin{aligned}(P) &= \int_0^a y(x)\,\mathrm{d}\,x = b\int_0^a \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}\,x = \left\langle \left(\begin{array}{l|l} \frac{x}{a}=t & \textit{dla } x=0 \to t=0 \\ x=at & \\ \mathrm{d}\,x = a\,\mathrm{d}\,t & \textit{dla } x=a \to t=1 \end{array} \right) \right\rangle = \\ &= ab\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}\,t = \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{bx}{2}\sqrt{a^2-x^2}\Big|_0^a = \frac{ab}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{ab\pi}{4}\end{aligned} \tag{941}$$

Odp. Pole całej elipsy jest równe $(P) = ab\pi$.

Przykład 17.7 *Obliczyć pole prawej połowy elipsy ograniczonej prostymi* $x=0, x=a$ *oraz równaniem* $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ *(patrz rys. 116).* $\sqrt{4-x^2}$.



Rysunek 116: Prawa połowa i dolna prawa ćwiartka elipsy.

Rozwiązanie 17.7 *Wykorzystamy Twierdzenie 17.18. Krzywa* $p(x)$ *wyraża się równaniem* $p(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. *Podobnie* $q(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. *A więc*

$$(P) = b\int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}\,x - b\int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}\,x = 0 \tag{942}$$

Musimy jednak pamiętać, że $y^2(x) = \left(\frac{b}{a}\right)^2(a^2 - x^2)$. *Zatem* $y(x) = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. *Dlatego w dalszych obliczeniach skorzystamy z Uwagi 17.1. Mamy więc:*

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \\ q(x) &= -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned} \tag{943}$$

Stąd

$$(P) = b\int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}\,x + b\int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{ab\pi}{2} \tag{944}$$

Przykład 17.8 *Wyznaczyć pole* (G) *ograniczone prostymi* $x = a$ *i* $x = b$, *gdzie* $0 \le a < b$ *oraz parabolą* $y = \sqrt{2px}$.

Rozwiązanie 17.8 *Podobnie jak w poprzednim przykładzie mamy tu*

$$p(x) = \sqrt{2px} \qquad q(x) = -\sqrt{2px} \tag{945}$$

Zatem

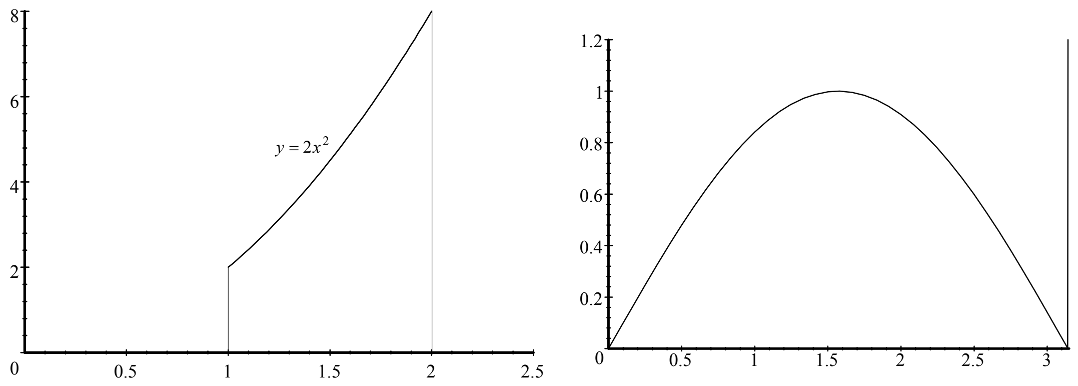
$$(G) = \int_a^b [p(x) - q(x)]\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b \left(\sqrt{2px} + \sqrt{2px}\right)\mathrm{d}\,x = 2\int_a^b \sqrt{2px}\,\mathrm{d}\,x \tag{946}$$

Powyższą całkę obliczamy wykorzystując Tabelę 19 funkcji pierwotnych dla $n = 1/2$:

$$2\int_a^b \sqrt{2px}\,\mathrm{d}\,x = \frac{4}{3}\sqrt{2p}x^{3/2}\Big|_a^b = \frac{4}{3}\sqrt{2p}\left(b^{3/2} - a^{3/2}\right) \tag{947}$$

Odp. Pole $(G) = \frac{4}{3}\sqrt{2p}\left(b^{3/2} - a^{3/2}\right)$.

Przykład 17.9 *Obliczyć pole* (P) *powierzchni ograniczonej prostymi* $x = 1, x = 2$ *oraz parabolą* $y = 2x^2$ *(patrz rys. 117)*



Rysunek 117: Obszar ograniczony fragmentem paraboli i sinusoidy.

Rozwiązanie 17.9 *Obliczamy całkę*

$$(P) = \int_1^2 y(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_1^2 2x^2\,\mathrm{d}\,x = \frac{2}{3}x^3\bigg|_1^2 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3} \tag{948}$$

Odp. Pole $(P) = \frac{14}{3}$.

Przykład 17.10 *Obliczyć pole* (P) *powierzchni ograniczonej prostymi* $x = 0, x = \pi$ *oraz krzywą* $y = \sin x$ *(patrz rys. 117).*

Rozwiązanie 17.10 *Obliczamy całkę*

$$(P) = \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}\,x = -\cos x|_0^\pi = -(-1) + 1 = 2 \tag{949}$$

Odp. Pole $(P) = 2$.

17.3.2 Pole figury płaskiej w układzie biegunowym

Twierdzenie 17.19 *Jeżeli w układzie biegunowym jest dana krzywa*

$$r = r(\varphi) \quad \varphi \in <\alpha,\beta> \quad \beta - \alpha \le 2\pi \tag{950}$$

przy czym funkcja $r(\varphi)$ *jest ciągła w* $<\alpha,\beta>$ *i dodatnia w* (α,β)*, to obszar domknięty* (G) *pokryty promieniami wodzącymi punktów tej krzywej (patrz rys. 118) ma pole*

$$G = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,\mathrm{d}\,\varphi \tag{951}$$

Twierdzenie 17.20 *Jeżeli krzywa*

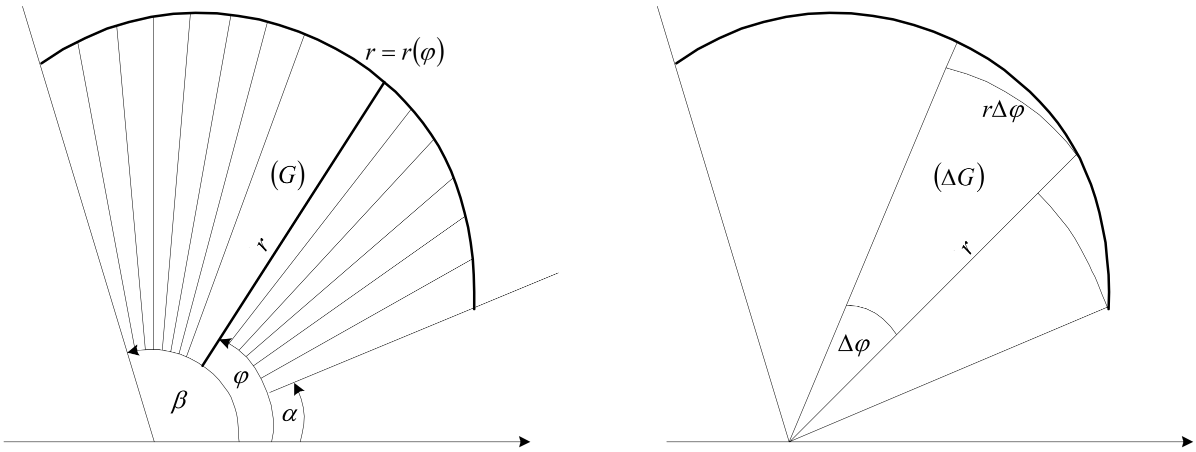
$$r = r(\varphi) \quad \varphi \in <\alpha,\beta> \quad \beta - \alpha \le 2\pi$$

jest dana równaniami parametrycznymi

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad dla \quad t \in <t_\alpha, t_\beta> \tag{952}$$

przy czym funkcje $x(t)$ *i* $y(t)$ *i ich pochodne* $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ *są ciągłe w przedziale* $<t_\alpha, t_\beta>$, *a wzrostowi parametru* t *od* t_α *do* t_β *odpowiada wzrost kąta* φ *od* α *do* β*, to obszar* (G) *pokryty promieniami wodzącymi punktów tej krzywej ma pole*

$$G = \frac{1}{2}\int_{t_\alpha}^{t_\beta} (x\dot{y} - y\dot{x})\,\mathrm{d}\,t \tag{953}$$



Rysunek 118: Pole powierzchni w układzie biegunowym.

17.3.3 Objętość figur obrotowych

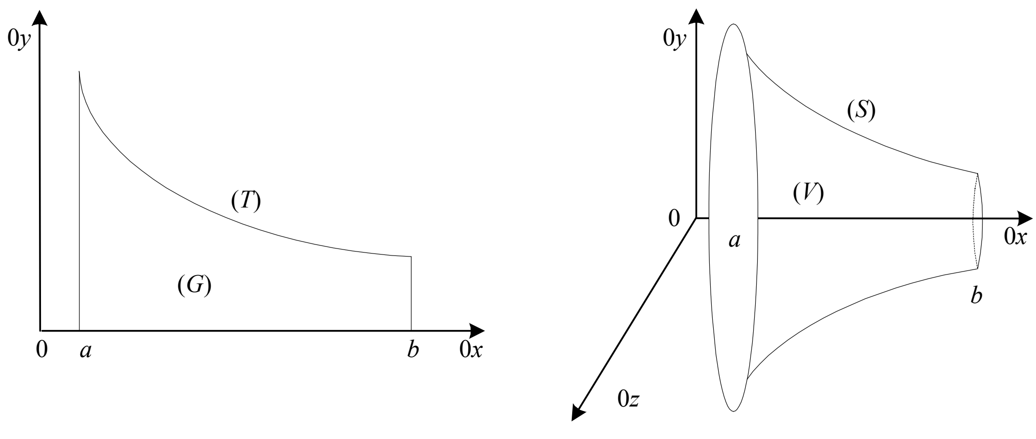
Niech na płaszczyźnie $0xy$ będzie dana krzywa

$$(T) = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y = y(x)\} \tag{954}$$

(patrz rys. 119), przy czym krzywa jest ciągła na $< a, b >$ i dodatnia na (a, b). Niech (G) oznacza obszar domknięty rozciągający się od krzywej (T) do osi $0x$

$$(G) = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x)\} \tag{955}$$

Przez obrót w przestrzeni $0xyz$ krzywej (T) dokoła osi $0x$ powstaje **powierzchnia obrotowa** (S) o osi $0x$ i tworzącej (T). Jednocześnie przez obrót obszaru (G) powstaje bryła obrotowa (V) o osi $0x$ i obszarze tworzącym (G) (patrz rys. 119).



Rysunek 119: Krzywa (T) i bryła obrotowa (V).

Twierdzenie 17.21 *Objętość bryły obrotowej* (V) *wyraża się równaniem*

$$V = \pi \int_a^b y^2(x) \, \mathrm{d}\, x \tag{956}$$

gdzie: $y(x)-$ *równanie krzywej* (T).

Twierdzenie 17.22 *Powierzchnia obrotowa* (S) *o osi* $0x$ *i tworzącej*

$$(T) = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y = y(x)\}$$

gdzie $y(x)$ *jest funkcją klasy* C^1 *na* $< a, b >$ *i dodatnią na* (a, b), *ma pole dane wzorem*

$$S = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}\,x \tag{957}$$

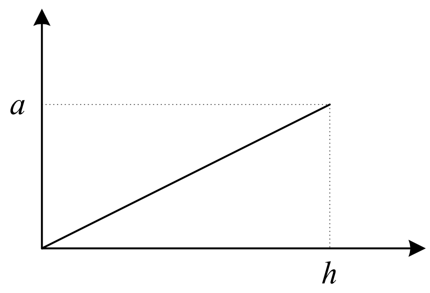
Przykład 17.11 *Obliczyć objętość następujących brył:*

a) *stożka o wysokości* h *i promieniu podstawy* a;

b) *kuli o promieniu a;*

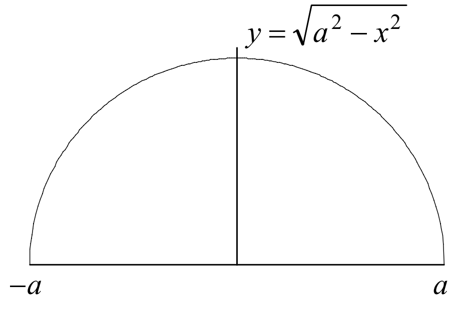
c) *elipsoidy obrotowej.*

Rozwiązanie 17.11 *Bryły te powstają przez obrót dookoła osi* $0x$ *krzywych opisywanych równaniami:*



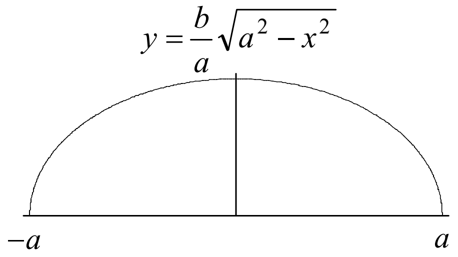
a) $$y = \frac{a}{h}x$$

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{a}{h}x\right)^2 \mathrm{d}\,x = \frac{1}{3}\frac{a^2}{h^2}h^3\pi = \frac{1}{3}\pi h a^2 \tag{958}$$



b) $$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$V = \pi \int_{-a}^a \left(a^2 - x^2\right) \mathrm{d}\,x = \pi\ a^2 x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-a}^a = \frac{4}{3}\pi a^3 \tag{959}$$

c) 

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$V = \pi \left(\frac{b}{a}\right)^2 \int_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2\right) \mathrm{d}\, x = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{b}{a}\right)^2 a^3 = \frac{4}{3}\pi a b^2 \tag{960}$$

Przykład 17.12 *Obliczyć pole powierzchni bocznej stożka o wysokości h i promieniu a.*

Rozwiązanie 17.12 *Tworzącą jest odcinek $y = \frac{a}{h}x$, $0 \le x \le h$; $y' = \frac{a}{h}$. Pole powierzchni wyraża się wzorem (957)*

$$S = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\, \mathrm{d}\, x$$

A więc:

$$S = 2\pi \int_0^h \frac{a}{h} x \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2}\, \mathrm{d}\, x = 2\pi \frac{a}{h^2}\sqrt{h^2 + a^2} \int_0^h x\, \mathrm{d}\, x = \pi a \sqrt{h^2 + a^2} \tag{961}$$

Odp. Pole powierzchni bocznej stożka jest równe: $S = \pi a \sqrt{h^2 + a^2}$.

Przykład 17.13 *Obliczyć pole powierzchni kuli o promieniu r.*

Rozwiązanie 17.13 *Mamy tu (patrz Przykład 17.11): $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ $(-r \le x \le r)$; $y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ oraz*

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, \mathrm{d}\, x = 2\pi \int_{-r}^{r} r\, \mathrm{d}\, x = 4\pi r^2 \tag{962}$$

Odp. Pole powierzchni kuli wynosi $S = 4\pi r^2$.

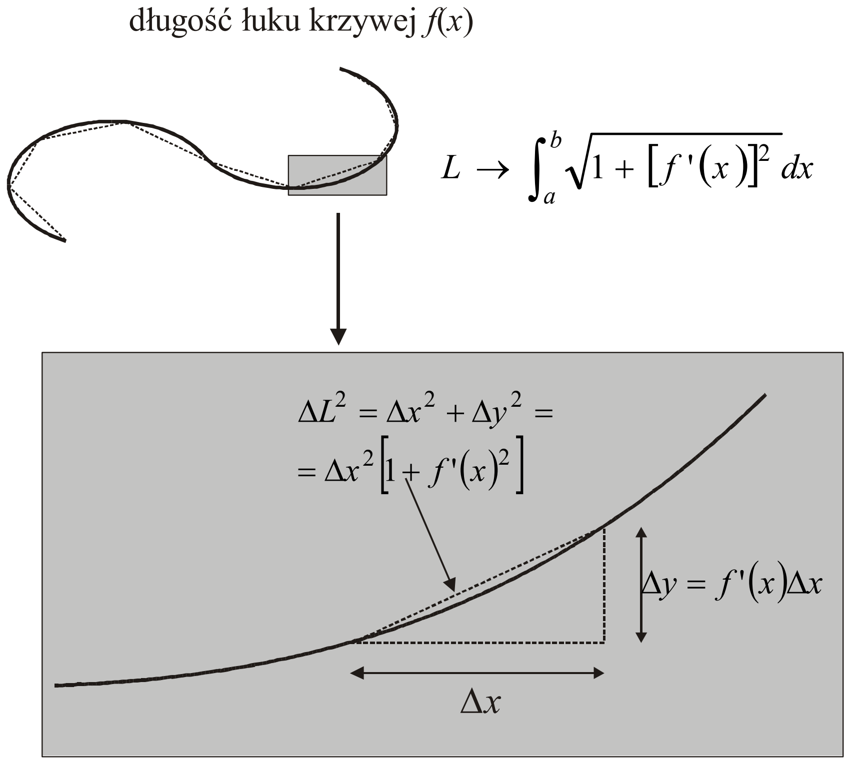
17.3.4 Długość łuku krzywej

Niech będzie dana na płaszczyźnie $0xy$ krzywa (L) o równaniu

$$y = y(x) \quad x \in < a, b > \tag{963}$$

gdzie $y(x)$ jest ciągłą funkcją zmiennej x na przedziale $< a, b >$. Podzielmy przedział $< a, b >$ na elementy $\Delta x_1,\ \Delta x_2, \ldots,\ \Delta x_n$, przy czym $\lambda = \max\limits_{1 \le j \le n} \Delta x_j$ i utwórzmy cięciwy krzywej (L) odpowiadające tym elementom: $\Delta l_1,\ \Delta l_2, \ldots,\ \Delta l_n$, dla których zachodzi relacja $\sigma = \max\limits_{1 \le j \le n} \Delta l_j$ oraz łamaną złożoną z tych cięciw. O takiej łamanej mówimy, że jest wpisana w krzywą (L). Długość tej łamanej jest sumą długości cięciw

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta l_j$$



Rysunek 120: Długość krzywej.

Jeżeli przy zwiększaniu liczby n cięciw w taki sposób, aby długość σ najdłuższej z nich dążyła do 0, długość łamanej wpisanej w krzywą (L) ma skończoną granicę

$$L = \lim_{\sigma \to 0} \sum_{j=1}^{n} \Delta l_j$$

Granicę tę nazywamy długością krzywej (L)

Twierdzenie 17.23 *Krzywa (L) o równaniu*

$$y = y(x) \quad x \in < a, b > \tag{964}$$

gdzie $y(x)$ jest funkcją klasy C^1 na przedziale $< a, b >$ ma długość

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, \mathrm{d}\, x \tag{965}$$

Przykład 17.14 *Obliczyć długość łuku paraboli $y = \frac{1}{2}x^2$ dla $0 \le x \le 1$.*

Rozwiązanie 17.14 *Mamy $y = \frac{1}{2}x^2$, $y' = x$ oraz $\sqrt{1 + y'^2(x)} = \sqrt{1 + x^2}$. Obliczamy wartość całki (patrz (819))*

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|\right)\Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right] \end{aligned} \tag{966}$$

Twierdzenie 17.24 *Krzywa (L) dana równaniami klasy C^1*

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad t \in < a, b > \tag{967}$$

ma długość

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, \mathrm{d}\, t \tag{968}$$

Twierdzenie 17.25 *Krzywa (L) dana w układzie biegunowym równaniami klasy C^1*

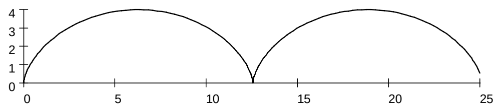
$$r = r(\varphi) \qquad \varphi \in < \alpha, \beta > \tag{969}$$

ma długość

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\, r}{\mathrm{d}\, \varphi}\right)^2}\, \mathrm{d}\, \varphi \tag{970}$$

Rozwiążemy kilka przykładów.

Przykład 17.15 *Obliczyć długość cykloidy opisanej równaniami parametrycznymi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ dla $0 \leq t \leq 2\pi$, $a > 0$.*



Rysunek 121: Długość cykloidy.

Rozwiązanie 17.15 *Cykloidą jest krzywa zakreślona przez punkt znajdujący się na obwodzie okręgu w czasie toczenia się tego okręgu wzdłuż prostej (patrz rys. 121 dla $a = 2$). Mamy*[63]

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = a(1 - \cos t) & \dot{x}^2 = a^2 (1 - \cos t)^2 \\ \dot{y} = a \sin t & \dot{y}^2 = a^2 \sin^2 t \end{array}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2 \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t\right) = \\ = 2a^2 (1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

Stąd

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2a \sin \frac{t}{2}$$

Zatem

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, \mathrm{d}\, t = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, \mathrm{d}\, t = 2a \cdot 4 = 8a$$

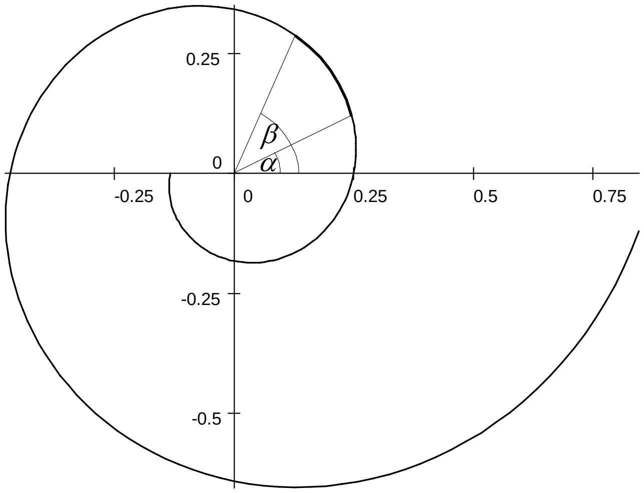
Przykład 17.16 *Obliczyć długość spirali logarytmicznej $r = ce^{a\varphi}$ dla $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $a > 0$, $c > 0$.*

Rozwiązanie 17.16 *Mamy*

$$\begin{aligned} L &= \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\, r}{\mathrm{d}\, \varphi}\right)^2}\, \mathrm{d}\, \varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{(ce^{a\varphi})^2 + (ace^{a\varphi})^2}\, \mathrm{d}\, \varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{c^2 (1 + a^2)} e^{a\varphi}\, \mathrm{d}\, \varphi = \\ &= c\sqrt{1 + a^2} \int_\alpha^\beta e^{a\varphi}\, \mathrm{d}\, \varphi = \frac{c}{a}\sqrt{1 + a^2} \left(e^{a\beta} - e^{a\alpha}\right) \end{aligned}$$

---

63 $\frac{1 - \cos t}{2} = \sin^2 \frac{t}{2}$



Rysunek 122: Długość fragmentu spirali logarytmicznej.

18 Całki niewłaściwe

18.1 Całki niewłaściwe pierwszego i drugiego rodzaju

Definicja 18.1 *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ograniczona i całkowalna na każdym przedziale $a \leq x \leq c-h$, $h>0$ oraz na każdym przedziale $c+k \leq x \leq b$, $k>0$ i jeżeli istnieją granice*

$$\lim_{h\to 0^+}\int_a^{c-h} f(x)\,\mathrm{d}\,x \quad \textit{oraz} \quad \lim_{k\to 0^+}\int_{c+k}^{b} f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{971}$$

*to sumę tych granic nazywamy **całką niewłaściwą** funkcji $f(x)$ na przedziale $< a,b >$ i oznaczamy symbolem*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{972}$$

Uwaga 18.1 *W punkcie $x=c$ funkcja $f(x)$ może nie być określona; w powyższej definicji uwzględnione są funkcje, które w każdym otoczeniu $(c-\delta, c+\delta)$, $\delta>0$ są nieograniczone. Dla funkcji $f(x)$ ograniczonej i całkowalnej w całym przedziale $a \leq x \leq b$ podana suma granic równa jest całce $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ rozumianej w zwykłym sensie.*

Uwaga 18.2 *Jeżeli któraś z granic (971) nie istnieje, to mówimy, że **całka niewłaściwa jest rozbieżna**.*

Jeżeli punktem nieograniczoności jest jeden z końców przedziału $< a,b >$, to przez całkę niewłaściwą (972) rozumiemy odpowiednio

$$\underset{\text{nieciągłość lewostronna}}{\lim_{h\to 0^+}\int_{a+h}^{b} f(x)\,\mathrm{d}\,x} \qquad \text{albo} \qquad \underset{\text{nieciągłość prawostronna}}{\lim_{k\to 0^+}\int_{a}^{b-k} f(x)\,\mathrm{d}\,x}$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest nieograniczona na lewostronnym sąsiedztwie punktu b i całkowalna na przedziale $< a; b-\varepsilon >$ dla każdego $\varepsilon \in (0; b-a)$, to jej całkę niewłaściwą na przedziale

$< a; b >$ określamy następująco

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \underset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{973}$$

Analogicznie określamy na przedziale $< a; b >$ całkę niewłaściwą funkcji $f(x)$ nieograniczonej na prawostronnym sąsiedztwie punktu a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \underset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{974}$$

Całkę niewłaściwą funkcji nieograniczonej nazywamy także **całką niewłaściwą drugiego rodzaju**.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna na każdym przedziale domkniętym na $0x$, to jej całkę niewłaściwą na przedziale $(-\infty; \infty)$ określamy następująco

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x \underset{\text{def}}{=} \lim_{T_1\to -\infty} \int_{T_1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}\,x + \lim_{T_2\to +\infty} \int_{0}^{T_2} f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{975}$$

Mówimy, że całka niewłaściwa (975) jest **zbieżna** (lub że **istnieje**), gdy istnieją obie granice niezależnie jedna od drugiej i granice te są właściwe.

Całki niewłaściwe na przedziałach nieskończonych nazywamy **całkami niewłaściwymi pierwszego rodzaju**.

18.2 Interpretacja geometryczna całki niewłaściwej

Niech funkcja $f(x)$ jest ciągła i nieujemna na przedziale $a \le x \le b$ i niech $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Wówczas, jeżeli istnieje granica

$$\lim_{\varepsilon\to 0^-} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

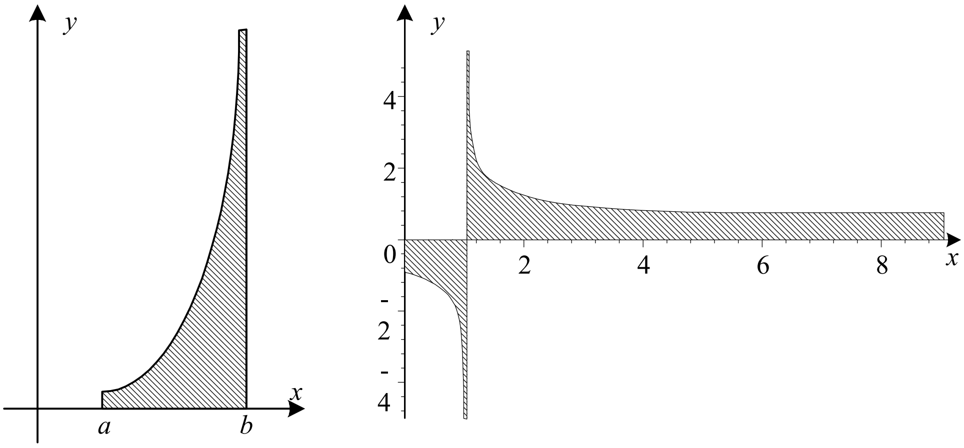
to mówimy, że **pole obszaru nieograniczonego**, którego brzegiem jest odcinek prostej $x = a$ na przedziale $0 \le y \le f(a)$, odcinek osi $0x$ na przedziale $a \le x \le b$, część krzywej $y = f(x)$ na przedziale $a \le x < b$ oraz fragment prostej $x = b$, leżący ponad osią $0x$, **jest skończone** (patrz rys. 123) i **równe całce** (972).

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale domkniętym $< a, b >$ z wyjątkiem wewnętrznego punktu $x = c$ i jeżeli istnieje całka $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,x$, to całka ta wyraża sumę pól obszarów określonych całkami

$$\int_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}\,x + \int_c^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,x \tag{976}$$

Przykład 18.1 *Obliczyć całkę*

$$\int_0^3 \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x}}$$



Rysunek 123: Osobliwość na prawym końcu przedziału i wewnątrz przedziału.

Rozwiązanie 18.1 *Funkcja podcałkowa jest nieciągła w punkcie $x = 0$. Przyjmując $\varepsilon > 0$, obliczamy całkę*

$$\int_{\varepsilon}^{3} \frac{\mathrm{d}\, x}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_{\varepsilon}^{3} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{\varepsilon}$$

Jeżeli $\varepsilon \to 0$, to $2\sqrt{\varepsilon} \to 0$, a więc

$$\int_{0}^{3} \frac{\mathrm{d}\, x}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{3} \frac{\mathrm{d}\, x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{3}$$

Przykład 18.2 *Obliczyć pole obszaru, którego brzegiem jest odcinek osi odciętych od $x = 0$ do $x = 9$, rzędne w tych punktach oraz krzywa*

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

Rozwiązanie 18.2 *Funkcja $y(x)$ jest nieciągła w punkcie $x = 1$ (patrz rys. 123), czyli w wewnętrznym punkcie przedziału $< 0; 9 >$, ujemna dla $x < 1$ oraz dodatnia dla $x > 1$. Poszukiwane pole równa się całce*

$$\int_{0}^{9} \frac{\mathrm{d}\, x}{\sqrt[3]{x-1}} = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\, x}{\sqrt[3]{x-1}} + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^{9} \frac{\mathrm{d}\, x}{\sqrt[3]{x-1}} \tag{977}$$

Obliczamy całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{\mathrm{d}\, x}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}(x-1)^{2/3}$$

Przechodząc do całki oznaczonej otrzymujemy

$$\int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\, x}{\sqrt[3]{x-1}} = \left[\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)\right]_{0}^{1-\varepsilon} = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(-\varepsilon)^2}\right) - \frac{3}{2}$$

Gdy $\varepsilon \to 0$, *to* $\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(-\varepsilon)^2}\right) \to 0$ *i*

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt[3]{x-1}} = -\frac{3}{2}$$

Druga z całek po prawej stronie równości (977) przyjmuje wartość

$$\int_{1+\varepsilon}^9 \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}\left[\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)\right]_{1+\varepsilon}^9 = 6 - \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{\varepsilon^2}\right)$$

Gdy $\varepsilon \to 0$, *to* $\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{\varepsilon^2}\right) \to 0$ *i*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^9 \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt[3]{x-1}} = 6$$

Ostatecznie

$$\int_0^9 \frac{\mathrm{d}\,x}{\left|\sqrt[3]{x-1}\right|} = \frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2}$$

Przykład 18.3 *Obliczyć całkę*

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x}}$$

Rozwiązanie 18.3 *Funkcja podcałkowa jest ciągła na przedziale* $< 0; 1 >$ *z wyjątkiem jego lewego końca:* $x = 0$. *Obliczamy całkę niewłaściwą*

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x}}$$

Następnie obliczamy całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x}} = -\frac{2}{\sqrt{x}}$$

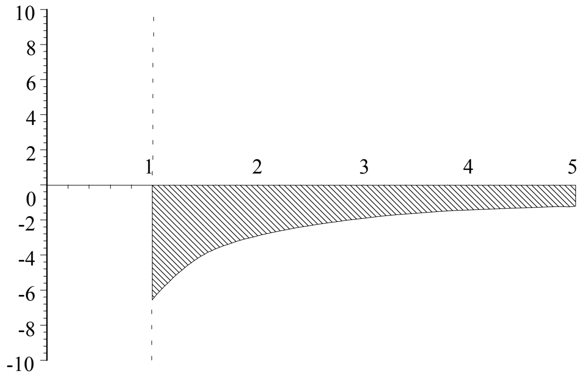
i otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-2 + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = +\infty$$

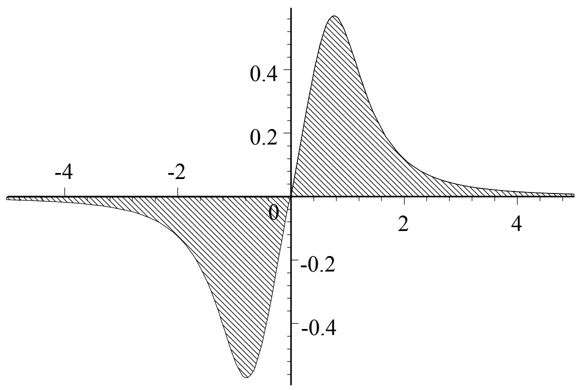
A więc dana całka jest rozbieżna.

Przykład 18.4 *Obliczyć całkę (patrz rysunek 124)*

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 \mathrm{d}\,x$$



Rysunek 124: Całka niewłaściwa w obszarze nieograniczonym.



Rysunek 125: Całka niewłaściwa w obszarze nieograniczonym.

Rozwiązanie 18.4 *Należy wyznaczyć* $\lim\limits_{T\to\infty}\int_1^T\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\mathrm{d}\,x$. *W pierwszej kolejności obliczamy całkę nieoznaczoną*

$$\int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\mathrm{d}\,x=\int\left(\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}\,x=$$

a następnie przechodzimy do całki oznaczonej

$$\int_1^T\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\mathrm{d}\,x=-\frac{4}{T}-\frac{2}{T^2}-\frac{1}{3T^3}-(-4-2-1/3)$$

Gdy $T\to\infty$, *pierwsze trzy wyrazy dążą do zera i ostatecznie otrzymujemy*

$$\int\limits_1^{+\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\mathrm{d}\,x=\frac{19}{3}$$

Przykład 18.5 *Obliczyć pole obszaru (patrz rysunek 125), którego brzegiem jest prosta* $y=0$ *i krzywa*

$$y=\frac{x}{x^4+1}$$

Rozwiązanie 18.5 *Pole obszaru równa się*

$$P=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{x}{x^4+1}\right|\mathrm{d}\,x$$

Zauważmy, że $\frac{x}{x^4+1}<0$, *gdy* $x<0$, *a* $\frac{x}{x^4+1}>0$, *gdy* $x>0$. *Mamy więc*

$$P=-\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{x}{x^4+1}\mathrm{d}\,x+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x}{x^4+1}\mathrm{d}\,x$$

Obliczamy całkę nieoznaczoną (metodą przez podstawienie)

$$\int\frac{x}{x^4+1}\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\arctan\left(x^2\right)+C$$

Następnie przechodzimy do całek oznaczonych

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{T\to-\infty} \int_{-T}^{0} \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\lim_{T\to-\infty} \left[\arctan\left(x^2\right)\right]_T^0 = -\frac{\pi}{4}$$

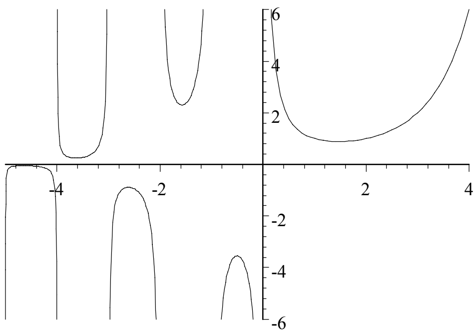
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{T\to\infty} \int_{0}^{T} \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty} \left[\arctan\left(x^2\right)\right]_0^T = \frac{\pi}{4}$$

Ostatecznie

$$P = -\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

18.3 Szczególne całki niewłaściwe

18.3.1 Całka Eulera - Poissona jako funkcja błędu



Rysunek 126: Funkcja $\Gamma(x)$.

W rachunku prawdopodobieństwa bardzo często występuje niewłaściwa **całka Eulera-Poissona**

$$K = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x \tag{978}$$

Całkę tę nazywamy również **całką Laplace'a** lub **całką Gaussa**.

W punkcie tym podamy jedynie jej wartość, a metodę obliczania (978) omówimy w rozdziale dotyczącym całek podwójnych. A więc

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{979}$$

Ponieważ funkcja e^{-x^2} jest funkcją parzystą, to $\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Wynika z tego, że $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \sqrt{\pi}$.

Pewna modyfikacja całki Eulera-Poissona

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}\,t \tag{980}$$

nosi nazwę **całki prawdopodobieństwa** i jest ona stablicowana dla $x \in< 0, 4 >$. Wartość $\Phi(4) = 0.99994$, a $\Phi(\infty) = 1$.

Niekiedy **całkę prawdopodobieństwa** nazywa się **funkcją błędu**[64]

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t = \Phi\left(x\sqrt{2}\right) \qquad x \geq 0 \tag{981}$$

Natomiast różnicę

$$1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t \tag{982}$$

oznaczamy przez $\operatorname{Erf}(x)$ lub $\operatorname{erfc}(x)$ i nazywamy dopełnieniem funkcji błędu do jedności. Słuszna jest zatem relacja

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t = 1 \tag{983}$$

[64]Od angielskiego: *error function.*

lub

$$\mathrm{Erf}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}\,t \tag{984}$$

Ponadto

$$\mathrm{Erf}(-x) = -\,\mathrm{Erf}\,(x) \tag{985}$$

18.3.2 Całka Eulera - funkcja gamma: $\Gamma(x)$

Jak pamiętamy **silnią** $n!$ liczby naturalnej n nazywamy iloczyn $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$. Można go również zapisać przy pomocy symbolu $\prod\limits_{i=1}^{n} i$. Przyjmujemy ponadto, że $1! = 1$ i $0! = 1$. Podstawową własność silni opisuje wyrażenie: $n! = n(n-1)!$.

Powyższa relacja dla dużych liczb naturalnych jest niewygodna w stosowaniu. Silnię wielkich liczb wyrażamy przy pomocy **wzorów Stirlinga**

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \cdots\right) \tag{986}$$

oraz

$$\ln{(n!)} \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi} \tag{987}$$

Zaletą tych wzorów jest to, że można obliczać nimi wartości silni również liczb niecałkowitych.

Pojęcie silni można więc rozszerzyć na dowolne liczby rzeczywiste $x \in \mathcal{R}$ i również liczby zespolone $z \in \mathbb{C}$. Służy do tego tak zwana **funkcja gamma** $\Gamma(x)$ zdefiniowana następująco:

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}\,t & - \ \textbf{całka Eulera} \text{ dla } x > 0 \\[2ex] \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)} & - \ \text{dla dowolnych } x \end{cases} \tag{988}$$

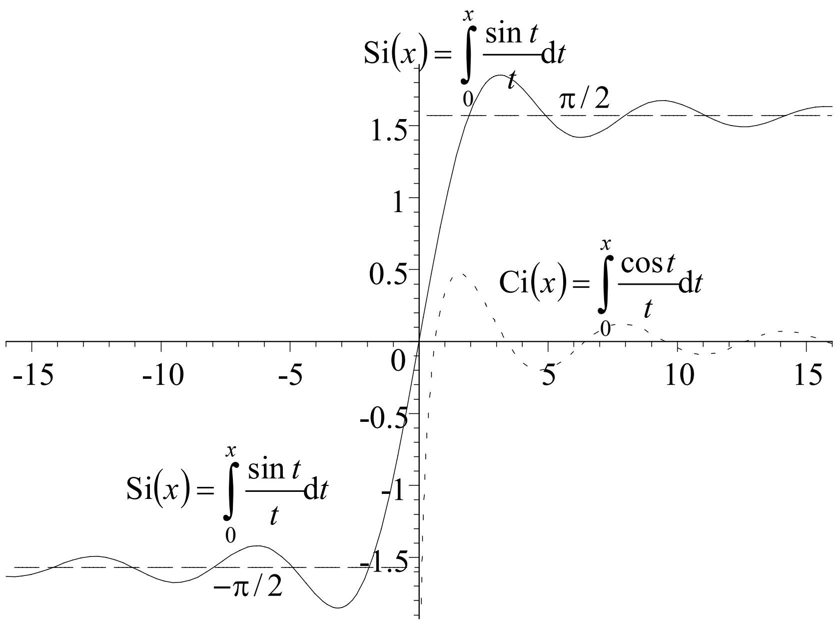
Do podstawowych własności funkcji gamma $\Gamma(x)$ należy:

1. $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$
2. $\Gamma(n) = (n-1)!$ dla n naturalnych
3. $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$
4. $\Gamma(x)\Gamma\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$

Ponadto:

1. $\Pi(x) = \Gamma(x+1)$
2. $\Pi(0) = \Gamma(1) = 1$
3. $\Pi\left(\dfrac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$
4. $\Pi\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
5. $\Pi\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \Gamma\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$
6. Funkcja gamma nie ma miejsc zerowych

18.3.3 Inne całki niewłaściwe



Rysunek 127: Sinus i kosinus całkowy.

Jak pamiętamy, całek pewnych funkcji (nawet prostych) nie da się wyrazić przez znane funkcje elementarne (patrz (755)). Należą do nich całki funkcji

$$e^{x^2} \qquad e^{-x^2} \qquad \frac{e^x}{x} \qquad \frac{1}{\ln x}$$
$$\frac{\sin x}{x} \qquad \frac{\cos x}{x} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \tag{989}$$

Wartości całek oznaczonych większości takich funkcji są stablicowane. Niektóre edytory tekstu mają wbudowane jądra pakietów matematycznych, np. Maple® lub MuPad®, które automatycznie wyznaczają wartości całek oznaczonych funkcji nieelementanych w skończonych lub nieskończonych przedziałach całkowania. Na przykład $\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}\,x = 1.4627$; $\int_0^2 e^{x^2}\,\mathrm{d}\,x = 16.453$; $\int_0^\infty e^{x^2}\,\mathrm{d}\,x = \infty$.

Poniżej przedstawiamy nazwy niektórych całek niewłaściwych[65] i wybrane ich wartości:

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t \qquad \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{2} \qquad \text{sinus całkowy}$$

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}\,t \qquad \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}\,t = \gamma + \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 1!} + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \dots \qquad \text{całka wykładnicza}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{e^x}\,\mathrm{d}\,x = -\gamma = -0.5772 \qquad \text{stała Eulera}$$

$$\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\ln|t|}\,\mathrm{d}\,t \qquad \text{logarytm całkowy}$$

$$\mathrm{Ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}\,t \quad \mathrm{Ci}(x) = \gamma - \ln|x| - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \dots \qquad \text{kosinus całkowy}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}\,x = \int_{-\infty}^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}\,x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{990}$$

[65]Liczbę γ nazywamy stałą Eulera. Jest ona równa granicy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = 0.5772 = \gamma$.

19 Równania różniczkowe zwyczajne

19.1 Pojęcie równania różniczkowego

O równaniu różniczkowym mówi definicja:

Definicja 19.1 *(Równania różniczkowego rzędu 1)*
Równanie

$$F(x, y, y') = 0 \tag{991}$$

*w którym F jest daną funkcją trzech zmiennych, a y jest niewiadomą funkcją zmiennej x, nazywamy **równaniem różniczkowym rzędu** 1 **w postaci ogólnej**. Równanie to określa pewien związek między wartościami zmiennej x, niewiadomej funkcji $y(x)$ i jej pochodnej $y'(x)$. **Rozwiązaniem** tego równania nazywamy każdą funkcję y różniczkowalną w pewnym przedziale i spełniającą w tym przedziale równość $F(x, y(x), y'(x)) = 0$.*

W szczególnych przypadkach równanie (991) można sprowadzić do

$$y' = f(x, y(x)) \tag{992}$$

zwanej **postacią normalną równania różniczkowego**. W równaniu (992) f jest funkcją dwóch zmiennych, a y niewiadomą funkcją zmiennej x. Rozwiązaniem tego równania nazywamy każdą funkcję y, która jest na pewnym przedziale różniczkowalna i spełnia równość $y'(x) = f(x, y(x))$.

Uwaga 19.1 *Równanie różniczkowe rzędu* 2

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad lub \quad y'' = f(x, y(x), y'(x)) \tag{993}$$

i równanie różniczkowe rzędu $n, n \in \mathcal{N}$

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \quad lub \quad y^{(n)} = f\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right) \tag{994}$$

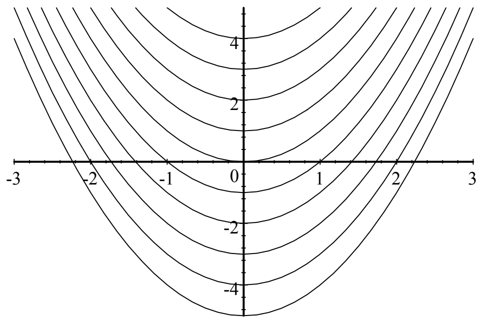
definiujemy podobnie jak równanie rzędu 1*.*

Przykłady równań różniczkowych zwyczajnych:

1. Równanie pierwszego rzędu
$$\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} + y + x = 0 \tag{995}$$

2. Równanie drugiego rzędu
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\, x^2} + \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} + y = x \tag{996}$$

19.1.1 Rozwiązanie szczególne i rozwiązanie ogólne



Rysunek 128: Krzywe całkowe równania $y' = 2x$.

Rozważmy równanie

$$y' = f(x, y(x)) \tag{997}$$

Załóżmy, że funkcja f zmiennych x, y jest ciągła w pewnym obszarze D na płaszczyźnie $0xy$. Dowolne rozwiązanie równania

$$y = y(x) \qquad x \in \mathcal{E} \tag{998}$$

nazywamy **rozwiązaniem szczególnym**. Istnieje nieskończenie wiele rozwiązań szczególnych.

Definicja 19.2 ***Wykres całki*** *równania różniczkowego nazywamy* ***krzywą całkową****.*

Definicja 19.3 ***Rozwiązaniem ogólnym*** *równania (997) nazywamy wyrażenie*

$$y = \Phi(x, C) \tag{999}$$

które zależy w sposób istotny od parametru C i dla każdej wartości C należącej do pewnego przedziału jest rozwiązaniem szczególnym równania (997). Rozwiązanie ogólne jest rodziną rozwiązań szczególnych.

19.1.2 Warunek początkowy

Niech będzie dane równanie

$$y' = f(x, y(x)) \tag{1000}$$

i pewien punkt $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Jeżeli rozwiązanie szczególne (998) przyjmuje dla $x = x_0$ wartość y_0, tj. $x_0 \in \mathcal{E}$ oraz

$$y(x_0) = y_0 \tag{1001}$$

czyli krzywa całkowa (998) przechodzi przez punkt (x_0, y_0), to mówimy, że rozwiązanie (998) **spełnia warunek początkowy określony parą liczb** (x_0, y_0) lub krócej, **warunek początkowy** (x_0, y_0).

Przykład 19.1 *Rozwiązać równanie różniczkowe*

$$y' = 2x \tag{1002}$$

Rozwiązanie 19.1 *Całkując obustronnie powyższe równanie względem x*

$$\int y' \, \mathrm{d}\, x = 2 \int x \, \mathrm{d}\, x \tag{1003}$$

otrzymujemy rozwiązanie ogólne

$$y = x^2 + C \quad x \in \mathcal{R} \quad C = \text{const} \tag{1004}$$

Podstawiając za C dowolną liczbę, otrzymujemy pewne rozwiązanie szczególne, którego wykresem jest parabola (patrz rysunek 128).

Niech będzie dany punkt (x_0, y_0). Aby wyznaczyć rozwiązanie szczególne spełniające warunek początkowy (x_0, y_0), podstawimy w rozwiązaniu ogólnym $x = x_0, y = y_0$. Otrzymujemy $y_0 = x_0^2 + C$, stąd $C = y_0 - x_0^2$. Jest to ta wartość stałej, która odpowiada warunkowi początkowemu (x_0, y_0). Wstawiając ją do równania ogólnego, dostajemy

$$y = x^2 + y_0 - x_0^2 \quad x \in \mathcal{R} \tag{1005}$$

Jest to rozwiązanie szczególne spełniające dany warunek początkowy. Jego wykres jest krzywą całkową przechodzącą przez punkt (x_0, y_0).

Rozwiążemy następny przykład.

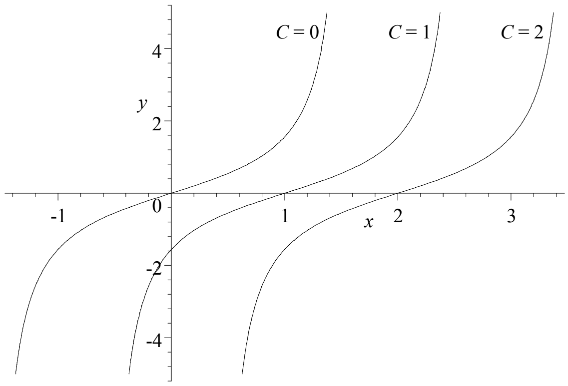
Przykład 19.2 *Dane jest równanie różniczkowe*

$$y' = 1 + y^2 \tag{1006}$$

Rozwiązanie 19.2 *Załóżmy, że istnieje rozwiązanie tego równania i że jest to funkcja $y = y(x), x \in \mathcal{E}$. Mamy więc*

$$\frac{y'}{1+y^2} = 1$$

$$\int \frac{y'}{1+y^2}\,\mathrm{d}\,x = \int 1\,\mathrm{d}\,x$$



Rysunek 129: Krzywe całkowe równania $y' = 1 + y^2$.

Stąd

$$\int \frac{\mathrm{d}\,y}{1+y^2} = \int \mathrm{d}\,x$$

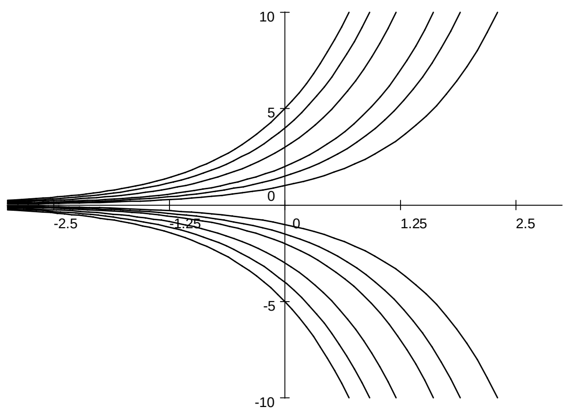
Rozwiązanie powyższej całki ma postać (patrz Tabela 20 dla $a = 1$)

$$\arctan y = x - C$$

$$y = \tan(x - C) \quad dla \quad |x - C| < \pi/2 \tag{1007}$$

(patrz rysunek 130). Jeżeli znamy warunek początkowy (x_0, y_0), to otrzymujemy $C = x_0 - \arctan y_0$ oraz

$$y = \tan(x - x_0 + \arctan y_0) \qquad |x - x_0 + \arctan y_0| < \pi/2$$



Rysunek 130: Krzywe całkowe równania $y' = y$.

Rozwiążemy przykład.

Przykład 19.3 *Rozwiązać równanie różniczkowe*

$$y' = y \tag{1008}$$

Rozwiązanie 19.3 *Jednym z rozwiązań jest funkcja stała $y = 0$ dla $x \in \mathcal{R}$. Będziemy poszukiwać rozwiązania niezerowego. Otrzymujemy*

$$\frac{y'}{y} = 1$$

Następnie całkując obustronnie

$$\int \frac{y'}{y} \,\mathrm{d}\, x = \int 1 \cdot \mathrm{d}\, x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\, y}{y} = \int \mathrm{d}\, x$$

$$\begin{array}{ll}
\ln|y| = x + A & A - \textit{ stała dowolna} \\
|y| = e^{x+A} = e^A e^x & e^A = B \\
|y| = Be^x & B - \textit{ stała dowolna} \\
y = \pm Be^x & \pm B = C \\
y = Ce^x & C - \textit{ stała różna od } 0
\end{array}$$

Zauważmy, że $y = Ce^x$ jest rozwiązaniem (1008) także dla $C = 0$. Zatem rozwiązaniem ogólnym równania (1008) jest funkcja

$$y = Ce^x \quad x \in \mathcal{R} \quad C - \textit{ stała dowolna}$$

Jeżeli chcemy wyznaczyć rozwiązanie szczególne spełniające warunek początkowy (x_0, y_0), to należy w rozwiązaniu ogólnym podstawić $x = x_0,\ y = y_0$. Otrzymamy wówczas $y_0 = Ce^{x_0}$, czyli $C = y_0 e^{-x_0}$. Stąd rozwiązanie szczególne przyjmie postać

$$y = y_0 e^{x - x_0} \qquad x \in \mathcal{R}$$

19.2 Istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania $y' = f(x, y)$

Istnienie rozwiązań

Twierdzenie 19.1 *Jeżeli prawa strona równania różniczkowego*

$$y' = f(x, y) \tag{1009}$$

jest funkcją ciągłą w obszarze D, to przez każdy punkt tego obszaru przechodzi co najmniej jedna krzywa całkowa tego równania.

Jednoznaczność rozwiązań

Zakładamy, że funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w obszarze D. Zakładamy, że punkt (x_0, y_0) należy do D, a U jest otoczeniem tego punktu zawartym w D. Powiedzenie, że krzywa całkowa równania (1009) jest w punkcie (x_0, y_0) **lokalnie jednoznaczna** oznacza, że istnieje przedział

$$(x_0 - h, x_0 + h) \qquad h > 0$$

w którym istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania (1009) przyjmujące w x_0 wartość y_0.

19.2.1 Warunek Lipschitza

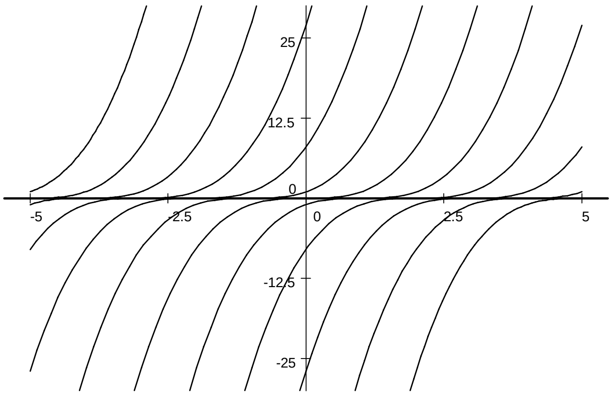
Powiedzenie, że funkcja $f(x,y)$ spełnia w U **warunek Lipschitza** względem y, oznacza, że istnieje liczba Ntaka, że dla dwóch dowolnych punktów (x,y) i $(x,\bar{y})$ należących do U zachodzi nierówność

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leq N\,|y-\bar{y}| \qquad (1010)$$

Uwaga 19.2 *Jeżeli pochodna cząstkowa funkcji f względem y jest ograniczona w U*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq N$$

to funkcja f spełnia w U warunek Lipschitza.



Rysunek 131: Krzywe całkowe równania $y' = 3y^{2/3}$.

Twierdzenie 19.2 *Jeżeli prawa strona równania różniczkowego (1009) jest ciągła w otoczeniu U punktu (x_0,y_0) i spełnia warunek Lipschitza w tym otoczeniu, to przez ten punkt przechodzi lokalnie jednoznaczna krzywa całkowa tego równania.*

Twierdzenie 19.3 *Jeżeli prawa strona równania różniczkowego (1009) jest ciągła w obszarze D i ma w tym obszarze ciągłą pochodną cząstkową względem y, to przez każdy punkt obszaru D przechodzi lokalnie jednoznaczna krzywa całkowa tego równania.*

Przykład 19.4 *Przeanalizować równanie*

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$$

Rozwiązanie 19.4 ***Istnienie rozwiązań.*** *Prawa strona równania jest ciągła na całej płaszczyźnie Oxy, więc przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi co najmniej jedna krzywa całkowa.*

Jednoznaczność rozwiązań. *Prawa strona równania ma pochodną cząstkową*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(3\sqrt[3]{y^2}\right) = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$$

ciągłą dla $y \neq 0$, skąd wynika jednoznaczność rozwiązań na półpłaszczyźnie $y > 0$ oraz na półpłaszczyźnie $y < 0$. Na prostej $y = 0$ warunek Lipschitza nie zachodzi, gdyż dla $y > 0$ i $\bar{y} = 0$ mamy

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| = 3\sqrt[3]{y^2} = 3y^{-1/3}y = 3y^{-1/3}\,|y-\bar{y}|$$

przy czym $y^{-1/3} \to \infty$ dla $y \to 0$.

Wyznaczenie rozwiązań. *Jednym z rozwiązań jest*

$$y = \text{const} = 0 \qquad x \in \mathcal{R}$$

Rozwiązaniem niezerowym jest funkcja (patrz rysunek 131)

$$y = (x-C)^3 \quad x \in \mathcal{R} \quad C - \text{ stała dowolna}$$

19.3 Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Mówi o nim definicja:

Definicja 19.4 *Równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych nazywamy równanie*

$$y' = f(x)g(y) \quad \text{lub} \quad y' = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{1011}$$

Równanie to jest całkowalne elementarnie.

Twierdzenie 19.4 *Jeżeli w równaniu różniczkowym*

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{1012}$$

funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale X, a funkcja $g(y)$ jest ciągła i różna od 0 na przedziale Y, to przez każdy punkt

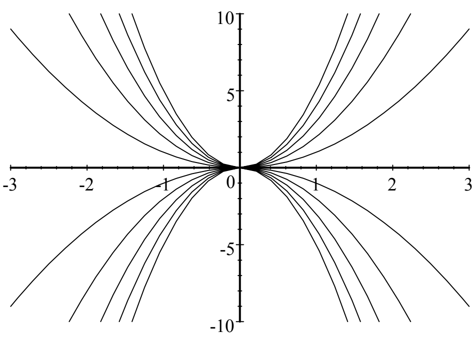
$$(x_0, y_0) \tag{1013}$$

obszaru $\mathcal{D} = X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ przechodzi lokalnie jednoznaczna krzywa całkowa tego równania

$$G(y) - G(y_0) = F(x) - F(x_0) \tag{1014}$$

gdzie F i G są funkcjami pierwotnymi funkcji f i g.

19.3.1 Algorytm metody rozdzielenia zmiennych



Rysunek 132: Krzywe całkowe równania $y' = 2y/x$.

Rozwiązując równanie różniczkowe za pomocą **metody rozdzielenia zmiennych** stosujemy następujący krótki zapis

$\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \dfrac{f(x)}{g(y)}$	równanie różniczkowe
$g(y)\,\mathrm{d}\,y = f(x)\,\mathrm{d}\,x$	rozdzielenie zmiennych
$\int g(y)\,\mathrm{d}\,y = \int f(x)\,\mathrm{d}\,x$	całkowanie różniczek
$G(y) = F(x) + C$	całka ogólna
$y = \varphi(x, C)$	rozwiązanie ogólne

Przykład 19.5 *Rozwiązać równanie różniczkowe*

$$y' = \frac{2y}{x} \tag{1015}$$

Rozwiązanie 19.5 *Jest to równanie (1012), przy czym $f(x) = 2/x$, a $g(y) = 1/y$. Obszarem $\mathcal{D}$ może być każda z czterech ćwiartek płaszczyzny $0xy$. Stosując metodę rozdzielenie zmiennych, otrzymujemy*

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{2y}{x}$$

Następnie

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,y}{y} &= \frac{2}{x}\,\mathrm{d}\,x \\ \int\frac{\mathrm{d}\,y}{y} &= \int\frac{2}{x}\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

oraz

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C| \quad C \neq 0 \quad \ln|y| = \ln|C|\,x^2$$

Ostatecznie mamy

$$|y| = |C|\,x^2 \tag{1016}$$

W ćwiartkach I i II mamy $y = Cx^2$ dla $C > 0$, w ćwiartkach III i IV $y = Cx^2$ dla $C < 0$ (rysunek 132). Ponieważ funkcja stała równa 0 dla $x \neq 0$ też jest rozwiązaniem tego równania, więc końcowe rozwiązanie ma postać

$$y = Cx^2 \quad x \neq 0 \quad C = \mathrm{const} \tag{1017}$$

19.3.2 Przypadki szczególne równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych

Tabela 23

Równanie różniczkowe	Prawa strona	Całka ogólna
$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = a$	stała	$y = ax + C$
$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = f(x)$	nie zależy od y	$y = \int f(x)\,\mathrm{d}\,x + C$
$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = f(y)$	nie zależy od x	$f(y) = 0$ lub $\int \frac{\mathrm{d}\,y}{f(y)} + C$

Tablica 23: Przypadki szczególne równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych.

19.3.3 Równania różniczkowe sprowadzalne do równań o zmiennych rozdzielonych

Tabela 24

Równanie	Podstawienie
$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = f(ax + by + c)$	$u = ax + by + c$
$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$u = \frac{y}{x}$

Tablica 24: Równania różniczkowe sprowadzalne do równania o zmiennych rozdzielonych.

1. $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = f(u), \quad u = ax + by + c, \quad \dfrac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = a + b\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}, \quad \dfrac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = a + bf(u)$
   Całka ogólna wyraża się wzorem alternatywnym
   $$a + bf(u) = 0 \quad \text{lub} \quad \int \frac{\mathrm{d}\,u}{a + bf(u)} = x + C \tag{1018}$$

2. $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = f(u), \quad u = \dfrac{y}{x}, \quad y = xu, \quad \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = u + x\dfrac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}, \quad f(u) = u + x\dfrac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}, \quad \dfrac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = \dfrac{1}{x}\left(f(u) - u\right)$

19.4 Równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu

Przytoczymy definicję:

Definicja 19.5 *Równaniem różniczkowym liniowym pierwszego rzędu nazywamy równanie*

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} + p(x)y = f(x) \tag{1019}$$

gdzie x jest zmienną niezależną, $y = y(x)-$ szukaną funkcją, $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = y'-$ jej pochodną; funkcje $p(x), f(x)$ są ciągłe na przedziale X; $p(x)-$ współczynnik równania, a $f(x)-$ prawa strona.

Jeżeli $f(x) \equiv 0$, to równanie (1019) nazywamy **równaniem jednorodnym** (RJ), w przeciwnym przypadku, gdy $f(x) \neq 0$, równanie nazywamy **równaniem niejednorodnym** (RN).

Aby rozwiązać równanie niejednorodne (1019) należy:

1. Rozwiązać równanie jednorodne otrzymane z równania (1019) przez zastąpienie prawej strony zerem, tj.
   $$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} + p(x)y = 0 \qquad (RJ) \tag{1020}$$
   Równanie jednorodne rozwiązujemy poprzez rozdzielenie zmiennych. W efekcie otrzymujemy
   $$\frac{\mathrm{d}\,y}{y} = -p(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{1021}$$
   Po scałkowaniu mamy
   $$\ln|y| - \ln|C| = -\int p(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{1022}$$
   $$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int p(x)\,\mathrm{d}\,x$$
   Stąd
   $$y = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} \tag{1023}$$
   gdzie: $C-$ stała $CORJ$ - czytamy: całka ogólna równania jednorodnego.

2. Znając całkę ogólną równania jednorodnego rozwiązać równanie niejednorodne stosując jedną z dwóch metod: **metodę uzmienniania stałej** lub **metodę przewidywania całki szczególnej równania niejednorodnego**.

- Metoda uzmienniania stałej polega na zastąpieniu stałej C, występującej w $(CORJ)$, funkcją $C(x)$, zakładając, że otrzymane wyrażenie

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} \tag{1024}$$

będzie rozwiązaniem równania niejednorodnego (RN). Wstawiając rozwiązanie (1024) i jego pochodną do równania (RN) (1019) otrzymamy

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = C'(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}\\
&C'(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} = f(x)\\
&C'(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} = f(x) \qquad\qquad (1025)\\
&C'(x) = f(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}\\
&C(x) = \int f(x)e^{\int p(\eta)\,\mathrm{d}\,\eta}\,\mathrm{d}\,x + A
\end{aligned}$$

gdzie: $A-$ dowolna stała całkowania. Uwzględniając (1025) w (1024) otrzymujemy całkę ogólną równania niejednorodnego $(CORN)$:

$$y = \left[\int f(x)e^{\int p(\eta)\,\mathrm{d}\,\eta}\,\mathrm{d}\,x + A\right]e^{\int -p(x)\,\mathrm{d}\,x} \qquad (CORN) \tag{1026}$$

Przykład 19.6 *Rozwiązać równanie*

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} - 2xy = xe^{x^2} \qquad (RN) \tag{1027}$$

Rozwiązanie 19.6 *Piszemy równanie jednorodne*

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} - 2xy = 0 \qquad (RJ) \tag{1028}$$

Rozdzielając zmienne mamy

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{y} = 2x\,\mathrm{d}\,x \tag{1029}$$

Całkując obustronnie dostajemy

$$\ln|y| = x^2 + \ln|C| \tag{1030}$$

czyli

$$y = Ce^{x^2} \tag{1031}$$

Stosujemy metodę uzmienniania stałej, tzn. staC zastępujemy funkcją $C(x)$

$$y = C(x)e^{x^2} \tag{1032}$$

Otrzymane równanie oraz jego pierwszą pochodną

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = C'(x)e^{x^2} + 2C(x)xe^{x^2} \tag{1033}$$

wstawiamy do równania niejednorodnego (1027). Po wykonaniu obliczeń dostajemy

$$C'(x) = x \quad \text{stąd} \quad C(x) = \frac{1}{2}x^2 + A \tag{1034}$$

Podstawiając wyznaczoną funkcję $C(x)$ do równania (1032), otrzymujemy całkę ogólną równania niejednorodnego (1027):

$$CORN: \qquad y = \left(\frac{1}{2}x^2 + A\right)e^{x^2} = \underset{CORJ}{Ae^{x^2}} + \underset{CSRN}{0.5x^2e^{x^2}} \tag{1035}$$

gdzie A jest stałą dowolną.

Przykład 19.7 *Uwzględniając wzór (1026) rozwiązać równanie*

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} + \frac{1}{x}y = x \qquad x > 0$$

Rozwiązanie 19.7 *Mamy $p(x) = 1/x$, $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \ln x$, $f(x) = x$, zatem*

$$y = e^{-\ln x}\int xe^{\ln x}\,\mathrm{d}\,x + Ae^{-\ln x} = \frac{1}{x}\int x^2\,\mathrm{d}\,x + A\frac{1}{x} = \frac{1}{3}x^2 + A\frac{1}{x}$$

19.4.1 Związek między całkami równania jednorodnego i niejednorodnego

O związku tym mówi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 19.5 *Całkę ogólną równania niejednorodnego można otrzymać, jeżeli do dowolnej całki szczególnej równania niejednorodnego ($CSRN$) dodamy całkę ogólną odpowiedniego równania jednorodnego*

$$CORN = CSRN + CORJ \tag{1036}$$

Uwaga 19.3 *Twierdzenie to może być wykorzystywane, gdy wcześniej znaleźliśmy jakąkolwiek $CSRN$.*

Przykład 19.8 *Wyznaczyć całkę szczególną równania niejednorodnego*

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} - y = 3x + 5 \tag{1037}$$

metodą przewidywania.

Rozwiązanie 19.8 *Ponieważ prawa strona jest wielomianem pierwszego stopnia, to przewidujemy, że $CSRN$ będzie także wielomianem pierwszego stopnia*

$$y = Ax + B \tag{1038}$$

o nieznanych współczynnikach A i B. Aby je wyznaczyć, wstawiamy wielomian (1038) oraz jego pochodną

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = A \tag{1039}$$

do równania (1037) i po przekształceniu otrzymujemy

$$-Ax + (A - B) = 3x + 5 \tag{1040}$$

Ostatnia równość będzie spełniona dla dowolnych x, jeżeli współczynniki przy jednakowych potęgach x po obu stronach równości będą równe, tj.

$$\begin{cases} -A = 3 \\ A - B = 5 \end{cases} \tag{1041}$$

Stąd

$$\begin{cases} A = -3 \\ B = -8 \end{cases} \tag{1042}$$

Zatem całka szczególna (1038) wyrazi się wzorem

$$y = -3x - 8 \qquad (CSRN) \tag{1043}$$

Rozwiążemy teraz równanie jednorodne otrzymane z równania (1037) przez zastąpienie jego prawej strony zerem. Ma ono postać

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} - y = 0 \tag{1044}$$

Rozdzielając zmienną otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{y} = \mathrm{d}\,x \tag{1045}$$

Co po scałkowaniu daje

$$y = Ce^x \qquad CORJ \tag{1046}$$

Stosując teraz Twierdzenie 19.5 otrzymujemy

$$y = -3x - 8 + Ce^x \tag{1047}$$

Metodę przewidywania stosujemy do równań liniowych, gdy współczynnik jest stały i gdy prawa strona równania $f(x)$ jest jedną z poniższych funkcji:

1. funkcją wykładniczą,
2. funkcją trygonometryczną,
3. wielomianem,
4. sumą lub iloczynem funkcji poprzednich trzech typów.

Przewidujemy $(CSRN)$ w postaci $\varphi(x)$ podobnej do $f(x)$, ale zawierającą pewne stałe A i B (na razie nieznane). Wstawiając $y = \varphi(x)$ do (RN) i żądając, aby otrzymane równanie liniowe było tożsamością, wyznaczamy te stałe i projekt $(CSRN)$ $y = \varphi(x)$ ze stałymi współczynnikami stanowi $(CSRN)$.

Przykład 19.9 *Dane jest równanie*

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} + 5y = 25x + 10$$

Wyznaczyć metodą przewidywania $CSRN$, a następnie $CORN$.

$f(x)-$ prawa strona (RN)	$\varphi(x)-$ projekt $(CSRN)$
ae^{ks}	Ae^{ks}
$a\sin\omega x+b\cos\omega x$	$A\sin\omega x+B\cos\omega x$
$a, a+bx, a+bx+cx^2+\ldots$	$A, A+Bx, A+Bx+Cx^2+\ldots$
$e^{ks}\left(a\sin\omega x+b\cos\omega x\right)$	$e^{ks}\left(A\sin\omega x+B\cos\omega x\right)$
$(a+bx)e^{ks}$	$(A+Bx)e^{ks}$
$(a+bx)\sin\omega x+(e+fx)\cos\omega x$	$(A+Bx)\sin\omega x+(E+Fx)\cos\omega x$

Tablica 25: Projekty $CSRN$

Rozwiązanie 19.9 *Współczynnik równania* $p(x)=5$, *a prawa strona* $f(x)=25x+10$, *jest więc funkcją typu* $a+bx$. *Zgodnie z Tabelą 25 przewidujemy, że* $CSRN$ *jest funkcją postaci*

$$y=A+Bx$$

Aby wyznaczyć współczynniki A, B *wstawiamy projekt do równania wyjściowego. Otrzymujemy*

$$B+5\left(A+Bx\right)=25x+10$$

Stąd

$$5Bx+5A+B=25x+10$$

Porównując współczynniki po prawej stronie ze współczynnikami po lewej mamy

$$\begin{array}{rl} 5B=25 & \textit{stąd}\quad B=5 \\ 5A+B=10 & \textit{stąd}\quad A=1 \end{array}$$

Wstawiając te wartości do projektu dochodzimy do postaci $CSRN$

$$y=1+5x$$

W celu wyznaczenia $CORN$ *musimy znać* $CORJ$. *Odpowiednie równanie jednorodne ma postać*

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}+5y=0$$

Jego rozwiązaniem ogólnym jest całka

$$y=Ce^{-5x}$$

Ponieważ $CORN=CSRN+CORJ$, *to*

$$y=1+5x+Ce^{-5x}$$

19.4.2 Przypadek szczególny przewidywania

Jeżeli prawa strona równania niejednorodnego jest rozwiązaniem równania jednorodnego, fo funkcja $\varphi(x)$ proponowana w Tabeli 25 nie może być projektem równania niejednorodnego (projekt φ prowadzi do sprzeczności). Należy wówczas projektować

$$x\varphi(x) \tag{1048}$$

Przykład 19.10 *Rozwiązać równanie różniczkowe*

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} - y = e^x$$

Rozwiązanie 19.10 *Zgodnie z Tabelą 25 proponujemy rozwiązanie w postaci*

$$y = Ae^x$$

Następnie podstawiamy ten projekt do równania wyjściowego i widzimy, że jego lewa strona jest równa 0

$$Ae^x - Ae^x = 0$$

Prowadzi to do sprzeczności

$$0 = e^x$$

W związku z powyższym proponowany projekt jest zły. Przyjmujemy projekt (1048) w postaci

$$Axe^x$$

i otrzymujemy

$$Ae^x + Axe^x - Axe^x = e^x$$

Stąd

$$A = 1$$

A więc

$$y = xe^x$$

19.5 Równania różniczkowe drugiego rzędu

Mówi o nich definicja.

Definicja 19.6 *Równaniem różniczkowym drugiego rzędu nazywamy równanie*

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad \textit{lub} \quad y'' = f(x, y(x), y'(x)) \tag{1049}$$

wyrażające związek między między szukaną funkcją $y(x)$, a jej pochodnymi $y'(x)$ i $y''(x)$ oraz zmienną niezależną x.

Warunki początkowe dla równania II-go rzędu polegają na podaniu trzech liczb:

$$x_0, y_0, y'_0 \tag{1050}$$

i żądaniu, aby dla $x = x_0$ pewna całka szczególna tego równania $y = \varphi(x)$ przyjmowała wartość y_0 i aby jednocześnie jej pierwsza pochodna miała wartość y'_0

$$\varphi(x_0) = y_0 \qquad \varphi'(x_0) = y'_0 \tag{1051}$$

Warunki brzegowe dla równania II-go rzędu polegają na podaniu dwóch punktów (x_0, y_0) i (x_1, y_1) i żądaniu, aby pewna krzywa całkowa przechodziła przez te punkty.

19.6 Równania różniczkowe liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach

19.6.1 Równania jednorodne o stałych współczynnikach

Na wstępie podamy definicję.

Definicja 19.7 *Równanie*

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1052}$$

gdzie: $p, q-$ są stałymi, nazywamy jednorodnym równaniem różniczkowym liniowym drugiego rzędu o stałych współczynnikach.

Aby znaleźć rozwiązanie (1052) należy wyznaczyć dwie **całki szczególne tworzące układ podstawowy**. Ponieważ p, q są stałymi, zatem zerowanie się lewej strony (1052) wymaga, aby y' i y'' miały postać podobną do postaci funkcji y. Mogą to być funkcje:

1. wykładnicze
$$\begin{array}{l} y = e^{rx} \\ y' = re^{rx} \qquad r - \text{ stała} \\ y'' = r^2 e^{rx} \end{array} \tag{1053}$$

2. trygonometryczne, np. kombinacja liniowa sinusa i kosinusa
$$\begin{array}{l} y = A\sin\omega x + B\cos\omega x \\ y' = -B\omega\sin\omega x + A\omega\cos\omega x \\ y'' = -A\omega^2\sin\omega x - B\omega^2\cos\omega x \end{array} \tag{1054}$$
gdzie: $A, B, \omega-$ stałe

3. iloczyn tych dwóch funkcji
$$\begin{array}{l} y = e^{rx}\left[A\sin\omega x + B\cos\omega x\right] \\ y' = e^{rx}\left[(Ar - B\omega)\sin\omega x + (A\omega + Br)\cos\omega x\right] \\ y'' = e^{rx}\left[(Ar^2 - 2Br\omega - A\omega^2)\sin\omega x + (Br^2 + 2Ar\omega - B\omega^2)\cos\omega x\right] \end{array} \tag{1055}$$

19.6.2 Równanie charakterystyczne

Poszukując całek postaci (1053) stawiamy pytanie: jakie ma być r, aby funkcja $y = e^{rx}$ spełniała równanie (1052). Załóżmy, że funkcja $y = e^{rx}$ spełnia równanie (1052). Podstawiając ją wraz z pochodnymi do (1052) otrzymujemy

$$e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0 \tag{1056}$$

Ponieważ $e^{rx} \neq 0$, zatem

$$r^2 + pr + q = 0 \tag{1057}$$

Równanie (1057) nosi nazwę **równania charakterystycznego**.

Rozważymy trzy przypadki, zależnie od tego, czy wyróżnik równania charakterystycznego

$$\Delta = p^2 - 4q \tag{1058}$$

jest dodatni, równy zero lub ujemny.

1. **Przypadek** $\Delta > 0$

   Istnieją dwa pierwiastki charakterystyczne

$$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q} \tag{1059}$$

   prowadzące do dwóch całek szczególnych równania

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \qquad y_2(x) = e^{r_2 x} \tag{1060}$$

   Całki (1060) tworzą układ podstawowy, gdy ich stosunek

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{(r_1 - r_2)x} \tag{1061}$$

   nie jest stały. Całką ogólną równania jest kombinacja liniowa tych rozwiązań

$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \tag{1062}$$

   gdzie: A i $B-$ dowolne stałe.

2. **Przypadek** $\Delta = 0$

   W tym przypadku istnieje jeden pierwiastek charakterystyczny

$$r_0 = -\frac{p}{2} \tag{1063}$$

   i tylko jedna całka równania (1052)

$$y_1(x) = e^{r_0 x} \tag{1064}$$

   Drugą całkę można wyznaczyć metodą uzmienniania. Ma ona postać

$$y_2(x) = xe^{r_0 x} \tag{1065}$$

   Oznacza to, że całkę ogólną w tym przypadku możemy zapisać

$$y(x) = (A + Bx)e^{r_0 x} \tag{1066}$$

   gdzie: A i $B-$ dowolne stałe.

3. **Przypadek** $\Delta < 0$

   W tym przypadku równanie charakterystyczne nie ma pierwiastków rzeczywistych, a więc nie ma całek postaci (1053). Należy ich szukać w zbiorze rozwiązań (1055). Okazuje się, że funkcje

$$y_1(x) = e^{-px/2}\cos\omega x \qquad y_2(x) = e^{-px/2}\sin\omega x \tag{1067}$$

   są całkami równania (1052), jeżeli stała ω przyjmuje wartość

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2} \tag{1068}$$

   Funkcje (1067) tworzą układ podstawowy, a ich kombinacja liniowa

$$y(x) = e^{-px/2}(A\sin\omega x + B\cos\omega x) \tag{1069}$$

   jest całką ogólną równania (1052).

Uwaga 19.4 *(Do przypadku 3) Rozwiązania równania (1057) dla $\Delta < 0$ mają postać*

$$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{4q - p^2} = -\alpha \pm i\beta \tag{1070}$$

Jeżeli przyjmiemy, że $y = e^{rx}$, to

$$\begin{aligned} e^{r_1 x} &= e^{(-\alpha+i\beta)x} = e^{-\alpha x + i\omega x} = e^{-\alpha x} e^{i\omega x} = \\ &= e^{-\alpha x}(\cos\omega x + i\sin\omega x) = e^{-\alpha x}\cos\omega x + ie^{-\alpha x}\sin\omega x \end{aligned} \tag{1071}$$

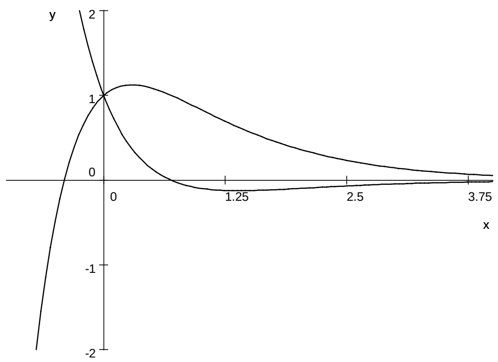
Wyrażenie (1071) jest pewną całką zespoloną równania (1052). Biorąc oddzielnie każdy jej składnik otrzymujemy dwie funkcje rzeczywiste

$$e^{-\alpha x}\cos\omega x \qquad e^{-\alpha x}\sin\omega x \tag{1072}$$

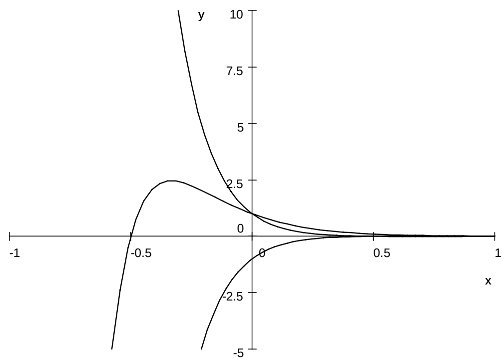
Ich kombinacja liniowa

$$y = e^{-\alpha x}(A\sin\omega x + B\cos\omega x) \tag{1073}$$

jest całką ogólną równania (1052), gdy $\Delta < 0$.



Rysunek 133: Rozwiązanie równania $y'' + 3y' + 2y = 0$.



Rysunek 134: Rozwiązanie równania $y'' + 12y' + 36y = 0$.

Przykład 19.11 *Rozwiązać równanie różniczkowe*

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

Rozwiązanie 19.11 *Podstawiamy $y = e^r$ i piszemy równanie charakterystyczne*

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

Pierwiastki charakterystyczne są równe

$$r_1 = -1 \qquad r_2 = -2$$

Stąd rozwiązanie ogólne wyraża się wzorem (patrz rys. 133 dla różnych $C_1,\ C_2$)

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

Przykład 19.12 *Rozwiązać równanie różniczkowe*

$$y'' + 12y' + 36y = 0$$

Rozwiązanie 19.12 *Piszemy równanie charakterystyczne*

$$r^2 + 12r + 36 = 0$$

Równanie to ma jeden pierwiastek charakterystyczny równy $r_0 = -6$. *Odpowiadające mu dwa rozwiązania szczególne mają postać*

$$y_1 = e^{-6x} \qquad y_2 = xe^{-6x}$$

Natomiast rozwiązanie ogólne przyjmuje postać (patrz rys. 134 dla różnych $C_1,\ C_2$*)*

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-6x} \qquad C_1,\ C_2 - \text{ stałe dowolne}$$

I ostatni przykład dla $\Delta < 0$.

Przykład 19.13 *Rozwiązać równanie różniczkowe*

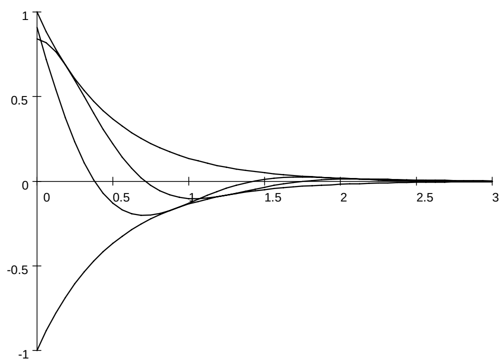
$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

Rozwiązanie 19.13 *Piszemy równanie charakterystyczne*

$$r^2 + 4r + 13 = 0$$

Pierwiastki charakterystyczne są zespolone i mają postać

$$r_1 = -2 - 3i \qquad r_2 = -2 + 3i$$



Rysunek 135: Rozwiązanie równania $y'' + 4y' + 13y = 0$.

W celu wyodrębnienia części rzeczywistej i urojonej wybieramy pierwiastek $r = -2 + 3i$. *Stąd*

$$e^{-2x}\cos 3x \quad \text{część rzeczywista} \quad e^{-2x}\sin 3x \quad \text{część urojona}$$

Są to rozwiązania szczególne, a ich kombinacja liniowa

$$y = e^{-2x}\left(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x\right) = Ae^{-2x}\sin\left(3x + B\right)$$

jest rozwiązaniem ogólnym (patrz rys. 135 dla wybranych A *i* B*).*

19.6.3 Równania niejednorodne o stałych współczynnikach

Przytoczymy definicję:

Definicja 19.8 *Równanie*

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1074}$$

gdzie: $p, q-$ *stałe;* $f(x)-$ *znana funkcja, nazywamy niejednorodnym równaniem różniczkowym liniowym drugiego rzędu o stałych współczynnikach.*

Równanie (1074) można rozwiązać elementarnie wykorzystując Twierdzenie 19.5:

$$CORN = CSRN + CORJ \tag{1075}$$

Aby znaleźć ($CORN$), zawsze można stosować metodę uzmienniania stałych. W przypadku, gdy

$$f(x) = \begin{cases} ae^{kx} \\ a\sin\Omega x + b\cos\Omega x \\ e^{kx}(a\sin\Omega x + b\cos\Omega x) \end{cases} \tag{1076}$$

gdzie: $a, b, k, \Omega-$ stałe, można zastosować metodę przewidywania. Przedstawimy ją na przykładzie.

Przykład 19.14 *Rozwiązać niejednorodne równanie różniczkowe drugiego rzędu*

$$y'' - 4y' + 13y = \sin 2x \tag{1077}$$

Rozwiązanie 19.14 *Wyznaczamy całkę ogólną równania jednorodnego*

$$y'' - 4y' + 13y = 0 \tag{1078}$$

W tym celu wyznaczymy równanie charakterystyczne

$$r^2 - 4r + 13 = 0 \tag{1079}$$

Stwierdzamy, że

$$\Delta = -36 \tag{1080}$$

Czyli $\sqrt{\Delta} = 6i$. *Otrzymaliśmy dwa pierwiastki zespolone*

$$r_{1,2} = 2 \pm 3i \tag{1081}$$

Wobec tego ($CORJ$) ma postać

$$y(x) = e^{2x}(A\sin 3x + B\cos 3x) \tag{1082}$$

gdzie: A i $B-$ dowolne stałe. Całkę szczególną równania (1077) poszukujemy metodą przewidywania. Powinna mieć postać podobną do prawej strony (1077), tzn.

$$y_{SN} = a\sin 2x + b\cos 2x \tag{1083}$$

Różniczkując powyższe wyrażenie i wstawiając je z pochodnymi do równania (1077) dostajemy:

$$(9a + 8b)\sin 2x + (-8a + 9b)\cos 2x = \sin 2x \tag{1084}$$

Będzie ono spełnione dla każdego x, jeżeli

$$\begin{cases} 9a + 8b = 1 \\ -8a + 9b = 0 \end{cases} \tag{1085}$$

Stąd: $a = \frac{9}{145}, b = \frac{8}{145}$. *Zatem*

$$y_{SN} = \frac{9}{145}\sin 2x + \frac{8}{145}\cos 2x \tag{1086}$$

Ostatecznie całka ogólna równania niejednorodnego ma postać

$$CORN : y = e^{2x}\underbrace{(A\sin 3x + B\cos 3x)}_{CORJ} + \underbrace{\frac{9}{145}\sin 2x + \frac{8}{145}\cos 2x}_{CSRN} \tag{1087}$$

Uwaga 19.5 *Każde równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu o współczynnikach stałych jest całkowalne elementarnie.*

19.7 Równania różniczkowe liniowe drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach

Definicja 19.9 *Równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach w postaci ogólnej zapisujemy*

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\, x^2} + p(x) \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} + q(x)\, y = f(x) \tag{1088}$$

lub

$$y''(x) + p(x)\, y'(x) + q(x)\, y = f(x) \tag{1089}$$

W równaniu tym niewiadomą jest funkcja y zmiennej x, natomiast funkcje $p(x)$, $q(x)$, zwane współczynnikami oraz funkcja $f(x)$ – prawa strona są wiadomymi funkcjami zmiennej x określonymi w pewnym przedziale X. Równanie (1088) nazywamy:

1. jednorodnym, gdy $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \in X$,
2. niejednorodnym, gdy $f(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in X$.

Twierdzenie 19.6 *Jeżeli w równaniu (1088) funkcje $p(x)$, $q(x)$ i $f(x)$ są ciągłe w przedziale X, to dla każdego warunku początkowego*

$$x_0, y_0, y_0' \quad x_0 \in X \quad y_0, y_0' \in \mathcal{R}$$

istnieje dokładnie jedno rozwiązanie tego równania spełniające ten warunek początkowy. Rozwiązanie to istnieje w całym przedziale X.

Uwaga 19.6 *Wśród równań różniczkowych liniowych drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach są równania niecałkowalne elementarnie, na przykład* ***równanie Bessela***

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0 \tag{1090}$$

oraz równania całkowalne elementarnie, na przykład ***jednorodne równanie Eulera***

$$y'' + \frac{p}{x} y' + \frac{q}{x^2} y = 0 \qquad p,\ q - \text{ stałe} \tag{1091}$$

19.7.1 Równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu jednorodne

Równanie to ma postać

$$y''(x) + p(x)\, y'(x) + q(x)\, y = 0 \tag{1092}$$

Twierdzenie 19.7 *Jeżeli funkcja $y_1(x)$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego, to iloczyn tej funkcji przez dowolną stałą*

$$C y_1(x) \qquad C - \text{ stała dowolna}$$

jest też rozwiązaniem tego równania.

Twierdzenie 19.8 *Jeżeli funkcje $y_1(x)$ i $y_2(x)$ są rozwiązaniami równania jednorodnego, to kombinacja liniowa tych funkcji*

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad C_1,\ C_2 - \text{ stałe dowolne}$$

jest rozwiązaniem tego równania.

Twierdzenie 19.9 *Jeżeli funkcje $y_1(x)$ i $y_2(x)$ są rozwiązaniami niezerowymi równania jednorodnego i ich stosunek $y_2(x)/y_1(x)$ nie jest stały, to kombinacja liniowa tych funkcji*

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad C_1,\ C_2 - \text{ stałe dowolne}$$

*jest **rozwiązaniem ogólnym** równania jednorodnego obejmującym wszystkie rozwiązania tego równania.*

Twierdzenie 19.10 *Jeżeli jest znane rozwiązanie niezerowe równania jednorodnego*

$$y_1(x)$$

różne od 0 w pewnym przedziale $X_1,\ X_1 \subset X$, to wzór

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(\eta)\,\mathrm{d}\,\eta}}{y_1^2(x)}\,\mathrm{d}\,x \tag{1093}$$

*określa drugie niezerowe rozwiązanie tego równania tworzące z poprzednim stosunek $y_2(x)/y_1(x)$ nie stały. Kombinacja liniowa tych dwóch rozwiązań o współczynnikach dowolnych jest **rozwiązaniem ogólnym** równania jednorodnego obejmującym wszystkie rozwiązania tego równania.*

Zgodnie z Twierdzeniem 19.9 do utworzenia rozwiązania ogólnego są potrzebne dwa rozwiązania szczególne $y_1(x)$ i $y_2(x)$, których stosunek $y_2(x)/y_1(x) = u(x)$ nie jest stały. Jeżeli pierwsze z tych rozwiązań jest znane, to drugie możemy uważać za iloczyn

$$y_2(x) = y_1(x)\,u(x) \qquad x \in X_1 \tag{1094}$$

gdzie $u(x)$ jest funkcją niewiadomą. Wstawiając ten stosunek do równania

$$y''(x) + p(x)\,y'(x) + q(x)\,y = 0 \tag{1095}$$

otrzymujemy po uporządkowaniu

$$u''y_1 + 2u'y_1' + p(x)\,u'y_1 + u\left[y_1'' + p(x)\,y_1' + q(x)\,y_1\right] = 0$$

Ponieważ $y_1(x)$ jest rozwiązaniem równania (1095), to wyrażenie w nawiasie jest zerem. Wobec tego

$$u''y_1 + 2u'y_1' + p(x)\,u'y_1 = 0 \tag{1096}$$

Dzieląc równanie (1096) przez y_1 otrzymujemy równanie

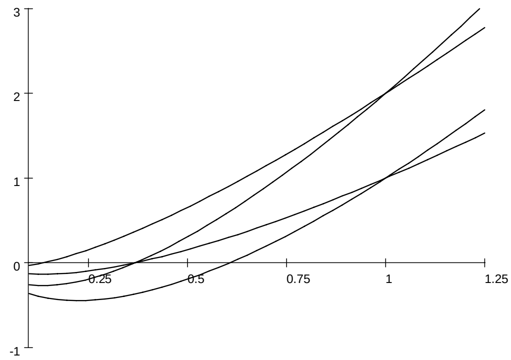
$$u'' + u'\left[2\frac{y_1'}{y_1} + p(x)\right] = 0 \tag{1097}$$

Jest to równanie typu jednorodnego równania różniczkowego liniowego pierwszego rzędu

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} + p(x)\,y = 0$$

o niewiadomej $u'(x)$. Mamy

$$\frac{u''}{u'} = -2\frac{y_1'}{y_1} - p(x) \tag{1098}$$



Rysunek 136: Rozwiązania jednorodnego równania Eulera.

Całkując (1098) względem x i opuszczając stałą całkowania, otrzymujemy

$$\int \frac{u''}{u'}\,\mathrm{d}\,x = -\int \left[2\frac{y_1'}{y_1} + p(x)\right]\mathrm{d}\,x$$

$$\begin{aligned}
\ln u' &= -2\ln y_1 - \int p(x)\,\mathrm{d}\,x \\
\ln u' &= \ln\frac{1}{y_1^2} - \int p(x)\,\mathrm{d}\,x \\
u' &= e^{\ln\left(1/y_1^2\right)} e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} \\
u' &= \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}
\end{aligned}$$

Stąd

$$u(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(\eta)\,\mathrm{d}\,\eta}\,\mathrm{d}\,x \tag{1099}$$

Przykład 19.15 *Znaleźć rozwiązanie ogólne jednorodnego równania Eulera*

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0 \qquad p = -1,\ q = 1$$

jeżeli $y_1(x) = x$.

Rozwiązanie 19.15 *Rzeczywiście, funkcja $y_1(x) = C_1 x$ jest rozwiązaniem równania*

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$$

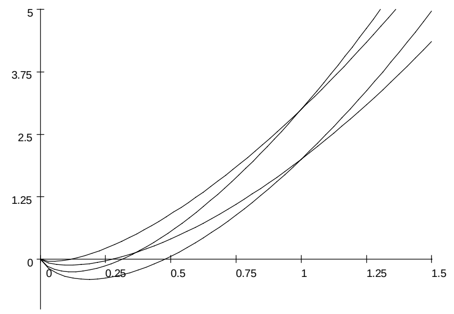
Korzystamy ze wzorów (1094) i (1099)

$$y_2(x) = y_1(x)\,u(x) = x\int \frac{1}{x^2} e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}\,x = x\int \frac{1}{x^2} e^{\ln x}\,\mathrm{d}\,x = C_2 x\ln x$$

Rozwiązaniem ogólnym (patrz Twierdzenie 19.9) są funkcje (patrz rys. 136)

$$y(x) = C_1 x + C_2 x\ln x \qquad x > 0 \tag{1100}$$

19.7.2 Niejednorodne równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu



Rysunek 137: Rozwiązania niejednorodnego równania Eulera.

Równanie tego typu ma postać

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x) \qquad RN \text{ (rów. niejednorodne)} \tag{1101}$$

Jest ono ściśle związane z odpowiadającym mu równaniem jednorodnym

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0 \qquad RJ \text{ (równanie jednorodne)} \tag{1102}$$

Twierdzenie 19.11 *Między rozwiązaniami równań (1101) i (1102) zachodzi związek*

$$CORN = CSRN + CORJ \tag{1103}$$

Przykład 19.16 *Rozwiązać niejednorodne równanie różniczkowe drugiego rzędu*

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 1 \qquad x > 0$$

Rozwiązanie 19.16 *Wykorzystujemy rozwiązanie równania jednorodnego*

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0 \qquad x > 0$$

z poprzedniego przykładu ($CORJ$). Ma ono postać

$$y = C_1 x + C_2 x \ln x \qquad x > 0$$

Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego poszukujemy w postaci $y = x^2,\ x > 0$. Wykorzystując relację (1103) dochodzimy do

$$y(x) = x^2 + C_1 x + C_2 x \ln x \qquad x > 0 \tag{1104}$$

Graficzna interpretacja rozwiązania (1104) jest przedstawiona na rysunku 137.

Twierdzenie 19.12 *Jeżeli są znane dwa rozwiązania niezerowe $y_1(x)$, $y_2(x)$ równania jednorodnego*

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$$

i stosunek tych rozwiązań nie jest stały, to funkcja

$$y = y_1(x)\int \frac{-y_2(x)\,f(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}\,x + y_2(x)\int \frac{y_1(x)\,f(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}\,x \tag{1105}$$

gdzie

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \tag{1106}$$

jest rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x)$$

Przykład 19.17 *Rozwiązać równanie*

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 2x \qquad x > 0 \tag{1107}$$

Rozwiązanie 19.17 *Rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego odpowiadającego danemu równaniu niejednorodnemu są funkcje $y_1 = x$ i $y_2 = x \ln x$. Stosunek tych rozwiązań nie jest stały. Podstawiając powyższe funkcje oraz prawą stronę $f(x) = 2x$ do rozwiązania (1105) otrzymujemy*

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x\ln x \\ 1 & 1+\ln x \end{vmatrix} = x(1+\ln x) - x\ln x = x$$

$$\begin{aligned} y &= x\int \frac{-x\ln x\,(2x)}{x}\,\mathrm{d}\,x + x\ln x\int \frac{x\,(2x)}{x}\,\mathrm{d}\,x = \\ &= -2x\int x\ln x\,\mathrm{d}\,x + 2x\ln x\int x\,\mathrm{d}\,x = -2x\left(\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right) + x^3\ln x = \\ &= -x^3\ln x + \frac{1}{2}x^3 + x^3\ln x = \frac{1}{2}x^3 \end{aligned}$$

A więc na mocy Twierdzenia 19.11 całka ogólna równania niejednorodnego (CORN) jest równa

$$y = C_1 x + C_2 x\ln x + \frac{1}{2}x^3$$

Równanie jednorodne Eulera (1091)

$$y'' + \frac{p}{x}y' + \frac{q}{x^2}y = 0 \qquad p,\ q - \text{ stałe}$$

zwykle zapisujemy w poniższej postaci

$$x^2y'' + xpy' + qy = 0 \qquad p,\ q - \text{ stałe} \qquad x > 0 \tag{1108}$$

Przewidujemy rozwiązanie szczególne w postaci

$$y = x^r \qquad r - \text{ stała} \tag{1109}$$

Podstawiając tę funkcję do (1108) otrzymujemy równanie charakterystyczne

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} + xprx^{r-1} + qx^r = 0$$

Stąd

$$r(r-1)x^r + prx^r + qx^r = 0$$

Dzieląc obustronnie przez x^r mamy równanie na r

$$r^2 + (p-1)r + q = 0 \tag{1110}$$

1. $\Delta = (p-1)^2 - 4q > 0$. Istnieją dwa pierwiastki $r_1,\ r_2,\ r_1 \neq r_2$ i dwa rozwiązania szczególne: $y_1 = x^{r_1}$ i $y_2 = x^{r_2}$. Rozwiązaniem ogólnym jest

$$y = C_1x^{r_1} + C_2x^{r_2} \tag{1111}$$

2. $\Delta = 0$. Istnieje jeden pierwiastek r_0 i jedno rozwiązanie $y_1 = x^{r_0}$. Okazuje się, że funkcja $y_2 = x^{r_0} \ln x$ również jest rozwiązaniem (1108). Tak więc
$$y = (C_1 + C_2 \ln x)\, x^{r_0} \tag{1112}$$
3. $\Delta < 0$. Równanie (1110) ma dwa pierwiastki zespolone: $r = a \pm ib$. Bierzemy jeden z nich $r = a + ib$ i tworzymy potęgę o wykładniku zespolonym x^r. Przekształcamy
$$x^r = e^{r \ln x} = x^{a+ib} = e^{(a+ib)\ln x} = e^{a \ln x} e^{ib \ln x} = x^a \left[\cos(b \ln x) + i \sin(b \ln x)\right] \tag{1113}$$
Wyodrębniamy część rzeczywistą i część urojoną
$$y_1 = x^a \cos(b \ln x) \qquad y_2 = x^a \sin(b \ln x) \tag{1114}$$
Są to rozwiązania szczególne, rozwiązanie ogólne ma postać
$$y = x^a \left[C_1 \cos(b \ln x) + C_2 \sin(b \ln x)\right] \tag{1115}$$

19.8 Równania różniczkowe liniowe drugiego rzędu sprowadzalne do równań rzędu pierwszego

Niektóre równania różniczkowe liniowe drugiego rzędu można za pomocą pewnych podstawień sprowadzić do równań rzędu pierwszego. Są to:

1. równanie, w którym nie występuje y
$$F(x, y', y'') = 0 \qquad y' = u(x) \tag{1116}$$
2. równanie, w którym nie występuje x
$$F(y, y', y'') = 0 \qquad y' = u(y) \tag{1117}$$
3. równanie jednorodne względem $y,\ y',\ y''$
$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad y = e^{z(x)} \qquad z' = u(x) \tag{1118}$$

Przykład 19.18 *Rozwiązać w obszarze*
$$D = \{x \in \mathcal{R},\ y \in \mathcal{R},\ y' > 0\}$$
równanie różniczkowe
$$y'' = 4x\sqrt{y'} \tag{1119}$$

Rozwiązanie 19.18 *Analizowane równanie jest równaniem typu (1116). Podstawiamy*
$$y' = u(x)$$
Stąd mamy $y'' = \dfrac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}$. *Podstawiając wyrażenie na* y'' *do równania różniczkowego (1119) mamy*
$$u'(x) = 4x\sqrt{u} \tag{1120}$$

lub

$$\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = 4x\sqrt{u} \tag{1121}$$

Ponieważ założyliśmy, że $y' > 0$, to wiemy, że również $u\,(x) > 0$. Rozdzielając zmienne

$$\frac{\mathrm{d}\,u}{\sqrt{u}} = 4x\,\mathrm{d}\,x$$

i całkując, dostajemy

$$2\sqrt{u} = 2x^2 + C_1$$

lub

$$\sqrt{u} = x^2 + C$$

Stąd

$$u = \left(x^2 + C\right)^2$$

Ponieważ

$$y' = u\,(x)$$

to

$$y' = x^4 + 2Cx^2 + C^2$$

Zatem

$$y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}Cx^3 + C^2x + B \tag{1122}$$

Jest to rozwiązanie ogólne równania (1119).

Przykład 19.19 *Rozwiązać równanie różniczkowe drugiego rzędu*

$$(y-1)\,y'' = 2y'^2 \tag{1123}$$

dla $y \neq 1$.

Rozwiązanie 19.19 *Równanie jest typu (1117). Podstawiamy*

$$y' = u\,(y) \tag{1124}$$

Aby wyznaczyć y'', różniczkujemy tę równość obustronnie, pamiętając, że y i y' są funkcjami zmiennej x, natomiast $u\,(y)$ jest funkcją złożoną zmiennej x

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}u\,(y)$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,y}\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,y}u \tag{1125}$$

Podstawiając (1124) i (1125) do (1123), otrzymujemy

$$(y-1)\,\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,y}u = 2u^2$$

Jest to równanie rzędu pierwszego względem niewiadomej funkcji $u(y)$. Zakładając, że $u \neq 0$, rozdzielając zmienne i całkując, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,u}{u} &= 2\frac{\mathrm{d}\,y}{y-1}\\ \ln u &= 2\ln(y-1)+\ln C\\ \ln u &= \ln C\,(y-1)^2\end{aligned}$$

Stąd

$$u = C\,(y-1)^2$$

Ponieważ

$$y' = u\,(y)$$

to

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = C\,(y-1)^2 = C\left(y^2-2y+1\right)$$

A więc

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}\,y}{C\,(y-1)^2} &= \int\mathrm{d}\,x\\ -\frac{1}{C\,(y-1)} &= x+A\\ -\frac{1}{y-1} &= Cx+B\\ y-1 &= -\frac{1}{Cx+B}\\ y &= \frac{1}{C_1x+B_1}+1\\ y &= \frac{C_1x+B_1+1}{C_1x+B_1}\end{aligned}$$

Przykład 19.20 *Rozwiązać równanie różniczkowe*

$$x^2yy'' = \left(x^2+1\right)y'^2 \tag{1126}$$

przy założeniu, że $xy \neq 0$.

Rozwiązanie 19.20 *Będziemy analizować to równanie w obszarze*

$$D = \{x>0,\ y>0,\ y' \in \mathcal{R}\} \tag{1127}$$

Podstawiamy $y = e^{z(x)}$
Stąd

$$y' = z'e^{z(x)} \tag{1128}$$

a

$$y'' = e^z\left(z'^2+z''\right)$$

Zatem

$$x^2e^{2z}\left(z'^2+z''\right) = \left(x^2+1\right)e^{2z}z'^2$$

Upraszczając przez e^{2z} *i podstawiając* $z' = u(x)$, *otrzymujemy równanie pierwszego rzędu*

$$x^2 \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = u^2 \tag{1129}$$

Stąd

$$-\frac{1}{u} = -\frac{1}{x} - A \tag{1130}$$

Jeżeli $A = 0$, *to* $u = x$ *dla* $x > 0$. *Jeżeli* $A \neq 0$, *to podstawiając* $A = 1/a$ *dostajemy* $u = a - \dfrac{a^2}{x+a}$. *Zatem wynik (1130) możemy zapisać*

$$u = x \qquad u = a - \frac{a^2}{x+a}$$

A więc

$$z' = x \quad i \quad z' = a - \frac{a^2}{x+a}$$

Stąd

$$z = \tfrac{1}{2}x^2 + B \quad lub \quad z = ax - a^2 \ln(x+a) + B$$

Ostatecznie mamy

$$y = be^{x^2/2} \quad lub \quad y = be^{ax}\,|x+a|^{-a^2}$$