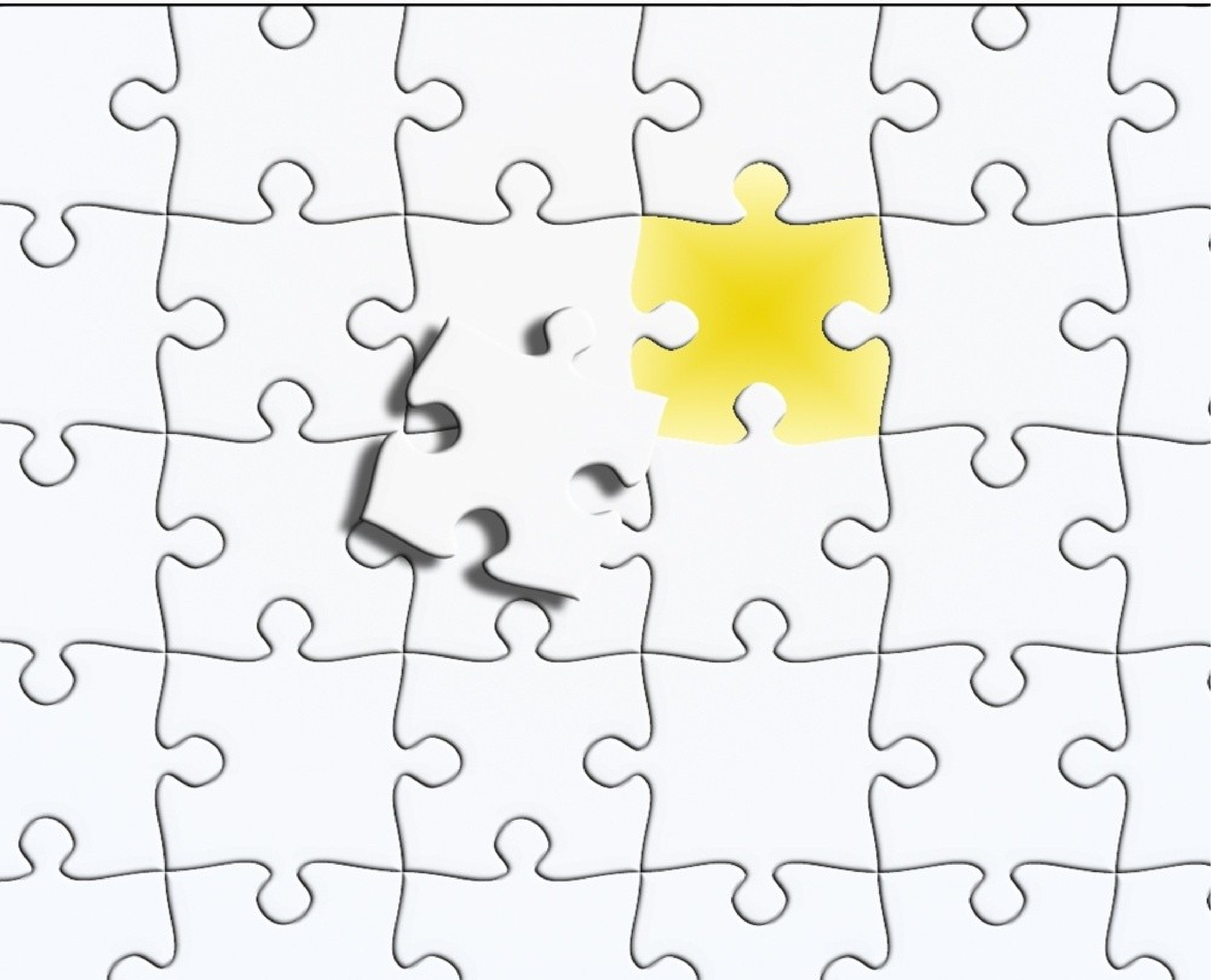
dr Kazimierz Nitkiewicz

Matematyka

Modele równań

i metody ich rozwiązywania



Wydawnictwo EscapeMagazine.pl

Modele równań i metody ich rozwiązywania
dr Kazimierz Nitkiewicz

Wydanie pierwsze, Toruń 2010
ISBN: 978-83-61744-25-2

Wydawnictwo Escape Magazine
http://www.EscapeMagazine.pl

Spis treści

Wstęp

W ciągu wieloletniej pracy dydaktycznej, zarówno w szkolnictwie średnim, jak i w szkolnictwie wyższym, miałem możliwość dokonać wielu spostrzeżeń dotyczących sposobów nauczania matematyki.

Obserwacje dotyczące sposobów podawania materiału przez nauczycieli szkół średnich i akademickich na bezpośrednich zajęciach oraz analiza podręczników szkół średnich i wyższych skłoniła mnie do opracowania specjalnych metod nauczania pewnych działów matematyki.

Wieloletnie stosowanie tych metod w pracy z uczniami upoważnia mnie do stwierdzenia wniosku o dużej skuteczności tych metod.

Trudności w opanowaniu materiału z matematyki przez uczniów szkół średnich są na pewno wielorakie i powodowane różnymi przyczynami. Niemniej jedną z nich i wcale nie najmniejszą jest brak umiejętności rozpoznania problemu na etapie początkowym i umiejętności wyboru właściwych metod do rozwiązania problemu.

Opracowane podręczniki z reguły dają możliwości poznania teorii i podstaw merytorycznych matematyki. Niemniej jednak stosowana najczęściej stara zasada „powtarzanie jest matką studiów” nie zawsze daje najlepsze rezultaty. Może ktoś całymi dniami i całe życie gonić po boisku za piłką, ale mistrzem od tego biegania nie zostanie. Bez wątpienia lepsze rezultaty osiągnąć można stosując odpowiednie metody treningu. Oczywiście geniusze są wyjątkami.

Pogoń za ilością rozwiązywanych zadań, co można obserwować w szkołach, jest często bezsensowna. Można było zauważyć, że w dawnych liceach matematyczno-fizycznych i przy realizacji obecnego programu rozszerzonego preferowano często ilość zadań, a nie jakość stosowanych metod. Oczywiście nie we wszystkich szkołach.

Analiza tych problemów i bardzo duże doświadczenie w pracy dydaktycznej i pedagogicznej skłoniły mnie do próby opracowania wskazówek metodycznych, które z jednej strony ułatwiłyby uczniom rozwiązywanie zadań i ograniczyłyby ich ilość, z drugiej zaś strony może choć dla części nauczycieli byłyby przydatne.

W opracowaniu niniejszym nie są przedstawiane problemy teoretyczne. Wręcz przeciwnie, zakłada się znajomość materiału określonego w programach i zawartego w odpowiednich podręcznikach szkolnych na odpowiednim poziomie.

W wyjątkowych przypadkach podawane są znane np. wzory celem zwrócenia uwagi na możliwości ich odpowiedniej interpretacji i łatwiejszego stosowania.

Metody zastosowane w tym opracowaniu wynikają ze spostrzeżenia, że w wielu partiach materiału można podać i opracować **modele** tematycznie grupujące problemy odpowiednich zadań. Modele te ułatwiają rozpoznanie problemu matematycznego postawionego w danym zadaniu i zastosowanie specyficznych dla danego modelu metod ułatwiających rozwiązanie zadania.

Operowanie różnymi modelami do rozwiązywania zadań nie jest w matematyce nowością. Znana jest dobrze np. klasyfikacja typów równań różniczkowych w matematyce wyższej albo modele problemowe w rozwiązywaniu zadań w statystyce matematycznej. Brak jednak opracowania i stosowania takich modeli w matematyce elementarnej i brak klasyfikacji praktycznych metod rozwiązywania zadań powoduje duże utrudnienia dla uczniów.

Aby pomniejszyć te trudności i aby rozwiązanie zadania nie było tylko dziełem przypadku, w pracy tej podane zostały modele ułatwiające praktyczne rozwiązywanie zadań w niektórych działach matematyki elementarnej.

Poszczególne modele i odpowiadające im metody zostały zilustrowane rozwiązanymi przykładami. Wszystkie rozważane przykłady oraz zamieszczone na końcu opracowania zadania są oryginalnymi zadaniami autorskimi. Przykłady i zadania w zbiorze zostały ułożone w taki sposób, żeby możliwie w najlepszym stopniu ilustrowały właściwości poszczególnych modeli i zastosowanej metody.

Celem ułatwienia Czytelnikowi lepszego zrozumienia poszczególnych modeli i sprawniejszego operowania podanymi metodami zastosowana została jednolita numeracja poszczególnych ustępów, Zadań w zbiorze, Odpowiedzi i Wskazówek. Na przykład, jeżeli Czytelnik chce pogłębić zrozumienie Modelu 3T podanego w ust.1.3. to pod tym samym numerem 1.3. znajdzie **Zadania** do samodzielnego przerobienia i oczywiście pod tym samym numerem 1.3. Odpowiedzi. W przypadku wystąpienia większych kłopotów (albo dla samego sprawdzenia się) może pod tym samym numerem 1.3. przejrzeć **Wskazówki** lub **Rozwiązania**.

W pracy przyjęto następujące oznaczenia:

- Modele T - modele równań (nierówności) trygonometrycznych,
- Modele P - modele równań algebraicznych z parametrem,
- Modele W - modele równań (nierówności) wykładniczych,
- Modele L - modele równań (nierówności) logarytmicznych.

Oznaczenia te mają na celu łatwiejsze korzystanie przez Czytelnika z tego opracowania i po rozpoznaniu typu zadania łatwiejsze dobranie odpowiedniej metody podanej w wybranym modelu. Łatwiejsze też będzie korzystanie ze wskazówek.

Warto podkreślić, że opracowanie to nie może (i nie ma takiego celu) zastąpić podręcznika czy zbioru zadań, ma tylko ułatwić rozwiązywanie wielu późniejszych i bardziej uwikłanych zadań czerpanych z tak licznych, dostępnych na rynku księgarskim i używanych w szkołach zbiorów zadań.

I temu właśnie celowi poświęcone jest to opracowanie.

Dr Kazimierz Nitkiewicz

1. Modele równań trygonometrycznych (MODELE T)

Uwagi wstępne. Przy rozwiązywaniu np. tożsamości czy równań trygonometrycznych uczeń często nie umie wybrać odpowiedniego wzoru. Różne są tego przyczyny, ale często jest to powodowane brakiem zrozumienia „mechanizmu” specyficznego dla danego wzoru. Problem ten dobrze może zilustrować następujący przykład.

Zadanie: Sprawdzić tożsamości:

1. $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = tgx$ 2. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} = tg\dfrac{x}{2}$

Często uczeń rozwiązuje zadanie 1, ale drugiego nie potrafi. Tłumaczy to tym, że pamięta wzór na $\sin 2x$ i $\cos 2x$, a do zadania drugiego wzorów nie pamięta. Jest to niestety wynikiem formalnego traktowania w szkole tematów lekcji. Dla ucznia inny temat to „Funkcje podwojonego kąta”, a inny „Funkcje połówkowego kąta”. Dlatego też wielu uczniów nie zauważa tego, że oba zadania problemowo są identyczne. W obu przypadkach wystarczy zastosować mechanizm przejścia od dowolnego kąta do kąta dwukrotnie mniejszego!

Celowe byłoby zwracanie większej uwagi na mechanizm wzorów, a nie tylko na argumenty alfa, dwa alfa, pół alfa itp. Można np. wzory te traktować jako **metody przejścia od dowolnego kąta do dwukrotnie mniejszego kąta lub na odwrót:**

1) $\sin W = 2\sin\dfrac{W}{2}\cos\dfrac{W}{2}$ gdzie W - dowolne wyrażenie

2) $\cos W = \cos^2\dfrac{W}{2} - \sin^2\dfrac{W}{2}$ 3) $tgW = \dfrac{2tg\dfrac{W}{2}}{1-tg^2\dfrac{W}{2}}$

4) $1+\cos W = 2\cos^2\dfrac{W}{2}$ 5) $1-\cos W = 2\sin^2\dfrac{W}{2}$

Umiejętność rozwiązywania równań i nierówności trygonometrycznych, oprócz zrozumienia mechanizmów wzorów, wymaga zdolności do rozpoznania **typu** postawionego w zadaniu problemu.

Analizując różnorodność równań trygonometrycznych można wśród nich zauważyć zadania wyróżniające się specyficzną problematyką. Będzie to wyraźnie pokazane w poniżej podanych modelach. Trzeba jednak wyraźnie podkreślić, że **wszystkie modele** sprowadzają się w końcowym etapie do **modelu wzorcowego,** z którego (i tylko z tego) można **przejść do równań algebraicznych!**

Możemy śmiało stwierdzić, że nie mamy wzorów na rozwiązanie równania trygonometrycznego. Musimy go zamienić na równanie algebraiczne.

1.1. MODEL 1T (wzorcowy)

Podstawą modelu wzorcowego jest równość tego samego typu funkcji trygonometrycznych. Z równości odpowiednich funkcji wynikają równości ich argumentów, co w konsekwencji daje odpowiednie równanie algebraiczne.

1) $\sin W_1 = \sin W_2$

1*) $W_1 = W_2 + 2k\pi$ **lub** **2*)** $W_1 = \pi - W_2 + 2k\pi$

2) $\cos W_1 = \cos W_2$

1*) $W_1 = W_2 + 2k\pi$ **lub** **2*)** $W_1 = -W_2 + 2k\pi$

3) $tgW_1 = tgW_2 ; W_1 = W_2 + k\pi$

4) $ctgW_1 = ctgW_2 ; W_1 = W_2 + k\pi$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Argumenty w zależności od warunków zadania można wyrażać w mierze stopniowej lub łukowej.

Przykład 1a. Rozwiązać równanie: $\sin x = -\sin 5x$

Rozwiązanie: zamieniamy $-\sin 5x$ na $\sin(-5x)$ korzystając z nieparzystości funkcji $\sin x$ i otrzymujemy równanie wzorcowe $\sin x = \sin(-5x)$
Stosując wzory 1.1*) i 1.2*) otrzymujemy odpowiednie równania algebraiczne:

1) $x = -5x + 2k\pi$ lub 2) $x = \pi + 5x + 2k\pi$

z których znajdujemy rozwiązania równania.

Przykład 1b. Rozwiązać równanie: $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \cos(2x - \frac{\pi}{6})$
Rozwiązanie: korzystając ze wzorów redukcyjnych zamieniamy np.
$\sin(x + \frac{\pi}{3})$ na $\cos(\frac{\pi}{6} - x)$ i otrzymujemy równanie: $\cos(\frac{\pi}{6} - x) = \cos(2x - \frac{\pi}{6})$
Stosując wzory 2.1*) i 2.2*) otrzymujemy równania algebraiczne:

1) $\frac{\pi}{6} - x = 2x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub 2) $\frac{\pi}{6} - x = -2x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

z których znajdujemy rozwiązania zadania.

Uwaga: Jeżeli równanie ma postać: **f (W) = liczba** to zamieniając liczbę na funkcję odpowiedniego argumentu otrzymujemy zadanie wg modelu 1T. Oczywiście możemy w tym przypadku skorzystać wprost ze znajomości własności danej funkcji.

1.2. MODEL 2T

$a\sin W + b\cos W = 0$ **gdzie *a* i *b* są różne od zera**

Postacią tego modelu jest kombinacja liniowa funkcji sinus i cosinus tego samego argumentu przyrównana do zera.

Najprostszą (lecz nie jedyną) metodą rozwiązania tego typu równania jest **podzielenie** obu stron równania przez jedną z funkcji np. przez $\cos W$, otrzymując w ten sposób równanie z Modelu 1T typ 3 (lub 4). Należy z naciskiem podkreślić, że dzielenie to jest **w tym modelu dopuszczalne**, ponieważ żadna z funkcji nie może tu przyjmować wartości zerowej! Łatwo to uzasadnić, sprowadzając do sprzeczności.

Przykład 2. Rozwiązać równanie: $3\sin 6x - \sqrt{3}\cos 6x = 0$
Rozwiązanie: dzieląc np. przez $\cos 6x$ otrzymujemy równanie wzorcowe z modelu 1T

$tg 6x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i ze wzoru 1.1.3 otrzymujemy równanie algebraiczne

$$6x = \frac{\pi}{6} + k\pi \qquad \text{stąd} \qquad x = \frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{6}$$

Uwaga: W przypadku, gdy $a = b = 1$, można do równania wzorcowego przejść, też stosując wzory redukcyjne.

1.3. MODEL 3T

$a\sin W + b\cos W = c$ **gdzie *a*, *b*, *c* są różne od zera**

Najprostszym sposobem przejścia od Modelu 3T do modelu wzorcowego jest zastosowanie metody kąta pomocniczego. Polega ona na przyjęciu np. za $\frac{b}{a} = tg\varphi$ przy czym kąt φ może być w prostych przypadkach podany z pamięci, w innych przypadkach z tablic lub kalkulatora albo wyrażony przez funkcje odwrotne.

Zastosowanie tej metody sprowadza lewą stronę równania po łatwych przekształceniach do postaci:

$$a\sin W + b\cos W = \sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(W + \varphi)$$

a stąd otrzymujemy równanie wzorcowe:

$$\sin(W + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Uwagi:

1) Jeżeli c = 0 równanie należy do Modelu 2T.
2) Zarówno w Modelu 2T jak i w Modelu 3T lewa strona równania jest wielomianem jednorodnym, w którym $\sin W$ i $\cos W$ występują w pierwszych potęgach.

3) Jeżeli $a = b = c = 1$ równanie można też łatwo rozwiązać stosując odpowiednie wzory (patrz: Model 5T).

4) W modelu tym można za $\frac{a}{b}$ lub $\frac{b}{a}$ przyjąć zarówno $tg\varphi$ jak i $ctg\varphi$.
5) W każdym z tych przypadków sprowadzamy tego typu równanie do postaci podanej w modelu wzorcowym.
6) Do równania z tego modelu można też zastosować metodę podaną w Modelu 6T, ale trzeba się liczyć z wystąpieniem czasem bardzo uciążliwych rachunków (patrz uwagi do Modelu 6T).

Przykład 3. Rozwiązać równanie: $3\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{6}$

Jest to równanie typu z Modelu 3T. Najłatwiej można go rozwiązać stosując wzór na przejście z Modelu 3T do równania wzorcowego.

Podstawiamy np. za $\frac{\sqrt{3}}{3} = tg\varphi$, stąd otrzymujemy $\varphi = \frac{\pi}{6}$, stosując podany w modelu wzór (lub wykonując samodzielnie przekształcenia) otrzymujemy:

$$\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{stąd} \quad \sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{4}$$

a po zastosowaniu wzorów z Modelu 1T i rozwiązaniu równań algebraicznych otrzymujemy odpowiedź:

$$1) \quad x = \frac{\pi}{24} + k\pi \qquad 2) \quad x = \frac{7}{24}\pi + k\pi$$

Oczywiście można też, zamiast korzystać z gotowego wzoru przejścia do równania wzorcowego, zastosować przeliczenia, które umożliwiły otrzymanie tego wzoru.

Sposób ten jest zilustrowany na tym samym przykładzie poniżej.

$$3\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{6} \quad \text{podstawiamy} \quad \sqrt{3} = 3tg\varphi$$

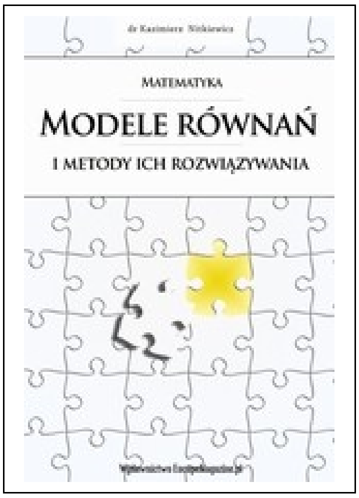
otrzymujemy:

$$3\sin 2x + 3tg\varphi\ \cos 2x = \sqrt{6} \quad \text{gdzie} \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

po prostych przekształceniach otrzymujemy jak poprzednio równanie wzorcowe:

$$\sin(2x + \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pełna wersja:



http://www.escapemagazine.pl/369674-modele-rownan-i-metody-ich-rozwiazywania