Alicja Cewe • Halina Nahorska • Irena Pancer

TABLICE MATEMATYCZNE

Wydawnictwo PODKOWA s.c.

Gdańsk 2000

Recenzje merytoryczne: prof. dr Tadeusz Stanisz, dr Jerzy Bednarczuk, dr Leon Gulgowski, dr Edward Stachowski

Rzeczoznawcy z dziedziny edukacji matematycznej: mgr Helena Lewicka, dr Edward Stachowski

Opinia dydaktyczna: mgr Elżbieta Bańkowska, mgr Dorota Stankiewicz

Redakcja: Alicja Cewe, Jadwiga Kobierowska, Halina Nahorska, Irena Pancer

Projekt okładki: Jacek Michałowski

Skład komputerowy i opracowanie graficzne: Jarosław Mach, Jacek Michałowski

Środek dydaktyczny zalecany do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania wpisany do wykazu środków dydaktycznych przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki na poziomie sześcioletniej szkoły podstawowej, gimnazjum i szkoły ponadpodstawowej na podstawie recenzji rzeczoznawców:

mgr Heleny Lewickiej,

dr Edwarda Stachowskiego.

Numer zalecenia: 0544/1998.

ISBN 83-88299-00-X

Gdańsk, ul.Paganiniego 17/17

Dystrybucja i zamówienia: 80-460 Gdańsk 45, skr. pocztowa 112
tel. (0-602) 21 15 26 – dział zamówień i reklamacji
tel./fax (0-58) 344 38 00 – dział zamówień
e-mail: pinia@podkowa.gda.pl
strona w Internecie: www.podkowa.gda.pl

W książce „Tablice matematyczne" zawarte są wiadomości z zakresu matematyki szkoły podstawowej i ponadpodstawowej. Wszystkie tematy ujęto w stu dwudziestu ośmiu tabelach.

Aby ułatwić Czytelnikowi szybkie znalezienie potrzebnej informacji zostały wprowadzone następujące oznaczenia:

● – oznacza definicję,

● – oznacza twierdzenie,

● – oznacza własność.

– ważniejsze wzory umieszczono na żółtym tle.

Działy matematyki wyróżniono kolorami:

– algebra i analiza,

– geometria,

– prawdopodobieństwo i statystyka.

Mamy nadzieję, że książka ta będzie przydatna dla każdego ucznia szkoły ponadpodstawowej i nie tylko.

Naszym recenzentom i opiniodawcom,
a w szczególności:
prof. dr hab. Tadeuszowi Staniszowi,
dr Jerzemu Bednarczukowi,
dr Leonowi Gulgowskiemu,
mgr Helenie Lewickiej,
dr Edwardowi Stachowskiemu
oraz
mgr Elżbiecie Bańkowskiej
i mgr Dorocie Stankiewicz z IV LO w Gdyni,
serdecznie dziękujemy za cenne uwagi
przekazywane nam z ogromną życzliwością.

Autorki.

Spis treści

Spis treści

Tabele:

Symbol	Znaczenie	Symbol	Znaczenie
$\wedge$	**i** (koniunkcja)	$AB^{\rightarrow}$, półprosta AB	półprosta o początku A przechodząca przez punkt B
$\vee$	**lub** (alternatywa)	$\overline{AB}$, odcinek AB	odcinek o końcach A i B
$\sim$	nieprawda, że (zaprzeczenie)	$\lvert AB \rvert$	długość odcinka AB (odległość punktu A od punktu B)
$\Leftrightarrow$	wtedy i tylko wtedy, gdy (równoważność)	$\vec{w}$	wektor w
$\Rightarrow$	jeżeli ..., to ... (implikacja)	$\overrightarrow{AB}$	wektor o początku A i końcu B
$\subset$	zawiera się w	$\lvert \overrightarrow{AB} \rvert$, $\lvert \vec{w} \rvert$	długość wektora
$\in$	należy do	$k \cdot \vec{w}$	iloczyn wektora $\vec{w}$ przez liczbę k
$\{a, b, c\}$	zbiór, którego elementami są a, b, c	$\vec{u} \circ \vec{w}$	iloczyn skalarny wektorów $\vec{u}$ i $\vec{w}$
$A \times B$	iloczyn kartezjański zbiorów A i B	$o(O, r)$	okrąg o środku O i promieniu r
$\varnothing$	zbiór pusty	$k(A, R)$	koło o środku A i promieniu R
$(a; b)$	przedział otwarty o końcach a i b	$K(O, R)$	kula o środku O i promieniu R
$\langle a; b \rangle$	przedział domknięty o końcach a i b	$S(A, r)$	sfera o środku A i promieniu r
$=$	jest równy	$P(X) = X'$	X' jest obrazem X w przekształceniu P
$\equiv$	jest równy tożsamościowo (jest przystający)	P^{-1}	przekształcenie odwrotne do przekształcenia P
$\approx$	jest w przybliżeniu równy	$P_2 \circ P_1$	złożenie przekształceń P_1 i P_2
$\cup$	suma zbiorów	S_l	symetria osiowa względem prostej l
$\cap$	iloczyn zbiorów (część wspólna)	S_A	symetria środkowa względem punktu A
$\bigwedge_x$	dla każdego x (kwantyfikator ogólny)	$T_{\vec{w}}$	translacja o wektor $\vec{w}$
$\bigvee_x$	istnieje takie x, że (kwantyfikator szczegółowy)	O_α	obrót dookoła punktu O o kąt α
$a \parallel b$	proste a i b są równoległe	J_B^s	jednokładność o środku B i skali s
$a \perp b$	proste a i b są prostopadłe	D_f	dziedzina funkcji f
$\sphericalangle ABC$	kąt ABC	ꓷ_f	zbiór wartości funkcji f
$\lvert \sphericalangle ABC \rvert$	miara kąta ABC	f_{MAX}	największa wartość funkcji w przedziale domkniętym
$\lvert l\alpha \rvert$	odległość prostej l od płaszczyzny α	f_{MIN}	najmniejsza wartość funkcji w przedziale domkniętym
(A)	pęk prostych o wierzchołku A		

Alfabet grecki

Α	α	*alfa*	Ι	ι	*jota*	Ρ	ρ	*ro*
Β	β	*beta*	Κ	κ	*kappa*	Σ	σ	*sigma*
Γ	γ	*gamma*	Λ	λ	*lambda*	Τ	τ	*tau*
Δ	δ	*delta*	Μ	μ	*mi*	Υ	υ	*ypsilon*
Ε	ε	*epsilon*	Ν	ν	*ni*	Φ	ϕ	*fi*
Ζ	ζ	*dzeta*	Ξ	ξ	*ksi*	Χ	χ	*chi*
Η	η	*eta*	Ο	o	*omikron*	Ψ	ψ	*psi*
Θ	θ	*teta*	Π	π	*pi*	Ω	ω	*omega*

Rzymski system zapisu liczb naturalnych

Liczby naturalne	Zapis rzymski	Liczby naturalne	Zapis rzymski	Liczby naturalne	Zapis rzymski
1	I	10	X	100	C
2	II	20	XX	200	CC
3	III	30	XXX	300	CCC
4	IV	40	XL	400	CD
5	V	50	L	500	D
6	VI	60	LX	600	DC
7	VII	70	LXX	1000	M
8	VIII	80	LXXX	1500	MD
9	IX	90	XC	2000	MM

Podwielokrotności i wielokrotności jednostek podstawowych

Podwielokrotność	Przedrostek	Symbol	Wielokrotność	Przedrostek	Symbol
10^{-1}	decy	d	10^{1}	deka	da
10^{-2}	centy	c	10^{2}	hekto	h
10^{-3}	mili	m	10^{3}	kilo	k
10^{-6}	mikro	μ	10^{6}	mega	M
10^{-9}	nano	n	10^{9}	giga	G
10^{-12}	piko	p	10^{12}	tera	T
10^{-15}	femto	f	10^{15}	peta	P
10^{-18}	atto	a	10^{18}	eksa	E

Liczby:	Przynależność liczb do zbioru	Opis
ludolfina π	$\pi \in IW$	Stała matematyczna, określona jako stosunek długości okręgu do długości jego średnicy. $\pi = 3{,}141592653\ldots$
liczba Nepera e	$e \in IW$	Stała matematyczna, która jest granicą ciągu liczbowego $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, czyli $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. $e = 2{,}718281828\ldots$
złota	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \in IW^+$	Patrz: złoty podział, str. 83.
przeciwne: a i $-a$	$a \in R$	$a+(-a)=0$
odwrotne: a i $\frac{1}{a}$	$a \in R\setminus\{0\}$	$a\cdot\frac{1}{a}=1$
dodatnie	$a \in R^+$	$a>0$
nieujemne	$a \in R^+\cup\{0\}$	$a\geq 0$
ujemne	$a \in R^-$	$a<0$
niedodatnie	$a \in R^-\cup\{0\}$	$a\leq 0$
pierwsze	$a \in N\setminus\{0,1\}$	Jedynymi naturalnymi dzielnikami liczby a są 1 oraz a.
złożone	$a \in N\setminus\{0,1\}$	Liczby naturalne, które nie są liczbami pierwszymi.
parzyste	$a \in C$	Liczby całkowite, które są podzielne przez 2. *(Liczby postaci $a=2k$, gdzie $k\in C$).*
nieparzyste	$a \in C$	Liczby całkowite, które nie są podzielne przez 2. *(Liczby postaci $a=2k+1$, gdzie $k\in C$)*
względnie pierwsze a i b	$a,b \in C$	Dwie liczby całkowite, których największym wspólnym dzielnikiem jest liczba 1. (NWD$(a,b)=1$).
doskonałe	$a \in N$	Liczby naturalne, które są równe sumie wszystkich swoich dzielników naturalnych mniejszych od a.
bliźniacze a i b	$a,b \in N\setminus\{0,1\}$	Dwie liczby naturalne, które są liczbami pierwszymi różniącymi się o 2.

Niektóre potęgi liczby 10

10^3	=	1 000	tysiąc
10^6	=	1 000 000	milion
10^9	=	1 000 000 000	miliard
10^{12}	=	1 000 000 000 000	bilion
10^{15}	=	$1\,000^5$	biliard
10^{18}	=	$1\,000\,000^3$	trylion
10^{21}	=	$10\,000\,000^3$	tryliard
10^{24}	=	$1\,000\,000^4$	kwadrylion
10^{30}	=	$1\,000\,000^5$	kwintylion

Uwaga: powyższe nazwy liczb są używane w Polsce.

Niektóre stałe matematyczne

$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$

$\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$

$\sqrt{5} = 2{,}23607\ldots$

$\frac{180}{\pi} = 57{,}29577951\ldots$

Logika matematyczna

Rachunek zdań

- Zdaniem w sensie logicznym nazywamy stwierdzenie, któremu można przyporządkować jedną z dwóch wartości logicznych: prawdę (wartość logiczną 1) albo fałsz (wartość logiczną 0).
  $p, q, r, \ldots$ – symbole zdań w sensie logiki.
- Funktory zdaniotwórcze to zwroty: „nieprawda, że" ($\sim$), „i" ($\wedge$), „lub" ($\vee$), „jeżeli, to" ($\Rightarrow$), „wtedy i tylko wtedy, gdy" ($\Leftrightarrow$), „albo" ($\veebar$).

Negacja (zaprzeczenie) zdania:	$\sim p$	*czytamy*	„ **nieprawda, że** p ".
Koniunkcja zdań:	$p \wedge q$	*czytamy*	„ p **i** q ".
Alternatywa zdań:	$p \vee q$	*czytamy*	„ p **lub** q ".
Implikacja:	$p \Rightarrow q$	*czytamy*	„ **jeżeli** p**, to** q ".
Równoważność zdań:	$p \Leftrightarrow q$	*czytamy*	„ p **wtedy i tylko wtedy, gdy** q ".
Alternatywa wykluczająca zdań:	$p \veebar q$	*czytamy*	„ p **albo** q ".

Tabele wartości logicznych zdań

Negacja

p	$\sim p$
1	0
0	1

Koniunkcja

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Alternatywa

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implikacja

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Równoważność

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Alternatywa wykluczająca

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Prawa rachunku zdań:

	prawo podwójnego przeczenia	$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
	prawo łączności koniunkcji	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
	prawo łączności alternatywy	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
	prawo zaprzeczenia implikacji	$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$
prawa de Morgana	prawo zaprzeczenia koniunkcji	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow [\sim p \vee (\sim q)]$
	prawo zaprzeczenia alternatywy	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow [\sim p \wedge (\sim q)]$
	prawo przechodniości implikacji	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Funkcja zdaniowa *(forma zdaniowa)*

- Funkcja zdaniowa (forma zdaniowa) z jedną zmienną określona na dziedzinie D, jest to takie wyrażenie zawierające tę zmienną, które staje się zdaniem, gdy w miejsce zmiennej podstawimy nazwę dowolnego elementu zbioru D.
- Element dziedziny funkcji zdaniowej spełnia tę funkcję wtedy i tylko wtedy, gdy po podstawieniu go do tej funkcji zdaniowej w miejsce zmiennej otrzymamy zdanie prawdziwe.

$p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – *symbole funkcji zdaniowych ze zmienną x.*

Kwantyfikator

$\bigwedge_x$ ogólny (duży), *czytamy* „dla każdego x ... ”

$\bigvee_x$ szczegółowy (mały), *czytamy* „istnieje takie x, że ... ”

Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów

- $\left[\sim \bigvee_x p(x)\right] \Leftrightarrow \bigwedge_x [\sim p(x)]$
- $\left[\sim \bigwedge_x p(x)\right] \Leftrightarrow \bigvee_x [\sim p(x)]$,

gdzie $p(x)$ jest formą zdaniową zmiennej x określoną na pewnej dziedzinie.

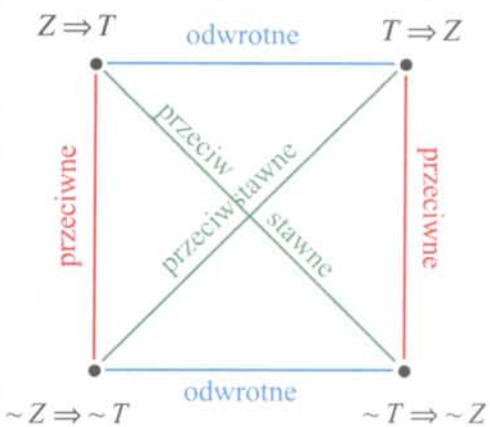
Twierdzenie

- Zdanie udowodnione w danej teorii matematycznej nazywamy twierdzeniem tej teorii.

Jeżeli twierdzenie t ma postać implikacji $Z \Rightarrow T$, której poprzednik Z nazywamy założeniem, a następnik T tezą, to przyjmujemy następującą terminologię:

twierdzenie proste t:	$Z \Rightarrow T$	*twierdzenie przeciwne do t:*	$\sim Z \Rightarrow \sim T$
twierdzenie odwrotne do t:	$T \Rightarrow Z$	*twierdzenie przeciwstawne do t:*	$\sim T \Rightarrow \sim Z$

Kwadrat logiczny i zamknięty układ twierdzeń



Własności twierdzeń

- Twierdzenia przeciwstawne są równoważne.
- Twierdzenia przeciwne tworzą tak zwany zamknięty układ twierdzeń.

Uwaga:

- Jeżeli prawdziwa jest implikacja $Z \Rightarrow T$, to T jest warunkiem koniecznym dla Z, a Z jest warunkiem wystarczającym dla T.
- Jeżeli prawdziwa jest równoważność $Z \Leftrightarrow T$, to Z jest warunkiem koniecznym i wystarczającym dla T (i odwrotnie).

Zasada indukcji matematycznej

Jeżeli: 1° zdanie, w którym jest mowa o liczbach naturalnych, jest prawdziwe dla określonej liczby naturalnej k,

2° dla każdej liczby naturalnej n ($n \geq k$) z założenia, że to zdanie jest prawdziwe dla n, wynika, że jest ono prawdziwe dla liczby następnej $n+1$,

to zdanie to jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej nie mniejszej niż k.

Zbiory

Pojęcia: zbiór; element zbioru, zaliczamy do pojęć pierwotnych (nie definiujemy),

$A, B, C, \ldots$ – *symbole zbiorów*, $a, b, c, \ldots$ – *symbole elementów zbioru*, $\in$ – *symbol przynależności do zbioru*,

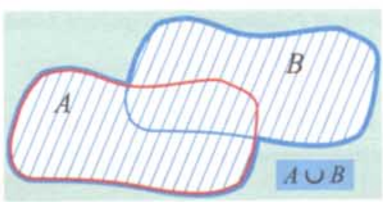
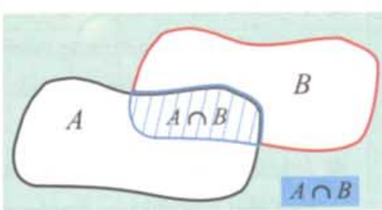
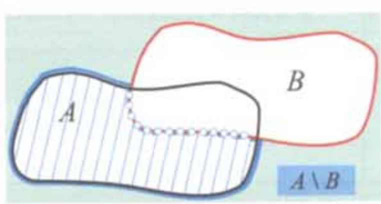
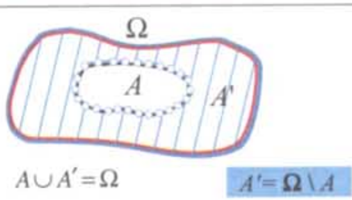
$a \in A$ – *czytamy* „a należy do (jest elementem) zbioru A".

$c \notin A$ – *czytamy* „c nie należy do (nie jest elementem) zbioru A".

$\{x\colon p(x)\}$ – *czytamy* „zbiór elementów x spełniających formę zdaniową $p(x)$".

Zbiór pusty $\varnothing$	● Zbiór, do którego nie należy żaden element, nazywamy zbiorem pustym i oznaczamy go $\varnothing$.
Zbiór skończony	● Zbiór jest skończony, gdy istnieje taka liczba naturalna n, że ten zbiór ma n elementów.
Zbiór nieskończony	● Zbiór, który nie jest skończony nazywamy zbiorem nieskończonym.
Zbiór liczbowy ograniczony	● Zbiór liczbowy A nazywamy ograniczonym z góry (z dołu) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba x, że każdy element a należący do zbioru A spełnia warunek: $a \le x$ $(a \ge x)$. ● *Zbiór A nazywamy ograniczonym, gdy jest ograniczony z dołu i z góry.*

Działania na zbiorach

Działanie	Ilustracja graficzna	Zapis symboliczny definicji	Niektóre własności
Suma zbiorów $\cup$		$[x \in (A \cup B)] \Leftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)]$ lub $A \cup B = \{x\colon x \in A \vee x \in B\}$	$A \cup A = A$ $A \cup \varnothing = A$
Iloczyn zbiorów *(część wspólna)* $\cap$		$[x \in (A \cap B)] \Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B)]$ lub $A \cap B = \{x\colon x \in A \wedge x \in B\}$	$A \cap A = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
Różnica zbiorów $\setminus$		$[x \in (A \setminus B)] \Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \notin B)]$ lub $A \setminus B = \{x\colon x \in A \wedge x \notin B\}$	$A \setminus A = \varnothing$ $A \setminus \varnothing = A$
Dopełnienie zbioru do przestrzeni Ω $'$		$(x \in A') \Leftrightarrow [(x \in \Omega) \wedge (x \notin A)]$ lub $A' = \{x\colon x \in \Omega \wedge x \notin A\}$	$A \cup A' = \Omega$ $A \cap A' = \varnothing$

Relacje między zbiorami

Równość zbiorów

$=$

- Zbiory A i B nazywamy równymi $(A = B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B i na odwrót.
$A = B \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{x} (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

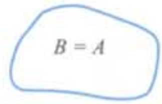
Zawieranie się zbiorów *(inkluzja)*

$\subset$

- Zbiór A zawiera się w zbiorze B $(A \subset B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B (A nazywamy podzbiorem B, B zaś nadzbiorem zbioru A).

$A \subset B \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{x} (x \in A \Rightarrow x \in B)$

- Jeżeli $A \subset B$ i $B \subset A$, to $A = B$.



$A \subset B \ \wedge \ B \subset A$

Zbiory rozłączne

- Zbiory, których iloczyn jest zbiorem pustym, nazywamy rozłącznymi.

$A \cap B = \varnothing$

Iloczyn kartezjański zbiorów

$\times$

$X \times Y = \{(x, y) \colon \ x \in X \ \wedge \ y \in Y\}$.

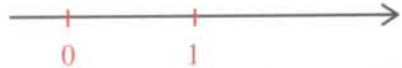
- Zbiór $X \times Y$ nazywamy iloczynem kartezjańskim zbiorów X i Y.
- $X \times X = X^2$.

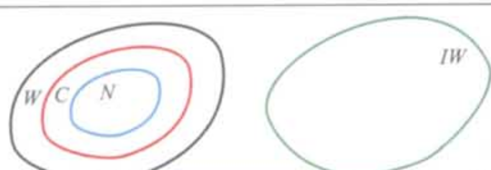
Prawa rachunku zbiorów:

przemienność sumy zbiorów	$A \cup B = B \cup A$
przemienność iloczynu zbiorów	$A \cap B = B \cap A$
łączność sumy zbiorów	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
łączność iloczynu zbiorów	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
prawa de Morgana dla zbiorów	$(A \cap B)' = A' \cup B'$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$
rozdzielność iloczynu względem sumy zbiorów	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
rozdzielność sumy względem iloczynu zbiorów	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
wnioski z praw rozdzielności	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$

Zbiory liczbowe

- Zbiór liczbowy to zbiór, którego elementami są liczby.
- Oś liczbowa to prosta, na której ustalono zwrot dodatni, punkt zerowy i jednostkę.

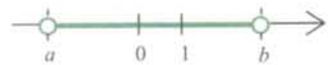


Zbiór liczb naturalnych N	$N=\{0,1,2,\ldots\}$	$N^{+}=\{1,2,3,\ldots\}$ N^{+} – *zbiór liczb naturalnych dodatnich*
Zbiór liczb całkowitych C	$C=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$	$C^{+}=N^{+}$, $C^{-}=\{\ldots,-3,-2,-1\}$ C^{-} – *zbiór liczb całkowitych ujemnych*
Zbiór liczb wymiernych W	$W=\left\{x:\ x=\frac{p}{q}\ \wedge\ p\in C\ \wedge\ q\in C\setminus\{0\}\right\}$ Każdą liczbę wymierną można przedstawić w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego okresowego.	
Zbiór liczb niewymiernych IW	Liczbą niewymierną nazywamy tę liczbę, która nie jest liczbą wymierną, czyli nie daje się przedstawić w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie $p\in C$ i $q\in C\setminus\{0\}$. Rozwinięcie dziesiętne liczby niewymiernej jest nieskończone i nieokresowe.	
Zbiór liczb rzeczywistych R	Każdej liczbie rzeczywistej odpowiada na osi liczbowej tylko jeden punkt. Każdemu punktowi na osi liczbowej odpowiada tylko jedna liczba rzeczywista. $R=W\cup IW$ $\quad$ $R=R^{+}\cup R^{-}\cup\{0\}$	
Związki między zbiorami liczbowymi	 $W\cup IW=R$	$N\subset C\subset W\subset R$ $IW\subset R$ $W\cap IW=\varnothing$

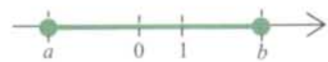
Przedziały liczbowe $(a,b\in R$ i $a<b)$

Przedziały ograniczone:

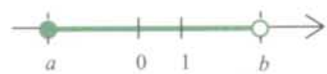
przedział otwarty $(a;b)$ .... $(a;b)=\{x:\ x\in R\ \text{i}\ a<x<b\}$



przedział domknięty $\langle a;b\rangle$ .... $\langle a;b\rangle=\{x:\ x\in R\ \text{i}\ a\le x\le b\}$



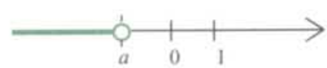
przedział lewostronnie domknięty lub prawostronnie otwarty $\langle a;b)$ ..... $\langle a;b)=\{x:\ x\in R\ \text{i}\ a\le x<b\}$



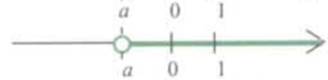
przedział prawostronnie domknięty lub lewostronnie otwarty $(a;b\rangle$ .... $(a;b\rangle=\{x:\ x\in R\ \text{i}\ a<x\le b\}$

Przedziały nieograniczone:

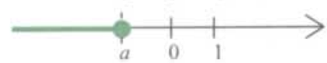
otwarty $(-\infty;a)$ .... $(-\infty;a)=\{x:\ x\in R\ \text{i}\ x<a\}$



otwarty $(a;+\infty)$ .... $(a;+\infty)=\{x:\ x\in R\ \text{i}\ x>a\}$



prawostronnie domknięty $(-\infty;a\rangle$ $\quad(-\infty;a\rangle=\{x:\ x\in R\ \text{i}\ x\le a\}$



lewostronnie domknięty $\langle a;+\infty)$ .. $\langle a;+\infty)=\{x:\ x\in R\ \text{i}\ x\ge a\}$

Działanie	Zapis	Definicje i własności
Dodawanie	$(a + b) = c$ *składniki* *suma*	$a + \mathbf{0} = a$ **0** – *element neutralny dodawania* ● $a+b=b+a$ – *przemienność dodawania* ● $(a+b)+c=a+(b+c)$ – *łączność dodawania*
Odejmowanie	$(a - b) = c$ *odjemna* *odjemnik* *różnica*	● $a-b=a+(-b)$ ● $a-b=c \Leftrightarrow a=b+c$ *Odejmowanie jest działaniem odwrotnym do dodawania*
Mnożenie	$(a \cdot b) = c$ *czynniki* *iloczyn*	$a\cdot\mathbf{1}=a$ **1** – *element neutralny mnożenia* ● $a\cdot b=b\cdot a$ – *przemienność mnożenia* ● $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ – *łączność mnożenia* ● $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ – *rozdzielność mnożenia względem dodawania*
Dzielenie	$(a : b) = c$ *dzielna* *dzielnik* *iloraz*	● $a:b=a\cdot\frac{1}{b}$, gdzie $b\neq 0$. ● Jeżeli $b\neq 0$, to $a:b=c \Leftrightarrow a=b\cdot c$. *Dzielenie jest działaniem odwrotnym do mnożenia*

Cechy podzielności liczb naturalnych		**Liczba naturalna jest podzielna przez:**
	2,	gdy jej ostatnią cyfrą jest 0, 2, 4, 6 albo 8,
	3,	gdy suma jej cyfr dzieli się przez 3,
	4,	gdy liczba, wyrażona dwiema ostatnimi jej cyframi, dzieli się przez 4,
	5,	gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 albo 5,
	6,	gdy dzieli się przez 2 i przez 3,
	7,	gdy różnica między liczbą wyrażoną kolejnymi trzema ostatnimi cyframi danej liczby a liczbą wyrażoną pozostałymi cyframi tej liczby (lub odwrotnie) dzieli się przez 7,
	8,	gdy liczba, wyrażona trzema ostatnimi jej cyframi dzieli się przez 8,
	9,	gdy suma jej cyfr dzieli się przez 9,
	10,	gdy ostatnią jej cyfrą jest 0,
	11,	gdy różnica sumy jej cyfr stojących na miejscach parzystych i sumy cyfr stojących na miejscach nieparzystych dzieli się przez 11.

Proporcja

$a : b = c : d$

wyrazy środkowe

wyrazy skrajne

- **Równość dwóch stosunków (ułamków) nazywamy proporcją.**

$$a:b=c:d \quad \text{lub} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad (b\neq 0 \text{ i } d\neq 0)$$

- W proporcji iloczyn wyrazów skrajnych równy jest iloczynowi wyrazów środkowych, czyli $\boldsymbol{a\cdot d=b\cdot c}$.
- Jeżeli $a:b=c:d$, to:

$$\frac{a}{a\pm b}=\frac{c}{c\pm d}, \qquad \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}, \qquad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d},$$

dla $b\neq 0,\ d\neq 0,\ a\neq \pm b$ i $c\neq \pm d$.

Procent (%)

- Jeden procent (1%) pewnej liczby a (lub innej wielkości), to setna część tej liczby (wielkości), co oznaczamy: $1\%\ a$.

1% a jest równe $\frac{1}{100}\cdot a$ *p% a jest równe* $\frac{p}{100}\cdot a$

Jeżeli liczba b stanowi p% liczby a, to $\frac{b}{a}=\frac{p}{100}$.

$b=p\cdot\frac{a}{100}$	$p=\frac{100}{a}\cdot b$	$a=\frac{b}{p}\cdot 100$

Procent prosty

- Procent prosty, to sposób oprocentowania wkładu pieniężnego K, polegający na tym, że np. roczny dochód od złożonego wkładu w postaci odsetek Z, przy stopie procentowej $\boldsymbol{p\%}$, nie jest doliczany do wkładu na następny rok, czyli nie bierze udziału w oprocentowaniu w następnym roku.

Odsetki za okres:	jednego roku	m miesięcy	t dni
	$Z=\frac{p\cdot K}{100}$	$Z=\frac{p\cdot K\cdot m}{100\cdot 12}$	$Z=\frac{p\cdot K\cdot t}{100\cdot 365}$ *365 – liczba dni w roku.*

Procent składany

- Procent składany, to sposób oprocentowania wkładu pieniężnego K, polegający na tym, że np. roczny dochód w postaci odsetek jest doliczany do wkładu i procentuje wraz z nim w roku następnym.

Po n latach wkład K_n jest równy: $K_n=K\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$, *p – stopa procentowa.*

n	1	2	...	n
K_n	$K\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)$	$K\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$	...	$K\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$

Umarzanie pożyczek długoterminowych:

$$R=K\cdot\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$$

$r=\frac{p}{100}$,

K – wysokość pożyczki udzielonej na n lat,

R – wysokość rocznej raty płatnej przez dłużnika z końcem każdego roku,

$\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$ *– czynnik umorzeniowy.*

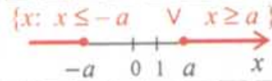
Wartość bezwzględna

- $|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \ge 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

- $|x| \ge 0$
- $|x| = |-x|$
- $-|x| \le x \le |x|$

- Jeśli $a > 0$, to $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$.

- Jeśli $a \ge 0$, to $|x| \ge a \Leftrightarrow (x \ge a$ lub $x \le -a)$.



- $|a+b| \le |a| + |b|$
- $|a-b| \le |a| + |b|$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ dla $b \ne 0$
- $\big||a|-|b|\big| \le |a+b|$ oraz $\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$

Potęgowanie

$$a^n = b$$

a^n – n-ta potęga liczby a (czytamy: „a do potęgi n"),
n – wykładnik potęgi,
a – podstawa potęgi,
b – wynik potęgowania (potęga).

Potęga:

o wykładniku naturalnym

- $a^0 = 1$ dla $a \ne 0$,
  $a^1 = a$ dla $a \in R$,
  $a^{n+1} = a^n \cdot a$ dla $a \in R \wedge n \in N^+$.

  Jeżeli $a \in R \wedge n \in N \setminus \{0\}$, to $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ – czynników}}$.

o wykładniku całkowitym ujemnym

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, gdzie $a \in R \setminus \{0\} \wedge n \in N^+$.
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, gdzie $a \cdot b \ne 0$

o wykładniku wymiernym dodatnim

- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, gdzie $a \in R^+ \cup \{0\}$, $m \in N^+$ i $n \in N^+ \setminus \{1\}$.

o wykładniku wymiernym ujemnym

- $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$, gdzie $a \in R^+$, $m \in N^+$ i $n \in N^+ \setminus \{1\}$.

Działania na potęgach

Jeżeli $m, n \in R$ i $a, b \in R^+$ albo $m, n \in C$ i $a, b \in R$ i $a \ne 0$ i $b \ne 0$, to:

(iloczyn potęg o tych samych podstawach) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(iloraz potęg o tych samych podstawach) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(potęga iloczynu) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

(potęga ilorazu) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

(potęga potęgi) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Działania na liczbach i wyrażeniach

Pierwiastkowanie

$\sqrt[n]{a} = b$

a – *liczba podpierwiastkowa,*
b – *pierwiastek n-tego stopnia z a (wynik pierwiastkowania),*
n – *stopień pierwiastka.*

- Jeżeli $a \geq 0,\ b \geq 0$ i $n \in N \setminus \{0,1\}$, to $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.
- Jeżeli $a < 0$ i $n = 2k+1$, gdzie $k \in N^+$ to $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$.

Prawa działań na pierwiastkach

- Jeżeli $a \geq 0,\ b \geq 0,\ n \in N \setminus \{0,1\}$ i $m \in N \setminus \{0,1\}$, to:

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ dla $b > 0$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

- $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą naturalną parzystą} \\ a, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą naturalną nieparzystą} \end{cases}$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $\sqrt[3]{x^3} = x$

Nierówności równoważne

- *Przy podnoszeniu do kwadratu obydwu stron nierówności możemy otrzymać nierówność, która nie jest równoważna nierówności wyjściowej.*
- Jeżeli $x \geq 0$ i $y \geq 0$, to:
  - $\sqrt{x} > \sqrt{y} \Leftrightarrow x > y$,
  - $x \geq y \Leftrightarrow x^2 \geq y^2$,
  - $x > y \Leftrightarrow x^2 > y^2$,
  - $x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$.
- Jeżeli $x \leq 0$ i $y \leq 0$, to $x \geq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$.

Wyrażenie algebraiczne

- Liczbę, literę lub liczby, litery lub liczby i litery połączone znakami działań, nawiasami, nazywamy wyrażeniami algebraicznymi.

Kolejność wykonywania działań

- Litery występujące w wyrażeniu algebraicznym nazywamy zmiennymi. Jeżeli w wyrażeniu algebraicznym nie ma nawiasów, to kolejność wykonywania działań jest następująca:

  potęgowanie i pierwiastkowanie,

  potem

  mnożenie i dzielenie, *w kolejności ich występowania,*

  a następnie

  dodawanie i odejmowanie.

- *Przy obliczaniu wartości wyrażeń zawierających nawiasy, wykonujemy najpierw działania w tych nawiasach, wewnątrz których nie ma już innych nawiasów.*

n - silnia $n!$	• $0! = 1$, $1! = 1$, $(n+1)! = n!(n+1)$, dla $n \in N^+$.
Symbol Newtona $\binom{n}{k}$	• $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, gdzie $n \in N$, $k \in N$ i $k \le n$ • $\binom{n}{k} = \frac{[n-(k-1)]\cdot\ldots\cdot(n-1)n}{k!}$ • $\binom{n}{0} = 1$ • $\binom{n}{n} = 1$ • $\binom{n}{1} = n$ • $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ • $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
Wzór Newtona	• $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$ $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, gdzie $a,b \in R$, $n \in N$ i $ab \ne 0$. $(a \pm b)^0 = 1$ $(a \pm b)^1 = a \pm b$ $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$ $(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$ **Trójkąt Pascala** 1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 1 4 6 4 1 1 5 10 10 5 1 . . . . $(a \pm b)^5 = \binom{5}{0}a^5 \pm \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 \pm \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 \pm \binom{5}{5}b^5$ . . . .

Wzory skróconego mnożenia:

kwadrat sumy	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
kwadrat różnicy	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
różnica kwadratów	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
sześcian sumy	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
sześcian różnicy	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
suma sześcianów	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
różnica sześcianów	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
kwadrat sumy trzech składników	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Działania na liczbach i wyrażeniach

Własności równości liczb	Jeżeli $a, b, c \in R$ i $a = b$, to: • $a+c=b+c$ • $a\cdot c=b\cdot c$ • $a-c=b-c$ • $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$, $c\neq 0$
Własności nierówności liczb	Jeżeli $a,b,c\in R$ i $a<b$, to: • $a\pm c<b\pm c$ • $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$, gdy $c>0$ • $a\cdot c<b\cdot c$, gdy $c>0$ • $a\cdot c>b\cdot c$, gdy $c<0$ • $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$, gdy $c<0$
Zaokrąglanie ułamków dziesiętnych	• Zaokrąglić liczbę dziesiętną, to znaczy zastąpić zerami (odrzucić) pewną liczbę jej cyfr końcowych zgodnie z regułą:

Jeżeli pierwszą z odrzuconych cyfr jest:	
0, 1, 2, 3, 4,	to ostatnią z cyfr zachowanych pozostawiamy bez zmiany.
5, 6, 7, 8, 9,	to ostatnią z zachowanych cyfr zwiększamy o 1, przy czym, jeżeli jest nią cyfra 9, to zastępujemy ją zerem i zwiększamy o 1 poprzednią cyfrę, itd.

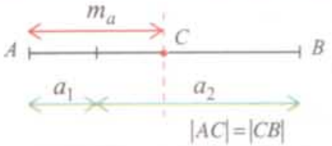
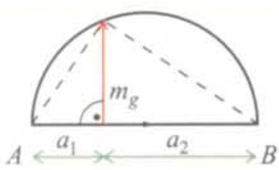
Przybliżenia liczb rzeczywistych

Błąd przybliżenia	• Jeśli liczba a jest przybliżeniem liczby a_0, to błędem przybliżenia a liczby a_0 jest liczba $b=a-a_0$. • Jeśli $b<0$, to liczba a jest **przybliżeniem z niedomiarem**. • Jeśli $b>0$, to liczba a jest **przybliżeniem z nadmiarem**.
Błąd bezwzględny	• $\Delta=\lvert b\rvert=\lvert a-a_0\rvert$
Błąd względny	• $\delta=\frac{\Delta}{a}=\frac{\lvert a-a_0\rvert}{a}$
Ocena błędów wyników działań arytmetycznych na przybliżeniach	**Jeżeli $a=a_0\pm\Delta_a$ i $b=b_0\pm\Delta_b$, to błąd bezwzględny:**

sumy $(a+b)$	*jest równy*	$\Delta=\lvert (a+b)-(a_0+b_0)\rvert\le\Delta_a+\Delta_b$
różnicy $(a-b)$	*jest równy*	$\Delta=\lvert (a-b)-(a_0-b_0)\rvert\le\Delta_a+\Delta_b$
iloczynu $(a\cdot b)$	*jest równy*	$\Delta=\lvert a\cdot b-a_0\cdot b_0\rvert\le\lvert a\rvert\cdot\Delta_b+\lvert b\rvert\cdot\Delta_a+\Delta_a\cdot\Delta_b$
ilorazu $\frac{a}{b}$ dla $b\neq 0$, $b_0\neq 0$, $\lvert b\rvert>\Delta_b$	*jest równy*	$\Delta=\left\lvert\frac{a}{b}-\frac{a_0}{b_0}\right\rvert\le\frac{\lvert a\rvert\cdot\Delta_b+\lvert b\rvert\cdot\Delta_a}{\lvert b\rvert\cdot(\lvert b\rvert-\Delta_b)}$

Działania arytmetyczne na liczbach rzeczywistych a_0 i b_0 zastępujemy często w rachunkach praktycznych działaniami na ich przybliżeniach.

Wartości średnie

Średnia arytmetyczna m_a	dwóch liczb $a_1, a_2 \in R$ • $m_a = \frac{a_1 + a_2}{2}$	n liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$, • $m_a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$
Średnia geometryczna m_g	dwóch liczb $a_1, a_2 \in R^+ \cup \{0\}$ • $m_g = \sqrt{a_1 \cdot a_2}$	n liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^+ \cup \{0\}; n \in N \setminus \{0,1\}$ • $m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$
Średnia harmoniczna m_h	dwóch liczb $a_1, a_2 \in R^+$ • $m_h = \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}} = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2}$	n liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^+$ • $m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$
Średnia kwadratowa m_k	dwóch liczb $a_1, a_2 \in R^+$ • $m_k = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}}$	n liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^+$ • $m_k = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2}$
Średnia arytmetyczna ważona $\overline{m_a}$	dwóch liczb $a_1, a_2 \in R$, z wagami $p_1, p_2 \in R^+$ • $\overline{m_a} = \frac{p_1a_1 + p_2a_2}{p_1 + p_2}$	n liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ z wagami $p_1, p_2, \ldots, p_n \in R^+$ • $\overline{m_a} = \frac{p_1a_1 + p_2a_2 + \ldots + p_na_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_ia_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$
Średnia geometryczna ważona $\overline{m_g}$	dwóch liczb $a_1, a_2 \in R^+$, z wagami $p_1, p_2 \in N \setminus \{0,1\}$ • $\overline{m_g} = \sqrt[p_1+p_2]{a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2}}$	n liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^+$ z wagami $p_1, p_2, \ldots, p_n \in N \setminus \{0,1\}$ • $\overline{m_g} = \sqrt[p_1+p_2+\ldots+p_n]{a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{p_n}}$
Średnia harmoniczna ważona $\overline{m_h}$	dwóch liczb $a_1, a_2 \in R^+$, z wagami $p_1, p_2 \in R^+$ • $\overline{m_h} = \frac{2}{\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2}} = \frac{2a_1a_2}{p_1a_2 + p_2a_1}$	n liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^+$ z wagami $p_1, p_2, \ldots, p_n \in R^+$ • $\overline{m_h} = \frac{n}{\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} + \ldots + \frac{p_n}{a_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i}}$
Zależność między średnimi	Jeżeli m_k, m_a, m_g, m_h są odpowiednimi średnimi liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^+$, to $m_k \geq m_a \geq m_g \geq m_h$. Równość $m_k = m_a = m_g = m_h$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.	
Konstrukcja geometryczna	średniej arytmetycznej dwóch odcinków a_1 i a_2 	średniej geometycznej dwóch odcinków a_1 i a_2  $\frac{a_1}{m_g} = \frac{m_g}{a_2}$

Funkcja i jej własności

$X = D_f$ – *dziedzina funkcji f, zbiór argumentów funkcji,*	x – *argument funkcji f, (zmienna niezależna),*
Y – *przeciwdziedzina funkcji,* $f: X \to Y$,	$y, f(x)$ – *wartość funkcji f, (zmienna zależna),*
$\sqsubset_f$ – *zbiór wartości funkcji f,* $f(D_f) = \sqsubset_f$,	*f, g, h, ... – symbole funkcji.*

Pojęcie funkcji

$f: X \to Y$ (odwzorowanie zbioru X w zbiór Y,

- Funkcją f odwzorowującą zbiór X w zbiór Y nazywamy takie przyporządkowanie, które każdemu elementowi x ze zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element y ze zbioru Y.
- Odwzorowując jak wyżej zbiór X w zbiór Y tworzymy zbiór uporządkowanych par (x, y), czyli par $(x, f(x))$, gdzie $x \in X$ i $y \in Y$.

  Zbiór tych par jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$.

zbioru X na zbiór Y)

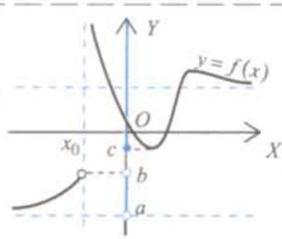
- Jeżeli $f: X \to Y$ i $\sqsubset_f = Y$, to mówimy, że funkcja f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y.

Zbiór wartości funkcji

- Jeżeli $f: X \to Y$, to zbiór $\sqsubset_f \subset Y$ złożony z tych elementów $y \in Y$, dla których istnieje $x \in X$ takie, że $y = f(x)$, nazywamy zbiorem wartości funkcji f.

$D_f = R \setminus \{x_0\}$

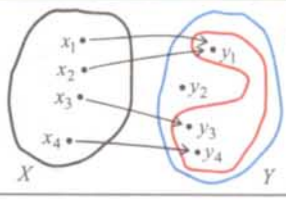
$\sqsubset_f = \{y:\ y \in (a;b) \cup \langle c;+\infty)\}$



- *Jeżeli $X \subset R$ i $Y \subset R$, to obrazem graficznym zbioru wartości funkcji $f: X \to Y$ jest rzut prostokątny jej wykresu na oś Y.*

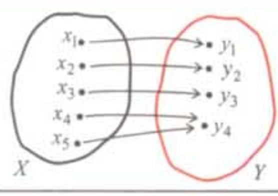
Sposoby określania funkcji:

grafem



f odwzorowuje X w Y

$\sqsubset_f \subset Y$



f odwzorowuje X na Y

$\sqsubset_f = Y$

wzorem

$y = f(x)$, *gdzie* $x \in X$

$y = \sqrt{x}$, *gdzie* $x \in \langle 0; +\infty)$

$y(x) = x^2 + bx + c$, *gdzie* $x \in R$

$f(x) = \sin x + \cos x$, *gdzie* $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

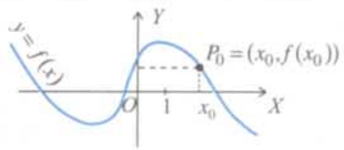
tabelką

klasa VIII w SP...	VIIIa	VIIIb	VIIIc
liczba uczniów	31	27	25

, gdzie $D_f = \{\text{VIIIa, VIIIb, VIIIc}\}$

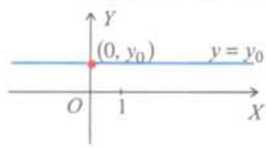
$\sqsubset_f = \{25, 27, 31\}$

wykresem



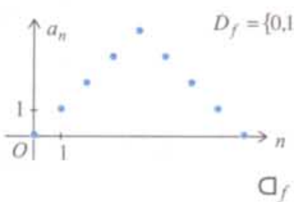
$D_f = R$

$\sqsubset_f = R$



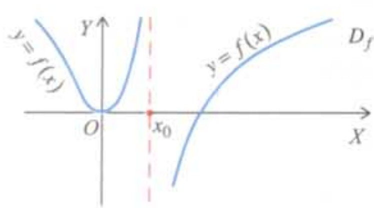
$D_f = R$

$\sqsubset_f = \{y_0\}$



$D_f = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$\sqsubset_f = \{0,1,2,3,4\}$

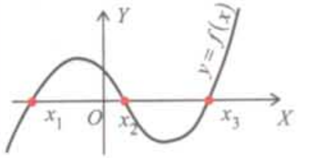


$D_f = R \setminus \{x_0\}$

$\sqsubset_f = R$

Miejsca zerowe

- Miejscem zerowym funkcji $y = f(x)$ nazywamy każdą wartość argumentu x, dla której wartość funkcji y równa jest zero.



Miejsce zerowe funkcji $y = f(x)$ wyznaczamy *rozwiązując równanie* $f(x)=0$, *gdzie* $x \in D_f$.

- *Każde rozwiązanie równania* $f(x)=0$ *należące do* D_f *jest miejscem zerowym funkcji f.*

Uwaga: Miejsce zerowe funkcji f jest równe odciętej punktu wykresu funkcji leżącego na osi X.

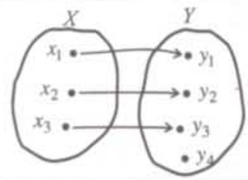
Równość funkcji

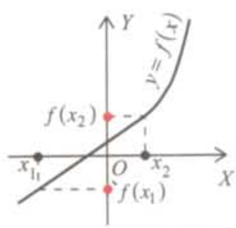
- Dwie funkcje f i g są równe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$D_f = D_g = D \quad \text{i} \quad \bigwedge_{x \in D} f(x) = g(x).$$

Funkcja różnowartościowa

- Funkcję $f: X \to Y$, która każdej parze różnych argumentów przyporządkowuje różne wartości, tzn. taką, że $\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$ nazywamy funkcją różnowartościową.

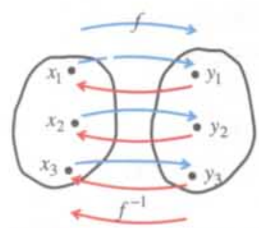




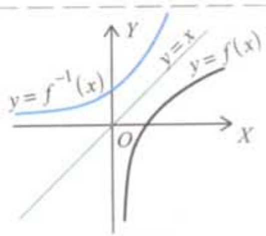
- Określając różnowartościowość funkcji f sprawdzamy, czy spełniony jest warunek $f(x_1) - f(x_2) \neq 0$ przy założeniu $x_1 - x_2 \neq 0$.
- Jeżeli funkcja f jest różnowartościowa, to każda prosta $y = m$ (gdzie $m \in R$) ma co najwyżej jeden punkt wspólny z wykresem funkcji f.
- Każda funkcja ściśle monotoniczna jest różnowartościowa.

Funkcja odwrotna f^{-1}

- Jeśli funkcja $\mathbf{f: X \to Y}$, jest różnowartościowa i odwzorowuje zbiór X na zbiór Y ($Y = \mathrm{Q}_f$), to funkcję $\mathbf{f^{-1}: Y \to X}$ określoną następująco: dla dowolnego $y \in Y$ wartością $f^{-1}(y)$ jest jedyny element $x \in X$ taki, że $f(x) = y$, nazywamy **odwrotną do funkcji** ***f***.
- Funkcją odwrotną do f^{-1} jest funkcja f.
- *Jeżeli funkcja f ma funkcję odwrotną* f^{-1}, *to funkcję f nazywamy funkcją odwracalną.*



$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$



- *Jeżeli obrazem wykresu funkcji* $f: X \to Y$ *w symetrii względem prostej o równaniu* $y = x$ *jest wykres funkcji przekształcającej pewien podzbiór X w Y, to funkcja f jest odwracalna.*

Działania na funkcjach

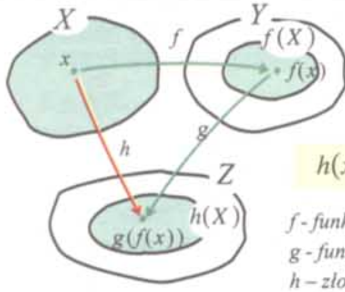
- $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$, *gdy* $x \in D_f$ i $k \in R$
- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, *gdy* $x \in D_f \cap D_g$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, *gdy* $x \in D_f \cap D_g$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, *gdy* $x \in D_f \cap D_g$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, *gdy* $x \in D_f \cap D_g \setminus \{x\colon g(x) = 0\}$

Działania na funkcjach f i g można wykonywać, gdy mają one jednakowe dziedziny.

Funkcja i jej własności

Złożenie funkcji

- Jeżeli dane są funkcje $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$, to istnieje funkcja $h: X \to Z$ określona wzorem $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ zwana złożeniem funkcji f z funkcją g.



$h(x) = g(f(x))$

f - funkcja wewnętrzna,
g - funkcja zewnętrzna,
h – złożenie funkcji f i g.

Funkcja rosnąca

- Funkcję f nazywamy rosnącą w zbiorze (przedziale) X, jeżeli dla każdej pary argumentów $x_1, x_2 \in X$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) < f(x_2)$.
- Funkcję f rosnącą w dziedzinie D_f nazywa się również ściśle rosnącą.

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X \subset D_f} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Funkcja malejąca

- Funkcję f nazywamy malejącą w zbiorze (przedziale) X, jeżeli dla każdej pary argumentów $x_1, x_2 \in X$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) > f(x_2)$.
- Funkcję f malejącą w dziedzinie D_f nazywa się również ściśle malejącą.

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X \subset D_f} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Funkcja nierosnąca

- Funkcję f nazywamy nierosnącą w zbiorze (przedziale) X, jeżeli dla każdej pary argumentów $x_1, x_2 \in X$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) \geq f(x_2)$.

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X \subset D_f} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

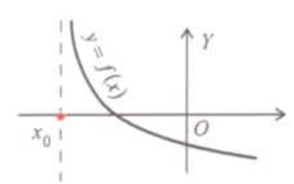
Funkcja niemalejąca

- Funkcję f nazywamy niemalejącą w zbiorze (przedziale) X, jeżeli dla każdej pary argumentów $x_1, x_2 \in X$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) \leq f(x_2)$.

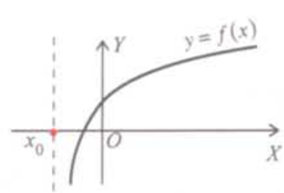
$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X \subset D_f} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Funkcja monotoniczna

- Funkcję, która jest nierosnąca lub niemalejąca nazywa się monotoniczną.
- Jeżeli funkcja f określona i różniczkowalna w przedziale $A \subset D_f$ ma pochodną dodatnią (ujemną) w całym przedziale A, to jest w tym przedziale rosnąca (malejąca).



Funkcja f jest malejąca w zbiorze $A = (x_0; +\infty)$.



Funkcja f jest rosnąca w zbiorze $A = (x_0; +\infty)$.

- Jeżeli funkcja f, określona i różniczkowalna w przedziale $(a;b) \subset D_f$, jest w tym przedziale rosnąca (malejąca), to jej pochodna $f'(x)$ przyjmuje wartość nieujemną (niedodatnią), dla każdego $x \in (a;b)$.

By określić monotoniczność funkcji:

1° *badamy znak różnicy* $f(x_1) - f(x_2)$, *przy założeniu, że* $x_1 - x_2 > 0$, *gdzie* $x_1, x_2 \in A$ *i* $A \subset D_f$,

2° *korzystamy z różniczkowego kryterium badania monotoniczności funkcji w zbiorze A.* *(str. 33 – wnioski z tw. Lagrange'a).*

Funkcja stała

- Funkcja $f: X \to Y$ jest funkcją stałą, jeżeli istnieje $c \in Y$ takie, że dla każdego $x \in X$, $f(x) = c$.

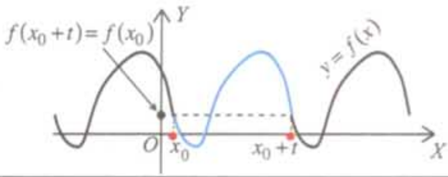
$$\bigvee_{c \in Y} \bigwedge_{x \in X} f(x) = c$$

Funkcja okresowa

- Jeżeli dla funkcji $y=f(x)$ istnieje taka liczba $t\neq 0$, że dla każdego $x\in D_f$ również $(x+t)\in D_f$ i $(x-t)\in D_f$ oraz $f(x)=f(x+t)=f(x-t)$, to funkcję f nazywamy okresową o okresie t.

$$\bigvee_{t\neq 0}\bigwedge_{x\in D_f}\left[(x+t)\in D_f \wedge (x-t)\in D_f \wedge f(x)=f(x+t)\right]$$

Najmniejszy dodatni okres funkcji (jeśli istnieje) nazywa się okresem podstawowym (zasadniczym) funkcji.



Okresowość funkcji badamy:

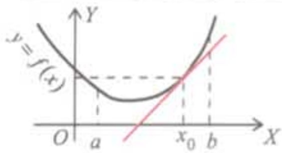
- *sprawdzając, czy istnieje liczba $t\neq 0$, dla której*

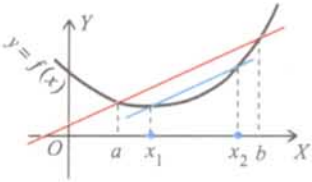
$$\bigwedge_{x\in D_f}(x+t)\in D_f \wedge (x-t)\in D_f \wedge f(x+t)=f(x).$$

Funkcja wypukła w zbiorze

- Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(a;b)\subset D_f$, to mówimy, że funkcja f jest wypukła w przedziale $(a;b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x_0\in(a;b)$ styczna do wykresu tej funkcji w punkcie o odciętej x_0 jest położona pod tą krzywą.
- Funkcja f jest wypukła w przedziale $(a;b)\subset D_f$, jeśli dla różnych $x_1,x_2\in(a;b)$ każdy punkt wykresu funkcji f dla $x\in(x_1;x_2)$ leży poniżej prostej (siecznej) przechodzącej przez punkty $(x_1,f(x_1))$ i $(x_2,f(x_2))$.

Uwaga: w niektórych książkach nazwy „funkcja wypukła" i „funkcja wklęsła" używane są odwrotnie.

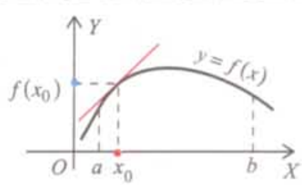


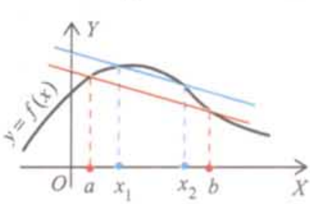


- Jeżeli funkcja $y=f(x)$ ma w przedziale $(a;b)\subset D_f$ pochodną $f'(x)$ oraz drugą pochodną $f''(x)$ ciągłą i jest w tym przedziale wypukła, to dla każdego $x\in(a;b)$ $f''(x)\geq 0$.
- Jeżeli funkcja $y=f(x)$ ma w przedziale $(a;b)\subset D_f$ pochodną $f'(x)$ oraz drugą pochodną $f''(x)$ ciągłą w tym przedziale i $f''(x)>0$ dla każdego $x\in(a;b)$, to funkcja f jest wypukła w przedziale $(a;b)$.

Funkcja wklęsła w zbiorze

- Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(a;b)$, to mówimy, że funkcja f jest wklęsła w przedziale $(a;b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x_0\in(a;b)$ styczną do wykresu tej funkcji w punkcie o odciętej x_0 jest położona nad tą krzywą.
- Funkcja f jest wklęsła w przedziale $(a;b)\subset D_f$, jeśli dla różnych $x_1,x_2\in(a;b)$ każdy punkt wykresu funkcji f dla $x\in(x_1;x_2)$ leży powyżej prostej (siecznej) przechodzącej przez punkty $(x_1,f(x_1))$ i $(x_2,f(x_2))$.





- Jeżeli funkcja $y=f(x)$ ma w przedziale $(a;b)\subset D_f$ pochodną $f'(x)$ oraz drugą pochodną $f''(x)$ ciągłą i jest w tym przedziale wklęsła, to dla każdego $x\in(a;b)$ $f''(x)\leq 0$.
- Jeżeli funkcja $y=f(x)$ ma w przedziale $(a;b)$ pochodną $f'(x)$ oraz drugą pochodną $f''(x)$ ciągłą w tym przedziale i $f''(x)<0$ dla każdego $x\in(a;b)$, to funkcja f jest wklęsła w przedziale $(a;b)$.

Funkcja i jej własności

Funkcja ograniczona

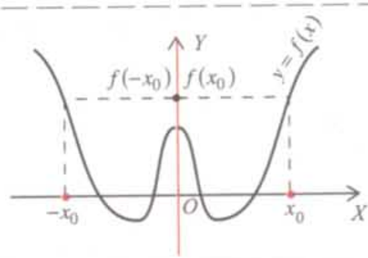
- Funkcję f, której zbiór wartości jest ograniczony, nazywa się funkcją ograniczoną.

$$\bigvee_{M\in R}\bigwedge_{x\in D_f}|f(x)|\le M$$

Funkcja parzysta

- Funkcję f określoną na zbiorze D_f nazywamy parzystą, jeżeli dla każdego argumentu $x\in D_f$ liczba $-x\in D_f$ oraz $f(-x)=f(x)$.

$$\bigwedge_{x\in D_f}\left[-x\in D_f \wedge f(-x)=f(x)\right]$$

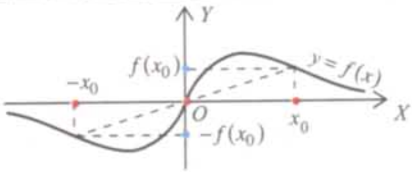


- *Funkcja f jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór D_f jest symetryczny względem zera oraz oś OY jest osią symetrii wykresu tej funkcji.*

Funkcja nieparzysta

- Funkcję f określoną w zbiorze D_f nazywamy nieparzystą, jeżeli dla każdego argumentu $x\in D_f$ liczba $-x\in D_f$ oraz $f(-x)=-f(x)$.

$$\bigwedge_{x\in D_f}\left[-x\in D_f \wedge f(-x)=-f(x)\right]$$



$$\bigwedge_{x\in D_f} f(-x)=-f(x)$$

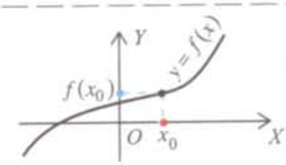
- *Funkcja f jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór D_f jest symetryczny względem zera oraz punkt $O=(0,0)$ jest środkiem symetrii wykresu tej funkcji.*

Funkcja ciągła w punkcie x_0

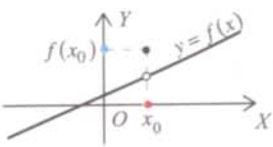
- Funkcję f zmiennej rzeczywistej nazywamy funkcją ciągłą w punkcie $x_0\in D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, czyli:

  1° *funkcja f ma w punkcie x_0 granicę g,*

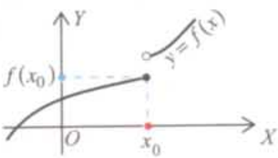
  2° *granica g jest równa wartości $f(x_0)$.*



Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0.



Funkcja f nie jest ciągła w punkcie x_0.



Funkcja f nie jest ciągła w punkcie x_0.

Ciągłość funkcji $y=f(x)$ dla $x_0\in D_f$ badamy:

1° **obliczając**:

$$f(x_0) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to x_0} f(x),$$

2° **sprawdzając**, czy:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

albo

1° **obliczając**:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x),$$

2° **sprawdzając**, czy:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0).$$

Funkcja ciągła w przedziale

- Funkcję f nazywamy ciągłą w przedziale $(a;b)$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.
- Funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a;b\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła w przedziale $(a;b)$ oraz $f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x)$ i $f(b)=\lim_{x\to b^-} f(x)$.

Twierdzenia o funkcjach ciągłych

Twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej.

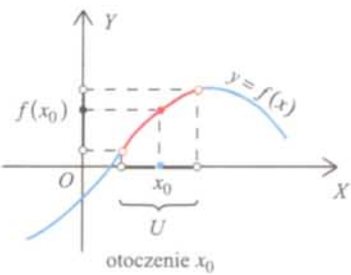
- Funkcja odwrotna do funkcji f ciągłej i rosnącej (malejącej) w przedziale X jest ciągła i rosnąca (malejąca) w przedziale $Y=f(X)$.

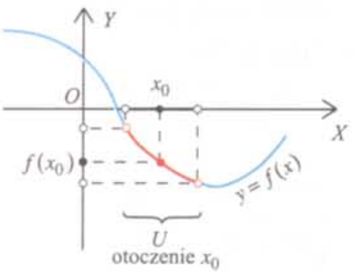
Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na funkcjach ciągłych.

- Jeśli funkcje f i g określone w przedziale $X\subset R$ są ciągłe w punkcie $x_0\in X$, to funkcje:

  $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g}$, (gdy $g(x_0)\neq 0$) są ciągłe w punkcie x_0.

- Funkcja, która jest złożeniem funkcji ciągłych, jest funkcją ciągłą w swej dziedzinie.
- Jeżeli funkcja f określona na pewnym otoczeniu punktu x_0 jest w tym punkcie ciągła i $f(x_0)>0$ $(f(x_0)<0)$, to istnieje takie otoczenie U punktu x_0, że dla każdego $x\in U$ zachodzi nierówność $f(x)>0$ (lub odpowiednio $f(x)<0$).





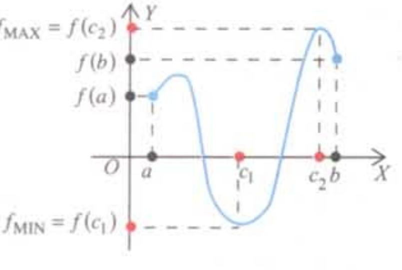
Twierdzenie Weierstrassa (o przyjmowaniu wartości najmniejszej i wartości największej).

- Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $A=\langle a;b\rangle$, to jest w nim ograniczona i w pewnym punkcie tego przedziału przyjmuje wartość największą (f_{MAX}) oraz w pewnym punkcie tego przedziału przyjmuje wartość najmniejszą (f_{MIN}).
- Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a;b\rangle$, to istnieją liczby $c_1, c_2\in\langle a;b\rangle$ takie, że:

  $f(c_1)=f_{MIN}=\inf\limits_{x\in\langle a;b\rangle} f(x)$, $f(c_2)=f_{MAX}=\sup\limits_{x\in\langle a;b\rangle} f(x)$, gdzie:

  $\inf\limits_{x\in\langle a;b\rangle} f(x)$ (infimum) – kres dolny zbioru wartości funkcji f w przedziale $\langle a;b\rangle$,

  $\sup\limits_{x\in\langle a;b\rangle} f(x)$ (supremum) – kres górny zbioru wartości funkcji f w przedziale $\langle a;b\rangle$.



Twierdzenie Darboux (o przyjmowaniu wartości pośredniej).

- Funkcja f ciągła w przedziale $\langle a;b\rangle$ przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między wartością najmniejszą i największą tej funkcji w przedziale $\langle a;b\rangle$.

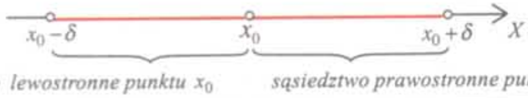
W szczególności, jeżeli $f(a)$ i $f(b)$ są różnych znaków, to istnieje taka liczba $c\in(a;b)$, że $f(c)=0$.

Granica funkcji

Sąsiedztwo punktu x_0

- Sąsiedztwem, o promieniu δ punktu x_0 nazywamy sumę przedziałów $(x_0-\delta; x_0)\cup(x_0; x_0+\delta)$, gdzie $\delta>0$ i oznaczamy symbolem $S(x_0;\delta)$.

$$x\in S(x_0;\delta)\Leftrightarrow x\in(x_0-\delta;x_0)\cup(x_0;x_0+\delta)\Leftrightarrow 0<|x-x_0|<\delta$$



Otoczenie punktu x_0

- Otoczeniem punktu x_0 (liczby x_0) o promieniu $\varepsilon>0$ nazywamy przedział otwarty $(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$ i oznaczamy $U(x_0,\varepsilon)$.

$$x\in U(x_0,\varepsilon)\Leftrightarrow x\in(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)\Leftrightarrow x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon\Leftrightarrow|x-x_0|<\varepsilon$$

Granica funkcji w punkcie

Definicja Heinego.

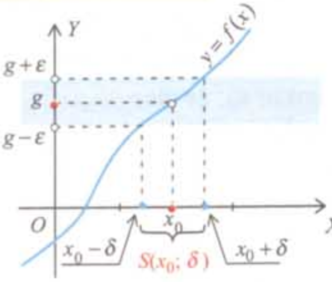
- Funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 granicę g, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n), gdzie $x_n\in D_f$ o wyrazach $x_n\neq x_0$ i zbieżnego do x_0, ciąg wartości funkcji $(f(x_n))$ jest zbieżny do g.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=g \Leftrightarrow \bigwedge_{(x_n)}\{[\bigwedge_{n\in N^*}(x_n\in D_f\wedge x_n\neq x_0)\wedge(\lim_{n\to\infty}x_n=x_0)]\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(x_n)=g\}$$

Definicja Cauchy'ego.

- Funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 granicę g, jeżeli dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba $\delta>0$, że dla każdego $x\in S(x_0;\delta)\cap D_f$ spełniony jest warunek $|f(x)-g|<\varepsilon$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=g\Leftrightarrow\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{\delta>0}\bigwedge_{x\in D_f}0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-g|<\varepsilon$$



Uwaga: Definicje Heinego i Cauchy'ego są równoważne.

Granica funkcji w nieskończoności *(definicje Heinego)*

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=g$

- Funkcja $f(x)$ ma w $+\infty$ **granicę** g $\Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow\bigwedge_{(x_n)}\{[(\bigwedge_{n\in N^*}x_n\in D_f)\wedge(\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty)]\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(x_n)=g\}.$$

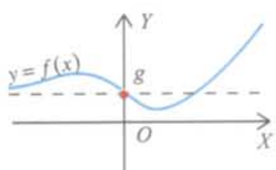
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

- Funkcja $f(x)$ ma w $+\infty$ **granicę niewłaściwą** $-\infty$ $\Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow\bigwedge_{(x_n)}\{[(\bigwedge_{n\in N^*}x_n\in D_f)\wedge(\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty)]\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(x_n)=-\infty\}.$$

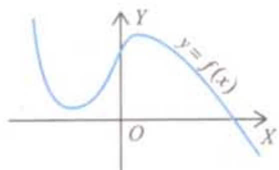
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- Funkcja $f(x)$ ma w $+\infty$ **granicę niewłaściwą** $+\infty$ $\Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow\bigwedge_{(x_n)}\{[(\bigwedge_{n\in N^*}x_n\in D_f)\wedge(\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty)]\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty\}.$$

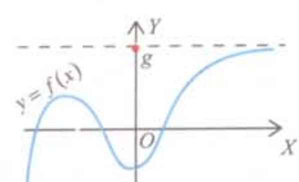
Analogicznie określamy granice $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=g$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$



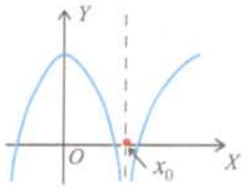
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$



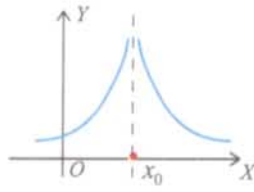
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=g$

Granica niewłaściwa funkcji *(definicje Heinego)*

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$	Funkcja $y = f(x)$ ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą** $-\infty$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \bigwedge\limits_{(x_n)} \{[\bigwedge\limits_{n \in N^+} (x_n \neq x_0 \wedge x_n \in D_f) \wedge (\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0)] \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty\}$.
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$	Funkcja $y = f(x)$ ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą** $+\infty$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \bigwedge\limits_{(x_n)} \{[\bigwedge\limits_{n \in N^+} (x_n \neq x_0 \wedge x_n \in D_f) \wedge (\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0)] \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty\}$.



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

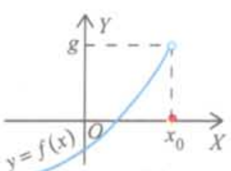


$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

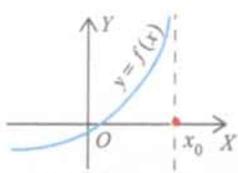
Granica jednostronna funkcji *(definicje Heinego)*

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = g$	Liczba g jest **granicą lewostronną** funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0 $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \bigwedge\limits_{(x_n)} \{[\bigwedge\limits_{n \in N^+} (x_n < x_0 \wedge x_n \in D_f) \wedge (\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0)] \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g\}$.
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$	Liczba g jest **granicą prawostronną** funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0 $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \bigwedge\limits_{(x_n)} \{[\bigwedge\limits_{n \in N^+} (x_n > x_0 \wedge x_n \in D_f) \wedge (\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0)] \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g\}$.
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$	Funkcja $y = f(x)$ ma w punkcie x_0 **lewostronną granicę niewłaściwą** $+\infty$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \bigwedge\limits_{(x_n)} \{[\bigwedge\limits_{n \in N^+} (x_n < x_0 \wedge x_n \in D_f) \wedge (\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0)] \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty\}$.
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$	Funkcja $y = f(x)$ ma w punkcie x_0 **prawostronną granicę niewłaściwą** $-\infty$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \bigwedge\limits_{(x_n)} \{[\bigwedge\limits_{n \in N^+} (x_n > x_0 \wedge x_n \in D_f) \wedge (\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0)] \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty\}$.

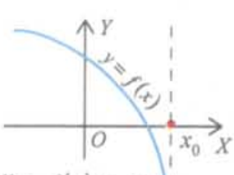
Analogicznie określamy granice: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ *i* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.



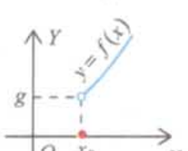
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = g$



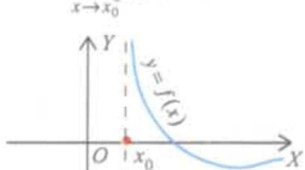
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$



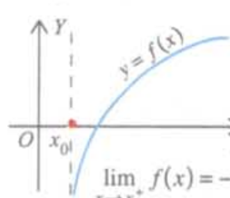
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$



$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

Granica funkcji

Własności granic funkcji

- Funkcja $y=f(x)$, określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0, ma granicę w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy ma w tym punkcie obie granice jednostronne i granice te są równe.
  ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$).
- Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, to funkcja f nie ma granicy w punkcie x_0.
- Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=g$ i $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=p$, to:
  - $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm h(x)\right)=g\pm p$,
  - $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot h(x)\right)=g\cdot p$,
  - $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{h(x)}=\dfrac{g}{p}$, gdy $p\neq 0$.
- Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, to $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.
- Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ i $f(x)>0$ w pewnym sąsiedztwie punktu x_0, to $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.
- Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ i $f(x)<0$ w pewnym sąsiedztwie punktu x_0, to $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.
- Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ i $c>0$, to $\lim\limits_{x\to x_0} c\cdot f(x)=\pm\infty$.
- Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ i $c<0$, to $\lim\limits_{x\to x_0} c\cdot f(x)=\mp\infty$.

Symbole nieoznaczone

Przyjmując, że 0; $-\infty$; $+\infty$; 1 są granicami pewnych funkcji, wyrażenia typu: $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 0^0; ∞^0; 1^∞ nazywamy symbolami **nieoznaczonymi**.

Reguła de l'Hôspitala

- Jeżeli funkcje f i h są określone i różniczkowalne w sąsiedztwie punktu x_0, $h(x)\neq 0$ i $h'(x)\neq 0$ oraz zachodzi jeden z następujących warunków:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=0 \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty \ \text{ i } \ \lim_{x\to x_0} h(x)=\pm\infty$$

i jeśli istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{h'(x)}$, to istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{h(x)}$, przy czym:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{h'(x)}$$

Niektóre granice funkcji

Jeśli $m,n\in N$, $a_m\neq 0$ i $b_n\neq 0$, to:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_mx^m+\ldots+a_1x+a_0}{b_nx^n+\ldots+b_1x+b_0}=\begin{cases}0 & \text{gdy } n>m\\ \dfrac{a_m}{b_n} & \text{gdy } n=m\\ +\infty & \text{gdy } n<m \text{ i } \dfrac{a_m}{b_n}>0\\ -\infty & \text{gdy } n<m \text{ i } \dfrac{a_m}{b_n}<0\end{cases}$$

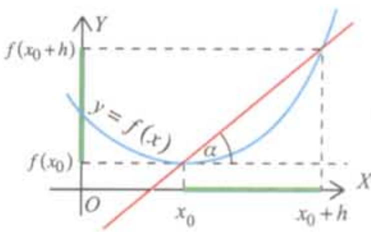
$\lim\limits_{x\to x_0} c=c$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=a$
$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$
$\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Iloraz różnicowy funkcji

Niech f jest funkcją określoną na pewnym otoczeniu U punktu x_0, zaś $h \neq 0$ taką liczbą, że $x_0 + h \in U$.

- Iloraz $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nazywamy **ilorazem różnicowym** funkcji f w punkcie x_0, dla przyrostu h zmiennej niezależnej.

Interpretacja geometryczna ilorazu różnicowego



$\Delta y = f(x_0+h) - f(x_0)$

$\Delta x = h$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Przykłady interpretacji fizycznej ilorazu różnicowego

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ – średnia prędkość poruszającego się punktu materialnego w przedziale czasu Δt, gdy droga s jest funkcją czasu t.

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t_0+\Delta t)-q(t_0)}{\Delta t}$$

$\dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ – średnie natężenie prądu w przedziale czasu Δt, gdy natężenie q jest funkcją czasu t.

Pochodna funkcji w punkcie

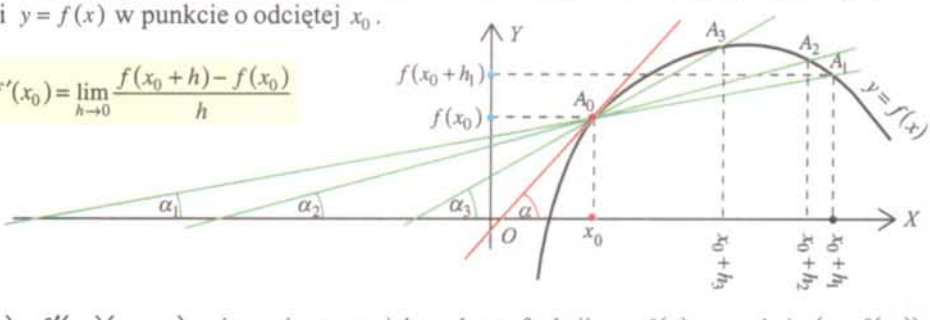
- Granicę właściwą (jeżeli istnieje) ilorazu różnicowego $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ dla h dążącego do zera nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy symbolem $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji w punkcie

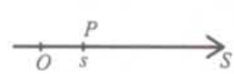
- Pochodna $f'(x_0)$ jest równa tangensowi kąta α, jaki tworzy z osią OX styczna do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie o odciętej x_0.

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



$\boldsymbol{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$ – równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Interpretacja fizyczna pochodnej funkcji w punkcie



Jeżeli punkt P porusza się po osi liczbowej OS i współrzędna s punktu P jest funkcją czasu: $s = s(t)$ oraz $\Delta t \neq 0$ oznacza przyrost czasu, to iloraz różnicowy $\dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ jest średnią prędkością punktu P między chwilami $\boldsymbol{t}$ i $\boldsymbol{t+\Delta t}$.

Granica tego ilorazu, gdy $\Delta t \to 0$ jest prędkością $v(t)$ punktu P w chwili t: $v(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$

Pochodne jednostronne funkcji

- Jeżeli iloraz różnicowy $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ma granicę jednostronną w punkcie x_0, to granicę tę nazywamy pochodną jednostronną funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy odpowiednio symbolami:

$f'_+(x_0)$ – *pochodna prawostronna* lub $f'_-(x_0)$ – *pochodna lewostronna*.

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

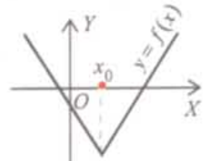
Pochodna $f'(x_0)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy obie pochodne jednostronne istnieją i są równe.

Pochodna funkcji (pochodna jako funkcja)

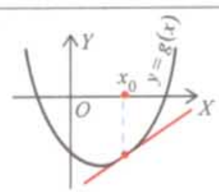
- Jeżeli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie x pewnego przedziału (lub innego zbioru punktów), to określoną na tym przedziale (zbiorze) funkcję $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ nazywamy funkcją pochodną funkcji f.

Funkcja różniczkowalna w punkcie x_0

- Funkcję f zmiennej rzeczywistej określoną w pewnym otoczeniu punktu x_0 nazywamy różniczkowalną w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje pochodna funkcji f w punkcie x_0.
- Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągła.



Funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie x_0.



Funkcja g jest różniczkowalna w punkcie x_0

Różniczkowalność funkcji f w punkcie x_0 badamy:

obliczając granicę $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

albo

obliczając:

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_-(x_0)$$

i $$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0)$$

oraz sprawdzając, czy $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

Funkcja różniczkowalna w zbiorze

- Funkcję f nazywamy **różniczkowalną** w zbiorze (przedziale), jeżeli jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru (przedziału).

Druga pochodna

- Jeżeli funkcja pochodna f' jest różniczkowalna, to pochodną funkcji f' nazywamy **pochodną drugiego rzędu (drugą pochodną)** funkcji f i oznaczamy symbolem f''. $f''(x)=(f')'(x)$

Analogicznie określamy pochodne wyższych rzędów.

Interpretacja fizyczna drugiej pochodnej

- Przyspieszenie $a(t)$ jest pochodną prędkości względem czasu, czyli jest drugą pochodną drogi względem czasu.
$a(t)=v'(t)$ czyli $a(t)=s''(t)$ $(s'(t)=v(t))$.

Twierdzenia o pochodnych

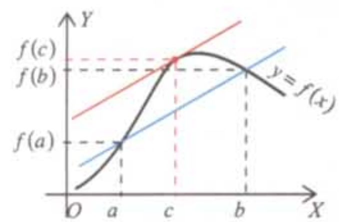
Jeżeli funkcje f i g mają pochodne w punkcie x, to:

- $[c\cdot f(x)]' = c\cdot f'(x)$ dla dowolnej stałej $c\in R$
- $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$
- $[f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x)$
- $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$
- $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}$, gdy $g(x)\neq 0$
- $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]\cdot g'(x)$, gdy funkcja f ma pochodną w punkcie $g(x)$, a funkcja g w punkcie x.

Twierdzenie o wartości średniej (Lagrange'a)

- Jeżeli funkcja $y=f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a;b\rangle$ i różniczkowalna w przedziale $(a;b)$, to istnieje taki punkt $c\in(a;b)$, że

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$



Styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(c, f(c))$ jest równoległa do siecznej przechodzącej przez punkty $(a,f(a))$ i $(b,f(b))$.

Wnioski z twierdzenia Lagrange'a

Jeżeli funkcja $y=f(x)$ jest różniczkowalna w przedziale $(a;b)$, to:

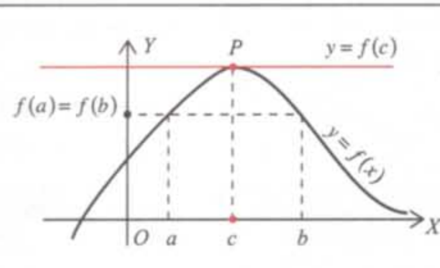
- $\bigwedge_{x\in(a;b)} f'(x)=0 \Leftrightarrow$ funkcja f jest stała w przedziale $(a;b)$.
- $\bigwedge_{x\in(a;b)} f'(x)>0 \Rightarrow$ funkcja f jest rosnąca w przedziale $(a;b)$.
- $\bigwedge_{x\in(a;b)} f'(x)<0 \Rightarrow$ funkcja f jest malejąca w przedziale $(a;b)$.

Wnioski pozostają prawdziwe dla przedziałów $(-\infty;b)$, $(a;\infty)$, $(-\infty;\infty)$.

Powyższe wnioski stanowią kryterium różniczkowe badania monotoniczności funkcji.

Twierdzenie Rolle'a

- Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a;b\rangle$, i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału oraz $f(a)=f(b)$, to istnieje taki punkt $c\in(a;b)$, że $f'(c)=0$.



Styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(c, f(c))$ jest równoległa do OX.

Pochodna funkcji

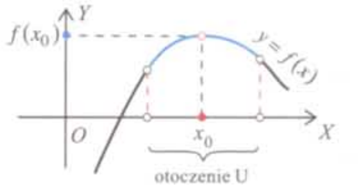
Pochodne funkcji elementarnych

Wzór funkcji $y=f(x)$	Pochodna $f'(x)$ funkcji f	Uwagi
$f(x)=c$	$(c)'=0$	$c\in R$
$f(x)=ax+b$	$(ax+b)'=a$	
$f(x)=ax^2+bx+c$	$(ax^2+bx+c)'=2ax+b$	
$f(x)=x^\alpha$	$(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	$\alpha\in R\setminus\{0,1\}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x>0$
$f(x)=\frac{a}{x}$	$\left(\frac{a}{x}\right)'=\frac{-a}{x^2}$	$x\neq 0$
$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$(\sqrt[n]{x})'=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, $n\in N\setminus\{0,1\}$	$x>0$
$f(x)=\sin x$	$(\sin x)'=\cos x$	
$f(x)=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$	
$f(x)=\operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ dla $k\in C$
$f(x)=\operatorname{ctg} x$	$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x\neq k\pi$ dla $k\in C$
$f(x)=a^x$	$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$	$a>0$
$f(x)=e^x$	$(e^x)'=e^x$	
$f(x)=\ln x$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$x>0$
$f(x)=\ln\lvert x\rvert$	$(\ln\lvert x\rvert)'=\frac{1}{x}$	$x\neq 0$
$f(x)=\log_a x$	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$a>0, a\neq 1$ $x>0$
$f(x)=\operatorname{arc\,sin} x$	$(\operatorname{arc\,sin} x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert<1$
$f(x)=\operatorname{arc\,cos} x$	$(\operatorname{arc\,cos} x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert<1$
$f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$	$(\operatorname{arc\,tg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$	
$f(x)=\operatorname{arc\,ctg} x$	$(\operatorname{arc\,ctg} x)'=\frac{-1}{1+x^2}$	

Ekstremum lokalne funkcji

Maksimum lokalne

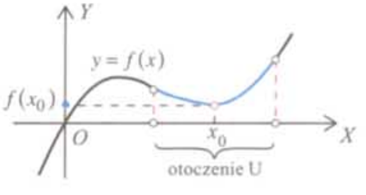
- Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ **maksimum lokalne** równe $f(x_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie otoczenie U punktu x_0, że dla każdego $x \in U \cap D_f$ i $x \neq x_0$ jest spełniona nierówność $f(x) < f(x_0)$.



Maksimum lokalne wyznaczamy korzystając z różniczkowego kryterium istnienia ekstremum lokalnego funkcji.

Minimum lokalne

- Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ **minimum lokalne** równe $f(x_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje otoczenie U punktu x_0, że dla każdego $x \in U \cap D_f$ i $x \neq x_0$ spełniona jest nierówność $f(x) > f(x_0)$.



Minimum lokalne wyznaczamy korzystając z różniczkowego kryterium istnienia ekstremum lokalnego funkcji.

Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji.

- Jeżeli funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ ekstremum i ma w tym punkcie pochodną, to $f'(x_0)=0$.

I warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji.

- Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 \in D_f$ i ma pochodną w pewnym sąsiedztwie $S(x_0;\delta)$, przy czym:

$$f'(x)>0 \text{ dla } x\in(x_0-\delta;x_0) \text{ i } f'(x)<0 \text{ dla } x\in(x_0;x_0+\delta)$$

$$\left[f'(x)<0 \text{ dla } x\in(x_0-\delta;x_0) \text{ i } f'(x)>0 \text{ dla } x\in(x_0;x_0+\delta) \right],$$

to funkcja ma w punkcie x_0 maksimum [minimum] lokalne.

II warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji.

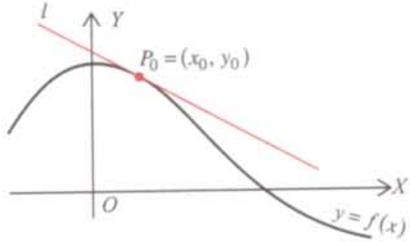
- Jeżeli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu $U \subset D_f$ punktu x_0 i jej druga pochodna jest ciągła w tym otoczeniu oraz $f'(x_0)=0$ i $f''(x_0)>0$ $[\, f''(x_0)<0 \,]$, to funkcja f ma w punkcie x_0 minimum [maksimum] lokalne równe $f(x_0)$.

Ekstremum globalne (absolutne) funkcji

- Funkcja $y=f(x)$ ma w punkcie $x_0 \in D_f$ minimum [maksimum] globalne, jeżeli dla każdego $x \in D_f$ spełniona jest nierówność: $f(x) \geq f(x_0)$ $[\, f(x) \leq f(x_0) \,]$.

Styczna i asymptota wykresu funkcji

Równanie stycznej do wykresu funkcji f



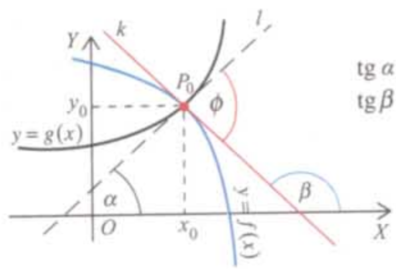
- *Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz $f(x_0)=y_0$, to prostą*

  $l:\ y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

  nazywamy styczną do wykresu funkcji f w punkcie $P_0=(x_0, y_0)$.

- $f'(x_0)$ jest współczynnikiem kierunkowym prostej l stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P_0=(x_0, y_0)$.

Tangens kąta przecięcia się wykresów funkcji

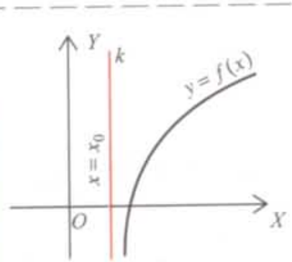


funkcje f i g różniczkowalne w punkcie x_0,
l – styczna do wykresu funkcji g w punkcie P_0,
k – styczna do wykresu funkcji f w punkcie P_0,
$\operatorname{tg}\alpha=g'(x_0)$ *– współczynnik kierunkowy stycznej l,*
$\operatorname{tg}\beta=f'(x_0)$ *– współczynnik kierunkowy stycznej k,*
ϕ *– kąt przecięcia krzywych w punkcie $P_0=(x_0, y_0)$, gdzie $0°\le\phi\le 90°$.*

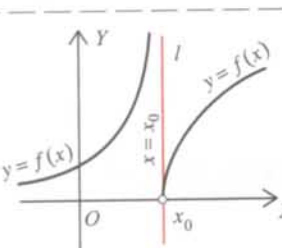
- $\operatorname{tg}\phi=\left|\dfrac{f'(x_0)-g'(x_0)}{1+f'(x_0)\cdot g'(x_0)}\right|$, *gdy* $1+f'(x_0)\cdot g'(x_0)\neq 0$
- *gdy* $1+f'(x_0)\cdot g'(x_0)=0$, *to wykresy funkcji f i g przecinają się pod kątem prostym.*

Asymptota pionowa

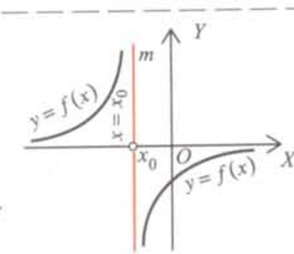
- Niech funkcja f jest określona w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu x_0. Prosta o równaniu $x=x_0$ jest asymptotą lewostronną wykresu funkcji f, jeśli $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ lub $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$.
- Niech funkcja f jest określona w pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu x_0. Prosta o równaniu $x=x_0$ jest asymptotą prawostronną wykresu funkcji f, jeśli $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ lub $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$.
- Niech funkcja f jest określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0. Prosta o równaniu $x=x_0$ jest asymptotą pionową (obustronną) wykresu funkcji f, jeśli jest jednocześnie asymptotą lewostronną i prawostronną tego wykresu.



k – asymptota pionowa prawostronna



l – asymptota pionowa lewostronna



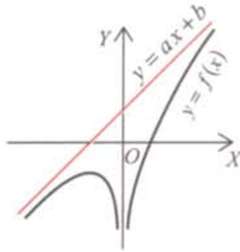
m – asymptota pionowa obustronna

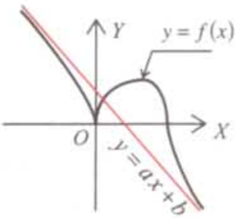
Asymptota i punkt przegięcia wykresu funkcji

Asymptota ukośna *(pochyła)*

- Prosta o równaniu $y = ax + b$ $(a, b \in R,\ a \neq 0)$ jest **asymptotą ukośną prawostronną (lewostronną)** wykresu funkcji $y = f(x)$, jeżeli

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \qquad \left(\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0\right).$$





Jeżeli:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad i \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$$

lub

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad i \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = b$$

to wykres funkcji f ma asymptotę ukośną $y = ax + b$.

- *Jeśli co najmniej jedna z granic*

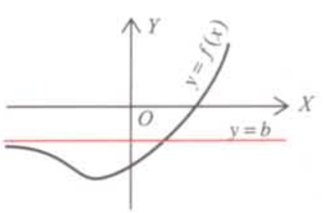
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \left(\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}\right),\quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] \left(\lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax]\right)$$

nie istnieje lub jest niewłaściwa, to wykres funkcji f nie ma asymptoty ukośnej prawostronnej (lewostronnej).

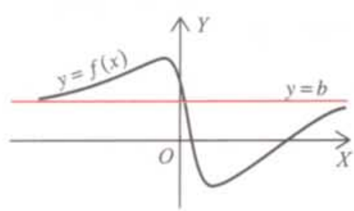
- Jeśli $a = 0$ i $b \in R$, to prosta $y = b$ jest asymptotą poziomą.

Asymptota pozioma

- Prosta $y = b$ jest asymptotą poziomą lewostronną (prawostronną) wykresu funkcji f, jeśli $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ $\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = b\right)$ gdzie $b \in R$.



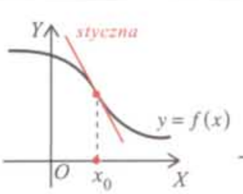
$y = b$ – asymptota pozioma lewostronna

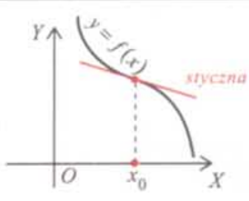


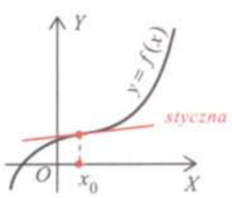
$y = b$ – asymptota pozioma

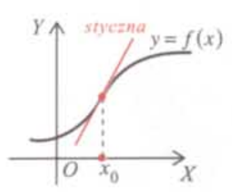
Punkt przegięcia

- Punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji $y = f(x)$, jeżeli w lewostronnym sąsiedztwie punktu x_0 funkcja jest wypukła i w prawostronnym sąsiedztwie punktu x_0 wklęsła, lub odwrotnie.









- Jeżeli funkcja $y = f(x)$ ma w przedziale $(a; b)$ pochodną $f'(x)$ i drugą pochodną $f''(x)$ ciągłą, to punkt $(x_0, f(x_0))$, gdzie $x_0 \in (a; b)$, jest punktem przegięcia wykresu funkcji $y = f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, a znaki $f''(x)$ w lewostronnym i prawostronnym sąsiedztwie punktu x_0 są różne.

Przebieg zmienności funkcji

Badanie przebiegu zmienności funkcji $y = f(x)$

Badanie funkcji ma na celu uzyskanie wyczerpującej informacji o tej funkcji. Badanie przebiegu zmienności funkcji wygodnie jest wykonywać według schematu:

1. Analiza funkcji:

a) wyznaczenie dziedziny funkcji,
b) obliczenie granic na krańcach przedziałów określoności,
c) wyznaczenie asymptot,
d) wyznaczenie punktów przecięcia wykresu funkcji z osią OX oraz osią OY,
e) zbadanie parzystości i nieparzystości funkcji.

2. Analiza pierwszej pochodnej funkcji:

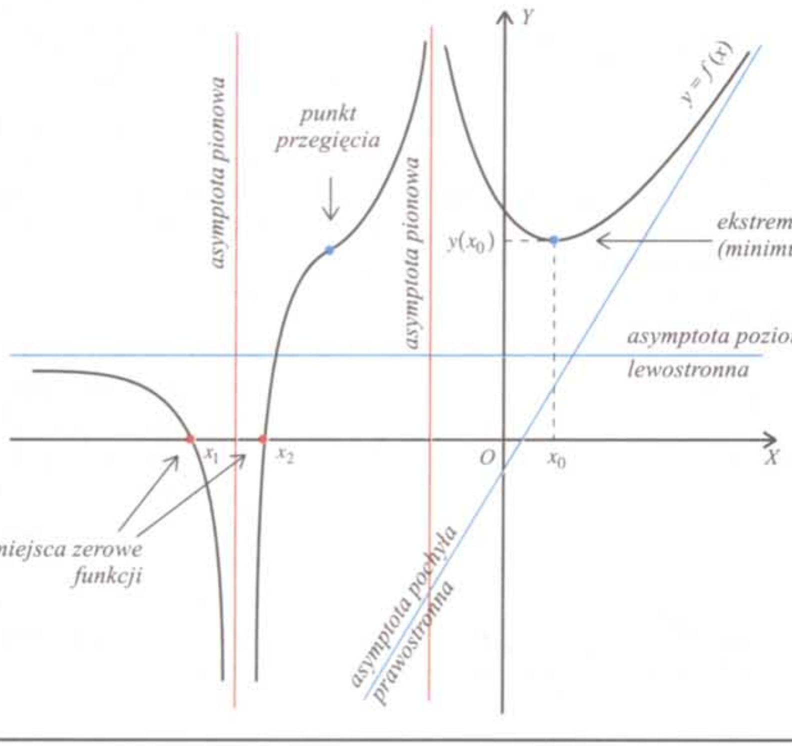
a) wyznaczenie zbioru, w którym funkcja f jest różniczkowalna,
b) wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej,
c) wyznaczenie zbiorów, w których $f'(x)>0$ i w których $f'(x)<0$ oraz określenie monotoniczności funkcji,
d) wyznaczenie ekstremów lokalnych funkcji.

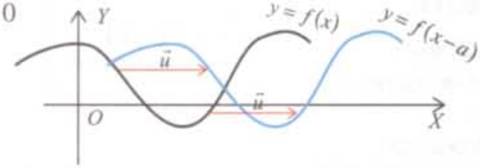
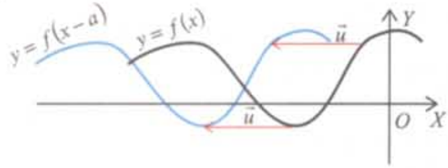
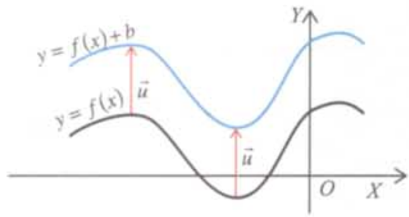
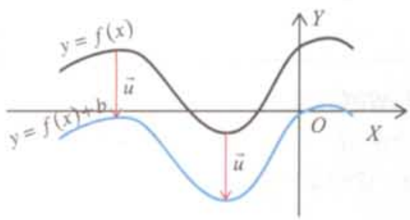
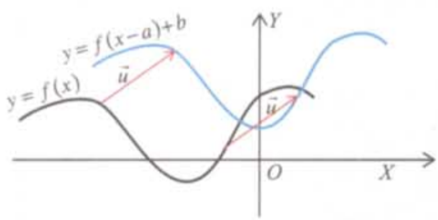
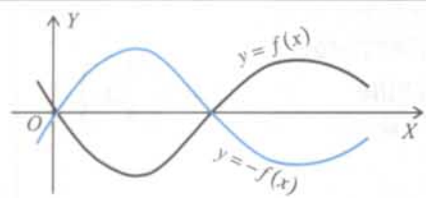
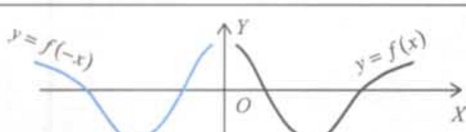
3. Analiza drugiej pochodnej:

a) wyznaczenie zbioru, w którym f' jest różniczkowalna,
b) wyznaczenie miejsc zerowych drugiej pochodnej,
c) określenie przedziałów wklęsłości i wypukłości funkcji,
d) wyznaczenie punktów przegięcia,
e) wyznaczenie ekstremów funkcji (gdy nie wyznaczono ich w p.2).

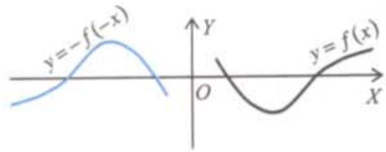
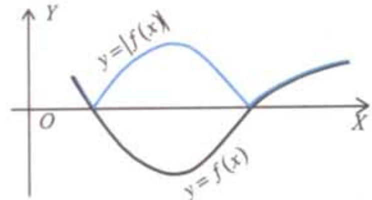
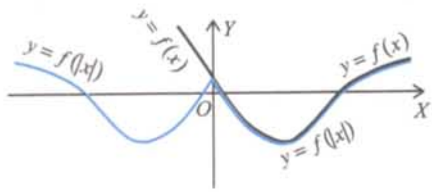
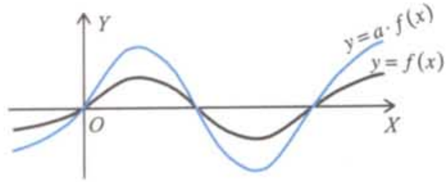
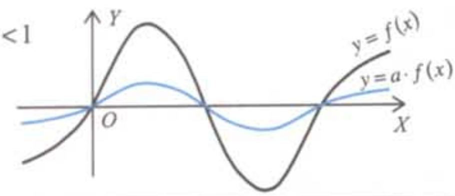
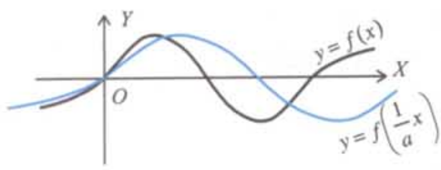
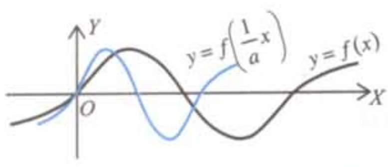
4. Sporządzenie tabeli przebiegu zmienności funkcji (zebranie wyników z części 1, 2, 3).

5. Sporządzenie wykresu funkcji.



Nazwa i opis przekształcenia	Wzór funkcji po przekształceniu	Ilustracja graficzna
Translacja o wektor $\vec{u}=[a,0]$	$y=f(x-a)$	$a>0$  $a<0$ 
Translacja o wektor $\vec{u}=[0,b]$	$y=f(x)+b$	$b>0$  $b<0$ 
Translacja o wektor $\vec{u}=[a,b]$	$y=f(x-a)+b$	
Symetria osiowa względem osi *OX*	$y=-f(x)$	
Symetria osiowa względem osi *OY*	$y=f(-x)$	

Przekształcanie wykresu funkcji $y = f(x)$

Nazwa i opis przekształcenia	Wzór funkcji po przekształceniu	Ilustracja graficzna
Symetria środkowa względem początku układu współrzędnych	$y = -f(-x)$	
	$y = \lvert f(x) \rvert$	
	$y = f(\lvert x \rvert)$	
Powinowactwo prostokątne o osi *OX* i skali *a* $(a \neq 0)$	$y = a \cdot f(x)$	$a > 1$ 
		$0 < a < 1$ 
Powinowactwo prostokątne o osi *OY* i skali *a* $(a \neq 0)$	$y = f\left(\frac{1}{a}x\right)$	$0 < a < 1$ 
		$a > 1$ 

Funkcja pierwotna	Funkcją pierwotną funkcji rzeczywistej f, określonej na zbiorze $D_f \subset R$, nazywamy dowolną funkcję F taką, że jej pochodną jest dana funkcja f. Gdy zbiór D_f jest przedziałem, to każda funkcja pierwotna funkcji f ma postać $F(x)+C$, gdzie $C \in R$. *Uwaga: Gdy zbiór D_f jest sumą przedziałów rozłącznych otwartych, wtedy stałe $C \in R$ można dobierać dowolnie na każdym przedziale z osobna.*
Całka nieoznaczona	Całką nieoznaczoną funkcji f nazywamy rodzinę wszystkich funkcji pierwotnych $F(x)+C$, co zapisujemy: $$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$ f – *funkcja podcałkowa,* C – *stała całkowania,* x – *zmienna całkowania,* $f(x)dx$ – *wyrażenie podcałkowe,* $\int$ – *symbol całkowania* Funkcję f, która w przedziale X ma funkcję pierwotną F nazywamy całkowalną w tym przedziale. $(F(x)+C)' = [\int f(x)dx]' = f(x)$

Podstawowe prawa całkowania

Całka z iloczynu funkcji przez stałą	$\int a\cdot f(x)dx = a\cdot\int f(x)dx$, *gdzie* $a \in R$
Całka z sumy (różnicy) funkcji	$\int[f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
Całkowanie przez części	$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx$
Całkowanie przez podstawienie	$\int f[g(x)]\cdot g'(x)dx = \int f(t)dt$, *gdzie* $t = g(x)$ i $dt = g'(x)\,dx$

Całki funkcji elementarnych

$\int dx = x + C$	$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$	$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\int a\,dx = ax + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$, *gdy* $\cos x \neq 0$
$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ *dla* $n \neq -1$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$, *dla* $a \neq 0$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C$, *gdy* $\sin x \neq 0$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C$, *dla* $a \neq 0$
$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$, *dla* $a \neq 0$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + C$

$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C$, *dla* $n \neq -1$.	$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$, *dla* $a > 0$ i $\lvert x\rvert \neq a$

Całka oznaczona

- Liczbę daną wzorem $\int\limits_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$, gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f ciągłej na przedziale $\langle a;b\rangle$, nazywamy **całką oznaczoną** funkcji f w przedziale $\langle a;b\rangle$.

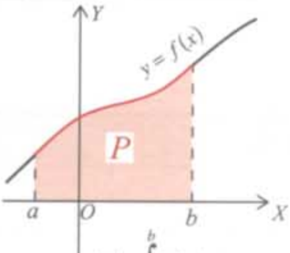
  a – dolna granica całkowania
  b – górna granica całkowania

Podstawowe własności całki oznaczonej

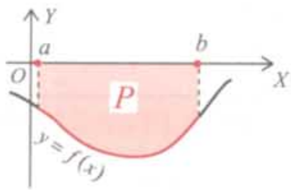
- $\int\limits_a^a f(x)\,dx=0$
- $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$, gdzie $a\le c\le b$
- $\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b g(x)dx$, gdy $\bigwedge\limits_{x\in\langle a;b\rangle} f(x)\le g(x)$.

Pole figury

$|P|$ – pole figury P, $|P_1|$ – pole figury P_1, $|P_2|$ – pole figury P_2, $|P_3|$ – pole figury P_3

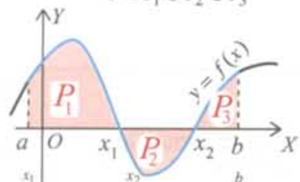


$$|P|=\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

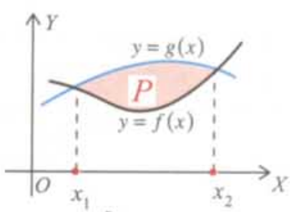


$$|P|=-\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

$P=P_1\cup P_2\cup P_3$

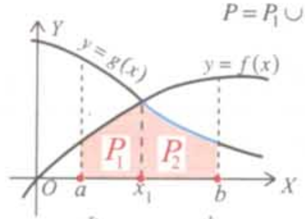


$$|P|=\int\limits_a^{x_1} f(x)\,dx-\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx+\int\limits_{x_2}^{b} f(x)\,dx$$



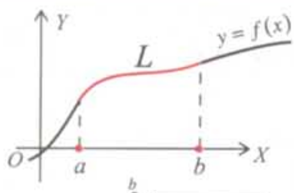
$$|P|=\int\limits_{x_1}^{x_2}[g(x)-f(x)]\,dx$$

$P=P_1\cup P_2$



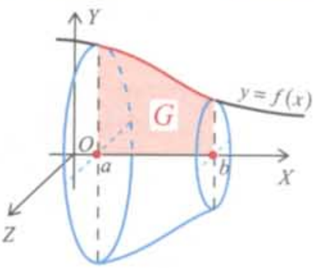
$$|P|=\int\limits_a^{x_1} f(x)\,dx+\int\limits_{x_1}^{b} g(x)\,dx$$

Długość łuku krzywej L



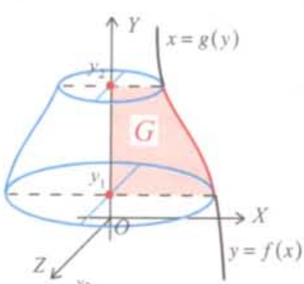
$$|L|=\int\limits_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Objętość i pole powierzchni bryły obrotowej



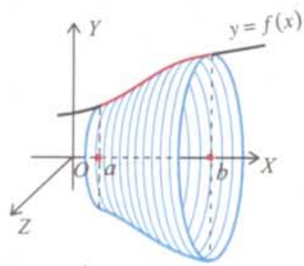
$$V=\pi\int\limits_a^b[f(x)]^2\,dx$$

V – objętość bryły powstałej z obrotu figury G wokół OX.



$$V=\pi\int\limits_{y_1}^{y_2}[g(y)]^2\,dy$$

V – objętość bryły powstałej z obrotu figury G wokół OY.



$$P_b=2\pi\int\limits_a^b|f(x)|\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

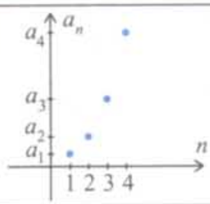
P_b – pole powierzchni powstałej z obrotu krzywej $y=f(x)$, $x\in\langle a;b\rangle$ wokół OX.

- **Ciągiem nieskończonym** nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych dodatnich i oznaczamy (a_n) lub $(a_1, a_2, \ldots)$.
- **Ciągiem skończonym** n-elementowym nazywamy funkcję określoną na zbiorze $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, i oznaczamy (a_n) lub $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
- **Ciągiem liczbowym** nazywamy ciąg, którego wartości są liczbami rzeczywistymi.
- Dla ciągu $f: N^+ \to R$ wartość $f(n) = a_n$ nazywamy n-tym wyrazem ciągu.

Monotoniczność ciągu

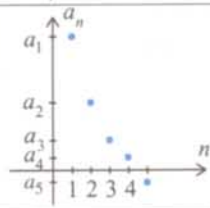
Ciąg (a_n) jest rosnący $\Leftrightarrow$

$$\bigwedge_{n \in N^+} a_{n+1} - a_n > 0.$$



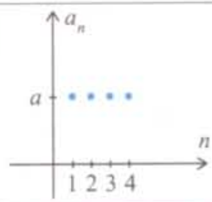
Ciąg (a_n) jest malejący $\Leftrightarrow$

$$\bigwedge_{n \in N^+} a_{n+1} - a_n < 0.$$



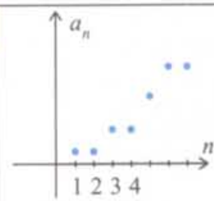
Ciąg (a_n) jest stały $\Leftrightarrow$

$$\bigwedge_{n \in N^+} a_{n+1} - a_n = 0.$$



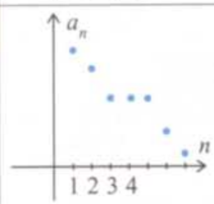
Ciąg (a_n) jest niemalejący $\Leftrightarrow$

$$\bigwedge_{n \in N^+} a_{n+1} - a_n \geq 0.$$



Ciąg (a_n) jest nierosnący $\Leftrightarrow$

$$\bigwedge_{n \in N^+} a_{n+1} - a_n \leq 0.$$



Badając znak różnicy: $\boldsymbol{a_{n+1} - a_n}$ *określamy **monotoniczność ciągu**.*

Ciąg arytmetyczny *(postęp arytmetyczny)*

- Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **arytmetycznym** wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy, i którego każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego stałej liczby r, zwanej różnicą ciągu.
- Ciąg (a_n) jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigvee_{r \in R} \bigwedge_{n \in N^+} a_{n+1} = a_n + r$.
- Skończony ciąg liczbowy $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nazywamy ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy, i którego każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego stałej liczby r, zwanej różnicą ciągu.

Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego	$a_n = a_1 + (n-1)r$
Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego	$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$
Wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego	$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \dfrac{[2a_1 + (n-1)r] \cdot n}{2}$

Własności ciągu arytmetycznego

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

dla $0 < k < n$ i $n \geq 2$

Monotoniczność	ciąg rosnący	$r > 0$
	ciąg malejący	$r < 0$
	ciąg stały	$r = 0$

Ciąg geometryczny

Ciąg geometryczny *(postęp geometryczny)*

- Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **geometrycznym** wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy, i którego każdy wyraz począwszy od drugiego powstaje z pomnożenia wyrazu poprzedniego przez stałą liczbę q zwaną ilorazem ciągu.

  Ciąg (a_n) jest geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigvee_{q\in R} \bigwedge_{n\in N^+} a_{n+1} = a_n \cdot q$.

- Skończony ciąg $(a_1, a_2, ..., a_n)$ nazywamy **geometrycznym** wtedy i tylko wtedy, gdy jest co najmniej trzywyrazowy, i którego każdy wyraz począwszy od drugiego powstaje z pomnożenia wyrazu poprzedniego przez stałą liczbę q zwaną ilorazem ciągu.

Wzór na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, *dla* $n \geq 2$
Suma *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego	$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$
Wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego	$S_n = \begin{cases} n \cdot a_1 & \text{gdy } q = 1 \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & \text{gdy } q \neq 1 \end{cases}$

Własności ciągu geometrycznego		
$\lvert a_n \rvert = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}} = \sqrt{a_{n+k} \cdot a_{n-k}}$, dla $0 < k < n$ i $n \geq 2$		
Monotoniczność	ciąg rosnący	$q > 1$ i $a_1 > 0$ lub $q \in (0;1)$ i $a_1 < 0$
	ciąg malejący	$q > 1$ i $a_1 < 0$ lub $q \in (0;1)$ i $a_1 > 0$
	ciąg stały	$q = 1$ lub $a_1 = 0$
Zbieżność	$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} a_1, & \text{gdy } q = 1 \vee a_1 = 0 \\ 0, & \text{gdy } \lvert q \rvert < 1 \end{cases}$	

- Ciąg geometryczny nazywamy naprzemiennym, gdy $q < 0$.

Szereg geometryczny

- Ciąg nieskończony (S_n) o wyrazach:

  $S_1 = a_1$

  $S_2 = a_1 + a_1 q$

  $S_3 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2$

  ....

  $S_n = a_1 + a_1 q + .. + a_1 q^{n-1}$

  ....

  nazywamy ciągiem sum częściowych ciągu geometrycznego (a_n) lub szeregiem geometrycznym, co zapisujemy:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$$

- Ciąg sum częściowych (S_n) ciągu geometrycznego jest zbieżny i ma granicę S (szereg geometryczny ma sumę S), wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$ lub $a_1 = 0$ i wówczas:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}, \text{ gdy } |q| < 1 \text{ lub } S = 0, \text{ gdy } a_1 = 0$$

- Wyrażenie „**prawie wszystkie wyrazy ciągu**" oznacza „wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby wyrazów".

Granica właściwa ciągu	• Liczba g jest **granicą ciągu** nieskończonego (a_n), jeżeli do każdego otoczenia liczby g należą prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n), co zapisujemy $a_n \to g$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{\varepsilon>0} \bigvee\limits_{m\in N^+} \bigwedge\limits_{n>m} \lvert a_n - g\rvert < \varepsilon$ • Ciąg (a_n), który ma granicę właściwą nazywamy **zbieżnym**. • Ciągi, które nie są zbieżne nazywamy **rozbieżnymi**.
Granica niewłaściwa ciągu	• Ciąg (a_n) nazywamy **rozbieżnym do** $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby M prawie wszystkie wyrazy ciągu są większe od M, co zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{M\in R} \bigvee\limits_{m\in N^+} \bigwedge\limits_{n>m} a_n > M$ • Ciąg (a_n) nazywamy **rozbieżnym do** $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby M prawie wszystkie wyrazy ciągu są mniejsze od M, co zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{M\in R} \bigvee\limits_{m\in N^+} \bigwedge\limits_{n>m} a_n < M$ • $\lim\limits_{n\to\infty} \lvert a_n\rvert = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ • $(\bigwedge\limits_{n\in N^+} a_n > 0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$
Twierdzenia o ciągach zbieżnych	• **Ciąg stały**, czyli ciąg, którego wszystkie wyrazy są równe pewnej liczbie a, **jest zbieżny** i liczba a jest jego granicą ($\lim\limits_{n\to\infty} a = a$). • Każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy. • Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to: • $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$, • $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$, • $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, gdy $b \neq 0$ i $b_n \neq 0$. • Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ i prawie wszystkie wyrazy ciągów (a_n) i (b_n) spełniają warunek $a_n \le b_n$, to $a \le b$. **Twierdzenie o trzech ciągach.** • Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$ i jeśli (c_n) jest ciągiem, którego prawie wszystkie wyrazy spełniają nierówność $a_n \le c_n \le b_n$, to $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$.
Twierdzenia o zbieżności ciągów liczbowych	**Twierdzenie o ciągu monotonicznym.** • Każdy ciąg niemalejący i ograniczony z góry jest zbieżny. Każdy ciąg nierosnący i ograniczony z dołu jest zbieżny. **Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.** • Z każdego ciągu liczbowego ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny. **Warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu.** • Ciąg (a_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigwedge\limits_{\varepsilon>0} \bigvee\limits_{n_0\in N^+} \bigwedge\limits_{n>n_0} \bigwedge\limits_{m>n_0} \lvert a_n - a_m\rvert < \varepsilon$.

Granice niektórych ciągów

$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{, gdy } a\in(0;1) \\ 1 & \text{, gdy } a=1 \\ +\infty & \text{, gdy } a>1 \end{cases}$	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$	Jeśli $a>0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
Jeśli $a>1$ i $k>1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty$.	$\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ a\in R}}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$	Jeśli $a>0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Równanie i nierówność z jedną niewiadomą

Równanie z jedną niewiadomą

- Niech będą dane dwie funkcje f i g jednej zmiennej x o dziedzinach D_f i D_g. Równaniem z jedną niewiadomą x nazywamy formę zdaniową postaci $f(x)=g(x)$, gdzie $x\in D_f \cap D_g$.
- **Pierwiastkiem** (rozwiązaniem) **równania** $f(x)=g(x)$ nazywamy każdą liczbę $x_0 \in D_f \cap D_g$, która spełnia to równanie, tzn. taką liczbę, która wstawiona w miejsce x zmienia równanie w zdanie prawdziwe.
- Zbiór wszystkich rozwiązań (pierwiastków) równania $f(x)=g(x)$ nazywamy zbiorem rozwiązań równania.

  Zbiór rozwiązań równania może być:
  - skończony (równanie oznaczone),
  - nieskończony (np. równanie tożsamościowe)
  - pusty (równanie sprzeczne).
- Równania nazywamy równoważnymi wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań i równe dziedziny.

Własności równań z jedną niewiadomą

Jeżeli dane są funkcje: $y=f(x)$, gdzie $x\in D_f$, $y=g(x)$, gdzie $x\in D_g$, $y=h(x)$, gdzie $x\in D_h$ oraz $D_f \cap D_g \subset D_h$, to równanie $f(x)=g(x)$ jest równoważne równaniu:

- $f(x)+h(x)=g(x)+h(x)$
- $f(x)-h(x)=g(x)-h(x)$
- $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$, gdy $\bigwedge\limits_{x\in D_h} h(x)\neq 0$
- $\dfrac{f(x)}{h(x)}=\dfrac{g(x)}{h(x)}$, gdy $\bigwedge\limits_{x\in D_h} h(x)\neq 0$,

dla $x\in D_f \cap D_g \cap D_h$.

Nierówność z jedną niewiadomą

- Nierównością z jedną niewiadomą x nazywamy każdą formę zdaniową postaci:

  $$f(x)<g(x),\quad f(x)\le g(x),\quad f(x)>g(x),\quad f(x)\ge g(x),$$

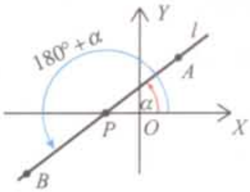
  gdzie $x\in D_f \cap D_g$, oraz f i g są funkcjami jednej zmiennej o dziedzinach D_f i D_g.
- Rozwiązaniem nierówności z jedną niewiadomą nazywamy każdą liczbę $x_0\in D_f \cap D_g$, która spełnia tę nierówność.
- Zbiór wszystkich rozwiązań nierówności nazywamy zbiorem rozwiązań nierówności.
- Nierówności nazywamy równoważnymi wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań i równe dziedziny.

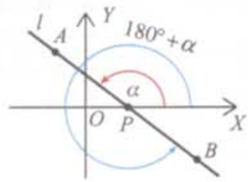
Własności nierówności z jedną niewiadomą

Jeżeli $y=f(x)$, $y=g(x)$, gdzie $x\in D_g$, oraz $x\in D_f \cap D_g$, to:

- $f(x)<g(x) \Leftrightarrow g(x)>f(x)$
- $f(x)\le g(x) \Leftrightarrow g(x)\ge f(x)$
- $f(x)\le g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x) \vee f(x)<g(x)$
- $f(x)\ge g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x) \vee f(x)>g(x)$

Kąt nachylenia prostej do osi *OX*





- Kątem nachylenia prostej l do osi OX nazywamy każdy z dwóch kątów skierowanych α lub $180° + \alpha$, których wspólnym ramieniem początkowym jest półprosta PX, a ramionami końcowymi są odpowiednio półproste PA i PB. (Tangensy tych kątów są równe).

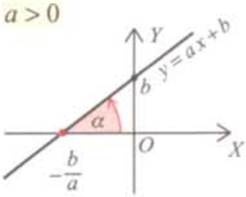
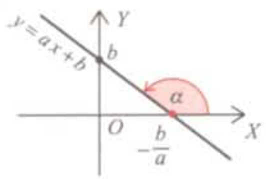
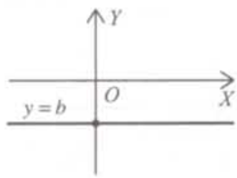
Funkcja liniowa

- Funkcję f określoną wzorem $\boldsymbol{f(x)=ax+b}$ dla $x\in R$, gdzie $a,b\in R$ nazywamy **funkcją liniową**.
- Wykresem funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x)=ax+b$ dla $x\in R$ jest prosta. Równanie prostej można zapisać w postaci $y=ax+b$, gdzie $x\in R$ i $a,b\in R$.

$\boldsymbol{a}$ – współczynnik kierunkowy prostej $y=ax+b$,

$\boldsymbol{a=\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}(180°+\alpha)}$, *gdzie α jest kątem nachylenia prostej $y=ax+b$ do osi OX,*

$\boldsymbol{x=\frac{-b}{a}}$ *– miejsce zerowe funkcji $y=ax+b$, gdy $a\neq 0$.*

$a>0$	$a<0$	$a=0$
		
$0°<\alpha<90°$	$90°<\alpha<180°$	$\alpha=0°$
Jeżeli $a>0$, to funkcja liniowa jest rosnąca.	Jeżeli $a<0$, to funkcja liniowa jest malejąca.	Jeżeli $a=0$, to funkcja liniowa jest stała.

Równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

- **Równaniem liniowym** z jedną niewiadomą x nazywamy równanie postaci

$\boldsymbol{ax+b=0}$, gdzie $a,b\in R$.

$\boldsymbol{a}$ – współczynnik przy niewiadomej x,
$\boldsymbol{b}$ – wyraz wolny,
$\boldsymbol{x}$ – niewiadoma.

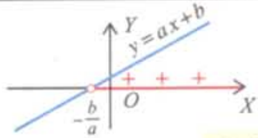
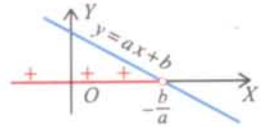
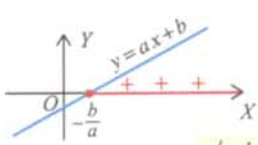
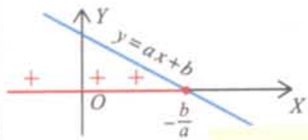
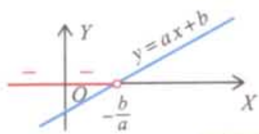
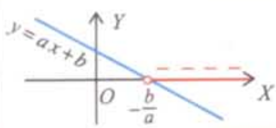
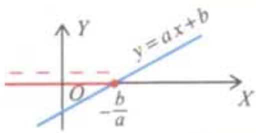
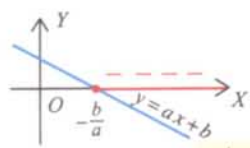
Założenia i warunki	Postać równania	Rozwiązanie (pierwiastek)	Zbiór rozwiązań	
$a\neq 0$	$\boldsymbol{ax+b=0}$	$x=-\frac{b}{a}$	$\left\{-\frac{b}{a}\right\}$	Równanie oznaczone
$a=0$ i $b=0$	$\boldsymbol{0\cdot x+0=0}$	*każda liczba rzeczywista*	R	Równanie tożsamościowe
$a=0$ i $b\neq 0$	$\boldsymbol{0\cdot x+b=0}$	*brak*	$\varnothing$	Równanie sprzeczne

Równanie liniowe może mieć jedno rozwiązanie, nieskończenie wiele rozwiązań albo nie mieć żadnego rozwiązania.

Nierówność pierwszego stopnia

- Nierównością liniową z jedną niewiadomą nazywamy każdą z nierówności postaci:

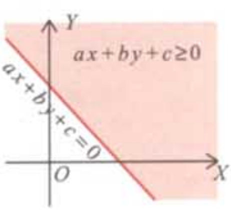
$$ax+b>0,\quad ax+b\geq 0,\quad ax+b<0,\quad ax+b\leq 0,\quad \text{gdzie } a,b\in R.$$

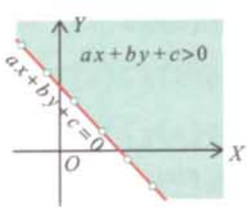
Nierówność	Zbiór rozwiązań, gdy $a>0$	Zbiór rozwiązań, gdy $a<0$	Zbiór rozwiązań, gdy $a=0$		
			$b=0$	$b>0$	$b<0$
$ax+b>0$	 $\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$	 $\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$	$\varnothing$ (nie ma rozwiązań)	R	$\varnothing$
$ax+b\geq 0$	 $\left\langle-\frac{b}{a};+\infty\right)$	 $\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right\rangle$	R	R	$\varnothing$
$ax+b<0$	 $\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$	 $\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$	$\varnothing$	$\varnothing$	R
$ax+b\leq 0$	 $\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right\rangle$	 $\left\langle-\frac{b}{a};+\infty\right)$	R	$\varnothing$	R

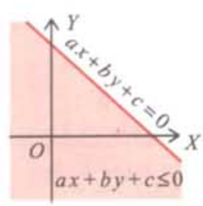
Uwaga: znaki „+" wskazują zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, znaki „–" wskazują zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.

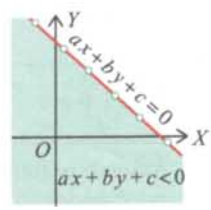
Nierówność pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

- Nierówności: $ax+by+c\geq 0$, $ax+by+c>0$, $ax+by+c\leq 0$, $ax+by+c<0$, gdzie $a^2+b^2\neq 0$ nazywamy nierównościami pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- Para (x_0, y_0) spełnia nierówność stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi x, y wtedy i tylko wtedy, gdy po podstawieniu do tej nierówności x_0 w miejsce x oraz y_0 w miejsce y, otrzymamy zdanie prawdziwe.
- Każdą parę liczb spełniających nierówność z dwiema niewiadomymi nazywamy rozwiązaniem tej nierówności.
- Obrazem graficznym (wykresem) zbioru rozwiązań nierówności stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi jest **półpłaszczyzna (z brzegiem lub bez)**, o krawędzi określonej równaniem $ax+by+c=0$.









Równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

- Równanie $\boldsymbol{ax+by+c=0}$, w którym współczynniki $a, b, c \in R$, gdzie $a^2+b^2 \neq 0$, nazywamy równaniem liniowym (pierwszego stopnia) z dwiema niewiadomymi.
- Para (x_0, y_0) jest rozwiązaniem równania stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi x, y wtedy i tylko wtedy, gdy po podstawieniu do tego równania x_0 w miejsce x oraz y_0 w miejsce y, otrzymamy zdanie prawdziwe.
- Obrazem graficznym (wykresem) zbioru rozwiązań równania stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi $ax+by+c=0$, gdzie $a^2+b^2 \neq 0$, jest prosta wyznaczona przez punkty $\left(\frac{-c}{a}, 0\right)$, $\left(0, \frac{-c}{b}\right)$, gdy $ab \neq 0$.

Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

- Układ równań $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$, gdzie $a_1^2+b_1^2 \neq 0$ i $a_2^2+b_2^2 \neq 0$, nazywamy układem dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi x i y.

Metody rozwiązywania układu równań pierwszego stopnia

Metoda podstawiania

Z jednego z równań wyznaczamy jedną niewiadomą w zależności od drugiej i otrzymaną zależność wstawiamy do drugiego równania.

Metoda przeciwnych współczynników

Mnożymy równania układu przez tak dobrane liczby, by następnie po dodaniu pomnożonych równań stronami otrzymać równanie z jedną niewiadomą.

Metoda graficzna (przybliżona)

Rysujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy każdego z równań (dwie proste) i odczytujemy współrzędne punktów wspólnych dla obu prostych.

Metoda wyznaczników

Polega na zastosowaniu wyznaczników.

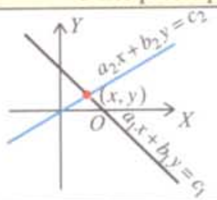
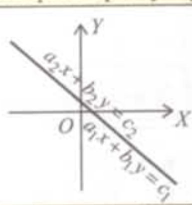
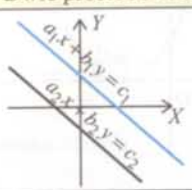
Liczbę $W=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$ nazywa się wyznacznikiem głównym układu.

Jeśli $W \neq 0$, to $x=\frac{W_x}{W}$, $y=\frac{W_y}{W}$ (wzory Cramera)

gdzie $W_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1$,

$W_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1$.

Liczba rozwiązań układu równań pierwszego stopnia

Warunki	Ilustracja graficzna	Liczba rozwiązań układu
$W \neq 0$	Dwie proste przecinające się  $\begin{cases} x=\frac{W_x}{W} \\ y=\frac{W_y}{W} \end{cases}$ $a_1^2+b_1^2>0$ $a_2^2+b_2^2>0$	**Jedno rozwiązanie** *(układ oznaczony – układ równań niezależnych)*
$W=0$ i $W_x=W_y=0$	Dwie proste pokrywające się  $a_1^2+b_1^2>0$ $a_2^2+b_2^2>0$	**Nieskończenie wiele rozwiązań** *(układ nieoznaczony – układ równań zależnych)*
$W=0$ i $W_x \neq 0$ lub $W=0$ i $W_y \neq 0$	Dwie proste równoległe  $a_1^2+b_1^2>0$ $a_2^2+b_2^2>0$	**Brak rozwiązania** *(układ sprzeczny)*

Funkcja kwadratowa

- Jeżeli $a \neq 0$, to funkcję f określoną wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$ na zbiorze liczb rzeczywistych nazywamy funkcją kwadratową lub trójmianem kwadratowym ($y=ax^2+bx+c$, $a \neq 0$).

  a, b, c – *współczynniki liczbowe funkcji kwadratowej (trójmianu kwadratowego),*

  $\Delta = b^2-4ac$ – *wyróżnik funkcji kwadratowej (trójmianu kwadratowego).*

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) zależy od wartości wyróżnika

$$\Delta = b^2-4ac.$$

	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
Liczba miejsc zerowych funkcji $y=ax^2+bx+c$	nie ma miejsc zerowych	jedno miejsce zerowe $x_0=\frac{-b}{2a}$	dwa miejsca zerowe $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

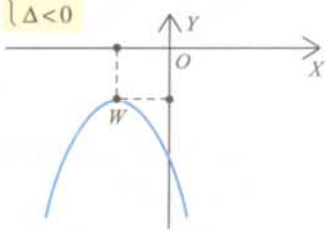
Postać trójmianu kwadratowego (funkcji kwadratowej)

Postać ogólna	$y=ax^2+bx+c$ *dla* $a \neq 0$		
Postać kanoniczna	$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$	$y=a(x-p)^2+q$, gdzie $p=\frac{-b}{2a}$ i $q=\frac{-\Delta}{4a}$	
Postać iloczynowa	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
	nie ma postaci iloczynowej	$y=a(x-x_0)^2$	$y=a(x-x_1)(x-x_2)$

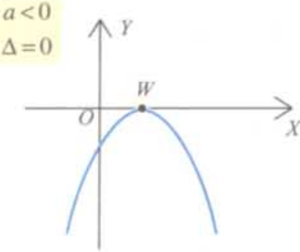
Wykres funkcji kwadratowej

- Wykresem funkcji kwadratowej $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) jest parabola o wierzchołku $W=\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$, która jest obrazem paraboli o równaniu $y=ax^2$, w przesunięciu o wektor $\vec{u}=\left[\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right]$.

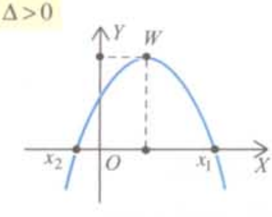
$\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$



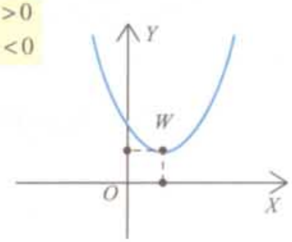
$\begin{cases} a<0 \\ \Delta=0 \end{cases}$



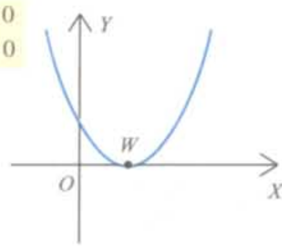
$\begin{cases} a<0 \\ \Delta>0 \end{cases}$



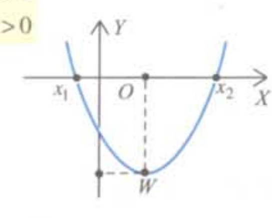
$\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$



$\begin{cases} a>0 \\ \Delta=0 \end{cases}$



$\begin{cases} a>0 \\ \Delta>0 \end{cases}$



- Równanie postaci $ax^2+bx+c=0$, gdzie $a\neq 0$ i $a,b,c\in R$ nazywamy równaniem kwadratowym.
- Jeśli $a\cdot b\cdot c\neq 0$, to równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$ nazywamy zupełnym.
- Jeśli $a\neq 0$ i ($b=0$ lub $c=0$), to równanie kwadratowe nazywamy niezupełnym.

Pierwiastki równania kwadratowego

Równanie kwadratowe zupełne $(a\cdot b\cdot c\neq 0)$

Postać równania	$ax^2+bx+c=0$, $(\Delta=b^2-4ac)$		
Założenia (warunki)	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
Pierwiastki	$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	*nie ma pierwiastków*
Zbiór rozwiązań	$\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$	$\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	$\varnothing$

Równanie kwadratowe niezupełne $(a\neq 0)$

Postać równania	$ax^2=0$ $(b=0$ i $c=0)$	$ax^2+c=0$ $(b=0$ i $c\neq 0)$		$ax^2+bx=0$ $(b\neq 0$ i $c=0)$
Pierwiastki	$x=0$	gdy $a\cdot c<0$ $x_1=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2=\sqrt{-\frac{c}{a}}$	gdy $a\cdot c>0$ *nie ma pierwiastków*	$x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$
Zbiór rozwiązań	$\{0\}$	$\left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$	$\varnothing$	$\left\{0,-\frac{b}{a}\right\}$

Wzory Viete'a

Suma i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego

- Między pierwiastkami x_1, x_2 równania kwadratowego

$$ax^2+bx+c=0,\quad \text{gdzie } a\neq 0 \text{ i } \Delta\geq 0$$

a jego współczynnikami liczbowymi zachodzą związki:

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a},\qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\ ,$$

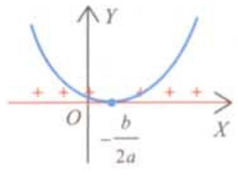
nazywane wzorami Viete'a.

Nierówności kwadratowe

Nierówność kwadratowa z jedną niewiadomą

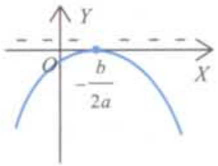
- Jeżeli $a \neq 0$, to każdą z nierówności postaci: $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c<0$ i $ax^2+bx+c\leq 0$ nazywamy nierównością kwadratową z jedną niewiadomą.

$a>0$ i $\Delta=0$



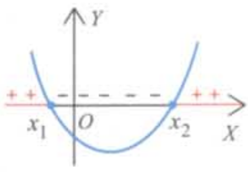
Nierówność	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
Zbiór rozwiązań	$R\setminus\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	R	$\varnothing$	$\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

$a<0$ i $\Delta=0$



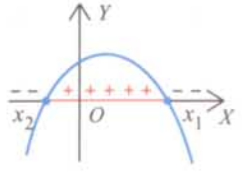
Nierówność	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
Zbiór rozwiązań	$\varnothing$	$\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	$R\setminus\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	R

$a>0$ i $\Delta>0$



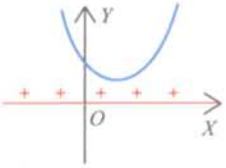
Nierówność	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
Zbiór rozwiązań	$(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	$(-\infty;x_1\rangle\cup\langle x_2;+\infty)$	$(x_1;x_2)$	$\langle x_1;x_2\rangle$

$a<0$ i $\Delta>0$



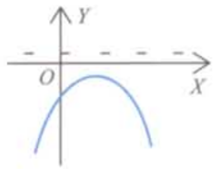
Nierówność	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
Zbiór rozwiązań	$(x_2;x_1)$	$\langle x_2;x_1\rangle$	$(-\infty;x_2)\cup(x_1;+\infty)$	$(-\infty;x_2\rangle\cup\langle x_1;+\infty)$

$a>0$ i $\Delta<0$



Nierówność	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
Zbiór rozwiązań	R	R	$\varnothing$	$\varnothing$

$a<0$ i $\Delta<0$



Nierówność	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
Zbiór rozwiązań	$\varnothing$	$\varnothing$	R	R

Uwaga: znaki „+" wskazują zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, znaki „–" wskazują zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.

- Wielomianem jednej zmiennej $x \in R$ (funkcją wielomianową) nazywamy funkcję określoną wzorem:
$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $n \in N$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$ i $a_n \neq 0$.
n – stopień wielomianu $(n \in N)$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – współczynniki wielomianu, a_0 – wyraz wolny wielomianu.

Wielomian zerowy	$\bigwedge_{x \in R} W(x)=0$ *albo* $W(x) \equiv 0$ *Wielomian zerowy nie ma określonego stopnia.*
Równość wielomianów	• $W(x)=Q(x) \Leftrightarrow \bigwedge_{m \in R} W(m)=Q(m)$ • Współczynniki i stopnie wielomianów równych są odpowiednio równe.
Podzielność wielomianów	• Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x) \not\equiv 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian $Q(x)$ taki, że $W(x)=P(x) \cdot Q(x)$. • Jeżeli $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami oraz $P(x) \not\equiv 0$, to istnieją takie dwa jednoznacznie wyznaczone wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$, że $W(x)=Q(x) \cdot P(x)+R(x)$, przy czym albo wielomian $R(x) \equiv 0$, albo stopień $R(x)$ jest mniejszy niż stopień wielomianu $P(x)$. *Wielomian $Q(x)$ nazywamy ilorazem, a $R(x)$ resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$.*

- Każdą liczbę r, dla której $W(r)=0$ nazywamy **pierwiastkiem** (miejscem zerowym) **wielomianu** $W(x)$.
- Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.
- Wielomian nieparzystego stopnia ma co najmniej jeden pierwiastek.

Twierdzenie Bézouta	• **Liczba r jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x-r$.** • Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-a$, gdzie $a \in R$, jest równa $W(a)$.
Twierdzenia o pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych	• Jeżeli liczba całkowita $r \neq 0$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ o współczynnikach całkowitych, to jest ona dzielnikiem wyrazu wolnego a_0. • Jeżeli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in C \setminus \{0\}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ o współczynnikach całkowitych, to licznik p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, a mianownik q jest dzielnikiem współczynnika a_n.
Twierdzenia o rozkładzie wielomianu	• Jeżeli liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są pierwiastkami wielomianu $W(x)$ stopnia n, to $W(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2) \cdot \ldots \cdot (x-x_n)$. • Każdy wielomian $W(x) \not\equiv 0$ jest iloczynem czynników stopnia co najwyżej drugiego.
Pierwiastek wielokrotny wielomianu	• Liczbę r nazywamy k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ stopnia n $(k, n \in N$ i $k \leq n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x-r)^k$ i nie jest podzielny przez $(x-r)^{k+1}$. • Liczba r jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, wtedy i tylko wtedy, gdy $W(r)=W'(r)= \ldots =W^{(k-1)}(r)=0$ i $W^{(k)}(r) \neq 0$, gdzie $W^{(k)}$ jest k-tą pochodną wielomianu $W(x)$.

Równania i nierówności algebraiczne

Równanie algebraiczne	• Równaniem algebraicznym stopnia n nazywamy równanie postaci $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, gdzie $a_n \neq 0$ i $x \in R$.
Pierwiastek algebraiczny	• Pierwiastkiem algebraicznym n-tego stopnia z liczby a nazywamy każde rozwiązanie rzeczywiste równania. $x^n = a$, gdzie $n \in N \setminus \{0,1\}$ i $a \in R$. • Jeśli n jest liczbą naturalną parzystą i $a \geq 0$, to równanie $x^n = a$ ma dwa rozwiązania: $x = \sqrt[n]{a}$ lub $x = -\sqrt[n]{a}$. • Jeśli n jest liczbą naturalną nieparzystą i $a < 0$, to równanie $x^n = a$ ma jedno rozwiązanie: $x = -\sqrt[n]{\lvert a \rvert}$.

Sposoby rozwiązywania niektórych równań wyższych stopni ($n > 2$)

	Postać równania	Metoda rozwiązania
Równanie dające się sprowadzić do równania kwadratowego	$ax^{2n} + bx^n + c = 0$ $a \neq 0$	Poprzez wprowadzenie zmiennej pomocniczej $x^n = t$ ($t \geq 0$, gdy n jest liczbą naturalną parzystą).
Równanie zwrotne czwartego stopnia	$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$	Poprzez wprowadzenie zmiennej pomocniczej $t = x + \frac{1}{x}$.
Równanie algebraiczne stopnia n	$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ $a_n \neq 0$	Jeśli wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ rozkłada się na czynniki $a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$, $(a_n \neq 0)$, to równanie $W(x) = 0$ jest równoważne alternatywie równań: $x - x_1 = 0 \vee x - x_2 = 0 \vee \ldots \vee x - x_n = 0$.

Nierówność algebraiczna	• Każdą z nierówności postaci: $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, gdzie f i g są wielomianami, nazywamy nierównością algebraiczną. *Stopniem nierówności algebraicznej jest stopień wielomianu $W(x) = f(x) - g(x)$.*

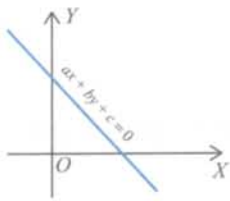
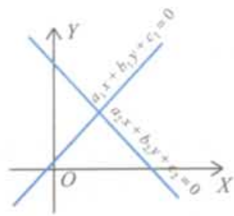
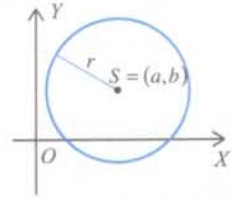
Rozwiązywanie nierówności algebraicznych postaci: $W(x) > 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) \leq 0$, gdy $W(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)$.

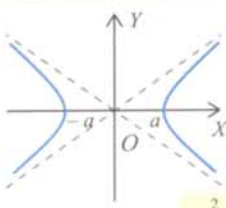
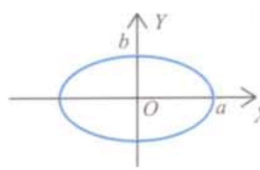
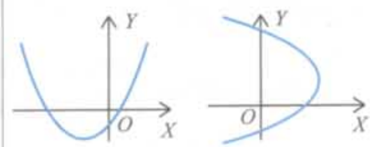
Metoda algebraiczna	Metoda siatki znaków	Metoda graficzna
Znajdujemy rozwiązanie wykorzystując własności iloczynu. Znak iloczynu zależy od znaków jego czynników.	– Porządkujemy miejsca zerowe $x_1, x_2, \ldots, x_k$ wielomianu $W(x)$. – Jeśli $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$, to tworzymy przedziały $(-\infty; x_1), (x_1; x_2), \ldots, (x_{k-1}; x_k), (x_k; \infty)$. – Określamy znaki czynników w poszczególnych przedziałach, a następnie ustalamy znak wielomianu $W(x)$ w tych przedziałach.	Szkicujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy każdego z czynników liniowych wielomianu, traktując je jako funkcje i określamy znak wielomianu w poszczególnych przedziałach.

Równania drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi

- Jeżeli $A^2+B^2+C^2 \neq 0$, to równanie postaci $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ nazywamy równaniem drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi x i y.
- Każda para liczb (x_0, y_0) spełniająca równanie drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi jest jego rozwiązaniem.

Obrazem graficznym zbioru rozwiązań równania drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi mogą być, np.:

proste pokrywające się	suma dwóch prostych	okrąg
		
$(ax+by+c)^2=0$	$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

hiperbola	elipsa	parabola
		
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$y=ax^2+bx+c$ $x=ay^2+by+c$

Uwaga: Każde z powyższych równań ma nieskończenie wiele rozwiązań.
Równanie $x^2+y^2=0$ ma jedno rozwiązanie: parę liczb $(0,0)$. Równanie $x^2+y^2+1=0$ nie ma rozwiązań.
Okrąg, elipsa, hiperbola, parabola, ..., to krzywe drugiego stopnia.

Układ równań z $n>2$ niewiadomymi

- Koniunkcję m równań z n niewiadomymi $x_1, x_2, \dots, x_n$ postaci:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)=0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)=0 \end{cases},$$

gdzie $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ są funkcjami n zmiennych, nazywamy układem m równań z n niewiadomymi.

- Dziedziną układu równań jest część wspólna dziedzin poszczególnych równań układu.
- Rozwiązaniem układu równań z n niewiadomymi $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy każdy ciąg liczbowy $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ taki, że po podstawieniu $x_1=x_{01}, x_2=x_{02}, \dots, x_n=x_{0n}$ spełnione są wszystkie równania układu.
- **Układ równań mający skończoną liczbę rozwiązań, nazywa się układem oznaczonym.**
- **Układ równań nie mający rozwiązania nazywa się sprzecznym.**
- Układy równań, które mają tą samą dziedzinę i ten sam zbiór rozwiązań, nazywamy równoważnymi.

Układy równań z dwiema niewiadomymi

- Jeżeli $W(x,y)$ i $P(x,y)$ są wielomianami odpowiednio stopni n-tego i k-tego $(n \geq k)$ dwóch zmiennych, to układ równań postaci $\begin{cases} W(x,y)=0 \\ P(x,y)=0 \end{cases}$,

nazywamy układem równań n-tego stopnia dwóch niewiadomych x i y.

Analogicznie określa się układ równań n-tego stopnia dla większej liczby niewiadomych.

Najczęściej stosowane sposoby rozwiązywania układów równań wielomianowych:

- *metoda podstawiania,*
- *metoda wprowadzenia zmiennych pomocniczych,*
- *metoda graficzna.*

Układ równań z dwiema niewiadomymi, gdzie jedno z równań jest stopnia pierwszego a drugie drugiego

- Jeśli $f(x,y)=ax+by+c$
  i $g(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$

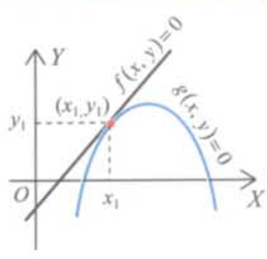
gdzie a, b, c oraz A, B, C, D, E, F oznaczają współczynniki i $a^2+b^2>0$ oraz $A^2+B^2+C^2>0$,

to układ postaci $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$,

nazywamy układem równań stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi (jedno z równań jest stopnia pierwszego, a drugie drugiego).

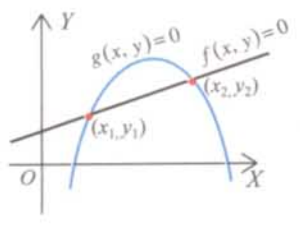
Gdy wykresem równania $f(x,y)=0$ jest prosta, a wykresem równania $g(x,y)=0$ jest krzywa drugiego stopnia, np. parabola (okrąg, elipsa, hiperbola, suma dwóch prostych, ...), to obrazem graficznym zbioru rozwiązań układu $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ może być, np:

jeden punkt



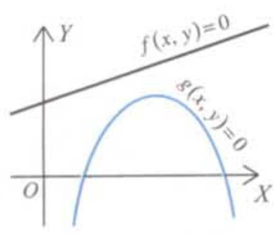
Para liczb (x_1,y_1) *jest rozwiązaniem układu* $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$.

dwa punkty



Pary liczb (x_1,y_1) *i* (x_2,y_2) *są rozwiązaniem układu* $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$.

zbiór pusty



Układ $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ *nie ma rozwiązania.*

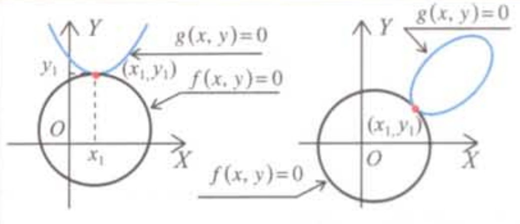
Jeśli wykresem równania $g(x,y)=0$ jest suma dwóch prostych l_1 i l_2 oraz wykresem równania $f(x,y)=0$ jest prosta l_1, to obrazem graficznym zbioru rozwiązań układu jest prosta l_1.

Układy dwóch równań drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi

- Jeśli $f(x, y)=A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1$
  i $g(x, y)=A_2x^2+B_2xy+C_2y^2+D_2x+E_2y+F_2$,
  gdzie $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 \in R$, przy czym $A_1^2+B_1^2+C_1^2>0$ i $A_2^2+B_2^2+C_2^2>0$,
  to układ postaci $\begin{cases} f(x, y)=0 \\ g(x, y)=0 \end{cases}$,
  nazywamy układem dwóch równań stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi.
- Układ **dwóch** równań stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi może mieć:
  – jedno rozwiązanie,
  – dwa rozwiązania,
  – trzy rozwiązania,
  – cztery rozwiązania,
  – nieskończenie wiele rozwiązań,
  lub może nie mieć rozwiązania.

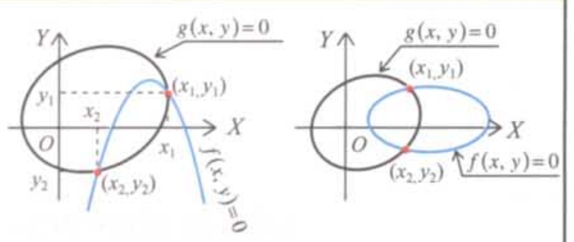
Jeżeli wykresami równań $f(x, y)=0$ i $g(x, y)=0$ są krzywe drugiego stopnia, to obrazem graficznym zbioru rozwiązań układu $\begin{cases} f(x, y)=0 \\ g(x, y)=0 \end{cases}$ może być, np:

jeden punkt



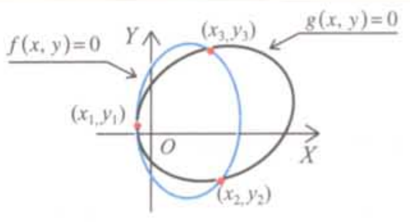
Układ ma jedno rozwiązanie (x_1, y_1).

dwa punkty



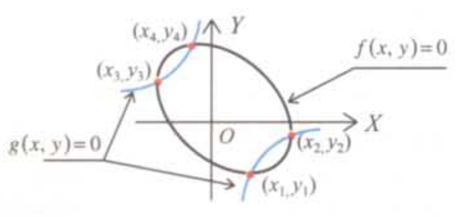
Układ ma dwa rozwiązania (x_1, y_1), (x_2, y_2).

trzy punkty



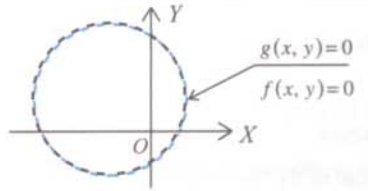
Układ ma trzy rozwiązania (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

cztery punkty



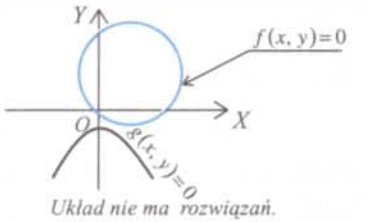
Układ ma cztery rozwiązania (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4).

nieskończenie wiele punktów



Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

zbiór pusty



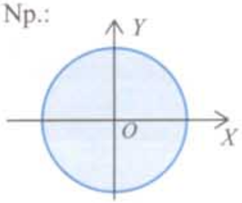
Układ nie ma rozwiązań.

Nierówności z dwiema niewiadomymi stopnia $n \geq 2$

Nierówność stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi

- Nierówności $f(x, y)<0$, $f(x, y)\leq 0$, $f(x, y)>0$, $f(x, y)\geq 0$, gdzie $f(x, y)$ jest wielomianem drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi x i y nazywamy nierównościami drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi.
- Rozwiązaniem nierówności drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi jest para liczb, dla których dana nierówność staje się zdaniem prawdziwym.
- Obrazem graficznym zbioru rozwiązań nierówności drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi jest zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają daną nierówność.

Np.:

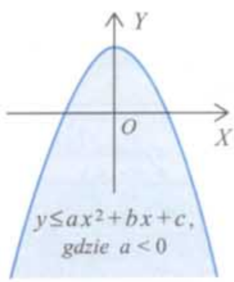


$x^2+y^2\leq r^2$,
gdzie $r>0$

Rozwiązaniami nierówności $x^2+y^2\leq r^2$, *gdzie* $r>0$, *są pary liczb* (x, y), *które są współrzędnymi punktów należących do koła* $k(O, r)$.

Obrazem graficznym zbioru rozwiązań nierówności $x^2+y^2\leq r^2$, *gdzie* $r>0$, *jest koło* $k(O, r)$.

Obrazem graficznym zbioru rozwiązań nierówności $x^2+y^2<r^2$, *gdzie* $r>0$, *jest wnętrze koła* $k(O, r)$.



$y\leq ax^2+bx+c$,
gdzie $a<0$

Obrazem graficznym zbioru rozwiązań nierówności $y\leq ax^2+bx+c$, *dla* $a<0$, *jest zbiór punktów płaszczyzny leżących na paraboli* $y=ax^2+bx+c$ *i „poniżej" niej.*

Układ *m* nierówności z *n* niewiadomymi

- Koniunkcję pewnej liczby warunków postaci:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)<0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)<0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)<0 \end{cases},$$

gdzie $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ są funkcjami n zmiennych, nazywamy układem nierówności (niektóre lub wszystkie nierówności mogą być słabe).
- Układ nierówności jest określony na części wspólnej dziedzin wszystkich funkcji występujących w nierównościach układu.
- Rozwiązaniem układu nierówności nazywa się każdy taki ciąg $(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$, który spełnia wszystkie nierówności występujące w tym układzie.
- Zbiorem rozwiązań układu nierówności jest część wspólna zbiorów rozwiązań poszczególnych nierówności występujących w układzie.

Nie ma ogólnej metody rozwiązywania układów nierówności.
W zastosowaniach praktycznych przydatna bywa metoda graficzna, w której posługujemy się wykresami nierówności.

- Funkcję $f(x)=\dfrac{W(x)}{G(x)}$, gdzie $W(x)$ i $G(x)$ są wielomianami i $G(x)\not\equiv 0$, nazywamy funkcją wymierną. Jej dziedziną jest zbiór $\{x\colon G(x)\neq 0\}$.

Ułamki proste

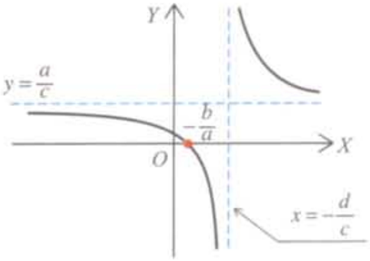
- Funkcje wymierne postaci: $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ lub $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$, gdzie $A,a,B,C,p,q\in R$; $p^2-4q<0$; $k,m\in N$ nazywamy ułamkami prostymi.
- Każdą funkcję wymierną można przedstawić jako sumę wielomianu i pewnej liczby ułamków prostych.

Funkcja homograficzna

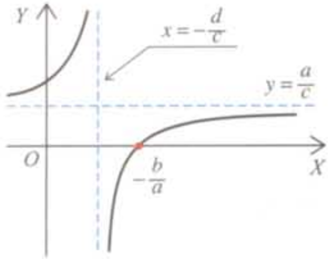
- Funkcję wymierną postaci: $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, gdy $ad\neq bc$ i $c\neq 0$ nazywamy funkcją homograficzną.

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola.

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, gdy $c\neq 0$ i $ad-bc<0$



$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, gdy $c\neq 0$ i $ad-bc>0$



$y=\dfrac{a}{c}$ – *równanie asymptoty poziomej funkcji homograficznej,*

$x=\dfrac{-d}{c}$ – *równanie asymptoty pionowej funkcji homograficznej,*

$D_f=R\setminus\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$, $ZW_f=R\setminus\left\{\dfrac{a}{c}\right\}$.

Równanie wymierne

- Równaniem wymiernym nazywamy równanie postaci $\dfrac{W(x)}{G(x)}=0$, gdzie $W(x)$ i $G(x)$ oznaczają wielomiany oraz $G(x)\not\equiv 0$.
- $\dfrac{W(x)}{G(x)}=0 \Leftrightarrow W(x)=0 \wedge G(x)\neq 0$

Nierówność wymierna

- Nierówności postaci:

$$\frac{W(x)}{G(x)}>0,\quad \frac{W(x)}{G(x)}<0,\quad \frac{W(x)}{G(x)}\geq 0,\quad \frac{W(x)}{G(x)}\leq 0,$$

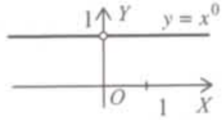
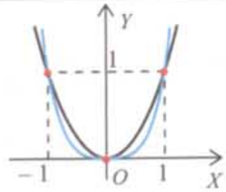
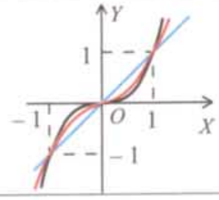
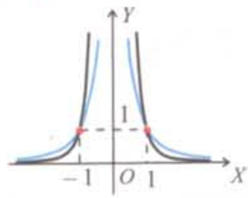
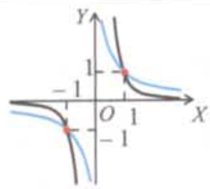
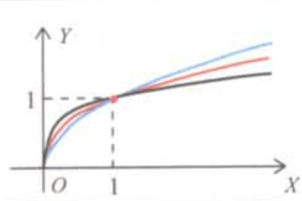
gdzie $G(x)\not\equiv 0$ oraz $W(x)$ i $G(x)$ są wielomianami, nazywamy nierównością wymierną.

Rozwiązanie nierówności wymiernej sprowadzamy do rozwiązania nierówności algebraicznej, korzystając z następujących twierdzeń:

- $\dfrac{W(x)}{G(x)}>0 \Leftrightarrow (W(x)\cdot G(x)>0 \wedge G(x)\neq 0)$
- $\dfrac{W(x)}{G(x)}<0 \Leftrightarrow (W(x)\cdot G(x)<0 \wedge G(x)\neq 0)$
- $\dfrac{W(x)}{G(x)}\geq 0 \Leftrightarrow (W(x)\cdot G(x)\geq 0 \wedge G(x)\neq 0) \Leftrightarrow (W(x)\cdot G(x)>0 \vee W(x)=0)$
- $\dfrac{W(x)}{G(x)}\leq 0 \Leftrightarrow (W(x)\cdot G(x)\leq 0 \wedge G(x)\neq 0) \Leftrightarrow (W(x)\cdot G(x)<0 \vee W(x)=0)$

Funkcja potęgowa

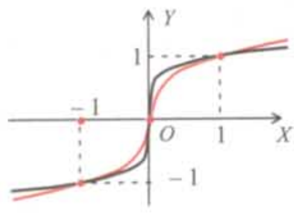
- Funkcję $f(x)=x^n$ nazywamy funkcją potęgową.
- Dziedzina funkcji potęgowej zależy od wykładnika n.
- Dla $n \in N$ funkcja potęgowa jest wielomianem.

Wykładnik	Wzór funkcji potęgowej	Dziedzina	Wykres
$n=0$	$y=x^0$	$R\setminus\{0\}$	
$n=2k$, gdzie $k\in N^+$	$y=x^2$ $y=x^4$ $\vdots$	R	 — $y=x^2$ — $y=x^4$
$n=2k-1$, gdzie $k\in N^+$	$y=x$ $y=x^3$ $y=x^5$ $\vdots$	R	 — $y=x$ — $y=x^3$ — $y=x^5$
$n=2k$, gdzie $k\in C^-$	$y=x^{-2}$ $y=x^{-4}$ $\vdots$	$R\setminus\{0\}$	 — $y=x^{-4}$ — $y=x^{-2}$
$n=2k-1$, gdzie $k\in C^-\cup\{0\}$	$y=x^{-1}$ $y=x^{-3}$ $\vdots$	$R\setminus\{0\}$	 — $y=x^{-3}$ — $y=x^{-1}$
$n=\frac{1}{k}$, gdzie $k\in\{2,3,\ldots\}$	$y=x^{\frac{1}{2}}$ $y=x^{\frac{1}{3}}$ $y=x^{\frac{1}{4}}$ ...	$R^+\cup\{0\}$	 — $y=x^{\frac{1}{2}}$ — $y=x^{\frac{1}{3}}$ — $y=x^{\frac{1}{4}}$

- *Funkcje:* $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ *i* $g(x)=\sqrt[n]{x}$, *gdy* $n=2k$ *dla* $k\in N^+$ *są równe, bo mają równe dziedziny.*

$$D_f=D_g=R^+\cup\{0\}.$$

- *Funkcje:* $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ *i* $g(x)=\sqrt[n]{x}$, *gdy* $n=2k-1$ *dla* $k\in N^+\setminus\{1\}$ *są różne, bo mają różne dziedziny* $D_f=R^+\cup\{0\}$, $D_g=R$.

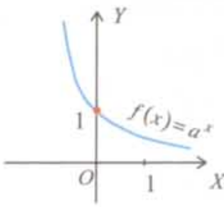


— $y=\sqrt[3]{x}$

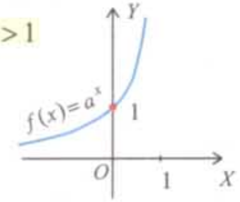
— $y=\sqrt[5]{x}$

- Funkcję $f(x)=a^x$, gdzie $a\in R^+\setminus\{1\}$ nazywamy funkcją wykładniczą.
- Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa.

$0<a<1$



$a>1$



- Wykres funkcji wykładniczej nazywamy **krzywą wykładniczą**.
- Jeżeli $a>1$, to funkcja wykładnicza $y=a^x$ jest rosnąca, a jeżeli $a\in(0;1)$, to funkcja wykładnicza jest malejąca.
- Funkcja wykładnicza $f(x)=a^x$ $(a\in R^+\setminus\{1\})$ jest funkcją ciągłą spełniającą warunek $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ dla $x_1,x_2\in R$ $\left(a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}\right)$.

- $\bigwedge_{x\in R} a^x>0$

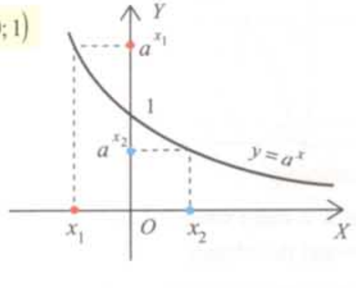
Potęga w równaniach i nierównościach

- Jedynym rozwiązaniem równania $a^x=b$, gdzie $a\in R^+\setminus\{1\}, b\in R^+$, jest liczba $x=\log_a b$.

Równanie	Założenia	Wskazówka
$a^{f(x)}=b$	*f – dowolna funkcja różna od stałej* $a\in R^+\setminus\{1\}$ i $b\in R^+$	$f(x)=\log_a b$
$f\left(a^x\right)=0$	*f – dowolna funkcja różna od stałej* $a\in R^+\setminus\{1\}$	*Zastosować podstawienie* $a^x=t$, *znaleźć dodatnie pierwiastki równania* $f(t)=0$.
$a^{f(x)}=b^{g(x)}$	*f, g – dowolne funkcje różne od stałej* $a,b\in R^+\setminus\{1\}$	*Sprowadzić do postaci* $a^{f(x)}=a^{g(x)\log_a b}$ *korzystając z tego, że* $b=a^{\log_a b}$.
$a^x=f(x)$	*f – dowolna funkcja różna od stałej* $a\in R^+\setminus\{1\}$	*Rozwiązać metodą graficzną.*

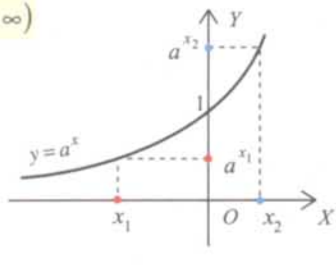
- Jeżeli $a\in R^+\setminus\{1\}$, to: $a^b=a^c \Leftrightarrow b=c,$ $a^{f(x)}=a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

$a\in(0;1)$



- Jeżeli $a\in(0;1)$, to:
  - $a^{x_1}>a^{x_2} \Leftrightarrow x_1<x_2$
  - $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$

$a\in(1;+\infty)$



- Jeżeli $a\in(1;+\infty)$, to:
  - $a^{x_2}>a^{x_1} \Leftrightarrow x_2>x_1$
  - $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$

Logarytm, funkcja logarytmiczna

$\log_a b = c$ — *a – podstawa logarytmu, b – liczba logarytmowana, c – logarytm z liczby b przy podstawie a (wynik logarytmowania)*

Logarytm, definicje i własności

- Jeżeli $a \in R^+ \setminus \{1\}$ i $b \in R^+$, to $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

Logarytmem dodatniej liczby b przy podstawie a, gdzie $a \in R^+ \setminus \{1\}$, jest wykładnik potęgi c, do której należy podnieść a, aby otrzymać b.

Jeżeli $a \in R^+ \setminus \{1\}$ i $b \in R^+$, to:
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $a^{\log_a b} = b$

- Logarytm dziesiętny, to logarytm o podstawie 10. $\log b = c \Leftrightarrow 10^c = b$
- Logarytm naturalny, to logarytm o podstawie e. $\ln b = c \Leftrightarrow e^c = b$

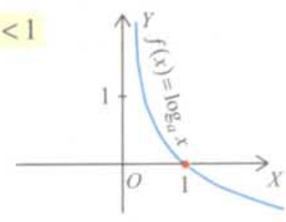
Prawa działań na logarytmach

- (logarytm iloczynu) $\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$, *gdy* $b_1, b_2 \in R^+$ i $a \in R^+ \setminus \{1\}$
- (logarytm ilorazu) $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$, *gdy* $b_1, b_2 \in R^+$ i $a \in R^+ \setminus \{1\}$
- (logarytm potęgi) $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$, *gdy* $b \in R^+, a \in R^+ \setminus \{1\}$ i $m \in R$
- (logarytm pierwiastka) $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$, *gdy* $b \in R^+, a \in R^+ \setminus \{1\}$ i $n \in N \setminus \{0, 1\}$
- (zmiana podstawy logarytmu)
  - $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, *gdy* $b \in R^+$ i $a, c \in R^+ \setminus \{1\}$
  - $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, *gdy* $a, b \in R^+ \setminus \{1\}$

Funkcja logarytmiczna

- Funkcję $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$, gdzie $a \in R^+ \setminus \{1\}$, nazywamy funkcją logarytmiczną. Dziedziną funkcji logarytmicznej jest zbiór R^+.

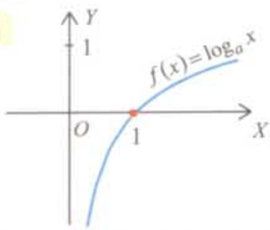
$0 < a < 1$



$D_f = (0; +\infty)$

$\text{Ɑ}_f = R$

$a > 1$



$D_f = (0; +\infty)$

$\text{Ɑ}_f = R$

- Wykres funkcji logarytmicznej nazywamy **krzywą logarytmiczną**.
- Jeżeli $a > 1$, to funkcja logarytmiczna $y = \log_a x$ jest rosnąca w całej swojej dziedzinie, a jeżeli $a \in (0; 1)$, to funkcja logarytmiczna jest malejąca w całej swojej dziedzinie.
- Jeśli $a \in R^+ \setminus \{1\}$, to funkcja logarytmiczna $f(x) = \log_a x$ $(x > 0)$ jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej $g(x) = a^x$.
- Funkcja logarytmiczna, to funkcja ciągła, która dla $x_1, x_2 \in R^+$ spełnia warunek $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ $\quad (\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2)$.
- Funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa.

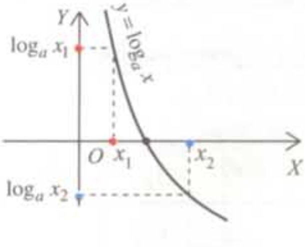
Logarytm w równaniach i nierównościach

- Jedynym rozwiązaniem równania $\log_a x = b$, gdzie $a \in R^+ \setminus \{1\}$ i $b \in R$ jest liczba $x = a^b$.

Równanie	Założenia	Wskazówka
$\log_x a = b$	$x \in R^+ \setminus \{1\}$, $a \in R^+$ $b \in R \setminus \{0\}$	*Skorzystać z definicji logarytmu.* $x^b = a$, *skąd* $x = a^{\frac{1}{b}}$.
$\log_x 1 = 0$	$x \in R^+ \setminus \{1\}$	$x \in R^+ \setminus \{1\}$
$\log_{f(x)} a = b$	*f – dowolna funkcja różna od stałej* $x \in R$, $f(x) > 0$, $f(x) \neq 1$ $a \in R^+ \setminus \{1\}$, $b \in R \setminus \{0\}$	$f(x) = a^{\frac{1}{b}}$
$\log_{f(x)} 1 = 0$	*f – dowolna funkcja różna od stałej* $x \in R$, $f(x) > 0$, $f(x) \neq 1$	$x \in D_f$
$\log_a f(x) = b$	*f – dowolna funkcja różna od stałej* $x \in R$, $f(x) > 0$ $a \in R^+ \setminus \{1\}$, $b \in R$	$f(x) = a^b$
$b\log_a f(x) + c\log_a g(x) = d$	*f, g – dowolne funkcje różne od stałej* $x \in R$, $f(x) > 0$ i $g(x) > 0$ $a \in R^+ \setminus \{1\}$, $b, c, d \in R$	*Skorzystać z własności logarytmu i doprowadzić równanie do postaci* $[f(x)]^b \cdot [g(x)]^c = a^d$.
$f(\log_a x) = 0$	*f – dowolna funkcja różna od stałej* $x \in R^+$, $a \in R^+ \setminus \{1\}$	*Zastosować podstawienie* $\log_a x = t$ *i rozwiązać równanie* $f(t) = 0$.
$\log_a x = f(x)$	*f – dowolna funkcja różna od stałej* $x \in R^+$, $a \in R^+ \setminus \{1\}$	*Zastosować metodę graficzną.*

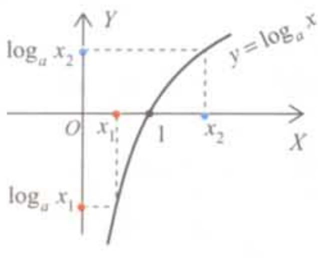
- Jeżeli $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ i $a \in R^+ \setminus \{1\}$, to $\mathbf{\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)}$.

$a \in (0;1)$



- Jeżeli $x_1, x_2 \in R^+$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ i $a \in (0;1)$, to:
  - $\mathbf{\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2}$
  - $\mathbf{\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)}$

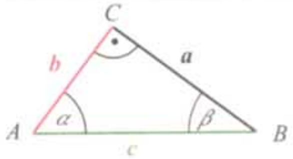
$a \in (1; +\infty)$



- Jeżeli $x_1, x_2 \in R^+$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ i $a \in (1; +\infty)$, to:
  - $\mathbf{\log_a x_2 > \log_a x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1}$
  - $\mathbf{\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)}$

Funkcje trygonometryczne

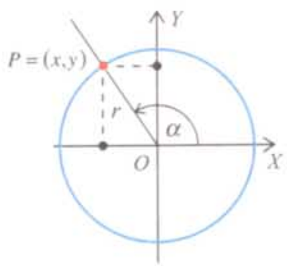
Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym



α, β – kąty ostre w trójkącie prostokątnym,
c – przeciwprostokątna,
a – przyprostokątna przeciwległa kątowi α (przyprostokątna przylegla do kąta β),
b – przyprostokątna przeciwległa kątowi β (przyprostokątna przyległa do kąta α).

• Sinusem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej temu kątowi do długości przeciwprostokątnej.	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$
• Cosinusem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do tego kąta do długości przeciwprostokątnej.	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$
• Tangensem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej temu kątowi do długości drugiej przyprostokątnej.	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$
• Cotangensem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do tego kąta do długości drugiej przyprostokątnej.	$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta



$r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$

α – miara kąta skierowanego XOP,
$\overrightarrow{OX}$ początkowe ramię kąta skierowanego α,
$\overrightarrow{OP}$ końcowe ramię kąta skierowanego α,
$|OP|$ – promień wodzący punktu $P \neq O$, gdzie $P = (x, y)$ jest dowolnym punktem leżącym na końcowym ramieniu kąta skierowanego α.

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \ (x \neq 0), \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} \ (y \neq 0)$$

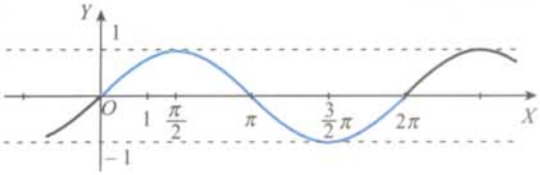
Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej

• Sinusem liczby $x \in R$ nazywamy sinus kąta, dla którego x jest miarą łukową.
Podobnie określamy funkcje: $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

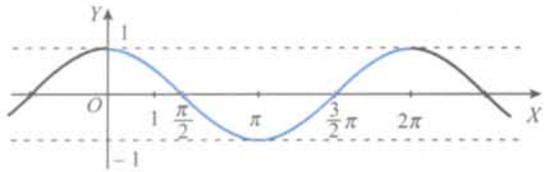
Funkcja zmiennej rzeczywistej	D_f	ZW_f	Okres podstawowy
$f(x) = \sin x$	R	$\langle -1; 1 \rangle$	2π
$f(x) = \cos x$	R	$\langle -1; 1 \rangle$	2π
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$R \setminus \left\{ x : \bigvee_{k \in C} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$	R	π
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$R \setminus \left\{ x : \bigvee_{k \in C} x = k \cdot \pi \right\}$	R	π

Wykresy funkcji trygonometrycznych

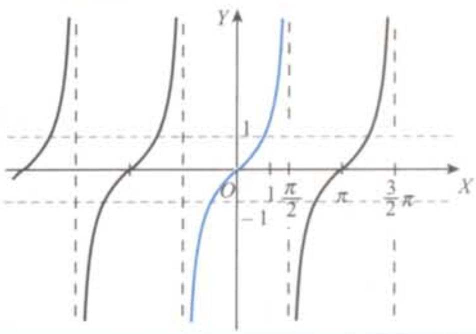
$y=\sin x\ ,\quad x\in R$



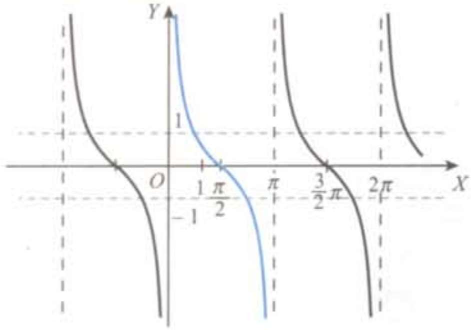
$y=\cos x\ ,\quad x\in R$



$y=\mathrm{tg}\,x\ ,\quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, gdzie $k\in C$



$y=\mathrm{ctg}\,x\ ,\quad x\neq k\pi$, gdzie $k\in C$



Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ *(jedynka trygonometryczna)*

$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$, *gdy* $\cos\alpha\neq0$ i $\sin\alpha\neq0$

$\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$, *gdy* $\sin\alpha\neq0$ i $\cos\alpha\neq0$

$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$, *gdy* $\sin\alpha\neq0$ i $\cos\alpha\neq0$

Funkcje podwojonego kąta

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$
$=1-2\sin^2\alpha=$
$=2\cos^2\alpha-1$

$\mathrm{tg}2\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$, *gdy* $\cos\alpha\neq0$ i $\cos2\alpha\neq0$

$\mathrm{ctg}2\alpha=\dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\alpha}$, *gdy* $\sin\alpha\neq0$ i $\sin2\alpha\neq0$

Funkcje potrojonego kąta

$\sin3\alpha=\sin\alpha\left(3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=\sin\alpha\left(3-4\sin^2\alpha\right)$

$\cos3\alpha=\cos\alpha\left(\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha\right)=\cos\alpha\left(4\cos^2\alpha-3\right)$

$\mathrm{tg}3\alpha=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha\left(3-\mathrm{tg}^2\alpha\right)}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}$, *gdy* $\cos\alpha\neq0$ i $\cos3\alpha\neq0$

$\mathrm{ctg}3\alpha=\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha\left(\mathrm{ctg}^2\alpha-3\right)}{3\mathrm{ctg}^2\alpha-1}$, *gdy* $\sin\alpha\neq0$ i $\sin3\alpha\neq0$

Funkcje połowy kąta

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\qquad$ $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

„+” lub „−” wybieramy zależnie od tego, do której „ćwiartki” należy końcowe ramię kąta $\dfrac{\alpha}{2}$.

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, *gdy* $\sin\alpha\neq0$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, *gdy* $\sin\alpha\neq0$

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów	$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$, *gdy* $\cos\alpha\cdot\cos\beta\neq0$ *i* $\cos(\alpha+\beta)\neq0$ $\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}$, *gdy* $\sin\alpha\cdot\sin\beta\neq0$ *i* $\sin(\alpha+\beta)\neq0$ $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$, *gdy* $\cos\alpha\cdot\cos\beta\neq0$ *i* $\cos(\alpha-\beta)\neq0$ $\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\alpha}$, *gdy* $\sin\alpha\cdot\sin\beta\neq0$ *i* $\sin(\alpha-\beta)\neq0$
Suma i różnica funkcji trygonometrycznych	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$, *gdy* $\cos\alpha\cdot\cos\beta\neq0$ $\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$, *gdy* $\sin\alpha\cdot\sin\beta\neq0$ $\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$, *gdy* $\cos\alpha\cdot\cos\beta\neq0$ $\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$, *gdy* $\sin\alpha\cdot\sin\beta\neq0$

Wzory różne

$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(45°+\alpha)=\sqrt{2}\cos(45°-\alpha)$

$\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(45°+\alpha)=\sqrt{2}\sin(45°-\alpha)$

$\cos^2\alpha-\cos^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)$.

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

Dla każdego kąta α, dla którego istnieją $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ i $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$, prawdziwe są związki:

$$\sin\alpha=\frac{2\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \mathrm{tg}\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}$$

Parzystość i nieparzystość funkcji trygonometrycznych	$\sin(-x)=-\sin x$	$\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$
	$\cos(-x)=\cos x$	$\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg}x$
Okresowość funkcji trygonometrycznych	Gdy $k\in C$, to: $\sin(x+2k\pi)=\sin x$	$\operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg}x$
	$\cos(x+2k\pi)=\cos x$	$\operatorname{ctg}(x+k\pi)=\operatorname{ctg}x$

Tabela zmienności funkcji trygonometrycznych

kąt / f. tryg.	0 $0°$	$\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ I ćw.	$\frac{\pi}{2}$ $90°$	$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ II ćw.	π $180°$	$\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$ III ćw.	$\frac{3}{2}\pi$ $270°$	$\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$ IV ćw.	2π $360°$
$\sin\alpha$	0	↗	1	↘	0	↘	–1	↗	0
$\cos\alpha$	1	↘	0	↘	–1	↗	0	↗	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	↗ $+\infty$	*nie istn.*	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$	*nie istn.*	$-\infty$ ↗	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	*nie istn.*	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$	*nie istn.*	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$	*nie istn.*

Tabela znaków funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach

	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	–	+	–
$\operatorname{ctg}\alpha$	+	–	+	–

Tabela wartości funkcji trygonometrycznych dla niektórych miar kąta

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	2π
	$0°$	$15°$	$22\frac{1}{2}°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$225°$	$270°$	$360°$
$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	1
$\operatorname{tg}x$	0	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*nie istn.*	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	1	*nie istn.*	0
$\operatorname{ctg}x$	*nie istn.*	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	*nie istn.*	1	0	*nie istn.*

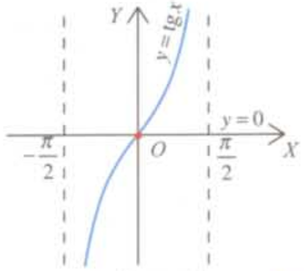
Wzory redukcyjne $\alpha\in(0;\frac{\pi}{2})$

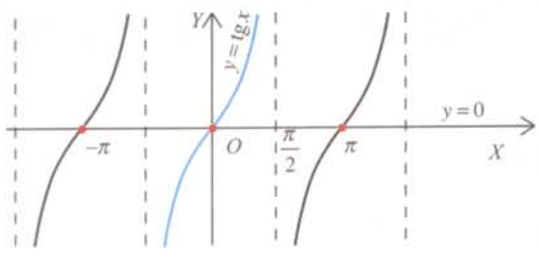
–	I ćwiartka	II ćwiartka		III ćwiartka		IV ćwiartka	
ϕ	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$
	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$	$360°-\alpha$
$\sin\phi$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\phi$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\phi$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\phi$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

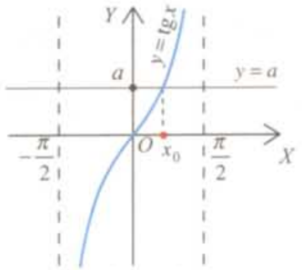
Uwaga: Powyższe wzory są prawdziwe dla wszystkich $\alpha\in R$

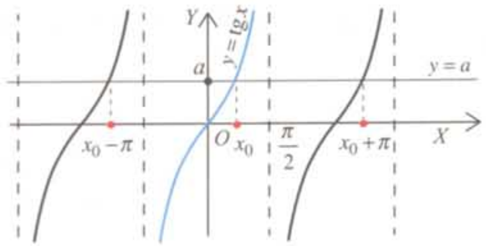
Równania trygonometryczne

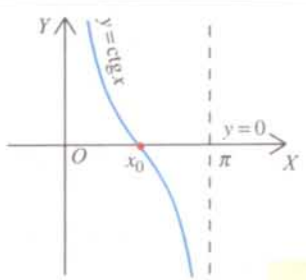
- Równaniem trygonometrycznym nazywamy równanie, w którym niewiadoma występuje wyłącznie pod znakiem funkcji trygonometrycznych.
- Rozwiązaniem ogólnym równania trygonometrycznego nazywamy zbiór wszystkich liczb spełniających dane równanie.

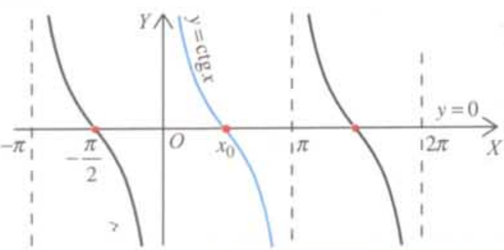
<table>
<tr><th colspan="3">Ilustracja graficzna rozwiązania równania</th></tr>
<tr><th>Równanie</th><th>Rozwiązanie podstawowe</th><th>Rozwiązanie ogólne $(x\in R)$</th></tr>
<tr><td>$\mathrm{tg}x=0$</td><td>

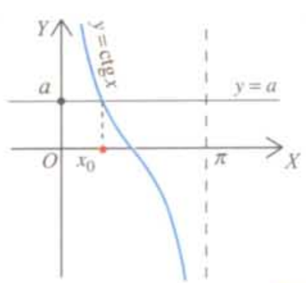
$x_0\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $x=0$</td><td>

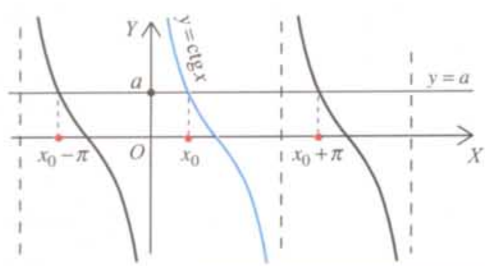
$x=k\cdot\pi$, gdzie $k\in C$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{tg}x=a$
$a\in R$</td><td>

$x_0\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $x=x_0$</td><td>

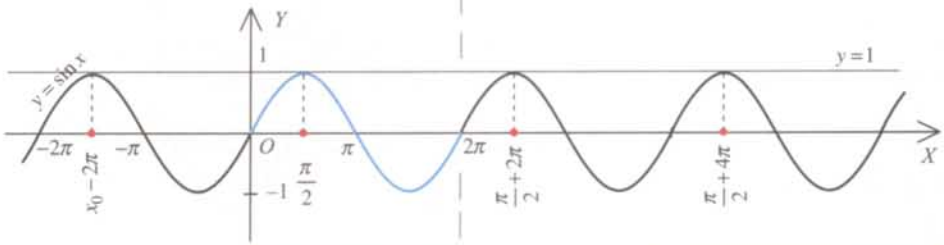
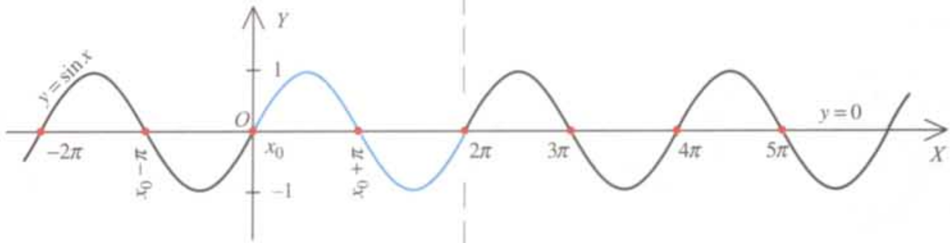
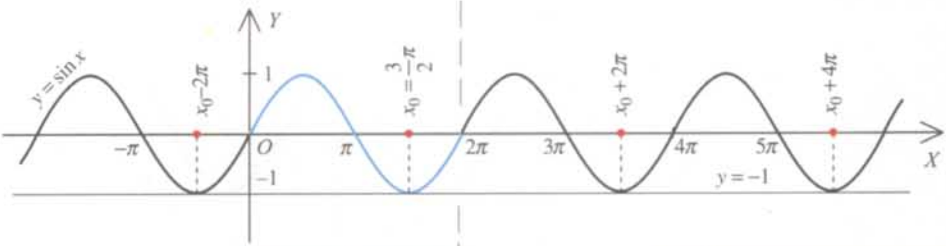
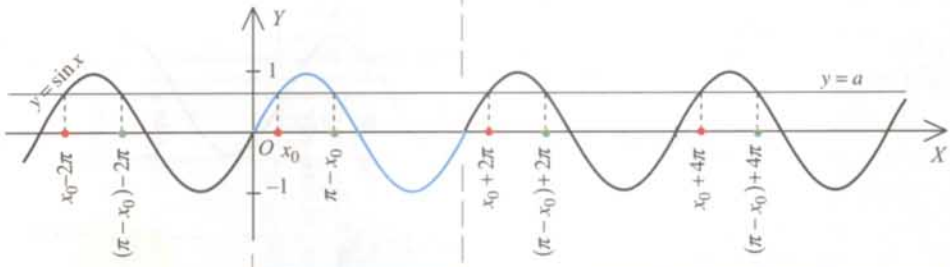
$x=x_0+k\pi$, gdzie $k\in C$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{ctg}x=0$</td><td>

$x_0\in(0;\pi)$ $x=\frac{\pi}{2}$</td><td>

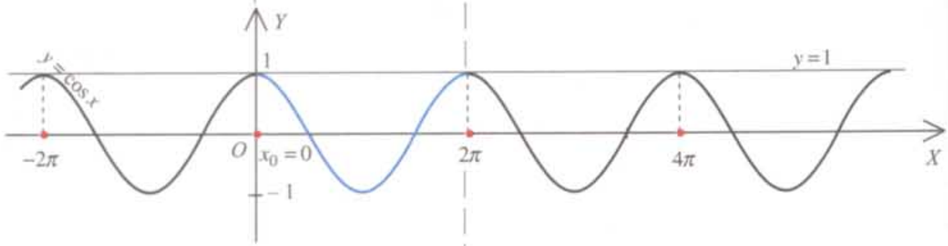
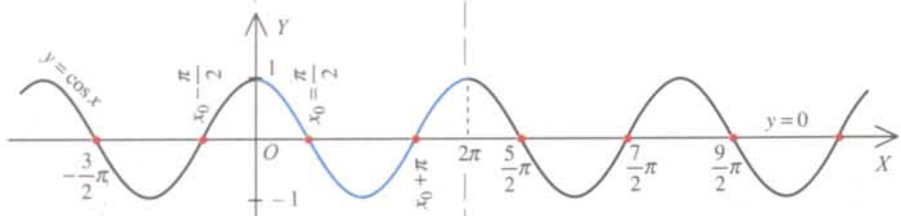
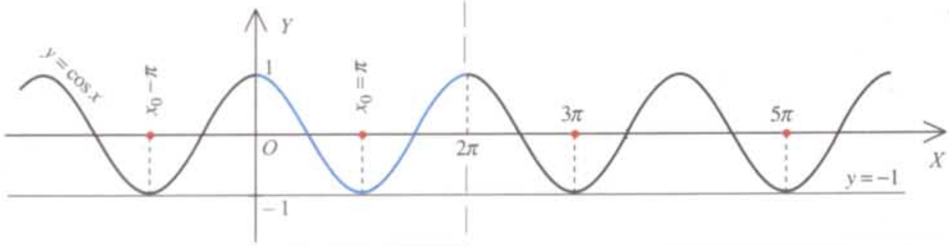
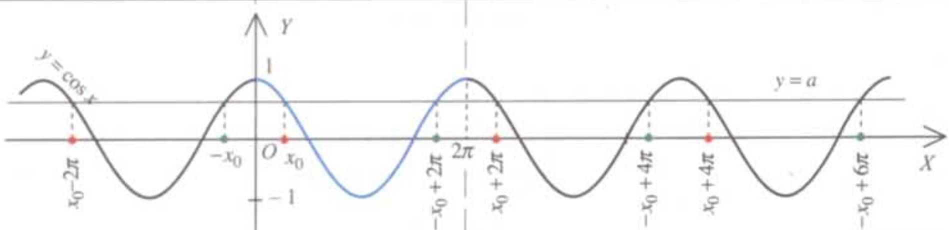
$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, gdzie $k\in C$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{ctg}x=a$
$a\in R$</td><td>

$x_0\in(0;\pi)$ $x=x_0$</td><td>

$x=x_0+k\pi$, gdzie $k\in C$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Równanie</th><th colspan="2">Ilustracja graficzna rozwiązania równania:</th></tr>
<tr><th></th><th>Rozwiązanie podstawowe
$x \in \langle 0; 2\pi)$</th><th>Rozwiązanie ogólne
$x \in R$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$\sin x = 1$</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$x = \frac{\pi}{2}$</td><td>$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in C$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\sin x = 0$</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$x = 0 \vee x = \pi$</td><td>$x = k\pi$, gdzie $k \in C$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\sin x = -1$</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$x = \frac{3}{2}\pi$</td><td>$x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, gdzie $k \in C$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\sin x = a$, gdzie $a \in (0;1)$</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$x = x_0 \vee x = \pi - x_0$</td><td>$x = x_0 + 2k\pi \vee x = (\pi - x_0) + 2k\pi$, gdzie $k \in C$</td></tr>
<tr><td>Podobnie wykonujemy graficzną ilustrację rozwiązania równania $\sin x = a$ dla $a \in (-1; 0)$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

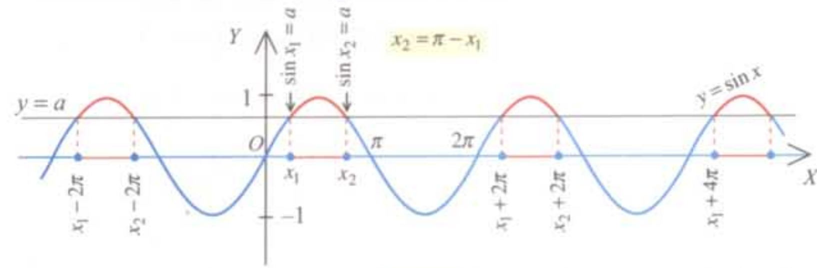
Równania trygonometryczne

Równanie	Ilustracja graficzna rozwiązania równania:	Rozwiązanie podstawowe $x \in \langle 0; 2\pi)$	Rozwiązanie ogólne $x \in R$
$\cos x = 1$		$x = 0$	$x = 2k\pi$, gdzie $k \in C$
$\cos x = 0$		$x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3}{2}\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in C$
$\cos x = -1$		$x = \pi$	$x = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in C$
$\cos x = a$, gdzie $a \in (0;1)$	 *Podobnie wykonujemy graficzną ilustrację rozwiązania równania $\cos x = a$ dla $a \in (-1; 0)$*	$x = x_0 \vee x = 2\pi - x_0$	$x = x_0 + 2k\pi \vee x = -x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in C$

- Równania $\sin x = a$ i $\cos x = a$, gdy $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ nie mają rozwiązań (są to równania sprzeczne).

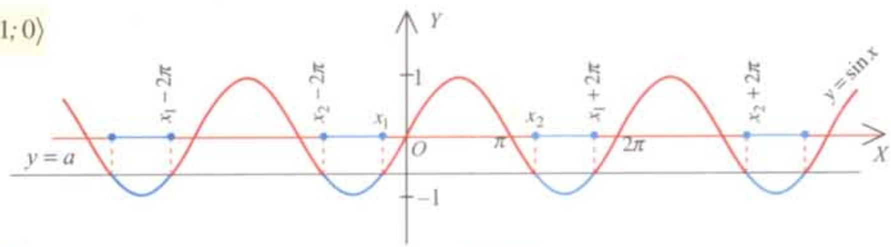
Ilustracja graficzna rozwiązań nierówności trygonometrycznych

$a \in \langle 0;1 \rangle$



$\sin x > a \Leftrightarrow x \in (x_1 + 2k\pi; x_2 + 2k\pi)$, gdzie $k \in C$ $\quad$ $\sin x < a \Leftrightarrow x \in (x_2 + 2k\pi; x_1 + 2\pi(k+1))$, gdzie $k \in C$

$a \in \langle -1;0 \rangle$



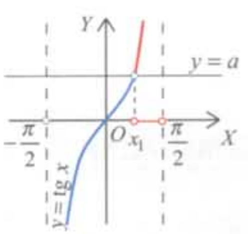
$\sin x > a \Leftrightarrow x \in (x_1 + 2k\pi; x_2 + 2k\pi)$, gdzie $k \in C$ $\quad$ $\sin x < a \Leftrightarrow x \in (x_2 + 2k\pi; x_1 + 2\pi(k+1))$, gdzie $k \in C$

$\sin x \geq 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\quad$ $\sin x \geq -1 \Leftrightarrow x \in R$ $\quad$ $\sin x \leq 1 \Leftrightarrow x \in R$ $\quad$ $\sin x \leq -1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$,
gdzie $k \in C$

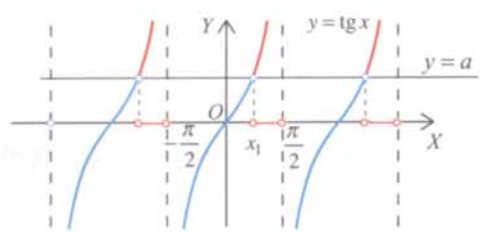
Nierówności $\cos x > a$ (lub $\cos x \geq a$, $\cos x < a$, $\cos x \leq a$) – rozwiązujemy podobnie.

$\operatorname{tg} x_1 = a$

$x_1 \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$



$a \in R$



Nierówność	Zbiór rozwiązań dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$	Zbiór rozwiązań dla $x \in R$
$\operatorname{tg} x > a$	$\left(x_1; \frac{\pi}{2} \right)$	$\left(x_1 + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$, gdzie $k \in C$
$\operatorname{tg} x \geq a$	$\left\langle x_1; \frac{\pi}{2} \right)$	$\left\langle x_1 + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$, gdzie $k \in C$
$\operatorname{tg} x < a$	$\left(-\frac{\pi}{2}; x_1 \right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; x_1 + k\pi \right)$, gdzie $k \in C$
$\operatorname{tg} x \leq a$	$\left(-\frac{\pi}{2}; x_1 \right\rangle$	$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; x_1 + k\pi \right\rangle$, gdzie $k \in C$

Nierówności $\operatorname{ctg} x > a$, $\operatorname{ctg} x \geq a$, $\operatorname{ctg} x < a$, $\operatorname{ctg} x \leq a$ – rozwiązujemy podobnie.

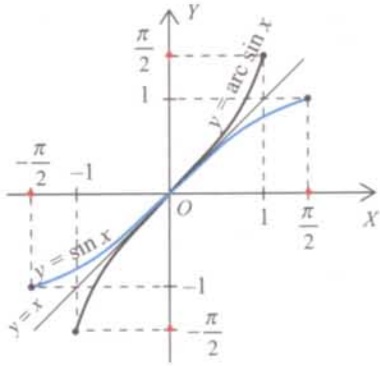
Funkcje cyklometryczne (kołowe)

- Jeżeli $y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ i $x \in \langle -1; 1 \rangle$, to $y = \arcsin x \iff x = \sin y$.
- Jeżeli $y \in \langle 0; \pi \rangle$ i $x \in \langle -1; 1 \rangle$, to $y = \arccos x \iff x = \cos y$.
- Jeżeli $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ i $x \in R$, to $y = \operatorname{arctg} x \iff x = \operatorname{tg} y$.
- Jeżeli $y \in (0; \pi)$ i $x \in R$, to $y = \operatorname{arcctg} x \iff x = \operatorname{ctg} y$.

$y = \arcsin x$

$D = \langle -1; 1 \rangle$

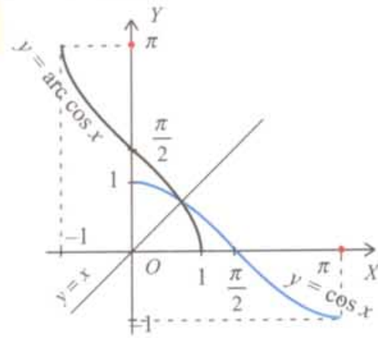
ᗡ $= \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$



$y = \arccos x$

$D = \langle -1; 1 \rangle$

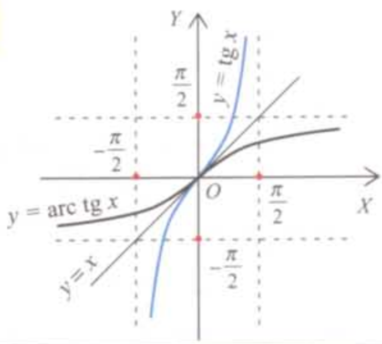
ᗡ $= \langle 0; \pi \rangle$



$y = \operatorname{arc\,tg} x$

$D = R$

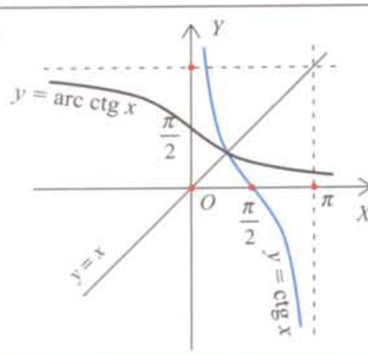
ᗡ $= \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$



$y = \operatorname{arc\,ctg} x$

$D = R$

ᗡ $= (0; \pi)$



Związki między funkcjami cyklometrycznymi

- $\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x$, dla $x \in \langle -1; 1 \rangle$
- $\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, dla $x \in \langle -1; 1 \rangle$
- $\operatorname{arc\,tg} x = -\operatorname{arc\,tg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,ctg} x$, dla $x \in R$
- $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}$, dla $xy < 1$, dla $x \in R \wedge y \in R \wedge xy \neq 1$
- $\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, dla $x \in \langle 0; 1)$
- $\operatorname{arc\,tg} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arc\,ctg} \frac{1}{x}$, dla $x \neq 0$
- $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, dla $x \in \langle 0; 1)$

Pojęcie pierwotne i aksjomat

- Pojęcie przyjęte bez definicji nazywamy pojęciem pierwotnym.
- Pojęcia pierwotne w geometrii, to: punkt, prosta, płaszczyzna, przestrzeń.
- **Aksjomat** to zdanie, którego prawdziwość przyjmuje się bez dowodu.

Przykłady aksjomatów w geometrii

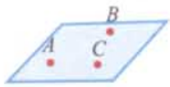
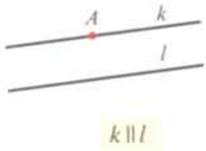
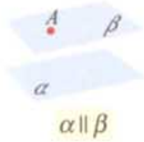
Geometria płaszczyzny	Geometria przestrzeni
Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi nieskończenie wiele prostych.	Przez każde dwa punkty przestrzeni przechodzi nieskończenie wiele płaszczyzn.
Przez każde dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. 	Przez każde trzy punkty, nie należące do jednej prostej, przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna. 
Przez punkt nie leżący na prostej l przechodzi dokładnie jedna prosta k równoległa do prostej l (aksjomat Euklidesa). 	Przez punkt nie leżący na płaszczyźnie α przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna β równoległa do płaszczyzny α. 

Figura geometryczna

Figura płaska

- Każdy zbiór punktów płaszczyzny nazywamy figurą płaską.
- Figura płaska jest ograniczona, gdy istnieje koło, w którym ta figura się zawiera.
- Figura płaska jest nieograniczona, gdy nie jest zawarta w żadnym kole.

Figura przestrzenna

- Każdy zbiór punktów przestrzeni nazywamy figurą przestrzenną.
- Figura przestrzenna jest ograniczona, gdy istnieje kula, w której ta figura się zawiera.
- Figura przestrzenna jest nieograniczona, gdy nie jest zawarta w żadnej kuli.

Figura wypukła

- Figurę nazywamy wypukłą, jeżeli każdy odcinek, którego końce należą do figury, zawiera się w tej figurze.

Figury przystające

- Figury f_1 i f_2 nazywamy figurami przystającymi ($f_1 \equiv f_2$), gdy istnieje izometria przekształcająca figurę f_1 na figurę f_2.

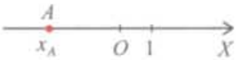
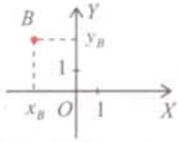
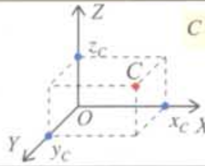
Figury podobne

- Figury f_1 i f_2 nazywamy figurami podobnymi ($f_1 \sim f_2$), gdy istnieje podobieństwo przekształcające figurę f_1 na figurę f_2.

Współrzędne punktu, odległość

$A, B, C, \ldots$ – oznaczenia punktów, $A=(x_A, y_A)$ – punkt A o współrzędnych x_A, y_A.

Współrzędne punktu:

na osi	na płaszczyźnie	w przestrzeni
$A=(x_A)$ 	$B=(x_B, y_B)$ 	$C=(x_C, y_C, z_C)$ 

Odległość między dwoma punktami

- Odległość między punktami A i B oznaczamy symbolem $|AB|$.
- Dla dowolnych punktów A, B, C:

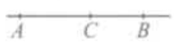
1° $|AB| \in R_+ \cup \{0\}$,

2° $|AB|=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A=B$,

3° $|AB|=|BA|$,

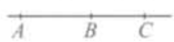
4° $|AB| \le |AC|+|CB|$ *(nierówność trójkąta)*.

- Punkt C leży między punktami A i B, gdy $|AB|=|AC|+|CB|$.
- Trzy punkty A, B, C są **współliniowe** (leżą na jednej prostej), jeśli spełniony jest jeden z trzech warunków:



$|AB|=|AC|+|CB|$

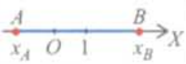
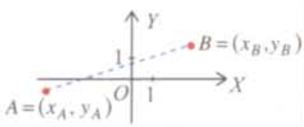
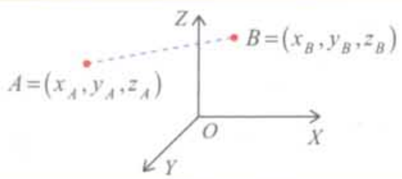
lub



$|AC|=|AB|+|BC|$

lub

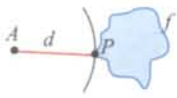
$|BC|=|BA|+|AC|$

na osi	na płaszczyźnie	w przestrzeni
		
$\lvert AB\rvert=\lvert x_B-x_A\rvert$	$\lvert AB\rvert=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$	$\lvert AB\rvert=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

Odległość punktu od figury

- Odległością punktu A od niepustej figury f nazywamy liczbę $\inf\{|AP|:\ P \in f\}$ i oznaczamy ją $|A, f|$.

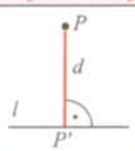
Odległością punktu A od figury domkniętej f jest długość najkrótszego z odcinków AP, gdzie $P \in f$.



$|A, f|=d$

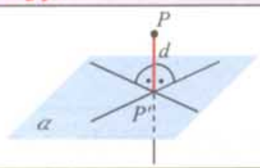
Odległość punktu od prostej *(płaszczyzny)*

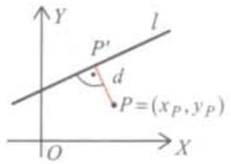
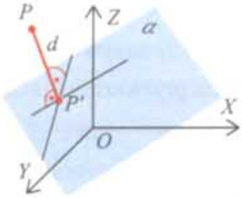
- Odległość d punktu P od prostej l (płaszczyzny α) jest równa odległości tego punktu od jego rzutu prostokątnego P' na prostą l (na płaszczyznę α).



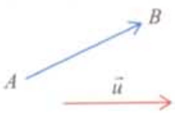
$|P, l|=d$

$d=|PP'|$



Odległość punktu od prostej na płaszczyźnie	Odległość punktu od płaszczyzny w przestrzeni
 $l:\ Ax+By+C=0$ gdzie $A^2+B^2>0$	 $P=(x_P, y_P, z_P)$; P' – rzut prostokątny P na płaszczyznę α; $\alpha:\ Ax+By+Cz+D=0$ gdzie $A^2+B^2+C^2>0$
Jeżeli $\lvert P, l\rvert=\lvert PP'\rvert=d$, to $d=\frac{\lvert Ax_P+By_P+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$	Jeżeli $\lvert P, \alpha\rvert=\lvert PP'\rvert=d$, to $d=\frac{\lvert Ax_P+By_P+Cz_P+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \ldots, \vec{u}, \vec{v}, \ldots$ – *oznaczenia wektorów swobodnych lub związanych (zaczepionych).*



A – początek wektora $\overrightarrow{AB}$,

B – koniec wektora $\overrightarrow{AB}$,

$|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{u}|$ – *długość wektora* $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$,

$\vec{0}$ – *wektor zerowy*

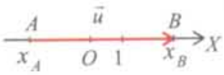
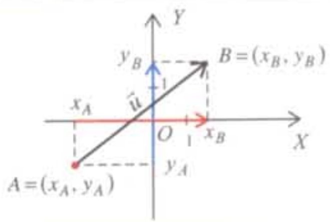
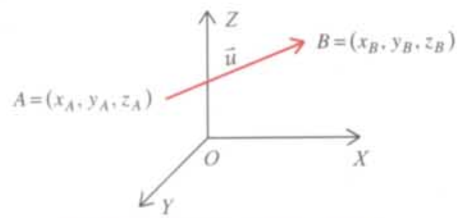
$[u_x]$ – *współrzędna wektora* $\vec{u}$ *na osi OX,*

$[u_x, u_y]$, $\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$ – *współrzędne wektora* $\vec{u}$ *na płaszczyźnie XOY,*

$[u_x, u_y, u_z]$, $\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$ – *współrzędne wektora* $\vec{u}$ *w przestrzeni XYZ.*

- Wektorem związanym (zaczepionym) nazywamy uporządkowaną parę punktów.
- Wektorem swobodnym wyznaczonym przez wektor związany $\overrightarrow{AB}$ nazywamy zbiór wszystkich wektorów związanych przystających do wektora $\overrightarrow{AB}$.
- Długość wektora (wartość), kierunek i zwrot wyznaczają jednoznacznie wektor swobodny.

Współrzędne wektora:

na osi	na płaszczyźnie	w przestrzeni
		
$\overrightarrow{AB}=[x_B-x_A]$	$\overrightarrow{AB}=[x_B-x_A, y_B-y_A]$ *lub* $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{bmatrix}$	$\overrightarrow{AB}=[x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A]$ *lub* $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{bmatrix}$
$\overrightarrow{AB}=\vec{u}=$ $=[x_B-x_A]=[u_x]$	$\overrightarrow{AB}=\vec{u}=[x_B-x_A, y_B-y_A]=[u_x, u_y]$	$\overrightarrow{AB}=\vec{u}=[x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A]=[u_x, u_y, u_z]$

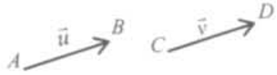
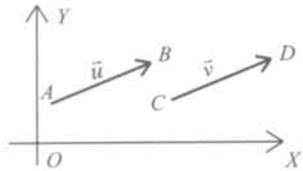
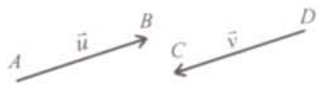
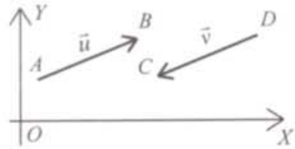
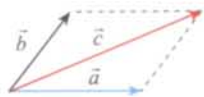
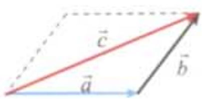
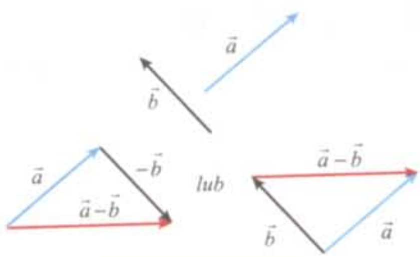
- Jeżeli $A=(x_A)$, $B=(x_B)$, to liczbę $u_x=x_B-x_A$ (miarę wektora $\overrightarrow{AB}$ na osi) nazywamy współrzędną wektora $\overrightarrow{AB}$ na osi.
- Jeżeli $A=(x_A, y_A)$, $B=(x_B, y_B)$, to liczby $u_x=x_B-x_A$, $u_y=y_B-y_A$ (miary składowych wektora $\overrightarrow{AB}$ na osiach) nazywamy współrzędnymi wektora $\overrightarrow{AB}$ w układzie *XOY*.

Analogicznie określamy współrzędne wektora w układzie XYZ (składowe wektora – *patrz str 78**).*

Długość wektora:

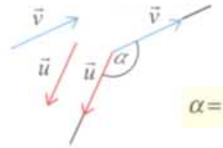
na osi	na płaszczyźnie	w przestrzeni
Jeżeli $\overrightarrow{AB}=[x_B-x_A]$ $(\vec{u}=[u_x])$, to $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\lvert x_B-x_A\rvert$, $\lvert\vec{u}\rvert=\lvert u_x\rvert$.	Jeżeli $\overrightarrow{AB}=[x_B-x_A, y_B-y_A]$ $(\vec{u}=[u_x, u_y])$ to $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$, $\lvert\vec{u}\rvert=\sqrt{u_x^2+u_y^2}$.	Jeżeli $\overrightarrow{AB}=[x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A]$ $(\vec{u}=[u_x, u_y, u_z])$ to $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$, $(\lvert\vec{u}\rvert=\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}$.)

Wektor

Pojęcie	W geometrii syntetycznej	W geometrii analitycznej na płaszczyźnie
Równość wektorów	Dwa wektory są równe, gdy mają ten sam kierunek, zwrot i długość.  $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$	Dwa wektory są równe, gdy mają odpowiednie współrzędne równe.  $\vec{u}=[u_x,u_y]$ $\vec{v}=[v_x,v_y]$ $\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_x=v_x \\ u_y=v_y \end{cases}$
Wektory przeciwne	Dwa wektory są przeciwne, gdy mają ten sam kierunek, równe długości i przeciwne zwroty.  $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{DC}$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ – wektory przeciwne.	Dwa wektory są przeciwne, gdy ich odpowiednie współrzędne są liczbami przeciwnymi.  $\vec{u}=[u_x,u_y]$ $\vec{v}=[v_x,v_y]$ $\vec{u}=-\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_x=-v_x \\ u_y=-v_y \end{cases}$
Suma wektorów	 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ *Zasada równoległoboku*  $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ *Zasada trójkąta*	Jeżeli $\vec{a}=[a_x,a_y]$ i $\vec{b}=[b_x,b_y]$, to $\vec{a}+\vec{b}=[a_x+b_x,a_y+b_y]$
Różnica wektorów	Różnicą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest wektor równy sumie wektora $\vec{a}$ i wektora przeciwnego do wektora $\vec{b}$.  $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.	Jeżeli $\vec{a}=[a_x,a_y]$ i $\vec{b}=[b_x,b_y]$, to $\vec{a}-\vec{b}=[a_x-b_x,a_y-b_y]$.

Kąt między wektorami

- Kątem między dwoma niezerowymi wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy kąt wypukły, którego jedno ramię ma kierunek i zwrot wektora $\vec{u}$, a drugie ramię, kierunek i zwrot wektora $\vec{v}$.



$\alpha = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$

Iloczyn wektora przez liczbę:

w geometrii syntetycznej

- Jeżeli $\vec{a}$ jest wektorem niezerowym i $k \in R \setminus \{0\}$, to $\vec{w} = k \cdot \vec{a}$ jest wektorem o własnościach:
  1° $\vec{w} \parallel \vec{a}$,
  2° $|\vec{w}| = |k| \cdot |\vec{a}|$,
  3° dla $k > 0$ zwrot $\vec{w}$ jest zgodny ze zwrotem $\vec{a}$,
  4° dla $k < 0$ zwrot $\vec{w}$ jest przeciwny do zwrotu $\vec{a}$,
  5° dla $k = 0$ wektor $k \cdot \vec{a}$ jest wektorem zerowym.
- Iloczyn wektora zerowego przez liczbę rzeczywistą jest wektorem zerowym.

w geometrii analitycznej na płaszczyźnie

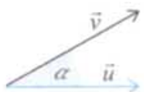
Jeżeli $\vec{a} = [a_x, a_y]$ i $k \in R$,

to $k \cdot \vec{a} = [k \cdot a_x, k \cdot a_y]$

Iloczyn skalarny wektorów

w geometrii syntetycznej

- Iloczynem skalarnym $\vec{u} \circ \vec{v}$ dwóch niezerowych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy liczbę równą iloczynowi długości tych wektorów i cosinusa kąta między nimi.



$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$

- Jeżeli $\vec{u} = \vec{0}$ lub $\vec{v} = \vec{0}$, to $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$.

w geometrii analitycznej na płaszczyźnie

Jeżeli $\vec{u} = [u_x, u_y]$ i $\vec{v} = [v_x, v_y]$,

to $\vec{u} \circ \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$

$$\cos(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})) = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

- $\vec{u} \circ \vec{u} = (\vec{u})^2 = |\vec{u}|^2$

Wektory prostopadłe

w geometrii syntetycznej

- Dwa niezerowe wektory są prostopadłe, gdy kąt między ich kierunkami jest kątem prostym.
- Wektor zerowy jest prostopadły do każdego wektora.

w geometrii analitycznej na płaszczyźnie

- Dwa wektory są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn skalarny jest równy zero.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \circ \vec{v} = 0 \Leftrightarrow u_x v_x + u_y v_y = 0$

(Warunek prostopadłości wektorów).

Wektory równoległe

w geometrii syntetycznej

- Dwa niezerowe wektory są równoległe, gdy każdy z tych wektorów jest iloczynem drugiego przez pewną liczbę rzeczywistą różną od zera.
- Wektor zerowy jest równoległy do każdego wektora.

Jeżeli $\vec{v} \neq \vec{0}$, to:

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \bigvee_{k \in R} (\vec{u} = k \cdot \vec{v}) \vee (\vec{v} = k \cdot \vec{u})$$

- Dwa wektory równoległe nazywa się kolinearnymi.

w geometrii analitycznej na płaszczyźnie

- Wyznacznikiem wektorów $\vec{u} = [u_x, u_y]$ i $\vec{v} = [v_x, v_y]$ nazywamy liczbę

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$$

$$|d(\vec{u}, \vec{v})| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}))$$

Dwa wektory są równoległe, gdy ich wyznacznik jest równy zero.

$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow d(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

(Warunek równoległości wektorów).

Iloczyn skalarny w przestrzeni

Jeżeli $\vec{a}=[a_x, a_y, a_z]$ i $\vec{b}=[b_x, b_y, b_z]$, to

$$\vec{a}\circ\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$$

Cosinus kąta między wektorami w przestrzeni

Jeżeli $\vec{a}=[a_x, a_y, a_z]$ i $\vec{b}=[b_x, b_y, b_z]$, to

$$\cos(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))=\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

Warunek prostopadłości wektorów w przestrzeni

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\circ\vec{b}=0$$

$$a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z=0$$

Warunek równoległości niezerowych wektorów w przestrzeni

Jeśli $\vec{a},\vec{b}$ – wektory niezerowe, to

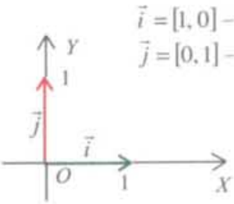
$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\bigvee_{k\in R\setminus\{0\}}\vec{a}=k\cdot\vec{b}$$

Kombinacja liniowa wektorów

Wersory osi:

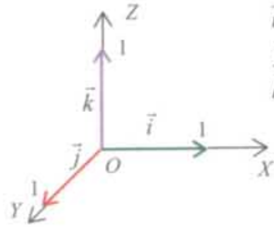
- Wersorem osi nazywamy wektor, którego długość jest równa 1, zaś kierunek i zwrot jest zgodny z pewną dodatnią półosią układu współrzędnych.

na płaszczyźnie



$\vec{i}=[1,0]$ – wersor osi OX,
$\vec{j}=[0,1]$ – wersor osi OY

w przestrzeni



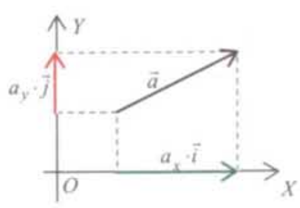
$\vec{i}=[1,0,0]$ – wersor osi OX,
$\vec{j}=[0,1,0]$ – wersor osi OY,
$\vec{k}=[0,0,1]$ – wersor osi OZ.

Składowe wektora

na płaszczyźnie

Jeżeli $\vec{a}=[a_x,a_y]$, to wektory $\vec{a}_x=a_x\cdot\vec{i}$ i $\vec{a}_y=a_y\cdot\vec{j}$ nazywamy składowymi wektora $\vec{a}$.

a_x, a_y – współrzędne wektora $\vec{a}$.

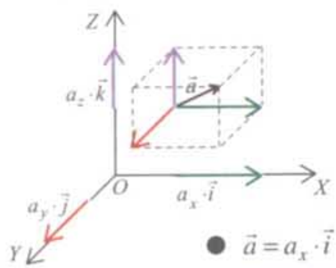


- $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}$
- $\vec{a}=\vec{a}_x+\vec{a}_y$

w przestrzeni

Jeżeli $\vec{a}=[a_x,a_y,a_z]$, to wektory $\vec{a}_x=a_x\cdot\vec{i}$, $\vec{a}_y=a_y\cdot\vec{j}$ i $\vec{a}_z=a_z\cdot\vec{k}$ nazywamy składowymi wektora $\vec{a}$.

a_x, a_y, a_z – współrzędne wektora $\vec{a}$.



- $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$
- $\vec{a}=\vec{a}_x+\vec{a}_y+\vec{a}_z$

Kombinacja liniowa wektorów

Wektor $\vec{c}=k_1\cdot\vec{a}+k_2\cdot\vec{b}$, gdzie $k_1, k_2\in R$ nazywamy kombinacją liniową wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Wektory liniowo zależne

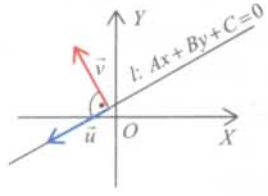
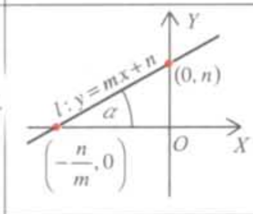
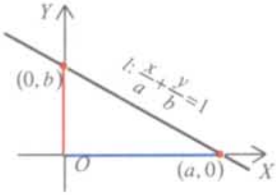
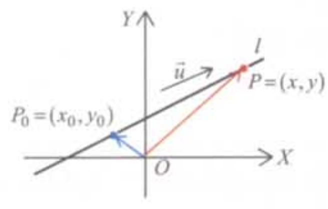
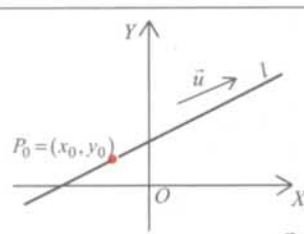
- Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są liniowo zależne, wtedy i tylko wtedy, gdy:
  $$\bigvee_{k_1,k_2\in R}\left(k_1^2+k_2^2>0\wedge k_1\cdot\vec{a}+k_2\cdot\vec{b}=\vec{0}\right).$$
- Dwa wektory liniowo zależne są równoległe, bo $\vec{a}=-\frac{k_2}{k_1}\cdot\vec{b}$ lub $\vec{b}=-\frac{k_1}{k_2}\cdot\vec{a}$.

Wektory liniowo niezależne

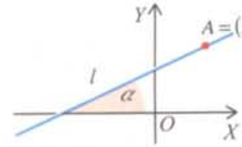
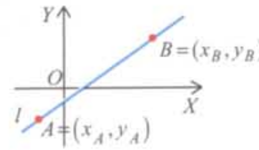
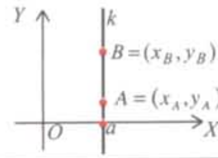
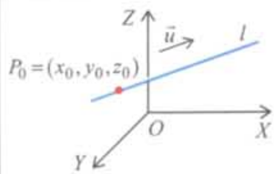
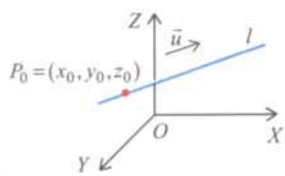
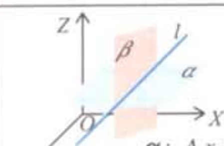
- Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy:
  $$\bigwedge_{k_1,k_2\in R}\left(k_1\vec{a}+k_2\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow k_1=k_2=0\right).$$

Prostą wyznaczają dwa różne punkty (płaszczyzny, przestrzeni).
$a, b, c, \ldots,\ AB, CD, \ldots,$ pr. AB, pr.CD – *oznaczenia prostych*

Równania prostej na płaszczyźnie

	Postać równania	Ilustracja graficzna – opis
Równanie ogólne prostej	l: $Ax + By + C = 0$, A, B, C – współczynniki liczbowe równania prostej, gdzie: $A, B, C \in R$, $A^2 + B^2 > 0$. Jeżeli $B \neq 0$, to $l: y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Jeżeli $B = 0$, to $l: x = -\frac{C}{A}$. *(prosta l jest równoległa do OY)* Jeżeli $B \neq 0$ i $A = 0$, to $l: y = -\frac{C}{B}$. *(Prosta l jest równoległa do OX)*	 $\vec{u} \perp \vec{v}$ ● *Współczynniki A i B są współrzędnymi wektora prostopadłego do prostej l.* $l \perp \vec{v} = [A, B]$ $l \parallel \vec{u} = [B, -A]$
Równanie kierunkowe prostej	l: $y = mx + n$, gdzie: $m = -\frac{A}{B}$, $n = -\frac{C}{B}$, gdy $B \neq 0$. A, B, C – współczynniki równania prostej w postaci ogólnej.	 $m = \mathrm{tg}\,\alpha$ – *współczynnik kierunkowy.* ● *Równania prostej prostopadłej do osi OX nie można przedstawić w postaci kierunkowej.*
Równanie odcinkowe prostej	l: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, gdzie $a \cdot b \neq 0$ $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$, gdy $A \cdot B \cdot C \neq 0$. A, B, C – współczynniki równania prostej w postaci ogólnej.	 *Prosta przecina osie układu współrzędnych w punktach* $(a, 0)$ i $(0, b)$.
	● *Równań prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych oraz prostych równoległych do osi OX lub do osi OY nie można przedstawić w postaci odcinkowej.*	
Równanie wektorowe prostej	l: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{u}$ l – prosta przechodząca przez punkt P_0, i równoległa do niezerowego wektora $\vec{u}$, pr. $PP_0 \parallel \vec{u}$ oraz $t \in R$. ● Każdy niezerowy wektor równoległy do prostej nazywamy wektorem kierunkowym tej prostej.	 $\vec{u} \parallel l$ i $P_0 \in l$
Równanie parametryczne prostej	l: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$, $t \in R$. l – prosta przechodząca przez punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ i równoległa do niezerowego wektora $\vec{u} = [a, b]$.	 $P_0 \in l$ $\vec{u} = [a, b]$ $\vec{u} \parallel l$

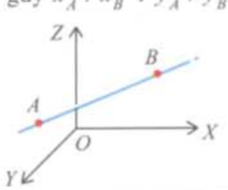
Prosta

	Równanie	Ilustracja graficzna – opis
Równanie prostej przechodzącej przez punkt A płaszczyzny	$A \in \alpha$. l: $y - y_A = m(x - x_A)$ m – współczynnik kierunkowy prostej l	 $m = \mathrm{tg}\alpha$
Równanie prostej przechodzącej przez dwa różne punkty A i B płaszczyzny	l: $y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$, gdy $x_A \neq x_B$	
	$k: x = a$, gdy $x_A = x_B = a$	
Równania parametryczne prostej l w przestrzeni	$l: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$, gdzie $t \in R$ i $a^2 + b^2 + c^2 > 0$	 $\vec{u} = [a, b, c]$ $P_0 \in l$ $\vec{u} \parallel l$
Równanie kierunkowe prostej l w przestrzeni	l: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$, gdzie $abc \neq 0$. Jeśli $a = 0$ i $bc \neq 0$, to $l \perp OX$ oraz l: $\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \end{cases}$.	 $P_0 \in l$ $\vec{u} = [a, b, c]$ $\vec{u} \parallel l$ ● Wektor $\vec{u}$ nazywamy wektorem kierunkowym, a jego współrzędne a, b, c współczynnikami kierunkowymi prostej.
Równanie krawędziowe prostej l w przestrzeni	$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$, *gdzie* $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0$ i $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0$, *i te równania nie są równaniami płaszczyzn równoległych.*	 α: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ β: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ $\alpha \cap \beta = l$

Równanie prostej l przechodzącej przez dwa różne punkty przestrzeni

$$l: \frac{x - x_A}{x_A - x_B} = \frac{y - y_A}{y_A - y_B} = \frac{z - z_A}{z_A - z_B},$$

gdy $x_A \neq x_B$ i $y_A \neq y_B$ i $z_A \neq z_B$

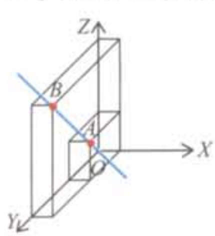


$A = (x_A, y_A, z_A)$
$B = (x_B, y_B, z_B)$

Jeżeli $x_A = x_B$ i $y_A \neq y_B$ oraz $z_A \neq z_B$, to prosta AB leży na płaszczyźnie prostopadłej do osi OX i opisują ją następujące równania:

prosta AB : $\begin{cases} x = x_A \\ \frac{y - y_A}{y_A - y_B} = \frac{z - z_A}{z_A - z_B} \end{cases}$,

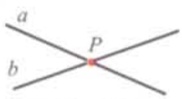
gdzie: $A = (x_A, y_A, z_A)$,
$B = (x_B, y_B, z_B)$.



Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie i w przestrzeni

Proste przecinające się

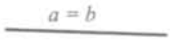
- Prostymi przecinającymi się nazywamy proste, które mają dokładnie jeden punkt wspólny.



$a \cap b = \{P\}$

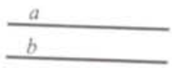
Proste równoległe

- Proste pokrywające się, to proste, które mają wszystkie punkty wspólne.



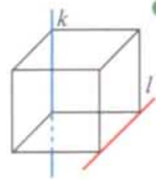
$a \cap b = a = b$

- Prostymi równoległymi nazywamy proste, które leżą na jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych albo się pokrywają.



$a \cap b = \varnothing$

Proste skośne



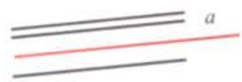
$l \nparallel k \wedge l \cap k = \varnothing$

- Proste l i k w przestrzeni nazywamy skośnymi, jeżeli nie leżą na jednej płaszczyźnie (nie mają punktów wspólnych i nie są równoległe).

- Proste na płaszczyźnie mogą być równoległe lub przecinające się.
- Proste w przestrzeni mogą być równoległe, przecinające się lub skośne.

Kierunek prostej

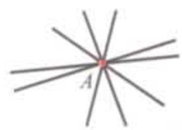
- Zbiór wszystkich prostych równoległych do prostej a nazywamy kierunkiem prostej a i oznaczamy (a).



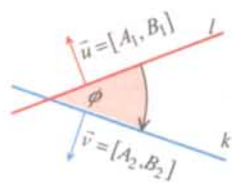
(a)

Pęk prostych

- Pękiem prostych o wierzchołku A nazywamy zbiór wszystkich prostych przechodzących przez punkt A i oznaczamy (A).



(A)

Równania prostych l i k na płaszczyźnie	Warunek równoległości ($l \parallel k$)	Warunek prostopadłości ($l \perp k$)	ϕ – kąt między prostymi l i k $\phi = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$, gdzie $\vec{u} \perp l$, $\vec{v} \perp k$
$l:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0$ $k:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0$ gdy $A_1^2 + B_1^2 > 0$ i $A_2^2 + B_2^2 > 0$ $l \perp \vec{u} = [A_1, B_1]$ $k \perp \vec{v} = [A_2, B_2]$	$l \parallel k \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$, czyli $l \parallel k \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = 0$	$l \perp k \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$, czyli $l \perp k \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$	 $\cos\phi = \dfrac{\lvert \vec{u} \circ \vec{v} \rvert}{\lvert \vec{u} \rvert \lvert \vec{v} \rvert}$
$l:\ y = m_1x + n_1$ $k:\ y = m_2x + n_2$	$m_1 = m_2$	$m_1 \cdot m_2 = -1$	$\operatorname{tg}\phi = \left\lvert \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} \right\rvert$, gdy $\phi \neq 90^\circ$

Odległość prostych równoległych na płaszczyźnie

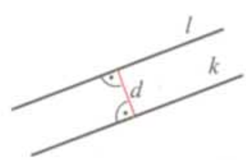
$d = \lvert l, k \rvert$ – odległość prostych równoległych l i k.

Jeśli $l:\ Ax + By + C_1 = 0$ i $k:\ Ax + By + C_2 = 0$, to:

$$d = \frac{\lvert C_1 - C_2 \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Jeśli $l:\ y = mx + n_1$, $k:\ y = mx + n_2$, to:

$$d = \frac{\lvert n_1 - n_2 \rvert}{\sqrt{1 + m^2}}$$



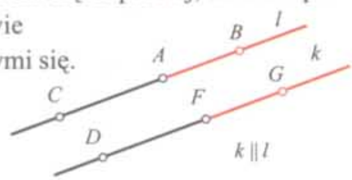
$\lvert l, k \rvert = d$

Półprosta, odcinek

półprosta AB, $\overrightarrow{AB}$ – *oznaczenia półprostej o początku A przechodzącej przez punkt B.*
odcinek AB, $\overline{AB}$ – *oznaczenia odcinka o końcach A i B.*
$|AB|$, $|CD|$, ... – *oznaczenia długości odcinków.*

Półprosta

- Półprostą o początku A nazywamy każdą z dwóch części prostej, na które punkt A dzieli tę prostą, wraz z tym punktem. Takie dwie półproste nazywamy półprostymi dopełniającymi się.
- Jeżeli A leży między punktami B i C, to:
  - $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC} = \{A\}$
  - $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} = l$



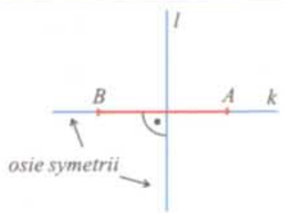
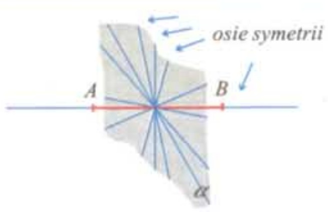
Półproste dopełniające się: półproste $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{AC}$.
Dwie półproste zgodnie zorientowane (o zgodnym zwrocie), np: półproste $\overrightarrow{CB}$ *i* $\overrightarrow{AB}$ *lub półproste* $\overrightarrow{FD}$ *i* $\overrightarrow{AC}$.
Dwie półproste przeciwnie zorientowane, np.: półproste $\overrightarrow{CB}$ *i* $\overrightarrow{BA}$ *lub półproste* $\overrightarrow{CB}$ *i* $\overrightarrow{FD}$.

Odcinek

- Odcinkiem AB nazywamy figurę utworzoną z punktów A i B (zwanych jego końcami) oraz wszystkich punktów leżących między nimi na prostej wyznaczonej przez te punkty.

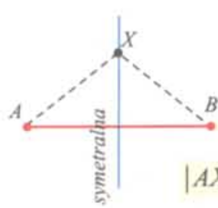
- Jeżeli $A = B$, to odcinek AB nazywamy odcinkiem zerowym.

Osie symetrii odcinka:

na płaszczyźnie	w przestrzeni
	$\alpha \perp AB$ 
• Na płaszczyźnie odcinek niezerowy ma dwie osie symetrii: prostą, w której się zawiera i prostą zwaną symetralną. *l, k – osie symetrii odcinka AB.*	• W przestrzeni odcinek ma nieskończenie wiele osi symetrii. *Osie symetrii, które są prostopadłe do odcinka AB, leżą w jednej płaszczyźnie zwanej płaszczyzną symetralną odcinka AB.*

Symetralna odcinka

- Symetralną niezerowego odcinka nazywamy prostą prostopadłą do tego odcinka i przechodzącą przez jego środek.
- Symetralna odcinka jest tą osią symetrii odcinka, w której nie jest on zawarty.
- Symetralna odcinka niezerowego jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których odległości od końców tego odcinka są równe.

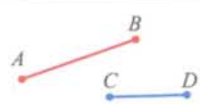


$|AX| = |BX|$

Stosunek odcinków

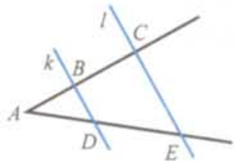
- Stosunkiem k dwóch odcinków niezerowych nazywamy iloraz długości tych odcinków mierzonych tą samą jednostką.

$$\frac{|AB|}{|CD|} = k$$



Twierdzenie Talesa

- Jeżeli ramiona kąta przetniemy dwoma prostymi równoległymi, to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu.



Jeśli $k \parallel l$, to:

- $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|}$
- $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AE|}$
- $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DE|}$
- $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|BD|}{|CE|}$

- Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.
Jeżeli proste k i l przecinają ramiona kąta odpowiednio w punktach B, C i D, E (jak na rysunku) oraz długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu, to proste k i l są równoległe.

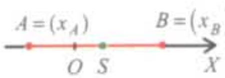
Złoty podział odcinka

Jeżeli $C \in \overline{AB}$ oraz $\frac{|CB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|}$, to mówimy, że punkt C dzieli odcinek AB w stosunku złotym. Odcinek AC jest złotą częścią odcinka AB. $|AC| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot |AB|$.

Liczba $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ jest nazywana liczbą złotą.

Środek odcinka:

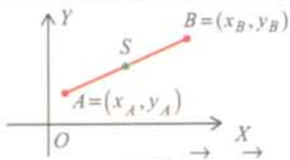
na osi



Jeśli $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB}$, to:

$$S = (x_S) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)$$

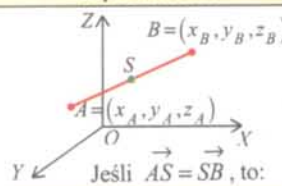
na płaszczyźnie



Jeśli $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB}$, to:

$$S = (x_S, y_S) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

w przestrzeni

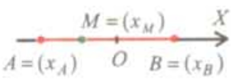


Jeśli $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB}$, to:

$$S = (x_S, y_S, z_S) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Podział odcinka w stosunku λ

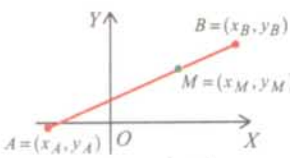
na osi



Jeżeli $M \in \overline{AB}$ i $\frac{|AM|}{|MB|} = \lambda$, to:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1 + \lambda}$$

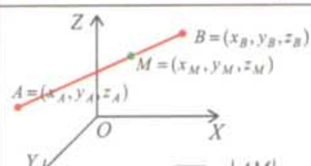
na płaszczyźnie



Jeżeli $M \in \overline{AB}$ i $\frac{|AM|}{|MB|} = \lambda$,

to $\begin{cases} x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1 + \lambda} \\ y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1 + \lambda} \end{cases}$

w przestrzeni



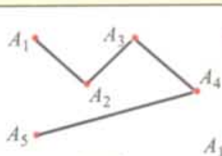
Jeżeli $M \in \overline{AB}$ i $\frac{|AM|}{|MB|} = \lambda$,

to $\begin{cases} x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1 + \lambda} \\ y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1 + \lambda} \\ z_M = \frac{z_A + \lambda \cdot z_B}{1 + \lambda} \end{cases}$

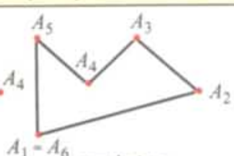
Łamana

- Łamaną nazywamy figurę geometryczną, którą można przedstawić jako sumę skończonego ciągu odcinków takich, że każde dwa kolejne mają wspólny koniec oraz:
  - każde dwa kolejne i tylko dwa kolejne odcinki mają wspólny koniec,
  - żadne dwa następujące po sobie odcinki nie są zawarte w jednej prostej.

Łamana zwyczajna:

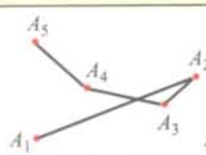


otwarta

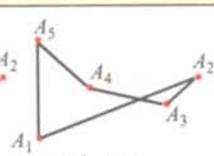


zamknięta

Łamana wiązana:



otwarta



zamknięta

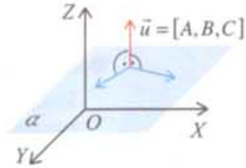
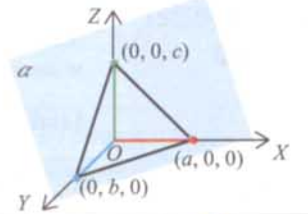
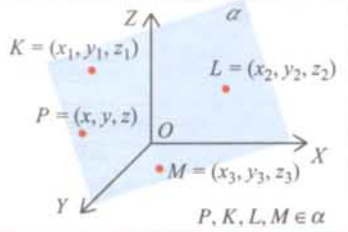
- Odcinki łamanej nazywamy jej bokami, a ich końce wierzchołkami łamanej $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Płaszczyzna

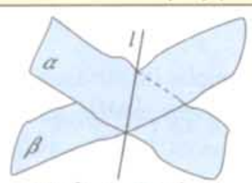
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ – oznaczenia płaszczyzn.

Płaszczyznę wyznaczają:
- trzy punkty nie należące do jednej prostej,
- prosta i punkt poza tą prostą,
- dwie proste przecinające się,
- dwie różne proste równoległe.

Równania płaszczyzny

	Równanie	Ilustracja graficzna
Równanie ogólne płaszczyzny	$\alpha: Ax+By+Cz+D=0$, gdzie $A^2+B^2+C^2>0$. • Jeżeli $D=0$, to płaszczyzna α przechodzi przez początek układu. • Jeżeli $A=0$, to $\alpha \parallel OX$. • Jeżeli $B=0$, to $\alpha \parallel OY$. • Jeżeli $C=0$, to $\alpha \parallel OZ$. $[A, B, C]$ – wektor prostopadły do płaszczyzny α.	 $\vec{u} \perp \alpha$
Równanie odcinkowe płaszczyzny	$\alpha: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, gdzie $abc \neq 0$, $a=-\frac{D}{A}, b=-\frac{D}{B}, c=-\frac{D}{C}$, gdy $A \cdot B \cdot C \cdot D \neq 0$ A, B, C, D – współczynniki równania płaszczyzny w postaci ogólnej. Płaszczyzna α przecina osie układu w punktach: $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$.	
Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty	$\alpha: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$, gdzie $P=(x, y, z)$ – dowolny punkt płaszczyzny α.	

Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn

Płaszczyzny równoległe	Płaszczyzny przecinające się
 $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing$ lub $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$ • Przez punkt $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ nie leżący na płaszczyźnie α przechodzi jedna i tylko jedna płaszczyzna równoległa do płaszczyzny α.	 $\alpha \nparallel \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = l$. Jeżeli płaszczyzny α i β nie są równoległe, to ich częścią wspólną jest prosta l.

Jeżeli płaszczyzny dane są równaniami: $\alpha: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\beta: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, to:

- $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow [A_1, B_1, C_1] \perp [A_2 B_2 C_2]$,
- $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow [A_1, B_1, C_1] \parallel [A_2, B_2, C_2]$,
- $\alpha = \beta \Leftrightarrow [A_1, B_1, C_1] \parallel [A_2, B_2, C_2]$ i płaszczyzny α i β mają conajmniej jeden punkt wspólny,
- $(\alpha \nparallel \beta) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \vee \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \vee \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Odległość dwóch płaszczyzn równoległych α i β:

$$d=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \text{gdy} \begin{cases} A=A_1=A_2 \\ B=B_1=B_2 \\ C=C_1=C_2 \end{cases}$$

- Jeżeli płaszczyzny α i β przecinają się pod kątem ϕ, to:

$$\cos\phi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

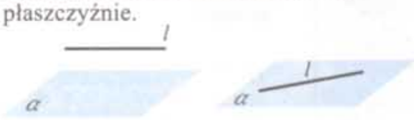
(Kąt między płaszczyznami jest to kąt między wektorami prostopadłymi do tych płaszczyzn).

- Odległość d punktu $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny α określonej równaniem w postaci ogólnej $Ax+By+Cz+D=0$ jest równa: $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, gdzie $d=|P_0, \alpha|$.

Wzajemne położenie prostej i płaszczyzny

Prosta równoległa do płaszczyzny

- Prostą nazywamy równoległą do płaszczyzny, gdy nie ma ona punktów wspólnych z płaszczyzną lub zawiera się w tej płaszczyźnie.



$$l \parallel \alpha \iff l \cap \alpha = \varnothing \quad \vee \quad l \subset \alpha$$

- Jeżeli prosta jest równoległa do prostej zawartej w płaszczyźnie, to jest do tej płaszczyzny równoległa.

$l: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$, gdzie $t \in R$,

$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$

$l \parallel \vec{u} = [a, b, c]$,

$\alpha \perp \vec{v} = [A, B, C]$,

- $l \parallel \alpha \iff \vec{u} \perp \vec{v} \iff Aa + Bb + Cc = 0$

- Przez każdy punkt przestrzeni przechodzi nieskończenie wiele prostych równoległych do danej płaszczyzny.

Prosta przecinająca (przebijająca) płaszczyznę

- Jeśli płaszczyzna α i prosta l mają dokładnie jeden punkt wspólny, to mówimy, że prosta l przecina (przebija) płaszczyznę α.

$$l \cap \alpha = \{M\}$$

- Jeżeli M jest punktem, w którym prosta l przebija płaszczyznę α, gdzie

$l: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$, $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$

i $Aa + Bb + Cc \neq 0$, to współrzędne punktu $M = (x_M, y_M, z_M)$

mają postać: $\begin{cases} x_M = x_0 + at_M \\ y_M = y_0 + bt_M \\ z_M = z_0 + ct_M \end{cases}$,

gdzie $t_M = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Aa + Bb + Cc}$.

Prosta prostopadła do płaszczyzny

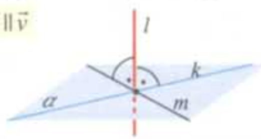
- Prosta jest prostopadła do płaszczyzny, gdy jest prostopadła do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie.
- Jeżeli prosta jest prostopadła do dwu, przecinających się prostych zawartych w płaszczyźnie, to jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie, czyli jest prostopadła do płaszczyzny.

$l: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$, gdzie $t \in R$,

$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$

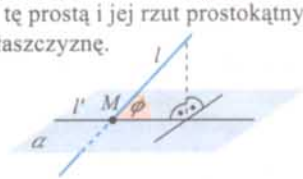
$l \parallel \vec{u} = [a, b, c]$, $\alpha \perp \vec{v} = [A, B, C]$,

- $l \perp \alpha \iff \vec{u} \parallel \vec{v}$



Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny

- Jeśli prosta l nie jest prostopadła do płaszczyzny α, to kątem nachylenia prostej l do płaszczyzny α nazywamy kąt ϕ utworzony przez tę prostą i jej rzut prostokątny l' na daną płaszczyznę.



- Jeśli ϕ jest kątem nachylenia prostej l do płaszczyzny α, gdzie

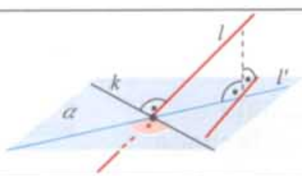
$l: \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$,

$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$, to

$$\sin\phi = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Twierdzenie o trzech prostopadłych

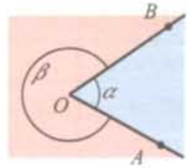
- Jeżeli prosta l' jest rzutem prostokątnym prostej l na płaszczyznę α, to prosta $k \subset \alpha$ jest prostopadła do prostej l wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej l'.



$\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle KLM$,..., α, β, γ,... – oznaczenia kątów. $|\sphericalangle AOB|$ *– miara kąta AOB.*

Kąt płaski

- Każdą z dwóch części płaszczyzny wyznaczonych przez dwie półproste o wspólnym początku, wraz z tymi półprostymi, nazywamy kątem płaskim.



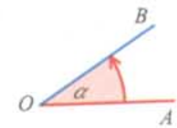
$\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ *– ramiona kąta,*
O – wierzchołek kąta.

$\alpha + \beta = 360°$.

Kąt skierowany

- Kątem skierowanym (zorientowanym) nazywamy uporządkowaną parę półprostych o wspólnym początku.

$\overrightarrow{OA}$ *– ramię początkowe*
$\overrightarrow{OB}$ *– ramię końcowe*



- Dwa kąty skierowane o odwrotnie uporządkowanych ramionach nazywamy kątami skierowanymi przeciwnymi.

Jednostki miary kąta płaskiego

Miara stopniowa

1° *– jeden stopień.*

$1°$ to $\frac{1}{90}$ kąta prostego.

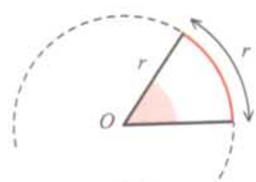
Stopnie dzielimy na minuty:
$1° = 60'$,
minuty dzielimy na sekundy:
$1' = 60''$.

- $1° = \frac{\pi}{180}$ radianów.

Miara łukowa

1 rad *– jeden radian.*

- Radianem nazywamy miarę kąta środkowego opartego na łuku o długości równej promieniowi okręgu.



- $1 \text{ radian} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°17'45''$.

Miara gradusowa

$\mathbf{1^g}$ *– jeden gradus.*

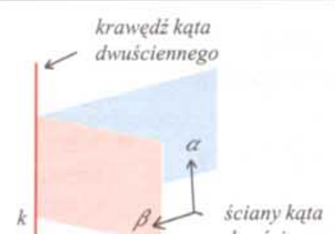
1^g to:

$\frac{1}{100}$ kąta prostego,

$\frac{1}{400}$ kąta pełnego.

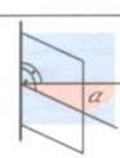
Kąt dwuścienny

- Każdą z dwóch części przestrzeni wyznaczonych przez dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi *k*, wraz z tymi półpłaszczyznami, nazywamy kątem dwuściennym.
- Półpłaszczyzny α i β nazywamy ścianami kąta dwuściennego.
- Krawędzią kąta dwuściennego nazywamy prostą wspólną dla obu półpłaszczyzn.



Miara kąta dwuściennego

- Miarą kąta dwuściennego nazywamy miarę kąta płaskiego, będącego wspólną częścią kąta dwuściennego i płaszczyzny prostopadłej do jego krawędzi.



Kąt wielościenny

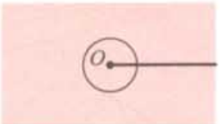
- Kątem wielościennym (bryłowym, narożem) nazywamy każdą z części przestrzeni, na które dzieli ją suma skończonej liczby (większej niż 2) kątów płaskich spełniających następujące warunki:
  - wszystkie mają wspólny wierzchołek,
  - można je ustawić w taki ciąg, w którym każde dwa sąsiednie kąty płaskie, a także pierwszy i ostatni mają wspólne ramię i nie leżą w jednej płaszczyźnie, a pozostałe pary kątów mają tylko wspólny wierzchołek,
  - ramię każdego kąta jest wspólne dla dokładnie dwóch kątów.

Miara kąta wielościennego

Miara kąta wielościennego jest równa stosunkowi pola części wspólnej kąta wielościennego i dowolnej sfery o środku w wierzchołku kąta wielościennego, do kwadratu promienia tej sfery. Jednostką miary kąta wielościennego jest *steradian*.

Rodzaje kątów płaskich

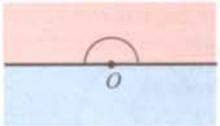
Kąt pełny



- Kąt pełny, to kąt, którego ramiona pokrywają się, a jego obszar zawiera wszystkie punkty płaszczyzny.

Miara: $360° = 2\pi \text{ rad} = 400^g$

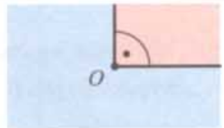
Kąt półpełny



- Kąt półpełny, to kąt, którego ramiona są półprostymi dopełniającymi się.

Miara: $180° = \pi \text{ rad} = 200^g$

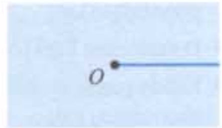
Kąt prosty



- Kąt prosty, to kąt, który jest połową kąta półpełnego.

Miara: $90° = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 100^g$

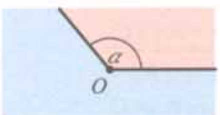
Kąt zerowy



- Kąt zerowy, to kąt, którego ramiona pokrywają się i który zawiera tylko punkty należące do ramion.

Miara: $0° = 0 \text{ rad} = 0^g$

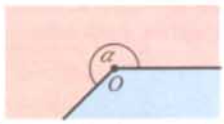
Kąt wypukły



- Kąt wypukły α, to kąt który jest figurą wypukłą.

Miara: $0° \le \alpha \le 180°$ lub $\alpha = 360°$

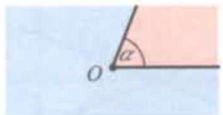
Kąt wklęsły



- Kąt wklęsły α, to kąt który nie jest figurą wypukłą.

Miara: $180° < \alpha < 360°$

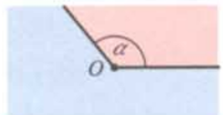
Kąt ostry



- Kąt ostry α, to kąt mniejszy od kąta prostego i większy od zerowego.

Miara: $0° < \alpha < 90°$

Kąt rozwarty

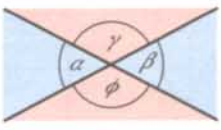


- Kąt rozwarty α, to kąt wypukły większy od kąta prostego i mniejszy od półpełnego.

Miara: $90° < \alpha < 180°$

Kąty wierzchołkowe

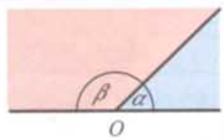
- Dwa kąty wypukłe nazywają się kątami wierzchołkowymi, jeżeli ramiona jednego z nich są półprostymi dopełniającymi dla ramion drugiego kąta.



- Kąty wierzchołkowe mają równe miary.
- $\alpha = \beta, \quad \gamma = \phi$

Kąty przyległe

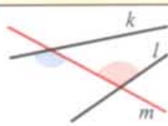
- Kąty przyległe, to kąty wypukłe, które mają jedno ramię wspólne, a pozostałe dopełniają się do prostej.

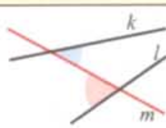


- Suma kątów przyległych jest kątem półpełnym.
- $\alpha + \beta = 180°$

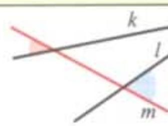
Kąty naprzemianległe:

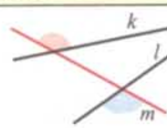
wewnętrzne





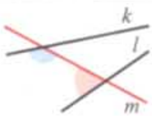
zewnętrzne

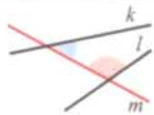




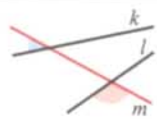
Kąty jednostronne

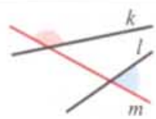
wewnętrzne



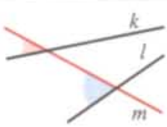


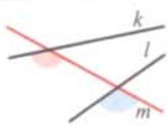
zewnętrzne

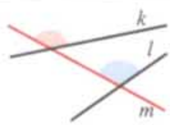


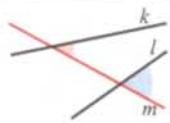


Kąty odpowiadające



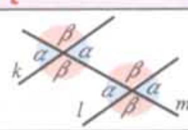






Twierdzenie o prostych przeciętych sieczną

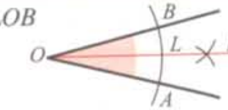
- Proste k i l przecięte trzecią prostą m (sieczną) są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy równe są:
  - kąty naprzemianległe wewnętrzne (zewnętrzne) lub
  - kąty odpowiadające.

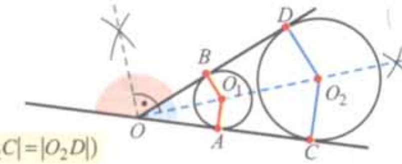


Dwusieczna kąta

- Dwusieczną kąta nazywamy półprostą, która dzieli go na dwa przystające kąty.
- Dwusieczna kąta jest półprostą zawartą w jego osi symetrii.
- Każdy punkt dwusiecznej kąta wypukłego jest równo odległy od obu ramion kąta.
- Każdy punkt dwusiecznej kąta wypukłego (nie półpełnego) jest środkiem okręgu stycznego do ramion kąta.
- Dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.

$\sphericalangle AOL \equiv \sphericalangle LOB$

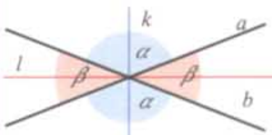




$(|O_1A| = |O_1B|,\ |O_2C| = |O_2D|)$

Dwusieczne kątów wierzchołkowych

- Dwusieczne kątów wierzchołkowych dopełniają się.



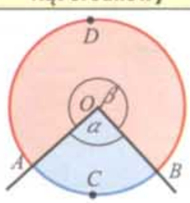
Jeżeli proste: $\boldsymbol{a}:\ A_1x+B_1y+C_1=0$ i $\boldsymbol{b}:\ A_2x+B_2y+C_2=0$ *przecinają się, to równania prostych* **l** *i* **k**, *zawierających dwusieczne kątów wyznaczonych przez te proste mają postać:*

$$l:\ \frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

$$k:\ \frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

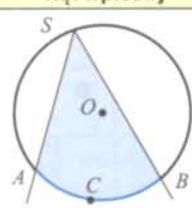
Kąty w okręgu

Kąt środkowy



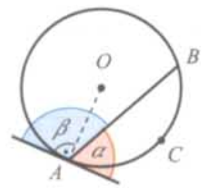
- Kąt α jest oparty na łuku $\overset{\frown}{ACB}$.
- Kąt β jest oparty na łuku $\overset{\frown}{ADB}$.
- Kąt środkowy w okręgu (kole), to kąt, którego wierzchołkiem jest środek tego okręgu (koła).

Kąt wpisany



- $\sphericalangle ASB$ – kąt wpisany oparty na łuku $\overset{\frown}{ACB}$.
- Kąt wypukły jest wpisany w okrąg (koło), gdy jego wierzchołek leży na okręgu, a ramionami są półproste zawierające jego cięciwy.

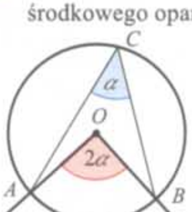
Kąt dopisany



α – *kąt dopisany oparty na łuku ACB*

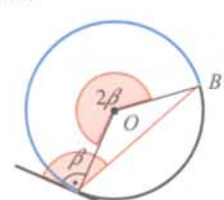
- Kąt dopisany do okręgu $o(O,r)$ w punkcie $A \in o(O,r)$, to kąt wypukły o wierzchołku A, którego jedno ramię jest zawarte w stycznej do okręgu, poprowadzonej w punkcie A, a drugie ramię zawiera cięciwę tego okręgu o końcu A.

- Kąt wpisany w okrąg jest równy połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku.

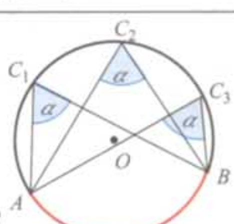


$|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AOB| = \alpha$

- Kąt dopisany jest równy połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku.

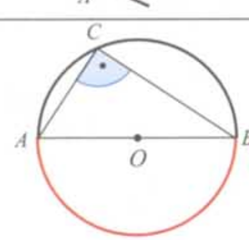


- Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.

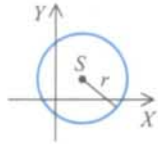
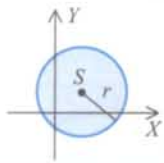


$\sphericalangle AC_1B = \sphericalangle AC_2B = \sphericalangle AC_3B$

- Kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.

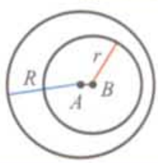
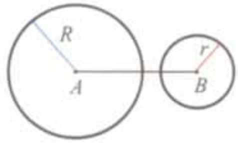
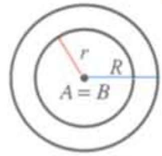


$|\sphericalangle ACB| = 90°$

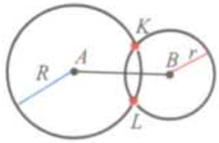
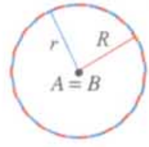
	w geometrii syntetycznej	w geometrii analitycznej na płaszczyźnie
Okrąg:	Okręgiem o środku O i promieniu r $(r>0)$ nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległości od punktu O są równe r.  *O – środek okręgu,* *r – promień okręgu,* *$o(O,r)$ – okrąg o środku O i promieniu r.*	Równanie okręgu o środku w punkcie $S=(a,b)$ i promieniu $r>0$ ma postać: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ lub $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, gdzie: $c=a^2+b^2-r^2$ i $a^2+b^2-c>0$. 
Koło:	Kołem o środku O i promieniu r $(r>0)$ nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległości od punktu O są mniejsze od r lub równe r.  *O – środek koła,* *r – promień koła,* *$k(O,r)$ – koło o środku O i promieniu r.*	Nierówność opisująca koło o środku w punkcie $S=(a,b)$ i promieniu $r>0$ ma postać $(x-a)^2+(y-b)^2\le r^2$ lub $x^2+y^2-2ax-2by+c\le 0$, gdzie: $c=a^2+b^2-r^2$ i $a^2+b^2-c>0$. 

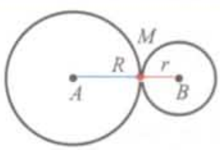
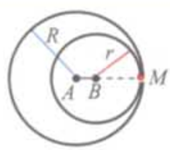
Wzajemne położenie dwóch okręgów

Okręgi rozłączne: $o(A,R)\cap o(B,r)=\varnothing$

wewnętrznie	zewnętrznie	współśrodkowe
$\|AB\|<\|R-r\|$ 	$\|AB\|>R+r$ 	$\|AB\|=0$  $r\neq R$

Okręgi, które nie są rozłączne

Okręgi przecinające się	Okręgi pokrywające się
$\|R-r\|<\|AB\|<R+r$  *$o(A,R)\cap o(B,r)=\{K,L\}$, gdzie K, L – punkty przecięcia okręgów*	$\|AB\|=0,\quad R=r$  $o(A,R)\cap o(B,r)=o(A,R)=o(B,r)$

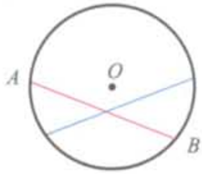
Okręgi styczne zewnętrznie	Okręgi styczne wewnętrznie
$\|AB\|=R+r$ 	$\|AB\|=\|R-r\|>0$ 

$o(A,R)\cap o(B,r)=\{M\}$, gdzie M – punkt styczności

Odcinki w okręgu i w kole

Cięciwa

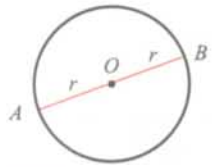
- Cięciwą okręgu (koła) nazywamy odcinek łączący dwa dowolne punkty okręgu.



- Jeżeli $A, B \in o(O, r)$, to $|AB| \leq 2r$.

Średnica

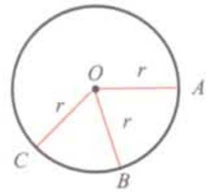
- Średnicą okręgu (koła) nazywamy każdą cięciwę przechodzącą przez środek okręgu (koła).



- $|AB| = 2r$.
- Średnica jest najdłuższą cięciwą okręgu (koła).

Promień

- Promieniem okręgu (koła) nazywamy każdy z odcinków łączących środek okręgu z dowolnym jego punktem.



- $|OA| = |OB| = |OC| = r$

Pole koła, długość okręgu i jego łuku

P – pole koła o promieniu r.

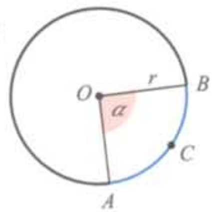
$$P = \pi r^2$$

l – długość okręgu o promieniu r.

$$l = 2\pi r$$

- Łukiem okręgu nazywamy każdą z dwóch części okręgu, na jakie dzielą okrąg dwa różne punkty tego okręgu.

l – długość łuku $\overset{\frown}{ACB}$:



$$|\overset{\frown}{ACB}| = l$$

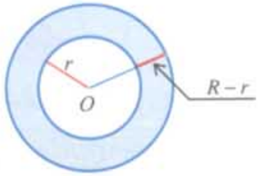
$l = x \cdot r$, *gdzie x – miara łukowa kąta środkowego α opartego na łuku ACB.*

$l = \dfrac{\pi\alpha}{180°} \cdot r$, *gdzie **α** – miara stopniowa kąta opartego na łuku ACB.*

Części koła i ich pola

Pierścień

- Pierścieniem kołowym nazywamy część płaszczyzny ograniczoną dwoma współśrodkowymi okręgami o promieniach R i r, gdzie $r < R$, wraz z tymi okręgami.



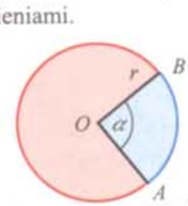
P – pole pierścienia kołowego ograniczonego okręgami o promieniach R, r, ($R > r$).

$R - r$ – szerokość pierścienia.

$$P = \pi(R^2 - r^2)$$

Wycinek

- Wycinkiem kołowym nazywamy każdą z dwóch części, na jakie dzielą koło dwa nie pokrywające się promienie wraz z tymi promieniami.



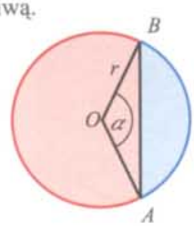
P – pole wycinka koła, któremu odpowiada kąt środkowy α:

$P = \dfrac{x}{2} \cdot r^2$, *gdzie x jest miarą łukową kąta środkowego α.*

$P = \dfrac{\pi\alpha}{360°} \cdot r^2$, *gdzie α jest miarą stopniową kąta środkowego*

Odcinek

- Odcinkiem koła nazywamy każdą z dwóch części, na jakie cięciwa dzieli koło wraz z tą cięciwą.



P – pole odcinka koła, któremu odpowiada kąt środkowy (wypukły) α:

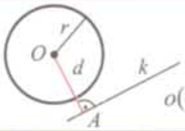
$P = \dfrac{x}{2} \cdot r^2 - \dfrac{1}{2} r^2 \cdot \sin x$,

gdzie x jest miarą łukową kąta środkowego, wypukłego α.

Wzajemne położenie prostej i okręgu

Prosta zewnętrzna

- Prosta jest zewnętrzną dla okręgu, gdy nie ma z nim punktów wspólnych.
- Odległość środka okręgu od prostej zewnętrznej jest większa od promienia okręgu.



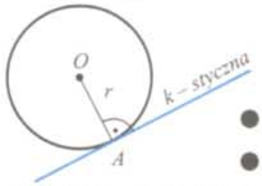
$d=|O,k|>r$

$o(O,r)\cap k=\varnothing$

Styczna do okręgu:

w geometrii syntetycznej

- Prostą, która z okręgiem zawartym w tej samej płaszczyźnie ma jeden punkt wspólny nazywamy styczną do tego okręgu.



- $|OA|=r$
- $r=|O,k|$,

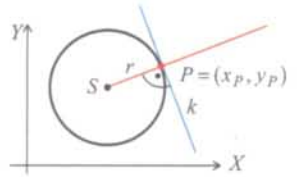
gdzie $|O,k|$ – odległość środka okręgu od stycznej k.

- Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia łączącego punkt styczności i środek okręgu.

w geometrii analitycznej na płaszczyźnie

Równanie stycznej k do okręgu o środku $S=(a,b)$ i promieniu $r>0$ w punkcie $P=(x_P,y_P)$ ma postać:

$k:\ (x_P-a)(x-a)+(y_P-b)(y-b)=r^2$.

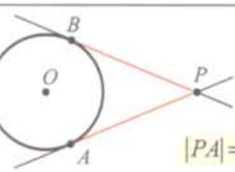


P – punkt styczności, $|SP|=r=|S,k|$

($|S,k|$ *– odległość punktu S od prostej k*)

Twierdzenie o odcinkach stycznych do okręgu

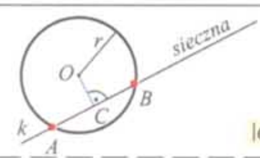
- Odcinki dwóch stycznych poprowadzonych do okręgu z punktu zewnętrznego, wyznaczone przez ten punkt i punkty styczności mają równe długości.



$|PA|=|PB|$

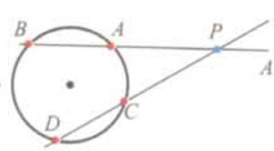
Sieczna okręgu

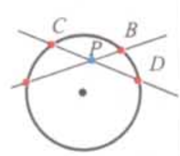
- Prostą, która z okręgiem ma dwa punkty wspólne nazywa się sieczną.
- Odległość siecznej od środka okręgu o promieniu r jest mniejsza od r.



$|OC|<r$

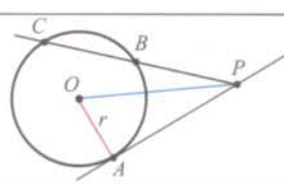
- Jeżeli jedna sieczna przecina okrąg w punktach A i B, a druga w punktach C i D i jeżeli obie sieczne przecinają się w punkcie P nie należącym do okręgu, to:
- $|PA|\cdot|PB|=|PC|\cdot|PD|$





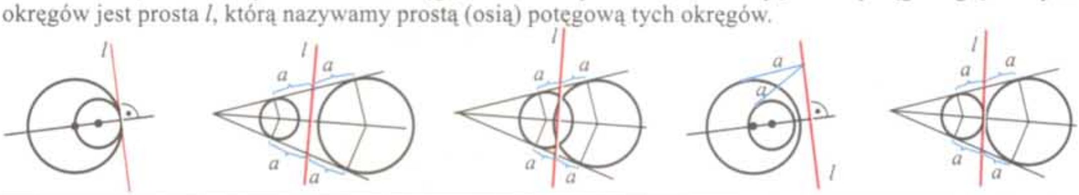
Potęga punktu *P* względem danego okręgu.

- Potęgą punktu P względem okręgu $o(O,r)$ nazywamy liczbę $|PO|^2-r^2$.



Prosta potęgowa

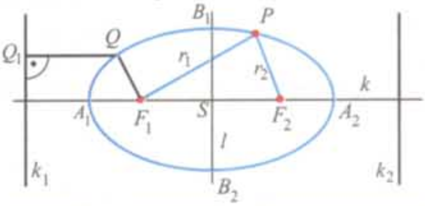
- Jeżeli dane są dwa niewspółśrodkowe okręgi, to zbiorem punktów, które mają równe potęgi względem tych okręgów jest prosta l, którą nazywamy prostą (osią) potęgową tych okręgów.



Elipsa, hiperbola

Elipsa

- Elipsą nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których suma odległości od dwóch ustalonych punktów F_1 i F_2, zwanych ogniskami elipsy, jest wielkością stałą i równą $2a$, gdzie $2a > |F_1F_2| = 2c > 0$.

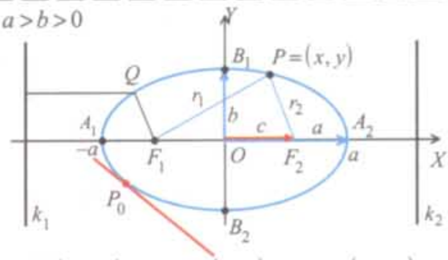
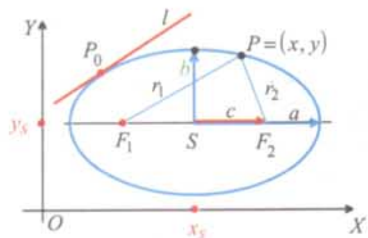


k, l – osie symetrii elipsy,
S – środek elipsy,
A_1, A_2, B_1, B_2 – wierzchołki elipsy,
F_1, F_2 – ogniska elipsy,
A_1A_2 – oś duża elipsy,
B_1B_2 – oś mała elipsy,
2c – ogniskowa,
e – mimośród,
r_1, r_2 – promienie wodzące punktu P,
k_1, k_2 – kierownice elipsy.

$|PF_1| = r_1$ $\quad |PF_2| = r_2$ $\quad |PF_1| + |PF_2| = 2a$ $\quad |A_1A_2| = 2a$ $\quad |B_1B_2| = 2b$ $\quad b = \sqrt{a^2 - c^2}$ $\quad e = \frac{c}{a} < 1$

- Dla każdego punktu Q elipsy $\frac{|QF_1|}{|Q, k_1|} = \frac{|QF_2|}{|Q, k_2|} = e$, gdzie $|Q, k_1|$ *– odległość punktu Q od kierownicy* k_1,
$|Q, k_2|$ *– odległość punktu Q od kierownicy* k_2.

Równanie elipsy:

	o środku $S=(0,0)$	**o środku $S=(x_S, y_S)$**
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, gdzie $a > 0$ i $b > 0$	$\frac{(x - x_S)^2}{a^2} + \frac{(y - y_S)^2}{b^2} = 1$, gdzie $a > 0$ i $b > 0$.
	$a > b > 0$ 	
	$A_1 = (-a, 0)$ $\quad B_1 = (0, b)$ $\quad F_1 = (-c, 0)$ $A_2 = (a, 0)$ $\quad B_2 = (0, -b)$ $\quad F_2 = (c, 0)$	$S = (x_S, y_S)$ $F_1 = (x_S - c, y_S)$ $\quad F_2 = (x_S + c, y_S)$

Równanie stycznej do elipsy

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1 \qquad \frac{(x_0 - x_S)(x - x_S)}{a^2} + \frac{(y_0 - y_S)(y - y_S)}{b^2} = 1,$$

gdzie $P_0 = (x_0, y_0)$ *– punkt styczności*

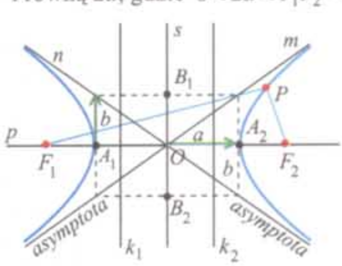
Równania kierownic elipsy

Jeśli środkiem elipsy jest punkt $S = (0, 0)$, to jej kierownice dane są równaniami:

$$k_1: x = -\frac{a^2}{c} \quad \text{i} \quad k_2: x = \frac{a^2}{c}.$$

Hiperbola

- Hiperbolą nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, dla których wartość bezwzględna różnicy odległości od dwóch ustalonych punktów F_1 i F_2, zwanych ogniskami hiperboli, jest wielkością stałą i równą $2a$, gdzie $0 < 2a < F_1F_2 = 2c$.



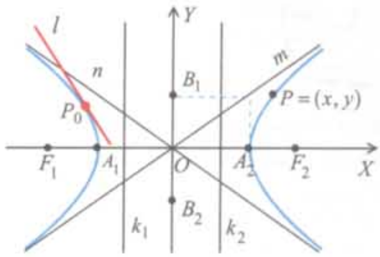
p, s – osie symetrii hiperboli,
O – środek hiperboli,
m, n – asymptoty hiperboli,
A_1, A_2 – wierzchołki hiperboli,
B_1, B_2 – wierzchołki urojone hiperboli,
F_1, F_2 – ogniska hiperboli,
r_1, r_2 – promienie wodzące punktu P,
A_1A_2 – oś rzeczywista,
B_1B_2 – oś urojona,
2c – ogniskowa,
e – mimośród,
k_1, k_2 – kierownice hiperboli.

$|F_1P| = r_1$ $\quad |F_2P| = r_2$

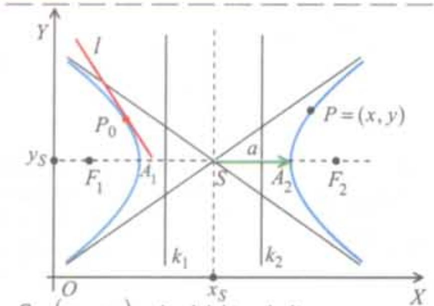
$||F_1P| - |F_2P|| = 2a$ $\quad |A_1A_2| = 2a$ $\quad |B_1B_2| = 2b$ $\quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$ $\quad e = \frac{c}{a} > 1$

Równanie hiperboli:

	o środku $S=(0,0)$	o środku $S=(x_S,y_S)$
	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, gdzie $a>0$ i $b>0$.	$\frac{(x-x_S)^2}{a^2}-\frac{(y-y_S)^2}{b^2}=1$, gdzie $a>0$ i $b>0$.



$A_1=(-a,0)$, $A_2=(a,0)$ – *wierzchołki*,
$F_1=(-c,0)$, $F_2=(c,0)$ – *ogniska* $(c>0)$



$S=(x_S,y_S)$ – *środek hiperboli,*
$F_1=(-c+x_S,y_S)$,
$F_2=(c+x_S,y_S)$ – *ogniska* $(c>0)$

Równanie stycznej do hiperboli

$l:\ \frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ $\qquad$ $l:\ \frac{(x_0-x_S)(x-x_S)}{a^2}-\frac{(y_0-y_S)(y-y_S)}{b^2}=1$,

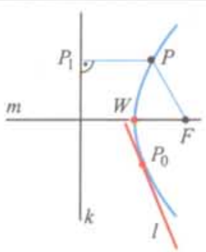
gdzie $P_0=(x_0,y_0)$ – punkt styczności.

Równania kierownic i asymptot hiperboli

Jeśli środkiem hiperboli jest punkt $S=(0,0)$, to:

- równania kierownic mają postać: $k_1:\ x=-\frac{a^2}{c}$ i $k_2:\ x=\frac{a^2}{c}$.
- równania asymptot mają postać: $m:\ y=\frac{b}{a}x$ i $n:\ y=-\frac{b}{a}x$.

Parabola



Parabolą nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny równo oddalonych od ustalonego punktu $F\notin k$, zwanego ogniskiem i od prostej k zwanej kierownicą.

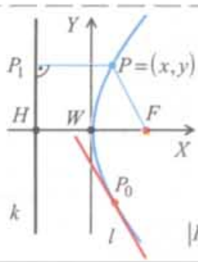
k – kierownica paraboli,
F – ognisko paraboli,
$|F,k|=p$ – parametr paraboli,
m – oś paraboli,
e – mimośród paraboli,
W – wierzchołek paraboli,
l – styczna do paraboli w punkcie P_0.

$|P,k|=|FP|$ $\qquad$ $e=\frac{|FP|}{|P,k|}=1$,

gdzie $|P,k|$ – odległość punktu paraboli P od jej kierownicy k

Równanie paraboli o wierzchołku $W=(0,0)$ i osi OX lub OY

$y^2=2px$, gdzie $p>0$.
p – parametr paraboli.

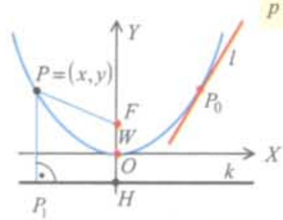


$p>0$

$H=\left(-\frac{1}{2}p,0\right)$, $F=\left(\frac{1}{2}p,0\right)$,

$|FP|=|PP_1|=|P,k|$

$y=ax^2$
a – współczynnik, gdzie $a=\frac{1}{2p}>0$.



$p>0$

$F=\left(0,\frac{1}{4a}\right)$ $\qquad$ $H=\left(0,-\frac{1}{4a}\right)$

Równanie stycznej do paraboli

$l:\ y_oy=p(x+x_0)$ $\qquad$ $l:\ x_ox=\frac{1}{2a}(y+y_0)$,

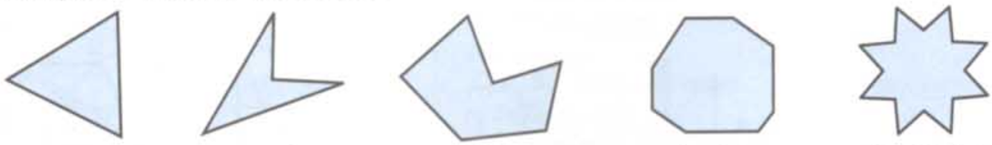
gdzie $P_0=(x_0,y_0)$ jest punktem styczności

Kierownica paraboli

$k:\ x=-\frac{1}{2}p$ $\qquad$ $k:\ y=-\frac{1}{4a}$

Wielokąt

- Wielokątem, wielobokiem (n–kątem lub n–bokiem), nazywamy płaską figurę geometryczną ograniczoną łamaną zwyczajną zamkniętą o n bokach, wraz z nią, gdzie $n \in N$ i $n \geq 3$.
- Wielokąt o n bokach ma n wierzchołków.



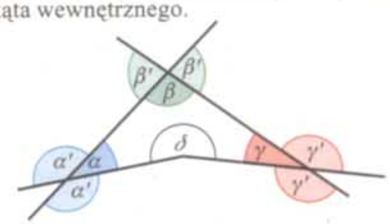
trójkąt *czworokąt* *sześciokąt* *ośmiokąt* *szesnastokąt*

Przekątna wielokąta

- Odcinki łączące wierzchołki wielokąta i nie będące jego bokami nazywamy przekątnymi wielokąta.
- Wielokąt o n-bokach ma $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-3)$ przekątnych.

Kąty wielokąta

- Kątem wewnętrznym wielokąta nazywamy kąt, którego wierzchołek pokrywa się z wierzchołkiem wielokąta, jego ramiona zawierają boki wielokąta i którego część wspólna z pewnym otoczeniem kołowym wierzchołka jest równa części wspólnej tego otoczenia i wielokąta.
- Kątem zewnętrznym wielokąta nazywamy każdy kąt przyległy do kąta wewnętrznego.



$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – kąty wewnętrzne wielokąta,
α', β', γ' – kąty zewnętrzne wielokąta.

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = \pi$$

Kąt wewnętrzny δ wielokąta, który jest wklęsły, nie ma kąta zewnętrznego.

- Suma miar kątów wewnętrznych n-kąta wypukłego jest równa $(n-2)\pi$.
- Suma miar kątów zewnętrznych n-kąta wypukłego jest równa 4π.

Wielokąt wypukły

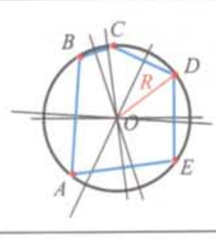
- Wielokąt, który jest figurą wypukłą nazywamy wielokątem wypukłym.
- Wielokąt jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy:
  - wszystkie jego kąty wewnętrzne są wypukłe, lub
  - wszystkie jego przekątne zawierają się w tym wielokącie.

Wielokąt wklęsły

- Wielokąt, który nie jest figurą wypukłą nazywamy wielokątem wklęsłym.

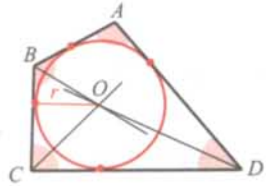
Wielokąt wpisany w okrąg (okrąg opisany na wielokącie)

- Wielokąt nazywamy wpisanym w okrąg (okrąg jest opisany na wielokącie) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego wierzchołki leżą na pewnym okręgu.
- Na wielokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy symetralne wszystkich jego boków przecinają się w jednym punkcie. Punkt przecięcia się tych symetralnych jest środkiem okręgu opisanego na wielokącie.



Wielokąt opisany na okręgu (okrąg wpisany w wielokąt)

- Wielokąt nazywamy opisanym na okręgu (okrąg jest wpisany w wielokąt), wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego boki są styczne do okręgu.
- W wielokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne wszystkich jego kątów wewnętrznych przecinają się w jednym punkcie. Punkt przecięcia tych dwusiecznych jest środkiem okręgu wpisanego w wielokąt.



Wielokąty foremne

- Wielokąt, którego wszystkie boki są równe i wszystkie kąty wewnętrzne przystające, nazywamy wielokątem foremnym.

  P – pole wielokąta,
  r – długość promienia okręgu wpisanego w wielokąt,
  R – długość promienia okręgu opisanego na wielokącie.

Twierdzenia o wielokącie foremnym

- Każda symetralna boku wielokąta foremnego jest osią symetrii tego wielokąta.
- Każda dwusieczna kąta wewnętrznego wielokąta foremnego zawiera się w osi symetrii tego wielokąta.
- Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg. Jeżeli bok n - kąta foremnego ma długość a, to promień R okręgu opisanego na tym wielokącie wyraża się wzorem: $R=\dfrac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$
- W każdy wielokąt foremny można wpisać okrąg. Jeżeli bok n - kąta foremnego ma długość a, to promień r okręgu wpisanego w ten wielokąt wyraża się wzorem: $r=\dfrac{a}{2}\cdot\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{n}$
- Kąt wewnętrzny n-kąta foremnego ma miarę: $\alpha=(n-2)\dfrac{\pi}{n}$

Rodzaj wielokąta foremnego	Pole (P)	Promień okręgu opisanego na wielokącie (R)	Promień okręgu wpisanego w wielokąt (r)
Trójkąt równoboczny	$P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$
Czworokąt (kwadrat)	$P=a^2$	$R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$r=\frac{a}{2}$
Pięciokąt	$P=\frac{a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{4}$	$R=\frac{2a}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}$	$r=\frac{a}{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$
Sześciokąt	$P=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$R=a$	$r=\frac{a\sqrt{3}}{2}$
Ośmiokąt	$P=2a^2(1+\sqrt{2})$	$R=a\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$	$r=\frac{a(1+\sqrt{2})}{2}$
Dziesięciokąt	$P=\frac{5a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$	$R=\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$	$r=\frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$
Dwunastokąt	$P=3a^2(2+\sqrt{3})$	$R=\frac{a\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}$	$r=\frac{a(2+\sqrt{3})}{2}$

Wielokąt gwiaździsty

- Łamaną zamkniętą utworzoną z tych wszystkich przekątnych wielokąta foremnego, które mają tę samą długość, nazywamy wielokątem gwiaździstym.

pięciokąt gwiaździsty *siedmiokąt gwiaździsty* *siedmiokąt gwiaździsty*

- Wielokąty foremne gwiaździste o takiej samej liczbie boków nie muszą być figurami podobnymi.
  Uwaga:
  Wszystkie przekątne wielokąta foremnego o jednakowej długości nie muszą tworzyć wielokąta gwiaździstego.

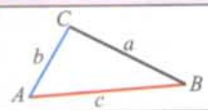
Trójkąt

- Trójkątem nazywamy wielokąt o trzech bokach.
  ΔABC, trójkąt ABC – *oznaczenia trójkąta o wierzchołkach A, B, C.*
- Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt, gdy spełniony jest warunek: $|b-c|<a<b+c$

Podział trójkątów ze względu na ich boki

Trójkąt różnoboczny

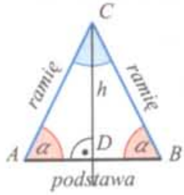
- Trójkąt różnoboczny, to trójkąt, którego każdy bok ma inną długość.



$b \neq c$, $a \neq c$
$a \neq b$

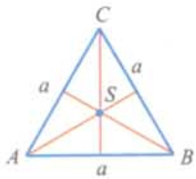
Trójkąt równoramienny

- Trójkąt równoramienny, to trójkąt, który ma co najmniej dwa boki równe zwane ramionami.
- Wysokość $h=|CD|$ trójkąta równoramiennego ABC:
  - dzieli podstawę AB na dwie równe części ($|AD|=|DB|$),
  - dzieli $\Delta\ ABC$ na dwa trójkąty przystające ($\Delta ADC \equiv \Delta BDC$),
  - zawiera się w dwusiecznej kąta C,
  - zawiera się w symetralnej podstawy, która jest osią symetrii trójkąta,
  - jest środkową trójkąta.



Trójkąt równoboczny

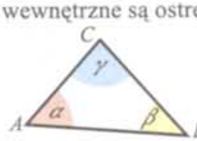
- Trójkąt równoboczny, to trójkąt, którego wszystkie boki mają równe długości.
- W trójkącie równobocznym wszystkie kąty wewnętrzne mają miary równe $60°$
- Środkowe, symetralne, wysokości i dwusieczne trójkąta równobocznego przecinają się w tym samym punkcie S.
- W trójkącie równobocznym środkowa boku, jego symetralna oraz dwusieczna kąta leżącego naprzeciw tego boku i wysokość opuszczona na ten bok zawierają się w jednej prostej.
- Trójkąt równoboczny ma trzy osie symetrii.



$|AB|=|BC|=|CA|=a$

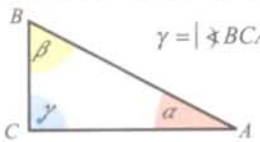
Podział trójkątów ze względu na ich kąty

- Trójkąt ostrokątny, to trójkąt, którego wszystkie kąty wewnętrzne są ostre.



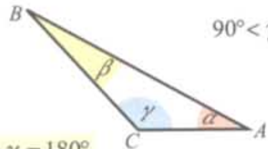
$\alpha<90°$,
$\beta<90°$,
$\gamma<90°$.

- Trójkąt prostokątny, to trójkąt, którego jeden kąt jest prosty.



$\gamma=|\sphericalangle BCA|=90°$

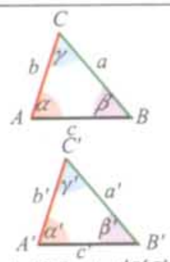
- Trójkąt rozwartokątny, to trójkąt, którego jeden kąt jest rozwarty.



$90°<\gamma<180°$

- Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa $180°$. $\alpha+\beta+\gamma=180°$

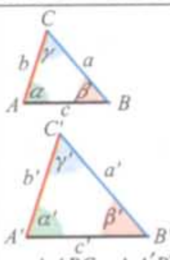
Cechy przystawania trójkątów



$\Delta\ ABC \equiv \Delta\ A'B'C'$

- **BBB**. Jeśli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to te dwa trójkąty są przystające.
- **BKB**. Jeśli dwa boki i kąt między nimi zawarty w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi między tymi bokami w drugim trójkącie, to te dwa trójkąty są przystające.
- **KBK**. Jeśli bok i dwa leżące przy nim kąty w jednym trójkącie są odpowiednio równe bokowi i dwóm leżącym przy nim kątom w drugim trójkącie, to te dwa trójkąty są przystające.

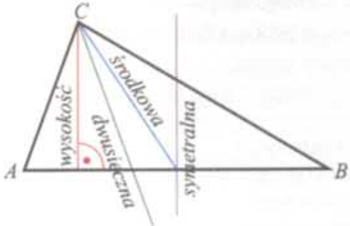
Cechy podobieństwa trójkątów



$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

- **BBB**. Jeśli trzy boki jednego trójkąta są proporcjonalne do trzech boków drugiego trójkąta, to te dwa trójkąty są podobne.
- **BKB**. Jeśli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta i kąty zawarte między tymi bokami są równe, to te dwa trójkąty są podobne.
- **KKK**. Jeśli kąty jednego trójkąta są odpowiednio równe kątom drugiego trójkąta, to te dwa trójkąty są podobne.

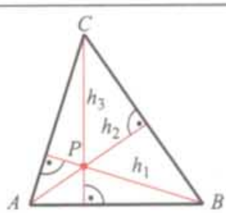
Odcinki i linie w trójkącie



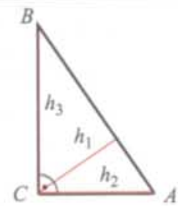
- Wysokością trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta i rzut prostokątny tego wierzchołka na prostą zawierającą przeciwległy bok.
- Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.
- Symetralną boku trójkąta nazywamy prostą prostopadłą do tego boku i przechodzącą przez jego środek.

Twierdzenie o wysokościach trójkąta

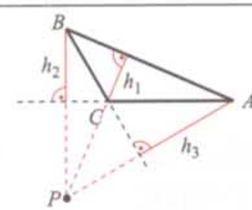
- Każdy trójkąt ma trzy wysokości.
- Proste, w których zawierają się wysokości trójkąta, przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten nazywamy ortocentrum trójkąta.



Punkt P przecięcia się wysokości w trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta.



Punkt przecięcia się wysokości w trójkącie prostokątnym pokrywa się z wierzchołkiem kąta prostego.

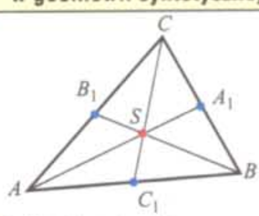


Proste zawierające wysokości w trójkącie rozwartokątnym przecinają się w punkcie P nie należącym do trójkąta.

Twierdzenie o środkowych trójkąta:

- Środkowe trójkąta przecinają się w punkcie S, który nazywamy środkiem ciężkości trójkąta. Punkt S dzieli każdą ze środkowych na dwie części, z których odcinek łączący wierzchołek z punktem S jest dwa razy dłuższy od pozostałej części tej środkowej.

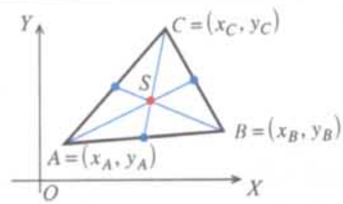
w geometrii syntetycznej



- Jeśli S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, to:

$$\frac{|AS|}{|SA_1|}=\frac{|CS|}{|SC_1|}=\frac{|BS|}{|SB_1|}=2$$

w geometrii analitycznej na płaszczyźnie

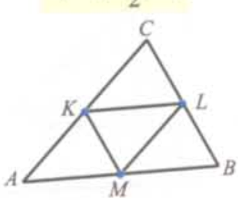


- Jeśli $S=(x_s, y_s)$ jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, to:

$$x_s=\frac{x_A+x_B+x_C}{3} \quad \text{i} \quad y_s=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$$

Twierdzenie o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta

- Jeżeli K, L, M są środkami boków trójkąta ABC, to:
  - $KL \parallel AB$ i $|KL|=\frac{1}{2}|AB|$
  - $LM \parallel AC$ i $|LM|=\frac{1}{2}|AC|$
  - $KM \parallel BC$ i $|KM|=\frac{1}{2}|BC|$

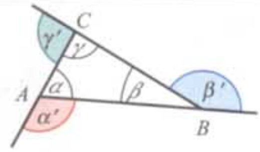


- Jeżeli w trójkącie ABC połączymy odcinkami środki jego boków K, L, M, to otrzymamy cztery przystające trójkąty.

$$\Delta AMK \equiv \Delta MBL \equiv \Delta KLC \equiv \Delta LKM$$

Kąt zewnętrzny trójkąta

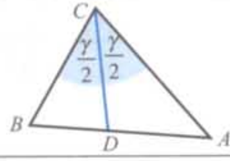
- Kątem zewnętrznym trójkąta nazywamy kąt przyległy do kąta wewnętrznego.
- Miara kąta zewnętrznego trójkąta jest równa sumie miar dwóch kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych.



$\alpha' = \beta + \gamma$
$\beta' = \alpha + \gamma$
$\gamma' = \alpha + \beta$

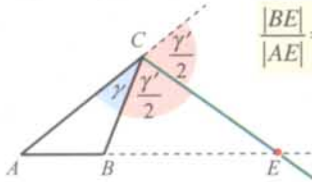
Twierdzenia o dwusiecznych kąta w trójkącie

- Dwusieczna kąta wewnętrznego trójkąta dzieli bok przeciwległy na dwa odcinki, których stosunek długości jest równy stosunkowi długości pozostałych boków.



$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AC|}$$

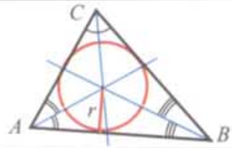
- Jeżeli w trójkącie ABC dwusieczna kąta zewnętrznego γ' przecina przedłużenie boku przeciwległego AB w punkcie E, to odcinki zawarte pomiędzy punktem przecięcia E i końcami tego boku są proporcjonalne do boków przyległych do kąta γ.



$$\frac{|BE|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|AC|}$$

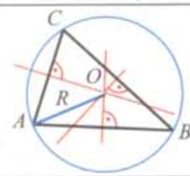
Okrąg wpisany w trójkąt

- Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



Okrąg opisany na trójkącie

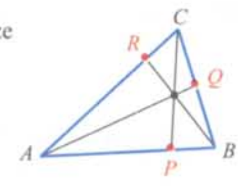
- Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie.



Twierdzenie Cevy

- Dla dowolnego trójkąta ABC i trzech punktów P, Q, R należących odpowiednio do boków AB, BC, CA takich, że żaden z punktów P, Q, R nie pokrywa się z wierzchołkiem trójkąta ABC, zachodzi równoważność:

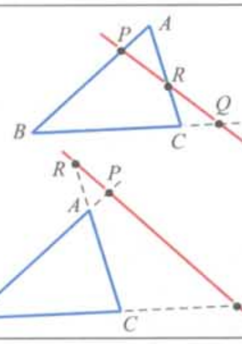
Proste CP, AQ, BR przecinają się w jednym punkcie $\Leftrightarrow \frac{|AP|}{|PB|} \cdot \frac{|BQ|}{|QC|} \cdot \frac{|CR|}{|RA|} = 1$



Twierdzenie Menelaosa

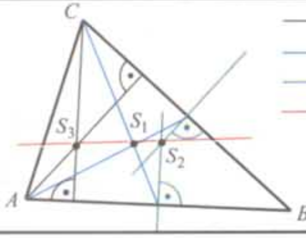
- Jeżeli trzy punkty P, Q, R należą odpowiednio do prostych zawierających boki AB, BC, AC trójkąta ABC i żaden z punktów P, Q, R nie pokrywa się z wierzchołkami tego trójkąta, a dwa spośród nich należą do jego boków, lub żaden z nich nie należy do boku trójkąta, to zachodzi równoważność:

Punkty P, Q, R są współliniowe $\Leftrightarrow \frac{|AP|}{|PB|} \cdot \frac{|BQ|}{|QC|} \cdot \frac{|CR|}{|RA|} = 1.$



Prosta Eulera

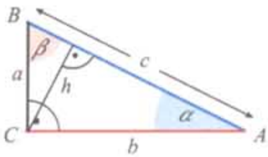
- W każdym trójkącie środek ciężkości S_1, punkt przecięcia się symetralnych boków S_2 i punkt przecięcia wysokości S_3 leżą na jednej prostej, którą nazywamy prostą Eulera i $|S_1S_3| = 2|S_1S_2|$.



— wysokości
— środkowe boków
— symetralne boków
— prosta Eulera

Trójkąt prostokątny

- Trójkąt prostokątny, to trójkąt, którego jeden z kątów wewnętrznych jest prosty.



a, b – długości przyprostokątnych trójkąta,
c – długość przeciwprostokątnej trójkąta,
α, β – miary kątów ostrych trójkąta prostokątnego,
h – długość wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną c,

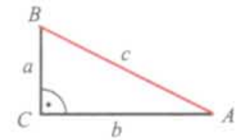
R – długość promienia okręgu opisanego na trójkącie,
r – długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt.

$\alpha + \beta = 90^\circ$ | $\frac{a}{c} = \sin\alpha$ | $\frac{b}{c} = \cos\alpha$ | $\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$ | $\frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha$

Twierdzenie Pitagorasa

- W trójkącie prostokątnym kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości obu przyprostokątnych .

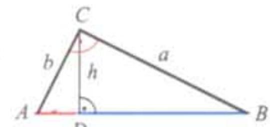
$$c^2 = a^2 + b^2$$



Twierdzenia o wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego

- W trójkącie prostokątnym długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego jest równa średniej geometrycznej długości odcinków, na które dzieli ona przeciwprostokątną.

$$h = \sqrt{|AD| \cdot |DB|} \qquad h^2 = |AD| \cdot |DB|$$



$|AB| = c$

- W trójkącie prostokątnym długość przyprostokątnej jest średnią geometryczną długości rzutu prostokątnego tej przyprostokątnej na przeciwprostokątną i długości przeciwprostokątnej.

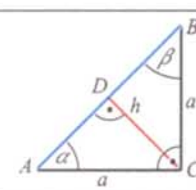
$$a = \sqrt{c \cdot |DB|} \qquad b = \sqrt{c \cdot |AD|}$$

- W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty podobne do niego.

$$\Delta ADC \sim \Delta ACB \sim \Delta CDB$$

- W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC, gdzie $|AC| = |BC|$:

$$|AD| = |BD| = |CD| = h = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \text{i} \quad \alpha = \beta = 45^\circ.$$



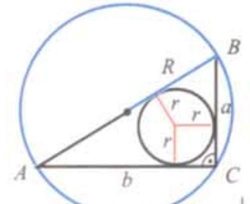
Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Promień okręgu wpisanego i opisanego

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

$$r = \frac{P}{p} = \frac{ab}{a+b+c} \qquad R = \frac{c}{2} \ ,$$

gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ *(połowa obwodu trójkąta)*



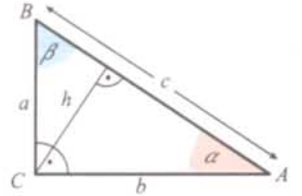
$|AB| = c$

Pole trójkąta prostokątnego

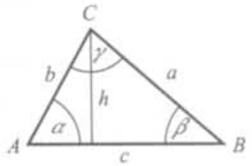
$$P = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c \cdot h$$

$$P = \frac{1}{2}b^2 \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\beta$$

$$P = \frac{1}{4}c^2 \sin 2\alpha$$



Związki miarowe w trójkącie



a, b, c – długości boków trójkąta,
h – długość wysokości trójkąta,
α, β, γ – kąty wewnętrzne trójkata,
R – długość promienia okręgu opisanego na trójkącie,
r – długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt,
p – połowa obwodu trójkąta,
P – pole trójkąta.

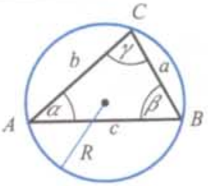
$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

- W każdym trójkącie naprzeciw większego kąta leży dłuższy bok. • $\alpha > \beta \Leftrightarrow a > b$ • $\alpha = \beta \Leftrightarrow a = b$

Twierdzenie sinusów (Snelliusa)

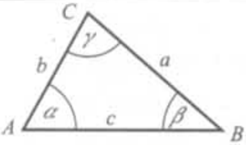
- W każdym trójkącie stosunek długości dowolnego boku do sinusa kąta przeciwległego jest wielkością stałą i równą długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=2R \qquad \frac{b}{\sin\beta}=2R \qquad \frac{c}{\sin\gamma}=2R$$



Twierdzenie cosinusów (Carnota)

- W każdym trójkącie kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków minus podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.

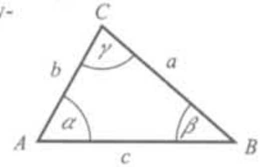


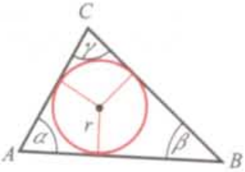
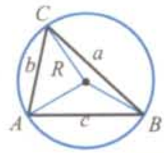
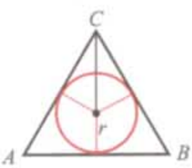
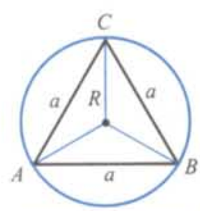
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha \qquad b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta \qquad c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$$

Twierdzenie tangensów (Regiomontana)

- W każdym trójkącie stosunek różnicy długości dwóch boków do ich sumy jest równy stosunkowi tangensa połowy różnicy przeciwległych im kątów do tangensa połowy sumy tych kątów.

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad \frac{a-c}{a+c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}} \qquad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}$$

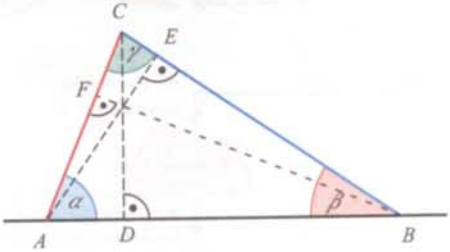


	Promień okręgu wpisanego (*r*)	Promień okręgu opisanego (*R*)
Trójkąt dowolny	 $r=\frac{P}{p}$, $r=\frac{2P}{a+b+c}$; $\lvert AB\rvert=c,\ \lvert AC\rvert=b,\ \lvert BC\rvert=a$	 $R=\frac{abc}{4P}$; $R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{b}{2\sin\beta}=\frac{c}{2\sin\gamma}$
Trójkąt równoboczny	 $r=\frac{1}{3}h=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; *h – długość wysokości trójkąta równobocznego,* *a – długość boku trójkąta równobocznego,* $a=\lvert AB\rvert=\lvert BC\rvert=\lvert CA\rvert$.	 $R=\frac{2}{3}\cdot h=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Pole trójkąta:

dowolnego

w geometrii syntetycznej

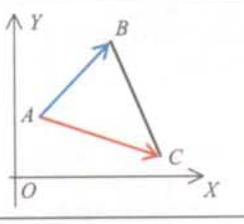


$|BC|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$,
$|\sphericalangle BAC|=\alpha$, $|\sphericalangle ACB|=\gamma$, $|\sphericalangle ABC|=\beta$
$h_A=|AE|$, $h_B=|BF|$, $h_C=|CD|$.

a, b, c – długości boków trójkąta,
α, β, γ – miary kątów wewnętrznych,
h_a, h_b, h_c – długości wysokości trójkąta poprowadzonych odpowiednio na boki a, b, c,
R – długość promienia okręgu opisanego na trójkącie,
r – długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt,
p – połowa obwodu trójkąta,
$P = P_{\Delta ABC}$ – pole trójkąta ABC.

Pole trójkąta	Dane
$P=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma$	*długości dwóch boków trójkąta i miara kąta między nimi zawartego*
$P=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\frac{1}{2}b\cdot h_b=\frac{1}{2}c\cdot h_c$	*długość boku trójkąta i wysokości opuszczonej na ten bok*
$P=p\cdot r=\frac{a+b+c}{2}\cdot r$	*obwód i długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt*
$P=\frac{abc}{4R}$	*długości trzech boków trójkąta i promienia okręgu opisanego na trójkącie*
$P=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$	*miary trzech kątów trójkąta i długość promienia okręgu opisanego na trójkącie*
wzór Herona $P=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie $p=\frac{a+b+c}{2}$	*długości trzech boków trójkąta*

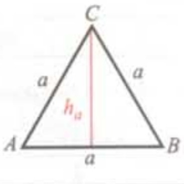
w geometrii analitycznej



$A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$, $C=(x_C,y_C)$.

$$P_{\Delta ABC}=P=\frac{1}{2}|d(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A \end{vmatrix}\right|$$

równobocznego



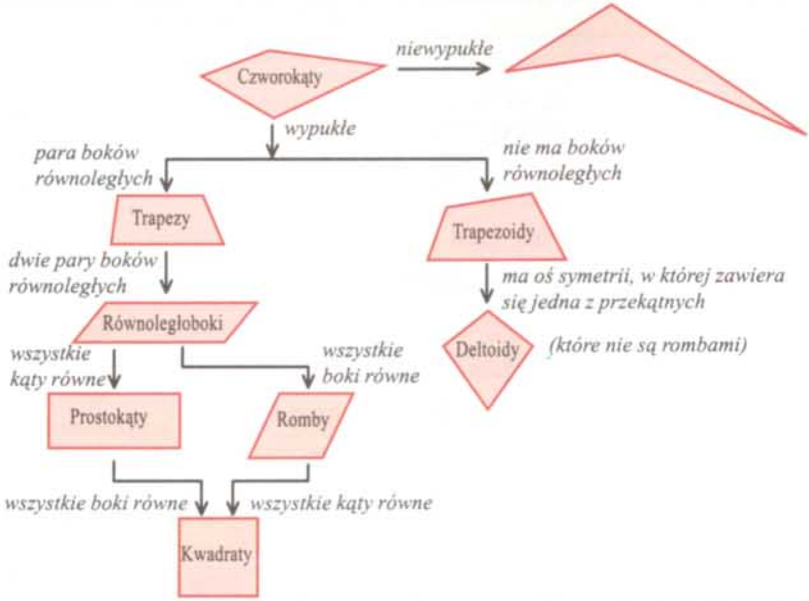
$h=h_a=h_b=h_c$

$$P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$P=\frac{1}{2}a\cdot h$, gdzie $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

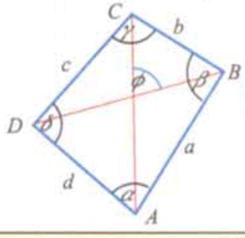
Czworokąt

Klasyfikacja czworokątów



Czworokąt wypukły

- Czworokątem nazywamy wielokąt, który ma cztery boki.



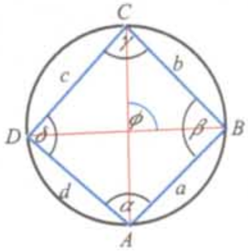
$|DB| = e, \ |AC| = f$

- Suma miar kątów wewnętrznych każdego czworokąta jest równa 360°.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

$\overline{DB}$, $\overline{AC}$ – przekątne czworokąta,
a, b, c, d – długości boków czworokąta,
e, f – długości przekątnych czworokąta,
α, β, γ, δ – miary kątów wewnętrznych czworokąta,
ϕ – miara kąta między przekątnymi czworokąta,
p – połowa obwodu czworokąta,
P – pole czworokąta.

Czworokąt wpisany w okrąg



$|DB| = e, \ |AC| = f$

- Czworokąt można wpisać w okrąg (na czworokącie opisać okrąg) wtedy i tylko wtedy, gdy suma miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych jest równa 180°, czyli gdy

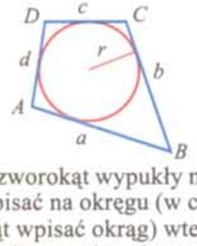
$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

Twierdzenie Ptolemeusza.

- Jeżeli czworokąt jest wpisany w okrąg, to iloczyn długości jego przekątnych jest równy sumie iloczynów długości boków przeciwległych.

$$ef = ac + bd$$

Czworokąt opisany na okręgu



- Czworokąt wypukły można opisać na okręgu (w czworokąt wpisać okrąg) wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków są równe, czyli gdy:

$$a + c = b + d$$

Pole czworokąta wypukłego:

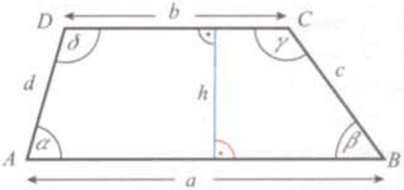
$$P = \frac{1}{2} e \cdot f \cdot \sin\phi$$

wpisanego w okrąg	opisanego na okręgu
$P = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$,	$P = \frac{a+b+c+d}{2} \cdot r = p \cdot r$,

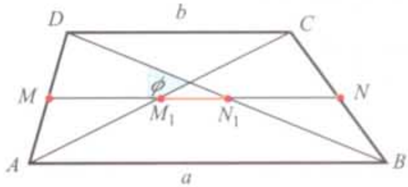
gdzie $p = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Trapez

- Trapezem nazywamy czworokąt, który ma przynajmniej jedną parę boków równoległych.
- Wysokością trapezu nazywamy odcinek zawarty między prostymi zawierającymi jego podstawy i prostopadły do nich.



- $\alpha+\delta=180°$, $\beta+\gamma=180°$

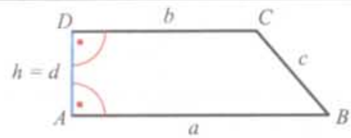


$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ – para boków równoległych (podstawy trapezu),
$|AB|=a$, $|CD|=b$ – długości podstaw trapezu,
$|AD|=d$, $|BC|=c$ – długości ramion trapezu,
h – długość wysokości trapezu,
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – kąty wewnętrzne trapezu,
$|AC|=e$, $|BD|=f$ – długości przekątnych trapezu,
ϕ – miara kąta przecięcia się przekątnych,
A, B, C, D – wierzchołki trapezu,
M, N – środki ramion trapezu,
$\overline{MN}$ – linia środkowa trapezu,
m – długość linii środkowej trapezu,
M_1, N_1 – środki przekątnych trapezu,
p – połowa obwodu trapezu,
P – pole trapezu.

Linia środkowa trapezu	Odcinek łączący środki przekątnych trapezu
• Linia środkowa trapezu – odcinek łączący środki ramion trapezu. • $MN \parallel AB$ • $\lvert MN\rvert=\frac{a+b}{2}$	• $\lvert M_1N_1\rvert=\frac{a-b}{2}$, gdy $a>b$.

Trapez prostokątny

- Jeżeli jedno z ramion trapezu jest prostopadłe do jego podstaw, to taki trapez nazywamy trapezem prostokątnym.
- *Kwadrat i prostokąt są trapezami prostokątnymi.*

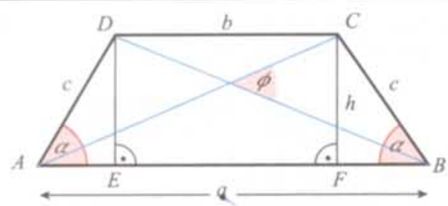


Trapez równoramienny

- Trapez, którego ramiona są równe, nazywamy równoramiennym.
- Jeżeli trapez równoramienny nie jest równoległobokiem, to można na nim opisać okrąg.
- W trapezie równoramiennym $ABCD$ o podstawach $\overline{AB}=a$ i $\overline{DC}=b$, gdy $a>b$, to:

  $|BF|=|AE|=\frac{a-b}{2}$.

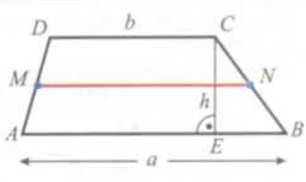
  Punkty E i F są spodkami wysokości poprowadzonych z wierzchołków D i C.



$|AD|=|BC|=c$

$|AC|=|BD|=e$

Pole trapezu:



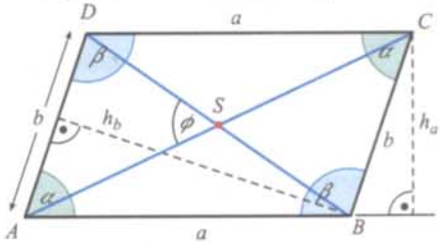
$$P=\frac{(a+b)\cdot h}{2} \qquad P=m\cdot h,$$

gdzie:
$m=|MN|$, $h=|CE|$, $|DM|=|MA|$, $|NC|=|BN|$.

Uwaga.
Jeżeli trapez jest równoramienny o przekątnych długości e, które przecinają się pod kątem ϕ, to jego pole $P=\frac{1}{2}e^2\sin\phi$.

Równoległobok

- Równoległobok to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

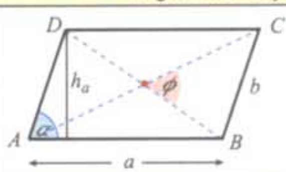
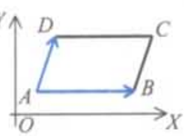


$|AC| = e,\quad |BD| = f$

$|BS| = |SD| = \frac{f}{2},\quad |AS| = |SC| = \frac{e}{2}$

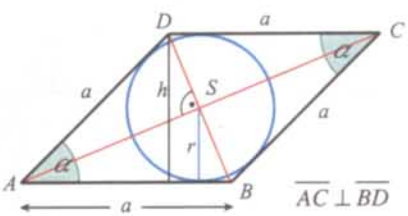
$\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ – *boki równoległoboku,*
$\overline{AC}$, $\overline{BD}$ – *przekątne równoległoboku,*
h_a – *długość wysokości poprowadzonej na bok a,*
h_b – *długość wysokości poprowadzonej na bok b,*
S – *punkt przecięcia się przekątnych,*
e, f – *długości przekątnych równoległoboku,*
α, β – *miary kątów wewnętrznych równoległoboku,*
ϕ – *miara kąta między przekątnymi,*
P – *pole równoległoboku.*

- W każdym równoległoboku:
  - przekątne dzielą się na połowy,
  - przeciwległe kąty są równe,
  - suma miar dwóch kolejnych kątów jest równa 180°,
  - punkt S przecięcia się przekątnych jest środkiem symetrii tego równoległoboku.

	w geometrii syntetycznej	w geometrii analitycznej
Pole równo-ległoboku:	 $P = a \cdot h_a$ $P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$ $P = \frac{1}{2}\lvert AC\rvert \cdot \lvert BD\rvert \cdot \sin\phi$	 $P = \lvert d(\vec{AB}, \vec{AD})\rvert$

Romb

- Romb to czworokąt, którego wszystkie boki są równe.



$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

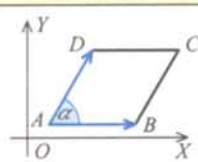
$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BCD| = \alpha,$

$|AC| = d_1 \qquad |BD| = d_2$

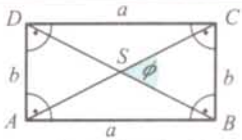
$|AS| = |SC| = \frac{d_1}{2}, \qquad |BS| = |SD| = \frac{d_2}{2}$

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$ – *boki rombu,*
$\overline{AC}$, $\overline{BD}$ – *przekątne rombu,*
d_1, d_2 – *długości przekątnych rombu,*
h – *długość wysokości rombu,*
r – *długość promienia okręgu wpisanego w romb,*
α – *miara kąta ostrego, jaki tworzą boki rombu,*
P – *pole rombu.*

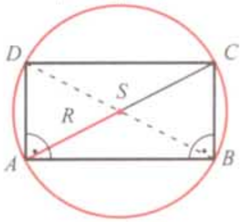
- Romb jest równoległobokiem.
- Punkt przecięcia przekątnych rombu jest środkiem okręgu wpisanego, którego promień r jest połową jego wysokości $r = \frac{1}{2}h$.
- W rombie przekątne dzielą się na połowy i przecinają się pod kątem prostym.

	w geometrii syntetycznej	w geometrii analitycznej
Pole rombu:	$P = a \cdot h$ $P = \frac{\lvert AC\rvert \cdot \lvert BD\rvert}{2} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ $P = 2a \cdot r$ $P = a^2 \sin\alpha$	 $P = \lvert d(\vec{AB}, \vec{AD})\rvert$

Prostokąt



$|AC| = |BD| = d$



$R = \frac{1}{2}d$

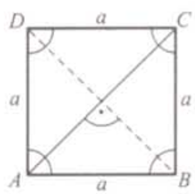
- Prostokąt to czworokąt, którego wszystkie kąty są równe (proste).

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$ – boki prostokąta,
a, b – długości boków prostokąta,
$\overline{AC}$, $\overline{BD}$ – przekątne prostokąta,
d – długość każdej przekątnej prostokąta,
ϕ – miara kąta przecięcia się przekątnych prostokąta,
R – długość promienia okręgu opisanego na prostokącie,
P – pole prostokąta.

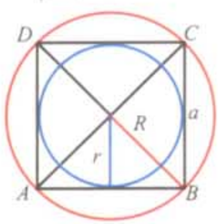
- Prostokąt jest równoległobokiem.
- W prostokącie przekątne są równe i dzielą się na połowy.
- Punkt przecięcia przekątnych prostokąta jest środkiem okręgu opisanego na tym prostokącie.

Pole prostokąta	$P = a \cdot b$	$P = \frac{1}{2}d^2 \sin\phi$	$P = 2R^2 \sin\phi$

Kwadrat



$|AC| = |BD| = d$



$d = a\sqrt{2}$

- Kwadrat to prostokąt, który ma wszystkie boki równe.

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$ – boki kwadratu,
a – długość boku kwadratu,
$\overline{AC}$, $\overline{BD}$ – przekątne kwadratu,
d – długość każdej przekątnej kwadratu,
r – długość promienia okręgu wpisanego w kwadrat,
R – długość promienia okręgu opisanego na kwadracie,
P – pole kwadratu.

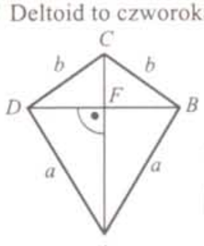
- W kwadracie przekątne są równe, przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy.
- Punkt przecięcia się przekątnych kwadratu jest środkiem okręgu opisanego, którego promień R jest połową przekątnej kwadratu.
- Punkt przecięcia się przekątnych kwadratu jest środkiem okręgu wpisanego, którego promień r jest połową długości boku kwadratu.

$R = \frac{1}{2}d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $r = \frac{1}{2}a$

Pole kwadratu	$P = a^2$	$P = \frac{1}{2}d^2$	$P = 2R^2$	$P = 4r^2$

Deltoid

- Deltoid to czworokąt wypukły, który ma oś symetrii zawierającą jedną z jego przekątnych.



$\overline{AC} \perp \overline{DB}$,
$|DF| = |FB|$

- W deltoidzie przekątne DB i AC są prostopadłe.
- Pole deltoidu jest równe połowie iloczynu długości jego przekątnych.

$$P = \frac{1}{2}|DB| \cdot |AC|$$

Przekształcenie geometryczne płaszczyzny – izometria

Przekształceniem geometrycznym płaszczyzny α nazywamy funkcję, której dziedziną i przeciwdziedziną jest zbiór wszystkich punktów płaszczyzny α.

Jeżeli ϕ jest przekształceniem geometrycznym, to każdemu punktowi $X \in \alpha$ przyporządkowuje dokładnie jeden punkt $X' \in \alpha$, co zapisujemy: $\phi(X) = X'$.

Punkt $A \in \alpha$ jest punktem stałym przekształcenia ϕ, gdy $\phi(A) = A$.

Przekształcenie tożsamościowe

- Przekształceniem tożsamościowym nazywamy takie przekształcenie geometryczne, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje ten sam punkt płaszczyzny (jeśli $X \in \alpha$, to $\phi(X) = X$).

Przekształcenie izometryczne

- Przekształcenie geometryczne $\mathcal{T}$ płaszczyzny α jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary punktów $X, Y \in \alpha$, jeżeli $\mathcal{T}(X) = X'$ i $\mathcal{T}(Y) = Y'$, to $|XY| = |X'Y'|$.

- Własności izometrii:
  - izometria jest przekształceniem różnowartościowym,
  - przekształcenie tożsamościowe jest izometrią,
  - przekształcenie odwrotne do izometrii jest izometrią,
  - złożenie dwu izometrii jest izometrią.

Niezmienniki izometrii płaszczyzny i przestrzeni.

- Izometria zachowuje:
  - współliniowość punktów (współpłaszczyznowość punktów),
  - wypukłość figury,
  - uporządkowanie punktów na prostej,
  - równoległość i prostopadłość prostych (równoległość i prostopadłość płaszczyzn),
  - długości odcinków,
  - miary kątów,
  - pola figur,
  - objętości figur.

- Jeżeli izometria ma dwa punkty stałe, to każdy punkt prostej wyznaczonej przez te punkty jest punktem stałym tej izometrii.

- Jeżeli trzy niewspółliniowe punkty $A, B, C \in \alpha$ są punktami stałymi izometrii $\mathcal{T}$, to każdy punkt płaszczyzny wyznaczonej przez te punkty jest punktem stałym $\mathcal{T}$.

Izometrie własne figury

- Izometrię, w której obrazem figury f jest figura f nazywamy izometrią własną tej figury.

Oś symetrii figury i figura osiowo-symetryczna

- Jeśli $S_k(f) = f$, to prostą k nazywamy osią symetrii figury f.

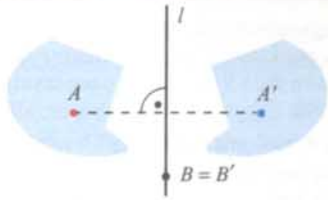
Figura osiowo-symetryczna to figura, która ma oś symetrii.

Środek symetrii figury i figura środkowo-symetryczna

- Jeżeli $S_O(f) = f$, to punkt O nazywamy środkiem symetrii figury f.

Figura środkowo-symetryczna to figura, która ma środek symetrii.

Symetria osiowa



$S_l(A)=A'$ $\quad S_l(l)=l$ $\quad S_l(B)=B'=B$

- Symetrią osiową S_l względem prostej l, zwanej osią symetrii, nazywamy przekształcenie płaszczyzny (przestrzeni), które każdemu punktowi A przyporządkowuje punkt A' taki, że:

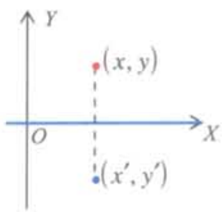
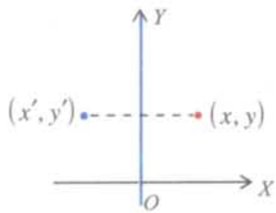
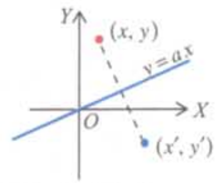
  jeżeli $A \in l$, to $S_l(A)=A$ $(A=A')$,

  a jeżeli $A \notin l$, to prosta l jest symetralną odcinka AA'.

  Punkt A jest symetryczny do punktu A' względem prostej l, jeżeli odcinek AA' jest prostopadły do prostej l i prosta l przechodzi przez środek tego odcinka.

- Symetria osiowa jest izometrią.
- Złożenie symetrii osiowych S_l i S_k jest:
  - tożsamością, gdy $k=l$,
  - translacją, gdy $l \parallel k$,
  - obrotem, gdy $l \nparallel k$,
  - symetrią środkową (obrotem o kąt półpełny), gdy $l \perp k$.
- Przekształceniem odwrotnym do symetrii osiowej jest ta sama symetria osiowa.

Symetria osiowa na płaszczyźnie:

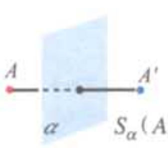
względem osi OX	względem osi OY	względem prostej $y=ax$
		$k:\ y=ax$ 
$S_{OX}(x,y)=(x',y')$, gdzie $\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases}$	$S_{OY}(x,y)=(x',y')$, gdzie $\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}$	$S_k(x,y)=(x',y')$, gdzie $\begin{cases} x'=\frac{1-a^2}{1+a^2}x+\frac{2a}{1+a^2}y \\ y'=\frac{2a}{1+a^2}x-\frac{1-a^2}{1+a^2}y \end{cases}$

Symetria osiowa w przestrzeni:

względem osi OX	względem osi OY	względem osi OZ
$S_{OX}(x,y,z)=(x',y',z')$, gdzie $\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \\ z'=-z \end{cases}$	$S_{OY}(x,y,z)=(x',y',z')$, gdzie $\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \\ z'=-z \end{cases}$	$S_{OZ}(x,y,z)=(x',y',z')$, gdzie $\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \\ z'=z \end{cases}$

Symetria płaszczyznowa:

względem płaszczyzny XOY	względem płaszczyzny XOZ	względem płaszczyzny YOZ
$S_{XOY}(x,y,z)=(x',y',z')$, gdzie $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \\ z'=-z \end{cases}$	$S_{XOZ}(x,y,z)=(x',y',z')$, gdzie $\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \\ z'=z \end{cases}$	$S_{YOZ}(x,y,z)=(x',y',z')$, gdzie $\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \\ z'=z \end{cases}$

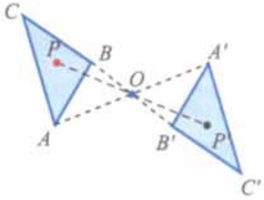


$S_\alpha(A)=A'$

- Jeżeli w izometrii przestrzeni π wszystkie punkty płaszczyzny $\alpha \subset \pi$ są stałe, to izometria ta jest symetrią względem płaszczyzny α (oznaczamy ją S_α) albo przekształceniem tożsamościowym.
- Punkty leżące na płaszczyźnie α są punktami stałymi tego przekształcenia. Jeśli $X \in \alpha$, to $S_\alpha(X)=X$ i $S_\alpha(\alpha)=\alpha$.

Symetria środkowa, translacja

Symetria środkowa

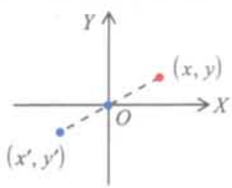


$S_O(\Delta ABC)=\Delta A'B'C'$

- Symetrią środkową względem punktu O nazywamy przekształcenie płaszczyzny (przestrzeni), które dowolnemu punktowi P przyporządkowuje punkt P' taki, że punkt O jest środkiem odcinka PP'. Symetrię tę oznaczamy S_O, a punkt O nazywamy środkiem tej symetrii.
- Symetria środkowa na płaszczyźnie i w przestrzeni jest izometrią.
- Jedynym punktem stałym symetrii środkowej jest środek symetrii.
- Symetria środkowa płaszczyzny jest obrotem wokół środka symetrii o kąt 180°.
- Złożenie trzech symetrii środkowych na płaszczyźnie jest symetrią środkową.
- Złożenie dwóch symetrii środkowych S_K i S_L na płaszczyźnie jest translacją o wektor $2\overrightarrow{KL}$; $S_L \circ S_K = T_{2\cdot\overrightarrow{KL}}$.
- Symetria środkowa S_O na płaszczyźnie jest jednokładnością o środku w punkcie O i skali $k=-1$.

Symetria środkowa względem:

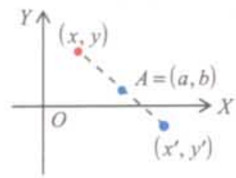
początku układu współrzędnych $O=(0,0)$



$S_{(0,0)}(x,y)=(x',y')$

gdzie $\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$

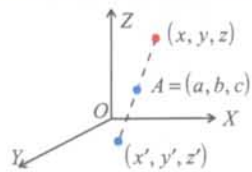
punktu $A=(a, b)$



$S_{(a,b)}(x,y)=(x',y')$,

gdzie $\begin{cases} x'=2a-x \\ y'=2b-y \end{cases}$

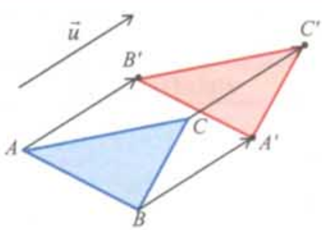
punktu $A=(a, b, c)$



$S_{(a,b,c)}(x,y,z)=(x',y',z')$,

gdzie $\begin{cases} x'=2a-x \\ y'=2b-y \\ z'=2c-z \end{cases}$

Translacja (przesunięcie równoległe)



$T_{\vec{u}}(\Delta ABC)=\Delta A'B'C'$

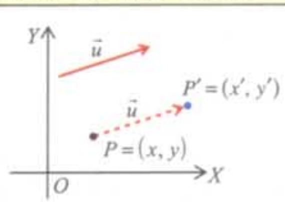
- Translacją T o wektor $\vec{u}$ nazywamy przekształcenie płaszczyzny (przestrzeni), które każdemu punktowi P przyporządkowuje taki punkt P', że $\overrightarrow{PP'}=\vec{u}$. Translację tę oznaczamy $T_{\vec{u}}$.

$$T_{\vec{u}}(P)=P' \Leftrightarrow \overrightarrow{PP'}=\vec{u}$$

- Translacja jest przekształceniem izometrycznym.
- Translacja o wektor niezerowy nie ma punktów stałych.
- Translacja o wektor zerowy jest przekształceniem tożsamościowym.

- Przekształceniem odwrotnym do translacji o wektor $\vec{u}$ jest translacja o wektor $-\vec{u}$. $T_{\vec{u}}^{-1}=T_{-\vec{u}}$
- Złożenie translacji o wektor $\vec{a}$ i translacji o wektor $\vec{b}$ jest translacją o wektor $\vec{a}+\vec{b}$. $T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}+\vec{b}}$

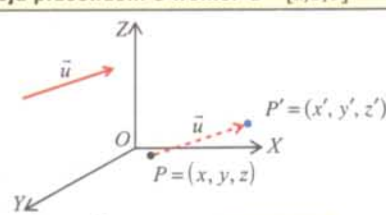
Translacja płaszczyzny o wektor $\vec{u}=[a,b]$



Jeśli $\vec{u}=[a,b]$, to:

$T_{\vec{u}}(x,y)=(x',y')$, gdzie $\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$

Translacja przestrzeni o wektor $\vec{u}=[a,b,c]$



Jeśli $\vec{u}=[a,b,c]$, to:

$T_{\vec{u}}(x,y,z)=(x',y',z')$, gdzie $\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \\ z'=z+c \end{cases}$

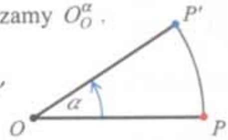
Obrót

Obrót na płaszczyźnie	Obrót o kąt skierowany α dookoła początku układu współrzędnych na płaszczyźnie

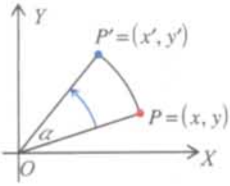
Obrót na płaszczyźnie

- Obrotem dookoła punktu O, zwanego środkiem obrotu, o kąt skierowany α nazywamy przekształcenie płaszczyzny, przyporządkowujące punktowi O punkt O oraz każdemu punktowi $P \neq O$ punkt P' taki, że:
  $|OP'| = |OP|$ i $|\sphericalangle POP'| = \alpha$.
  Obrót ten oznaczamy O_O^{α}.

$O_O^{\alpha}(P) = P'$



Obrót o kąt skierowany α dookoła początku układu współrzędnych na płaszczyźnie



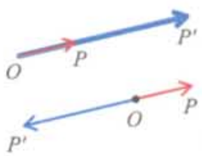
$O_{(0,0)}^{\alpha}(x, y) = (x', y')$,

gdzie $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$

Jednokładność (*homotetia*)

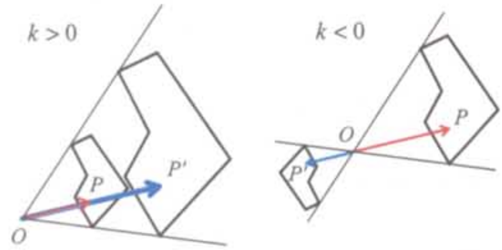
$k > 0$

$k < 0$



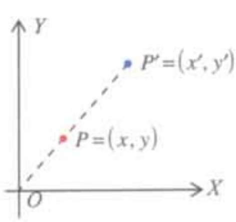
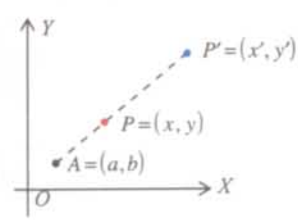
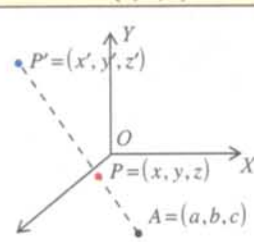
- Jednokładnością J_O^k o środku O i skali $k \neq 0$ nazywamy przekształcenie płaszczyzny (przestrzeni), które dowolnemu punktowi P przyporządkowuje punkt P' taki, że:
  $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$. $J_O^k(P) = P' \Leftrightarrow \overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$.
- Punktem stałym jednokładności jest jej środek.

- Jednokładność o skali $k = 1$ jest przekształceniem tożsamościowym.
- Jednokładność o skali $k = -1$ jest symetrią środkową.
- Jednokładność o skali $k \neq 1$ i $k \neq -1$ nie jest izometrią.
- Każda jednokładność o środku O i skali k jest podobieństwem o skali $|k|$.
- Przekształceniem odwrotnym do jednokładności o środku O i skali k jest jednokładność o środku O i skali $\frac{1}{k}$.
- $J_O^l \circ J_O^k = J_O^{l \cdot k}$.



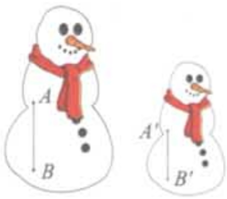
$\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$, gdzie $k \in R \setminus \{0\}$

Jednokładność o skali *k* i środku:

$O = (0, 0)$	$A = (a, b)$	$A = (a, b, c)$
		
$J_O^k(x, y) = (x', y')$, gdzie $\begin{cases} x' = k \cdot x \\ y' = k \cdot y \end{cases}$	$J_A^k(x, y) = (x', y')$, gdzie $\begin{cases} x' = k(x-a)+a \\ y' = k(y-b)+b \end{cases}$	$J_A^k(x, y, z) = (x', y', z')$, gdzie $\begin{cases} x' = k(x-a)+a \\ y' = k(y-b)+b \\ z' = k(z-c)+c \end{cases}$

Podobieństwo, powinowactwo

Podobieństwo



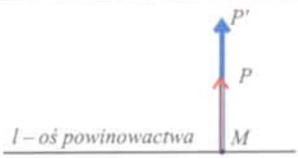
$|A'B'| = k \cdot |AB|$

- Podobieństwem o skali $k > 0$, nazywamy przekształcenie płaszczyzny (przestrzeni), które dowolnej parze punktów A i B przyporządkowuje punkty A' i B' takie, że $|A'B'| = k \cdot |AB|$.
  Jeżeli P^k jest podobieństwem o skali k i $P^k(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$, to $|A'B'| = k \cdot |AB|$.
  Własności podobieństw:
  - przekształcenie tożsamościowe jest podobieństwem o skali $k = 1$,
  - podobieństwo o skali $k = 1$ jest izometrią,
  - przekształcenie odwrotne do podobieństwa o skali k jest podobieństwem o skali $\frac{1}{k}$,
  - złożenie dwu podobieństw o skalach k_1 i k_2 jest podobieństwem o skali $k_1 \cdot k_2$.
- Podobieństwo zachowuje:
  - współliniowość (współpłaszczyznowość) punktów,
  - uporządkowanie punktów na prostej,
  - miary kątów (podobieństwo przekształca kąt na kąt przystający),
  - stosunek długości odpowiednich odcinków.

Figury podobne i ich własności

- Jeśli istnieje podobieństwo o skali $k > 0$, przekształcające figurę f na figurę g, to figury f i g nazywamy podobnymi w skali k i oznaczamy $f \sim g$. Wówczas:
- stosunek obwodów figur f i g, podobnych w skali k, jest równy k.
- stosunek pól figur f i g, podobnych w skali k, jest równy k^2.
- stosunek objętości brył f i g, podobnych w skali k, jest równy k^3.

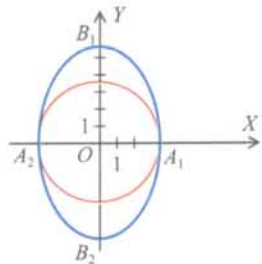
Powinowactwo prostokątne płaszczyzny



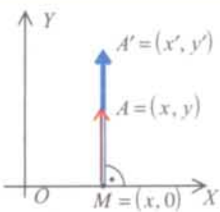
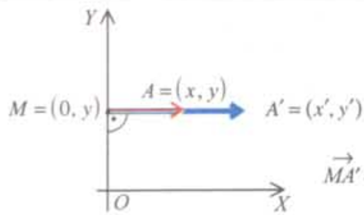
$\overrightarrow{MP'} = k \cdot \overrightarrow{MP}$

- Powinowactwem prostokątnym o osi l i skali $k \neq 0$ nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym obrazem każdego punktu P jest taki punkt P', że
$$\overrightarrow{MP'} = k \cdot \overrightarrow{MP},$$
gdzie punkt M jest rzutem prostokątnym punktu P na oś l.

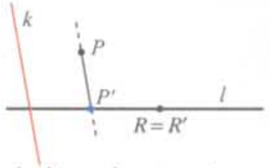
- Oś powinowactwa prostokątnego l jest zbiorem punktów stałych tego przekształcenia.
- Powinowactwo prostokątne o skali $k = -1$ jest symetrią osiową względem osi powinowactwa.
- Przekształceniem odwrotnym do powinowactwa prostokątnego o skali k jest powinowactwo prostokątne o tej samej osi i skali $\frac{1}{k}$.
- W powinowactwie prostokątnym o skali k figura o polu P zostaje przekształcona na figurę o polu $|k| \cdot P$.
- W powinowactwie prostokątnym obrazem prostej jest prosta.



- *Jeżeli $|k| \neq 1$, to obrazem okręgu w powinowactwie prostokątnym o skali k jest elipsa.*

Powinowactwo o skali k i osi OX	Powinowactwo o skali k i osi OY
 $\overrightarrow{MA'} = k \cdot \overrightarrow{MA}$ *Obrazem punktu* $A = (x, y)$ *jest punkt* $A' = (x', y')$, *gdzie* $\begin{cases} x' = x \\ y' = k\,y \end{cases}$	 $\overrightarrow{MA'} = k \cdot \overrightarrow{MA}$ *Obrazem punktu* $A = (x, y)$ *jest punkt* $A' = (x', y')$, *gdzie* $\begin{cases} x' = k\,x \\ y' = y \end{cases}$

Rzut równoległy na prostą



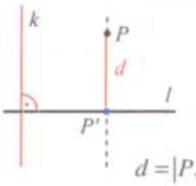
k – kierunek rzutowania
l – rzutnia

- Rzutem równoległym na prostą l (zwaną rzutnią) w kierunku rzutowania k ($k \not\parallel l$) nazywamy przekształcenie płaszczyzny przyporządkowujące:
  - punktom prostej l te same punkty,
  - dowolnemu punktowi $P \notin l$ punkt $P' \in l$ taki, że prosta PP' jest równoległa do k.

Własności rzutu równoległego na prostą:

- Nie istnieje przekształcenie odwrotne do rzutu równoległego płaszczyzny na prostą.
- Obrazem prostej w rzucie równoległym jest punkt lub prosta.
- Obrazem odcinka w rzucie równoległym jest punkt lub odcinek.
- Rzut równoległy zachowuje uporządkowanie punktów prostej, której kierunek jest różny od kierunku rzutu.

Rzut prostokątny na prostą

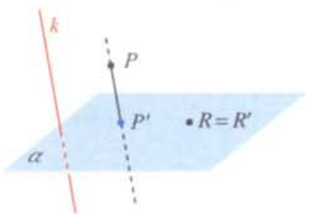


$d = |P,l|$

- Rzutem prostokątnym na prostą l nazywamy rzut równoległy, w którym kierunek rzutowania k jest prostopadły do prostej l.
- Odległość punktu P od prostej l jest równa długości odcinka PP', gdzie punkt P' jest rzutem prostokątnym punktu P na prostą l.

$$|P,l| = |PP'|$$

Rzut równoległy na płaszczyznę

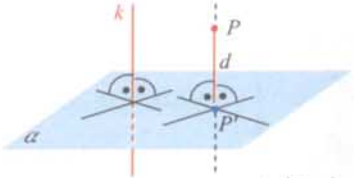


- Rzutem równoległym na płaszczyznę α (zwaną rzutnią) w kierunku rzutowania k ($k \not\parallel \alpha$) nazywamy przekształcenie przestrzeni przyporządkowujące:
  - punktom płaszczyzny α te same punkty,
  - dowolnemu punktowi $P \notin \alpha$ punkt $P' \in \alpha$ taki, że prosta PP' jest równoległa do k.

Własności rzutu równoległego na płaszczyznę w przestrzeni:

- Nie istnieje przekształcenie odwrotne do rzutu równoległego przestrzeni na płaszczyznę.
- Rzut równoległy zachowuje uporządkowanie punktów prostej, której kierunek jest różny od kierunku rzutu.
- Rzutem równoległym prostych równoległych są proste równoległe, jeżeli żadna z nich nie jest równoległa do kierunku rzutu.
- Rzutem równoległym odcinka AB jest odcinek $A'B'$, gdzie końce A' i B' są obrazami końców A i B.
- Rzut odcinka $A'B'$ jest odcinkiem zerowym wtedy i tylko wtedy, gdy odcinek AB jest równoległy do kierunku rzutowania.

Rzut prostokątny na płaszczyznę

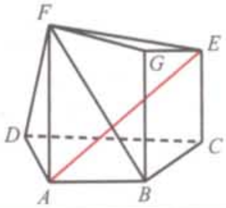


$d = |P,\alpha|$

- Rzutem prostokątnym na płaszczyznę α nazywamy rzut równoległy, w którym kierunek rzutu jest prostopadły do płaszczyzny α.
- Odległość punktu P od płaszczyzny α jest równa długości odcinka PP', gdzie punkt P' jest rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę α.

$$|P,\alpha| = |PP'|$$

Wielościan



$\left.\begin{matrix}\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CE}, \overline{DC}, \overline{BF} \\ \overline{BG}, \overline{AF}, \overline{DF}, \overline{FE}, \overline{EG}\end{matrix}\right\}$ *– krawędzie wielościanu,*

punkty: A, B, C, D, E, F, G – wierzchołki wielościanu,

$\overline{AE}$ *– przekątna wielościanu,*

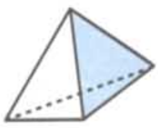
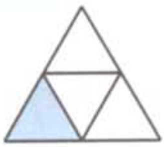
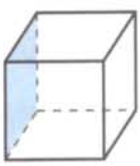
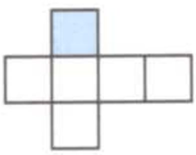
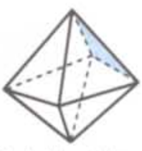
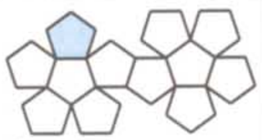
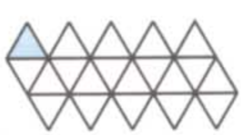
wielokąty : *ABCD, EFG, AFD, ABF, BGF, DCEF, BCEG – ściany wielościanu.*

Twierdzenie Eulera

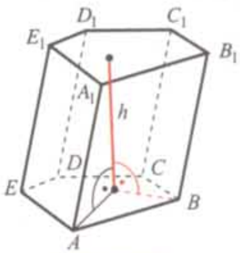
- W wielościanie wypukłym liczba wierzchołków w, liczba krawędzi k i liczba ścian s spełniają równość: $w-k+s=2$.

Wielościany foremne

- Wielościanem foremnym nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i każdy jego wierzchołek jest końcem tej samej liczby krawędzi wielościanu.
- Istnieje pięć wielościanów foremnych: czworościan foremny, sześcian, ośmiościan foremny, dwunastościan foremny, dwudziestościan foremny.

Wielościan foremny o krawędzi a	Siatka wielościanu	R – promień kuli opisanej, r – promień kuli wpisanej, δ – promień kuli stycznej do krawędzi wielościanu.	P – pole powierzchni wielościanu V – objętość wielościanu
 Czworościan (tetraedr)	 Ściany – trójkąty równoboczne	$R=\frac{1}{4}a\sqrt{6}$ $r=\frac{1}{12}a\sqrt{6}$ $\delta=\frac{1}{4}a\sqrt{2}$	$P=a^2\sqrt{3}$ $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
 Sześcian (heksaedr)	 Ściany – kwadraty	$R=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ $r=\frac{1}{2}a$ $\delta=a\frac{\sqrt{2}}{2}$	$P=6a^2$ $V=a^3$
 Ośmiościan (oktaedr)	 Ściany – trójkąty równoboczne	$R=\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ $r=\frac{1}{6}a\sqrt{6}$ $\delta=\frac{a}{2}$	$P=2a^2\sqrt{3}$ $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
 Dwunastościan (dodekaedr)	 Ściany – pięciokąty foremne	$R=\frac{1}{4}a\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)$ $r=\frac{1}{20}a\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}$ $\delta=\frac{a\left(3+\sqrt{5}\right)}{4}$	$P=3a^2\sqrt{5}\left(5+2\sqrt{5}\right)$ $V=\frac{1}{4}a^3\left(15+7\sqrt{5}\right)$
 Dwudziestościan (ikosaedr)	 Ściany – trójkąty równoboczne	$R=\frac{1}{4}a\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ $r=\frac{1}{12}a\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)$ $\delta=\frac{a\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}$	$P=5a^2\sqrt{3}$ $V=\frac{5}{12}a^3\left(3+\sqrt{5}\right)$

- Graniastosłupem nazywamy wielościan, którego dwie ściany, zwane podstawami, są przystającymi wielokątami leżącymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany, zwane ścianami bocznymi, są równoległobokami, których wszystkie wierzchołki są jednocześnie wierzchołkami podstaw.
- Graniastosłup, którego podstawa jest n-kątem, nazywa się graniastosłupem n-kątnym.
- Wysokość graniastosłupa to odcinek zawarty w prostej prostopadłej do jego podstaw, którego końcami są punkty wspólne tej prostej z płaszczyznami zawierającymi podstawy graniastosłupa.

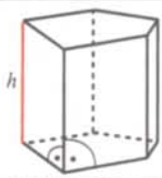


$V = P_p \cdot h$

$P_c = 2P_p + P_b$

punkty $A, B, C, D, E, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$ – wierzchołki graniastosłupa,
wielokąty $ABCDE$; $A_1B_1C_1D_1E_1$ – podstawy graniastosłupa,
równoległoboki $ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, \ldots$ – ściany boczne graniastosłupa,
h – długość wysokości graniastosłupa,
d – długość przekątnej graniastosłupa,
a, b, c – długości krawędzi graniastosłupa,
P_p – pole podstawy graniastosłupa,
P_b – pole powierzchni bocznej (suma pól ścian bocznych),
P_c – pole powierzchni całkowitej graniastosłupa,
V – objętość graniastosłupa,
$2p$ – długość obwodu podstawy graniastosłupa.

Graniastosłup prosty

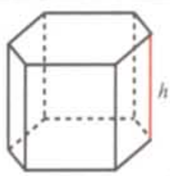


graniastosłup prosty pięciokątny

- Graniastosłup prosty to graniastosłup, w którym krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw.
- Długość wysokości graniastosłupa prostego jest równa długości jego krawędzi bocznej.

$V = P_p \cdot h$ $\quad$ $P_b = 2p \cdot h$

Graniastosłup prawidłowy



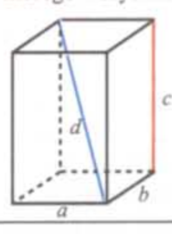
graniastosłup prawidłowy sześciokątny

- Graniastosłup prawidłowy to graniastosłup prosty, którego podstawy są wielokątami foremnymi.
- Długość wysokości graniastosłupa prawidłowego jest równa długości jego krawędzi bocznej.

$V = P_p \cdot h$ $\quad$ $P_b = 2p \cdot h$

Prostopadłościan

- Prostopadłościan to graniastosłup, którego wszystkie ściany są prostokątami.



$P_p = a \cdot b$

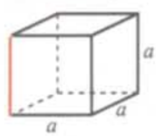
$P_b = 2(ac + bc)$

$P_c = 2(ac + ab + bc)$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$V = abc$

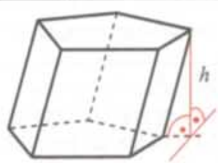
- **Sześcian** to prostopadłościan, którego wszystkie krawędzie mają jednakową długość (ściany są kwadratami).



$P_c = 6a^2$

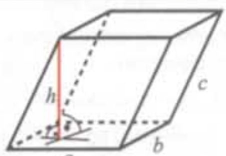
$V = a^3$

Graniastosłup pochyły



- Graniastosłup pochyły to graniastosłup, w którym krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw.
- W graniastosłupie pochyłym długość wysokości jest mniejsza od długości krawędzi bocznej.

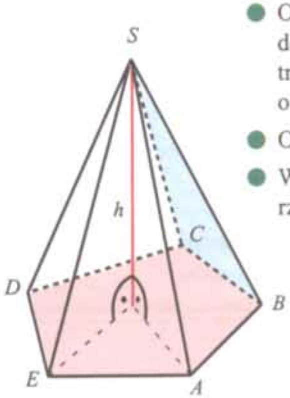
Równoległościan



- Równoległościan to graniastosłup, którego wszystkie ściany są równoległobokami.

$V = P_p \cdot h$

Ostrosłup

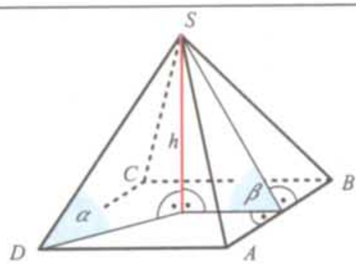


$$P_c = P_p + P_b \qquad V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

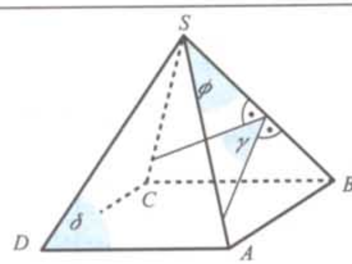
- Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego jedna ściana, zwana podstawą, jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany, nazywane ścianami bocznymi, są trójkątami o wspólnym wierzchołku S, który nazywamy wierzchołkiem ostrosłupa.
- Ostrosłup, którego podstawa jest n-kątem, nazywa się ostrosłupem n-kątnym.
- Wysokością ostrosłupa nazywamy odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa z jego rzutem prostokątnym na płaszczyznę podstawy (tzw. spodkiem wysokości).

punkty A, B, C, D, E, S – wierzchołki ostrosłupa,
wielokąt $ABCDE$ – podstawa ostrosłupa,
S – wierzchołek ostrosłupa,
ΔABS, ΔAES, ΔDES, ΔDCS, ΔBCS – ściany boczne ostrosłupa,
h – długość wysokości ostrosłupa,
P_b – pole powierzchni bocznej (suma pól ścian bocznych),
P_p – pole podstawy ostrosłupa,
P_c – pole powierzchni całkowitej ostrosłupa,
V – objętość ostrosłupa.

Kąty w ostrosłupie

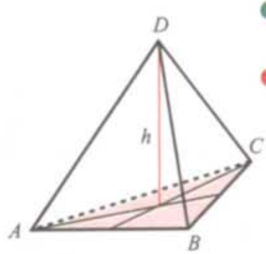


α – kąt nachylenia krawędzi bocznej DS do płaszczyzny podstawy ostrosłupa,
β – kąt nachylenia ściany bocznej ABS do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.



γ – kąt między ścianami bocznymi ABS i CBS ostrosłupa,
ϕ – kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa,
δ – kąt między krawędzią boczną a krawędzią podstawy.

Czworościan



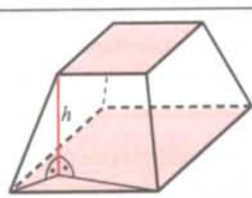
- Czworościanem nazywamy ostrosłup, którego podstawą jest trójkąt.
- Odcinki łączące wierzchołki czworościanu ze środkami ciężkości przeciwległych im ścian przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem ciężkości czworościanu i dzieli każdy z tych odcinków, licząc od wierzchołka, w stosunku 3 : 1.

Czworościan, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi nazywa się czworościanem foremnym.

Ostrosłup prawidłowy

- Ostrosłupem prawidłowym nazywamy ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt foremny i którego spodek wysokości pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na jego podstawie.
- Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

Ostrosłup ścięty



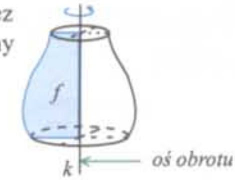
$$V = \frac{1}{3} h \left(P_1 + P_2 + \sqrt{P_1 \cdot P_2} \right)$$

- Ostrosłup ścięty jest to część ostrosłupa zawarta między jego podstawą i przekrojem płaszczyzną równoległą do podstawy.
- Ściany boczne ostrosłupa ściętego są trapezami.
- Podstawy ostrosłupa ściętego są wielokątami podobnymi.

P_1, P_2 – pola podstaw ostrosłupa ściętego,
h – długość wysokości ostrosłupa ściętego.

- Jeżeli figura f i prosta k zawarte są w jednej płaszczyźnie, to figurę otrzymaną przez pełny obrót figury f wokół prostej k nazywamy figurą obrotową. Prostą k nazywamy osią obrotu tej figury.

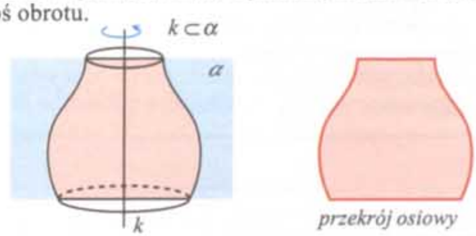
P_b – pole powierzchni bocznej bryły obrotowej,
P_c – pole powierzchni bryły obrotowej,
V – objętość bryły obrotowej.



Przekroje brył obrotowych:

przekrój osiowy

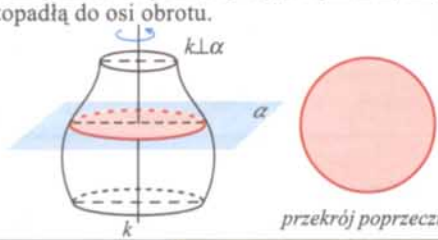
- Przekrojem osiowym bryły obrotowej nazywamy część wspólną tej bryły z płaszczyzną zawierającą oś obrotu.



przekrój osiowy

przekrój poprzeczny

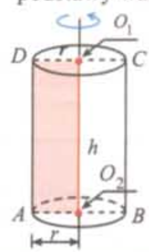
- Przekrojem poprzecznym bryły obrotowej nazywamy część wspólną tej bryły z płaszczyzną prostopadłą do osi obrotu.



przekrój poprzeczny

Walec

- Walcem nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót prostokąta dookoła prostej zawierającej jeden z boków prostokąta. Bok prostokąta zawarty w osi obrotu jest wysokością walca, a drugi jego bok jest promieniem podstawy walca.



h – długość wysokości walca,
r – długość promienia podstawy walca,
P_p – pole podstawy walca,
P_b – pole powierzchni bocznej walca,

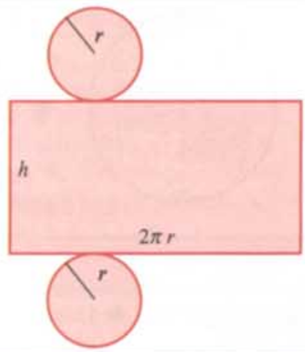
$$P_p = \pi r^2 \qquad P_b = 2\pi r h$$

$$P_c = 2P_p + P_b = 2\pi r(r+h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

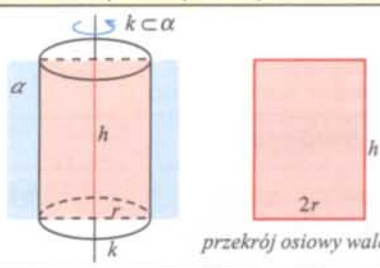
gdzie $r = |O_2A| = |O_1D|$, $h = |O_1O_2| = |AD|$.

Siatka walca



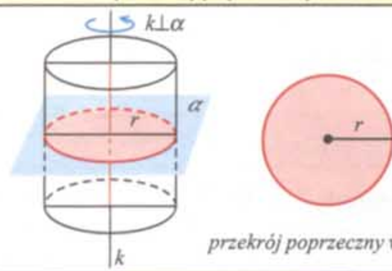
Przekroje walca:

przekrój osiowy



przekrój osiowy walca

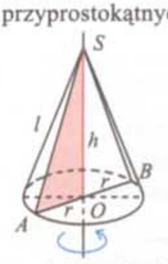
przekrój poprzeczny



przekrój poprzeczny walca

Stożek

- Stożkiem nazywamy bryłę obrotową powstałą przez obrót trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych.



h – długość wysokości stożka,
l – długość tworzącej stożka,
r – długość promienia podstawy stożka.

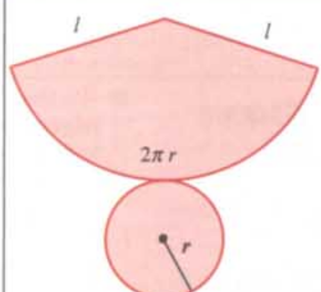
$$P_p = \pi r^2 \qquad P_b = \pi r l$$

$$P_c = P_p + P_b = \pi r(r+l)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h\ ,$$

gdzie: $h = |SO|$, $r = |OA| = |OB|$, $l = |SA| = |SB|$.

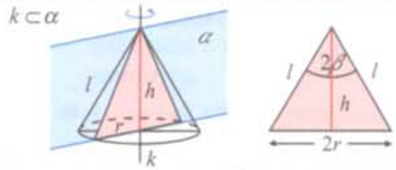
Siatka stożka



Bryły obrotowe

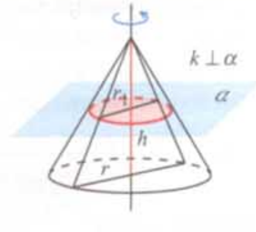
Przekroje stożka:

przekrój osiowy

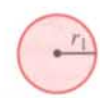


- Kąt rozwarcia stożka 2β, to kąt między ramionami trójkąta równoramiennego będącego przekrojem osiowym stożka.

przekrój poprzeczny

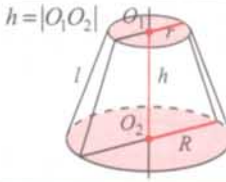


$r_1 < r$



przekrój poprzeczny stożka

Stożek ścięty



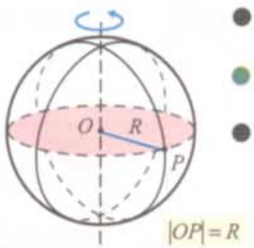
- Stożek ścięty jest to część stożka zawarta między jego podstawą i przekrojem poprzecznym wraz z nim.

$k(O_1, r_1), k(O_2, r_2)$ – podstawy stożka ściętego,
r, R – promienie podstaw stożka ściętego,
h – długość wysokość stożka ściętego,
l – długość tworzącej stożka ściętego.

$$l = \sqrt{(R-r)^2 + h^2}$$
$$P_b = \pi(R+r)\cdot l$$
$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

Kula

- Kulą o środku O i promieniu R nazywamy zbiór wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest nie większa od R.



- Kula jest bryłą obrotową powstałą przez obrót półkola dookoła prostej, w której zawarta jest średnica tego półkola.
- Sferą o środku O i promieniu R nazywamy zbiór wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest równa R.
- Sfera jest bryłą obrotową powstałą przez obrót półokręgu dookoła prostej, w której zawarta jest średnica tego półokręgu.

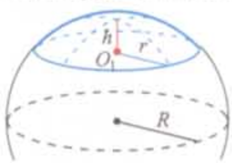
O – środek kuli (sfery),
R – promień kuli (sfery),
$K(O, R)$ – kula o środku O i promieniu R,
$S(O, R)$ – sfera o środku O i promieniu R.

$$P = 4\pi R^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Części kuli

Odcinek kuli

- Odcinkiem kuli nazywamy każdą z dwóch części kuli, na które dzieli tę kulę płaszczyzna przechodząca przez jej wnętrze wraz z przekrojem kuli tą płaszczyzną. Płaszczyzna ta dzieli sferę na dwie części zwane czaszami kuli.

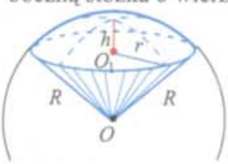


$k(O_1, r)$ – podstawa odcinka kuli,
r – długość promienia podstawy czaszy,
R – długość promienia kuli,
h – długość wysokości czaszy,
P – pole powierzchni czaszy,
V – objętość odcinka kuli.

$$r = \sqrt{(2R-h)h}$$
$$P = 2\pi Rh$$
$$V = \frac{1}{2}\pi r^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3$$

Wycinek kuli

- Wycinkiem kuli nazywamy część kuli ograniczoną powierzchnią kuli i powierzchnią boczną stożka o wierzchołku w środku tej kuli.

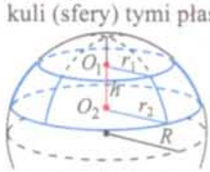


h – długość wysokości czaszy,
r – długość promienia podstawy czaszy,
R – długość promienia kuli,
V – objętość wycinka kuli.

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

Warstwa kuli

- Warstwą kuli (pasem sferycznym) nazywamy zbiór punktów kuli (sfery) znajdujących się między dwiema równoległymi, przecinającymi kulę, płaszczyznami wraz z przekrojami kuli (sfery) tymi płaszczyznami.



$k(O_1, r_1)$, $k(O_2, r_2)$ – podstawy warstwy kuli,
r_1, r_2 – długości promieni podstaw warstwy kuli,
h – długość wysokości warstwy,
R – długość promienia kuli.

$$V = \frac{1}{2}\pi r_1^2 \cdot h + \frac{1}{2}\pi r_2^2 \cdot h + \frac{1}{6}\pi h^3$$

- Kombinatoryką nazywamy dział matematyki zajmujący się wyznaczaniem liczby elementów zbiorów skończonych utworzonych zgodnie z określonymi zasadami.
- Twierdzenie o mnożeniu.

Liczba wszystkich różnych ciągów ($x_1, x_2, ..., x_k$) takich, że element x_i $(i = 1, 2, ..., k)$ można wybrać na n_i sposobów jest równa $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$.

Wariacje

Wariacja bez powtórzeń

- Wariacją k-elementową bez powtórzeń zbioru n-elementowego ($k \le n$) nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnowartościowy, którego wyrazami są elementy danego zbioru.
- Liczba wszystkich różnych k-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego jest równa:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$, gdzie $k \le n, \quad n,k \in N^+$

Wariacja z powtórzeniami

- Wariacją k-elementową z powtórzeniami zbioru n-elementowego nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg, którego wyrazami są elementy danego zbioru.
- Liczba wszystkich różnych k-elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego jest równa:

$$\overline{V}_n^k = n^k$$, gdzie $n,k \in N^+$

Permutacje

Permutacja bez powtórzeń

- Permutacją bez powtórzeń zbioru n-elementowego $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg utworzony z wszystkich elementów tego zbioru, czyli każde uporządkowanie elementów zbioru A.
- Liczba wszystkich różnych permutacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego jest równa:

$$P_n = n!$$, gdzie $n \in N^+$

Permutacja z powtórzeniami

- Dany jest zbiór $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Permutacją n-elementową z powtórzeniami zbioru A, w której element a_1 występuje n_1 razy, element a_2 występuje n_2 razy, ..., element a_k występuje n_k razy, przy czym $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg, w którym element a_i występuje n_i razy dla $i = 1, 2, ..., k$.
- Liczba wszystkich różnych n-elementowych permutacji z powtórzeniami opisanych wyżej jest równa:

$$P_n^{n_1, n_2, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!},$$

gdzie $n_i \in N^+$, $i = 1, 2, ..., k$, n_i – liczba powtórzeń elementu $a_i \in A$, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Kombinacje

Kombinacja bez powtórzeń

- Kombinacją k – elementową bez powtórzeń zbioru n-elementowego ($k \le n$) nazywamy każdy podzbiór k-elementowy tego zbioru.
- Liczba wszystkich różnych kombinacji k-elementowych bez powtórzeń zbioru n-elementowego jest równa:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$, gdzie $k \le n, \ n,k \in N^+$

Kombinacja z powtórzeniami

- Kombinacją k-elementową z powtórzeniami zbioru n-elementowego $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ nazywamy każdy ciąg $(k_1, k_2, ..., k_n)$ taki, że $k_1 + k_2 + ... + k_n = k$, gdzie $k_i \in N$ dla $i = 1, 2, ..., n$.

Oznacza to, że w danej kombinacji występuje k_1 elementów a_1 , k_2 elementów a_2 , ..., k_n elementów a_n .
- Liczba wszystkich różnych k-elementowych kombinacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego jest równa:

$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$, gdzie $n, k \in N^+$

Doświadczenie losowe

- Rachunkiem prawdopodobieństwa (probabilistyką) nazywamy dział matematyki zajmujący się badaniem zjawisk losowych i praw rządzących tymi zjawiskami.

Doświadczenia losowe

Doświadczenie losowe	Doświadczeniem losowym (eksperymentem, zjawiskiem losowym) nazywamy takie doświadczenie, które można powtarzać wielokrotnie w jednakowych lub zbliżonych warunkach i którego wyniku nie można przewidzieć.
Wynik doświadczenia losowego	Każdą realizację doświadczenia losowego nazywamy wynikiem doświadczenia losowego.
Zbiór wszystkich wyników doświadczenia losowego	Zbiór wszystkich wyników doświadczenia losowego stanowi podstawę do budowy abstrakcyjnego modelu doświadczenia.
Częstość względna wyników w doświadczeniu losowym	Jeżeli przy n powtórzeniach doświadczenia losowego dany wynik A wystąpił k razy, to liczbę $\frac{k}{n}$ nazywamy częstością względną wyniku A. *Częstość względną wyniku możemy obliczyć tylko po wykonaniu serii powtórzeń doświadczenia losowego.*

Modelowanie doświadczeń losowych

Model doświadczenia losowego ***przestrzeń probabilistyczna***	Budowanie modeli zjawisk losowych polega na przypisaniu doświadczeniu losowemu zbioru Ω o skończonej liczbie wyników, funkcji prawdopodobieństwa P określonej dla wszystkich podzbiorów zbioru Ω. **Parę (Ω, P) nazywamy przestrzenią probabilistyczną.** Doświadczeniu losowemu można przypisać różne modele probabilistyczne.

Doświadczenie losowe:	Model doświadczenia losowego:
– wynik doświadczenia losowego,	– zdarzenie elementarne ω,
– zbiór wszystkich wyników doświadczenia losowego,	– Ω – (przestrzeń zdarzeń elementarnych),
– podzbiór zbioru wszystkich wyników doświadczenia losowego,	– zdarzenie losowe – podzbiór zbioru Ω,
– częstość względna.	– prawdopodobieństwo.

Zdarzenie elementarne ω	• Zdarzenie elementarne to pojęcie pierwotne w teorii prawdopodobieństwa.
Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω	• Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych i oznaczamy literą Ω.
Zdarzenie losowe	• Każdy podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych nazywamy zdarzeniem losowym (zdarzeniem). Zdarzenia oznaczamy literami $A, B, C, \ldots$ (lub $A_1, A_2, A_3, \ldots$). • Każde zdarzenie elementarne $\omega \in A$ nazywa się zdarzeniem elementarnym sprzyjającym zdarzeniu A.
Zdarzenie pewne Ω	• Zbiór Ω nazywamy zdarzeniem pewnym. • *Zdarzenie A jest pewne, jeżeli* $A=\Omega$.
Zdarzenie niemożliwe $\varnothing$	• Zbiór pusty $\varnothing$ nazywamy zdarzeniem niemożliwym. • *Zdarzenie A jest niemożliwe, jeżeli* $A=\varnothing$.
Zdarzenia przeciwne	• Zdarzenie $A'=\Omega\setminus A$ nazywamy przeciwnym do zdarzenia A. • $A'=\Omega\setminus A$, $A\cap A'=\varnothing$, $A\cup A'=\Omega$. • $\Omega'=\varnothing$, $\varnothing'=\Omega$. • Zdarzenia A i B nazywamy zdarzeniami przeciwnymi, jeżeli: $A\cup B=\Omega$, i $A\cap B=\varnothing$.

Suma zdarzeń *A* i *B*	Suma skończonej liczby zdarzeń A_i (dla $i = 1, 2, \ldots, n$)
• Sumą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A\cup B$, któremu sprzyjają zdarzenia elementarne ω, sprzyjające zdarzeniu A lub zdarzeniu B. $\omega\in A\cup B \Leftrightarrow \omega\in A \vee \omega\in B$ $A\cup A=A, \quad A\cup\varnothing=A, \quad A\cup\Omega=\Omega$	• Sumą skończonej liczby zdarzeń A_i ($i=1,2,\ldots,n$) nazywamy zdarzenie $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$, któremu sprzyjają zdarzenia elementarne ω sprzyjające przynajmniej jednemu ze zdarzeń A_i.
Iloczyn zdarzeń *A* i *B*	**Zdarzenia rozłączne (wykluczające się)**
• Iloczynem zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A\cap B$, któremu sprzyjają zdarzenia elementarne ω sprzyjające zdarzeniu A i zdarzeniu B. $\omega\in A\cap B \Leftrightarrow \omega\in A \wedge \omega\in B$ $A\cap A=A, \quad A\cap\varnothing=\varnothing, \quad A\cap\Omega=A$	• Dwa zdarzenia A i B nazywamy wykluczającymi się, jeżeli zdarzenie $A\cap B$ jest zdarzeniem niemożliwym, czyli gdy: $A\cap B=\varnothing$

Różnica zdarzeń *A* i *B*
• Różnicą zdarzeń A *i* B nazywamy zdarzenie $A\setminus B$ do którego należą zdarzenia elementarne ω sprzyjające zdarzeniu A i nie sprzyjające zdarzeniu B. $\omega\in A\setminus B \Leftrightarrow \omega\in A \wedge \omega\notin B$

Prawdopodobieństwo

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa	● Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych. Prawdopodobieństwem nazywamy funkcję, która każdemu zdarzeniu A ($A \subset \Omega$) przyporządkowuje liczbę $P(A)$, spełniającą następujące warunki (aksjomaty): A1. $P(A) \geq 0$ (prawdopodobieństwo jest liczbą nieujemną), A2. $P(\Omega) = 1$ (prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1), A3. Jeżeli $A \cap B = \varnothing$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (Prawdopodobieństwo sumy wykluczających się zdarzeń jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń).
Klasyczna definicja prawdopodobieństwa **(df. Laplace'a)**	● Jeżeli Ω jest skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych ω jednakowo prawdopodobnych i $A \subset \Omega$, to liczbę $P(A) = \dfrac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \dfrac{\text{liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu } A}{\text{liczba wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych}}$ nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia A. $\overline{\overline{A}}$ – moc zbioru A (liczba elementów zbioru A), $\overline{\overline{\Omega}}$ – moc zbioru Ω (liczba elementów zbioru Ω).

Własności prawdopodobieństwa	prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego $\varnothing$:	$P(\varnothing) = 0$
	prawdopodobieństwo zdarzenia A' przeciwnego do zdarzenia A: $(A \subset \Omega)$	$P(A') = 1 - P(A)$
	prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A i B, gdy $A, B \subset \Omega$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
	jeżeli $A \subset B$, to	$P(A) \leq P(B)$
	dla każdego $A \subset \Omega$ zachodzi nierówność:	$P(A) \leq 1$
	● *Prawdopodobieństwo każdego zdarzenia losowego jest liczbą należącą do przedziału* $\langle 0;1 \rangle$.	

Prawdopodobieństwo warunkowe	● Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A \mid B)$ zajścia (wystąpienia) zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, nazywamy liczbę: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, gdzie $A, B \subset \Omega$, $P(B) > 0$.
Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń	● Dla dowolnej pary zdarzeń A, B takich, że $A, B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$ zachodzi równość: $P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$.
Zdarzenia niezależne	● Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ nazywamy niezależnymi wtedy i tylko wtedy gdy: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. ● Zdarzenia A i B są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z dwu przypadków: 1° $P(A \mid B) = P(A)$, gdy $P(B) > 0$ lub 2° $P(B) = 0$. ● Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ nazywamy niezależnymi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $k = 2, 3, \ldots, n$ i każdego k-elementowego rosnącego ciągu indeksów $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ zachodzi równość $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot P(A_{i_3}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$.
Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym	● Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n \subset \Omega$ spełniają warunki: 1° $B_i \cap B_j = \varnothing$ dla $i \neq j$ oraz $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, 2° $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$, 3° $P(B_i) > 0$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$ zachodzi wzór: $P(A) = P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A \mid B_n) \cdot P(B_n)$ **Wzór Bayesa** (*przy założeniach tw. o prawdopodobieństwie całkowitym*) ● $P(B_i \mid A) = \dfrac{P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + \ldots + P(A \mid B_n) \cdot P(B_n)}$, *gdzie* $P(A) > 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Schemat Bernoulliego

Próba Bernoulliego

- Próbą Bernoulliego nazywamy doświadczenie losowe, w którym możliwe są tylko dwa wyniki, będące zdarzeniami przeciwnymi. Jeden z wyników nazywa się sukcesem, a drugi porażką.

Schemat Bernoulliego

- Schematem N prób Bernoulliego nazywamy doświadczenie polegające na N-krotnym powtórzeniu ustalonej próby Bernoulliego, przy założeniu, że wynik każdej próby nie zależy od wyników prób poprzednich i nie wpływa na wyniki prób następnych.
- Prawdopodobieństwo tego, że w schemacie Bernoulliego o N próbach sukces otrzyma się dokładnie k razy ($0 \le k \le N$) jest równe:

$$P_N(k)=\binom{N}{k}\cdot p^k\cdot q^{N-k},$$

gdzie: $p>0, q>0$ i $p+q=1$,
p – prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie,
q – prawdopodobieństwo porażki w jednej próbie.

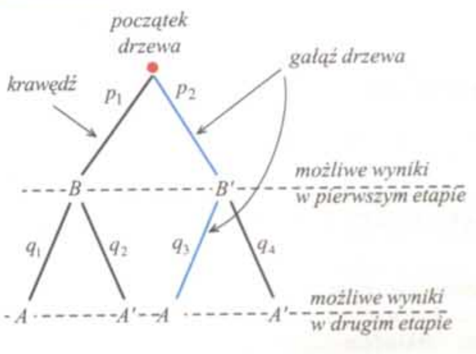
Najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego

- Jeżeli w schemacie N prób Bernoulliego liczba $(N+1)p$:
  - nie jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów jest największa liczba całkowita mniejsza od $(N+1)p$,
  - jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobne liczby sukcesów są równe: $(N+1)p-1$ i $(N+1)p$.

Drzewo stochastyczne

- Drzewem stochastycznym nazywamy graf ilustrujący przebieg wieloetapowego doświadczenia losowego. Wierzchołkom drzewa stochastycznego przyporządkowane są wyniki poszczególnych etapów doświadczenia, a krawędziom prawdopodobieństwa uzyskania tych wyników. Suma prawdopodobieństw przyporządkowanych krawędziom wychodzącym z tego samego wierzchołka jest równa 1.

Najprostszy przykład grafu dwuetapowego doświadczenia



B, B' – dwa możliwe wyniki w pierwszym etapie doświadczenia,
A, A' – dwa możliwe wyniki w drugim etapie doświadczenia,
p_1 – prawdopodobieństwo otrzymania wyniku B w pierwszym etapie,
p_2 – prawdopodobieństwo otrzymania wyniku B' w pierwszym etapie,
q_1, q_3 – prawdopodobieństwo warunkowe otrzymania wyniku A w drugim etapie,
q_2, q_4 – prawdopodobieństwo warunkowe otrzymania wyniku A' w drugim etapie,

$p_1+p_2=1$ $\quad q_1+q_2=1$ $\quad q_3+q_4=1$

- Gałąź drzewa stochastycznego - ciąg krawędzi prowadzących od początku drzewa do jednego z ostatnich jego wierzchołków.

Reguła iloczynów *– Prawdopodobieństwo zdarzenia reprezentowanego przez jedną gałąź drzewa jest równe iloczynowi prawdopodobieństw przyporządkowanych krawędziom, z których składa się rozważana gałąź. Reguła wynika ze wzoru na prawdopodobieństwo iloczynu.*

Reguła sum *– Prawdopodobieństwo danego zdarzenia opisanego przez kilka gałęzi jest równe sumie prawdopodobieństw otrzymanych regułą iloczynów dla tych gałęzi. Reguła wynika z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.*

Zmienna losowa

Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P – prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach w tym zbiorze. Każdą funkcję X określoną na zbiorze Ω, o wartościach rzeczywistych, nazywamy zmienną losową.

$X, Y, Z, \ldots$ **lub** $X_1, X_2, X_3, \ldots$ – oznaczenia zmiennej losowej,

$\{X = x\}$ – zdarzenie: $\{\omega \in \Omega:\ X(\omega) = x\}$ – *zmienna losowa X przyjmuje wartość x,*

$P(X = x)$ – prawdopodobieństwo zdarzenia $\{\omega \in \Omega:\ X(\omega) = x\}$,

$\{X < x\}$ – zdarzenie: $\{\omega \in \Omega:\ X(\omega) < x\}$ – *zmienna losowa X przyjmuje wartości mniejsze od liczby x,*

$P(X < x)$ – prawdopodobieństwo zdarzenia $\{\omega \in \Omega:\ X(\omega) < x\}$,

$\{|X - c| < \varepsilon\}$ – zdarzenie: $\{\omega \in \Omega:\ |X(\omega) - c| < \varepsilon\}$ – *wartości zmiennej losowej X różnią się od danej liczby c o mniej niż ε,*

$P(|X - c| < \varepsilon)$ – prawdopodobieństwo zdarzenia $\{\omega \in \Omega:\ |X(\omega) - c| < \varepsilon\}$.

Zmienna losowa skokowa

- Zmienną losową, która ma skończony (lub przeliczalny) zbiór wartości, nazywamy skokową lub dyskretną.

Rozkład zmiennej losowej skokowej

- Jeżeli zbiorem wartości zmiennej X jest zbiór $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, to rozkładem zmiennej losowej X nazywamy zbiór uporządkowanych par (x_i, p_i), dla $i = 1, 2, \ldots, n$, gdzie $p_i = P(X = x_i)$ jest prawdopodobieństwem z jakim zmienna losowa X przyjmuje wartość x_i.

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

Rozkład dwupunktowy

- Jeżeli zmienna losowa X przyjmuje tylko dwie wartości x_1 i x_2 z prawdopodobieństwami p_1 i p_2, gdzie $P(X = x_1) = p_1$ i $P(X = x_2) = p_2$ oraz $(p_1 > 0,\ p_2 > 0,\ p_1 + p_2 = 1)$, to zbiór $\{(x_1, p_1), (x_2, p_2)\}$ nazywamy rozkładem dwupunktowym.
- Gdy $x_1 = 1$ i $x_2 = 0$ oraz $P(X = 1) = p$ i $P(X = 0) = q$ $(p > 0, q > 0, p + q = 1)$, to zbiór $\{(1, p), (0, q)\}$ nazywamy rozkładem zerojedynkowym.

Rozkład dwumianowy (Bernoulliego)

- Jeżeli zmienna losowa X przyjmuje wartości $k = 0, 1, \ldots, n$, $\quad P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, gdzie $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, to zbiór

$$\left\{\left(0, \binom{n}{0} q^n\right), \left(1, \binom{n}{1} p q^{n-1}\right), \ldots, \left(n, \binom{n}{n} p^n\right)\right\}$$

nazywamy rozkładem dwumianowym (Bernoulliego).

- Gdy $p = q = \frac{1}{2}$, to rozkład nazywamy symetrycznym, gdy $p \neq q$, to rozkład nazywamy asymetrycznym.

Rozkład hipergeometryczny

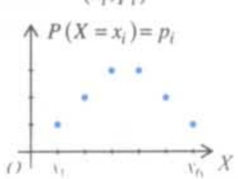
- Jeżeli zmienna losowa X przyjmuje całkowite nieujemne wartości k, z prawdopodobieństwami

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}, \quad \text{gdzie } r \le n \text{ i } 0 \le k \le \min(m, r);\ m < n;\ m, n, r \in N^+,$$

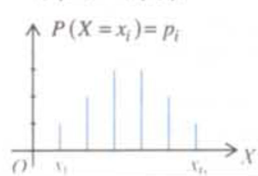
to zbiór par $(k, P(X = k))$ nazywamy rozkładem hipergeometrycznym.

Ilustracje graficzne rozkładów

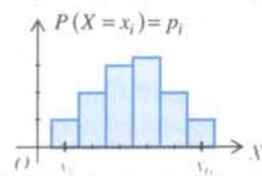
Rozkład przedstawiony w postaci zbioru punktów (x_i, p_i).



Rozkład przedstawiony w postaci zbioru odcinków o końcach $(x_i, 0)$ i (x_i, p_i).



Rozkład przedstawiony za pomocą diagramu słupkowego, w którym pole i-tego słupka jest równe p_i.



Wartość oczekiwana zmiennej losowej	● Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X (wartością średnią, wartością przeciętną, nadzieją matematyczną) o rozkładzie $\{(x_i, p_i),\ i=1,2,\ldots,n\}$ nazywamy liczbę $$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$ ● $E(cX) = c \cdot EX$, gdzie $c \in R$, ● $E(X+Y) = EX + EY$, gdzie X, Y – zmienne losowe określone na tym samym zbiorze Ω.
Wariancja zmiennej losowej	● Wariancją zmiennej losowej X o rozkładzie $\{(x_i, p_i),\ i=1,2,\ldots,n\}$ nazywamy liczbę $$D^2X = E\left[(X-EX)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - EX)^2 \cdot p_i,$$ gdzie EX jest wartością oczekiwaną zmiennej losowej X. ● $D^2X = E(X)^2 - (EX)^2$, gdzie $E(X)^2 = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \ldots + x_n^2p_n$. ● *Wariancja zmiennej losowej X jest parametrem charakteryzującym rozproszenie rozkładu zmiennej losowej X względem wartości oczekiwanej EX.* ● $D^2X = p \cdot q$ *w rozkładzie dwupunktowym,* ● $D^2X = n \cdot p \cdot q$ *w rozkładzie dwumianowym.*
Odchylenie standardowe zmiennej losowej	● Liczbę $\sigma = \sqrt{D^2X}$, gdzie D^2X jest wariancją zmiennej losowej X, nazywamy odchyleniem standardowym zmiennej losowej X.
Odchylenie przeciętne zmiennej losowej	● Odchyleniem przeciętnym zmiennej losowej X względem wartości oczekiwanej EX nazywamy liczbę d określoną wzorem $d = E\lvert X - EX\rvert$. ● Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład $\{(x_i, p_i),\ i=1,2,\ldots,n\}$, to $$d = \sum_{i=1}^{n}\lvert x_i - EX\rvert \cdot p_i.$$
Mediana zmiennej losowej	● Medianą zmiennej losowej X o rozkładzie $\{(x_i, p_i),\ i=1,2,\ldots,n\}$ nazywamy każdą taką liczbę x, dla której spełniony jest układ warunków: $\begin{cases} P(X \le x) \ge 0{,}5 \\ P(X \ge x) \ge 0{,}5 \end{cases}$.
Moda zmiennej losowej	● Modą (dominantą) zmiennej losowej X o rozkładzie $\{(x_i, p_i),\ i=1,2,\ldots,n\}$ nazywamy najbardziej prawdopodobną wartość x zmiennej losowej X. *Moda to liczba (liczby)* x_i, *dla której (których)* $p_i \ge p_k$ *dla* $k = 1, 2, \ldots, n$. *Modą w rozkładzie Bernoulliego jest ta wartość (wartości) k zmiennej X, której odpowiada najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego.*
Zmienna losowa standaryzowana	● Zmienną losową $Y = \dfrac{X - EX}{\sigma}$, gdzie X jest zmienną losową o wartości oczekiwanej EX i dodatnim odchyleniem standardowym σ, nazywamy zmienną losową standaryzowaną. ● $EY = 0$, ● $D^2Y = 1$, $(\sigma = 1)$.

Statystyka

Statystyka to nauka zajmująca się badaniem zjawisk masowych. Zjawisko masowe – zjawisko, które może wystąpić nieskończoną liczbę razy.

Statystyka opisowa zajmuje się zagadnieniami związanymi z gromadzeniem i prezentacją danych oraz badaniem populacji na podstawie pobranych prób.

Statystyka matematyczna zajmuje się modelami matematycznymi (przede wszystkim teorią prawdopodobieństwa), które służą do badania zjawisk losowych.

Porównanie pojęć z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki

Rachunek prawdopodobieństwa	Statystyka
zmienna losowa	cecha statystyczna (zmienna)
prawdopodobieństwo	częstość
rozkład zmiennej losowej	szereg (rozdzielczy) częstości cechy
wykres rozkładu zmiennej losowej	histogram częstości badanej cechy
wartość oczekiwana	średnia arytmetyczna
moda	moda
mediana	mediana
wariancja	wariancja
odchylenie standardowe	odchylenie standardowe

Populacja

- Populacją (zbiorowością statystyczną, populacją generalną) nazywamy zbiór elementów, tzw. jednostek statystycznych objętych badaniem statystycznym.

Próba

- Próbą (próbką) nazywamy podzbiór populacji generalnej podlegający bezpośrednio badaniom ze względu na określoną cechę.

Liczebność próby n

- Liczebnością próby nazywamy liczbę jednostek statystycznych wchodzących w skład próby (liczbę zebranych danych).

Cecha (zmienna)

- Cechą statystyczną nazywamy właściwość (własność), służącą do różnicowania i identyfikacji jednostek statystycznych.

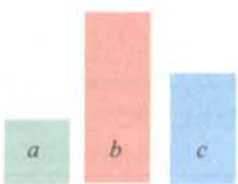
  Cechy statystyczne nazywamy zmiennymi i oznaczamy dużymi literami $X, Y, Z, \ldots$ lub $X_1, X_2, X_3, \ldots$
- Cechą mierzalną nazywamy taką cechę, którą można wyrazić za pomocą liczb pochodzących z pomiaru lub policzenia.
- Cechą niemierzalną nazywamy cechę, którą można wyrazić jedynie za pomocą określenia słownego.

Dane

Obserwacjami statystycznymi lub danymi statystycznymi nazywamy wartości zmiennej (cechy statystycznej) zarejestrowane w trakcie badania statystycznego.

Przykłady graficznych prezentacji danych

Diagram słupkowy

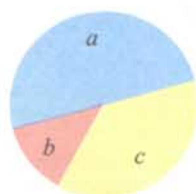


Każdy rodzaj danych przedstawiony jest w postaci słupka, którego wysokość obrazuje, ile razy wynik pojawił się w próbie.

Diagram prostokątny

Liczebność lub częstość całej próby obrazuje prostokąt, a poszczególne jego części obrazują liczebności lub części określonych wartości zmiennej.

Diagram kołowy



Liczebność lub częstość całej próby wyrażona jest w postaci koła, którego zaznaczone wycinki obrazują liczebności lub częstości poszczególnych wyników.

Uwaga: Chcąc przedstawić graficznie wyniki badań zazwyczaj częstości wyrażamy w procentach.

Liczebność wartości x_i zmiennej X n_i	Liczbę n_i danych przyjmujących tę samą wartość x_i zmiennej X nazywamy liczebnością tej wartości zmiennej.
Częstość wartości x_i zmiennej X $\frac{n_i}{n}$	*Liczbę* $\frac{n_i}{n}$ *nazywamy częstością wartości* x_i *zmiennej* X, *gdzie* n_i *– liczebność wartości* x_i, n *– liczebność danych.*
Rozkład częstości zmiennej	Rozkładem częstości zmiennej X, której zbiorem wartości jest $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$, nazywamy zbiór uporządkowanych par postaci $\left(x_i, \frac{n_i}{n}\right)$, gdzie $i = 1, 2, ..., k$.

Szereg szczegółowy

Wartości zmiennej	x_1	x_2	...	x_i	...	x_k
Liczebność n_i	n_1	n_2	...	n_i	...	n_k
Częstość	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	...	$\frac{n_i}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

Szereg szczegółowy liczebności

$$n_1 + n_2 + .. + n_i + ... + n_k = n$$

Klasyfikacja danych statystycznych

Klasyfikacja danych statystycznych to procedura uporządkowania danych, polegająca na podziale zbioru danych na przedziały zwane klasami. Każdy element zbioru danych może być zaliczony tylko do jednej klasy.

Dane klasyfikuje się następująco:

1° oblicza się rozstęp R danych,

2° ustala się liczbę k klas,

3° oblicza się długość b klasy, gdzie $b = \frac{R}{k}$.

Rozstęp danych R

- Rozstępem danych nazywamy różnicę między największą wartością x_{max} i najmniejszą wartością x_{min} zmiennej (cechy mierzalnej) X.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

Ustalanie liczby klas k

Liczbę k klas można ustalić z zależności:

- $5 \le k \le 20$, gdy próba n (liczba danych) jest mała ($n \le 30$),
- $k \approx \sqrt{n}$ lub $k \approx \sqrt{\frac{n}{2}}$ lub $k \le 5\ln n$, gdy próba (liczba danych) jest liczna,

albo z tabeli:

Liczebność danych n	30 - 60	60 - 100	100 - 200	200 - 500	500 - 1500
Liczba klas k	6 - 8	7 - 10	9 - 12	11 - 17	16 - 25

Liczebność klasy n_i **częstość klasy**

- Liczbę n_i danych, które należą do i-tej klasy nazywamy jej liczebnością.
- Liczbę $\frac{n_i}{n}$ (stosunek liczebności n_i klasy do liczebności n całej próby) nazywamy częstością klasy.

Częstość skumulowana

- Częstością skumulowaną i-tej klasy nazywamy sumę częstości tej klasy i częstości klas poprzednich.

$$\text{Częstość skumulowana } i\text{-tej klasy} = \left(\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + ... + \frac{n_{i-1}}{n}\right) + \frac{n_i}{n} = \frac{n_1 + n_2 + ... + n_i}{n}$$

Szereg rozdzielczy

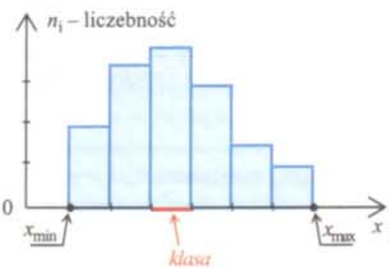
Szereg rozdzielczy liczebności

Nr klasy	Klasy	Liczebność n_i klasy	Częstość $\frac{n_i}{n}$	Częstość skumulowana
1	$\langle x_{\min}; x_{\min}+b)$	n_1	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_1}{n}$
2	$\langle x_{\min}+b; x_{\min}+2b)$	n_2	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_1+n_2}{n}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
i	$\langle x_{\min}+(i-1)b; x_{\min}+ib)$	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1+n_2+...+n_i}{n}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
k	$\langle x_{\min}+(k-1)b; x_{\max}\rangle$	n_k	$\frac{n_k}{n}$	1
		$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$	$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = 1$	

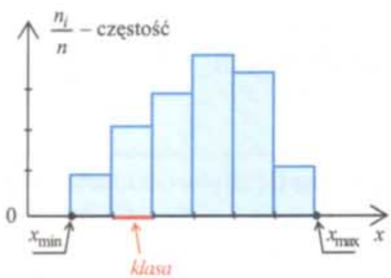
- Szeregiem rozdzielczym (rozkładem empirycznym zmiennej) nazywamy zbiór uporządkowanych par (przedstawionych w tabeli), w których każdej klasie przyporządkowana jest jej liczebność (ewentualnie częstość).
- Wykres szeregu rozdzielczego nazywamy histogramem.

Graficzne prezentacje szeregu rozdzielczego

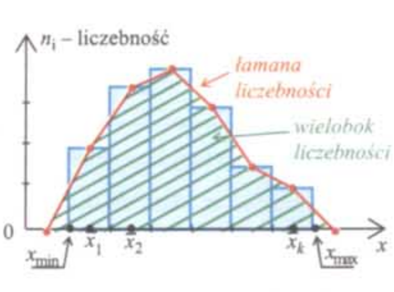
Histogram liczebności



Histogram częstości

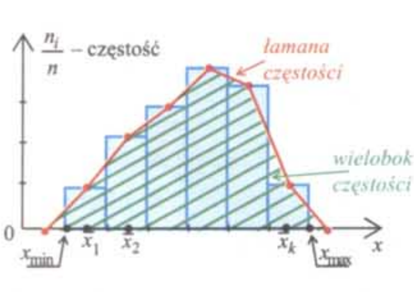


Wielobok liczebności



$\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_k$ – *środki klas*

Wielobok częstości



$\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_k$ – *środki klas*

Łamana liczebności (częstości) czyli krzywa rozkładu liczebności (częstości), to linia ciągła łącząca środki górnych podstaw prostokątów histogramów.

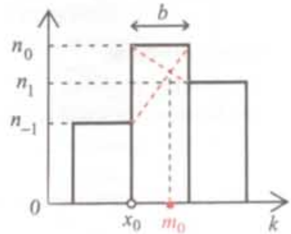
Miary tendencji centralnej

Moda (dominanta)

m_0

- Modą (dominantą) z danych nazywamy tę wartość (wartości) zmiennej, która (które) występuje najczęściej.
- *Graficzną ilustracją mody jest punkt (punkty) na osi odciętych, któremu (którym) odpowiada maksimum liczebności lub częstości.*
- *Wyznaczanie mody z szeregu szczegółowego polega na wskazaniu tej (tych) wartości zmiennej X, której (którym) odpowiada największa liczebność (częstość).*

Graficzne i rachunkowe wyznaczanie mody z szeregu rozdzielczego



n_0 – *liczebność klasy modalnej,*
n_{-1} – *liczebność klasy poprzedzającej klasę modalną,*
n_1 – *liczebność klasy następującej po klasie modalnej,*
b – *długość klasy,*
x_0 – *dolna granica klasy modalnej,*
m_0 – *moda.*

$$m_0 = x_0 + b \cdot \frac{n_0 - n_{-1}}{2n_0 - (n_{-1} + n_1)}$$

Klasa (klasy) modalna – klasa (klasy), której odpowiada największa liczebność lub częstość.

Mediana (wartość środkowa)

m_e

- Medianą (wartością środkową) cechy mierzalnej nazywamy tę wartość, która dzieli zbiór wartości danych $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ na dwie części tak, że liczba danych, których wartości zmiennej są mniejsze od mediany, jest równa liczbie danych, których wartości zmiennej są większe od mediany.

Wyznaczanie mediany ze zbioru $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ uporządkowanych niemalejąco danych

1° n – liczba nieparzysta $m_e = x_{\frac{n+1}{2}}$ 2° n – liczba parzysta $m_e = \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

Wyznaczanie mediany z szeregu rozdzielczego

Medianę z szeregu rozdzielczego znajdujemy według następującego schematu:

1° tworzymy szereg skumulowany liczebności:

Nr klasy	Klasy	Liczebność klasy	Liczebność skumulowana klas
1	$\langle x_{min}; x_{min}+b\rangle$	n_1	$n_1 = f_1$
2	$(x_{min}+b; x_{min}+2b\rangle$	n_2	$n_1 + n_2 = f_2$
⋮	⋮	⋮	⋮
i	$(x_{min}+(i-1)b; x_{min}+ib\rangle$	n_i	$n_1 + n_2 + ... + n_i = f_i$
⋮	⋮	⋮	⋮
k	$(x_{min}+(k-1)b; x_{max}\rangle$	n_k	$n_1 + n_2 + ... + n_k = n = f_k$

Szereg skumulowany liczebności

Mediana

2° określamy pozycję mediany: $\text{pozycja mediany} = \frac{n+1}{2}$

3° z szeregu skumulowanego odczytujemy klasę, w której znajduje się mediana. Liczebność skumulowana tej klasy jest nie mniejsza (większa lub równa) od pozycji mediany, która jest większa od liczebności skumulowanej klasy poprzedniej.

4° wyznaczamy medianę z jednego z dwóch podanych niżej wzorów:

- $m_e = x_0 + b \cdot \frac{\frac{n+1}{2} - f_0}{n_0}$, *albo*
- $m_e = x_1 - b \cdot \frac{f_1 - \frac{n+1}{2}}{n_0}$,

gdzie:

x_0, x_1 – *końce klasy zawierającej medianę,*
n_0 – *liczebność klasy zawierającej mediánę,*
f_0 – *liczebność skumulowana klasy poprzedzającej klasę zawierającą medianę,*

gdzie $f_0 < \frac{n+1}{2} \le f_1$,

f_1 – *liczebność skumulowana klasy zawierającej medianę,*
b – *długość klas.*

Średnia arytmetyczna

$\overline{x}$

Wyznaczanie średniej arytmetycznej cechy mierzalnej:	
z n uporządkowanych danych zmiennej $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.	$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
z szeregu szczegółowego zmiennej $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$	$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ldots + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i$, gdzie $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.
z szeregu rozdzielczego	$\overline{x} = \frac{\overline{x}_1 \cdot n_1 + \overline{x}_2 \cdot n_2 + \ldots + \overline{x}_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \overline{x}_i \cdot n_i$, gdzie liczby $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ są środkami klas, czyli $\overline{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, dla $i = 1, 2, \ldots, k$ oraz $n_1, n_2, \ldots, n_k$ są liczebnościami klas, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Zależności między modą, medianą i średnią arytmetyczną

- Jeżeli dla danego rozkładu jednomodalnego spełniony jest warunek:

  rozkład jest symetryczny, to $\overline{x} = m_e = m_0$,

  $\overline{x} > m_e > m_0$, to ma on asymetrię lewą (skośny dodatnio),

  $\overline{x} < m_e < m_0$, to ma on asymetrię prawą (skośny ujemnie).

Wzór Pearsona:

- Jeżeli dany szereg ma jedną modę i ma niedużą asymetrię (patrz współczynnik asymetrii A_S), to:

$$\overline{x} - m_0 \cong 3(\overline{x} - m_e).$$

Miary rozproszenia danych (miary dyspersji)

Odchylenie przeciętne d

- Odchyleniem przeciętnym nazywamy średnią arytmetyczną wartości bezwzględnych odchyleń od średniej arytmetycznej.

Odchylenie wartości zmiennej x_i od średniej arytmetycznej $\overline{x}$ jest równe $x_i - \overline{x}$.

Wyznaczanie odchylenia przeciętnego z n uporządkowanych danych zmiennej $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.	$d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i - \overline{x}\rvert$, gdy $d = 0$, to wszystkie dane są równe średniej arytmetycznej (wszystkie dane skupione w jednym punkcie).
Wyznaczanie odchylenia przeciętnego z szeregu szczegółowego.	$d = \frac{n_1 \cdot \lvert x_1 - \overline{x}\rvert + n_2 \cdot \lvert x_2 - \overline{x}\rvert + ... + n_k \cdot \lvert x_k - \overline{x}\rvert}{n_1 + n_2 + ... + n_k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \lvert x_i - \overline{x}\rvert$, gdzie: $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.
Wyznaczanie odchylenia przeciętnego z szeregu rozdzielczego.	$d = \frac{n_1 \cdot \lvert \overline{x}_1 - \overline{x}\rvert + n_2 \cdot \lvert \overline{x}_2 - \overline{x}\rvert + ... + n_k \cdot \lvert \overline{x}_k - \overline{x}\rvert}{n_1 + n_2 + ... + n_k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \lvert \overline{x}_i - \overline{x}\rvert$, gdzie liczby $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_k$ są środkami klas o liczebnościach odpowiednio $n_1, n_2, ..., n_k$, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Wariancja σ^2

- Wariancją nazywamy średnią arytmetyczną kwadratów odchyleń od średniej arytmetycznej.

Wyznaczanie wariancji z n uporządkowanych danych zmiennej $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.	$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2$
Wyznaczanie wariancji z szeregu szczegółowego.	$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2$
Wyznaczanie wariancji z szeregu rozdzielczego.	$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (\overline{x}_i - \overline{x})^2$

Odchylenie standardowe σ

- Odchyleniem standardowym nazywamy średnią kwadratową odchyleń od średniej arytmetycznej.
- Odchylenie standardowe jest równe pierwiastkowi kwadratowemu z wariancji $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Duża wartość odchylenia standardowego świadczy o dużym rozproszeniu obserwacji.

Odchylenie względne (współczynnik zmienności) v

$$v = \frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100\%$$

- Odchylenie względne (współczynnik zmienności) informuje o tym, ile procent średniej arytmetycznej stanowi odchylenie standardowe.

Współczynnik asymetrii A_s

Współczynnik asymetrii $A_s = \frac{\overline{x} - m_0}{\sigma}$ charakteryzuje rozkłady jednomodalne.

Jeżeli:
- rozkład jest symetryczny, to $A_s = 0$,
- $A_s > 0$, to szereg ma asymetrię lewą,
- $A_s < 0$, to szereg ma asymetrię prawą.

Jeżeli $A_s < -1$ lub $A_s > 1$, to rozkład ma dużą asymetrię.

Rozkład normalny

Rozkład normalny

$N(m,\sigma)$

- Rozkład normalny to **rozkład ciągłej zmiennej losowej** X, której gęstość określona jest wzorem

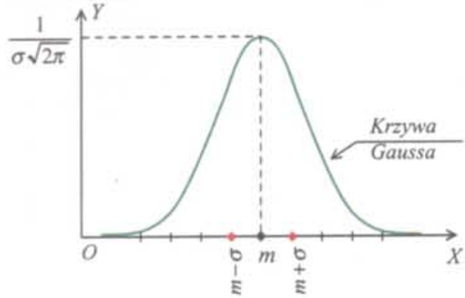
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

gdzie:

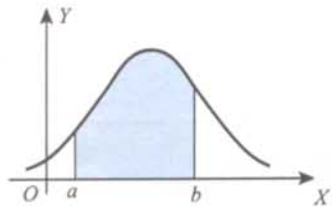
m – *wartość oczekiwana,*

$\sigma>0$ – *odchylenie standardowe.*

Krzywa Gaussa jest wykresem gęstości zmiennej losowej o rozkładzie normalnym.



- $P(|X-m|<\sigma)\cong 0{,}682$.
- $P(|X-m|<2\sigma)\cong 0{,}954$.
- $P(|X-m|<3\sigma)\cong 0{,}998$.
- Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(m,\sigma)$ (lub inny rozkład ciągły), to dla każdej liczby rzeczywistej a jest $P(X=a)=0$.
- Dla zmiennej losowej o rozkładzie $N(m,\sigma)$ wartość $P(a<X<b)$, gdzie $a<b$, jest równa polu obszaru ograniczonego wykresem funkcji gęstości, osią X i prostymi o równaniach $x=a$ i $x=b$.



Dla zmiennej losowej X o rozkładzie $N(0,1)$ wartości funkcji $\Phi(t)=P(X<t)$ dla $t\geq R$ są stablicowane.

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0,00	0,5000	0,26	0,6026	0,52	0,6985	0,78	0,7823
0,01	0,5040	0,27	0,6064	0,53	0,7019	0,79	0,7852
0,02	0,5080	0,28	0,6103	0,54	0,7054	0,80	0,7881
0,03	0,5120	0,29	0,6141	0,55	0,7088	0,81	0,7910
0,04	0,5160	0,30	0,6179	0,56	0,7123	0,82	0,7939
0,05	0,5199	0,31	0,6217	0,57	0,7157	0,83	0,7967
0,06	0,5239	0,32	0,6255	0,58	0,7190	0,84	0,7995
0,07	0,5279	0,33	0,6293	0,59	0,7224	0,85	0,8023
0,08	0,5319	0,34	0,6331	0,60	0,7257	0,86	0,8051
0,09	0,5359	0,35	0,6368	0,61	0,7291	0,87	0,8078
0,10	0,5398	0,36	0,6406	0,62	0,7324	0,88	0,8106
0,11	0,5438	0,37	0,6443	0,63	0,7357	0,89	0,8133
0,12	0,5478	0,38	0,6480	0,64	0,7389	0,90	0,8159
0,13	0,5517	0,39	0,6517	0,65	0,7422	0,91	0,8186
0,14	0,5557	0,40	0,6554	0,66	0,7454	0,92	0,8212
0,15	0,5596	0,41	0,6591	0,67	0,7486	0,93	0,8238
0,16	0,5636	0,42	0,6628	0,68	0,7517	0,94	0,8264
0,17	0,5675	0,43	0,6664	0,69	0,7549	0,95	0,8289
0,18	0,5714	0,44	0,6700	0,70	0,7580	0,96	0,8315
0,19	0,5753	0,45	0,6736	0,71	0,7611	0,97	0,8340
0,20	0,5793	0,46	0,6772	0,72	0,7642	0,98	0,8365
0,21	0,5832	0,47	0,6808	0,73	0,7673	0,99	0,8389
0,22	0,5871	0,48	0,6844	0,74	0,7703	1,00	0,8413
0,23	0,5910	0,49	0,6879	0,75	0,7734	2,00	0,9772
0,24	0,5948	0,50	0,6915	0,76	0,7764	3,00	0,9987
0,25	0,5987	0,51	0,6950	0,77	0,7794		

Gdy zmienna Y ma rozkład $N(m,\sigma)$, to $P(Y<y)=\Phi\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)$.

Zamiana stopni na radiany i odwrotnie

Deg stopień	Rad radian	Deg stopień	Rad radian	Deg stopień	Rad radian
1°	0,0175	31°	0,5411	61°	1,0647
2°	0,0349	32°	0,5585	62°	1,0821
3°	0,0524	33°	0,5760	63°	1,0996
4°	0,0698	34°	0,5934	64°	1,1170
5°	0,0873	35°	0,6109	65°	1,1345
6°	0,1047	36°	0,6283	66°	1,1519
7°	0,1222	37°	0,6458	67°	1,1694
8°	0,1396	38°	0,6632	68°	1,1868
9°	0,1571	39°	0,6807	69°	1,2043
10°	0,1745	40°	0,6981	70°	1,2217
11°	0,1920	41°	0,7156	71°	1,2392
12°	0,2094	42°	0,7330	72°	1,2566
13°	0,2269	43°	0,7505	73°	1,2741
14°	0,2443	44°	0,7679	74°	1,2915
15°	0,2618	45°	0,7854	75°	1,3090
16°	0,2793	46°	0,8029	76°	1,3265
17°	0,2967	47°	0,8203	77°	1,3439
18°	0,3142	48°	0,8378	78°	1,3614
19°	0,3316	49°	0,8552	79°	1,3788
20°	0,3491	50°	0,8727	80°	1,3963
21°	0,3665	51°	0,8901	81°	1,4137
22°	0,3840	52°	0,9076	82°	1,4312
23°	0,4014	53°	0,9250	83°	1,4486
24°	0,4189	54°	0,9425	84°	1,4661
25°	0,4363	55°	0,9599	85°	1,4835
26°	0,4538	56°	0,9774	86°	1,5010
27°	0,4712	57°	0,9948	87°	1,5184
28°	0,4887	58°	1,0123	88°	1,5359
29°	0,5061	59°	1,0297	89°	1,5533
30°	0,5236	60°	1,0472	90°	1,5708

Deg stopień	Rad radian	Deg stopień	Rad radian
1'	0,0003	31'	0,0090
2'	0,0006	32'	0,0093
3'	0,0009	33'	0,0096
4'	0,0012	34'	0,0099
5'	0,0015	35'	0,0102
6'	0,0017	36'	0,0105
7'	0,0020	37'	0,0108
8'	0,0023	38'	0,0111
9'	0,0026	39'	0,0113
10'	0,0029	40'	0,0116
11'	0,0032	41'	0,0119
12'	0,0035	42'	0,0122
13'	0,0038	43'	0,0125
14'	0,0041	44'	0,0128
15'	0,0044	45'	0,0131
16'	0,0047	46'	0,0134
17'	0,0049	47'	0,0137
18'	0,0052	48'	0,0140
19'	0,0055	49'	0,0143
20'	0,0058	50'	0,0145
21'	0,0061	51'	0,0148
22'	0,0064	52'	0,0151
23'	0,0067	53'	0,0154
24'	0,0070	54'	0,0157
25'	0,0073	55'	0,0160
26'	0,0076	56'	0,0163
27'	0,0079	57'	0,0166
28'	0,0081	58'	0,0169
29'	0,0084	59'	0,0172
30'	0,0087	60'	0,0175

Rad radian	Deg stopień	Rad radian	Deg stopień	Rad radian	Deg stopień	Rad radian	Deg stopień
0,001	0,06	0,01	0,57	0,1	5,73	1	57,30
0,002	0,11	0,02	1,15	0,2	11,46	2	114,59
0,003	0,17	0,03	1,72	0,3	17,19	3	171,89
0,004	0,23	0,04	2,29	0,4	22,92	4	229,18
0,005	0,29	0,05	2,86	0,5	28,65	5	286,48
0,006	0,34	0,06	3,44	0,6	34,38	6	343,77
0,007	0,40	0,07	4,01	0,7	40,11		
0,008	0,46	0,08	4,58	0,8	45,84		
0,009	0,52	0,09	5,16	0,9	51,57		

Wartości sinusów i cosinusów

sin 0° ÷ 44° →

	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'	
0°	0,0000	0,0017	0,0035	0,0052	0,0070	0,0087	0,0105	0,0122	0,0140	0,0157	0,0175	89°
1°	0,0175	0,0192	0,0209	0,0227	0,0244	0,0262	0,0279	0,0297	0,0314	0,0332	0,0349	88°
2°	0,0349	0,0366	0,0384	0,0401	0,0419	0,0436	0,0454	0,0471	0,0488	0,0506	0,0523	87°
3°	0,0523	0,0541	0,0558	0,0576	0,0593	0,0610	0,0628	0,0645	0,0663	0,0680	0,0698	86°
4°	0,0698	0,0715	0,0732	0,0750	0,0767	0,0785	0,0802	0,0819	0,0837	0,0854	0,0872	85°
5°	0,0872	0,0889	0,0906	0,0924	0,0941	0,0958	0,0976	0,0993	0,1011	0,1028	0,1045	84°
6°	0,1045	0,1063	0,1080	0,1097	0,1115	0,1132	0,1149	0,1167	0,1184	0,1201	0,1219	83°
7°	0,1219	0,1236	0,1253	0,1271	0,1288	0,1305	0,1323	0,1340	0,1357	0,1374	0,1392	82°
8°	0,1392	0,1409	0,1426	0,1444	0,1461	0,1478	0,1495	0,1513	0,1530	0,1547	0,1564	81°
9°	0,1564	0,1582	0,1599	0,1616	0,1633	0,1650	0,1668	0,1685	0,1702	0,1719	0,1736	80°
10°	0,1736	0,1754	0,1771	0,1788	0,1805	0,1822	0,1840	0,1857	0,1874	0,1891	0,1908	79°
11°	0,1908	0,1925	0,1942	0,1959	0,1977	0,1994	0,2011	0,2028	0,2045	0,2062	0,2079	78°
12°	0,2079	0,2096	0,2113	0,2130	0,2147	0,2164	0,2181	0,2198	0,2215	0,2233	0,2250	77°
13°	0,2250	0,2267	0,2284	0,2300	0,2317	0,2334	0,2351	0,2368	0,2385	0,2402	0,2419	76°
14°	0,2419	0,2436	0,2453	0,2470	0,2487	0,2504	0,2521	0,2538	0,2554	0,2571	0,2588	75°
15°	0,2588	0,2605	0,2622	0,2639	0,2656	0,2672	0,2689	0,2706	0,2723	0,2740	0,2756	74°
16°	0,2756	0,2773	0,2790	0,2807	0,2823	0,2840	0,2857	0,2874	0,2890	0,2907	0,2924	73°
17°	0,2924	0,2940	0,2957	0,2974	0,2990	0,3007	0,3024	0,3040	0,3057	0,3074	0,3090	72°
18°	0,3090	0,3107	0,3123	0,3140	0,3156	0,3173	0,3190	0,3206	0,3223	0,3239	0,3256	71°
19°	0,3256	0,3272	0,3289	0,3305	0,3322	0,3338	0,3355	0,3371	0,3387	0,3404	0,3420	70°
20°	0,3420	0,3437	0,3453	0,3469	0,3486	0,3502	0,3518	0,3535	0,3551	0,3567	0,3584	69°
21°	0,3584	0,3600	0,3616	0,3633	0,3649	0,3665	0,3681	0,3697	0,3714	0,3730	0,3746	68°
22°	0,3746	0,3762	0,3778	0,3795	0,3811	0,3827	0,3843	0,3859	0,3875	0,3891	0,3907	67°
23°	0,3907	0,3923	0,3939	0,3955	0,3971	0,3987	0,4003	0,4019	0,4035	0,4051	0,4067	66°
24°	0,4067	0,4083	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4163	0,4179	0,4195	0,4210	0,4226	65°
25°	0,4226	0,4242	0,4258	0,4274	0,4289	0,4305	0,4321	0,4337	0,4352	0,4368	0,4384	64°
26°	0,4384	0,4399	0,4415	0,4431	0,4446	0,4462	0,4478	0,4493	0,4509	0,4524	0,4540	63°
27°	0,4540	0,4555	0,4571	0,4586	0,4602	0,4617	0,4633	0,4648	0,4664	0,4679	0,4695	62°
28°	0,4695	0,4710	0,4726	0,4741	0,4756	0,4772	0,4787	0,4802	0,4818	0,4833	0,4848	61°
29°	0,4848	0,4863	0,4879	0,4894	0,4909	0,4924	0,4939	0,4955	0,4970	0,4985	0,5000	60°
30°	0,5000	0,5015	0,5030	0,5045	0,5060	0,5075	0,5090	0,5105	0,5120	0,5135	0,5150	59°
31°	0,5150	0,5165	0,5180	0,5195	0,5210	0,5225	0,5240	0,5255	0,5270	0,5284	0,5299	58°
32°	0,5299	0,5314	0,5329	0,5344	0,5358	0,5373	0,5388	0,5402	0,5417	0,5432	0,5446	57°
33°	0,5446	0,5461	0,5476	0,5490	0,5505	0,5519	0,5534	0,5548	0,5563	0,5577	0,5592	56°
34°	0,5592	0,5606	0,5621	0,5635	0,5650	0,5664	0,5678	0,5693	0,5707	0,5721	0,5736	55°
35°	0,5736	0,5750	0,5764	0,5779	0,5793	0,5807	0,5821	0,5835	0,5850	0,5864	0,5878	54°
36°	0,5878	0,5892	0,5906	0,5920	0,5934	0,5948	0,5962	0,5976	0,5990	0,6004	0,6018	53°
37°	0,6018	0,6032	0,6046	0,6060	0,6074	0,6088	0,6101	0,6115	0,6129	0,6143	0,6157	52°
38°	0,6157	0,6170	0,6184	0,6198	0,6211	0,6225	0,6239	0,6252	0,6266	0,6280	0,6293	51°
39°	0,6293	0,6307	0,6320	0,6334	0,6347	0,6361	0,6374	0,6388	0,6401	0,6414	0,6428	50°
40°	0,6428	0,6441	0,6455	0,6468	0,6481	0,6494	0,6508	0,6521	0,6534	0,6547	0,6561	49°
41°	0,6561	0,6574	0,6587	0,6600	0,6613	0,6626	0,6639	0,6652	0,6665	0,6678	0,6691	48°
42°	0,6691	0,6704	0,6717	0,6730	0,6743	0,6756	0,6769	0,6782	0,6794	0,6807	0,6820	47°
43°	0,6820	0,6833	0,6845	0,6858	0,6871	0,6884	0,6896	0,6909	0,6921	0,6934	0,6947	46°
44°	0,6947	0,6959	0,6972	0,6984	0,6997	0,7009	0,7022	0,7034	0,7046	0,7059	0,7071	45°
	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	

← cos 45° ÷ 89°

sin 45° ÷ 89°

	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'	
45°	0,7071	0,7083	0,7096	0,7108	0,7120	0,7133	0,7145	0,7157	0,7169	0,7181	0,7193	44°
46°	0,7193	0,7206	0,7218	0,7230	0,7242	0,7254	0,7266	0,7278	0,7290	0,7302	0,7314	43°
47°	0,7314	0,7325	0,7337	0,7349	0,7361	0,7373	0,7385	0,7396	0,7408	0,7420	0,7431	42°
48°	0,7431	0,7443	0,7455	0,7466	0,7478	0,7490	0,7501	0,7513	0,7524	0,7536	0,7547	41°
49°	0,7547	0,7559	0,7570	0,7581	0,7593	0,7604	0,7615	0,7627	0,7638	0,7649	0,7660	40°
50°	0,7660	0,7672	0,7683	0,7694	0,7705	0,7716	0,7727	0,7738	0,7749	0,7760	0,7771	39°
51°	0,7771	0,7782	0,7793	0,7804	0,7815	0,7826	0,7837	0,7848	0,7859	0,7869	0,7880	38°
52°	0,7880	0,7891	0,7902	0,7912	0,7923	0,7934	0,7944	0,7955	0,7965	0,7976	0,7986	37°
53°	0,7986	0,7997	0,8007	0,8018	0,8028	0,8039	0,8049	0,8059	0,8070	0,8080	0,8090	36°
54°	0,8090	0,8100	0,8111	0,8121	0,8131	0,8141	0,8151	0,8161	0,8171	0,8181	0,8192	35°
55°	0,8192	0,8202	0,8211	0,8221	0,8231	0,8241	0,8251	0,8261	0,8271	0,8281	0,8290	34°
56°	0,8290	0,8300	0,8310	0,8320	0,8329	0,8339	0,8348	0,8358	0,8368	0,8377	0,8387	33°
57°	0,8387	0,8396	0,8406	0,8415	0,8425	0,8434	0,8443	0,8453	0,8462	0,8471	0,8480	32°
58°	0,8480	0,8490	0,8499	0,8508	0,8517	0,8526	0,8536	0,8545	0,8554	0,8563	0,8572	31°
59°	0,8572	0,8581	0,8590	0,8599	0,8607	0,8616	0,8625	0,8634	0,8643	0,8652	0,8660	30°
60°	0,8660	0,8669	0,8678	0,8686	0,8695	0,8704	0,8712	0,8721	0,8729	0,8738	0,8746	29°
61°	0,8746	0,8755	0,8763	0,8771	0,8780	0,8788	0,8796	0,8805	0,8813	0,8821	0,8829	28°
62°	0,8829	0,8838	0,8846	0,8854	0,8862	0,8870	0,8878	0,8886	0,8894	0,8902	0,8910	27°
63°	0,8910	0,8918	0,8926	0,8934	0,8942	0,8949	0,8957	0,8965	0,8973	0,8980	0,8988	26°
64°	0,8988	0,8996	0,9003	0,9011	0,9018	0,9026	0,9033	0,9041	0,9048	0,9056	0,9063	25°
65°	0,9063	0,9070	0,9078	0,9085	0,9092	0,9100	0,9107	0,9114	0,9121	0,9128	0,9135	24°
66°	0,9135	0,9143	0,9150	0,9157	0,9164	0,9171	0,9178	0,9184	0,9191	0,9198	0,9205	23°
67°	0,9205	0,9212	0,9219	0,9225	0,9232	0,9239	0,9245	0,9252	0,9259	0,9265	0,9272	22°
68°	0,9272	0,9278	0,9285	0,9291	0,9298	0,9304	0,9311	0,9317	0,9323	0,9330	0,9336	21°
69°	0,9336	0,9342	0,9348	0,9354	0,9361	0,9367	0,9373	0,9379	0,9385	0,9391	0,9397	20°
70°	0,9397	0,9403	0,9409	0,9415	0,9421	0,9426	0,9432	0,9438	0,9444	0,9449	0,9455	19°
71°	0,9455	0,9461	0,9466	0,9472	0,9478	0,9483	0,9489	0,9494	0,9500	0,9505	0,9511	18°
72°	0,9511	0,9516	0,9521	0,9527	0,9532	0,9537	0,9542	0,9548	0,9553	0,9558	0,9563	17°
73°	0,9563	0,9568	0,9573	0,9578	0,9583	0,9588	0,9593	0,9598	0,9603	0,9608	0,9613	16°
74°	0,9613	0,9617	0,9622	0,9627	0,9632	0,9636	0,9641	0,9646	0,9650	0,9655	0,9659	15°
75°	0,9659	0,9664	0,9668	0,9673	0,9677	0,9681	0,9686	0,9690	0,9694	0,9699	0,9703	14°
76°	0,9703	0,9707	0,9711	0,9715	0,9720	0,9724	0,9728	0,9732	0,9736	0,9740	0,9744	13°
77°	0,9744	0,9748	0,9751	0,9755	0,9759	0,9763	0,9767	0,9770	0,9774	0,9778	0,9781	12°
78°	0,9781	0,9785	0,9789	0,9792	0,9796	0,9799	0,9803	0,9806	0,9810	0,9813	0,9816	11°
79°	0,9816	0,9820	0,9823	0,9826	0,9829	0,9833	0,9836	0,9839	0,9842	0,9845	0,9848	10°
80°	0,9848	0,9851	0,9854	0,9857	0,9860	0,9863	0,9866	0,9869	0,9871	0,9874	0,9877	9°
81°	0,9877	0,9880	0,9882	0,9885	0,9888	0,9890	0,9893	0,9895	0,9898	0,9900	0,9903	8°
82°	0,9903	0,9905	0,9907	0,9910	0,9912	0,9914	0,9917	0,9919	0,9921	0,9923	0,9925	7°
83°	0,9925	0,9928	0,9930	0,9932	0,9934	0,9936	0,9938	0,9940	0,9942	0,9943	0,9945	6°
84°	0,9945	0,9947	0,9949	0,9951	0,9952	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9962	5°
85°	0,9962	0,9963	0,9965	0,9966	0,9968	0,9969	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	0,9976	4°
86°	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984	0,9985	0,9986	3°
87°	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9990	0,9991	0,9992	0,9993	0,9993	0,9994	2°
88°	0,9994	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	1°
89°	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0
	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	

cos 1° ÷ 44°

Wartości tangensów i cotangensów

tg 0° ÷ 45° →

	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'	
0°	0,0000	0,0017	0,0035	0,0052	0,0070	0,0087	0,0105	0,0122	0,0140	0,0157	0,0175	89°
1°	0,0175	0,0192	0,0209	0,0227	0,0244	0,0262	0,0279	0,0297	0,0314	0,0332	0,0349	88°
2°	0,0349	0,0367	0,0384	0,0402	0,0419	0,0437	0,0454	0,0472	0,0489	0,0507	0,0524	87°
3°	0,0524	0,0542	0,0559	0,0577	0,0594	0,0612	0,0629	0,0647	0,0664	0,0682	0,0699	86°
4°	0,0699	0,0717	0,0734	0,0752	0,0769	0,0787	0,0805	0,0822	0,0840	0,0857	0,0875	85°
5°	0,0875	0,0892	0,0910	0,0928	0,0945	0,0963	0,0981	0,0998	0,1016	0,1033	0,1051	84°
6°	0,1051	0,1069	0,1086	0,1104	0,1122	0,1139	0,1157	0,1175	0,1192	0,1210	0,1228	83°
7°	0,1228	0,1246	0,1263	0,1281	0,1299	0,1317	0,1334	0,1352	0,1370	0,1388	0,1405	82°
8°	0,1405	0,1423	0,1441	0,1459	0,1477	0,1495	0,1512	0,1530	0,1548	0,1566	0,1584	81°
9°	0,1584	0,1602	0,1620	0,1638	0,1655	0,1673	0,1691	0,1709	0,1727	0,1745	0,1763	80°
10°	0,1763	0,1781	0,1799	0,1817	0,1835	0,1853	0,1871	0,1890	0,1908	0,1926	0,1944	79°
11°	0,1944	0,1962	0,1980	0,1998	0,2016	0,2035	0,2053	0,2071	0,2089	0,2107	0,2126	78°
12°	0,2126	0,2144	0,2162	0,2180	0,2199	0,2217	0,2235	0,2254	0,2272	0,2290	0,2309	77°
13°	0,2309	0,2327	0,2345	0,2364	0,2382	0,2401	0,2419	0,2438	0,2456	0,2475	0,2493	76°
14°	0,2493	0,2512	0,2530	0,2549	0,2568	0,2586	0,2605	0,2623	0,2642	0,2661	0,2679	75°
15°	0,2679	0,2698	0,2717	0,2736	0,2754	0,2773	0,2792	0,2811	0,2830	0,2849	0,2867	74°
16°	0,2867	0,2886	0,2905	0,2924	0,2943	0,2962	0,2981	0,3000	0,3019	0,3038	0,3057	73°
17°	0,3057	0,3076	0,3096	0,3115	0,3134	0,3153	0,3172	0,3191	0,3211	0,3230	0,3249	72°
18°	0,3249	0,3269	0,3288	0,3307	0,3327	0,3346	0,3365	0,3385	0,3404	0,3424	0,3443	71°
19°	0,3443	0,3463	0,3482	0,3502	0,3522	0,3541	0,3561	0,3581	0,3600	0,3620	0,3640	70°
20°	0,3640	0,3659	0,3679	0,3699	0,3719	0,3739	0,3759	0,3779	0,3799	0,3819	0,3839	69°
21°	0,3839	0,3859	0,3879	0,3899	0,3919	0,3939	0,3959	0,3979	0,4000	0,4020	0,4040	68°
22°	0,4040	0,4061	0,4081	0,4101	0,4122	0,4142	0,4163	0,4183	0,4204	0,4224	0,4245	67°
23°	0,4245	0,4265	0,4286	0,4307	0,4327	0,4348	0,4369	0,4390	0,4411	0,4431	0,4452	66°
24°	0,4452	0,4473	0,4494	0,4515	0,4536	0,4557	0,4578	0,4599	0,4621	0,4642	0,4663	65°
25°	0,4663	0,4684	0,4706	0,4727	0,4748	0,4770	0,4791	0,4813	0,4834	0,4856	0,4877	64°
26°	0,4877	0,4899	0,4921	0,4942	0,4964	0,4986	0,5008	0,5029	0,5051	0,5073	0,5095	63°
27°	0,5095	0,5117	0,5139	0,5161	0,5184	0,5206	0,5228	0,5250	0,5272	0,5295	0,5317	62°
28°	0,5317	0,5340	0,5362	0,5384	0,5407	0,5430	0,5452	0,5475	0,5498	0,5520	0,5543	61°
29°	0,5543	0,5566	0,5589	0,5612	0,5635	0,5658	0,5681	0,5704	0,5727	0,5750	0,5774	60°
30°	0,5774	0,5797	0,5820	0,5844	0,5867	0,5890	0,5914	0,5938	0,5961	0,5985	0,6009	59°
31°	0,6009	0,6032	0,6056	0,6080	0,6104	0,6128	0,6152	0,6176	0,6200	0,6224	0,6249	58°
32°	0,6249	0,6273	0,6297	0,6322	0,6346	0,6371	0,6395	0,6420	0,6445	0,6469	0,6494	57°
33°	0,6494	0,6519	0,6544	0,6569	0,6594	0,6619	0,6644	0,6669	0,6694	0,6720	0,6745	56°
34°	0,6745	0,6771	0,6796	0,6822	0,6847	0,6873	0,6899	0,6924	0,6950	0,6976	0,7002	55°
35°	0,7002	0,7028	0,7054	0,7080	0,7107	0,7133	0,7159	0,7186	0,7212	0,7239	0,7265	54°
36°	0,7265	0,7292	0,7319	0,7346	0,7373	0,7400	0,7427	0,7454	0,7481	0,7508	0,7536	53°
37°	0,7536	0,7563	0,7590	0,7618	0,7646	0,7673	0,7701	0,7729	0,7757	0,7785	0,7813	52°
38°	0,7813	0,7841	0,7869	0,7898	0,7926	0,7954	0,7983	0,8012	0,8040	0,8069	0,8098	51°
39°	0,8098	0,8127	0,8156	0,8185	0,8214	0,8243	0,8273	0,8302	0,8332	0,8361	0,8391	50°
40°	0,8391	0,8421	0,8451	0,8481	0,8511	0,8541	0,8571	0,8601	0,8632	0,8662	0,8693	49°
41°	0,8693	0,8724	0,8754	0,8785	0,8816	0,8847	0,8878	0,8910	0,8941	0,8972	0,9004	48°
42°	0,9004	0,9036	0,9067	0,9099	0,9131	0,9163	0,9195	0,9228	0,9260	0,9293	0,9325	47°
43°	0,9325	0,9358	0,9391	0,9424	0,9457	0,9490	0,9523	0,9556	0,9590	0,9623	0,9657	46°
44°	0,9657	0,9691	0,9725	0,9759	0,9793	0,9827	0,9861	0,9896	0,9930	0,9965	1,0000	45°
	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	

← ctg 45° ÷ 90°

tg 45°÷90° →

	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'	
45°	1,0000	1,0035	1,0070	1,0105	1,0141	1,0176	1,0212	1,0247	1,0283	1,0319	1,0355	44°
46°	1,0355	1,0392	1,0428	1,0464	1,0501	1,0538	1,0575	1,0612	1,0649	1,0686	1,0724	43°
47°	1,0724	1,0761	1,0799	1,0837	1,0875	1,0913	1,0951	1,0990	1,1028	1,1067	1,1106	42°
48°	1,1106	1,1145	1,1184	1,1224	1,1263	1,1303	1,1343	1,1383	1,1423	1,1463	1,1504	41°
49°	1,1504	1,1544	1,1585	1,1626	1,1667	1,1708	1,1750	1,1792	1,1833	1,1875	1,1918	40°
50°	1,1918	1,1960	1,2002	1,2045	1,2088	1,2131	1,2174	1,2218	1,2261	1,2305	1,2349	39°
51°	1,2349	1,2393	1,2437	1,2482	1,2527	1,2572	1,2617	1,2662	1,2708	1,2753	1,2799	38°
52°	1,2799	1,2846	1,2892	1,2938	1,2985	1,3032	1,3079	1,3127	1,3175	1,3222	1,3270	37°
53°	1,3270	1,3319	1,3367	1,3416	1,3465	1,3514	1,3564	1,3613	1,3663	1,3713	1,3764	36°
54°	1,3764	1,3814	1,3865	1,3916	1,3968	1,4019	1,4071	1,4124	1,4176	1,4229	1,4281	35°
55°	1,4281	1,4335	1,4388	1,4442	1,4496	1,4550	1,4605	1,4659	1,4715	1,4770	1,4826	34°
56°	1,4826	1,4882	1,4938	1,4994	1,5051	1,5108	1,5166	1,5224	1,5282	1,5340	1,5399	33°
57°	1,5399	1,5458	1,5517	1,5577	1,5637	1,5697	1,5757	1,5818	1,5880	1,5941	1,6003	32°
58°	1,6003	1,6066	1,6128	1,6191	1,6255	1,6319	1,6383	1,6447	1,6512	1,6577	1,6643	31°
59°	1,6643	1,6709	1,6775	1,6842	1,6909	1,6977	1,7045	1,7113	1,7182	1,7251	1,7321	30°
60°	1,7321	1,7391	1,7461	1,7532	1,7603	1,7675	1,7747	1,7820	1,7893	1,7966	1,8040	29°
61°	1,8040	1,8115	1,8190	1,8265	1,8341	1,8418	1,8495	1,8572	1,8650	1,8728	1,8807	28°
62°	1,8807	1,8887	1,8967	1,9047	1,9128	1,9210	1,9292	1,9375	1,9458	1,9542	1,9626	27°
63°	1,9626	1,9711	1,9797	1,9883	1,9970	2,0057	2,0145	2,0233	2,0323	2,0413	2,0503	26°
64°	2,0503	2,0594	2,0686	2,0778	2,0872	2,0965	2,1060	2,1155	2,1251	2,1348	2,1445	25°
65°	2,1445	2,1543	2,1642	2,1742	2,1842	2,1943	2,2045	2,2148	2,2251	2,2355	2,2460	24°
66°	2,2460	2,2566	2,2673	2,2781	2,2889	2,2998	2,3109	2,3220	2,3332	2,3445	2,3559	23°
67°	2,3559	2,3673	2,3789	2,3906	2,4023	2,4142	2,4262	2,4383	2,4504	2,4627	2,4751	22°
68°	2,4751	2,4876	2,5002	2,5129	2,5257	2,5386	2,5517	2,5649	2,5782	2,5916	2,6051	21°
69°	2,6051	2,6187	2,6325	2,6464	2,6605	2,6746	2,6889	2,7034	2,7179	2,7326	2,7475	20°
70°	2,7475	2,7625	2,7776	2,7929	2,8083	2,8239	2,8397	2,8556	2,8716	2,8878	2,9042	19°
71°	2,9042	2,9208	2,9375	2,9544	2,9714	2,9887	3,0061	3,0237	3,0415	3,0595	3,0777	18°
72°	3,0777	3,0961	3,1146	3,1334	3,1524	3,1716	3,1910	3,2106	3,2305	3,2506	3,2709	17°
73°	3,2709	3,2914	3,3122	3,3332	3,3544	3,3759	3,3977	3,4197	3,4420	3,4646	3,4874	16°
74°	3,4874	3,5105	3,5339	3,5576	3,5816	3,6059	3,6305	3,6554	3,6806	3,7062	3,7321	15°
75°	3,7321	3,7583	3,7848	3,8118	3,8391	3,8667	3,8947	3,9232	3,9520	3,9812	4,0108	14°
76°	4,0108	4,0408	4,0713	4,1022	4,1335	4,1653	4,1976	4,2303	4,2635	4,2972	4,3315	13°
77°	4,3315	4,3662	4,4015	4,4373	4,4737	4,5107	4,5483	4,5864	4,6252	4,6646	4,7046	12°
78°	4,7046	4,7453	4,7867	4,8288	4,8716	4,9152	4,9594	5,0045	5,0504	5,0970	5,1446	11°
79°	5,1446	5,1929	5,2422	5,2924	5,3435	5,3955	5,4486	5,5026	5,5578	5,6140	5,6713	10°
80°	5,6713	5,7297	5,7894	5,8502	5,9124	5,9758	6,0405	6,1066	6,1742	6,2432	6,3138	9°
81°	6,3138	6,3859	6,4596	6,5350	6,6122	6,6912	6,7720	6,8548	6,9395	7,0264	7,1154	8°
82°	7,1154	7,2066	7,3002	7,3962	7,4947	7,5958	7,6996	7,8062	7,9158	8,0285	8,1443	7°
83°	8,1443	8,2636	8,3863	8,5126	8,6427	8,7769	8,9152	9,0579	9,2052	9,3572	9,5144	6°
84°	9,5144	9,6768	9,8448	10,019	10,199	10,385	10,579	10,780	10,988	11,205	11,430	5°
85°	11,430	11,664	11,909	12,163	12,429	12,706	12,996	13,300	13,617	13,951	14,301	4°
86°	14,301	14,669	15,056	15,464	15,895	16,350	16,832	17,343	17,886	18,464	19,081	3°
87°	19,081	19,740	20,446	21,205	22,022	22,904	23,859	24,898	26,031	27,271	28,636	2°
88°	28,636	30,145	31,821	33,694	35,801	38,188	40,917	44,066	47,740	52,081	57,290	1°
89°	57,290	63,657	71,615	81,847	95,489	114,589	143,237	190,984	286,478	572,957	–	0°
	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	

← ctg 0°÷45°

Kwadraty i pierwiastki liczb

x	0,00	0,010	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	1,00	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188
1,1	1,21	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416
1,2	1,44	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664
1,3	1,69	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932
1,4	1,96	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190	2,220
1,5	2,25	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496	2,528
1,6	2,56	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822	2,856
1,7	2,89	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168	3,204
1,8	3,24	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534	3,572
1,9	3,61	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920	3,960
2,0	4,00	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326	4,368
2,1	4,41	4,452	4,494	4,537	4,580	4,623	4,666	4,709	4,752	4,796
2,2	4,84	4,884	4,928	4,973	5,018	5,063	5,108	5,153	5,198	5,244
2,3	5,29	5,336	5,382	5,429	5,476	5,523	5,570	5,617	5,664	5,712
2,4	5,76	5,808	5,856	5,905	5,954	6,003	6,052	6,101	6,150	6,200
2,5	6,25	6,300	6,350	6,401	6,452	6,503	6,554	6,605	6,656	6,708
2,6	6,76	6,812	6,864	6,917	6,970	7,023	7,076	7,129	7,182	7,236
2,7	7,29	7,344	7,398	7,453	7,508	7,563	7,618	7,673	7,728	7,784
2,8	7,84	7,896	7,952	8,009	8,066	8,123	8,180	8,237	8,294	8,352
2,9	8,41	8,468	8,526	8,585	8,644	8,703	8,762	8,821	8,880	8,940
3,0	9,00	9,060	9,120	9,181	9,242	9,303	9,364	9,425	9,486	9,548
3,1	9,61	9,672	9,734	9,797	9,860	9,923	9,986	10,05	10,11	10,18
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14
x	0,00	0,010	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

x	0,00	0,010	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80
x	0,00	0,010	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

Kwadraty, sześciany i pierwiastki liczb

n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1,000	1	1,000	51	2601	7,141	132 651	3,708
2	4	1,414	8	1,260	52	2704	7,211	140 608	3,733
3	9	1,732	27	1,442	53	2809	7,280	148 877	3,756
4	16	2,000	64	1,587	54	2916	7,348	157 464	3,780
5	25	2,236	125	1,710	55	3025	7,416	166 375	3,803
6	36	2,449	216	1,817	56	3136	7,483	175 616	3,826
7	49	2,646	343	1,913	57	3249	7,550	185 193	3,849
8	64	2,828	512	2,000	58	3364	7,616	195 112	3,871
9	81	3,000	729	2,080	59	3481	7,681	205 379	3,893
10	100	3,162	1000	2,154	**60**	3600	7,746	216 000	3,915
11	121	3,317	1331	2,224	61	3721	7,810	226 981	3,936
12	144	3,464	1728	2,289	62	3844	7,874	238 328	3,958
13	169	3,606	2197	2,351	63	3969	7,937	250 047	3,979
14	196	3,742	2744	2,410	64	4096	8,000	262 144	4,000
15	225	3,873	3375	2,466	65	4225	8,062	274 625	4,021
16	256	4,000	4096	2,520	66	4356	8,124	287 496	4,041
17	289	4,123	4913	2,571	67	4489	8,185	300 763	4,062
18	324	4,243	5832	2,621	68	4624	8,246	314 432	4,082
19	361	4,359	6859	2,668	69	4761	8,307	328 509	4,102
20	400	4,472	8000	2,714	**70**	4900	8,367	343 000	4,121
21	441	4,583	9261	2,759	71	5041	8,426	357 911	4,141
22	484	4,690	10648	2,802	72	5184	8,485	373 248	4,160
23	529	4,796	12167	2,844	73	5329	8,544	389 017	4,179
24	576	4,899	13824	2,884	74	5476	8,602	405 224	4,198
25	625	5,000	15625	2,924	75	5625	8,660	421 875	4,217
26	676	5,099	17576	2,962	76	5776	8,718	438 976	4,236
27	729	5,196	19683	3,000	77	5929	8,775	456 533	4,254
28	784	5,292	21952	3,037	78	6084	8,832	474 552	4,273
29	841	5,385	24389	3,072	79	6241	8,888	493 039	4,291
30	900	5,477	27000	3,107	**80**	6400	8,944	512 000	4,309
31	961	5,568	29791	3,141	81	6561	9,000	531 441	4,327
32	1024	5,657	32768	3,175	82	6724	9,055	551 368	4,344
33	1089	5,745	35937	3,208	83	6889	9,110	571 787	4,362
34	1156	5,831	39304	3,240	84	7056	9,165	592 704	4,380
35	1225	5,916	42875	3,271	85	7225	9,220	614 125	4,397
36	1296	6,000	46656	3,302	86	7396	9,274	636 056	4,414
37	1369	6,083	50653	3,332	87	7569	9,327	658 503	4,431
38	1444	6,164	54872	3,362	88	7744	9,381	681 472	4,448
39	1521	6,245	59319	3,391	89	7921	9,434	704 969	4,465
40	1600	6,325	64000	3,420	**90**	8100	9,487	729 000	4,481
41	1681	6,403	68921	3,448	91	8281	9,539	753 571	4,498
42	1764	6,481	74088	3,476	92	8464	9,592	778 688	4,514
43	1849	6,557	79507	3,503	93	8649	9,644	804 357	4,531
44	1936	6,633	85184	3,530	94	8836	9,695	830 584	4,547
45	2025	6,708	91125	3,557	95	9025	9,747	857 375	4,563
46	2116	6,782	97336	3,583	96	9216	9,798	884 736	4,579
47	2209	6,856	103823	3,609	97	9409	9,849	912 673	4,595
48	2304	6,928	110592	3,634	98	9604	9,899	941 192	4,610
49	2401	7,000	117649	3,659	99	9801	9,950	970 299	4,626
50	2500	7,071	125000	3,684	**100**	10000	10,000	1 000 000	4,642