1. Elementy logiki matematycznej

Przedmiotem logiki matematycznej jest badanie tzw. wyrażeń logicznych oraz metod rozumowania i sposobów dowodzenia używanych w matematyce, a także w innych dziedzinach, w których matematyka znajduje zastosowanie np. w fizyce, w informatyce, w automatyce itp.

Zdania logiczne

Podstawowym pojęciem logiki matematycznej jest pojęcie **zdania logicznego** (krótko: **zdania**).

Zdaniem logicznym będziemy nazywać każde zdanie oznajmujące (orzekające), któremu można przypisać dokładnie jedną z dwóch ocen: prawda (1) lub fałsz (0).

Przykład. Rozważmy następujące zdania:

5 jest liczbą niewymierną.
Jutro będzie wtorek.
Czy teraz pada deszcz?
To bardzo ciekawe!
Polska graniczy z Francją.

Zauważmy, że pierwsze, drugie i piąte z powyższych zdań są zdaniami logicznymi, natomiast trzecie i czwarte zdanie nie są zdaniami logicznymi.

Zwróćmy uwagę na to, że zdaniu logicznemu przypisuje się tylko jedną z dwóch wartości (ocen). Dlatego też logikę, o której mówimy, nazywamy **logiką dwuwartościową**. Niekiedy używa się również logik dopuszczających więcej niż dwie wartości logiczne, ale nie będziemy zajmować się tego typu logikami.

W dalszym ciągu wykładu zdania logiczne będziemy oznaczać małymi literami: p, q, r, a, b, ...

W logice możemy budować zdania złożone łącząc zdania pojedyncze przy pomocy spójników, które nazywamy **funktorami zdaniotwórczymi** (**spójnikami logicznymi**). Używamy 5 podstawowych funktorów zdaniotwórczych, zwanych: **negacją**, **alternatywą**, **koniunkcją**, **implikacją** i **równoważnością**.

symbol	nazwa spójnika	zapis	treść
$\sim$	**negacja**	$\sim p$	*nieprawda, że p*
$\vee$	**alternatywa**	$p \vee q$	*p lub q*
$\wedge$	**koniunkcja**	$p \wedge q$	*p i q*
$\Rightarrow$	**implikacja**	$p \Rightarrow q$	*jeżeli p, to q*
$\Leftrightarrow$	**równoważność**	$p \Leftrightarrow q$	*p wtedy i tylko wtedy, gdy q*

Używając spójników logicznych możemy wykonywać działania na każdej skończonej liczbie zdań. Otrzymujemy w ten sposób różne **wyrażenia logiczne**, zwane również **formułami**. Wartość logiczna formuły zależy od watości logicznej zdań składowych.

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Wyrażenia logiczne (formuły), które są prawdziwe bez względu na to, jaką wartość logiczną mają zdania składowe, nazywamy **tautologiami** lub **prawami logicznymi**.

Oto przykłady kilku najczęściej używanych tautologii:

- $[\sim (\sim p)] \Leftrightarrow p$ (prawo podwójnej negacji),
- $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ (prawo przemienności dla alternatywy),
- $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ (prawo przemienności dla koniunkcji),
- $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ (prawo łączności dla alternatywy),
- $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ (prawo łączności dla koniunkcji),
- $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ (prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy),
- $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ (prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji),
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$ (prawo kontrapozycji),
- $[\sim (p \vee q)] \Leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$ (prawo de Morgana),
- $[\sim (p \wedge q)] \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$ (prawo de Morgana).

Funkcje zdaniowe. Kwantyfikatory.

Funkcją zdaniową jednej lub większej liczby zmiennych określoną na pewnym zbiorze dopuszczalnym nazywamy wyrażenie zawierające zmienne, które staje się zdaniem (prawdziwym lub fałszywym), gdy w miejsce zmiennych podstawimy dowolne elementy z tego zbioru.

Funkcje zdaniowe będziemy oznaczać przez: $f(x)$, $\varphi(x)$, $f(x,y)$, $g(x,y,z)$, itp.

Przykład. Rozważmy następujące funkcje zdaniowe:

x jest rzeką w Polsce.
$x^2 + 3 = 4$.

W przypadku pierwszej funkcji zdaniowej zbiorem dopuszczalnym jest zbiór nazw wszystkich rzek na świecie, natomiast dla drugiej funkcji zdaniowej zbiorem dopuszczalnym jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

Na funkcjach zdaniowych wykonujemy takie same działania jak na zdaniach, a ponadto używamy uogólnionej alternatywy zwanej **małym kwantyfikatorem** i uogólnionej koniunkcji zwanej **dużym kwantyfikatorem**.

symbol	nazwa	zapis	treść
$\bigvee$	*mały kwantyfikator* *(szczegółowy)*	$\bigvee\limits_x f(x)$	istnieje takie x, że $f(x)$ *lub* dla pewnego x zachodzi $f(x)$
$\bigwedge$	*duży kwantyfikator* *(ogólny)*	$\bigwedge\limits_x f(x)$	dla każdego x zachodzi $f(x)$ *lub* dla wszystkich x zachodzi $f(x)$

Wyrażenia logiczne zbudowane z funkcji zdaniowych i kwantyfikatorów podlegają prawom logicznym podobnym do praw rachunku zdań. I tak np. prawa te mówią, o możliwości przestawiania dużych kwantyfikatorów i o możliwości przestawiania małych kwantyfikatorów. Na przykład

$$\bigwedge_x \bigwedge_y f(x,y) \iff \bigwedge_y \bigwedge_x f(x,y),$$

$$\bigvee_x \bigvee_y f(x,y) \iff \bigvee_y \bigvee_x f(x,y).$$

Do najważniejszych tautologii rachunku kwantyfikatorów zaliczają się **prawa de Morgana**, które mają postać

$$\sim \bigwedge_x f(x) \iff \bigvee_x \sim f(x),$$

$$\sim \bigvee_x f(x) \iff \bigwedge_x \sim f(x).$$

Oto kilka innych przykładów praw rachunku kwantyfikatorów:

$$\bigvee_x \bigwedge_y f(x,y) \implies \bigwedge_y \bigvee_x f(x,y),$$

$$\bigwedge_x \left(f(x) \ \wedge \ g(x)\right) \iff \left(\bigwedge_x f(x) \ \wedge \ \bigwedge_x g(x)\right),$$

$$\left(\bigwedge_x f(x) \ \vee \ \bigwedge_x g(x)\right) \implies \bigwedge_x \left(f(x) \ \vee \ g(x)\right),$$

$$\bigvee_x \left(f(x) \ \vee \ g(x)\right) \iff \left(\bigvee_x f(x) \ \vee \ \bigvee_x g(x)\right),$$

$$\bigvee_x \left(f(x) \ \wedge \ g(x)\right) \implies \left(\bigvee_x f(x) \ \wedge \ \bigvee_x g(x)\right).$$

Zbiory liczbowe

Będziemy posługiwać się następującymi zbiorami liczbowymi.
Symbolem $\mathbb{N}$ oznaczamy **zbiór liczb naturalnych**, czyli

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Przez $\mathbb{Z}$ oznaczamy **zbiór liczb całkowitych**, czyli

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Symbolem $\mathbb{Q}$ oznaczamy **zbiór liczb wymiernych**. Przypomnijmy, że **liczbą wymierną** nazywamy każdą liczbę, którą można przedstawić w postaci $\frac{m}{n}$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Zatem

$$\mathbb{Q} = \left\{ \tfrac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \ \wedge \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy symbolem $\mathbb{R}$.
Zauważmy, że

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Dopełnienie zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ do zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, czyli zbiór $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, nazywamy **zbiorem liczb niewymiernych**. Do oznaczenia zbioru liczb niewymiernych używa się również symbolu $\mathbb{IQ}$. Przykładami liczb niewymiernych są: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, $\sqrt{5} - \sqrt{7}$.

Niech $a, b \in \mathbb{R}$.

Symbolem $[a, b]$ oznaczamy **przedział domknięty** o końcach a i b ($a \leq b$), natomiast przez (a, b) oznaczamy **przedział otwarty** o końcach a i b ($a < b$). Zatem

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a \ \wedge \ x \leq b\},$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : x > a \ \wedge \ x < b\}.$$

Ponadto symbol $[a, b)$ oznacza przedział lewostronnie domknięty i prawostronnie otwarty, natomiast $(a, b]$ oznacza przedział lewostronnie otwarty i prawostronnie domknięty o końcach a i b ($a \leq b$).

Używamy również przedziałów postaci

$$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \qquad (a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \qquad (-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\},$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

2. Funkcje

Pojęcia podstawowe

Załóżmy, że dane są dwa niepuste zbiory X i Y.

Jeżeli każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkowujemy dokładnie jeden element $y \in Y$, to mówimy, że na zbiorze X została określona **funkcja** (lub **odwzorowanie**, lub **przekształcenie**), odwzorowująca zbiór X w zbiór Y.

Funkcję oznaczamy zazwyczaj przez f, co zapisujemy następująco

$$f : X \to Y$$

i czytamy: f *odwzorowuje zbiór* X *w zbiór* Y. Zbiór X nazywamy wówczas **dziedziną funkcji** f, natomiast zbiór Y nazywa się **przeciwdziedziną funkcji** f.

W celu zdefiniowania funkcji należy podać jej dziedzinę X, przeciwdziedzinę Y oraz przepis na przyporządkowanie f, co zapisujemy $y = f(x)$. Zapis $y = f(x)$ można odczytać następująco: y *odpowiada elementowi* x *w odwzorowaniu* f. Dlatego też y nazywamy **obrazem elementu** x **w odwzorowaniu** f.

Przy zapisie $y = f(x)$ zmienna x nazywa się zwykle **argumentem funkcji** f, zaś y nazywamy **wartością funkcji** f.

Zbiór

$$G(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

nazywamy **wykresem funkcji** f.

Niech teraz $f : X \to Y$ oraz niech dane będą zbiory $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$. Zbiór $f(A)$ zdefiniowany następująco

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$$

nazywamy **obrazem zbioru** A w odwzorowaniu f. Zbiór $f^{-1}(B)$ określony jako

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

nazywamy **przeciwobrazem zbioru** B w odwzorowaniu f.

Zauważmy, że $f(A) \subseteq Y$, natomiast $f^{-1}(B) \subseteq X$, tzn. obraz zbioru jest podzbiorem przeciwdziedziny, a przeciwobraz jest podzbiorem dziedziny funkcji.

Zbiór $f(X)$ (obraz dziedziny) nazywamy **zbiorem wartości** funkcji f.

W przypadku gdy $f(X) = Y$, funkcję f nazywamy **odwzorowaniem na** lub **suriekcją**. Czyli

$$f \text{ jest suriekcją} \iff \bigwedge_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} f(x) = y.$$

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **różnowartościową** (lub **iniekcją**), jeżeli spełniony jest następujący warunek

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2,$$

lub równoważnie

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Funkcję $f : X \to Y$, która jest różnowartościowa i jest odwzorowaniem na (inaczej: jest iniekcją i suriekcją) będziemy nazywać **odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym (bijekcją)**.

Jeżeli $f : X \to Y$ jest bijekcją, to funkcję $f^{-1} : Y \to X$ określoną następująco

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

nazywamy **funkcją odwrotną** do funkcji f.

Niech teraz dane będą trzy niepuste zbiory X, Y, Z oraz dwie funkcje $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$.

Złożeniem funcji f i g nazywamy funkcję $h : X \to Z$, określoną w następujący sposób

$$h(x) := g(f(x)).$$

Złożenie funkcji f i g oznaczamy symbolem $g \circ f$. Zatem

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)),$$

przy czym funkcję f nazywamy wówczas **funkcją wewnętrzną**, a g **funkcją zewnętrzną**.

Należy zwrócić uwagę na to, że aby możliwe było złożenie funkcji f i g, zbiór wartości funkcji wewnętrznej musi zawierać się w dziedzinie funkcji zewnętrznej.

Bardzo prostą konsekwencją podanych definicji jest następujący fakt.

TWIERDZENIE. *Niech $f : X \to Y$ będzie bijekcją. Wówczas zachodzą następujące równości*

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x, \qquad \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x.$$